Invención de problemas matemáticos de enunciado verbal por estudiantes de básica secundaria

Carlos Alberto Zúñiga Zambrano

Universidad del Cauca

Nota del Autor

Carlos Alberto Zúñiga Zambrano, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación, Universidad del Cauca.

Informe final para optar por el título de Magister en Educación.

Director: Dr. Carlos Alberto Trujillo Solarte

La información concerniente a este documento deberá ser enviada a la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación, Universidad del Cauca, Cra. 2 # 3N-45, E-mail: zaramago7@gmail.com

Nota de aceptación

Dra. Vivian Libeth Uzuriaga Lòpez
Jurado externo

Dr. Jhon Jairo Bravo Grijalba
Jurado interno

Dr. Carlos Alberto Trujillo Solarte
Director

Popayàn, septiembre 2017

Agradecimientos

Gracias a Dios por tenerme vivo y poder cumplir mis sueños, y muchas gracias a los profesores Walter Castro, Yílton Riascos, Francisco Eduardo Enríquez, Luis Guillermo Jaramillo, Carlos Alberto Trujillo y Hernán Zúñiga, porque con sus enseñanzas inspiraron mi aprendizaje y encaminaron mi enseñanza. También a mis hijas Ana María y Ana Lucía, a mi esposa Rosana, que con su paciencia y acompañamiento demostraron el gran amor que me tienen.

Contenido

Índice de tablas

Índice de ilustraciones

Resumen

El ámbito de investigación en invención de problemas matemáticos en el campo de la Educación Matemática marca la diferencia en los emergentes estadios de indagación, tales como: el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, en la mejora de las actitudes hacia la matemática, como característica de la actividad creativa o talento excepcional, en la identificación de estudiantes con talento en matemáticas, en los procesos de resolución de problemas, para observar la comprensión matemática de los estudiantes, como herramienta de evaluación (Silver, 1994).

La invención de problemas como una ventana para observar la comprensión matemática de los estudiantes, es el ámbito de investigación de la actual propuesta. Basada en esta, las partes de la investigación se dividen en cuatro capítulos.

El capítulo uno, relaciona la importancia de la invención de problemas en Educación Matemática con los intereses particulares de la actual propuesta de investigación a través del objetivo general y de los específicos. Asimismo, presenta una descripción de los antecedentes del estudio, resaltando la influencia de dos trabajos de investigación en la modalidad de tesis de Doctorado y uno de Maestría.

En el capítulo dos, se describen los referentes teóricos que fundamentan la investigación, tales como la definición de problema matemático, la noción de problema aritmético de enunciado verbal (PAEV), la clasificación de los PAEV, las perspectivas de investigación en invención de problemas matemáticos e investigaciones en Problem Posing, (término acuñado en diferentes resultados de investigaciones en diferentes partes del mundo).

El capítulo tres, se muestran los referentes metodológicos y el diseño del estudio concentrándose en el tipo de investigación, sujetos del estudio, diseño del instrumento para la recolección de los datos, descripción del instrumento, procedimiento de aplicación del instrumento, transcripción de las producciones de los estudiantes, procesos de construcción de las categorías de análisis y las categorías que se emplearon.

Por último, el capítulo cuatro, muestra los resultados obtenidos de las invenciones de los estudiantes de Educación Básica de La Corporación Educativa de Occidente de la ciudad de Popayán, Colegio Los Andes, en relación a cinco componentes de análisis: sintáctico, estructura matemática, semántico, tipos de pensamiento matemático según el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y riqueza de los problemas.

Palabras clave: invención, problema matemático, diseño, componentes, pensamiento matemático.

Abstract

The scope of research into the invention of mathematical problems in the field of Mathematics Education makes the difference in the emerging stages of inquiry, such as: the development of mathematical thinking of students, in improving attitudes toward mathematics as a characteristic Of creative activity or exceptional talent, in identifying talented students in mathematics, in problem solving processes, in observing students' mathematical understanding as an evaluation tool (Silver, 1994).

The invention of problems as a window to observe the mathematical understanding of students, is the scope of research of the current proposal. Based on this, the parts of the research are divided into four chapters.

Chapter one, relates the importance of the invention of problems in Mathematics Education with the particular interests of the current research proposal through the general and specific objectives. It also presents a description of the background of the study, highlighting the influence of two research works in the PhD thesis modality and one Masters degree.

In chapter two, we describe the theoretical references that support research, such as the definition of a mathematical problem, the notion of arithmetic problem of verbal utterance (PAEV), the classification of PAEVs, research perspectives on the invention of mathematical problems And research in Problem Posing (a term coined in different research results in different parts of the world).

Chapter three shows methodological references and study design focusing on the type of research, subjects of the study, design of the instrument for data collection, instrument description, instrument application procedure, transcription of the productions of The students, construction processes of the categories of analysis and the categories that were used.

Finally, chapter four, shows the results obtained from the inventions of the Basic Education students of the Western Educational Corporation of the city of Popayán, Colegio Los Andes, in relation to five components of analysis: syntax, mathematical structure, semantic, Types of mathematical thinking according to the Ministry of National Education (MEN) and wealth of problems.

Keywords: invention, mathematical problem, design, components, mathematical thinking.

Capítulo uno. La investigación

Justificación de la investigación

Los estudiantes resuelven problemas en las clases de matemáticas cuando son propuestos por los profesores, existiendo, varias las formas para conocer la estructura de los conocimientos matemáticos de los niños. En relación con los pensamientos presentados en los estándares matemáticos (Ministerio de Educación Nacional, 2006) se desea proponer a los infantes que inventen sus propios problemas y de esta manera conocer, también, estas estructuras. A este respecto los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (Ministerio de Educación Nacional, 2006) establece parámetros dentro de cinco procesos generales de la actividad matemática, esto es, los estudiantes deben ser matemáticamente competentes para:

> Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros; formular distintos problemas, posibles preguntas y posibles respuestas que surjan a partir de ella y no como una actividad aislada y momentánea (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 51).

La invención de problemas lleva a "(…) la identificación de los componentes que constituyen un problema, el conocimiento del contenido matemático presente en el enunciado y la elección adecuada de la operación aritmética que soluciona el problema" (Ayllón, 2012). Luego, es pertinente motivar esta actividad en el aula de clases, pues proporcionará al estudiante, variadas oportunidades para aprender a resolver problemas. Además, los estudiantes que son capaces de inventar problemas matemáticos son buenos resolutores de problemas (Ayllón, 2012).

A pesar del gran esfuerzo por parte del profesorado para desarrollar el conocimiento matemático de los niños en los niveles de secundaria sexto, séptimo, octavo y noveno a través de la resolución de problemas, los resultados de las pruebas estandarizadas Saber 3, 5 y 9 en la Corporación Educativa de Occidente evidenciaron deficiencias en el área de matemáticas. Estas no mostraban con detalle las particularidades de las deficiencias, razón por la cual se creyó necesario profundizar en las características de las estructuras que podrían encontrarse en los problemas aritméticos planteados por los estudiantes de estos niveles. Problemas aritméticos puesto que la aritmética es la base de los otros pensamientos matemáticos y en estos niveles de educación porque el investigador de la actual propuesta es profesor de esos grados. Es por esto, que la población incluirá los grados de educación básica secundaria de la Corporación Educativa de Occidente de la ciudad de Popayán (Colegio Los Andes).

Puesto que los problemas planteados en estas pruebas, son estandarizados, se optó por la invención de problemas como herramienta para obtener información sobre las características de los problemas aritméticos planteados por los estudiantes de básica secundaria, además por ser una tarea que no están habituados a realizar y que los obliga a dar significado a situaciones especiales (semi-estructuradas), por tanto, esta intención conduce a la siguiente pregunta de investigación:

Pregunta de la investigación

¿Qué características presentan los problemas matemáticos de enunciado verbal elaborados por los estudiantes de educación básica secundaria de la Corporación Educativa de Occidente de la ciudad de Popayán (Colegio Los Andes)?

Objetivos

Objetivo general

Interpretar problemas matemáticos de enunciado verbal elaborados por los estudiantes de educación básica secundaria de la Corporación Educativa de Occidente de la ciudad de Popayán (Colegio Los Andes).

Objetivos específicos

- Propiciar situaciones que permitan a los estudiantes inventar problemas de enunciado verbal.
- Describir el contenido de los problemas de enunciado verbal inventados por los estudiantes.
- Caracterizar el contenido encontrado en los problemas de enunciado verbal inventados por los estudiantes.

Antecedentes del estudio

La invención de problemas matemáticos (IPM) como campo de investigación de la educación matemática, puede ser abordada desde diferentes ámbitos, al respecto Silver los clasifica como: (a) característica de la actividad creativa o de la capacidad matemática, (b) característica de una enseñanza orientada a la indagación (¿Qué pasaría si no?), (c) característica de la actividad matemática, (d) un medio de mejorar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas, (e) una ventana para observar la comprensión matemática de los estudiantes, (f) medio para mejorar la disposición de los estudiantes hacia las matemáticas (intereses, actitudes, motivación,…) (Silver, 1996).

La invención de problemas como una ventana para observar la comprensión matemática de los estudiantes, es el propósito de esta investigación. Para esta intención se tomaron como referentes a tres investigaciones:

La primera, se concentró en:

> Caracterizar la capacidad matemática de un grupo de estudiantes considerados con talento matemático ante tareas de invención de problemas, con base en algunas variables relacionadas con estructuras como la sintáctica, semántica y matemática; así mismo establecer, si las hay, diferencias con respecto a los problemas inventados por un grupo estándar de un colegio público en dichas variables (Espinoza, 2011).

Para esto, propuso diseñar dos situaciones o tareas de invención de problemas aritméticos adecuados, tanto para los estudiantes con talento como para los del grupo estándar. Permitiendo de esta manera observar, de forma exploratoria, el uso de la IPM como instrumento para hacer una caracterización de estudiantes con talento en matemática y como característica de la actividad creativa (Silver, 1996). La metodología para la investigación es de tipo exploratorio, corresponde a un primer acercamiento al estudio de la invención de problemas aritméticos (IPA) por estudiantes considerados con talento en matemática y su comparación con un grupo de estudiantes de un colegio público. Los resultados obtenidos revelan que los estudiantes con talento inventaron una gran cantidad de problemas no resolubles, mientras que los estudiantes del grupo estándar fueron menor con respecto a la cantidad de problemas resolubles. Además, los enunciados del grupo talento conservan más de cinco proposiciones, en la gran mayoría, asimismo, emplean números naturales y en menor proporción números racionales.

Otra conclusión a la que llegó Espinoza en su investigación (2011), a la que llegaron en la investigación de Espinoza (2011) fue que existen diferencias notables en cuanto a la cantidad de procesos implicados en los problemas resolubles y no resolubles.

El principal objetivo que tuvo la tesis de doctorado de la profesora Ayllón B. María F. (2012) es el de indagar en los procesos de invención y resolución de problemas que realizan estudiantes de educación primaria. Fue un estudio exploratorio y confirmatorio, con un diseño mixto que incluye dos etapas con enfoques diferentes, una centrada en la encuesta y otra en una prueba, como herramientas de recolección de datos, en estudiantes de educación primaria (grados de primero a sexto; en la primera etapa se inició con 139 estudiantes y se terminó con 27 seleccionados intencionalmente, en la segunda etapa, participaron 351 estudiantes, también intencionalmente). Las conclusiones de esta investigación, giraron alrededor de estudiar los procesos de invención y resolución de problemas que realizan estudiantes de educación primaria, en particular sobre el tipo de producciones que proporcionaron los estudiantes como respuesta a la tarea de inventar problemas en base a su coherencia, originalidad y estructura operatoria, luego arrojaron los siguientes resultados:

- Coherencia de los enunciados: no todos los enunciados inventados por los alumnos incluían los elementos necesarios para poderlos identificar como un problema, siendo la causa más frecuente la falta de una historia verosímil.
- Originalidad de las producciones: se observaron en los enunciados inventados que la gran mayoría se podrían encontrar en los libros de texto escolares.
- Estructura operatoria: en los problemas inventados por los alumnos en las entrevistas ha predominado ligeramente la estructura multiplicativa. Los alumnos de primero inventan solamente problemas aditivos, en segundo inventaron problemas multiplicativos, en tercer curso utilizan la estructura aditiva más que la multiplicativa, a partir de cuarto curso utilizan solamente la estructura multiplicativa y desde quinto en la mitad de los enunciados se combinan la estructura aditiva con la multiplicativa. Después de la segunda recogida (etapa de confirmación) se observa que a medida que avanzan los cursos, gradualmente la invención de problemas combina las dos estructuras operatorias.
- Estructura semántica: en la primera muestra, cuando inventaron problemas aditivos, lo hicieron principalmente de la categoría semántica de cambio. La estructura semántica de comparación únicamente aparece una vez en un problema simple y la de combinación otra vez en uno compuesto. No inventan ningún problema aditivo de igualación. Los datos confirmatorios refutan algunos de los exploratorios, los alumnos de educación primaria inventan principalmente problemas aditivos de cambio, pero también utilizan el resto de las categorías semánticas en sus invenciones. Sí se confirma que en los problemas multiplicativos predominan las categorías de tasas y de grupos iguales de partición, independientemente del número de etapas del problema.

Otras de las conclusiones a las que llegó Ayllón B. (2012), fueron con respecto al número de preguntas y número de operaciones involucradas en la resolución de las invenciones.

El último de los antecedentes considerado en esta investigación es, en la que se dedican a estudiar la actuación aritmética de 14 niños de entre 6 y 13 años, cuando resuelven tareas de invención de problemas a partir de una situación cotidiana de compraventa. Fue a través de enunciados propuestos por los estudiantes y la resolución de los mismos que intentaron descubrir la coherencia global del enunciado, la utilización de datos numéricos, las relaciones que se establecen entre ellos, la identificación del tipo de problema inventado y los procedimientos propuestos para solucionarlos (Cázares, 2009).

La metodología de la investigación de Cázares fue descriptiva y cualitativa, en cuanto al diseño, se les aplicó un cuestionario que estaba formado por 4 folios y 11 tarjetas con recortes de publicidad de lápices, refrescos, leche, cuadernos, mochilas, duraznos, uvas, plátanos, colores y el dibujo de una cancha de básquetbol. Cada ilustración contiene datos numéricos sobre la calidad, precio, descuento y medida de los objetos en cuestión. Se les pidió a los estudiantes seleccionar 4 tarjetas e inventar un enunciado donde utilizaran uno o varios procedimientos de resolución y respondieran varias preguntas sobre la calidad del enunciado y la validez y comprobación de sus respuestas.

El análisis de los resultados se definió en cinco categorías junto con una escala de evaluación que consta de cinco valores distintos (1 a 5). Las cinco categorías son: (a) la coherencia global, (b) estructura semántica, (c) la utilización de los datos numéricos que aparecen en la imagen, (d) la coherencia de las operaciones con la estructura del problema y (e) la justificación sobre la validez del procedimiento de resolución.

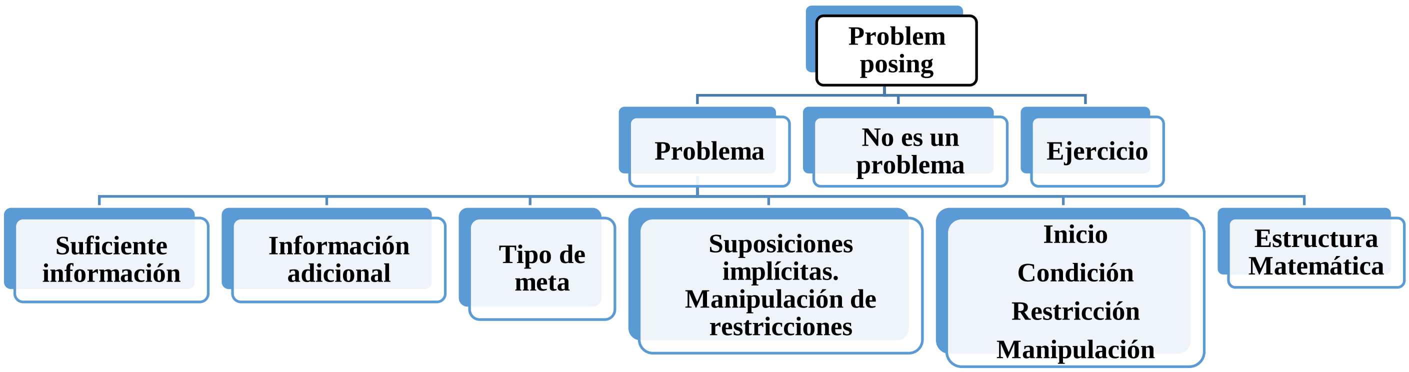
Investigaciones en Problem Posing

Los siguientes enunciados muestran los resultados de investigaciones:

"Análisis de problemas planteados por profesores de escuela media y secundaria"

En el primer estudio se identifican los tipos de problemas que plantean maestros de escuela media (Middle School), específicamente en dos formas de planteamiento de problemas: la generación de problemas a partir de problemas abiertos basados en informaciones dadas, como restricciones y suposiciones adicionales pero que deben mantener el mismo conjunto original de información y la reformulación de problemas que incluye cambiar o extender el contexto. Como objetivos principales están: (a) identificar problemas planteados por los profesores a partir de informaciones dadas (llamados abiertos); (b) identificar problemas planteados por los profesores a partir de otros; (c) determinar la influencia que tienen los antecedentes y experiencia de los docentes en la formulación de problemas; (d) determinar la existencia o no de diferencias entre las dos formas de planteamiento de problemas. En la siguiente ilustración se puede encontrar el esquema de clasificación de las respuestas producidas por la vía de la generación de problemas. Por ejemplo, si el problema planteado contiene suficiente información para ser solucionado; si tiene estructura matemática, refiriéndose con esto al marco de referencia del problema; al tipo de metas, en cuanto a que las restricciones se mantienen sin cambios enfocándose en generar objetivos generales o específicos; el cambio de una condición inicial dada; la manipulación de los supuestos implícitos y de las restricciones iniciales; información adicional a la inicial.

Ilustración 1. Esquema de clasificación de las respuestas producidas por la vía de la generación de problemas.



Descripción de las características de los problemas

Suficiente información: el problema contiene información suficiente para ser utilizada en el problema planteado.

Estructura matemática: se refiere a lo invisible, a la tarea del problema, por ejemplo, un sistema de ecuaciones.

Tipo de meta: las restricciones no cambian y se centra en generar metas, generales o específicas.

Inicio Condición Restricción Manipulación: se cambia una condición inicial dada.

Suposiciones implícitas. Manipulación de restricciones: se cambia una restricción.

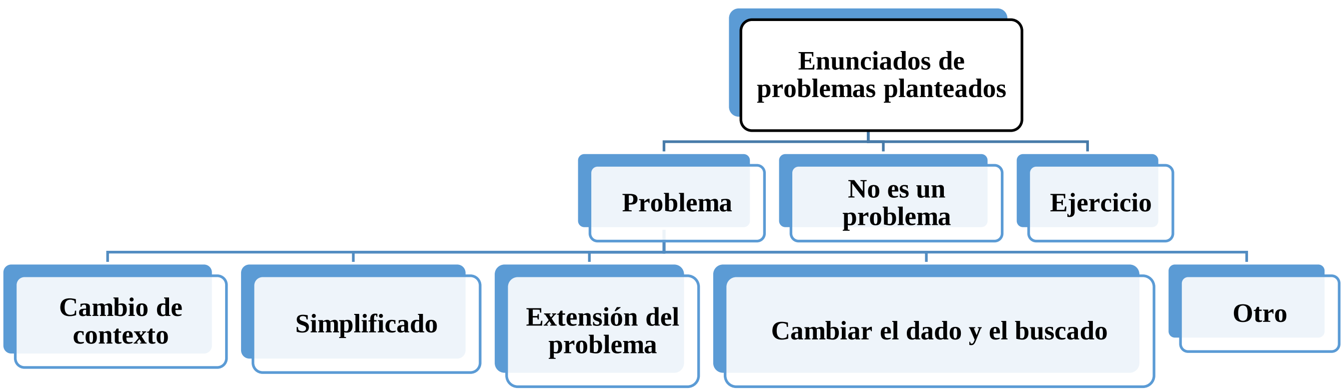
Información adicional: información que se ha agragado a la inicial.

A continuación, se puede encontrar el esquema de clasificación de los problemas producidos a través de la reformulación de problemas. Las producciones se clasifican en: problemas donde la estructura matemática se conserva, pero el contexto se cambia; problemas que son más fáciles de resolver, teniendo la misma estructura temática que el problema original; del problema planteado se extiende a una versión generalizada del problema original; los problemas en los que se intercambian la información dada con la deseada, como, por ejemplo:

Dado que en una fiesta se dan 10 apretones de manos, ¿cuántas personas se dan la mano?", "dado que cinco personas están en una fiesta, ¿cuántos apretones de mano tienen lugar, si todos se estrechan la mano?

Otra clasificación tiene que ver con que el problema planteado incorpora dos o más del tipo de problemas relacionados, el cambio de contexto y el simplificado. El problema planteado es equivalente al problema original, pero la redacción se ha cambiado sin cambiar la estructura o intención del problema.

Ilustración 2. Esquema de clasificación de los problemas producidos a través de la reformulación de problemas.



Descripción de las características de los problemas

Cambio de contexto: la estructura matemática invisible del problema sigue siendo la misma, cambiando el contexto del problema.

Simplificado: configuración del problema no ha cambiado. El problema es diferente en el sentido de que el problema planteado es más fácil de resolver que el original, pero tiene la misma estructura matemática que el original.

Extensión del problema: la configuración original del problema permanece sin cambios. El problema planteado se extiende a menudo añadiendo suposiciones o restricciones, o planteando la versión generalizada del problema original planteado.

Cambiar el dado y el buscado: la información dada y la información deseada se cambian en el problema planteado. Por ejemplo, "dado diez apretones de manos en una fiesta, cuántas personas se convierten en" dado que cinco personas están en una fiesta, cuántos apretones de manos tienen lugar "dado que cada uno sacude la mano del otro.

Combinación: el problema planteado incorpora dos o más de los tipos de problemas relacionados, esto es, el cambio de contexto y el simplificado.

Otros: el problema planteado es equivalente al problema original, pero la redacción se ha cambiado sin cambiar la estructura o la intención del problema.

Capítulo dos. Referentes teóricos

Definición de problema matemático

Puesto que este trabajo hace referencia al planteamiento de problemas matemáticos, se hace necesario definir lo que ello representa. Un problema matemático consiste en la decodificación de los símbolos escritos y en la conversión del enunciado matemático en una representación mental. En dicha representación intervienen, a su vez, dos subprocesos: (a) la traducción del problema o paso de cada oración a una representación mental; (b) la integración o combinación de la información disponible en un esquema coherente (Mayer, 1991).

Los problemas matemáticos según Resnick (1987) exigen un pensamiento matemático de alto nivel, esto es: características no algorítmicas en el sentido de que el camino para la acción no está completamente especificado con anterioridad, es complejo en tanto que el camino total no es visible desde un punto de vista, con frecuencia da lugar a múltiples soluciones, hay incertidumbre puesto que en principio no se conoce todo lo que se requiere para desarrollar la actividad, se requieren mecanismos propios de regulación (heurísticas) y se requiere gran cantidad de trabajo mental con el propósito de desarrollar las estrategias y los criterios involucrados. Asimismo, Callejo (1994), señala que un problema es una situación cuya solución no es inmediatamente accesible al sujeto dado que no cuenta con un algoritmo que la resuelva de manera inmediata, esto implica que es un concepto relativo al sujeto que intenta resolverlo.

Por último, esta investigación adoptará la noción que señala la existencia de cinco componentes que debe incluir una situación para ser considerada un problema matemático: una proposición (enunciado oral o escrito), unos datos conocidos (una intención), movilizar una o más personas para que lo resuelvan (una meta), llegar a un resultado y a un proceso (modo de actuación para alcanzar el resultado) (Castro, 1991).

Noción de problema aritmético de enunciado verbal (PAEV)

Un problema aritmético de enunciado verbal en el ambiente escolar se definirá por partes y se construirá la noción de PAEV. En el enunciado, la información que se ofrece es de tipo cuantitativo, pues los datos suelen ser numéricos y la pregunta se refiere a la determinación de una o varias cantidades. La resolución del problema es, en muchas ocasiones realizar una o varias operaciones. Verdadero problema en matemática; es cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra situación (De Guzmán, Miguel. 1991). Este último autor es uno de los referentes bibliográficos de los Lineamientos Curriculares para Matemáticas en los que se identifican las situaciones problemáticas, como ambientes de aprendizaje enriquecidos que posibilitan avanzar a niveles de competencia más y más complejos (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Por otro lado, una situación problemática procede de la vida diaria, de las Matemáticas y de otras ciencias para de esta manera poner en práctica lo aprendido. Es común observar que este tipo de trabajo con “problemas de aplicación”, que representan lo que más bien parece una reconstrucción de definiciones hechas por Polya y Schoenfeld (Lineamientos Curriculares, 1998), se posterga para el final de una unidad o para el final del programa, deduciendo que se suele omitir por falta de tiempo. A este respecto Miguel de Guzmán plantea que:

> La enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces (2006, pág. 122).

> La propuesta de Miguel de Guzmán va más allá, pues considera que el estudiante debe manipular los objetos matemáticos; (…); que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana; que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia (Guzmán, 1993, pág. 111).

El autor refiere la importancia de trabajar a partir de situaciones problema en el proceso de enseñanza de las matemáticas, y en particular observa la necesidad de comprometer al estudiante en la construcción de su propio conocimiento, aspecto en el que la presente investigación está de acuerdo y considera que la invención de problemas a partir de una situación estructurada y otra semi-estructurada (Stoyanova, 1996) será la oportunidad para manipular objetos matemáticos. Así mismo, este autor menciona la importancia de las situaciones problemáticas como contexto:

> Porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas; porque el mundo evoluciona muy rápidamente; los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos; porque el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo; porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas; porque es aplicable a todas las edades (1991, pág. 123).

Además, motiva al estudiante a crear sus propios problemas poniendo en contacto sus saberes previos y permitiéndole practicar en la formulación de problemas por sí mismos (NCTM, 1989).

Los problemas aritméticos verbales se incluyen en el currículo escolar con la finalidad, entre otras, de facilitar al estudiante un acercamiento entre aritmética y realidad, entre aritmética y aplicaciones a la vida real, lo que hace significativo y valioso su estudio (Castro, 1994).

Al respecto de los objetivos de la aritmética escolar, se considera que:

El fin de la aritmética (escolar) es desarrollar el conocimiento de las relaciones cuantitativas y la habilidad para resolver los problemas relativos a los números y la cantidad que se presentan en las transacciones ordinarias de la vida. Naturalmente, la aritmética no se estudia únicamente por saber aritmética, ni por la disciplina mental derivada de su estudio, sino por su aplicación en ciertas actividades esenciales de la vida. Cuánto más conocimiento tiene el alumno de estas actividades y de los objetos con que trata la aritmética, más significativa y valiosa le resulta la materia (Reed, 1949, p. 301).

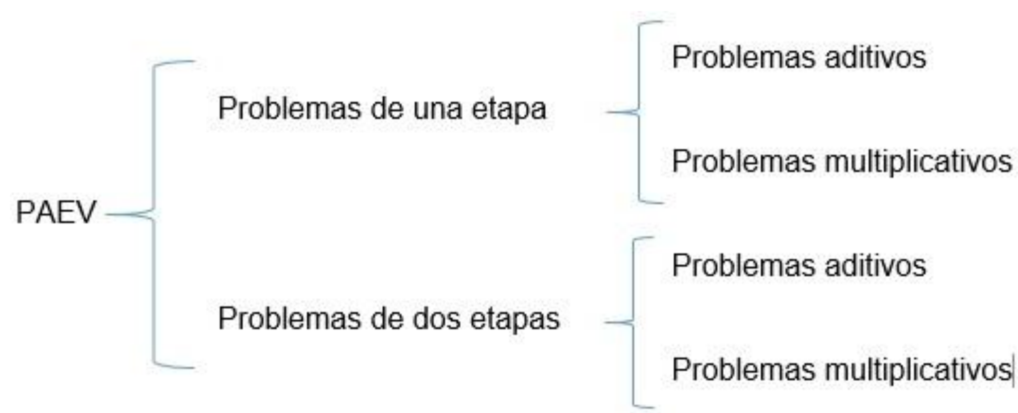
He aquí otra razón para considerar que los problemas aritméticos deben estar presentes en la formación matemática de los alumnos, pues a través de estos pueden contextualizar y comprender los conceptos matemáticos. La evidente relación que se empieza a crear con los enunciados aritméticos frente a los contextos y las acciones de los estudiantes podría favorecer la identificación de la situación descrita en los problemas, además, de las relaciones de los datos y las incógnitas.

Este tipo de problemas suelen ser con números muy pequeños o números muy grandes que obligan a realizar operaciones, hecho que en su momento fue estudiado (Knight y Behrens, 1928). Investigadores encontraron que el resultado entre más grande, el problema es más difícil, por ejemplo, a este respecto se puede consultar a Aschraf (1982, 1983), Baroody (1988), Groen y Parkman (1972). Incluso las estrategias que pongan en juego pueden estar influenciadas por el tamaño de los sumandos (Vergnaud, 1991). El empleo de números muy pequeños o grandes tiene grandes implicaciones en los PAEV, pues los resultados colocan al alumno a elegir una operación u operaciones sin necesidad de realizar cálculos, identificando de esta manera el desconocimiento del cálculo o una mala elección de la operación.

Clasificación de los PAEV

En la búsqueda de cómo los autores clasifican los PAEV, se encontró, por ejemplo: Carpenter, Hiebert y Moser (1981), Carpenter y Moser (1982), Nesher (1982), Nesher, Greeno y Riley (1982) y Vergnaud (1982, 1991), entre otros, quienes han trabajado en los aspectos semánticos del problema. Esto es, el significado de los conceptos y relaciones implicadas en el problema. Otros autores han trabajado en la estructura operatoria, en particular la aditiva, como, por ejemplo: Bermejo, Lago y Rodríguez (1998), Briars y Larkin (1984), Caballero (2005), Carpenter et al (1981), Carpenter y Moser (1982, 1983, 1984), Heller y Greeno (1979), Nesher (1980, 1982), Nesher et al (1982), Puig y Cerdán (1988), Vergnaud (1982, 1997), entre otros. En cuanto a la estructura multiplicativa señalamos los trabajos de Anghileri (1989), Bell, Creer, Grimison y Mangan (1989), Brekke (1991), Castro y Castro (1997), Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985), Huinker (1989), Kouba (1989), Levain (1992), Luke (1988), Nesher (1988), Peled y Nesher (1988), Puig y Cerdán (1988), Schwarz (1981, 1988) y Vergnaud (1983, 1988).

Ilustración 3. Estructura de los problemas aritméticos de enunciado verbal. Construcción propia.



Todos estos trabajos atañen a dificultades encontradas en estudiantes resolutores, asimismo en jerarquizar los problemas atendiendo a su dificultad. Estas clasificaciones están dadas alrededor de PAEV de estructura aditiva debida a su estructura semántica, al igual PAEV de estructura multiplicativa debida a su estructura semántica. A su vez, los PAEV de estructura aditiva conforman cuatro categorías, estas son: cambio, combinación, comparación e igualación (Heller y Greeno, 1979); en los PAEV de estructura multiplicativa se encontró con que las clasificaciones semánticas no están tan claramente establecidas. Puig y Cerdán (1988) realizan una clasificación de los problemas multiplicativos a partir de la presentada por Vergnaud (1983) añadiendo una nueva categoría: isomorfismo de medidas, comparación multiplicativa y producto de medidas. A continuación, se explican cada una de las clasificaciones, las mismas ayudarán al estudio de los problemas de palabras inventados por los estudiantes participantes en esta investigación.

Problema aritmético de enunciado verbal de una etapa

Un PAEV de una etapa o simple es un enunciado que permite, bajo ciertas condiciones, determinar cierta cantidad a partir de otras que son conocidas, asimismo hay siempre dos datos (al menos en su enunciado típico) requiriendo solamente el uso de una operación aritmética (Puig y Cerdán, 1990), en cambio para los problemas que requieren más de una operación son llamados compuestos o de varias etapas, en los que habrá la necesidad de contemplar al menos tres componentes: qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué orden (Puig y Cerdán, 1990). Además, carecen de recursos algebraicos para ser resueltos. En esta investigación se decide que un problema es aritmético, siempre y cuando los conceptos, conocimientos o recursos no estrictamente aritméticos aparecidos en los enunciados no sean determinantes a la hora de resolver un problema (Puig y Cerdán, 1988). Por lo tanto, esta investigación se delimitará a la descripción y análisis de los conocimientos matemáticos de los problemas inventados por los estudiantes.

Un ejemplo del tipo aditivo de una etapa es:

Un ascensor está en el segundo piso y se dirige al quinto. ¿Cuántos pisos tiene que subir?

Y multiplicativo de varias etapas:

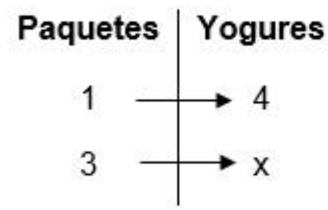
En una tienda hay 147 cajas de pinturas. En cada caja hay 10 estuches de pinturas. Si en cada estuche hay 8 pinturas, ¿cuántas pinturas hay en la tienda?

Variables de estudio en los problemas aritméticos de enunciado verbal de una etapa

Para hacer el análisis de este tipo de problemas es de reconocer lo planteado por Nesher (1982, Pág. 28), que establece en su modelo de análisis tres componentes: "el componente semántico, el componente sintáctico y el componente matemático".

Existen, por lo tanto, varias categorías de análisis de "una etapa" (Puig y Cerdán, 1988) que varían según los autores y que se deducen del análisis global del significado del texto. Como lo establecieron inicialmente Heller y Greeno (1978), en cuanto a tres categorías semánticas: cambio, combinación y comparación, posteriormente, dicha clasificación fue ampliada para incluir problemas de igualación (Carpenter y Moser, 1983) que estaría ubicada en los problemas complejos de estructura multiplicativa, junto con las estructuras multiplicativas que describe Vergnaud: isomorfismo de medida y producto de medidas. También se pueden encontrar las mismas categorías de análisis para problemas de varias etapas. La siguiente clasificación la establecen Puig y Cerdán (1988) en cuanto a los problemas de estructura multiplicativa:

Isomorfismo de medidas: estos problemas se relacionan con dos grandes categorías multiplicativas; la multiplicación y la división. La primera gran forma de relación multiplicativa es una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son mediadas de un cierto tipo, y el resto son medidas de otro tipo, por ejemplo; “Tengo tres paquetes de yogur. Hay cuatro yogures en cada paquete. ¿Cuántos yogures tengo?” (Vergnaud, 1983). Construcción propia.



Producto de medidas: es llamado a resolver problemas de áreas, volúmenes, productos cartesianos directos o problemas combinatorios, pues contiene tres magnitudes, de manera que una de ellas es el producto cartesiano de las otras dos. Por ejemplo; 3 muchachos y 4 muchachas quieren bailar. Cada muchacho quiere bailar con cada muchacha y cada muchacha con cada muchacho. ¿Cuántas parejas posibles hay?

Tipos de pensamiento matemático del Ministerio de Educación Nacional

Este título hace referencia al pensamiento geométrico, variacional, aleatorio, métrico y numérico que el Ministerio de Educación Nacional establece. A continuación, se describen los pensamientos:

Pensamiento numérico y sistemas numéricos

Cuando se está interesado en ir de compras a un supermercado o a un centro comercial, resalta la importancia de la aritmética, pues es a través de ella, que podemos hacer nuestras cuentas y no salir perjudicados. El estudio de los números a través de distintas propuestas ha cambiado la forma de ver el entorno, pero lo que no ha cambiado es la necesidad de resolver problemas de la vida diaria que exigen el uso de la aritmética. Hoy en día el estudio se ha concentrado en el desarrollo del pensamiento numérico por medio de los sistemas numéricos, ya que valiéndose de ellos es que los estudiantes tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos.

El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los estudiantes manipulen los sistemas numéricos en su vida diaria. Un sistema numérico es un conjunto de reglas y símbolos que combinados adecuadamente facilitan el conteo de colecciones formadas por muchos objetos que a su vez permitan ser guardados de forma duradera, accesible y ocupando poco espacio (Díaz y Batanero, 2003). Los sistemas de numeración actuales son: escrito (decimal), oral y oral ordinal. El sistema de numeración escrito es el que conocemos como sistema en base diez, aquel que utiliza los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. El oral es un sistema multiplicativo, de base 10 con irregularidades que dependen del idioma y en castellano son las siguientes:

- Once, doce, trece, catorce y quince. En un sistema regular se diría: diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro y diez y cinco.
- Veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa. En un sistema regular se diría: dos dieces (o dos decenas), tres dieces, cuatro dieces, etc.

Y por último el oral ordinal, que es también un sistema en base 10 usado para nombrar a los ordinales, por ejemplo; los símbolos de este sistema de numeración son los siguientes: primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo, undécimo o décimo primero. El uso de los sistemas numéricos hace que los estudiantes realicen operaciones, desarrollen habilidades en la solución de algún problema de la vida cotidiana. La invención de alguna operación hace gran relevancia en aspectos del pensamiento numérico tales como la descomposición, recomposición, y la comprensión de propiedades numéricas (Díaz y Batanero, 2003).

Algunos aspectos importantes en el desarrollo del pensamiento numérico son: la comprensión de los números y de la numeración, la comprensión del concepto de las operaciones, y por último los cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones (suma, resta, multiplicación y división).

Comprensión de los números y de la numeración. La comprensión de los números parte de lo que el estudiante construye a través de sus experiencias en la vida cotidiana teniendo como base actividades como contar, agrupar y el uso del valor posicional. Las etapas para el desarrollo del pensamiento numérico que pretenden los lineamientos curriculares son:

- Como secuencia verbal
- Para contar
- Para expresar una cantidad de objetos o como cardinal
- Para medir
- Para marcar una posición o como ordinal
- Como código o símbolo
- Como una tecla para pulsar

Comprensión del concepto de las operaciones. Los aspectos básicos que según varios investigadores (NCTM, 1989; Dickson, 1991; Rico, 1987; Mcintosh, 1992) se pueden tener en cuenta para construir el significado de las diferentes operaciones y que pueden dar pautas para orientar el aprendizaje de cada operación, tienen que ver con:

- Reconocer el significado de la operación en situaciones concretas, de las cuales emergen.
- Reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones.
- Comprender las propiedades matemáticas de las operaciones.
- Comprender el efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones.

Cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones. Se puede encontrar hoy en día artículos tecnológicos que facilitan las operaciones con cualquier tipo de números, pero que nos obliga a repensar que la adquisición de destrezas no debe ser el objetivo primordial de la educación. Hoy en día nos estamos interesando por cálculos mentales, aproximaciones y estimaciones. "La finalidad de los cálculos es la resolución de problemas. Por lo tanto, aunque el cálculo sea importante para las matemáticas y para la vida diaria, la era tecnológica en que vivimos obliga a replantear la forma en que se utiliza el cálculo hoy día. Hoy casi todos los cálculos complejos los hacen las calculadoras y los computadores. En muchas situaciones de la vida diaria, las respuestas se calculan mentalmente o basta con una estimación, y los algoritmos con lápiz y papel son útiles cuando el cálculo es razonablemente simple" (NCTM, 1989, pág. 201).

A continuación, se muestran los estándares en que son evaluados los estudiantes en el pensamiento numérico y que servirán para describir y clasificar el contenido matemático.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos

Desde el punto de vista de la historia de las matemáticas en Colombia, las "matemáticas modernas" dejaron de lado el estudio de la geometría. Ya desde el punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera estrictamente necesario el estudio de la geometría. De hecho, algunos autores consideran al pensamiento espacial como una inteligencia (Gardner H., 1983). Por lo tanto, se ve la necesidad de desarrollar el aprendizaje de este pensamiento, pues el manejo de la información espacial es ineludible en profesiones técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, y disciplinas científicas como la química, la física y las matemáticas. Los sistemas, en este caso geométricos, igual que para el pensamiento numérico sirven para desarrollar el pensamiento geométrico, pues son un conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan objetos del espacio. Es por esto que los sistemas geométricos se edifican con el diario trasegar de los objetos en reposo y en movimiento, de las representaciones en 2D o en 3D, o razonando sobre sus propiedades y características. La geometría activa es llamada a favorecer los procesos de construcción del pensamiento geométrico, pues se trata de hacer cosas, "de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna" (Ministerio de Educación Nacional, 2006)

Pensamiento métrico y sistemas medidas

El pensamiento métrico requiere del desarrollo de los sistemas de medidas (sistema internacional de unidades, sistema métrico decimal, sistema CGS de unidades y demás), pues las actividades de la vida diaria nos obligan a estar constantemente midiendo y representando esas medidas con unidades de variados orígenes y en diferentes contextos. Construir conceptos de cada magnitud, comprender procesos de conservación de magnitudes, estimar magnitudes a partir de algunas asignaciones numéricas y seleccionar unidades de patrones y de instrumentos son conceptos y procedimientos que servirán para desarrollar el pensamiento métrico.

Pensamiento aleatorio y sistemas de datos

La constante necesidad de darle explicación a fenómenos que aparentan ser caóticos y que terminan siendo regidos por el azar, además del tratamiento de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la psicología, la antropología o la lingüística, hace que, en la actualidad, todos los currículos en matemáticas favorezcan el pensamiento aleatorio. Los sistemas de datos sirven para desarrollar el pensamiento y dadas las características de los conjuntos de datos se vuelven estos, en sistemas de datos.

El pensamiento aleatorio en los cursos de educación básica está caracterizado por la identificación de la aleatoriedad y la incertidumbre tanto en forma cuantitativa como cualitativa de las representaciones gráficas circulares, histogramas y diagramas de árbol, asimismo, como el estudio de conceptos y métodos.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

En muchas ocasiones encontramos poca o demasiada información para dar con una posible conclusión. En este momento, la organización de esta información en tablas puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional, pues a través de procesos aritméticos controlados desembocaremos en variables y fórmulas de generalización. Otra estrategia para desarrollar el pensamiento es el estudio de los patrones, en actividades de la vida diaria que estén rodeados de escenarios geométricos y numéricos. En cuanto a los sistemas algebraicos nos encontraremos con un conjunto de símbolos que nos ayudarán a resolver situaciones problemáticas específicas.

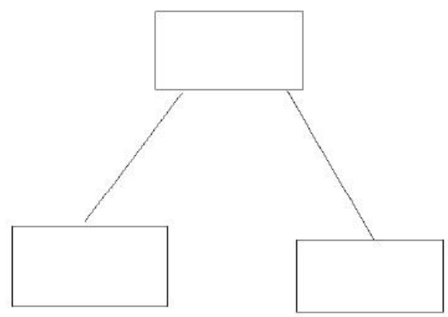
Problemas aritméticos de enunciado verbal de más de una etapa y variables de estudio

Estos problemas aritméticos de enunciado verbal (o llamados también problemas verbales, Castro M, 1994) se subdividen en aritméticos de una y de dos etapas, y cada una de estas clasificaciones en aditivas y multiplicativas. Aquellos problemas cuyas soluciones implican sumas y restas ($(+,+), (+,-), (-,+), (-,-)$) solamente se llaman problemas aditivos de una etapa y las categorías semánticas empleadas son las denominadas cambio (Ca), combinación (Co), comparación (Cp) e igualación (Ig). Si se atienden las posibilidades que ofrecen estas cuatro estructuras en los problemas de dos etapas, encontramos 16 opciones, esto es, el siguiente esquema muestra las combinaciones de todas las posibilidades:

$$(Ca,Ca);(Ca,Co);(Ca,Cp);(Ca,Ig); \qquad (Co,Co);(Co,Ca);(Co,Cp);(Co,Ig);$$
$$(Cp,Cp);(Cp,Ca),(Cp,Co);(Cp,Ig) \qquad (Ig,Ig);(Ig,Ca);(Ig,Co);(Ig,Cp)$$

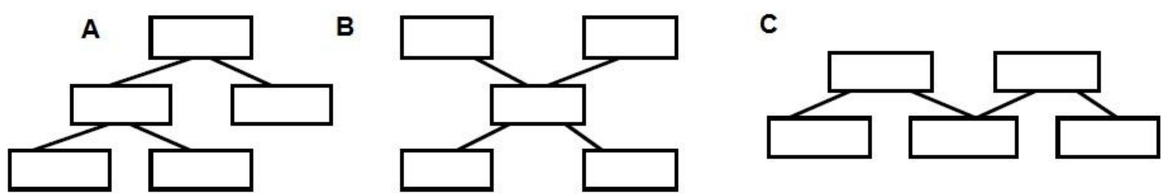
Para realizar el análisis de este tipo de estructuras Nesher (1991) utiliza el siguiente esquema:

Ilustración 4. Esquema para el análisis de las estructuras de problemas de una etapa, por Nesher (1991).



En donde los rectángulos inferiores representan las cantidades que se operan y el rectángulo superior el resultado de la operación. Este mismo autor, considera que existen tres posibilidades para los esquemas de los problemas de dos etapas:

Ilustración 5. Esquema para el análisis de las estructuras de problemas de dos etapas, por Nesher (1991).



En el caso A, el resultado de una operación es un dato para la otra operación; en el caso B, las dos operaciones comparten un resultado y en el caso C las dos operaciones comparten un dato. La delimitación que hace Nesher (1976) establece tres variables para el estudio de problemas aritméticos de dos etapas:

- Semántica (palabras clave, Castro M., 1994)
- Operaciones
- Estructura ordenada de las operaciones

Para la estructura semántica de los problemas de dos etapas partimos del supuesto que existen dos relaciones simples con un nodo en común. Dicho de otra manera, en el enunciado de los problemas de dos etapas, cada etapa del problema corresponde a una relación entre tres datos, uno de los cuales es compartido y está latente en el problema. Cada una de estas relaciones por separado las encontramos en los problemas aritméticos verbales de una etapa. Por ende, en un problema verbal de dos etapas la estructura semántica se encuentra tanto en la primera relación como en la segunda. Las categorías semánticas empleadas son las mismas que se utilizaron para los problemas verbales de una etapa (cambio, comparación, combinación e igualación).

Las operaciones entre números naturales producen efectos contrapuestos. Es decir, la operación de sumar un número a otro produce un aumento del dato inicial, mientras que al restar un número de otro el resultado es una disminución. En cada una de las etapas hay incluida una relación de aumento o disminución por lo que se presentan cuatro posibilidades para las relaciones.

Ilustración 6. Esquema para analizar cada etapa en cuanto a la relación de aumento o disminución.

Primera relación

Segunda relación

	Aumento	Disminución
Aumento	(A,A)	(A,D)
Disminución	(D,A)	(D,D)

Desde la perspectiva que se describe aquí la forma de cómo es el enlace entre las relaciones que conforman el problema compuesto (Castro, 1998), es el tercer factor importante en la clasificación de los problemas aritméticos de dos etapas. En un problema de dos etapas hay al menos dos relaciones comparten una cantidad como, por ejemplo: María tiene 12 sellos de Francia y 7 de España. Compra 16 sellos de Grecia ¿cuántos sellos tiene en total? (es una relación de aumento, aumento).

Calidad de las respuestas en tres pasos. El primero de ellos es la clasificación de cada respuesta como un problema matemático o no; cada problema matemático en creíble o no creíble y aquellos que fueron clasificados como creíbles si tenían o no la suficiente información para su respectiva solución (Leung y Silver, 1997).

Complejidad de los problemas planteados. Se refiere a la sofisticación de las relaciones matemáticas inmersas en los problemas, pues problemas que presentan relaciones entre dos o más cantidades son generalmente, aunque no siempre, más complejos que aquellos que implican solo una. De igual forma aquellos problemas que conllevan relaciones de multiplicación entre cantidades son generalmente más sofisticados que los que implican relaciones aditivas. Asimismo, se considera estudiar la complejidad lingüística, esto es, detectar la presencia de proposiciones de asignación, relacionales o condicionales en los enunciados de los problemas matemáticos. Una proposición de asignación es un anunciado como: "¿cuánto suman las edades de todos?". Una proposición relacional sería un enunciado como: "¿cuántos años tiene Carlos más que Andrés?". Y una proposición condicional es un enunciado como: "si Carlos tiene 12 años más que Andrés, ¿cuántos años tiene Carlos?". Las proposiciones relacionales y condicionales tienden a ser más difíciles de solucionar que aquellos que tienen solo una proposición de asignación, por lo tanto, los problemas son más complejos, luego, podemos mencionar que la complejidad matemática podría ser juzgada de acuerdo al número de relaciones de estructura semántica, de manera que los problemas que llevan gran cantidad de relaciones semánticas son más difíciles de solucionar que los que llevan menos relaciones (Silver y Cai, 2005).

La invención de problemas por estudiantes en el ámbito de la Educación Matemática

Dentro del proceso de resolución de problemas existen diferentes intereses en cuanto a la forma de cómo abordarlo y en particular en procesos que tal vez anteceden a la propia resolución. En este respecto se concentrará el presente trabajo de investigación, es decir, transcurrirá por la vía de la invención de problemas matemáticos, también conocidos como formulación de problemas (Kilpatrick, 1987), generación de problemas (Silver, 1994) o planteamiento de problemas (Brown y Walter, 1990). En este trabajo se tomará la expresión de *inventar problemas*, por ser más apropiada al lenguaje de los estudiantes participantes en la investigación y en algunos casos se utilizarán expresiones sinónimas como formular, enunciar, proponer y plantear, aunque estos términos tienen significados parecidos, pero no equivalentes, por ejemplo:

- Inventar es “encontrar una manera de hacer una cosa nueva, desconocida antes, o una nueva manera de hacer algo” (Moliner, 1986, pág. 123).
- Formular es “dar forma a algo valiéndose del lenguaje hablado o escrito” (Moliner, 1986, pág. 123).
- Enunciar es “exponer el conjunto de datos de un problema” (Real Academia Española 21º edición, pág. 225)
- Proponer significa hacer una propuesta (Real Academia Española 21º edición, pág. 520).
- Plantear quiere decir proponer, suscitar o exponer un problema matemático, un tema, una dificultad o una duda (Real Academia Española 21º edición, 442).

Otros autores mencionan que se debe dividir el problema en sub problemas para facilitar la solución del mismo, haciendo referencia a actividades que tienen que ver con la invención de problemas (Osborn y Parnes, 1963). La actividad de inventar problemas se puede dar antes, durante y después de resolver un problema dado, de aquí que esta actividad aparezca con distintos nombres: plantear problemas, reformular un problema dado, variaciones de un problema, identificar problemas (Castro, 2008), como medio para mejorar la disposición de los estudiantes hacia las matemáticas (intereses, actitudes, motivación, …).

El que los estudiantes inventen problemas hará que deban leer, examinar datos y pensar críticamente (Davidson y Pearce, 1988); discutir ideas, estrategias y soluciones a las que cuestionará (Whitin, 2004); con periodicidad de generalizar (Burçin, 2005; Petersen y Jungck, 1988; Polya, 1965; Solórzano, 1989; Wright y Stevens, 1980). Asimismo, tratará de adelantarse a la solución del problema y de no ser así, le será útil aplicar conceptos matemáticos y aprender a manipular una gran variedad de estrategias para llegar a la solución (Cázares, 2000; Cifarelli y Sheets, 2009; Dickerson, 1999; Tchoshanov, 2008; Whitin, 2004).

Luego, surge la idea de abordar la comprensión de las matemáticas desde una mirada diferente, esto es, intentar pensar en cambiar las “rígidas jerarquías asociadas con concepciones convencionales acerca de las matemáticas, el currículo de matemáticas y la capacidad matemática” (Silver, 1994, citado en Castro, 2008 pág. 323).

Perspectivas de investigación en invención de problemas

Los diferentes ámbitos de investigación en invención de problemas dentro de la educación matemática hacen referencia a que este tipo de actividades en las clases de matemáticas propenden por desarrollar el pensamiento matemático, mejorando las actitudes hacia la matemática, como característica de la actividad creativa o talento excepcional, en la identificación de estudiantes con talento en matemática, en los procesos de resolución de problemas, para observar la comprensión matemática de los estudiantes, como herramienta de evaluación, entre otros.

En la década de los ochenta, la resolución de problemas es reconocida como actividad central de la matemática escolar (NCTM, 1980, 1989). Es más, algunos autores destacan el hecho de que, en todas las clases de matemáticas de cualquier país, se deben observar a los estudiantes resolviendo problemas matemáticos (Silver, 1994).

Uno de los pioneros en investigaciones relacionadas con la actividad de inventar problemas fue Krutetskii (1976), pues estudió la comprensión de la naturaleza de las habilidades matemáticas de niños considerados con talento matemático a través de la invención de problemas. Asimismo, Polya (1979), en su proceso de resolución de problemas, pues cuestiona si el problema puede ser planteado de manera diferente o variar el problema desechando parte de la solución.

El interés sobre la invención de problemas también se ve reflejado en reportes curriculares como los “Estándares sobre el currículo y evaluación para las matemáticas escolares” (NCTM, 1989); en proyectos de evaluación internacionales como PISA 2012 (OECD, 2013); y en propuestas que establecen perfiles profesionales para la enseñanza de la matemática (NCTM, 1991 y 2000), que sugieren un incremento en el uso de dicha actividad en las clases de matemáticas.

De la misma manera hay investigadores en educación matemática que reconocen a este tipo de actividad como fundamental dentro de la práctica matemática de los estudiantes y el gran valor educativo que tiene a lo largo del tiempo (Freudenthal, 1973; Ellerton 1986; Brown y Walter, 1990; Sullivan, Clarke y Clarke, 2012).

El término invención de problemas es conocido en la literatura en inglés como *“problem posing”* (Brown y Walter, 1993; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; English, 1997) involucra la formulación de nuevos problemas y reformulación de otros dados (Silver, 1994; English, 1997; Silver y Cai, 1996).

Asimismo, los estudiantes pueden inventar problemas durante la solución de un problema complejo, naturalmente, realizando cambios al mismo (Silver, Mamona-Down, Leung y Kenny, 1996). ¿Cómo podemos plantear el problema de forma diferente?, ¿cómo variar el problema descartando parte de las condiciones? (Polya, 1979). También, pueden inventar antes de empezar a resolver un problema, es decir, a partir de una situación o experiencia dada con anterioridad al estudiante (Silver, 1994). Por último, la invención de problemas se puede realizar posterior al proceso de resolución de un problema, esto es, modificando un objetivo, una condición o pregunta del mismo, con el fin de generar nuevos enunciados (Silver, 1994). Esta alternativa es llamada *"¿What if not?"* y utilizada por autores como Brown y Walter (1993). A continuación, se muestran las categorizaciones de los ámbitos de investigación en invención de problemas matemáticos (Silver, 1996).

La invención de problemas como característica de la actividad creativa o talento excepcional

En cuanto a esta categoría de invención se estudió, por ejemplo, la creatividad en un grupo de estudiantes y se valoró la fluidez de acuerdo con el número de problemas planteados, la flexibilidad con respecto a la diversidad de problemas propuestos y la originalidad de acuerdo con la cantidad de soluciones (Silver, 1994).

Otra investigación hace referencia a la exploración de las medidas de estudiantes con talento excepcional, concluyendo que existe una relación positiva entre la habilidad para proponer problemas, el grado de creatividad y el talento matemático. Además, se encontraron rasgos característicos entre en los "gifted students": capacidad para el pensamiento lógico con respecto a lo cuantitativo y las relaciones espaciales, número y símbolos de las letras; capacidad de generalización rápida y amplia de las relaciones y operaciones matemáticas, flexibilidad de los procesos mentales y la memoria matemática (Krutetskii, 1976).

Otro trabajo empleó actividades de planteamiento de problemas planteados por dos grupos de niños, uno con estudiantes talentosos y otro con menor habilidad matemática obteniendo resultados importantes en cuanto a que los estudiantes con mayor habilidad matemática requieren mayor dificultad de cálculo, presentan una mayor cantidad de operaciones, implican un sistema numérico más complejo y utilizan el lenguaje matemático con mayor fluidez que sus compañeros menos capaces (Ellerton, 1986).

Asimismo, el efecto de las actividades de invención de problemas en el desarrollo de habilidades matemáticas de 40 niños con talento matemático, con edades entre 14 y 15 años, de un colegio llamado "School for Kazakh gifted students", que fueron divididos en dos grupos, impartiéndoles las actividades de invención de problemas (grupo experimental) y el otro con una instrucción tradicional (grupo control). Antes de este procedimiento realizaron un pre-test de habilidad en resolución de problemas matemáticos (MPSAT). Luego se aplicó nuevamente un pos-test, con el propósito de medir el efecto de la instrucción de problemas. Los resultados mostraron que no hay diferencias reveladoras ente las medias de ambos grupos (control y experimental) antes de iniciada la instrucción, sin embargo, si se encontraron diferencias después de esta, pues en el grupo experimental mostraron mejoría en su rendimiento especialmente para ejercicios no rutinarios (Kesan, Kaya y Güvercin, 2010).

Por último, se encuentra la investigación en la que se construyen dos tareas de invención de problemas semi estructuradas, las cuales se aplicaron a dos grupos de 20 estudiantes. Los grupos de estudiantes fueron identificados, uno con talento (proyecto ESTALMAT-Andalucía, este proyecto se centra en la estimulación, durante dos cursos académicos, del talento matemático precoz de 25 alumnos de centros educativos de la región de Andalucía, España, de 12 o 13 años, los cuales son seleccionados mediante la aplicación de pruebas-actividades propuestas por el equipo de profesores para una evaluación externa.) y el otro como grupo estándar formado por un colegio público normal de Salobreña, España. Los resultados de esta investigación se centran en que los estudiantes con talento matemático presentan mayor riqueza en cuanto a la longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa, tipo de número, cantidad de procesos y pasos implicados en la solución del problema que sus compañeros del grupo estándar.

La invención de problemas como característica de una enseñanza orientada a la responsabilidad en el aprendizaje

Las actividades de invención de problemas en nuestra primera investigación arrojan resultados en cuanto a que los estudiantes tienen efectos positivos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, pues tienen la oportunidad de crear y explorar sus propios problemas, tomando así mayor responsabilidad en su propio aprendizaje (Brown y Walter, 1990, 1993). También se ha encontrado que este tipo de actividades inducen a un nivel muy visible de compromiso, curiosidad y entusiasmo durante las clases de matemáticas desembocando en una mayor responsabilidad en el aprendizaje de las matemáticas (Cunningham, 2004).

Este ámbito de investigación es de difícil alcance, pero con mayores beneficios en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

> Podría tomar más tiempo cubrir un conjunto de conocimientos predeterminados y quizá se podría cubrir menos material, pero los estudiantes probablemente tomarán conciencia de su

propio estilo de pensar, actitudes hacia el trabajo con otros, y también acerca de la naturaleza y el propósito de la disciplina (Brown y Walter, 1993, p. 26).

Los autores refieren la importancia de la actividad de invención de problemas en el contexto educativo en cuanto a la importancia de tomar conciencia sobre su propio aprendizaje. Actitud no lejos de la realidad experiencial, pues en nuestro diario vivir con la labor de enseñar, nos damos cuenta de que los estudiantes toman seriedad de su aprendizaje cuando se los motiva a participar activamente en ello.

La invención de problemas como una ventana para observar la comprensión matemática de los estudiantes

En un grupo de 21 estudiantes se propuso que plantearan tres problemas matemáticos y se observó que parten de una idea general, luego realizan un procedimiento de cambio durante el cual muestran sus habilidades y estrategias para formular un problema matemático (Pelczer y Gamboa, 2008). En otra investigación se observó que estudiantes identificados como talentosos en matemáticas frente a estudiantes menos talentosos, inventaron problemas que requerían mayor dificultad de cálculo, pues presentaban mayor cantidad de operaciones, implicando un sistema numérico más complejo, asimismo utilizaron un lenguaje matemático más fluido que sus compañeros menos capaces. Además, se observó que los estudiantes más hábiles saben cómo resolver sus propios problemas, mientras que sus compañeros menos capaces no siempre saben por dónde empezar (Ellerton, 1986). También se encontró una investigación realizada para estudiar la actuación aritmética de 14 niños de entre 6 y 13 años, cuando resuelven tareas de invención de problemas a partir de una situación cotidiana de compraventa, permitiendo de esta manera profundizar en la comprensión de la competencia aritmética general en la generación de problemas (Cázares, castro y Rico, 1998). Observándose por ejemplo, que a través de los patrones de respuesta pueden ser diferenciados cualitativamente de acuerdo con un orden progresivo en cuatro niveles principales y en cada uno de estos también algunos subniveles, estos son: ausencia del enunciado, representación gráfica de los objetos que se muestran, cuestionamientos sobre los objetos y escritura de números; enunciado simple de problemas de estructura aditiva, enunciado incipiente, enunciado completo, enunciado de dos o más etapas; enunciado de problemas de estructura multiplicativa, enunciados de una etapa, enunciado de dos o más etapas; operatividad de los problemas aritméticos escolares.

Finalmente, se halla una investigación que indaga sobre los beneficios que aporta la invención de problemas aritméticos en la adquisición y construcción del conocimiento matemático (Ayllón, 2012). También esta investigadora empleó la actividad de invención para estudiar el significado y los diferentes usos y contextos que un grupo de profesores en formación en educación primaria dan a tres tipos de números: naturales, enteros negativos y racionales (Ayllón, 2012).

La invención de problemas como herramienta para evaluar el aprendizaje de conocimientos matemáticos

Existen también investigaciones referidas a estudiar y emplear la actividad de invención de problemas como herramienta para evaluar el aprendizaje de conocimientos matemáticos de los estudiantes, pues el docente logra identificar patrones en el aprendizaje del conocimiento matemático (Kwek y Lye, 2008). La identificación de patrones en el planteamiento y solución de problemas matemáticos llevará posiblemente a la actividad de invención de problemas a servir como medio para comprobar la comprensión o capacidad de los estudiantes (Silver y Cai, 2005).

En suma, algunos estudios mencionan elementos a tener en cuenta a la hora de indagar sobre las producciones de los estudiantes como el número de problemas generados, cantidad de procesos implicados en la solución de los mismos, la complejidad matemática para resolverlo, etc (Ellerton, 1986; Cázares 2000; Silver y Cai, 2005; Espinoza, 2011; Ayllón, 2012).

La invención de problemas como medio para mejorar la disposición y las actitudes hacia las matemáticas

En otra investigación se examinó el efecto que tuvo la invención de problemas sobre las actitudes hacia las matemáticas de 82 profesores. En el resultado de los análisis de datos se determinó que el efecto de la invención mejoraba las actitudes y la autoeficacia hacia las matemáticas en un nivel significativo a través de la metodología pre test y post test (Akay y Boz, 2010). Asimismo, se ha estudiado el comportamiento cognitivo y examinadas las diferencias entre los problemas planteados antes de resolver los problemas y los planteados durante o después, por 53 profesores de matemáticas de escuela media (middle school) y 28 de escuela secundaria (secondary school) de una ciudad en Estados Unidos encontrándose que estaban altamente motivados para participar en las actividades de matemáticas al compartir con sus compañeros de clase problemas de diferente nivel de dificultad (Mamona-Downs, 1996).

La invención de problemas como medio para mejorar la capacidad de resolución de problemas

Algunos autores ponen de manifiesto la importancia que tienen las actividades de invención de problemas dentro del proceso de resolución (Polya, 1979; Cázares, 2000; English, 1997). Asimismo, se menciona que dividir el problema en sub-problemas facilita la resolución del mismo (Osbon, 1963, citado en Castro, 1991). En una fase denominada “looking Back”, se sugiere la necesidad de reformular el problema para solucionar el mismo (Polya, 1979), también, se plantea en el método IDEAL: Identificación de los problemas; Definición y representación del problema; Exploración de posibles estrategias; Actuación fundada en una estrategia; Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades (Bransford y Stein 1986, que se encuentra inspirado en Polya).

Estudios revelan la relación entre las tareas de invención y la resolución de problemas encontrándose que el rendimiento de una de ellas tiene importantes repercusiones en la otra, y viceversa (Walter y Brown 1977). En el estudio de los procesos de planteamiento y resolución de problemas (post-problem-solving-problem-posing) de un grupo de 53 profesores de escuelas intermedias y 28 profesores de matemáticas de secundaria reveló una posible relación entre el planteamiento y resolución de problemas, pues cuando el problema tenía solución se encontraba una marcada medida de competencia para resolver los problemas. Sin embargo, es evidente la influencia del planteamiento en la resolución de problemas (Silver y Cai, 1996).

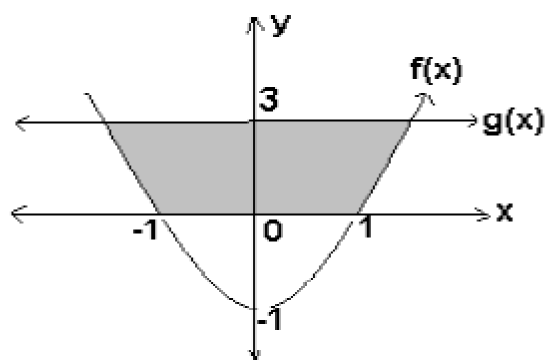
Por otra parte, no se puede dejar de lado que las invenciones de los enunciados realizadas por los estudiantes de la institución estarán enmarcadas dentro de la caracterización que hace Stoyanova E. (1996), esto es, situaciones libres, semiestructuradas y estructuradas: en las situaciones libres los estudiantes no tienen restricción para formular problemas. Es decir, a los jóvenes se les propone la actividad de inventar en escenarios completamente libres, por ejemplo:

> Escribir una función racional de al menos tercer grado, que tenga tres raíces diferentes, que el grado del numerador sea mayor que el del denominador y luego encontrar su integral indefinida (Akay y Boz, 2010). En este enunciado está en boga el uso de expresiones matemáticas y de escribir un problema nuevo antes de resolverlo. Hay un escenario matemático, pero no hay expresiones matemáticas para plantear un problema de acuerdo con el contexto dado.

Las situaciones semiestructuradas se caracterizan por adquirir los siguientes formatos: problemas similares a los dados, problemas con soluciones similares, problemas relacionados con teoremas específicos, problemas derivados de pinturas dadas y problemas de palabras (Stoyanova, 1996). Por ejemplo: “Un hombre compra una bicicleta eléctrica EP350, después de un año la vendió a su vecino”, completa esta situación formulando un problema matemático y genere dos o tres preguntas en el problema (Abu E., 1999, pág. 12). Como se puede observar la situación posee elementos matemáticos que crean un ambiente para la invención de enunciados, más aún cuando se enuncia la tarea a realizar.

Y las estructuradas son aquellas en las que los problemas se reformulan o se cambia alguna condición de un problema dado. Por ejemplo: como puede verse en la figura de abajo, hay una región delimitada por la parábola $f(x)$, las líneas $g(x)$ y $x=0$. Formule un problema relacionado con esta figura (Akay y Boz, 2010, pág. 12)

Ilustración 7. Parábola intersecada por el eje x y la recta g(x).



Capítulo tres. Referentes metodológicos y diseño del estudio

En el siguiente apartado se expone la metodología empleada en el estudio, refiriéndose al tipo de investigación, al diseño que aborda la selección de los estudiantes, a la construcción, descripción y aplicación del instrumento utilizado para recolectar información, y, por último, al proceso de transcripción y codificación de las invenciones de los estudiantes. Asimismo, se describe el proceso realizado para construir las categorías de análisis y sus respectivas variables de estudio que finalmente fueron empleadas para la investigación.

Tipo de investigación

La investigación es de carácter exploratoria y descriptiva porque carece de información procedente de estudios anteriores en relación con los estudiantes de educación básica secundaria y, describe y analiza a través de diversas categorías las posibles producciones de estos estudiantes en la Corporación Educativa de Occidente, ante la actividad de invención de problemas. Se trata de seleccionar una serie de cuestiones que pueden ser medidas para luego ser descritas y analizadas (Dankhe, 1986) cuantitativa y cualitativamente el contenido matemático por medio de dos situaciones semiestructuradas (Stoyanova y Ellerton, 1991). Estas situaciones se construyeron a partir de una encuesta individual que permitirá la construcción del instrumento de recolección de datos.

Sujetos de estudio

La población considerada para realizar la investigación la constituyen estudiantes de educación básica secundaria (en total son 148 estudiantes) de la Corporación Educativa de Occidente Colegio Los Andes, además, fueron los cursos a los que el investigador de este estudio les impartía clase de matemáticas. Estos grupos estuvieron divididos entre niños y niñas de los grados sexto a noveno de la siguiente manera:

Tabla 1. Distribución de cantidad de niños y niñas por grados, en la institución.

Grados	***Niñas (%)***	***Niños (%)***	***Total (%)***
Sexto	10,1	19,6	29,7
Séptimo	12,2	18,2	30,4
Octavo	8,1	10,8	18,9
Noveno	8,8	12,2	21
			100

Los estudiantes de grado sexto están entre las edades de 10 y 12 años, de séptimo, entre 11 y 13 años, de octavo entre 12 y 14 años, y de noveno entre 13 y 15 años. Todos provenientes de estratos socioeconómicos altos (4, 5 y 6 de la ciudad de Popayán). Las dos situaciones de planteamiento de problemas fueron formuladas a todos los estudiantes pero se hizo una selección aleatoria de los problemas planteados de la siguiente manera: los problemas estuvieron escogidos por grados de educación, esto es, para la primera situación: 11 de 48 problemas de grado sexto, escogidos puesto que los 37 restantes fueron problemas considerados no matemáticos; 11 de 44 problemas de grado séptimo, escogidos ya que el resto eran problemas muy parecidos en su escritura; 13 de 30 de grado octavo, escogidos a causa de que el resto de problemas tienen enunciados muy parecidos y 11 de 26 de grado noveno, escogidos por la misma razón que los anteriores problemas. Para la segunda situación: 11 de 44 de problemas de grado sexto, escogidos debido a que el resto de problemas tienen enunciados muy parecidos; 13 de 45 de grado séptimo, escogidos pues el resto eran problemas muy parecidos en su escritura; 9 de 28 de grado octavo, escogidos a causa de que el resto eran problemas muy parecidos en su escritura y 8 de 16 de grado noveno, escogidos por la misma razón que los anteriores problemas.

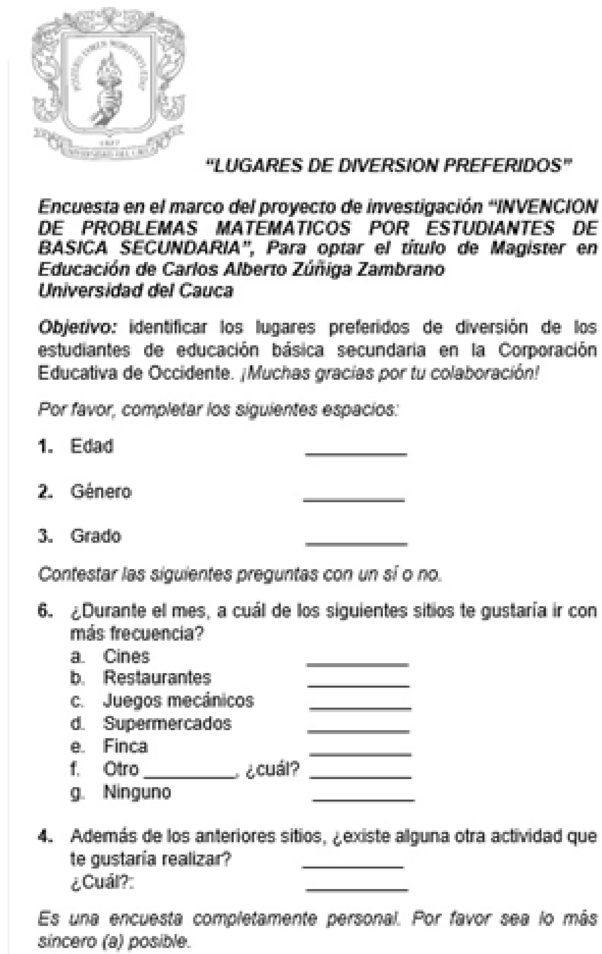
Diseño del instrumento para recolectar información

Debido a que los estudiantes están acostumbrados a procesos estadísticos desde los primeros grados (ya que el colegio imparte la materia con una intensidad horaria semanal importante, 3 horas desde grado sexto hasta undécimo), la encuesta fue la mejor manera para recolectar los datos. Además, las preguntas elegidas fueron claras y concisas que arrojaban indicadores claros de los que se pretendía medir. La encuesta averiguó sobre los sitios a los que les gustaría visitar, cuando sus obligaciones se los permitiesen (llamada “LUGARES DE DIVERSIÓN PREFERIDOS”) y de esta manera poder construir dos situaciones semiestructuradas por las cuales los estudiantes desarrollarían la actividad de plantear problemas matemáticos. (Stoyanova, 1998).

En el diseño del instrumento se tomaron en cuenta los resultados de la encuesta en cuanto a los lugares preferidos por los estudiantes, pues con estos insumos se construirían las situaciones semiestructuradas que darían origen a un ambiente apropiado para el planteamiento de los problemas. De esta manera, el instrumento debía cumplir con al menos estos requerimientos: el contexto debe ser de interés y familiar para los estudiantes; motivar a plantear diferentes tipos de problemas; permitir el uso de varios tipos de números, cantidades y representaciones numéricas.

La encuesta permitió identificar los sitios preferidos de esparcimiento de los estudiantes, pues, son niños que a través de los resultados mostraron más deseo en visitar sitios de su preferencia, que de realizar alguna otra actividad. En esta ilustración se describe el objetivo de la encuesta, la edad, el género y el grado, además de contestar algunas preguntas que se muestran en la siguiente gráfica:

Ilustración 8. Encuesta para identificar los "LOS LUGARES DE DIVERSIÓN PREFERIDOS".



"LUGARES DE DIVERSION PREFERIDOS"

Encuesta en el marco del proyecto de investigación "INVENCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS POR ESTUDIANTES DE BASICA SECUNDARIA", Para optar el título de Magister en Educación de Carlos Alberto Zúñiga Zambrano Universidad del Cauca

Objetivo: identificar los lugares preferidos de diversión de los estudiantes de educación básica secundaria en la Corporación Educativa de Occidente. *¡Muchas gracias por tu colaboración!*

Por favor, completar los siguientes espacios:

1. Edad __________
2. Género __________
3. Grado __________

Contestar las siguientes preguntas con un sí o no.

6. ¿Durante el mes, a cuál de los siguientes sitios te gustaría ir con más frecuencia?
   a. Cines __________
   b. Restaurantes __________
   c. Juegos mecánicos __________
   d. Supermercados __________
   e. Finca __________
   f. Otro __________, ¿cuál? __________
   g. Ninguno __________

4. Además de los anteriores sitios, ¿existe alguna otra actividad que te gustaría realizar? __________
   ¿Cuál?: __________

Es una encuesta completamente personal. Por favor sea lo más sincero (a) posible.

Los resultados de la pregunta 5 en toda la población mostraron preferencia en la visita a sitios especiales y en su minoría a actividades específicas. Los resultados fueron los siguientes:

Los sitios preferidos por los estudiantes fueron escogidos en relación a la densidad que presentó cada opción. Se debe tener en cuenta que se podía marcar más de un lugar. Encontrándose que entre niñas y niños de cada grado (sobre todo en los grados de sexto a octavo), las opciones más densas fue visitar los cines y la finca respectivamente, y en noveno los cines y restaurantes. Como en los grados de sexto a octavo hubo mayor densidad de escogencia por la finca, además de que, en algunos espacios de enseñanza, ellos preferían divertirse con actividades de carácter campestre, se decidió tenerla como referente para las construcciones de las situaciones semi estructuradas. Esto es, los sitios preferidos para visitar por los estudiantes, sujetos de la investigación, fueron los cines y la finca.

Descripción del instrumento

La primera situación semi estructurada se muestra a los estudiantes en una hoja que en la parte superior se establece la siguiente información general: nombre, grado y la primera instrucción a realizar.

En la siguiente gráfica se muestra un cartel de películas identificando la cinta de estreno en el cine de la ciudad de Popayán en cierta época del año, denominada situación semiestructurada uno (S1). Además, si se verá en 2D o 3D y cuál es el precio de estas en todos los días de la semana, además si es cliente fiel o no.

Situación semiestructurada uno (S1)

Plantear o (formular) un problema a partir de la siguiente situación:

<u>*Situación*</u>

Cuatro amigos visitan un cine y desean disfrutar de la siguiente cartelera con sus respectivos precios:

Ilustración 8. Cartel de películas en el cine de la ciudad de Popayán.

Película	***2D***	***3D***
*A la *&$%! Con los zombis*	*x*	
Destino final V		*x*
El último cazador de brujas	*x*	
007 Spectre	*x*	
Actividad paranormal	*x*	*x*

Precios:

Ilustración 9. Precios de las entradas para ver las películas discriminadas por días.

Día de la semana	***2D***	***TCF***	***3D***	***TCF***
Lunes	*7000*	*6000*	*13000*	*12000*
Martes	*4000*	*4000*	*7000*	*7000*
Miércoles	*4000*	*4000*	*7000*	*7000*
Jueves	*8000*	*7000*	*14000*	*13000*
Viernes, Sáb., Dom. y Fest.	*8000*	*7000*	*14000*	*13000*
Matinales	*6000*	*6000*	*12000*	*12000*

Donde ***TCF*** *es* ***T****arjeta* ***C****liente* ***F****iel*

Formulación del problema

La situación anterior permite plantear problemas con diferentes tipos de enunciados y números, relacionados de forma estadística con intención, pues la institución participante de la investigación tiene una alta intensidad horaria es el área de estadística (tienen la asignatura de Estadística desde grado sexto hasta undécimo, con una intensidad horaria semanal igual para todos los grados de 3 periodos de clase semanales) además, conexos con una situación del contexto propia de los estudiantes de la institución. Por último, se considera que al aparecer en los enunciados 4 sujetos identificados como amigos, permitirían que el problema planteado pudiera presentar varias proposiciones, aunque no necesariamente.

La siguiente es la segunda situación semi estructurada para el planteamiento de los problemas: en esta imagen se encuentran varios animales en un sitio en el que comúnmente se encuentran (una finca). De acuerdo con la información de la imagen inventar o plantear un problema en el que aparezcan uno o varios elementos que conforman la siguiente imagen. Es un espacio que está relacionado con el segundo sitio preferido por los estudiantes.

Situación semiestructurada dos (S2)

Situación

Inventar (o plantear) un problema en el que aparezca (n) uno o varios elementos que conforman la siguiente imagen:

Formulación del problema

Procedimiento de aplicación del instrumento

Las situaciones fueron realizadas en momentos diferentes. Es decir, la encuesta para el diseño de las situaciones semiestructuradas se realizó con todos los cursos en una sola sesión, en ocho horas de clase durante una semana, pues eran ocho cursos, dos por cada grado.

Para la construcción de la primera situación (S1), se necesitó una visita a la cartelera de cine ofrecida en la ciudad, y se escogieron películas de diversos gustos (humor, suspenso, terror y acción en 2D y 3D con sus respectivos precios en distintos días de la semana), paso seguido, en cada uno de los encuentros con los cursos tenía espacios de una hora de clase para la aplicación pues debía hacer seguimiento particular a las preguntas que pudieran hacer, de hecho, en algunos momentos de las aplicaciones se necesitaron explicaciones sobre lo que debían hacer, y en otros, pedían que diera un ejemplo. En este momento de la investigación, los estudiantes trabajaban bajo la premisa de desarrollar la actividad individualmente, en horas de clase en las que no tenían compañía, o por inasistencia del profesor o porque se la había solicitado la clase, para desarrollar esta actividad. En realidad, entre la encuesta y las situaciones se necesitaron tres semanas. Para la segunda situación (S2) se tuvo en cuenta la afinidad de los estudiantes por los animales, pues en encuentros planeados por la institución, en los que se congregaban para compartir experiencias de sus mascotas con otros compañeros, se evidenciaba la preferencia por animales de campo. Seguidamente, se aplicó la situación de la misma forma en que se aplicó la primera situación.

Por último, se les indicó que la información obtenida era completamente confidencial, por lo que en ningún momento se particularizaría alguna de las producciones.

Transcripción y codificación de las producciones de los estudiantes

Luego de aplicar el instrumento para recolectar la información se procedió a la transcripción de las producciones de los estudiantes en la primera (S1) y segunda situación (S2) de planteamiento de problemas, obteniéndose 148 producciones en la primera situación y 133 en la segunda, distribuidas de la siguiente manera:

Tabla 2. Distribución de los problemas escogidos para el análisis en la investigación.

Actividades	Sexto	Séptimo	Octavo	Noveno	Total
S1	48	44	30	26	148
S2	44	45	28	16	133
					281

Para facilitar la organización y presentación de dichas producciones, las transcripciones de estas fueron codificadas mediante algunos caracteres, de manera que los tres primeros indicaron el número del estudiante y grupo al que pertenece y los restantes a la producción, ya sea de la primera o segunda situación. Por ejemplo, el código 8G6-A1, corresponde a la producción del estudiante número 8 del grado sexto ante la primera situación y 43G9-A2 se refiere al estudiante 43 del grado noveno frente a la S2.

Proceso de construcción de las categorías de análisis

Puesto que parte de esta investigación es describir y clasificar el contenido matemático de los problemas de palabras inventados por los estudiantes, se definieron algunas categorías de análisis que permitirán describir el trabajo realizado por los estudiantes.

Para esto se consideran las variables de estudio caracterizadas en el capítulo dos y sección bautizada con el nombre de clasificación de los PAEV. Dado que se hizo una revisión detallada de las producciones de los estudiantes, se observó que algunas variables de estudio no eran de interés para esta investigación, pues no aportaban información sobresaliente. Por ejemplo, el vocabulario y tamaño de los números empleados ya que todos los planteamientos giraron en torno a situaciones particulares creadas. Luego, las categorías de análisis para este trabajo se describen en el siguiente apartado.

Categorías de análisis empleadas

Componente semántico

La importancia del componente se evidencia en las tesis de maestría y de doctorado de las que esta propuesta de investigación hace referencia. Es decir, la descripción y análisis de las invenciones de los estudiantes a partir de las categorizaciones (cambio, combinación, comparación e igualación), se hace indispensable.

Cambio: se refiere a los problemas en los que se produce algún cambio, están identificados por la modificación de una cantidad inicial a través de una acción. Esta categoría de problemas se distingue por tres momentos: cantidad inicial, final y de cambio. Por ejemplo: Juan tenía a. le dan b. ¿Cuántos tiene ahora?

Combinación: son los problemas que describen una relación entre conjuntos que responde al esquema parte – parte – todo. Por ejemplo: hay a hombres, hay b mujeres. ¿Cuántas personas hay?

Comparación: permiten compartir la estática de los problemas de combinación diferenciándose en que las relaciones son entre cantidades. Las palabras más usadas en este tipo de problemas son 'más que' o 'menos que' en contextos de edades, distancias, precios, etc. Por ejemplo: Carlos tiene a, Ana María tiene b. ¿Cuántos tiene Ana María más que Carlos?

Igualación: es un híbrido de los problemas de cambio y comparación, es decir se realiza un cambio (acción), para convertirlo en otra para luego igualarla a otra con la que ha sido comparada. Por ejemplo: Carlos tiene a, Ana María tiene b. ¿Cuántos tiene que perder Carlos para tener tantos como Ana María?

Un problema será estático cuando sus condiciones implícitas se refieren a subconjuntos de un todo.

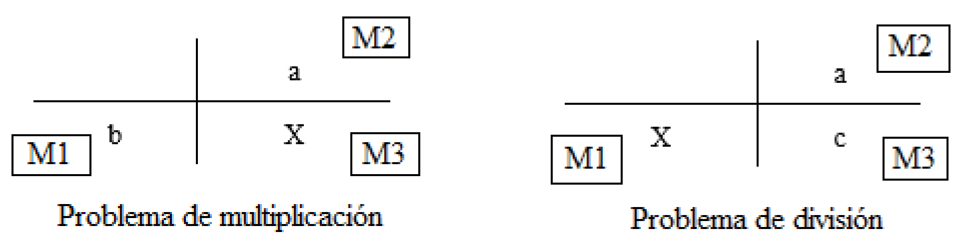
Además, en paralelo con estas estructuras se encuentran las de carácter multiplicativo. A este respecto se encontraron isomorfismo de medidas; producto de medidas y comparación multiplicativa, un único espacio de medidas. La primera es una estructura que consiste en una proporción simple y directa entre dos espacios de medidas. En esta estructura se observa que:

a. Se establece entre dos espacios de medida una relación cuaternaria, es decir intervienen 4 magnitudes o términos, en la cual se debe hallar el valor de una de ellas para su solución.

b. El procedimiento de solución es de tipo escalar o vertical y de operador función horizontal. En el primero se establece una relación entre magnitudes del mismo espacio, mientras que el segundo consiste en establecer una relación entre magnitudes de espacio de medida diferente acorde a lo expresado por Vergnaud (1995).

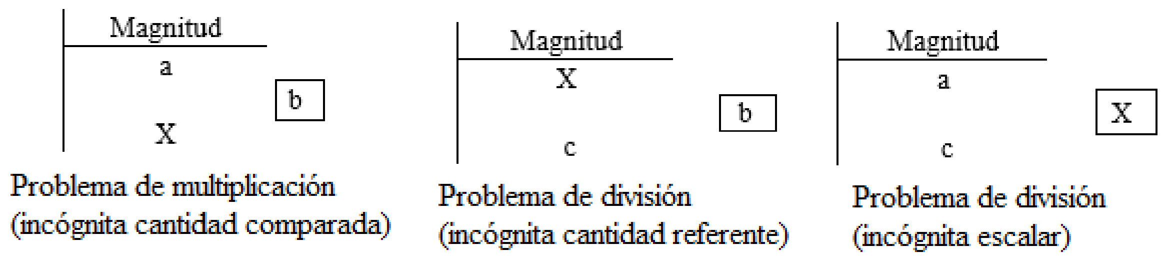
La estructura del producto de medidas hace referencia a los típicos problemas de multiplicación cartesiana como lo afirma Nesher (1992) y Greer (1992) y aparece en el apartado que titula variables de estudio en los problemas aritméticos de enunciado verbal de una etapa, ya que, en estos, se encuentran problemas con una composición cartesiana de dos espacios de medida M1 y M2, en un tercer espacio de medida M3. Los problemas en que aparecen área, volumen o trabajo y otros conceptos físicos son de esta categoría, por ejemplo, "A las clases de baile asisten 6 chicas y 4 chicos. ¿Cuántas parejas de baile diferentes se pueden realizar?" o "La empresa del comedor escolar ofrece 20 menús diferentes formados por un primer y un segundo plato. Si la empresa cocina 5 primeros platos diferentes, ¿cuántos segundos platos cocina?". La estructura general de los problemas es:

Ilustración 11. Estructura general de los problemas con la estructura del producto de medidas. Construcción propia.



La comparación multiplicativa, un único espacio de medidas, en los que aparecen dos cantidades de una única magnitud o espacio de medidas que se ven afectadas por un escalar, que casi siempre viene designado por la palabra veces. Por ejemplo: "Para realizar una pancarta la clase A utiliza 2 metros de tela. La clase B utiliza 3 veces más tela que la clase A. ¿Cuánta tela utiliza la clase B?", "Para realizar una pancarta la clase B utiliza 6 metros de tela. La clase B utiliza 3 veces más tela que la clase A. ¿Cuánta tela utiliza la clase A?" o "Para realizar una pancarta la clase A ha utilizado 2 metros de tela mientras que la clase B ha utilizado 6 metros. ¿Cuántas veces más tela ha utilizado la clase B que la clase A?" (Ivars y Fenández, 2016, pág. 22). Las estructuras de este tipo de problemas son:

Ilustración 12. Estructura general de los problemas con la estructura comparación multiplicativa. Construcción propia.



Componente sintáctico

En cuanto al componente sintáctico del problema, se hizo uso de los siguientes intereses: longitud del enunciado y tipo de número empleado.

Longitud del enunciado: se consideró el número de proposiciones que tendrá cada enunciado y trabajaremos bajo la premisa de que las proposiciones son las expresiones explícitas en el texto del enunciado que asignan un valor numérico, una cantidad o una variable, o bien, establece una relación cuantitativa entre dos variables y que podría ser parte de la resolución del problema.

Tipo de número empleado: refiriéndonos a si en los enunciados se utilizaron un tipo de número o varios.

Tipo de asignación interrogativa: tiene que ver con la pregunta de los enunciados de los problemas y se clasifica respecto a tres aspectos: proposición interrogativa de asignación, condicional y relacional. Para el tipo de proposición de asignación podría ser, ¿cuántos libros lee Ana María al mes?; condicional, es una declaración como si Ana María lee 2 libros más que Carlos, ¿cuántos libros lee Ana María?; y relacional, ¿cuántas veces lee Ana María lo que lee Carlos?

Componente matemático

Este componente analizará dos variables: tipo de estructura operatoria y número de etapas, y tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema.

Tipo de estructura operatoria y número de etapas: son las estructuras de tipo aditiva, multiplicativa o mixta que se observan en los planteamientos de los problemas para obtener la solución. De igual forma se catalogan respecto al tipo de estructura aditiva de una o más de una etapa, estructura multiplicativa de una o más de una etapa y problemas mixtos que son más de una etapa pues combinan las estructuras aditivas y multiplicativas.

Tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo distintos para resolver un problema: este apartado se refiere a identificar el tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo distintos que se requieren para resolver un problema, esto es, si un problema requiere para su solución sólo sumas y multiplicaciones entonces se considera un problema de dos procesos.

Componente riqueza de las producciones

Debido a las componentes anteriormente descritas se consiguió trabajar en una serie de clasificaciones para observar la riqueza de las producciones de los estudiantes y de esta forma darles una calificación cuantitativa. Para esto se decidieron las siguientes variables de estudio:

longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa, cantidad de relaciones semánticas y estructura operatoria. En la siguiente tabla se muestran las diferentes calificaciones para los problemas planteados según cada variable.

Ilustración 13. Convenciones en el estudio de las producciones de los estudiantes para identificar la riqueza de los problemas. Elaboración propia.

Longitud del enunciado		
Planteamiento del estudiante	Una o dos proposiciones	1
	Tres proposiciones	2
	Cuatro proposiciones	3
	Cinco o seis proposiciones	4
	Siete proposiciones	5
Tipo de proposición interrogativa		
Planteamiento del estudiante	Proposición interrogativa de asignación	1
	Proposición interrogativa condicional o relacional	2
Cantidad de relaciones semánticas		
Planteamiento del estudiante	Una relación	1
	Dos relaciones	2
	Tres relaciones	3
	Cuatro relaciones	4
	Cinco relaciones o más	5
Estructura operatoria		
Planteamiento del estudiante	Aditiva	1
	Multiplicativa	2
	Mixta	3

El tipo de proposición interrogativa se refiere a la forma en que los estudiantes plantean la pregunta del problema que inventó, además se relacionó de acuerdo con las elaboraciones de los enunciados de asignación, condicional o relacional que aparezcan. Una proposición interrogativa de asignación podría ser “¿Cuánto les costó la película con la Tarjeta Cliente Fiel (TCF, pág. 1)?”, una relacional, “Si dos amigos van al cine el jueves… y tienen 30 000 pesos, uno quiere ver 007 Spectre y el otro Destino Final V, tienen TCF, ¿cuánto sobraría?” y por último la condicional, “Si Ana María tiene 2 000 pesos más que Carlos Alberto, ¿cuánto dinero tiene Ana María?”

Con la anterior tabla se describió la riqueza de los problemas planteados por los estudiantes, pues con base en los puntos obtenidos en cada una de las variables se puede establecer qué estudiante planteó un problema con mayor riqueza. Esto es, si un estudiante planteó un problema que presenta las siguientes características: cinco proposiciones, proposición interrogativa de asignación, dos relaciones semánticas y estructura multiplicativa, entonces la riqueza de dicho problema tendrá un puntaje de 9 puntos. De tal forma podemos caracterizar la riqueza de forma cuantitativa de todos los planteamientos de los estudiantes.

Componente tipos de pensamiento matemático del ministerio de educación nacional

Las siguientes dos matrices describen y clasifican los conocimientos matemáticos en los problemas de palabras inventados por los estudiantes que son inherentes a los estándares de competencias en matemáticas:

Ilustración 14. Clasificación de los contenidos en los estándares básicos de competencias en matemáticas de grado sexto a séptimo. Elaboración propia.

Grados	Pensamientos	Conocimientos matemáticos inmersos en los estándares
Sexto a séptimo	Pensamiento numérico y sistemas numéricos	• Medidas relativas (razones, proporciones, tasas, y demás) y de variaciones en las medidas. • Números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes), problemas en contextos de medida. • Representación polinomial decimal usual de los números naturales, representación decimal usual de los números racionales, y conversiones entre estos utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal. • Relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos. • Propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. • Relaciones y propiedades de las operaciones. • Situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. • Potenciación o radicación. • Representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa o inversa.
	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	• Figuras planas y cuerpos con medidas dadas. • Factores escalares (diseño de maquetas, mapas). • Áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos. • Técnicas de estimación.
	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	• Objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas. • Figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales. • Polígonos en relación con sus propiedades. • Relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. • Modelos geométricos. • Objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.
	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	• Datos que permiten una representación numérica, provenientes de diferentes fuentes (prensas, revistas televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos (diagramas de barras, diagramas circulares). • Uso de medidas de tendencia central (media, mediana y moda) para interpretar el comportamiento de un conjunto de datos. • Uso de modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutirá y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. • Experimentos aleatorios usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. • Conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.
	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	• Situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). • Conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí, en situaciones concretas de cambio (variación). • Correlación positiva y negativa entre variables de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos. • Métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones. • Características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

Ilustración 15. Clasificación de los contenidos en los estándares básicos de competencias en matemáticas de grado octavo a noveno. Elaboración propia.

Grados	Pensamientos	Conocimientos matemáticos inmersos en los estándares
Octavo a noveno	Pensamiento numérico y sistemas numéricos	• Números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. • Cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. • Notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes. • La potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.
	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	• Áreas de regiones planas y volumen de sólidos. • Técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. • Unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias
	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	• Propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. • Propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales). • Criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. • Representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	• Diferentes maneras de presentación de la información. • Información estadística provenientes de diferentes fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Conceptos de media, mediana y moda explicitando sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría. • Métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). • Experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Conjunto de variables relacionadas. • Probabilidad de eventos simples. • Conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).
	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	• Relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. • Procesos inductivos y de lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. • Situaciones de variación con funciones polinómicas. • Métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. • Notaciones decimales de los procesos infinitos (función generatriz para decimales puros y mixtos). • Medición de la pendiente de una curva en el plano cartesiano a través de diferentes maneras. • Parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y cambios en las gráficas que las representan. • Comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Esquema para valorar las producciones de los estudiantes

Los problemas planteados se dividieron en producciones matemáticas y no matemáticas, habiendo tomado las definiciones de problema de castro (1991) y de problema aritmético de Puig y Cerdán (1988). Luego estos problemas aritméticos fueron resueltos por el autor del actual estudio y clasificados en solucionables o no solucionables.

Los problemas no solucionables, por considerarse incompletos son aquellos que no proporcionan la información necesaria para resolverlos, pero, aun así, es necesario analizarlos ya que algunos de ellos muestran riqueza en cuanto a las unidades de análisis al que este estudio hace referencia. Tanto a estos como a los que se consideran problemas resolubles se les hace análisis desde los componentes sintáctico, semántico, matemático, riqueza de las producciones y los tipos de pensamiento matemático.

Por último, si un estudiante planteó más de un problema se estudiará aquel que posea mayores características para ser analizadas. El siguiente gráfico muestra el proceso utilizado para estudiar las producciones de los estudiantes.

Ilustración 16. Proceso utilizado para estudiar las producciones de los estudiantes. Elaboración propia.

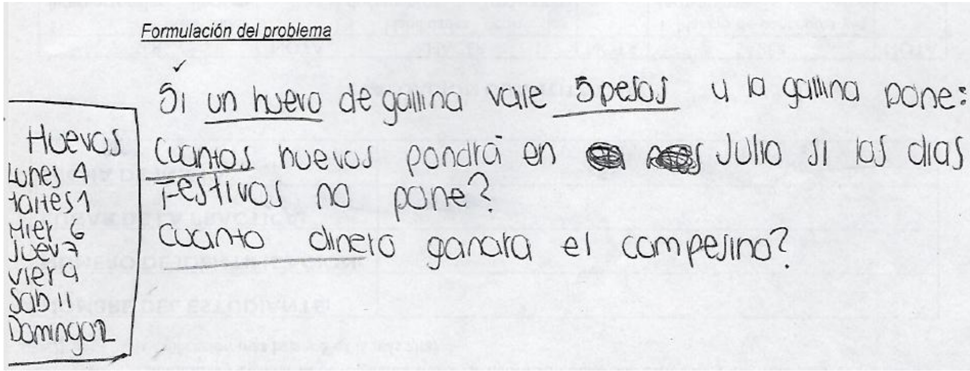
Capítulo cuatro. Resultados

En este capítulo se darán a conocer los resultados obtenidos al realizar el estudio de cada una de las unidades de análisis que fueron descritas en el anterior capítulo. En primer lugar, se relatarán las características generales de los problemas planteados por los estudiantes. Después, sobre lo que se obtuvo en las unidades de análisis: sintáctica, semántica, matemática, riqueza de las producciones y tipos de pensamiento matemático en cada una de las situaciones semiestructuradas (S1 y S2) descritas en la página 58.

Características generales de los problemas inventados

Todos los estudiantes congregados en las dos situaciones terminaron los planteamientos, obteniendo un parcial de 148 problemas en cada situación. Como fueron dos, el total fue de 256 problemas. De estos fueron escogidos de forma que representaran a los problemas planteados por los estudiantes de cada grado. Es decir, había tantos problemas con las mismas características que se decidió por escoger los más representativos. En la primera situación: 11 problemas de sexto, 11 de séptimo, 13 de octavo y 11 de noveno; En la segunda situación: 11 de grado sexto, 13 de séptimo, 9 de octavo y 8 de noveno. De esta forma se analizaron 47 problemas en la primera situación y 40 en la segunda.

Analizando la resolubilidad de los problemas se observó que en la segunda situación de invención hubo más problemas resolubles, en comparación con la primera situación, los cuales se representan en los siguientes porcentajes respectivamente 92,5% (de un total de 40 problemas) y 78,7% (de un total de 47 problemas) aproximadamente. Un problema resoluble es 7G7-S2:



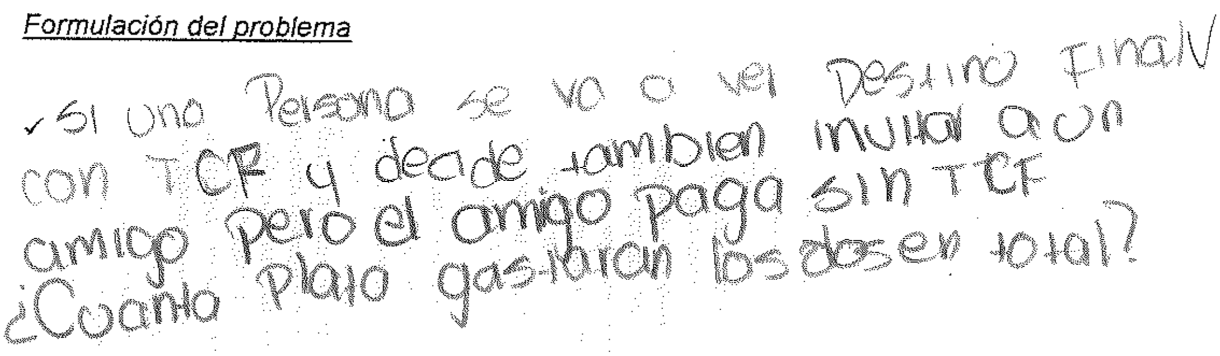
Formulación del problema

Si un huevo de gallina vale 5 pesos y la gallina pone:
Cuantos huevos pondrá en Julio si los dias Festivos no pone?
Cuanto dinero ganara el campesino?

Huevos
Lunes 4
Martes 1
Mier 6
Juev 7
vier 9
Sab 11
Domingo 2

Con respecto a los problemas no resolubles, inventados en la primera situación y comparados con la segunda, se obtuvo que hubo más problemas no resolubles (17% aproximadamente de 47 problemas) en la primera, que los que se encontraron en la segunda situación (2,5% aproximadamente, de 40 problemas). Asimismo, se encontró con problemas no matemáticos, esto es, 4,3% (de 47 problemas) aproximadamente en la primera situación y 5% (de 40 problemas) en la segunda.

Un ejemplo de problema incompleto es 2G7-S1:

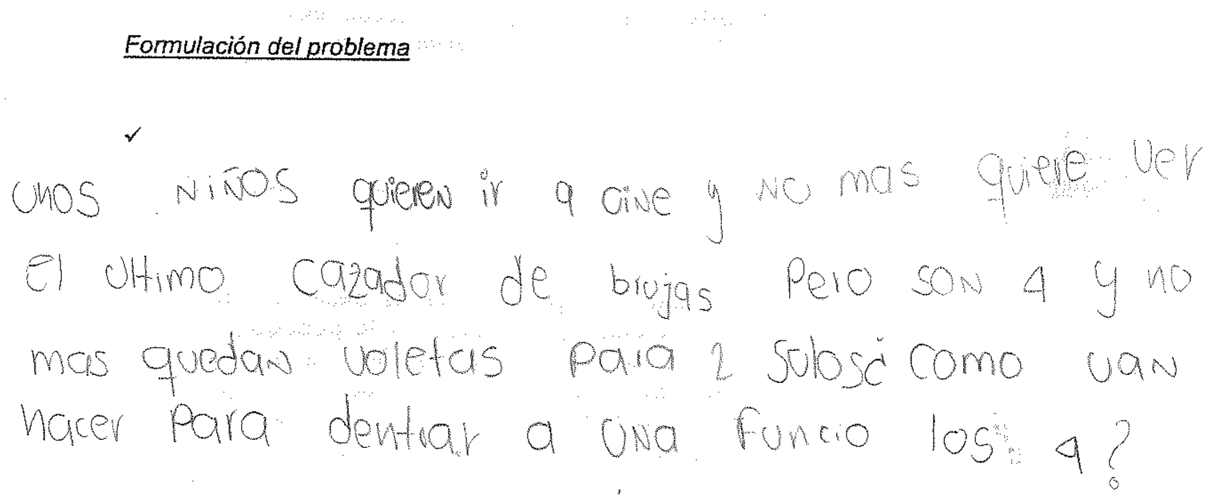


Formulación del problema

Si una Persona se va a ver Destino FinalV con TCF y decide tambien invitar a un amigo pero el amigo paga sin TCF ¿Cuanto plata gastaran los dos en total?

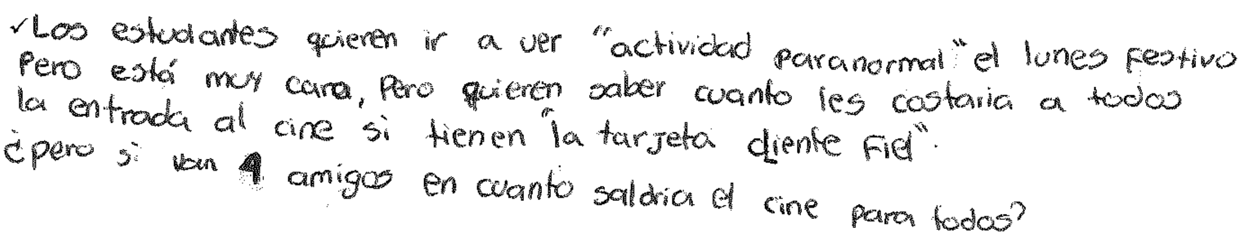
Este problema evidencia variables que el estudio desea analizar, pero no tiene solución, pues según el encabezado de la S1, a través de la cual este problema se planteó, existen algunas características en cuanto a que los precios varían en los días de la semana. Este problema no muestra el día de la semana en que deciden ir al cine por lo tanto no tiene solución.

Un problema que se identifica como no matemático, es el que no requiere para su solución procedimientos matemáticos, por ejemplo 10G6-S1:


Formulación del problema

Unos niños quieren ir a cine y no mas quiere ver el ultimo cazador de brujas pero son 4 y no mas quedan voletas para 2 solos ¿como van hacer para dentrar a una funcio los 4?

El inconveniente con este problema radica en que para su solución es necesario saber sobre las decisiones personales de los visitantes al cine. Y un problema matemático incompleto es el 4G6-S1:


Los estudiantes quieren ir a ver "actividad paranormal" el lunes festivo pero está muy cara, pero quieren saber cuanto les costaria a todos la entrada al cine si tienen "la tarjeta cliente Fiel". ¿pero si van 4 amigos en cuanto saldria el cine para todos?

A continuación, se encuentra el consolidado de los resultados obtenidos:

Tabla 3. Distribución de los problemas que no tienen solución en las dos situaciones respecto a cada grado de educación básica.

Clasificación del enunciado	***6***		***7***		***8***		***9***		***Total***		***%***	
	S1	***S2***	***S1***	***S2***	***S1***	***S2***	***S1***	***S2***	***S1***	***S2***	***S1***	***S2***
Incompleto	1	0	3	0	1	1	3	0	8	1	17	4,3
No matemático	2	1	0	0	0	0	0	1	2	2	2,4	4,9
Total	3	1	3	0	1	1	3	1	10	3		

De acuerdo con la anterior información descrita en la tabla, se destaca que la mayor cantidad de problemas no resolubles por estar incompletos, se encontraron en la S1 (17% de 47 problemas), mientras que, en los problemas no matemáticos, el mayor porcentaje se observó en la S2 (4,9% de 41 problemas).

Se puede resaltar que los enunciados presentaron menor número de problemas no resolubles por ser incompletos en el planteamiento de la S2 (1 de 41 problemas) con respecto a la S1 (8 de 47 problemas). Ya en los problemas considerados como no matemáticos se observó la misma cantidad para ambas situaciones. Las razones del por qué, se debe a varios factores: mejor actitud, pues si se recuerda un poco, las situaciones fueron planteadas basadas en los "*LUGARES PREFERIDOS DE DIVERSIÓN"*, permitiendo que los estudiantes mejoren su disposición (Brown y Walter, 1990, 1993; Silver, 1994; Silver, Mamona y Downs, Leung, Kenney, 1996; English, 1997) hacia las matemáticas y de esta forma, influenciados positivamente para la elaboración de problemas; también, el no tener que resolver los problemas que inventaban, etc.

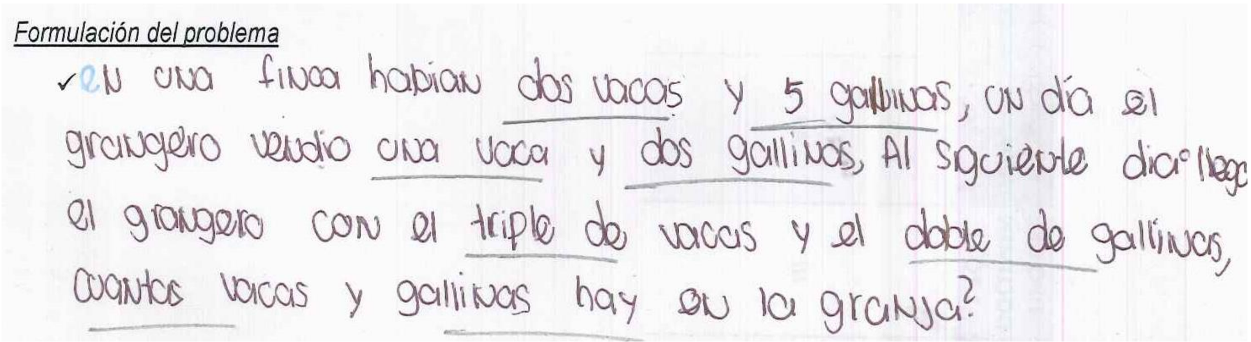
Análisis del componente sintáctico

En este aparte se presentan los resultados obtenidos de las invenciones de los estudiantes. El análisis se basa en tres variables: longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado.

Longitud del enunciado

Recuérdese que para el análisis de esta estructura se presentaron los resultados con cantidad de proposiciones presentes. Es decir, se consideraron enunciados que asignan un valor numérico, una cantidad, una variable o se establece una relación cuantitativa entre dos o más variables que podrían ser parte de la solución del problema. En la siguiente foto se observa el conteo de los enunciados:

A continuación, se observa el problema inventado 6G6-S2:



Formulación del problema

En una finca habian dos vacas y 5 gallinas, un día el grangero vendio una vaca y dos gallinas, Al siguiente dia llego el grangero con el triple de vacas y el doble de gallinas, cuantos vacas y gallinas hay en la granja?

En el anterior enunciado se cuentan 8 proposiciones en términos de la longitud del enunciado definida en el actual estudio. La siguiente tabla establece el número de proposiciones de todos los grados estudiados en cada situación.

Tabla 4. Distribución de problemas de acuerdo con la cantidad de proposiciones, situación y grado de escolaridad de cada estudiante.

Cantidad de proposiciones	**S1**						**S2**					
	6	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**
Sin proposiciones	2	0	0	0	2	4,3	1	0	1	1	3	7,3
Una o dos proposiciones	5	5	4	3	17	36,9	1	0	0	3	3	9,7
Tres proposiciones	0	4	2	3	9	19,6	2	0	1	0	3	7,3
Cuatro proposiciones	2	0	1	2	5	10,8	2	2	1	3	8	19,6
Cinco o seis proposiciones	2	1	2	2	7	15,3	2	6	3	1	12	29,3
Siete o más proposiciones	0	1	4	1	6	13,1	3	5	3	0	11	26,8
Total	11	11	13	11	46	100	11	13	9	8	41	100

Como se puede deducir de la tabla, el promedio del número de proposiciones en la segunda situación (S2) es mayor (4,76) que en los problemas inventados por los estudiantes en la primera situación (3,59). Además, el 56,1% de los problemas inventados por los estudiantes en la segunda situación (S2) están compuestos por cinco o más proposiciones, mientras que los estudiantes en la S1 inventaron 27,7% menos con dicha característica. También se encontró que un poco más de la mitad (60,8%) de los problemas inventados en la S1 tienen tres proposiciones o menos, mientras que los estudiantes en la S2 inventaron 36,5% menos con dicha característica.

Los resultados en cuanto la resolubilidad de los problemas planteados por los estudiantes en las dos situaciones se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 5. Distribución de los problemas inventados por los estudiantes, en relación con la resolubilidad, situación y grado de escolarización.

Cantidad de proposiciones	S1												S2											
	6		7		8		9		Total		%		6		7		8		9		Total		%	
	R	NR	R	NR	R	NR	R	NR	R	NR	R	NR	R	NR	R	NR	R	NR	R	NR	R	NR	R	NR
Sin proposiciones		2								2		4,3		1						1		2		4,9
Una o dos proposiciones	4		4	1	4		3		15	1	32,7	2,1	1						3		4		9,7	
Tres proposiciones			3	1	2		2	1	7	2	15,2	4,4	2				1				3		7,4	
Cuatro proposiciones	2				1		1	1	4	1	8,7	2,1	2		2		1		3		8		19,6	
Cinco o seis proposiciones	3		1		2		1	1	7	1	15,2	2,1	2		6		3		1		12		29,2	
Siete o más proposiciones				1	3	1	1		4	2	8,8	4,4	3		5		4				12		29,2	
Total	9	2	8	3	12	1	8	3	37	9	80,6	19,4	10	1	13	0	9	0	7	1	39	2	95,1	4,9

Tal que R, significa resolubles y N.R., significa no resolubles.

De acuerdo con la información obtenida, se rescata que en la S1 los estudiantes inventaron una mayor cantidad de problemas no resolubles (19,4% de un total de 46 estudiantes), y que de éste porcentaje el 15,1% de los problemas no resolubles tienen entre una y siete proposiciones, mientras que en la S2 resultó ser nula (0% de 41 estudiantes) en la misma característica.

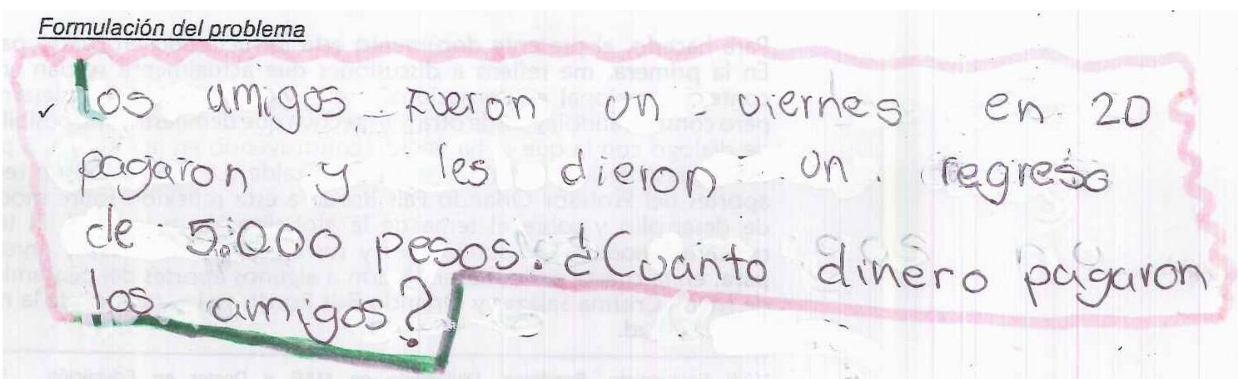
Asimismo, se considera que las diferencias con respecto a la no resolubilidad de los problemas frente a la cantidad de proposiciones por cada uno de los grados en las dos situaciones es evidentemente significativa (19,4% en la S1 frente a un 4,9% en la S2).

Tipo de proposición interrogativa

En cuanto a las preguntas que los estudiantes inventaron en los problemas se debe recordar que se clasificaron de acuerdo a tres aspectos: proposición interrogativa de asignación, condicional o relacional.

Más de las tres cuartas partes de los problemas inventados en la primera situación (80,4% de 46 problemas) presentaron proposiciones interrogativas de asignación o condicionales, mientras que en la segunda situación hubo un mayor porcentaje en los mismos tipos de proposiciones interrogativas (92,7% de 41 problemas). Las proposiciones de tipo relacional fueron las menos apetecidas por los estudiantes en las dos situaciones (19,6% en la S1 y 7,3% en la S2).

Un ejemplo del tipo de problema que presenta una proposición interrogativa de asignación es 2G6-S1:


Formulación del problema

los amigos fueron un viernes en 20 pagaron y les dieron un regreso de 5.000 pesos. ¿Cuanto dinero pagaron los amigos?

Recuérdese que estos problemas están contextualizados alrededor de enunciados que describen cinco películas diferentes, en precios y días de la semana.

Otro resultado que se puede destacar en cuanto a la variable proposición interrogativa en las dos situaciones, es que tanto en la primera situación como en la segunda se utilizaron proposiciones de tipo asignación en su gran mayoría (91,3% y 97% respectivamente). Con respecto a la resolubilidad y esta variable se identificó que, en la S1, un 74% de los problemas resolubles tuvieron proposiciones interrogativas de asignación frente a un 93% en la S2.

Tipo de número empleado

La invención de problemas se encuentra caracterizada por la presencia de números naturales y números racionales expresados en forma de decimales y fraccionarios. Hubo en particular dos problemas que se identificaron como no matemáticos en la S1 que no hicieron parte del estudio de esta variable, los problemas fueron: "Unos niños quieren ir a cine y no más quieren ver Cazador de Brujas, pero son cuatro y no más quedan boletas para dos solos, ¿cómo van a hacer para entrar los cuatro?" (10G6-A1), y "Un grupo de amigos tenían cada uno 5000 pesos y no les alcanzaba para la boleta y la comida. Tenían que decidirse por la comida o el cine y nadie había traído la tarjeta para el cajero, luego se decidieron por el cine y compraron una gaseosa de 1000 pesos, chiquitica, pero la pasaron bien" (11G6-A1).

Asimismo, en S2 se identificaron dos invenciones con las mismas características, estos son: "La vaca necesita pasar a la casa con velocidad inicial $v_0 = 30m/s$. Al ir corriendo a la casa alcanza un tiempo de 5s. Necesitamos averiguar cuál fue su aceleración" (4G6-A2), y "Si tres gallos ponen un huevo en una balanza hacia el sur y otra hacia el norte. ¿En qué lado va a caer el huevo?" (6G9-A2).

También se observó que la cantidad de problemas con números naturales inventados por los estudiantes son muy similares, tanto en la primera situación como en la segunda (93% y 87,8% respectivamente). Con respecto a los problemas resolubles, resultó que 76% de los problemas tuvieron números naturales en la S1, mientras que el 85% resultaron con tal característica en la S2.

Análisis del componente estructura matemática

	Sexto		Séptimo		Octavo		Noveno		Total	
Actividades	**C.S.**	**A**	**C.S.**	**A**	**C.S.**	**A**	**C.S.**	**A**	**C.S.**	**A**
S1	37	11	33	11	17	13	15	11	102	46
S2	33	11	32	13	19	9	8	8	92	41
									281	

Esta estructura se analizó alrededor de dos variables: tipo de estructura operatoria y número de etapas. Además, tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema. Se recuerda que se hizo el análisis de 87 problemas entre las dos situaciones, 46 problemas inventados en la S1 y 41 problemas en la S2 en los grados de educación básica (ver siguiente ilustración). De estos, cuatro de los problemas fueron no matemáticos, de tal forma que no tuvieron cabida dentro del análisis, excepto, como parte de los problemas que en primer momento fueron escogidos. Estos problemas fueron *10G6-A1, 11G6-A1, 4G6-A2 y 6G9-A2,* que han sido descritos anteriormente. A continuación, se presentan los resultados en términos de las dos variables de esta componente.

Ilustración 10. Listado de problemas con características similares (C.S.) y analizados (A).

Tipo de estructura y cantidad de etapas

En esta parte se encuentra el análisis de los problemas inventados según la estructura operatoria presente en todos los enunciados de tipo aditivo, multiplicativo o mixta. De la misma forma se clasifican de acuerdo al tipo de estructura operatoria y número de etapas en estructuras aditivas de una o más de una etapa, estructura multiplicativa de una o más etapas y problemas mixtos que son aquellos que son más de una etapa mezclando las estructuras aditiva y multiplicativa.

Tabla 6. Distribución de los problemas inventados en las dos situaciones clasificados según su estructura operatoria y número de etapas en todos los grados de educación básica. Elaboración propia.

Estructura operatoria	***S1***						***S2***					
	6	***7***	***8***	***9***	***Total***	***%***	***6***	***7***	***8***	***9***	***Total***	***%***
Aditiva de una etapa	1	2	2	1	6	13	2	1	2	3	8	19,5
Aditiva de dos o más etapas	1	1	0	0	2	4,4	1	2	1	1	5	12,3
Multiplicativa de una etapa	1	0	1	2	4	8,6	2	1	3	0	6	14,6
Multiplicativa de dos o más etapas	0	1	1	0	2	4,4	0	3	0	0	3	7,4
Mixta	6	7	9	8	30	65,2	5	6	3	3	17	41,4
No matemáticos	2	0	0	0	2	4,4	1	0	0	1	2	4,8
Total	11	11	13	11	46	100	11	13	9	8	41	100

Tanto en la S1 como en la dos (S2) se hallaron invenciones en todas las clasificaciones, destacándose la estructura operatoria mixta, pues obtuvo mayor porcentaje en las dos (65,2% y 41,4% respectivamente). Sin embargo, más de la mitad de los estudiantes en la S1 inventaron problemas de estructura operatoria mixta en relación con la S2 en que el porcentaje fue menor. También se observa que 30,4% de los problemas inventados en la S1 es de estructura aditiva o multiplicativa de una o más etapas, mientras que las mismas estructuras en la S2 presentan un 53,8%.

Un problema con estructura mixta en S1 es el enunciado 1G6-S1:

Formulación del problema

Unos Amigos van al cine uno de ellos dice:
- veamos "Actividad - paranormal"
y el otro dice:
-No eso no que a mi me da mucho miedo:
todos los demas se burlan y dicen: "Bueno no importa"
entonces
Todos se ponen de acuerdo con destino final V
Entonces era un viernes e iban a pagar con TCF
pero no la tienen entonces necesitan comprarla
y les cuesta 8.000 $. la compraron pero cada uno dio su parte. vieron la pelicula y fueron salieron
¿cuanto dio cada uno? ¿cuanto les costo todo en total?
¿cuanto les costo la tarjeta con lo que les costo la peli a el TCF?

Donde para resolver el problema es necesario hacer una suma y una multiplicación dos veces.

Tipo de operación y cantidad de procesos distintos implicados en la resolución del problema

En esta sección se exponen los resultados obtenidos de acuerdo con el tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo distintos que se requieren para resolver el problema inventado, de tal forma que si un problema requiere para ser resuelto tanto operaciones de adición como multiplicaciones entonces este problema se considera de dos procesos.

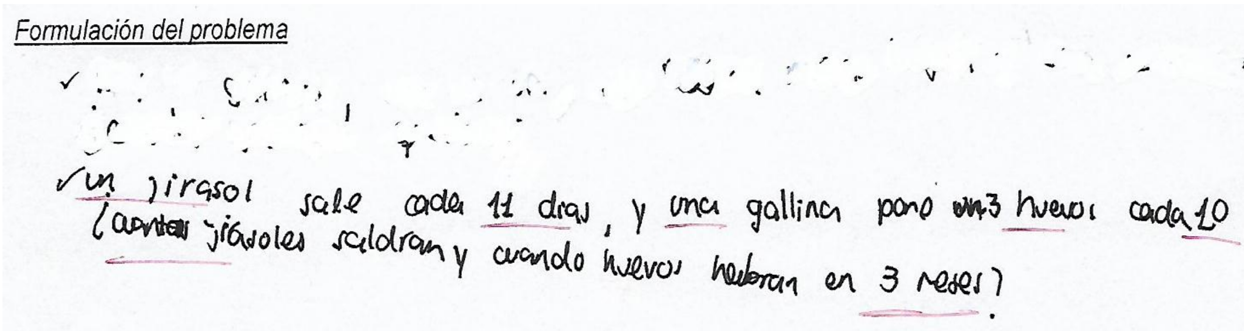
En la siguiente tabla de distribución observaremos la variable "Otros" que corresponden a aquellos problemas que contienen un tipo de estructura operatoria única (es decir, con un solo representante) y la variable "No matemáticos", de la que se ha hablado con anterioridad, que corresponden a los problemas que no tienen ningún tipo de estructura matemática. Por tanto, estas invenciones no fueron clasificadas en forma individual por tener un único representante, y sí lo fueron aquellos enunciados que contenían mínimo dos representantes de cada tipo.

Tabla 7. Distribución de las invenciones de acuerdo con el tipo de operación, grado de educación básica y situación. Elaboración propia.

Tipo de operación	***S1***						***S2***					
	6	***7***	***8***	***9***	***Total***	***%***	***6***	***7***	***8***	***9***	***Total***	***%***
Suma	1	2	2	1	6	13	1	1	2	3	7	17
Suma-Resta		1		1	2	4,3	1			1	2	4,9
Multiplicación	1		1	1	3	6,6	2				2	4,9
División				1	1	2,3			3		3	7,3
Multiplicación-Suma		4	3		7	15,3	3		1		4	9,7
Suma-Multiplicación	5				5	11						
Multiplicación-Multiplicación		1	1		2	4,3		2			2	4,9
Multiplicación-Multiplicación-Suma			2		2	4,3		1	2		3	7,3
Multiplicación- Multiplicación- Multiplicación- Multiplicación-Suma								3			3	7,3
Multiplicación-Resta		1		1	2	4,3						
Multiplicación-Suma-Suma			2		2	4,3						
Otros	2	2	2	6	12	26	3	6	1	3	13	31,7
No matemáticos	2				2	4,3	1			1	2	4,9
Total	11	11	13	11	46	100	11	13	9	8	41	100

Para la escogencia de los tipos de operación se tomaron con base a mínimo tres problemas por cada tipo. Se evidencia que los estudiantes en la S1 optaron por inventar problemas que involucraban el uso de Multiplicación-Suma, Suma, Suma-Multiplicación o Multiplicación en un 45,9% (21 problemas de 46 posibles), mientras que en la S2 implicaban el uso de Suma, Multiplicación-Suma, División, Multiplicación-Multiplicación-Suma, Multiplicación-Multiplicación-Multiplicación-Multiplicación-Suma en un 48,6%. Aunque las diferencias no son muy evidentes se destaca la utilización de operaciones mixtas (Multiplicación-Suma) en la S1 y de sólo una operación (Suma) en la S2. Además, se acentúa el hecho de que en la S2 hubo un mayor porcentaje (31,7% de 41 problemas) que se clasificaron en el tipo de operación “Otros”, y en la S1 26%. Todos los problemas inventados en la S1 y S2 se describen en los anexos A y B.

Por ejemplo, el enunciado 8G8-S2 muestra un problema del tipo Multiplicación-Multiplicación-Suma:


Formulación del problema

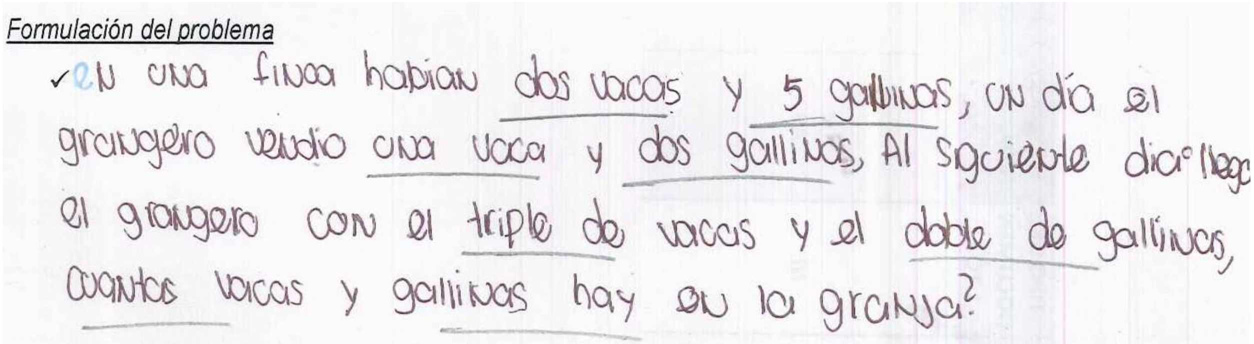
un jirasol sale cada 11 días, y una gallina pone 3 huevos cada 10 (cuantos jirasoles saldrán y cuando huevos habrán en 3 meses)

Análisis del componente semántico

En esta sección, se identifican los resultados que se obtuvieron respecto al tipo de componente semántico presente en los problemas de estructura aditiva y multiplicativa, asimismo las relaciones semánticas presentes en los problemas de estructura multiplicativa mixta. También, se recogieron la cantidad de relaciones semánticas presentes en las dos situaciones de invención de los 87 problemas.

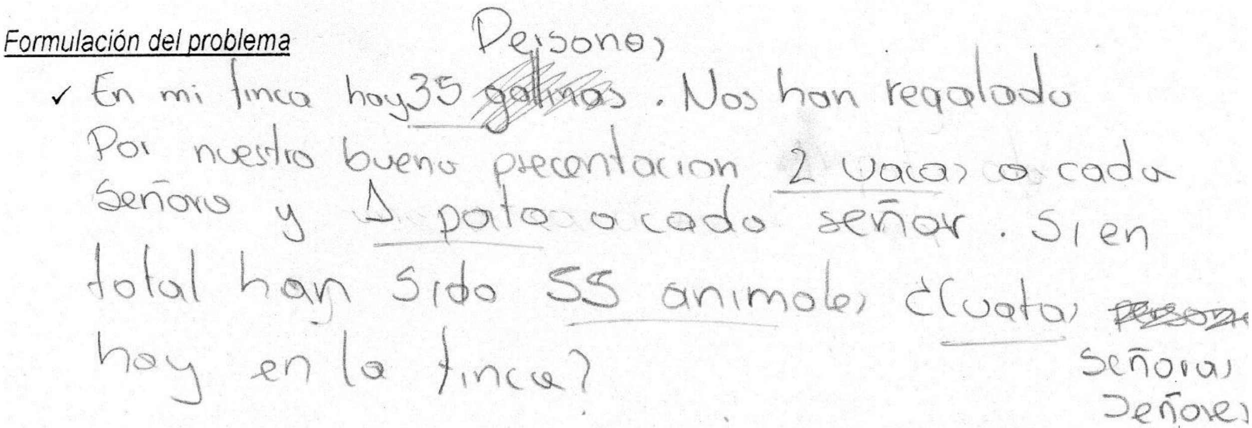
Estructura semántica de los problemas aditivos

El análisis para este componente tiene que ver con los problemas elaborados que tienen estructura aditiva en términos de los cuatro tipos de problemas analizados: cambio, combinación, comparación e igualación (caracterización de Puig y Cerdán, 1988). Es necesario tener presente que en ambas situaciones inventaron 20 problemas con una sola estructura semántica. Por ejemplo, un enunciado con estructura de cambio es el ejercicio 6G6-S2:


Formulación del problema

✓en una finca habian dos vacas y 5 gallinas, un día el grangero vendio una vaca y dos gallinas, Al siguiente dia llego el grangero con el triple de vacas y el doble de gallinas, cuantas vacas y gallinas hay en la granja?

Un problema con estructura combinación es 1G8-S2:


Formulación del problema

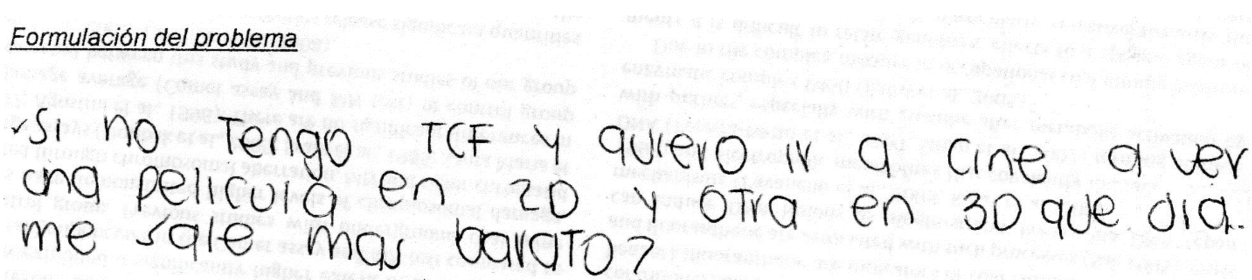
Personas

✓ En mi finca hay 35 ~~gallinas~~. Nos han regalado Por nuestra buena presentacion 2 vacas a cada Señora y 1 pato a cada señor. Si en total han sido 55 animales ¿Cuantas ~~personas~~ hay en la finca?

Señoras

Señores

Un problema con estructura comparación es 2G9-S1:


Formulación del problema

✓Si no Tengo TCF y quiero ir a cine a ver una pelicula en 2D y otra en 3D que dia me sale mas barato?

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla.

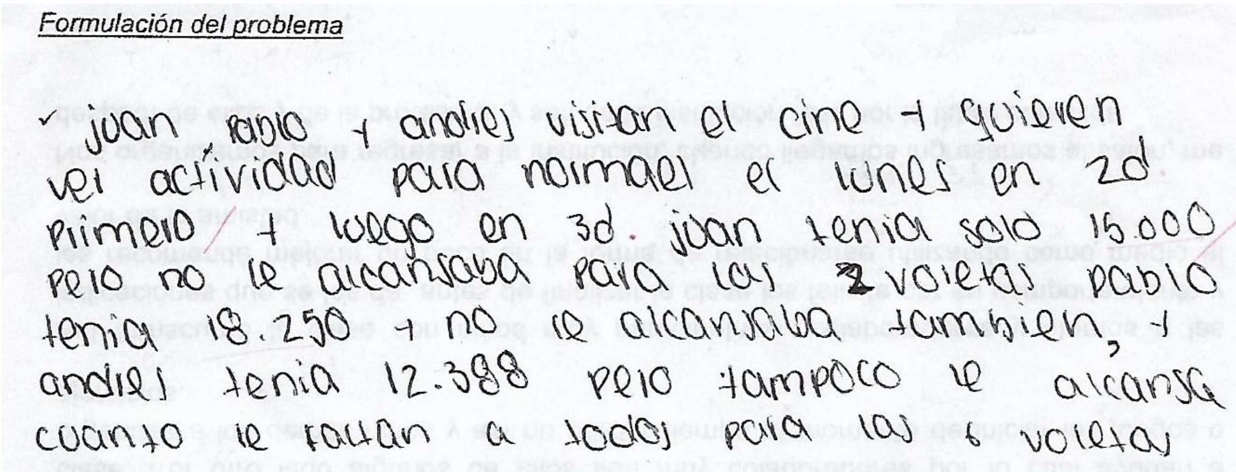
Tabla 8. Distribución de los problemas aditivos que poseen una sola componente semántica, inventados por los estudiantes en relación con la situación y grado de escolaridad. Elaboración propia.

Componente semántica	**S1**						**S2**					
	6	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**
Cambio	1	2			3	42,8	5	1		2	8	61,5
Combinación	1	1			2	28,6	1	1	2	1	5	38,5
Comparación			1	1	2	28,6					0	0
Total					7	100	6	2	2	3	13	100

Como se puede observar, la estructura semántica más usada en la S1 es la de cambio (42,8% de 7 problemas), asimismo se encontró esta característica en la S2 (61,5% de 13 problemas). También se logró deducir que 7 de los problemas inventados en la S1 presenta una sola estructura semántica (15,2% de 46 inventados), mientras que en la S2 fueron13 (31,7% de 41 inventados) con la misma característica. También no se encontraron problemas de estructura semántica de Igualación. En total fueron 20 problemas en las dos situaciones de entre 87, que representan el 23%. Esto significa que 63 problemas (77% de 87 problemas) presentan estructura semántica mixta (aditiva y/o multiplicativa). Se debe tener en cuenta que cuatro de los problemas no fueron considerados como matemáticos, dos en la S1 y dos en la S2.

A continuación, se exponen 63 problemas inventados por los estudiantes que tienen más de una estructura semántica, tanto aditiva como multiplicativa que no fueron analizados en la anterior distribución, de los cuales 37 aparecen en la S1 y 26 en la S2.

Por ejemplo, el enunciado 3G6-S1 muestra un problema con estructura semántica de cambio y combinación:


Formulación del problema

juan pablo y andres visitan el cine y quieren ver actividad para normal el lunes en 2d primero y luego en 3d. juan tenia solo 15.000 pero no le alcanzaba para las 2 voletas pablo tenia 18.250 y no le alcanzaba tambien, y andres tenia 12.388 pero tampoco le alcansa cuanto le faltan a todos para las 6 voletas

Tabla 9. Distribución de los problemas inventados por los estudiantes en relación con la estructura semántica aditiva mixta, situación y grado de escolaridad.

Componente semántica	**S1**						**S2**					
	6	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**
Cambio	4	2	5	2	13	35,1	2		2	5	9	34,6
Combinación	3	5	9	6	23	62,2	1	6	3	4	14	53,8
Comparación			2	2	4	10,8	1				1	3,8

Se puede observar que los problemas inventados en la S1 y en la dos presentan en su mayoría características de la estructura semántica de combinación (62,2% y 53,8% respectivamente), además se destaca que no hubo invenciones de problemas con componente semántica de Igualación. Asimismo, se puede apreciar que el número de problemas con estructura semántica de comparación inventados en la S1, casi triplica la cantidad de problemas inventados en la S2 (10,8% y 3,8% respectivamente).

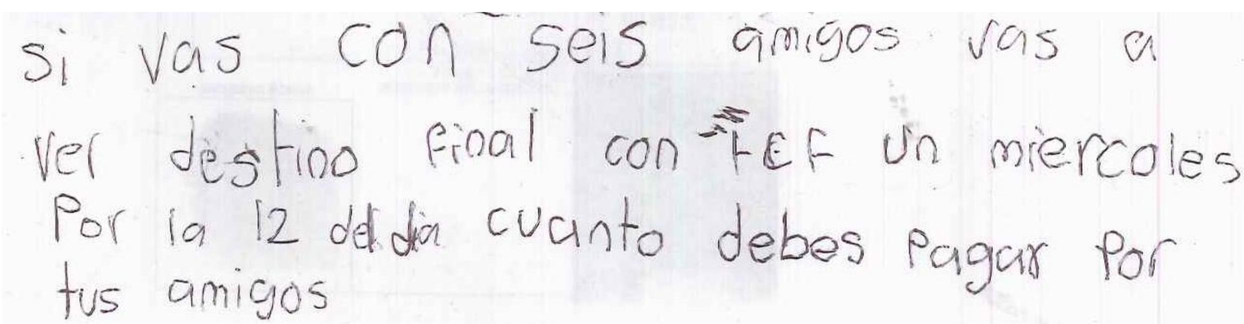
Estructura semántica de los problemas multiplicativos

Estos problemas fueron clasificados según las siguientes estructuras: Isomorfismo de medidas, producto de medida y comparación multiplicativa (Vergnaud, 1983). En esta parte se resalta que en las dos situaciones se elaboraron 14 problemas con únicamente una estructura semántica (Isomorfismo de medidas). En la S1 se inventaron 6 problemas y en la S2 8. En la siguiente distribución se observa la información.

Tabla 10. Distribución de los problemas multiplicativos que poseen una sola componente semántica, en relación con la situación y grado de escolaridad.

Componente semántica	**A1**						**A2**					
	6	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**
Isomorfismo de medidas	4	2	5	2	13	42	2		2	5	9	50

Aquí se puede observar que en las dos situaciones se inventaron problemas multiplicativos con estructura semántica Isomorfismo de medidas. Además, no se puede ver una diferencia relevante. Por ejemplo, un problema con estructura isomorfismo de medidas es 5G6-S1:


Si vas con seis amigos vas a ver destino final con FEF un miercoles Por la 12 del dia cuanto debes pagar por tus amigos

A continuación, se realiza la descripción de los 49 problemas inventados por los estudiantes con más de una componente semántica, tanto aditiva como multiplicativa, de los cuales 31 aparecen en la S1 y 18 en la S2.

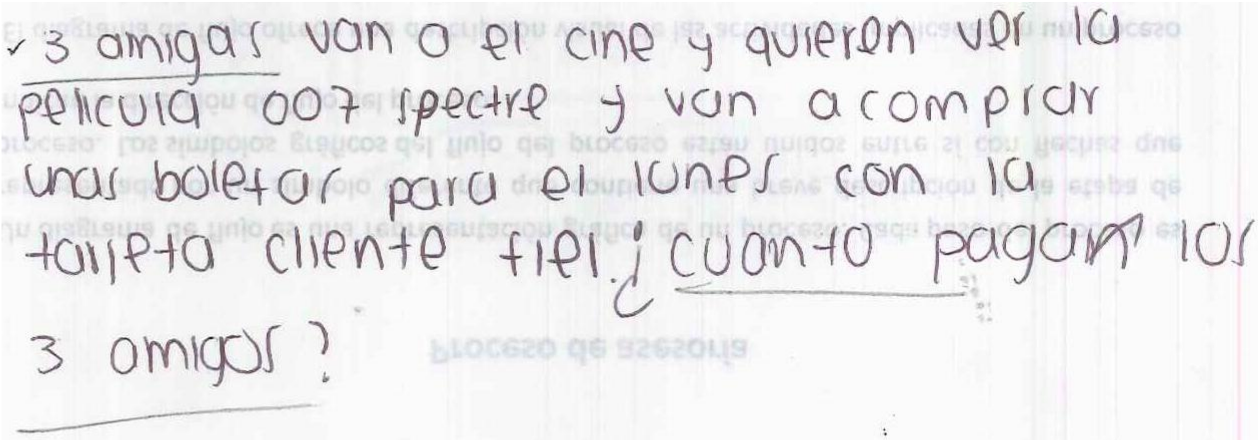
Tabla 11. Distribución de los problemas multiplicativos que poseen más de una estructura semántica, en relación con la situación y grado de escolaridad.

Componente semántica	S1						S2					
	6	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**
Isomorfismo de medidas	5	7	10	8	30	96,8	3	6	3	3	15	83,3
Producto de medidas										1	1	5,6

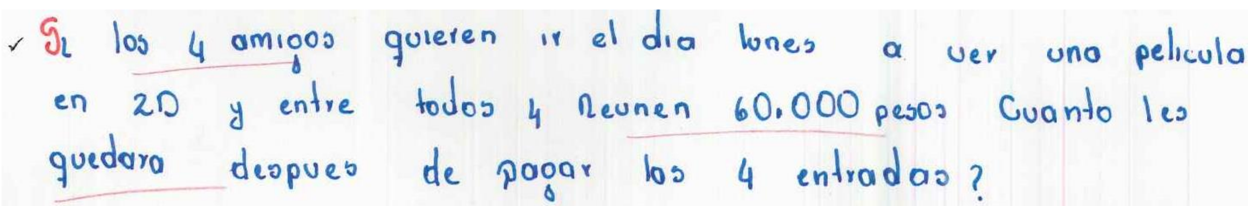
La estructura semántica más usada y única en la S1 es Isomorfismo de medidas (96,8% de 31 problemas), mientras que en la S2 dos, además del *isomorfismo de medidas* (83,3% de 18 problemas) aparece un problema con estructura semántica *producto de medidas* (5% de 18 problemas).

Relaciones semánticas implicadas en los problemas mixtos

Puesto que la mayoría de los problemas inventados por los estudiantes en las dos situaciones tuvieron estructura semántica aditiva o multiplicativa con más de una etapa (77% de 87 problemas inventados), se considera necesario describir las estructuras semánticas aditivas y multiplicativas más usadas en las dos situaciones. De esta forma se enuncia que 63 problemas presentaron esta característica, de los cuales en la S1 se inventaron 31 problemas formados en su mayoría por las estructuras semánticas combinación-isomorfismo (42,4%), combinación-isomorfismo-cambio (24,2%), mientras que en la S2 dos inventaron 32 problemas que en su mayoría están formados por las estructuras semánticas isomorfismo-combinación-cambio (15,6%), isomorfismo-combinación (15,6%), cambio-isomorfismo (6,3%), combinación-cambio (6,3%), cambio-isomorfismo (6,3%). Por ejemplo, el problema 6G8-S1 se identificó con estructura semántica cambio e isomorfismo:


3 amigas van a el cine y quieren ver la pelicula 007 spectre y van a comprar unas boletas para el lunes con la tarjeta cliente fiel ¿cuanto pagan los 3 amigos ?

El problema 8G7-S1, es un ejemplo de problema con estructura combinación-isomorfismo:


Si los 4 amigos quieren ir el dia lunes a ver una pelicula en 2D y entre todos 4 reunen 60.000 pesos Cuanto les quedara despues de pagar las 4 entradas ?

Cantidad de relaciones semánticas distintas

En este subtítulo se describe la cantidad de relaciones semánticas distintas presentes en los problemas inventados por los estudiantes, siendo esta variable muy importante a la hora de identificar el número de etapas que tenía cada invención.

En la siguiente distribución se describe la cantidad de relaciones distintas.

Tabla 12. Distribución de la cantidad de relaciones semánticas distintas inventadas por los estudiantes en relación con la situación y grado de escolaridad.

Cantidad de relaciones semánticas diferentes	***S1***						***S2***					
	6	***7***	***8***	***9***	***Total***	***%***	***6***	***7***	***8***	***9***	***Total***	***%***
Una relación	3	4	3	3	13	29,5	7	6	5	3	21	53,8
Dos relaciones	6	5	5	5	21	47,8	2	4	4	1	11	28,2
Tres relaciones		2	5	3	10	22,7	1	3		3	7	18
Total	9	11	13	11	44	100	10	13	9	7	39	100

Se observa que hay mayor proporción de problemas con dos o más relaciones semánticas distintas en la S1 (70,5%), respecto a la S2, pues en esta se destaca que la mayoría de problemas posee una relación semántica (53,8%).

De la tabla se deduce que el promedio de relaciones semánticas distintas en cada situación es muy parecido, pues se encontró que en la primera hay mayor promedio (1,93 relaciones distintas aproximadamente), mientras que, en la segunda fue menor (1,6). El procedimiento para sacar este promedio fue dividir la sumatoria de los productos del número de relaciones por el número de problemas inventados en cada relación (la evidencia se puede rescatar de la tabla inmediatamente anterior).

Análisis componente tipos de pensamiento matemático del ministerio de educación nacional

En los siguientes resultados se evidenciarán las invenciones de los estudiantes en cuanto al tipo de pensamiento matemático que presenta cada problema en las dos situaciones por cada grado de escolaridad. Al parecer los estudiantes tienen diferencias notables en cuanto a los tipos de pensamiento que utilizan para inventar problemas. Por ejemplo, el problema 9G7-S2 es del tipo de pensamiento numérico:

Formulación del problema

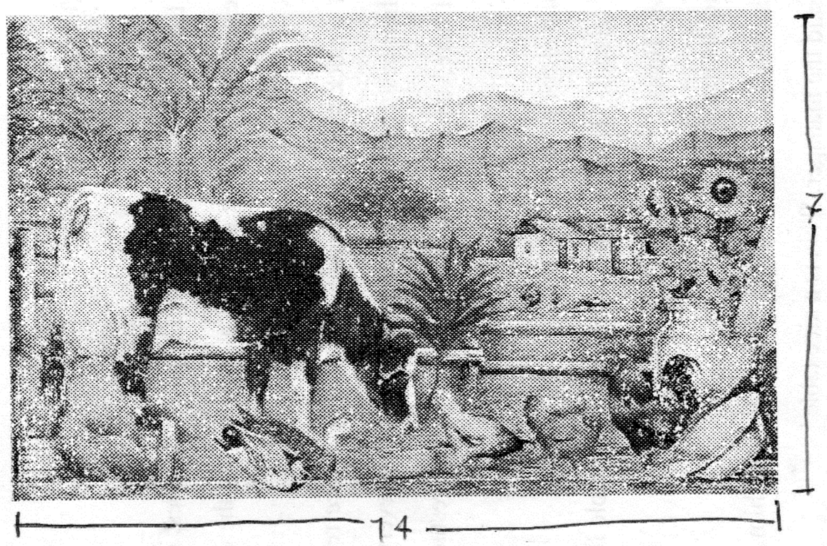
✓ Andres quiere comprar 3 gallinas, 2 girasoles y 1 vaca. Cuanto tiene que pagar teniendo en cuenta que una gallina vale 50.000 el girasol vale la mitad del precio de la gallina, y la vaca vale la sumatoria del costo de 4 gallinas y 5 girasoles.

O la invención 6G6-S1 que corresponde al tipo de pensamiento aleatorio:

Formulación del problema

✓ Los 4 amigos tienen lo exacto de dinero para entrar al cine pero todos quieren una diferente y todos se pelean y se separan se va cada uno para la que quiere los 4 amigos habian llebado un monto de 100.000 pesos si el que mas llebo llebo un 45% otro llebo un 20% otro llebo un 15% y el otro llebo 20% ¿Cuanto en dinero llebo cada joven por su cuenta?

Asimismo, se encuentra la invención 1G9-S2 del tipo de pensamiento variacional-numérico y métrico:



Formulación del problema

✓ hallar el area del rectangulo y si hubiera una diagonal imaginara que fuera desde la punta superior derecha hasta la punta inferior Izquierda cual fuera su valor.

Tabla 13. Distribución de los problemas inventados por los estudiantes en cada situación, en relación con los tipos de pensamiento y grado de escolaridad.

Tipo de pensamiento matemático	**A1**						**A2**					
	6	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Total**	**%**
Numérico	8	11	10	9	38	86,4	10	7	2	4	23	59
Métrico									1		1	2,6
Aleatorio	1		1		2	4,5						
Variacional								1	2		3	7,6
Numérico-Aleatorio			2	1	3	6,8		1			1	2,6
Numérico- Aleatorio-Variacional				1	1	2,3						
Numérico-Métrico								2			2	5,2
Numérico-Variacional								2		1	3	7,6
Métrico-Variacional									3		3	7,6
Numérico-Métrico-Variacional									1	1	2	5,2
Espacial-Numérico-Métrico										1	1	2,6
Total	9	11	13	11	44	100	10	13	9	7	39	100

Se observó en su mayoría tanto en la S1 como en la dos, la preferencia por inventar problemas con características del pensamiento numérico (86,4% y 59% respectivamente).

Además, pocos representantes de los otros pensamientos en las dos situaciones, en especial, el pensamiento espacial que solamente tuvo un problema, compartiendo su participación con los pensamientos numérico y métrico. Asimismo, se evidenció que en la S2 tuvieron más representantes en problemas con varios tipos de pensamiento, con respecto a la misma variable en la S1 (28,2% y 0% respectivamente).

En cuanto a la resolubilidad de los problemas, la gran mayoría de los problemas inventados en la S1 (72,7% de 44 problemas) tuvieron características propias del pensamiento numérico, asimismo en la S2, en este mismo pensamiento (59% de 39 problemas).

Análisis del componente riqueza de los problemas

En cuanto a la riqueza, se decidió medir qué tanta posee los problemas inventados por los estudiantes con los parámetros que se identifican en el capítulo tres (véase página 67), pues las variables a analizar permitían catalogar cada uno de los problemas estudiados y de esta manera dar indicios del uso de la invención de problemas como herramienta para observar la comprensión matemática de los estudiantes (Espinoza, 2011). De inmediato se presentan los resultados en las dos situaciones.

Tabla 14. Distribución de la riqueza de los problemas inventados por los estudiantes en la S1 y dos en términos de los puntos obtenidos a partir de la ilustración 13.

	S1													S2													
Estudiante	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
Sexto	0	0	6	6	6	6	7	7	8	9	9			0	4	5	7	8	8	8	9	9	10	12		
Séptimo	4	4	4	6	7	8	8	8	8	11	12			6	8	8	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12
Octavo	4	5	6	7	7	7	8	10	11	11	12	12	13	0	6	7	7	8	8	10	11	11				
Noveno	4	5	5	7	8	9	10	10	10	11	12			0	4	4	6	7	8	10	11					

Como se puede observar los puntajes en la S1 oscilan entre los 0 puntos y los 13 puntos, diferencia no muy notable con respecto a la S2 que oscila entre los 0 y los 12 puntos.

Los siguientes son los resultados obtenidos luego de utilizar SPSS, a través de un contraste de hipótesis con un nivel de significancia de 0,05 en el que se confrontaron los resultados de cada grado en la S1, frente a los mismos grados en la S2: para evidencia se muestran los análisis hechos en SPSS:

Para grado sexto

Ilustración 11. Resumen contrastes de hipótesis para grado sexto dada la situación uno (S1) frente a la situación dos (S2).

	Hipótesis nula	Prueba	Significancia	Decisión
1	La mediana de las diferencias entre resultado y actividad es igual a cero	Prueba de Wilcoxon de los rangos con signo para muestras relacionadas	,000	Rechace la hipótesis nula

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es 0,05.

Esto significa que las puntaciones en la S1 fueron inferiores a las puntuaciones en la S2.

Para grado séptimo

Ilustración 12. Resumen contrastes de hipótesis para grado séptimo dada la situación uno (S1) frente a la situación dos (S2).

	Hipótesis nula	Prueba	Significancia	Decisión
1	La mediana de las diferencias entre resultado y actividad es igual a cero	Prueba de Wilcoxon de los rangos con signo para muestras relacionadas	,000	Rechace la hipótesis nula

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es 0,05.

Esto significa que las puntaciones en la S1 fueron inferiores a las puntuaciones en la S2.

Para grado octavo

Ilustración 13. Resumen contrastes de hipótesis para grado octavo dada la situación uno (S1) frente a la situación dos (S2).

	Hipótesis nula	Prueba	Significancia	Decisión
1	La mediana de las diferencias entre resultado y actividad es igual a cero	Prueba de Wilcoxon de los rangos con signo para muestras relacionadas	,000	Rechace la hipótesis nula

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es 0,05.

Esto significa que las puntaciones en la S2 fueron inferiores a las puntuaciones en la S1.

Para grado noveno

Ilustración 14. Resumen contrastes de hipótesis para grado noveno dada la situación uno (S1) frente a la situación dos (S2).

	Hipótesis nula	Prueba	Significancia	Decisión
1	La mediana de las diferencias entre resultado y actividad es igual a cero	Prueba de Wilcoxon de los rangos con signo para muestras relacionadas	,000	Rechace la hipótesis nula

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es 0,05.

Esto significa que las puntaciones en la S2 fueron inferiores a las puntuaciones en la S1.

Concluyendo de esta manera estadísticamente, que los puntajes de cada grado frente a cada situación no presentan diferencias significativas.

CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones del estudio, respondiendo a la pregunta investigación y expresando los resultados de los objetivos específicos. Es preciso recordar que la pregunta de investigación plantea la necesidad de caracterizar los enunciados elaborados por los estudiantes y los objetivos específicos pretenden ser el medio por el cual se responda a la pregunta, a través de la creación de situaciones que permitan a los estudiantes inventar problemas que posteriormente se describirán y caracterizarán.

La S1 presenta una situación en la que se muestra una cartelera de cine por cada día de la semana, en diferentes dimensiones con su respectivo precio, mientras que la S2 muestra una imagen de un espacio campestre, similar al de una finca.

Luego de resolver todos los problemas inventados por los estudiantes y realizar una detallada exploración, se destaca que trece de ellos, en las dos situaciones, fueron considerados no resolubles y que, de éstos, cuatro resultaron ser no matemáticos y los restantes incompletos, pero preciados para su análisis. Es así que se lograron estudiar 83 de los 87 problemas elaborados, evidenciando que hubo menos problemas incompletos en la S2 que en la uno (S1). En cuanto a qué características presentan los enunciados elaborados por los estudiantes respecto a las variables de estudio, se puede escribir que:

Respecto al componente sintáctico, el promedio de proposiciones en la S2 fue mayor en relación a la S1, además, más de la mitad de los problemas inventados por los estudiantes mantenían en cinco o más proposiciones las longitudes de los enunciados, contra mucho menos de la mitad, en la S1, en la misma característica. También se pudieron encontrar que las diferencias con respecto a la no resolubilidad de los problemas frente a la cantidad de proposiciones por cada uno de los grados en las dos situaciones, son evidentemente significativas, pues en la S2 resaltó que hubo cero números de problemas matemáticos no resolubles y siete con las mismas características en la S1.

Del tipo de proposición interrogativa se pudo deducir, que el más utilizado en las dos situaciones fue de asignación y además que en la S2 fue en la que más se usó. Resumiendo, se concluye que la S2, propuso un mejor ambiente para la *invención* de los problemas de este tipo de componente, por parte de los estudiantes.

En relación al componente de estructura matemática, se destaca que la estructura operatoria más común en las dos situaciones es la mixta, sin embargo, se encontró que, en la S1, fue mayor el número de problemas planteados con esta característica que en la S2. El tipo de operación utilizada en las invenciones de los estudiantes no presenta diferencias significativas en las dos situaciones.

En cuanto al componente semántico, en la S2, los problemas aditivos con una sola estructura semántica fueron más numerosos frente a los de la S1, resultando ser la estructura semántica de cambio la más común en ambas situaciones y la de igualación la que quedó sin utilizar, lo que para el estudio significa que en la S1 hubo más variedad de estructuras en los problemas inventados por los estudiantes. No obstante, en estos problemas que presentaban la característica de ser Aditivos y mixtos, y en los inventados en la S2 con la misma particularidad, sobresalió la estructura semántica de combinación.

Para los problemas multiplicativos inventados en las dos situaciones, tanto los que tienen sólo una estructura como los que tienen más de una, se concluye que domina el isomorfismo de medidas y se destaca la ausencia de la comparación multiplicativa, sin embargo, el producto de medidas presenta un solo ejercicio en las dos situaciones. En cuanto al número de relaciones semánticas diferentes en las dos situaciones, se puede deducir que la S1 propuso un mejor contexto para elaborar problemas con diferentes relaciones semánticas en un mismo enunciado, es decir, más de la mitad de los estudiantes en la S1 inventaron problemas que tenían dos o más relaciones, mientras que, en la S2, esta característica se redujo a una sola relación.

Asimismo, se encontró que el tipo de pensamiento matemático más usado en las dos situaciones fue el numérico. No obstante, la S2 influyó para que algunos estudiantes inventaran problemas con más de un tipo de pensamiento matemático. A pesar de las diferencias encontradas en el análisis de cada unidad, el componente Riqueza de los problemas nos permite concluir que tales diferencias no son significativas, pero nos ayuda a observar detalladamente qué tipo de componentes se ven enriquecidos con determinada situación.

Después de haber realizado una revisión general de las producciones de los estudiantes se puede concluir que, pueden inventar enunciados en dos contextos diferentes y generar propuestas de problemas que motivan el aprendizaje de las matemáticas. Además, la experiencia fue gratificante para el investigador, pues se detectó gran participación e interés en la actividad, asimismo, se puede ultimar que la invención de problemas debería ser más utilizada en las clases de matemáticas.

Por último, las producciones de los estudiantes fueron descritas en detalle en cinco componentes (capítulo IV), resaltando el hecho de que, conociendo las preferencias de objetos o actividades, algunos estudiantes pueden ser influenciados a formular problemas de interés en el ámbito de la comprensión de las matemáticas.

Reflexiones y recomendaciones

Habría sido interesante haber desarrollado la investigación con la resolución de cada uno de los problemas por parte de los estudiantes, para de esta manera confrontar los planteamientos después de la invención, pues en algunos casos los problemas inventados fueron fáciles de solucionar, lo que en mi parecer habría provocado la formulación de enunciados más enriquecidos, pues la experiencia en mi vida profesional se atreve a afirmar que los retos difíciles para los jóvenes de hoy, son un detonante en la creación de nuevos enunciados matemáticos.

A pesar de que las dos situaciones se construyen a partir de una encuesta sobre los lugares preferidos de esparcimiento, una estimulación dirigida, encaminada a proporcionar contextos pertinentes, podría inducir a la invención de problemas más creativos e interesantes en diferentes tipos de pensamiento. De esta forma, potenciaríamos el aprendizaje de nuevos conocimientos matemáticos.

Mi interés siempre se ha encaminado en observar con más detenimiento a aquellos estudiantes con capacidades excepcionales en matemáticas y creo que la identificación (y dentro de esta, la definición de lo que es un estudiante talentoso en matemáticas), clasificación y potenciación de este grupo a través de la invención de problemas matemáticos ayudaría a una minoría invisibilisada por las prácticas pedagógicas en nuestro país.

Luego, esta es una excelente oportunidad para explorar nuevas alternativas en la enseñanza de las matemáticas y creo estar en lo correcto cuando afirmo que la actividad de inventar problemas es un campo que apenas empieza a ser recorrido y que hasta el momento tiene buenas expectativas.

Para futuros estudios en la enseñanza de las matemáticas se recomienda la invención de problemas matemáticos en contextos agradables para la escritura de los enunciados, y especiales para influenciar el conocimiento de temas específicos en los niveles de educación básica, media y universitaria.

Referencias

Akay, H. y Boz, N. (2010). The Effect of Problem Posing Oriented Analyses-II Course on the Attitudes toward Mathematics and Mathematics Self-Efficacy of Elementary Prospective Mathematics Teachers. Australian Journal of Teacher Education, 35(1), 59-75.

Ayllón, (2012). Invención - resolución de problemas por alumnos de educación primaria, Universidad de Granada, España.

Bermejo, V. & Rodríguez, P. (1987a). Análisis de los factores incidentes en la solución de problemas de adición: su estructura semántica, formulación y lugar de la incógnita. Enseñanza de las Ciencias, 5(1), 332-333.

Bermejo, V. & Rodríguez, P. (1987b). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. Infancia y Aprendizaje, 39-40, 71-81.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas, traducción Dilma Fregona. Libros del Zorzal.

Castro, Enrique. (1991). Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro, Enrique. (1994). Niveles de Comprensión en Problemas Verbales de Comparación Multiplicativa. Tésis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.

Castro, Enrique. (1995). Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa. Granada. Comares.

Castro, Enrique. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo Ricardo; Gómez Bernardo; Camacho Matías; Blanco Lorenzo (Eds.). Investigación en Educación Matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 113-140). Basajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper" / Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Castro, Encarnación. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. Universidad de Granada, España.

Cazares, J., Castro Enrique & Rico L. 1998. La Invención De Problemas En Escolares De Primaria. Un Estudio Evolutivo. (1998). Ediciones Universidad de Salamanca. Aula, 10, 1998, pp. 19-39.

Cázares, J. (2000). La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo. Memoria de tercer ciclo. Universidad de Granada.

Cázares, J., Castro E. & Rico L. (2009). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo. Aula, 10. Recuperado de http://revistas.usal.es/index.php/0214-3402/article/view/3529.

Cai J., Moyer J., Wang N., Hwang S., Nie B., Garber T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. Educ Stud Math 83:57–69.

Edward A. Silver, 2013. Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. Educ Stud Math (2013) 83:157–162.

Ellerton N. (1986). Children’s made up mathematics problems- A new perspective on talented mathematicians.Educational Studies in Mathematics, 17, 261-271.

English, L. (1997). The development of fifth-grade children’s problem-posing abilities. Educational Studies in Mathematics, 34,183-217.

Espinoza J., Lupiañez J., Segovia I. (2013). La invención de problemas y sus ámbitos en educación matemática. (http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/).

Estándares básicos de competencias en Matemáticas, serie lineamientos curriculares, Bogotá, (1998).

Greeno, J. C. (1978). A study of problem solving. En R. Glacerm (Ed.), Advance in instructional psychology (Vol. 4, pp. 35-71). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ivars P. & Fenández C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. Recuperado de www.redalyc.org/articulo.oa?id=40545377002.

Kesan, C., Kaya, D & Güvercin, S. (2010). The Effect of Problem Posing Approach to the Gifted Student’s Mathematical Abilities. International Online Journal of Educational Sciences, 2(3), 677-687.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problema com from? En A. Shoenfeld (Ed.) Cognitive science and mathematics education. (pp 123-148). New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates.

Koichu B. & Kontorovich I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. Educ Stud Math 83:71–86.

Kwek, M. L. & Lye, W. L. (2008). Using problem-posing as an assessment tool. Trabajo presentado en 10° Asia Pacific conference on Giftedness Singapore, Singapur. Recuperado de http://hkage.org.hk/en/events/080714_10th_APCG.htm.

La teoría de los campos conceptuales (1990). Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10,nº 2, 3, pp. 133-170, 1990. CNRS y Université René Descartes, traducción Juan D. Godino.

Leung, S. (1994). On analyzing problem posing processess: A study of prospective elemntary teachers differing in mathematics knowledge. In J.P. Da Ponte y J. F. Matos (Eds.), Proceedings of the 18th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 3 (pp. 168-175). Lisbon, Portugal: Author.

Leung, S., Silver, E. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective Elementary school teachers. Mathematics Education Research Journal, 9(1), 5-24.

Lineamientos curriculares, Áreas obligatorias y fundamentales (1998). Editorial Magisterio. pp. 41-42.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s. Reston, VA: El autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School of Mathematics. Reston, VA: El autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principies and Standards for School Mathematics. Reston, VA: El autor.

Nesher, P., Greeno, J. G. y Riley, M. S. (1982), The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction, Educational Studies in Mathematics, Vol 13, págs. 373-394.

Nesher, P. (1976). Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems, Educational Studies in Mathematics, 7, pp. 369-388.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of adittion and Subtraction Word problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds), *Adittion and Subtraction: A Cognitive Perspective.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Olson J. & Knott L. (2013). When a problem is more than a teacher’s question. Educ Stud Math. 83:27–36.

Pelczer, I., Gamboa F. (2008). Problem posing strategies of mathematically gifted students. En R. Leikin (Ed.), Proccedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students, (pp 193-199). Haifa, Israel.

Polya, G. (1979).Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). Problemas aritméticos. Madrid: Síntesis.

Pupo, A. J. I., & Iriarte, J. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. Zona Próxima, (15) Retrieved from http://search.proquest.com/docview/1435668677?accountid=41027

Puig, L. y Cerdán, F. (1989). Problemas aritméticos escolares. (Síntesis: Madrid).

Resnick L. B. (1987). Education and learning to think. Washintong D.C.: National Academy.

Silva Córdova Carlos, (2006). Educación en matemática y procesos metacognitivos en el aprendizaje. Centro de investigación. Universidad La Salle, vol. 7, núm. 26, julio-diciembre, 2006, pp. 81-91, México. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=34202606

Silver, E., Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students.Journal for Research in Mathematics Education, 27(5), 521-539.

Silver y Cai (2005). Assessing students' mathematical problem posing. Teaching Children Mathematics, 12(3), 129-135.

Silver, E. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. Educ Stud Math 83:157–162.

Silver, E. & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. Journal for Research in Mathematics Education, 27(5), 521-539.

Silver, E. A. & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. Teaching Children Mathematics, 12(3), 129-135.

Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S. y Kenney, P. (1996). Posing mathematical problem: An exploratory study. Journal for research in matehematics education. 27(3), 293-309.

Stoyanova, E. (1996): Developing a Framework for Research into student's problems posing in School mathematics.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), Research in Mathematics Education: a contemporary perspective. (pp 164-185). Edit Cowan University: MASTEC.

Stickles R. (2010). An Analysis of Secondary and Middle School Teachers' Mathematical Problem Posing. The Research Council on Mathematics Learning, Volume 3, Number 2, 1-34.

Tichá M. & Hošpesová A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. Educ Stud Math 83:133–1437.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), Acquisitions of mathematics concepts and processes (pp. 127-174). London: Academy Press.

Vergnaud, G. (l995): El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las Matemáticas en la escuela. México: Trillas.

ANEXO A

Tabla 15. Transcripciones de los problemas inventados por los estudiantes en la situación uno (S1).

S1	Enunciado
1G6	Unos amigos van al cine, uno de ellos dice: - Veamos *"Actividad paranormal"* Y el otro dice: - No, esa película no, que a mí me da mucho miedo. Todos los demás se burlan y dicen: "Bueno, no importa". Entonces, todos se ponen de acuerdo en mirar la película "Destino final V". Era un día viernes e iban a pagar con la "tarjeta cliente fiel", pero no la tienen, entonces, necesitan comprarla y les cuesta \$8000. Compraron las entradas y cada uno aportó lo que le correspondía. Vieron la película y fueron felices. ¿Cuánto aportó cada uno? ¿Cuánto les costaron las entradas en total? ¿Cuánto les costó la tarjeta, con lo que les costó la película con el "tarjeta cliente fiel"?
2G6	Los amigos fueron un viernes en 2D, pagaron y les dieron un regreso de \$5000. ¿Cuánto dinero pagaron los amigos?
3G6	Juan, Pablo y Andrés visitan el cine y quieren ver *"Actividad paranormal"* el lunes en 2D primero y luego en 3D. Juan tenía solo \$15000 pero no le alcanzaba para las dos boletas. Pablo tenía \$18250, y tampoco le alcanzaba; Andrés tenía \$12388 pero tampoco le alcanzaba. ¿Cuánto les falta a todos para las 6 boletas?
4G6 (I)	Los estudiantes quieren ir a Cine a ver la película *"actividad paranormal"* el lunes festivo, pero la boleta es muy costosa. Pero quieren saber cuánto les costaría la entrada en total, si tienen la "tarjeta de cliente fiel". Pero si van 4 amigos, ¿cuánto costaría el cine para todos?
5G6	Si vas a cine con 6 amigos a ver la película *"Destino final V"* con la tarjeta Cliente fiel un miércoles a las 12:00 m, ¿Cuánto debes pagar por tus amigos?

6G6	Cuatro amigos tienen el dinero exacto para entrar al cine, pero cada uno quiere ver una película diferente, se pelean y se separan, y cada uno se mira la película que quería ver. Los cuatro amigos habían llevado un monto de $100.000. Si el niño que más llevó dinero, levó un 45%, otro llevó un 20%, otro llevó un 15% y el último llevó 20% ¿Cuánto dinero llevó cada joven por su cuenta?
7G6	Cuatro amigos decidieron ver la película *“Actividad paranormal”* en 3D y en 2D el lunes y van a pagar con la “tarjeta de cliente fiel”. ¿Cuánto tienen que pagar por las 4 boletas?
8G6	Cuatro amigos deciden ver la película *007 Spectre*. En el momento de entrar al cine uno de los amigos tiene un billete de $20000 y la película cuesta $15000. El amigo pagó con un billete de $20000 ¿Cuánto dinero le tienen que devolver?
9G6	La película *007 Spectre* cuesta $7000, pero Pepito tenía $5000 y 4 monedas de $500. ¿A Pepito le alcanza el dinero? Si o no ¿Por qué?
10G6	No matemático
11G6	No matemático
1G7 (I)	Dos de los cuatro amigos son fanáticos de las películas. Esta semana han ido 5 veces al cine: lunes, *A la *&$%! Con los Zombis*; martes, *Destino Final V*; miércoles, *El Último Cazador de Brujas*; jueves, *007 Spectre*; viernes, *Actividad Paranormal*. Ellos prefieren ver las películas en 2D, tienen tarjeta cliente fiel. Los otros dos amigos no sacan mucho tiempo para ir al cine. Esta semana han ido tres veces, decidieron ver una de las películas dos veces en ambas dimensiones: *Destino Final V*, sábado; *Actividad Paranormal* en 2D, Domingo; *Actividad Paranormal* en 3D, estos dos amigos no tienen tarjeta cliente fiel. ¿Cuánto han gastado los cuatro amigos esta semana en el cine?
2G7 (I)	Si una persona se va a ver *Destino Final V* con *TCF* y decide también invitar a un amigo, pero el amigo paga sin *TCF*, ¿Cuánta plata gastaron los dos en total?
3G7	Cuánto gastan los niños que ven las siguientes películas: *A la *&$%! Con los*

	Zombis y *Actividad Paranormal* si van los miércoles y los viernes en 2D.
4G7	Si hoy es lunes, ¿cuánto te costará la función de *Actividad Paranormal* y *Destino Final V* en 13 días?
5G7	Si Juan va al cine con dos amigos un viernes a ver *Actividad Paranormal* en 3D, ¿cuánto dinero gastará si no tiene *TCF*?, ¿cuánto dinero gastará con *TCF*?
6G7	Calcular cuál es el promedio que se gastó si van lunes 2D normal, martes 3D *TCF* y viernes 3D.
7G7	Dos amigos van el jueves a ver *Actividad Paranormal* en 3D. Consigo traen $40000, ¿cuánto dinero les sobra?
8G7 (3)	Si los cuatro amigos quieren ir el día lunes a ver una película en 2D y entre todos cuatro reúnen 60000 pesos. ¿Cuánto les quedará después de pagar las cuatro entradas?
9G7	Con la anterior información hallar el valor total si los cuatro quieren ver *Actividad Paranormal* en 3D un lunes y no tienen *TCF*. ¿Cuál será el precio sin la tarjeta y la película *A la *&$%! Con los Zombis en 2D* un miércoles?
10G7 (I)	Pedro, Lucas, Juan y Anna quieren ir a cine. Entre los cuatro juntan 50000 pesos. ¿Cuánto gastaran si van el viernes a la película *007 Spectre* en 3D, sabiendo que Pedro y Anna tienen *TCF*?
11G7 (2)	Juan, María, Pedro y Esteban tomaron la decisión de ir al cine un día jueves. ¿Cuánto dar cada uno y cuánto sería el total teniendo en cuenta que María y Esteban tienen *TCF*?, ¿y van a ver *Destino Final V* en 3D?
1G8	Siete amigos deciden ir a cine un día por la mañana a ver una película (*Actividad Paranormal*) en 3D, ¿en cuánto les quedaría todo, si por la compra de las boletas les hacen un descuento del 15%?
2G8	Juan tiene 3 amigos y quiere llevar a dos a la película *Destino Final V* y al otro a *Actividad Paranormal*, ¿cuánto le costaría a Juan si lleva a los 2 amigos el martes a 3D y el otro el jueves en 2D?
3G8	Si los cuatro amigos van a ver el lunes una película (*Destino Final V*) y tienen *TCF* y un viernes a ver otra película (*007 Spectre*) sin *TCF*. ¿Cuánto

	sería el total de sus gastos?
4G8	Hay 5 amigos que quieren ir a cine un jueves festivo, 2 va a ir a ver *Destino Final V*, de los cuales, uno tiene *TCF*, los otros 3 van a ir a ver *Actividad Paranormal* en 2D, de los cuales, 2 tienen *TCF*, calcular cuánto tienen que reunir entre los 3 de *Actividad Paranormal* y los dos de *Destino Final V*.
5G8	Cuatro amigos van al cine, van a ver *Destino Final V* en 3D el día viernes. Después llega otro amigo y los invita a entrar. El amigo que va a pagar se arrepiente y les dice que cada uno pague el 15% de su boleta. ¿Cuánto pagarían antes de que llegara el 5° amigo y cuánto pagan después de que llega el 5° amigo?
6G8	3 amigos van a ver al cine y quieren ver la película *007 Spectre* y van a comprar unas boletas para el lunes con la tarjeta cliente fiel, ¿cuánto pagan los 3 amigos?
7G8	Si Juan va a cine todos los lunes y viernes a ver *Destino Final V*, ¿cuánto le sale la cuenta en un mes?
8G8 (I)	En una película llamada *Actividad Paranormal* se vendieron 14 boletas, pero el caso fue que 3 se vendieron el lunes, 4 el martes, 1 el miércoles, 3 el jueves y las otras 3 el viernes, sábado y domingo. ¿Cuánto dinero gastaron si el lunes una de las boletas era en 2D y las otras 2 en 3D; el martes 2 eran en 2D y las otras eran *TCF*, la del miércoles era en 3D, una del jueves era 2D y las otras eran con *TCF*, y las del viernes, sábado y domingo eran con *TCF*?
9G8	Teniendo en cuenta esto, ¿cuánto tendrán que pagar los cuatro amigos sabiendo que van a ir el martes a ver una película en 2D y el sábado en 3D?
10G8	Juan, Lisa, Camilo y Lina deciden entrar cada uno a su película preferida un viernes, Juan quiere ver *Destino Final V* en 3D, Luisa quiere ver *007 Spectre* en 2D con *TCF*, Camilo quiere ver *Actividad Paranormal* en 3D con *TCF* y Lina quiere ver *Destino Final* en 3D. Si por comprar dos boletas para una misma película (Juan y Lina) les rebajan el 20%. ¿Cuánto tienen que pagar en total los cuatro?
11G8	Si deciden ver *Destino Final V* y sólo dos de ellos tienen *TCF*, ¿qué día en qué dimensión sale más económico?

12G8	Si los amigos son clientes fieles y van un viernes a ver *Actividad Paranormal* en 2D, ¿cuánto dinero deberán pagar?
13G8	Si 4 amigos desean ir a cine a ver *Actividad Paranormal* en 3D el día jueves y sólo uno de ellos posee *TCF*, ¿cuánto tendrían que cancelar para entrar?, si cuentan con 75000, ¿cuánto utilizarían?, ¿cuánto sobraría para comer?
1G9 (I)	El día lunes los 4 amigos fueron a ver *Destino Final V* sin tarjeta cliente fiel, el día martes fueron con *TCF* y vieron *A la *&$%! Con los Zombis*, al otro día solo fueron 2 amigos por la mañana y vieron *007 Spectre*, el día jueves vieron *Actividad Paranormal* los 4 amigos a ver *El último cazador de brujas*, y por ser jueves les hicieron un descuento del 35%, calcular todo lo gastado.
2G9	Si no tengo *TCF* y quiero ir a cine a ver una película en 2D y otra en 3D, ¿qué día me sale más barato?
3G9	Si el grado 9ª (15 estudiantes) quiere ir a cine a ver *Actividad Paranormal* el día viernes, y el día sábado se quieren ver *Destino Final V*, 8 estudiantes se van a verlas en 2D y 7 estudiantes en 3D, ¿cuánto pagaron en total?
4G9	Si los cuatro amigos están interesados por ver *Destino Final V* en 3D y van el jueves sin *TCF*, ¿cuánto pagarán en total?
5G9	Si los cuatro amigos van a ver las películas lunes, miércoles y viernes. El lunes van a ver *"Destino Final V"* en 3D, el miércoles *"007 Spectre"* en 2D y el viernes con *TCF "Actividad Paranormal"* en 3D. ¿Cuánto gastaron al final de la semana viendo películas?
6G9	Pedro tiene *TCF* y quiere ver todas las películas pro en diferentes días y el hace lo siguiente: El lunes, va a ver *Destino Final V* en 3D al medio día; el martes va a ver *A la *&$%! Con los Zombis* por la mañana; el jueves va a ver *007 Spectre* en la noche; el lunes le hacen un descuento del 32%, el martes un descuento del 43,43% y el jueves un descuento del 0,1%. Pedro tenía un presupuesto de 42000, ¿cuánto dinero se gastó o le sobró?
7G9	Si los 4 amigos van un jueves a cine y quieren ver *Actividad Paranormal* en 2D y en 3D. ¿Cuánto dinero tienen que reunir para ver la película de las 2 maneras, si uno de los amigos tiene *TCF*, pero solo la utiliza para él?

8G9 (I)	Si Andrés tiene 14000 pesos y quiere invitar a 3 personas, ¿qué día puede ir? Y ¿qué amigos no pueden ir?
9G9 (I)	Si los 4 amigos quieren ir a ver *007 Spectre* en 3D. ¿Qué día podrían ir de tal forma que les salga económico para comprar comida teniendo en cuenta que cada uno tiene 5000 pesos?
10G9	Si 4 amigos pagan 56000 pesos en total. ¿Cuánto paga cada uno?, ¿qué día fueron a cine?
11G9	Si dos de los amigos pagaron 26000 por ver la película, ¿cuál película vieron y qué día fueron?, y si los otros dos amigos quieren ver *Destino Final V* en 3D, pero sólo uno tiene *TCF*, ¿cuánto deben pagar en total?

ANEXO B

Tabla 16. Transcripciones de los problemas inventados por los estudiantes en la S2.

S2	Enunciados
1G6	¿Cuántos animales hay en la imagen?
2G6	Una vaca toma 25 litros de agua al día, ¿cuántos litros de agua toma en 1 mes?
3G6	Si hay 6 animales, le quito 3, le sumo 3, lo divido entre 2 y le sumo 5, ¿cuántos hay en la granja?
4G6	La vaca necesita pasar a la casa con una velocidad inicial $V_0 = 30m/s$. Al ir corriendo a la casa salta alcanzando un tiempo de 5s. Necesitas averiguar cuál fue su aceleración.
5G6 (F)	El granjero tiene 100 vacas, a la mañana siguiente el solo quiere sacarle la leche a 45 de ellas. ¿Cuántas vacas le sobraron?
6G6	En una finca había dos vacas y 5 gallinas, un día el granjero vendió una vaca y dos gallinas, al siguiente día llegó el granjero con el triple de vacas y el doble de gallinas, ¿cuántas vacas y gallinas hay en la granja?
7G6	En una finca hay una vaca, un gallo, 3 gallinas y 2 patos, ¿cuántos animales hay en total? Luego, un granjero compra las gallinas y un pato. ¿Cuántos animales quedan?
8G6	En una granja hay 1 vaca y 5 gallinas, aquí se venden los animales, un día llegó un señor y decidió comprar 4 animales de cualquier tipo. Gallinas $15000 Vacas 10 millones El señor decide llevarse 3 gallinas y la vaca. ¿Cuánto sería en total?

9G6 (D)	En una finca se quiere averiguar cuántos huevos se produce en un año, se observó que los primeros 6 meses se dan 100 huevos al cubo y el resto de meses del año, al cuadrado.
10G6	La gallina Paola tuvo trescientos cincuenta huevos. $3/4$ Los cocinaron, ¿cuántos le quedan?
11G6	María la gallina, pone 5 huevos por día y Juliana necesita que tenga 90 huevos, ¿cuántos días necesita María para poner 90 huevos?
1G7 (2)	Si la vaca me dio 3 litros de leche, la gallina 7 huevos y los patos en una semana 19 huevos, ¿cuántos huevos tengo, si ya me comí 5 huevos de pato y 3 de gallina?
2G7	Si en un corral de 20 metros cuadrados tengo 30 gallinas, ¿cuántas gallinas tendré para que estén en un corral de 5 metros cuadrados?
3G7	En una granja hay 20 vacas, 15 gallinas. Si las vacas dan 20 litros de leche al mes. ¿Cuántos meses tardarán en dar 180 litros?, si las gallinas ponen 30 huevos al mes, ¿cuántos meses tardarán en dar 270 huevos?
4G7 (2)	En una granja hay 300 gallinas, si el costo inicial de cada gallina es de 20000 pesos, pero le hacen un descuento del 15%, ¿cuál será su precio?
5G7	Una vaca come 360 Kg de pasto por semana, las gallinas también comen 60 gr de maíz diario, ¿cuánto comerán entre los dos alimentos durante un mes?
6G7	Si se tienen 203 gallinas en un corral y el dueño quiere vender ¾ de la cantidad actual. ¿Cuántas gallinas le quedan y cuántas gallinas vendió?
7G7	Si un huevo de gallina vale 5 pesos y la gallina pone: el lunes, 4; el martes, 1; el miércoles, 6; el jueves, 7; el viernes, 9; el sábado, 11 y el domingo, 2. ¿Cuántos huevos pondrá en Julio si los días festivos no pone?, ¿cuánto dinero ganará el campesino?
8G7	Si en una granja de 125 animales, el 13% son vacas, el 34% son gallinas, ¿cuántas patas hay?, ¿cuántas gallinas y vacas hay?
9G7	Andrés quiere comprar 13 gallinas, 2 girasoles y 1 vaca. ¿Cuánto tiene que pagar teniendo en cuenta que una gallina vale 50 000, el girasol vale la mitad del precio de la gallina y la vaca vale la suma de los precios de 4 gallinas y 3

	girasoles?
10G7	Si sabemos que la distancia de la vaca al pato es 1 metro, y de la casa a la cerca es de 10.5 metros y la gallina está perfectamente en frente de la vaca y paralelamente a la cerca a una distancia de metro y medio, ¿cuál es la distancia de la vaca a la casa?
11G7	Si con una vaca el granjero gana 35 000 pesos diarios, ¿cuánto ganará con 5 vacas en 6 meses?
12G7	Si una vaca cuesta 1 500 000, un pato 500 000, las gallinas 300 000 y el pavo 1 000 000, ¿cuánto dinero se gastará si compra 3 vacas, 5 patos, 10 gallinas y 2 patos?
13G7	Vaca + pollo = 60 Pollo – pato = 5 Cerdo + vaca= 90 Vaca + pollo + pato + cerdo = ?
1G8	En mi finca hay 35 personas. Nos han regalado por nuestra buena presentación dos vacas a cada señora y un pato a cada señor. Si en total han sido 55 animales que repartieron, ¿cuántas señoras y señores hay en la finca?
2G8	¿Cuántos litros de leche saca la vaca en un mes, si en un día normalmente saca 10/9 de litro de leche?
3G8	Se sabe que el recuadro de parcela que está destinado a la vaca tiene un tamaño de 100 m^2. Suponiendo que el pasto de este recuadro no vuelve a crecer. ¿Cuánto tardará la vaca en acabar con el pasto si sabemos que come 50 cm^2 cada 5 minutos?
4G8	Si una vaca ocupa 536 m^2 de 1000 m^2, si el dueño va a comprar 2 500 m^2 extras, ¿cuántas vacas podrán meter en el rancho?
5G8	Si en una granja hay 7 vacas y 15 pollos, el concentrado para las vacas cuesta 10 700 el kilo, el de los pollos 12 800 el kilo. Por otra parte, si las vacas comen 25 250 gramos al mes, los pollos 1 525 gramos al mes. ¿Cuánto debe gastar el granjero en un año?
6G8	En una granja hay una vaca, un cerdo, un pato y 4 gallinas. Si la vaca pesa 40

	Kg, el cerdo 20 Kg, el pato 2 Kg y el peso total de todos los animales es de 90 Kg, ¿cuánto pesa cada gallina?
7G8	Si hay un pato, tres gallinas, un gallo y una vaca, ¿cuántas patas hay?
8G8	Un girasol sale cada 11 días, una gallina pone 3 huevos cada 10. ¿Cuántos girasoles saldrán y cuántos huevos habrá en 3 meses?
9G8	Si una vaca y dos gallinas sostienen a una familia de 5 personas dándole 3 litros de leche y 4 huevos durante una semana, ¿cuántas vacas y gallinas se necesitarían para sostener a un grupo de 32 personas durante la misma semana?
1G9	Hallar el área del rectángulo. Si hubiera una diagonal imaginaria que fuera desde la punta superior derecha hasta la punta inferior izquierda, ¿cuál sería su valor?
2G9	Se sabe que la vaca y las aves están en un terreno de 30 m^2, la vaca come al día 2 m^2 de pasto y las aves sólo 0,5 m^2, si en la noche el pasto crece 1,5 m^2 de pasto, ¿cuánto tiempo les tomaría a los animales comerse todo el pasto del terreno?, y si se mueren las aves ¿cuánto tiempo les llevaría a la vaca?
3G9	Si hay 116 patas y 34 cabezas en una granja, ¿cuántas gallinas y vacas hay?
4G9	Si en una finca hay una familia de ocho personas queriendo hacer el almuerzo, pero no saben cuántas gallinas matar para el sancocho, preguntan a los integrantes sobre las preferencias en cuanto a la presa que escogerían: a seis les gusta comer las piernas y al resto muslo, pero todos quieren comer alas. ¿Cuántas gallinas deben matar como mínimo?
5G9	Si necesito 15 patos, ¿cuántos me faltan para tenerlos? (observar la imagen)
6G9	No matemático
7G9	No matemático
8G9	Teniendo en cuenta que en la granja tenemos tres cabezas de gallinas, una de pato y una de vaca, ¿cuántas patas hay?

Convenciones:

I: incompleto

F: física

D: desarrollado

Los problemas que están numerados entre paréntesis son porque *inventaron* más de un problema.