FORTALECIMIENTO DE LA HABILIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA

GERMÁN ALONSO GONZALIAS GUERRERO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE BECAS PARA LA EXCELENCIA DOCENTE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL
SANTANDER DE QUILICHAO, JUNIO DE 2018

FORTALECIMIENTO DE LA HABILIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA

Trabajo para optar al título de

MAGISTER EN EDUCACIÓN- MODALIDAD PROFUNDIZACIÓN

GERMÁN ALONSO GONZALIAS GUERRERO

DIRECTORA

Mg. LINA MARIA GALLEGO BERRIO.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICAS

PROGRAMA DE BECAS PARA LA EXCELENCIA DOCENTE

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

SANTANDER DE QUILICHAO, JUNIO DE 2018

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por darme la oportunidad de cumplir un nuevo logro.

A mi esposa María Suleyma por ser mi soporte y compañía y por su infinita paciencia y apoyo incondicional.

A mis padres y hermanas por enseñarme mucho de lo que sé y soy y por su apoyo constante.

A mi asesora del Trabajo de Investigación Magister Lina Gallego por sus acertadas orientaciones, guía y acompañamiento durante todo el desarrollo de este trabajo.

Al Ministerio de Educación Nacional por la oportunidad de poder cualificarme personal y profesionalmente por medio del Programa Becas para la Excelencia Docente.

A los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Ana Josefa Morales Duque, quienes fueron los protagonistas de la investigación.

Y, por último, a todas las personas que de una manera u otra estuvieron en diferentes momentos de esta etapa, proporcionando apoyo, amor y muchas enseñanzas.

Resumen

Este trabajo de investigación refiere al diseño, implementación y evaluación de una Secuencia Didáctica, basada en el método de Polya, con el cual se buscó fortalecer la habilidad de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Ana Josefa Morales Duque de Santander de Quilichao, mediante un estudio de casos. Se examinaron categorías de análisis como: comprensión, concepción, ejecución de un plan y visión retrospectiva, de la teoría del método Polya. Se diagnosticó y analizó el modo de proceder y los resultados obtenidos antes y después de la implementación de la propuesta. La aplicación de estas estrategias generó en los estudiantes aprendizajes significativos, que se vieron plasmados en una mejoría en los resultados en el área de matemáticas.

Palabras claves: Secuencia Didáctica, resolución de problemas, método Polya.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Anexos

Introducción[1]

El presente trabajo de investigación es motivado a partir de la experiencia en el aula al notar que los estudiantes no están siendo motivados por sus profesores para resolver problemas de matemáticas en general y en particular, problemas relacionados con la aplicación de la Ley del Seno y Coseno. Los estudiantes son encaminados por los profesores a dar solución a ejercicios de forma rutinaria y algorítmica, usando las leyes de forma mecánica, y de esta manera resuelven problemas propuestos sin darle un sentido lógico a lo que les están preguntando.

Ahora bien, la labor docente es muy importante para el diseño de una propuesta didáctica que provoque en el estudiante la participación activa en su proceso de aprendizaje y la motivación para el estudio de las matemáticas, en especial de la Ley del Seno y Coseno. Es el docente quien debe facilitar la comprensión de los contenidos expuestos, mediante una transposición didáctica adecuada que se aproxime a situaciones realistas, de manera que el estudiante sienta que lo que hace es realmente útil en un contexto extra matemático.

La resolución de problemas es una actividad primordial en la clase de matemáticas, no es únicamente un objetivo general a conseguir, sino que además es un instrumento pedagógico de primer orden. La habilidad para resolver problemas es una habilidad que se puede enseñar, y es básica para los estudiantes ya que deben usarla frecuentemente cuando dejen la escuela.

En la Institución Educativa Ana Josefa Morales Duque las matemáticas se trabajan con metodologías tradicionales, donde los docentes enfocan sus explicaciones en el uso de los diferentes algoritmos y muy poco en la aplicación en problemas rutinarios, y cuando se hace, se presentan problemas descontextualizados donde los estudiantes no muestran interés por solucionarlos. Es así como en el Plan de Mejoramiento Institucional 2016-2019 se estableció una

[1] Es de aclarar que el título real del trabajo es "Una secuencia didáctica para el fortalecimiento de la competencia de resolución de problemas en la aplicación de la Ley de senos y cosenos", pero por directrices administrativas se presenta el título inicial del trabajo.

meta orientada a reforzar las competencias matemáticas que presentan dificultades, y una de ellas es la resolución de problemas.

De acuerdo con los razonamientos anteriores, es evidente entonces la necesidad de unas estrategias de enseñanza diferentes que conduzcan a fortalecer la competencia de resolución de problemas en los estudiantes y es en este sentido que se realizó un estudio que se fundamenta en la teoría de resolución de problemas de Polya y se tuvo en cuenta las consideraciones hechas en el Modelo para el Desarrollo y Evaluación de Competencias Académicas (M-DECA) para el diseño y aplicación de la estrategia metodológica donde a partir de una serie de actividades se pueda potenciar la resolución de problemas, precisamente en la aplicación de la Ley del Seno y Coseno.

La investigación consta de cuatro capítulos. El Capítulo 1 desarrolla la Descripción del problema que incluye el planteamiento del problema, la justificación, objetivos, el contexto y los antecedentes de la investigación. El Capítulo 2 detalla el Referente Conceptual, resalta los aspectos más importantes de la Teoría de Resolución de Problemas. El Capítulo 3 presenta el Referente Metodológico, en él se traza la ruta a seguir para avanzar en el propósito planteado. Finalmente, el Capítulo 4, comprende el cierre de la investigación con la Discusión y las Conclusiones obtenidas en relación a los objetivos planteados y se proponen algunas recomendaciones y perspectivas para abordar otras investigaciones relacionadas al objeto matemático.

Capítulo 1. Descripción del Problema

El presente capítulo expone lo concerniente a la descripción del problema comenzando con el planteamiento del problema, la justificación y objetivos del trabajo de grado, el contexto y los antecedentes del objeto de estudio.

1.1 Planteamiento del Problema

Los bajos resultados en las evaluaciones de la Prueba Saber de los últimos tres años, muestran que los estudiantes de la Institución Educativa Ana Josefa Morales Duque presentan dificultades a la hora de enfrentarse a este tipo de evaluaciones estandarizadas. Estos exámenes evalúan competencias, de este modo, en las diversas preguntas se propone una situación problema en la que se deben aplicar los conocimientos adquiridos para tomar decisiones a la hora de elegir la respuesta acertada. Es conocido que los factores que inciden en el rendimiento académico de los estudiantes de preescolar, básica y media, están conformados por complejas situaciones: por un lado, los intereses individuales de los estudiantes y los profesores, por el otro, se encuentran los factores institucionales, administrativos, las políticas educativas del Estado. Todos ellos, mediados por el contexto social, cultural y familiar que permea la escuela.

Al respecto Gaviria & Barrientos (2001) analizaron los resultados de las pruebas de estado, encontrando que las características asociadas al plantel educativo inciden de manera significativa en el rendimiento y lo hacen en mayor medida que las variables socioeconómicas; sin embargo, no desconocen que el nivel de educación de los padres juega un papel fundamental en el desempeño. Además, en la Institución se trabaja poco la lectura crítica, la resolución de problemas y la manera como los estudiantes utilizan conceptos científicos en su vida cotidiana y, esto es la base de las pruebas estandarizadas aplicadas en Colombia en todos los niveles.

Al observar los resultados obtenidos por los estudiantes de la Institución Educativa Ana Josefa Morales Duque del grado décimo en el área de matemáticas, se nota que tienen una gran debilidad en el planteamiento y resolución de problemas, basados en las pruebas finales que se realizan cada periodo en la Institución en donde hay una serie de problemas para su solución y los resultados no son exitosos. Con base en esta información, se puede argumentar que los estudiantes no están preparados para resolver problemas con contextos no familiares, justificar sus procedimientos de solución y reflexionar sobre sus resultados, quieren presentar respuestas rápidas sin detenerse a analizar las variables de los problemas planteados, están más orientados a resolver problemas rutinarios que conllevan a un procedimiento algorítmico, usando métodos de forma mecánica, sin darle un sentido lógico a lo que están resolviendo.

Al mismo tiempo los docentes de educación secundaria basan sus clases en libros de texto descontextualizados, y por lo general estos inician con una breve explicación de los conceptos, definiciones, propiedades, resuelven algunos ejemplos y hablan muy poco de la resolución de problemas, es más, lo hacen de tal manera que no hay una secuencia didáctica que ayude a los docentes y a los propios alumnos a motivarse por aprender las matemáticas de una manera diferente a la tradicional. Es así como muchas veces los problemas no están situados en un contexto familiar o en un lenguaje cercano a los estudiantes, o la mayoría de las veces no presentan un desafío real o un interés particular para resolverlos, por lo tanto, no se involucra emocionalmente a los estudiantes (Martinez, 2002). En particular, cuando se enseña la Ley del Seno y Coseno, no se enfatiza adecuadamente la resolución de problemas relacionados con este objeto matemático y por consiguiente no se está contribuyendo a que los estudiantes exploren y consoliden sus conocimientos, lo cual ayudaría al desarrollo del pensamiento matemático.

Por todo lo anterior, se hace necesario diseñar una secuencia didáctica que permita fortalecer la habilidad de resolución de problemas en los estudiantes de la Institución Educativa Ana Josefa Morales Duque en problemas relacionados con la aplicación de la Ley del Seno y Coseno.

1.2 Justificación

Las matemáticas son una disciplina fundamental en el plan de estudio de cualquier nivel educativo, y la resolución de problemas ejerce un papel muy importante para la comprensión y aprendizaje de las matemáticas, es así como el MEN (2006) específica sobre la resolución de problemas que:

> Este es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos". (p. 52)

Desde los Estándares Básicos de Competencias emitidos por el Ministerio de Educación Nacional, se establece la necesidad de que el estudiante sea competente en la resolución de problemas y, a partir de esto, especifica como un Derecho Básico de Aprendizaje que el estudiante "Comprenda y utiliza la ley del seno y el coseno para resolver problemas de matemáticas y otras disciplinas que involucren triángulos no rectángulos" (MEN, 2014, p.3). Es por esto que se debe emplear una metodología enfocada hacia la resolución de problemas para que los estudiantes alcancen este derecho y no tenga dificultad con temas posteriores establecidos en el plan de estudios.

En efecto, con el desarrollo de este trabajo se pretende que los estudiantes tengan la oportunidad de acercarse a la Resolución de Problemas en el aula por medio de una estrategia metodológica. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea.

> Para encontrar su solución, es necesario hacer conexiones mentales donde se aplican los conocimientos antecedentes a situaciones prácticas. Al enfrentarse a este tipo de problemas, los alumnos descubren que no es suficiente aplicar una fórmula, hay que pensar y definir una estrategia, necesitan un tiempo de análisis y no habrá una respuesta automática y rápida cuando hay un problema. (Zorrilla, 2012)

El saber hacer, en matemáticas, tiene mucho que ver con la habilidad de resolver problemas, de encontrar pruebas, de examinar argumentos, de usar el lenguaje matemático con cierta fluidez, de reconocer conceptos matemáticos en situaciones concretas. La habilidad para resolver problemas es una de las habilidades básicas que los estudiantes deben tener a lo largo de sus vidas, y deben usarla frecuentemente cuando dejen la escuela.

Con la ayuda de la resolución de triángulos los estudiantes pueden solucionar casos prácticos que se presentan en la vida cotidiana, como encontrar el perímetro y áreas de lotes de forma triangular, hallar distancias y ángulos en situaciones donde el modelo se puede describir por un triángulo, etc. En matemáticas la importancia que presenta el tema de los triángulos es amplia, tanto en su aplicación a la vida diaria como en el campo profesional en carreras como ingenierías y arquitectura entre otras. En el mismo sentido cuando un estudiante tiene claro los métodos para la resolución de triángulos no rectángulos con toda seguridad tendrá elementos para modelar situaciones con la ley del seno y coseno, construcción de las identidades de trigonometría, temas de cinemática, estática y dinámica en física y temas de cálculo que involucran las funciones trigonométricas.

Ahora bien, es preciso fortalecer la habilidad de resolución de problemas en los estudiantes de grado décimo, debido a que en las clases se observan con vacíos cuando se les propone solucionar una situación empleado los conceptos y competencias ya trabajadas con antelación; se evidencia que no les es fácil detectar los datos que proporciona la situación problema y que mucho menos identifican las operaciones que favorecen la solución de la misma.

Con todo y lo anterior lo que se plantea es la necesidad de diseñar y desarrollar una estrategia didáctica que permita la organización de las situaciones de aprendizaje, que aporten rigurosidad y profundidad al tratamiento de los contenidos, sin descuidar su integración con los saberes e intereses abordados en el plan de estudios. Esta apuesta es la secuencia didáctica, definida por Camps (2003 citado por Pérez, 2005, p. 52) como “la estructura de acciones e interacciones relacionadas entre sí, intencionales, que se organizan para alcanzar un aprendizaje”. Lo que se pretende es proponer alternativas fundamentadas y consecuentes que orienten las prácticas de enseñanza y de este modo a los estudiantes se les facilite la comprensión de la aplicación de la trigonometría desde la resolución de triángulos. Para lograrlo se enfatiza en la resolución problemas fortaleciendo, a la vez, las competencias de interpretar, argumentar y proponer, dando estrategias para que los estudiantes puedan enfrentarse al planteamiento de diferentes situaciones, tanto teóricas como reales, utilizando para ello diferentes alternativas, llegando a la aprehensión del tema y que resulte útil en su vida cotidiana o en su vida profesional futura.

A partir de estas consideraciones, con este trabajo de investigación, se pretende dar respuesta al siguiente cuestionamiento:

¿El uso de una secuencia didáctica para trabajar la aplicación de la Ley de Senos y Cosenos, aporta al fortalecimiento de la competencia de resolución de problemas en los estudiantes del grado décimo uno de la Institución Educativa Ana Josefa Morales Duque?

1.3 Objetivos de la Investigación

Objetivo general

Contribuir al fortalecimiento de la competencia de resolución de problemas relacionados con la aplicación de la Ley de Senos y Cosenos mediante una secuencia didáctica con estudiantes del grado décimo uno de la Institución Educativa Ana Josefa Morales Duque.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general se pretende lograr los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar las posibles dificultades que presentan los estudiantes del grado décimo uno en la resolución de problemas relacionados con la aplicación de la ley del seno y coseno.
2. Diseñar una secuencia didáctica para desarrollar la habilidad de resolución de problemas relacionados con la aplicación de la ley del seno y coseno en los estudiantes del grado décimo uno.
3. Emplear la secuencia didáctica y medir la pertinencia y efectividad para el fortalecimiento de la habilidad de resolución de problemas.

1.4 Contexto

El municipio de Santander de Quilichao se encuentra ubicado en un punto estratégico para la movilización del comercio, esto ha permitido que confluyan muchas personas de otras localidades y de esta manera se presenta una gran diversidad cultural que debe ser atendida en los diferentes establecimientos educativos.

La Institución Educativa Ana Josefa Morales Duque está ubicada en el norte del Departamento del Cauca, Municipio de Santander de Quilichao. En la actualidad tiene una sede principal que cuenta con dos jornadas diurnas, cada una de las cuales tienen diferentes modalidades, en donde se atiende a los estudiantes de la básica secundaria y media. En la jornada de la mañana las modalidades son las siguientes: construcciones civiles, dibujo técnico, metalistería y ebanistería; en la tarde su especialidad es la Informática y la Tecnología, situación que la ha llevado a ser la única institución con este perfil en el norte del Cauca contribuyendo en la parte laboral del Municipio; y además tiene seis sedes las cuales son: Bello Horizonte, Libertador, San José, José Vicente Mina, La Milagrosa y Policarpa, en las cuales se atienden a los estudiantes de la básica primaria. En total, a la Institución asisten 2400 estudiantes. Cabe destacar que la institución es la única del casco urbano de Santander de Quilichao que es catalogada como un Establecimiento Educativo Afrocolombiano por contar con gran cantidad de estudiantes de esta etnia, siendo esta representada en un 53%, además el 28% son mestizos y el 19% son indígenas.

La población estudiantil que se intervino con este proyecto, son estudiantes del grado décimo uno de la jornada de la tarde que cuenta con veintidós estudiantes, con una edad promedio de 17 años, debido a factores como la repitencia y el desplazamiento de los jóvenes por motivos familiares o del conflicto armado.

Dentro del diagnóstico hecho, se realizó inicialmente una caracterización de los estudiantes, con el fin de distinguir o describir varios rasgos de estos. Uno de los primeros puntos fue el de conocer la clasificación por sexo, encontrándose que en el grupo hay mujeres y hombres por igual.

En el diagnóstico realizado también se tuvo en cuenta la parte académica, las observaciones y anotaciones en el diario de campo sobre el comportamiento de los estudiantes cuando trabajan en actividades individuales o grupales; y de qué actividades motivan y mejoran el desempeño frente a temas específicos. Esto es una de las bases para la formulación de la estrategia didáctica aplicada en la investigación.

Los estudiantes que tienen la facilidad de entender más rápido el tema tratado se enfocan en la solución de los ejercicios o problemas y solo requieren de la asesoría del docente en la verificación del resultado. En cambio, a algunos estudiantes, el trabajar de manera individual no les beneficia porque no tienen una metodología clara a la hora de enfrentarse a las diversas situaciones y no avanzan en la solución.

En las actividades grupales, los estudiantes buscan la guía de alguno que entienda bien el tema y que les pueda brindar una explicación a las dudas presentadas y así poder realizar bien las actividades propuestas. Cabe destacar que la formación de grupos es de plena libertad de los estudiantes, y que el trabajo es colaborativo y no de que trabajen unos y los otros copian lo producido. Los resultados en las actividades grupales son más fructíferos por la colaboración de los estudiantes, pero el objetivo del proyecto es que los estudiantes alcancen las competencias básicas para enfrentarse a la resolución de problemas.

En las Pruebas Saber del año 2016, la Institución estuvo focalizada para el análisis de los resultados y es así como además de las pruebas de los años 3°, 5°, 9° y 11 también presentaron los estudiantes del grado 7°. En lo concerniente a la prueba de matemática, se evaluaron las competencias de Razonamiento, Comunicación y Resolución de Problemas. Los resultados obtenidos en la prueba de matemáticas muestran la debilidad en la competencia de resolución de problemas.

Figura 1. Resultados en el área de matemáticas por competencia en I.E. Ana Josefa Morales Duque

1.5 Antecedentes

La búsqueda de antecedentes en diferentes bases de datos, revistas especializadas y eventos académicos dan cuenta de trabajos relacionados con la resolución de triángulos de cualquier tipo y con la resolución de problemas basados en el método propuesto por Polya. Cabe aclarar que no se consiguieron estudios donde coincidieran tanto el objeto matemático como el objeto de investigación (resolución de problemas). A continuación, se presentan algunas de estas investigaciones.

Torres (1999), en su investigación, manifestó la importancia de la resolución de triángulos en la contextualización de conceptos trigonométricos y mostró algunas dificultades que presentan los estudiantes a la hora de enfrentarse a ese tema, como el no utilizar el teorema de Pitágoras correctamente o no distinguir cuando usar la ley del Seno o Coseno. A partir de esto estableció su objetivo para el trabajo, el cual era incluir en la programación de matemáticas en 4o de E.S.O. (Educación Secundaria Obligatoria) la aplicación de la resolución de triángulos de forma que los alumnos tomaran conciencia de que es aplicable a situaciones reales. Para lograr su objetivo propuso una unidad didáctica basada en actividades fuera del aula, aplicando conocimientos en trigonometría con el fin de hacer mediciones de árboles, edificios, depósitos cilíndricos, etc. con apoyo del teodolito[2] y por medio de la medida de la sombra proyectada por

[2] Un teodolito es un instrumento que sirve para ubicar un objeto a cierta distancia mediante la medida de ángulos con respecto al horizonte y con respecto a los puntos cardinales.

el objeto a medir. Con la aplicación de la unidad didáctica los estudiantes presentaron más participación en las clases, mejoraron su habilidad en la resolución de triángulos y esto trajo mejores resultados en las pruebas internas.

Cortés & Galindo (2007) realizaron un estudio con estudiantes de segundo ciclo de ingeniería en la Universidad de la Salle, Bogotá, que tenía como objetivos: utilizar el modelo de Polya de resolución de problemas como estrategia didáctica para mejorar la interpretación de la integral definida, y evaluar los resultados de la aplicación del modelo mediante la resolución de problemas de la vida real. Para alcanzar estos objetivos utilizaron como metodología la investigación-acción. Formaron grupos de trabajo y entregaron una serie de problemas con las preguntas orientadoras para cada fase del método Polya. Concluyeron que el método Polya es una estrategia que genera creatividad intelectual en los estudiantes, se presenta mayor interrelación entre los estudiantes e ingenio para solucionar los problemas propuestos, y que utilizan la integral definida para modelar problemas de la vida diaria y las resuelven correctamente mediante el modelo de Polya.

Como debilidad en la propuesta anterior es la presencia de pocos problemas para su debida solución, de este modo los estudiantes no abordan algunos de los posibles escenarios en los que pueden aplicar el objeto matemático; además, los estudiantes pasan directamente a ejecutar los algoritmos pertinentes teniendo como falla que no se identifican los datos ni planean la solución.

En su trabajo de investigación Agudelo, Bedoya & Restrepo (2008) plantearon como objetivo general el de utilizar el método heurístico de George Polya para mejorar la capacidad de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de quinto (5) grado de básica primaria de la institución educativa Camilo Torres. Se realizó un trabajo investigativo cuantitativo, en el cual la variable dependiente era la capacidad resolutiva de problemas y una variable independiente que es el método heurístico de Polya. En la propuesta didáctica implementada los autores plantearon lecturas previas para interpretarlas, previo al planteamiento de los problemas propiamente dichos. Hubo variedad en los problemas planteados y esto fue de gran ayuda para que los estudiantes afianzaran esta metodología. Los resultados mostraron que el método Polya sirve para mejorar capacidad de la resolución de problemas en los estudiantes.

Un aspecto a mejorar es que se dedicó poco tiempo a implementar la estrategia didáctica, esto condujo a que los estudiantes realizaran los pasos del método, pero no se detuvieran a analizar si lo hecho era coherente con lo requerido en el problema.

De la Cruz, Estrada & Peña (2010) enfocaron su trabajo en la problemática que presentaban los estudiantes de décimo grado para el aprendizaje del teorema del seno y el coseno. Debido al déficit que mostraron los discentes para interpretar situaciones problema, argumentar al momento de resolverlas y proponer nuevas situaciones basadas en la vida cotidiana en la cual es necesario utilizar estos teoremas. En el trabajo, se plantearon y resolvieron problemas prácticos sobre resolución de triángulos cualesquiera relacionados con situaciones cotidianas, mediante un método que utiliza la enseñanza por competencias mediada por nuevas tecnologías. Para ello, los estudiantes utilizaron instrumentos de medición como la cinta métrica, el transportador y la brújula. Además, realizaron una representación a escala en el computador con GeoGebra e hicieron uso de esta representación para deducir las magnitudes buscadas. A manera de conclusión, plantearon que, si el aprendizaje se determina partiendo del conocimiento previo del educando, este se hace de manera significativa, se interioriza y por lo tanto es perdurable, se estructura en su lógica cognitiva y puede verificarse y, para lograr esto recomiendan que los docentes realicen actividades pedagógicas que impliquen el uso de materiales didácticos pertinentes a la temática a tratar.

Por otro lado, Castañeda (2011), en su estudio mostró algunos conceptos sobre triángulos desde sus clasificaciones hasta la forma de solucionarlos dependiendo del tipo al que pertenezcan. Para ello elaboró una unidad didáctica compuesta por cuatro guías donde incluyó aspectos teóricos de los triángulos, así como sus propiedades principales y propone una serie de actividades cuyo objetivo es de manera gradual, facilitar el aprendizaje de la resolución de triángulos en los estudiantes de grado décimo. Presentó también los análisis correspondientes para las actividades propuestas y los resultados arrojados al poner en práctica dichas estrategias. A manera de conclusión, planteó que las actividades prácticas le dan vida al estudio de la matemática y hace que los jóvenes se motiven en conocerla más, asimismo los estudiantes perciben la utilidad de la trigonometría y el manejo de los triángulos que, aunque son imaginarios se pueden notar de una manera más cercana, además se dan cuenta que algunos de los valores que se presentan en ejercicios de textos y documentos como los ángulos de elevación sí son posibles de tomar y no son tan abstractos como pueden parecer.

Bahamonde & Vicuña (2011) en su estudio resaltaron las dificultades que presentaron los niños en la resolución de problemas; al ser niños de quinto de primaria, tendían a sumar todos los datos dados en un problema, también advirtieron de que no cuentan con una metodología clara para darle solución los enunciados planteados. Debido a esto, realizaron una prueba diagnóstica para observar el alcance en resolución de problemas de los niños. A partir de los datos obtenidos en la prueba plantearon el objetivo general del proyecto el cual era: incrementar los niveles cognitivos de análisis, pensamiento lógico y reflexivo en los estudiantes, aumentado su habilidad de resolver problemas en el área de matemáticas. Posteriormente procedieron a implementar la propuesta y para esto desarrollaron tres sesiones en las cuales les entregaron a los estudiantes una serie de problemas con la explicación del método Polya, para que en la última sesión los estudiantes resolvieran una prueba final que mostrara los avances de trabajar con una metodología clara como es la de Polya. A manera de conclusión, los autores afirmaron que el aprendizaje asociado a la resolución de problemas puede ser logrado usando diversas estrategias focalizadas en el tipo de situación problemática, en su reformulación verbal o considerando pedagógicamente los pasos secuenciados en el método Polya.

Un aspecto a mejorar es que no trabajaron con problemas contextualizados para los niños, y al ser estudiantes de básica primaria se hace necesario que resuelvan situaciones rutinarias que permitan un mayor entendimiento de lo que se solicita.

De su parte, Muñoz (2011), señaló la dificultad que tienen los estudiantes al momento de resolver problemas asociados con conceptos geométricos y trigonométricos. Un ejemplo claro se notó en la resolución de triángulos mediante la aplicación de los teoremas básicos de la trigonometría como son la Ley del Seno y el Teorema del Coseno, una de las principales dificultades con las que se encuentran los estudiantes, es precisamente en qué momento utilizar el uno o el otro, o cuando se pueden utilizar ambos. De la misma manera, cuando se trata de resolver triángulos usando los criterios de semejanza (LLL), (LAL), (AAA) y congruencia (LLL), (LAL), (ALA), los estudiantes encontraron dificultades al momento de elegir cuál de los teoremas usar, y al mismo tiempo, se observaron dificultades al momento de verificar si sus resultados son válidos o no. Es por esto, que el agrado hacia el conocimiento matemático y el deseo por diseñar herramientas útiles para su comprensión, impulsaron al autor a usar el Stomachion[3] como base para diseñar algunas propuestas de trabajo, en el estudio de la resolución de triángulos y otros aspectos relacionados con la trigonometría. El uso del stomachion en el aula de clase, por medio de herramientas tecnológicas se constituyó en una alternativa útil para la comprensión de conceptos, el desarrollo de competencias y habilidades que permiten al estudiante contrastar sus resultados, aclarar dudas y así enfrentarse posteriormente a una gran variedad de situaciones problema.

Por otra parte, Tangarife (2012), realizó una investigación con estudiantes de primer semestre de matemáticas básicas de la Universidad Nacional de Colombia para identificarlas deficiencias en la prueba de ingreso a la universidad en conocimientos matemáticos, en concreto en la parte de trigonometría. Destacó la dificultad a la hora de resolver problemas que relacionan la trigonometría ya que, teniendo una metodología para solucionarlos, no hacen uso de esta. A partir de esto, el proyecto buscó fortalecer esta temática, implementando las estrategias didácticas de solución de problemas y trabajo cooperativo. Con la puesta en marcha de las estrategias notó en un primer momento que los estudiantes estuvieron reacios al trabajo cooperativo. Muchos de ellos preferían trabajar solos porque al hacerlo en equipo demandaban más tiempo y se requería de mayor esfuerzo de aquellos que tenían fortalezas en matemáticas. En la solución de problemas también encontró gran dificultad porque la capacidad de análisis estaba muy limitada y tenían poca disciplina de trabajo. Con la aplicación de las estrategias, los estudiantes avanzaron en la comprensión de los temas de trigonometría, pero no hubo motivación para resolver problemas, por esto recomendó generar ambientes de confianza donde los

[3] El S*tomachion* es un puzle que estudió Arquímedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.). Es una descomposición del cuadrado en 14 piezas que tienen por área números enteros. Presenta un problema de combinatoria geométrica, así que es un juguete muy fácil de construir, pero muy difícil de resolver. Con las piezas del Stomachion se pueden construir figuras variadas, incluso se pueden reordenar las piezas de modos diferentes para recomponer el cuadrado original de otra manera.

estudiantes no sientan temor de preguntar ni de equivocarse, y realizar talleres grupales donde haya participación activa para aclarar dudas alrededor de los conceptos trabajados durante la clase, generando espacios para la colaboración y las relaciones entre los estudiantes.

A su vez, Escobar (2012), precisó en su estudio la debilidad que presentan los estudiantes en lo relativo al pensamiento espacial y sistemas geométricos en la construcción y manipulación de representaciones de los objetos del espacio; las relaciones entre ellos, sus transformaciones; el razonamiento geométrico y la solución de problemas de medición; debido a esto realizó una propuesta que pretendía aportar al proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de triángulos (identificación de las medidas de los lados y ángulos de triángulos rectángulos y oblicuángulos). Lo propuso como un aporte didáctico para ser aplicado y desarrollado por estudiantes del grado décimo cuyas edades oscilan entre los 15 y los 17 años. Para estructurar la propuesta revisó la teoría relacionada con los teoremas de Pitágoras, del Seno y del Coseno en lo concerniente a sus aplicaciones a la resolución de triángulos y utilizó el programa Cabry Geometry como herramienta para aproximarse a los teoremas y a diferentes demostraciones de éstos. Diseñó una unidad didáctica que contiene diferentes actividades secuenciadas donde el estudiante manipula el software Cabry Geometry para solucionar ejercicios de aplicación. Escobar recomienda crear guías de aprendizaje para todo el año escolar y no limitarse a un periodo determinado para que los estudiantes fortalezcan sus capacidades de relacionar la trigonometría con situaciones cotidianas.

De su parte, Bueno (2012) planteó en su estudio alcanzar el objetivo: Diseñar e implementar una experiencia pedagógica que favorezca el desarrollo de habilidades para resolver problemas de Matemática en estudiantes de quinto grado. Diseñó nueve guías didácticas en las cuales trabajaron lecturas cortas para su comprensión y planteó problemas para su solución; le dio mucha importancia al primer paso del método Polya el cual es el de comprender el problema, es por esto que se realizaron las lecturas para mejorar la comprensión. El trabajo en grupo fue fundamental para el avance en las fases del método ya que entre los compañeros había colaboración para alcanzar la meta propuesta. Como conclusión estableció que hubo un interés general en perfeccionar la metodología para resolver problemas, así mismo los estudiantes manifestaron el gusto por las clases y por resolver problemas matemáticos.

Como falencia del estudio anterior hay que decir que no muestra los resultados de la aplicación de la prueba final. Es cierto que se hace un excelente análisis del diagnóstico realizado, y las guías tienen una estructura bien enfocada, pero en la última guía planteó cinco problemas a resolver y no hay evidencia del análisis de la misma, no hay precisiones sobre el aporte que hizo la estrategia didáctica a la resolución de problemas en los estudiantes.

En el año 2013, Gómez en su trabajo de investigación, presentó una propuesta desarrollada para mejorar el aprendizaje de la trigonometría y su aplicación en otras áreas del conocimiento, desde la definición de las razones trigonométricas y su aplicación en la resolución de triángulos rectángulos y problemas en contexto. La propuesta fue mediada en el marco del aprendizaje significativo enfocándose en la teoría de David Ausubel, la resolución de problemas en contexto y el uso de software GeoGebra, Derive, Minimat, Matlab, Cabri, entre otros. Para desarrollar la propuesta de trabajo elaboró una prueba diagnóstica aplicada al grupo experimental y al grupo control, con base en los resultados obtenidos diseñó e implementó una unidad didáctica para el tópico de resolución de triángulos rectángulos, que, a partir de elementos básicos y referentes históricos, buscó conjugar la mediación de la solución de problemas en contexto y algunas herramientas TIC cercanas al educando del grupo experimental. Posteriormente se hizo una prueba final en ambos grupos, analizó los resultados, los cuales mostraron ser mejores en el grupo experimental.

Igualmente, Caballero (2013), mostró en su estudio la dificultad que presentan sus estudiantes a la hora de relacionar conceptos claves de la geometría con la trigonometría. Es por esto que puso en consideración una serie de actividades didácticas, en cuyo diseño se adaptaron problemas históricos que aportaron elementos disciplinares en el desarrollo de la astronomía y que orientaron en el aula una transposición de la geometría de la regla y el compás a la trigonometría. El siguiente problema es presentado a modo de ilustración de la idea anterior: un laboratorio espacial gira alrededor de la Tierra a una altitud de 380 millas; cuando un astronauta mira al horizonte de la Tierra, el ángulo α formado entre la visual al horizonte y la línea de la altura es de 65,8°; use esta información para calcular el radio r de la Tierra. Es así como las situaciones problema puestas en juego pretendieron incentivar el desarrollo del pensamiento científico de los estudiantes al promover en cada momento de la intervención didáctica la utilización del método científico, potenciando el uso de diferentes sistemas de representación; es decir imágenes, gráficos, símbolos y material concreto.

También, Ocampo (2015) realizó un estudio que tuvo como propósito determinar la efectividad relativa del Aprendizaje Basado en Problemas, comparado con el método tradicional para desarrollar habilidades de resolución de problemas en el aprendizaje de las aplicaciones de la solución de triángulos en el grado 10º de en Antioquia. Después de la implementación de la propuesta concluyó, entre otros aspectos, que el 86,5% de los estudiantes encuentran las clases de matemáticas como interesantes, contextualizadas, aplicables y significativas, mientras que antes del tratamiento sólo el 44,4% se encontraba satisfecho con las clases de matemáticas, con una diferencia en cambio de actitud de 42,1% frente a las clases de matemáticas con la metodología tradicional. En el análisis comparativo de adquisición de competencias específicas, reveló que el grupo experimental demostró ser matemáticamente más competente con respecto al grupo control en todas las competencias evaluadas: capacidad de modelación, inductiva, comunicativa y habilidad procedimental.

En conclusión, todo lo anterior guarda relación con la problemática de esta investigación porque demuestra la dificultad en la conceptualización de temas básicos de trigonometría, específicamente en la resolución de triángulos, en donde los estudiantes no usan correctamente las razones trigonométricas o el teorema de Pitágoras para solucionar triángulos rectángulos, igualmente hay fallas en la identificación en el uso de la ley del Seno o Coseno; además, en la aplicación de los teoremas en problemas contextualizados, existe poca motivación para afrontar su solución. Es por esto que se plantean diversas estrategias para fortalecer esta debilidad, y estas propuestas servirán de referente en el planteamiento de situaciones y actividades que permitan al estudiante enfrentarse a problemas contextualizados en la aplicación de la ley del seno y coseno.

Capítulo 2: Referente Conceptual

En este Capítulo se presenta el referente conceptual del tema de investigación, en él se presenta la definición de lo que es un problema y los tipos de problema que existen, la resolución de problemas enfocándose en el método Polya, pasando a los aspectos legales, el objeto matemático y las categorías de análisis.

El término resolución de problemas ha sido usado con diversos significados, que van desde trabajar con ejercicios rutinarios hasta hacer matemática profesionalmente. De este modo, en los últimos años, se ha estudiado ampliamente la resolución de problemas como fuente de aprendizaje de las matemáticas y como desarrollador de competencias, en el cual las características de la población estudiantil han motivado a planificar e investigar las diversas formas de conceptualizar y manejar los procesos matemáticos por medios más prácticos y aplicados a situaciones de la vida real. Cómo resultado a ésta inquietud, se han desarrollado estudios en torno a la resolución de problemas y por supuesto se han trazado políticas educativas cuyo interés final ha sido el mejoramiento del nivel académico en los estudiantes (Fernandez, 2014).

La estrategia de resolución de problemas implica crear un contexto en el cual los datos guarden cierta coherencia, sin que represente la aplicación mecánica de un algoritmo. En otras palabras, podría decirse que la resolución de problemas consiste en hallar una respuesta adecuada a las exigencias planteadas, pero realmente la solución de un problema no debe verse como un logro final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental, debe implicar un análisis de la situación ante la cual se halla, en la elaboración de hipótesis y la formulación de conjeturas; en el descubrimiento y selección de posibilidades, en la puesta en práctica de métodos de solución, entre otros.

2.1 ¿Qué es un Problema?

Con respecto al término "problema", a través del tiempo se ha propuesto una serie de conceptualizaciones. Así por ejemplo (Parra, 1990) establece:

> Un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera inmediata. (p. 16)

> Por su parte, Schoenfeld (1985) enfatiza que la dificultad de definir el término problema radica en que es relativo, un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea; utiliza la palabra problema para referirse a una tarea que resulta difícil para el individuo que está tratando de resolverla. Charnay (1994) dice que un problema puede verse como una terna situación-alumno-entorno, es decir, el problema se da solo si el alumno percibe una dificultad, en ese sentido lo que es un problema para un estudiante no necesariamente lo es para otro. (Citado en Alfaro & Barrantes, 2008, p. 86).

Evidentemente, lo que es un problema para un individuo puede no serlo para otro, sea porque está totalmente fuera de su alcance o porque para el nivel de conocimientos del individuo, el problema ha dejado de serlo. Polya (1961) plantea que resolver un problema significa buscar, de forma consciente, una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata.

Perales (2000) sostiene que un problema constituye una situación incierta que provoca en quien la padece una conducta (resolución del problema) tendente a hallar la solución (resultado esperado) y reducir de esta forma la tensión inherente a dicha incertidumbre.

Ahora bien, en términos matemáticos, no es lo mismo un problema que una situación problema. Al respecto, Mesa (1998) comenta que

> "Una situación problema es un espacio de interrogantes frente a los cuales el sujeto está convocado a responder. En el campo de las matemáticas, una *situación problema* se interpreta como un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos, para plantear y resolver problemas de tipo matemático" (Citado en Rúa Bedoya, 2008, p. 4)

En este orden de ideas, en un problema plantea una pregunta y fija establece algunos requerimientos, y por una serie de procesos se debe hallar un número que, teniendo en cuenta los requerimientos establecidos, responda a lo solicitado en el problema; mientras que en la situación problema no se puede hacer uso de un solo proceso de aprendizaje como el de modelación, es necesario que se relacionen otros procesos de la actividad matemática, como los de razonamiento o comunicación. En la situación problema están incluidos una serie de problemas, donde a través de su solución se va recorriendo el camino para la resolución de la situación.

2.2 Tipos de Problema

Diversos autores han realizado propuestas acerca de la actividad matemática proponiendo diferentes clasificaciones de problemas. Al respecto Polya (1989) recoge la distinción que hacían los griegos entre teorema y problemas; reconoce dos tipos de problemas: "problema por resolver" y "problema por demostrar" (p. 159).

Blanco (1993) estableció la siguiente clasificación de los tipos de problemas y las actividades implicadas en relación con la resolución de problemas en la enseñanza de las Matemáticas:

- Problema de reconocimiento: Con este ejercicio se pretende resolver, reconocer o recordar un factor específico, una definición o una proposición de un teorema.
- Problema de algorítmicos o de repetición: Son ejercicios que pueden ser resueltos con un proceso algorítmico, a menudo un algoritmo numérico.
- Problemas de traducción simple o compleja: Son problemas formulados en un contexto concreto y cuya resolución supone una traducción del enunciado, oral o escrito, a una expresión matemática.
- Problemas de procesos: Son problemas que se diferencian de los anteriores, dándose la posibilidad de conjeturar varios caminos para encontrar la solución.
- Problemas sobre situaciones reales: Se trata de plantear actividades lo más cercana posible a situaciones reales que requieran el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos.
- Problemas de puzles: Son problemas en los que se pretende mostrar el potencial recreativo posiblemente no suponga su solución necesariamente matemática, pero pueden resolverse mediante una chispa o una idea feliz.

- Problemas de historias matemáticas: Frecuentemente se puede observar en librerías libros de cuentos, novelas entre los que se encuentran son algunas propuestas o planteamientos que requieren de un esfuerzo que impliquen algún concepto matemático.

La anterior clasificación de los tipos de problemas es una de la más completa que existe, es por esto que se toma como base para el diseño de la propuesta metodológica. Los tipos de problemas acordes al objeto de estudio son los problemas de traducción simple o compleja y los problemas de procesos, ya que son los más adecuados a desarrollar con relación al objeto de estudio matemático, en este caso la aplicación de la ley del seno y coseno.

2.3 Resolución de Problemas

Las situaciones problemáticas son corrientes en la vida de las personas, los estudiantes se ven enfrentados frecuentemente a resolver problemas, pero ¿qué es resolver una un problema? Polya (1968) establece que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados.

Una de las formas de abordar el proceso de resolución de un problema, consiste en relacionar un aspecto de una situación problemática con otro, y eso tiene como resultado una comprensión estructural. La capacidad de captar cómo todas las partes del problema encajan para satisfacer las exigencias del objetivo, esto implica reorganizar los elementos de la situación problemática de una forma tal que resuelva el problema.

Resolver un problema puede ser considerado como encontrar el camino o la ruta correcta a través del espacio del problema. La resolución de un problema se produce cuando alguien que resuelve un problema lo traduce en una representación interna y luego busca un camino a través del espacio del problema desde el estado dado al estado final.

En este orden de ideas, Polya (1989) en el prefacio de su libro dice:

> Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter. (p. 5)

Dentro de este contexto, un buen problema, según Schoenfeld (1985) debe cumplir las siguientes características: Ser desafiante para el estudiante, ser interesante para el estudiante, ser generador de diversos procesos de pensamiento, poseer un nivel adecuado de dificultad, deben ser contextualizados, de acuerdo a la realidad, a las actividades y entorno de los estudiantes.

2.3.1 Método Polya. Al dilucidar la problemática y adentrarnos en los procesos de resolución de problemas matemáticos resulta de utilidad revisar la contribución que hace Polya, en cuanto a las etapas previstas para la resolución de problemas, ya que sus aportes apuntan al establecimiento de principios que favorecen la resolución de problemas matemáticos como una forma del arte de descubrir e inventar en matemáticas.

Polya (1965) describe que para resolver un problema se necesita:

> Comprender el problema: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos y las condiciones? Concebir un plan: ¿conoce un problema relacionado con éste?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿podría enunciar el problema de otra forma?, ¿ha empleado todos los datos? Ejecución del plan: comprobar cada uno de los pasos, ¿puede usted ver que el paso es correcto? Visión retrospectiva: verificar el resultado. (p. 19)

Según la mayoría de los especialistas sobre el tema como Andre (1986), Schoenfeld (1985), Mayer (1986), Polya (1989), Wallas (1926), son cuatro los estadios o etapas para resolver un problema. Para este trabajo se apoyará en el planteamiento que al respecto hace Polya:

La primera fase consiste en la comprensión del problema, es la fase del cuestionamiento y de la identificación de datos e incógnitas. Entender el problema, según Polya (1989), es apropiárselo; concretarlo en tan pocas palabras que pueda ser reformulado de manera distinta sin modificar la idea. Por supuesto, para lograrlo es necesario aprehender su enunciado verbal.

La segunda fase consiste en la concepción de un plan, en esta fase el docente debe guiar al estudiante para la concepción de un plan, pero sin imponérselo.

Al tener concebido un plan se prosigue con la ejecución del mismo, ésta es la tercera fase propuesta por Polya, que corresponde a la elaboración del proceso creativo; es importante que se vaya verificando cada paso que se ejecute del plan, examinar a cabalidad que cada pieza encaje perfectamente, la veracidad de todo razonamiento y la claridad de toda operación.

Por último, la cuarta fase, es una visión retrospectiva en donde se tiene que reconsiderar la solución, así como el procedimiento que llevó a conseguirla; esta fase ayuda a que el estudiante consolide sus conocimientos y desarrolle sus aptitudes para resolver problemas. Es importante que el docente vaya guiando al estudiante a lo largo del proceso para que después lo pueda reproducir sin su compañía. Respecto a esta fase, Polya (1989, p. 35), considera que la misma ayuda al estudiante, porque "reconociendo su solución, reexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas".

2.4 Aspecto Legal

> "La resolución de problemas es el núcleo central de las matemáticas, hacer matemáticas, es sencillamente resolver problemas. Se considera entonces que la resolución de problemas es una actividad primordial en la clase de matemáticas, no es únicamente un objetivo general a conseguir, sino que además es un instrumento pedagógico de primer orden." (Bueno, 2012, p. 63)

En este orden de ideas, los lineamientos educativos emanados por el Ministerio de Educación Nacional han contemplado este ítem; es así como la resolución y el planteamiento de problemas forma parte de los procesos generales de la estructura curricular en matemáticas. Todo lo anterior está sustentado en los lineamientos curriculares de matemáticas en donde ratifica la importancia de la resolución de problemas por parte de los estudiantes.

> En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel. (MEN, 1998, p.52)

Al mismo tiempo, los Estándares de Competencias Básicas, que son criterios que permiten establecer los niveles básicos de calidad de la educación a los que tienen derecho los niños y las niñas de todas las regiones del país, en todas las áreas que integran el conocimiento escolar, muestran la importancia de que los estudiantes sean competentes. Así, un estándar básico de competencias de décimo grado dado en el pensamiento variacional determina que se es competente el manejo de las aplicaciones de la trigonometría en situaciones cotidianas cuando "Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas". (MEN 2006, p. 88).

De igual modo, el Ministerio de Educación Nacional estableció como un derecho básico de aprendizaje que el estudiante "Comprenda y utiliza la ley del seno y el coseno para resolver problemas de matemáticas y otras disciplinas que involucren triángulos no rectángulos" (MEN, 2014, p.3).

2.5 Trigonometría y Resolución de Triángulos

Con respecto al objeto matemático de estudio, forma parte de la trigonometría y en particular de la resolución de triángulos no rectángulos. Ahora bien, hay que recordar que los orígenes del estudio de la trigonometría se encuentran en la determinación de distancias sobre la tierra por el uso de triángulos, esto implica la resolución de triángulos. Este trabajo estuvo centrado en los triángulos no rectángulos que pueden ser acutángulos u obtusángulos. Existen dos leyes importantes para resolver este tipo de triángulos, sin necesidad de hacer conversiones a triángulos rectángulos, estas son la ley del seno y la ley del coseno, que se presentan a continuación.

2.5.1 Ley del Seno y del Coseno

Ley del Seno: En cualquier triángulo ABC se cumple que el cociente entre la medida de un lado con el seno de su ángulo opuesto es igual para todos los lados y ángulos de ese triángulo:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}}=\frac{b}{sen\,\hat{B}}=\frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

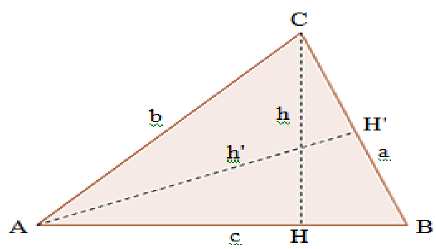


Figura 2. Triángulo acutángulo

Demostración:

En el triángulo ABC se traza la altura h correspondiente al vértice C. Como los triángulos AHC y BHC son rectángulos, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\hat{A}=\dfrac{h}{b} \;\Rightarrow\; h=b\cdot sen\,\hat{A} \\ sen\,\hat{B}=\dfrac{h}{a} \;\Rightarrow\; h=a\cdot sen\,\hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow\; a\cdot sen\,\hat{B}=b\cdot sen\,\hat{A} \;\Rightarrow\; \frac{a}{sen\,\hat{A}}=\frac{b}{sen\,\hat{B}} \qquad (1)$$

De igual manera, al trazar la altura h' correspondiente al vértice A, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\hat{B}=\dfrac{h'}{c} \;\Rightarrow\; h'=c\cdot sen\,\hat{B} \\ sen\,\hat{C}=\dfrac{h'}{b} \;\Rightarrow\; h'=b\cdot sen\,\hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow\; b\cdot sen\,\hat{C}=c\cdot sen\,\hat{B} \;\Rightarrow\; \frac{b}{sen\,\hat{B}}=\frac{c}{sen\,\hat{C}} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que $\dfrac{a}{sen\,\hat{A}}=\dfrac{b}{sen\,\hat{B}}=\dfrac{c}{sen\,\hat{C}}$, con lo que queda demostrado el teorema.

Nota: La demostración es similar para un triángulo obtusángulo.

Observar que: $sen\,\hat{A} = sen\,(180^{o} - \hat{A}) = \dfrac{h}{b}$

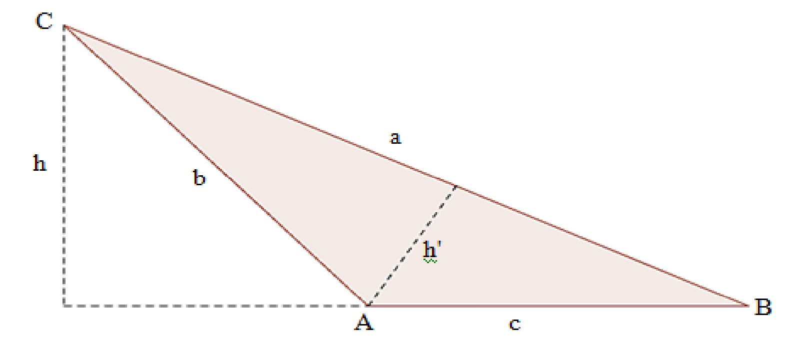


Figura 3. Triángulo obtusángulo

Ley del Coseno: En cualquier triángulo ABC se cumple que un lado elevado al cuadrado es igual a la suma de cada uno de los otros dos lados elevados al cuadrado menos dos veces la multiplicación de los otros dos lados por el coseno del ángulo opuesto del lado requerido.

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\,\hat{A}$

2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\,\hat{B}$

3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\,\hat{C}$

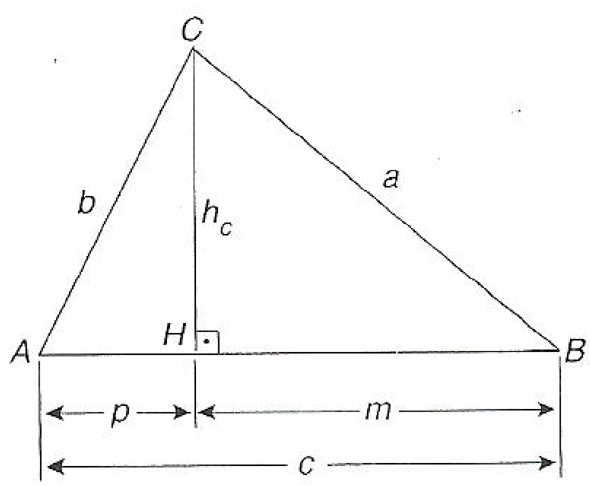


Figura 4Triángulo Ley del Coseno

La demostración de las relaciones dos y tres son similares a la primera.

En el triángulo ABC se traza la altura h correspondiente al vértice C, esta divide a la base $\overline{AB}$ en dos segmentos de longitudes p y m (Figura 4). Como los triángulos AHC y BHC son rectángulos, se tiene que:

$$a^2 = h^2 + m^2 \qquad (1)$$

$$b^2 = h^2 + p^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = b^2 - p^2 \qquad (2)$$

Con lo que (sustituyendo la segunda relación en la primera):

$$a^2 = b^2 - p^2 + m^2 \qquad (3)$$

Y, teniendo en cuenta que:

$$m = c - p \quad \Rightarrow \quad m^2 = (c-p)^2 = c^2 + p^2 - 2 \cdot c \cdot p \qquad (4)$$

y, sustituyendo la relación (4) en la (3), queda:

$$a^2 = b^2 - p^2 + c^2 + p^2 - 2 \cdot c \cdot p = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot p$$

$$y,\ como\ p = b \cdot \cos \hat{A} \quad se\ tiene\ que:$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\, \hat{A} \qquad como\ se\ quería\ demostrar$$

Nota: Trazando las alturas h' y h'' correspondientes a los vértices A y B, respectivamente, y procediendo de igual manera se demostrarían las relaciones 2) y 3).

En la Figura 5 se presenta un mapa conceptual sobre la resolución de triángulos.

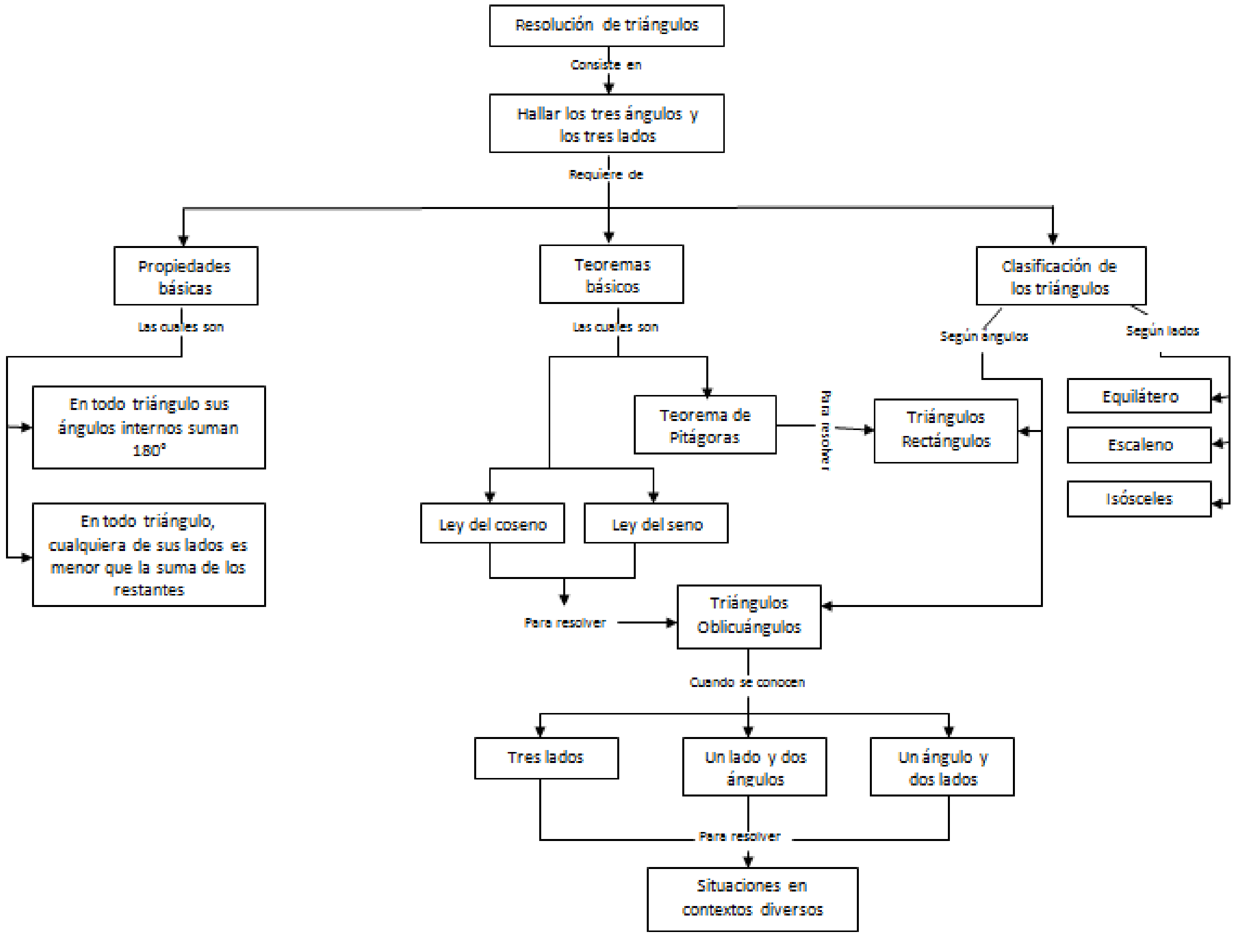


Figura 5. Mapa conceptual de resolución de triángulos. Elaboración propia.

2.6 Categorías de Análisis

Teniendo en cuenta lo estipulado en los apartados anteriores, se establecieron las ideas o tópicos más sobresalientes que son objeto de análisis del presente trabajo.

Como categoría central se tomó al componente de Resolución de Problemas, y a su vez se establecieron como subcategorías el que es un problema, los tipos de problema que se utilizaron en la Secuencia Didáctica, y el Método propuesto por Polya para resolver problemas con cada uno de sus pasos. Con relación a la subcategoría del Método Polya se determinaron los descriptores que ayudaron al análisis de los datos obtenidos en el trabajo. En la Tabla 1 se resume las categorías de análisis.

Tabla 1

Categorías de análisis

Categoría Central	**Subcategoría Teórica**		**Categoría Teórica**	**Descriptor**
Resolución de problemas	Problema		Parra (1990) Charnay (1994) Perales (2000)	
	Tipos de problema: • Problema de traducción simple o compleja. • Problemas sobre situaciones reales.		Blanco (1993)	
	Resolución de problemas matemáticos		Polya (1968)	
	Método Polya:	Comprender el problema	Polya	- Lee varias veces el problema. - Identifica la incógnita en el enunciado del problema. - Identifica los datos suministrados en el problema. - Realiza una representación gráfica del enunciado.
		Concebir un plan		- Identifica qué teorema usar para resolver el problema. - Establece el orden en que se utilizan los teoremas. - Relaciona el problema con otros semejantes. - Concibe un plan solución.
		Ejecución del plan.		- Sigue el plan elaborado inicialmente. - Ejecuta en detalle cada operación. - Verifica cada paso realizado.
		Visión retrospectiva.		- Demuestra que la respuesta corresponde a lo que se pide en el problema - Examina el resultado esperado. - Explica el procedimiento que utilizó para hallar la respuesta.

Capítulo 3: Referente Metodológico

En este capítulo se describen los aspectos metodológicos de la investigación: el método, las técnicas e instrumentos de recolección de datos utilizados, luego el diagnóstico inicial realizado y se especifica el diseño de la secuencia didáctica, por último, se muestran los resultados obtenidos en la implementación con su respectivo análisis.

3.1 Método de Investigación

El enfoque cualitativo sustentó la investigación, porque "está motivada por búsquedas y no por la pretensión de comprobar verdades; tampoco le asiste la certidumbre sino la inquietud y el interés de construir una significación acerca de una realidad" (Sandin, 2003, p. 123). Además, la investigación cualitativa especifica procedimientos que utilizan las diversas formas de percepción del sujeto para comprender la vida social mediante una visión integral del fenómeno estudiado.

La educación es un proceso que requiere de la interacción docente-estudiante en consonancia con el currículo, de este modo la investigación cualitativa llevada a cabo por el docente en la escuela lo orienta a renovar constantemente su praxis pedagógica. Lo anterior, es uno de los puntos más importantes del porqué hacer un estudio cualitativo en educación, como lo hace notar Inga (2009) el cual argumenta:

> La importancia de la investigación cualitativa radica en que prioriza la realidad cambiante a la teoría, la cual, si bien es cierto, se nutrió de ella, es la expresión de un momento y, además, su formalización obliga a tener en cuenta la regularidad y soslayar todo aquello que no se ajuste a dicho corpus teorético; en consecuencia, más que una presentación es una distorsión de la realidad. Además, busca encontrar el porqué de las acciones, por ello, la relevancia de la interpretación, de acuerdo al contexto sociocultural e histórico. (p. 207)

Respecto a los procedimientos metodológicos, la investigación cualitativa tiene en cuenta a los sujetos reales, quienes son únicos e irrepetibles; la generalización a partir del examen de casos concretos y específicos, en la medida que lo general se manifiesta a través de lo particular; la unidad como parte del todo y ese todo está en cada parte.

Como estrategia para la recolección, ordenación, análisis y la presentación estructurada de información sobre la unidad de análisis seleccionada, se optó por un método de investigación basado en estudio de caso, “ya que este facilita la comunicación de información con los participantes de la investigación, favoreciendo el intercambio de puntos de vista y la reconstrucción de significados, así que es muy pertinente para usarlo en la investigación interpretativa” (Yin, 1994, p. 45).

Entre las distintas formas de entender el estudio de casos, se toma la de Stake (1994), porque diferencia entre estudios de caso intrínseco, instrumental y colectivo; y en el presente estudio hubo una intervención en el aula en el cual se trabajó con todos los integrantes del grupo, por lo tanto, era necesario tener en cuenta el estudio de caso colectivo. Con relación al estudio de caso colectivo:

> Se realiza cuando el interés se centra en la indagación de un fenómeno, población, o condición general. El interés se centra, no en un caso concreto, sino en un determinado número de casos conjuntamente. No se trata del estudio de un colectivo, sino del estudio intensivo de varios casos. (Skate, 1999, p. 16)

3.2 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

Para definir las técnicas e instrumentos de recolección de datos que se emplearon en el trabajo de campo se tuvo en cuenta los propósitos de la investigación, las cuales se describen a continuación.

Observación participante. Su objetivo es comprender el comportamiento y las experiencias de las personas como ocurren en su medio natural. Por lo tanto, se intenta observar y registrar información de las personas en sus medios con un mínimo de estructuras y sin interferencia del investigador. Monje (2011) define la observación participante como “la postura que toma el investigador o el responsable de recolectar los datos para involucrarse directamente con la actividad objeto de la observación” (p. 156). Para que esta postura no estuviera influenciada por sesgos o prejuicios, se recurrió a tener como base lo estipulado en el marco teórico en todo momento. Durante la implementación de la Secuencia Didáctica se registraron las observaciones en un diario de campo.

Entrevista. La entrevista es muy importante para la obtención de información en una investigación, sin embargo, “las entrevistas cualitativas, a diferencia de las estructuradas, siguen el modelo de una conversación entre iguales, donde el propio investigador es el instrumento y no lo que está escrito en el papel” (Monje, 2011, p. 151). Así mismo, existen varios tipos de entrevista, pero siendo coherente con el objetivo de la investigación se hace necesario que la entrevista se realice en todo el proceso de implementación de la Secuencia Didáctica.

Prueba Diagnóstica y Final. Las pruebas aplicadas a los estudiantes, antes de la implementación de la propuesta como al final de esta, proporcionan información relacionada con las dificultades y el avance en el propósito del trabajo, y además permite validar lo plasmado en la observación y en la entrevista.

3.3 Diagnóstico Inicial

Inicialmente se aplicó una Prueba Diagnóstica (Anexo A) al grupo con que se trabajó, para establecer el estado del grupo y los conocimientos previos que tenían antes de abordar el tema de resolución problemas de triángulos oblicuángulos.

Dicha prueba contenía ocho problemas matemáticos relacionados con la aplicación de la ley del seno y coseno. Los problemas se entregaron por escrito e individualmente.

3.3.1 Análisis de Resultados de la Prueba Diagnóstica. Antes de la aplicación de la Prueba Diagnóstica, los estudiantes ya habían visto el tema de la ley del seno y coseno y les faltaba solo aplicarlas en problemas, por medio de la prueba se identificó el proceso de resolución que tenían los estudiantes al momento de enfrentarse a problemas matemáticos que requerían la ley del seno o coseno. De este modo se conoció los pasos que usan en la resolución de problemas, así como las dificultades más comunes que se presentan en el proceso.

En primer lugar, se presentan en la Tabla 2, los resultados generales que se dieron en cada pregunta añadiéndole una conclusión.

Tabla 2

Resultados de la Prueba Diagnóstica

Pregunta	Objetivo	Resultados		Conclusiones
		Correcta	Incorrecta	
Pregunta 1	Encontrar un ángulo usando la Ley del Coseno	41%	59%	Los estudiantes presentan inconvenientes en el proceso para hallar el ángulo.
Pregunta 2	Realizar un diagrama que represente el problema y usar la Ley del Coseno	32%	68%	La mayoría de los estudiantes no realizan un bosquejo adecuado del problema.
Pregunta 3	Resolver el problema usando Ley del Coseno	45%	55%	La presencia del esquema en el problema facilita la identificación de que ley usar pero algunos estudiantes usan la fórmula mal.
Pregunta 4	Resolver el problema usando Ley del Seno	38%	62%	Hay dificultad para identificar la ley a usar.
Pregunta 5	Resolver el problema usando Ley del Coseno	47%	53%	La presencia del esquema en el problema facilita la identificación de que ley usar pero algunos estudiantes emplean la fórmula mal.
Pregunta 6	Resolver el problema usando Ley del Seno	22%	78%	Al momento de identificar los datos suministrados en el problema se presentan dificultades en la ubicación de estos en el triángulo.
Pregunta 7	Resolver el problema usando Ley del Seno y razones trigonométricas	25%	75%	Dificultad para ubicar los ángulos.
Pregunta 8	Resolver el problema usando razones trigonométricas y	20%	80%	Usan los datos suministrados de manera incorrecta y no se cercioraron de que la

	la Ley del Coseno	respuesta es acorde con lo que se solicita.

En términos generales existió una dificultad muy notoria en la resolución de problemas por cuanto en todas las preguntas los estudiantes obtuvieron un desempeño bajo. Para ser más específicos se analizaron las causas del por qué de estos resultados según los cuatro pasos del método Polya.

En la fase 1: **comprensión del problema** se notó que muchos estudiantes no le dedican un tiempo prudente a la lectura de los problemas, porque sacan rápidamente datos que se presentan, y esto conlleva a que no se tenga claridad ni precisión en lo que se requiere puesto que no identifican la incógnita en el enunciado, en ocasiones el proceso para determinar la variable a encontrar es mecánico. Si bien es cierto que en todos los problemas propuestos en la Prueba Diagnóstica identificaron los datos suministrados, pero no se detuvieron a relacionar y cuestionar si esos datos eran suficientes para llevar a cabo el proceso de resolución. En resumen, la comprensión del problema es el paso más importante y en el que se sustenta todo el proceso de resolución, hay una debilidad grande en este paso porque muchos estudiantes se limitan a extraer datos sin contextualizar el problema y esto deriva en que todo el proceso empieza con fallas y así no se tendrá éxito en la solución.

En la **elaboración del plan,** que es la fase 2, se debe tener en cuenta que tres de los ocho problemas presentados en la Prueba Diagnóstica tenían un gráfico incluido, así que en los problemas restantes (5) era primordial que los estudiantes realizaran un bosquejo de lo planteado, entre otras cosas para ubicar todos los datos identificados, seleccionar los datos necesarios y las leyes a utilizar (orden de ejecución de las mismas); todo esto con el objetivo de concebir un plan acorde con lo expuesto en el problema. No obstante, en la Prueba Diagnóstica practicada se observó que la mayoría de los estudiantes cuando realizaron el bosquejo ubicaron de manera errónea los datos, fallando en la elección de la ley para dar solución al problema; sin embargo, cuando ubican bien los datos suministrados en los respectivos diagramas mostraron confusión en cual ley usar, así que se hizo necesario incluir una sesión en la Secuencia Didáctica que permitiera reforzar la resolución de triángulos no rectángulos; otra dificultad presenciada es que usaron otros procedimientos para la resolución, como es el uso del teorema de Pitágoras, que no es apropiado en los triángulos no rectángulos. Cabe aclarar que, en los problemas que contenían un esquema o resumen (problemas 1, 3 y 5), se elaboró un plan acorde con lo requerido en la mayoría de los casos. En conclusión, los estudiantes habían interiorizado un procedimiento mecánico para la resolución de los problemas, porque no se detienen a realizar análisis y reflexión para tomar decisiones, lo que en consecuencia dificulta el definir un derrotero del procedimiento a efectuar.

Con respecto a la **ejecución del plan** (fase 3), al presentarse dificultad en la concepción del plan de solución para los problemas, era de esperarse que los estudiantes no se siguieran dicho plan elaborado en el proceso resolutivo de la Prueba Diagnóstica, y si lo hicieron, no ejecutaban en detalle las operaciones realizadas ya que se saltaban pasos y no verificaban que estas operaciones estuvieran bien efectuadas, también hubo fallas en los diversos despejes requeridos en las leyes así como en el uso de la calculadora; varios de los estudiantes que elaboraron bien el plan tuvieron fallas en la ejecución y al no verificar los procedimientos realizados no obtuvieron la respuesta correcta.

Por último, en la fase 4: **visión retrospectiva** se encontró que los estudiantes no demostraron que la respuesta sea pertinente con lo solicitado en el problema, no hay un procedimiento en el cual comprobaran y compararan la respuesta con los datos iniciales, en muchos casos la respuesta es desproporcionada con respecto a los datos dados; los estudiantes solo contestaron la pregunta problema sin la realización de un proceso que demuestrara que todo lo realizado es correcto.

En conclusión, los resultados obtenidos mostraron, que los estudiantes, en su mayoría, no tienen clara una metodología al enfrentarse a la resolución de problemas matemáticos, y por consiguiente no siguen los pasos propuestos por Polya. Y al realizar el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, se observó que presentan dificultades en la comprensión de los enunciados de los problemas; se limitan a aplicar la ley del seno o coseno sin realizar un análisis de si es requerido en cada problema, y efectúan operaciones sin reflexionar si estas conllevan a obtener la respuesta correcta; se observó mucha confusión y poca motivación para la realización de la Prueba.

3.4 Secuencia Didáctica

La estrategia metodológica para desarrollar la investigación, la Secuencia Didáctica que según Zabala (2000) se puede definir como "un conjunto de actividades ordenadas, estructuradas y articuladas para la consecución de unos objetivos educativos" (p. 53). De este modo, la Secuencia Didáctica constituye una potente unidad de análisis para indagar, reflexionar y mejorar la práctica docente. Esto es así porque la Secuencia Didáctica expresa diferentes componentes de la práctica: las decisiones de los docentes vinculadas con la selección y organización de los contenidos, de los recursos, del espacio, del tiempo; la incidencia que tienen en dichas decisiones las definiciones curriculares y la oferta editorial; el grado de autonomía con que cuentan para tomar tales decisiones y el sentido educativo que les otorgan; el papel asignado al alumno; la organización social de la clase y la trama vincular que de ella deviene; el sentido y papel de la evaluación en tanto componente de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, y como dispositivo de control de resultados.

Para efectos del presente trabajo, se tuvo en cuenta las consideraciones hechas en el Modelo para el Desarrollo y Evaluación de Competencias Académicas (DECA), desde donde se proponen cuatro tipos de actividades para el diseño de secuencias didácticas para la resolución de problemas (p. 34).

Las actividades propuestas en el modelo DECA para realizar en una secuencia didáctica son las siguientes:

- Actividades de inicio e introducción: sirven para que el alumnado se predisponga favorablemente para afrontar el desarrollo de la secuencia con una actitud positiva y compruebe que sus conocimientos y estructuras conceptuales anteriores no son las más adecuadas para tratar esas situaciones y que, por tanto, deben ser transformados o ampliados.
- Actividades de desarrollo y reestructuración: sirven para tomar contacto, practicar y asimilar los nuevos contenidos, reflexionar sobre su utilidad a la hora de enfrentarse a nuevas

situaciones, producir el cambio deseado en los esquemas mentales, como consecuencia de la superación del conflicto cognitivo.

- Actividades de aplicación y profundización: van a ser útiles para aplicar a otras situaciones los nuevos conocimientos adquiridos, reflexionar sobre las características esenciales de esos contenidos, ampliar el conocimiento conseguido.
- Actividades de evaluación: pretenden conocer el grado de los aprendizajes que los alumnos han adquirido, permitir que los mismos alumnos conozcan la utilidad del trabajo realizado y lo que han aprendido, verbalizar algunos aprendizajes, detectar errores, inexactitudes, fallos. (Grupo DECA, 1992, p.35-37).

Diseño de la secuencia didáctica. Para abordar el tema de la resolución de problemas con la aplicación de la ley del seno y coseno, se diseñó una Secuencia Didáctica con actividades seleccionadas para ese fin; dicha secuencia se estructuró con base en el modelo que desarrolla el Grupo DECA, ya que se fundamentan a partir de la resolución de problemas. El modelo de secuencia didáctica que se planteó está estrechamente ligada al enfoque de Resolución de Problemas descrito por Polya, que consta de cuatro fases que son análogas al del método Polya: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Estas etapas se evidencian de forma clara en la secuencia didáctica. La secuencia permite el aprendizaje mediante actividades prácticas y la interacción con el medio que lo rodea; así mismo promueve el trabajo en equipo donde cada integrante tiene funciones asignadas para alcanzar las metas propuestas (Anexo B).

La Secuencia Didáctica se construyó con base en los descriptores de cada uno de los pasos del método Polya que se encuentran detallados en la Tabla 1 y se desarrolló en ocho secciones. En las sesiones 1 y 2 se examinan los saberes previos y se abordó la comprensión de la situación problema y la determinación de algunas variables. Para lograr esto, se propuso analizar la situación problema y contestar algunas preguntas que familiaricen el contexto de esta, y se dieron ejemplos de algunas medidas indirectas que hicieron los griegos y se desarrolló una actividad donde se considera lo planteado en los ejemplos. Después de esto se presentaron unos conceptos básicos necesarios para la resolución de triángulos oblicuángulos.

En la sesión 3 se procedió a construir un Astrolabio casero para medir ángulos y longitudes a partir de la trigonometría. En las sesiones 4, 5, 6 y 7 se resolvieron problemas aplicando las cuatro fases de Polya. Para el desarrollo de la primera fase se plantearon unas situaciones problemas contextualizadas para que el estudiante se sumergiera en las mismas y lograran determinar los datos que suministran y las incógnitas, y así establecieran las relaciones existentes entre éstos dos. Cuando los estudiantes mostraron dominio de la primera etapa "comprender el enunciado", se continuó con la segunda fase del método propuesto por Polya, que es "concebir un plan de solución". Esta etapa busca que los estudiantes determinen que pasos van a seguir para llegar a la respuesta de la pregunta que plantea el problema, este trabajo se guió a través de preguntas. En el momento que los estudiantes determinaron el plan de solución para dar respuesta al problema planteado, se continuó con la metodología basada en el método heurístico de Polya, la cual en su tercera etapa busca la ejecución del plan concebido. Es aquí donde los estudiantes aplicaron las operaciones pertinentes estipuladas en el plan. Una vez, resueltos los problemas propuestos, se les hizo énfasis a los estudiantes, de que el problema no termina cuando se llega a una respuesta; es aquí donde se trabaja la cuarta y última etapa de la metodología "visión retrospectiva". Los estudiantes realizaron un análisis y reflexión de todo el proceso resolutivo.

Es importante aclarar que se trabajó con los problemas que se plantearon desde la primera fase del método de Polya ya que eran de su conocimiento, y que cada fase se hizo en una sesión diferente. En la sesión 7 se retoma la situación problema que orientó la secuencia y con lo que se desarrolló en las anteriores semanas, se da respuesta a la pregunta central de la secuencia. Y en la sesión 8 es la correspondiente a la Prueba Final la cual se detalla a continuación.

3.5 Prueba Final

Al finalizar la aplicación de la Secuencia Didáctica, se realizó al grupo una última prueba (Anexo C), que consistió en seis (6) problemas donde los estudiantes se enfrentaron situaciones contextualizadas. Dichos problemas se acogen a la tipología escogida para su planteamiento y estos se presentaron con un lenguaje fácil de entender, así mismo, tres de los problemas tienen su respectivo gráfico y en los otros tres los estudiantes deben realizar su bosquejo. Con la Prueba

Final se realizaron comparaciones entre el momento inicial, antes de trabajar el tema y el momento final, después de la aplicación, en la adquisición de conocimientos que tuvieron los estudiantes. Obviamente, para establecer ese resultado se tuvieron en cuenta todas las actividades y el trabajo realizado por cada estudiante durante el tiempo de aplicación.

3.5.1 Análisis de los resultados de la Prueba Final. Una vez descrito el diseño de investigación y los instrumentos de recogida de datos de la misma, en este subapartado, el objetivo es presentar los datos obtenidos sobre la actuación de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos en la aplicación de la ley del seno y coseno y teniendo como metodología el método Polya, a partir de estos resultados se pasa realizar un análisis del proceso de resolución que siguen. En este orden de ideas, se muestran los resultados globales obtenidos en la Prueba Final en términos de los descriptores, y posteriormente se realiza el análisis de estos datos.

Antes de comenzar la presentación de los resultados y su respectivo análisis, hay que aclarar que las actividades contempladas en la Secuencia Didáctica se desarrollaron de acuerdo a lo planeado y la Prueba Final es la medición de que tan pertinente fue la aplicación de esta secuencia. Los estudiantes se familiarizaron con la situación problema creando sus propios bosquejos de las posibles soluciones, estuvieron atentos a la aclaración de dudas sobre la resolución de triángulos y desarrollaron de manera acertada los ejercicios propuestos, estuvieron muy activos en la construcción del astrolabio casero, en las mediciones para hallar la solución a la situación problema, y en las actividades que enfatizaban en los métodos de Polya se presentaron dificultades para apropiarse de la metodología en sus inicios pero con el paso de las secciones mejoraron sus resultados. De todo lo anterior, hay registro y se presentan algunas evidencias (Anexo D).

Resultados globales. Se presentan a continuación los resultados globales de la actuación de los estudiantes frente a los problemas planteados en la Prueba Final, en el marco del Método de Polya

- Con respecto a la Fase 1: **comprender el problema**, se encontró que:

a) **Identifica la incógnita en el enunciado del problema[4].** Hubo más disposición por parte de los estudiantes para resolver los problemas propuestos, aspecto notorio cuando leían varias veces el enunciado del problema. Con respecto a la determinación del dato solicitado, en el problema 3 los estudiantes especificaron la incógnita con más facilidad (91%), mientras que en el problema 6 solo el 59% de los estudiantes logró identificar la incógnita debido al número de preguntas asociadas y los procedimientos requeridos para llegar a la resolución. En términos generales, los estudiantes le dan mucha importancia a conocer con precisión, que es lo que se solicita en el problema, porque la identificación apropiada de la incógnita facilita la solución del problema (Anexo E, Tabla 1).

b) **Identifica los datos suministrados en el problema**. A la hora de identificar los datos suministrados por el problema (Anexo E, Tabla 2), la mayoría de los estudiantes, a diferencia de la Prueba Diagnóstica, encontraron los datos. Aunque hay mayor facilidad para encontrar los datos cuando el problema contiene su propio esquema. Más allá de solo identificar los datos, los estudiantes analizaron la utilidad de los mismos en el contexto del problema.

   En comparación con la Prueba Diagnóstica, en el que a partir de la lectura del problema se pasaba directamente a la resolución ocasionando muchos problemas con respuestas incorrectas, los estudiantes se detienen a analizar pausadamente los datos suministrados y procedieron a su ubicación en el esquema.

c) **Realiza una representación gráfica del enunciado.** Los estudiantes realizan una representación gráfica acorde a lo planteado en el enunciado (Anexo E, Tabla 3). Los problemas 1, 4 y 6 contenían en su planteamiento un esquema para llegar a la solución,

[4] Los resultados globales son presentados tomando como base los descriptores establecidos en las categorías de análisis, es por esto que se muestran en negrilla para una mejor visualización.

aunque el problema 6 requería de realizar otros gráficos en las diversas preguntas que tenía, los estudiantes presentaron fallas para diagramar en las otras preguntas debido a que colocaban las medidas de los lados o ángulos del triángulo incorrectamente. En los problemas 2 y 5 todos los estudiantes realizaron un bosquejo adecuado Además los estudiantes que no sacaron aparte los datos los incluyeron en el diagrama hecho. En el diagrama realizado en el problema 3 presentaron fallas en la ubicación de los ángulos de elevación dados en el problema, de esta manera el 73% de los estudiantes realizó bien su gráfico.

Los estudiantes asimilaron la importancia que tiene un diagrama en la solución de un problema, por esto se esmeraron en hacer bien sus gráficos ya que les permitía tener más facilidad para concebir el plan para la solución.

- Con respecto a la fase dos del método Polya, **concebir un plan**, se encontró que:

a) **Identifica que ley usar para resolver el problema.** Una vez analizado cada problema para comprenderlo, el estudiante debe identificar la ley a utilizar, como era de esperarse los estudiantes que no realizaron el diagrama correcto del problema presentaron dificultades al escoger la ley a usar. En el problema 5 los estudiantes identificaron con facilidad la ley a usar (91%), mientras que en los problemas 4 y 6 se obtuvo un 63% y 59% respectivamente (Anexo E, Tabla 4). Las dificultades se contemplan cuando los estudiantes determinaron los lados opuestos a los ángulos equivocándose en varias ocasiones. En la realización del gráfico los estudiantes nombran los ángulos con las letras A, B, C, pero al pasar a nombrar los lados es cuando se les dificulta.

El avance en la identificación del teorema a usar es muy notorio, a diferencia de la Prueba Diagnóstica en la cual los estudiantes no analizaban cuándo y por qué debían utilizar la ley del seno o del coseno; los resultados de la Prueba Final muestran que los estudiantes determinaron de forma correcta la ley a utilizar, además explicaban las razones para tal elección.

b) **Establece el orden en que se utilizan las leyes.** Hay problemas en los que se deben realizar algunos pasos intermedios antes de dar su solución, estos pueden ser el uso de las razones trigonométricas o la ley del seno o del coseno una tras de otra para determinar datos faltantes en el problema, por lo anterior, es necesario establecer el orden en que se usan las leyes cuando se requiere (Anexo E, tabla 5). Es necesario recalcar que en esta fase no se da solución al problema, solo se menciona en palabras cual sería el orden de los teoremas o procedimientos a realizar. En los problemas 3 y 4 de la Prueba Final, hubo fallas porque no identificaron que se requería un paso extra antes de usar las leyes, como el procedimiento de hallar un ángulo con otro conocido pues eran suplementarios, y en el problema 6 se debía usar las razones trigonométricas porque en algunas preguntas los triángulos planteados eran rectángulos, pero algunos estudiantes ejecutaban directamente las leyes obteniendo respuestas no adecuadas.

c) **Idea un plan de solución.** Al momento en que los estudiantes identificaron los diferentes procedimientos, así como la ley o la secuencia de las leyes a usar para llegar a la solución del problema, indirectamente están ideando un plan para resolverlo (Anexo E, tabla 6). Cuando idearon el plan solución, solo plantearon cómo resolver el problema mas no usaron los diversos algoritmos propuestos; es así como los estudiantes realizaron su plan de resolución, solo que algunos los hicieron de manera completa, como en el caso del problema 5 donde el 91% de los estudiantes lo hicieron correctamente, y otros pasaron por alto procedimientos necesarios para la acertada solución.

   Es de rescatar que ya los estudiantes no pasan directamente a aplicar los teoremas en los problemas, los alumnos planearon soluciones por encima del 73% en todos los problemas. Lo anterior es un paso significativo en la resolución de problemas porque se hace un análisis de cómo realizar la resolución antes de la ejecución, así se puede corregir fácilmente las posibles equivocaciones.

- Con respecto a la fase tres del método Polya, **ejecución del plan**, se encontró que:

a) **Sigue el plan elaborado inicialmente.** Después de contar con sus propias palabras el cómo resolver el problema, los estudiantes pasan a ejecutar lo planeado. Como era de esperarse, los estudiantes que no idearon un plan tuvieron dificultades en la resolución del problema (Anexo E, tabla 7) y en consecuencia llegaron a respuestas erróneas. Los estudiantes que elaboraron su plan lo siguieron a cabalidad y solo en unos casos usaron algún procedimiento extra para realizar de manera correcta el problema, procedimientos que no fueron tenidos en cuenta a la hora de planear la solución.

b) **Ejecuta con detalle cada operación.** En la realización de los procedimientos era notorio que los estudiantes terminaran los problemas o ejercicios rápidamente, lo volvían casi una competencia por ver quién terminaba primero, pero al hacer uso del método Polya, se percataban de que estuvieran utilizando bien las leyes y realizaban paso por paso los procedimientos sin llegar a saltarse procedimientos. En el problema 6 fue donde hubo fallas debido a que se saltaron algunos pasos, teniendo que en este problema el 63% de los estudiantes si ejecutaron con detalle cada operación (Anexo E, tabla 8).

c) **Verifica cada paso realizado.** A medida que los estudiantes ejecutaban con detalle cada operación, debían verificar que cada paso realizado estuviera correcto. En el problema 1 solo el 59% de los alumnos verificaron cada uno de los pasos efectuados (Anexo E, tabla 9), los estudiantes pasaban directamente a utilizar las leyes para hallar los lados o ángulos sin detenerse a analizar los resultados obtenidos, como en algunos casos donde no presenciaban fallas en algún signo mal copiado o en una operación realizada. En los problemas 4 y 6, el 68% y 64% de los estudiantes verificaron los pasos, esto muestra que se debe reforzar la práctica de verificación que venía sustentada en el proceso de inmediatez, el de hacer todo de manera rápida.

- Con respecto a la fase cuatro del método Polya, **visión retrospectiva**, se encontró que:

a) **Demuestra que la respuesta corresponde a lo que se pide en el problema.** (Anexo E, tabla 10). Los estudiantes compararon los datos dados en el planteamiento y el resultado obtenido, se percataron de que no era tan desiguales, confirmando que la respuesta era acorde con lo solicitado. En el problema 4 fue donde menos se dio este paso ya que solo el 63% constataron que la respuesta no estuviera excedida con respecto a lo dado.

b) **Examina el resultado del problema.** Los estudiantes debían evaluar, valorar o medir si lo que se obtuvo al llevar a la práctica el plan de acción corresponde al objetivo buscado (Anexo E tabla 11). Los estudiantes hicieron uso de las fórmulas de las leyes para comprobar que la respuesta no estuviera incorrecta. Este descriptor está muy asociado con el anterior porque al determinar si la respuesta obtenida corresponde a lo que se pide en el problema también se está examinando que lo realizado esté bien hecho.

3.5.2 Análisis de los Datos. En este apartado se presenta un análisis detallado de cómo se comportaron los estudiantes frente a cada una de las fases del Método de Resolución de Problemas de Polya. El análisis se realizó teniendo en cuenta las observaciones de la clase, las entrevistas a los estudiantes y algunas evidencias de la resolución de problemas de estudiantes en la Prueba Final.

Comprender el problema. Este primer paso trata de imaginarse el lugar, las personas, los datos, el problema. Para ello, hay que leer bien, replantear el problema con sus propias palabras, reconocer la información que proporciona, hacer gráficos, tablas. En ocasiones se tiene que leer más de una vez.

Cuando inició el desarrollo de las actividades programadas en la Secuencia Didáctica, enfocadas en la comprensión del problema, los estudiantes realizaban una lectura rápida del problema y a continuación sacaban los datos sin tener consciencia para qué los iba a utilizar, leer varias veces el problema no era una prioridad y por eso deseaban pasar directamente a la solución. El siguiente segmento de una entrevista confirma lo dicho anteriormente[5].

P: *¿Cuántas veces leíste el enunciado del problema?*

E5: *Profe, yo solo lo leí una vez, pero está muy difícil.*

P: *Si está muy difícil, ¿no crees que sea necesario leerlo otra vez?*

E5: *Será…pero para qué si ahí veo los datos que me dan.*

[5] Los códigos utilizados en la transcripción de las entrevistas: E#: Estudiante número, P: profesor.

P: *¿Y sabes esos datos para qué son?*

E5: *Ah verdad… profe, creo que tengo que leer varias veces para empaparme bien del problema porque no sé ni que tengo que buscar.*

P: *Leyendo el problema varias veces, ¿crees que entenderás el problema?*

E5: *Si porque a primera uno no sabe ni que le piden, pero leyendo varias veces se puede idealizar lo que se requiere.*

En un primer momento los estudiantes solo leían una vez el problema y deseaban tener una idea clara de inmediato para solucionarlo. En los primeros problemas que solucionaron era la tendencia, pero conforme avanzó la Secuencia Didáctica, leían varias veces el mismo problema, incluso discutían con los compañeros de grupo acerca del problema propuesto.

En la Prueba Final, uno de los problemas donde los estudiantes presentaron más dificultades para encontrar la respuesta correcta fue en el problema 6, debido a que constaba de varios literales a resolver y, en consecuencia, requería de varios procedimientos.

P: *¿Cómo te sentiste resolviendo el problema 6?*

E7: *Por lo largo que se veía el problema pensé que sería más difícil, pero nada, resultó fácil.*

P: *¿En qué fase del método Polya radicas el éxito para resolver este problema?*

E7: *Para mí, el éxito está en la lectura del problema, si lees y analizas bien de ahí en adelante todo es fácil. Profe, como le dije, al principio me parecía muy duro, pero lo leí varias veces y fue surgiendo todo, los datos, la incógnita, qué hacer con eso, fue fácil.*

Lo anterior, confirma la importancia que tiene la lectura del problema y el de leerlo varias veces si a primera instancia no se logra entender.

Con respecto a la **identificación de la incógnita en el enunciado del problema**, en principio los estudiantes lo pasaban por alto, y al preguntarles qué solicitaba el problema, no lo sabían. En particular, para el desarrollo de la Secuencia Didáctica una de las conductas más persistente en los estudiantes era el inmediatismo con el que pretendían salir de paso a la solución de los problemas, sin tener claridad respecto a los requerimientos del problema y las implicaciones de los datos en la misma. Como lo confirma el siguiente episodio de entrevista:

P: *Cuéntame, en el problema 4 de la Secuencia, ¿Qué se requiere hallar en el problema?*

E17: *Pues ahí en el enunciado está claro, ¿a qué tienda debe ir?*

P: *Eso es lo que pregunta el problema, pero, en sí ¿Qué te está solicitando el problema que tu encuentres?*

E17: *Yo no sé bien, espere leo otra vez.* [Lee en voz alta el problema y dice:] *él está en su casa y debe ir a una de las dos tiendas que hay.*

P: *¿Qué condición se plantea en el problema?*

E17: *Debe ir rápido para que su papá no se dé cuenta.*

P: *Según eso, ¿Qué tienda debe escoger?*

E17: *Pues yo me demoraría menos a la tienda que esté más cerca.*

P: *Entonces, ¿Qué te está solicitando el problema?*

E17: *Debemos saber que tienda está más cerca de su casa para que vaya a esa.*

P: *Y en términos de triángulos, ¿Qué sería eso?*

E17: *Necesito encontrar la distancia que hay de su casa a una tienda, porque ya sabemos la distancia que hay a la otra tienda, así que debemos encontrar el otro lado del triángulo, y comparando las medidas sabremos cual está más cerca.*

En el momento que los estudiantes empezaron a analizar con detenimiento los problemas, pero no de forma lineal, entendieron la importancia de entender lo que pide el problema para aproximarse a una posible solución.

En los resultados de la Prueba Final un alto porcentaje de los estudiantes identificaron la incógnita del problema, a continuación, se muestran algunos ejemplos.

- Problema 1.

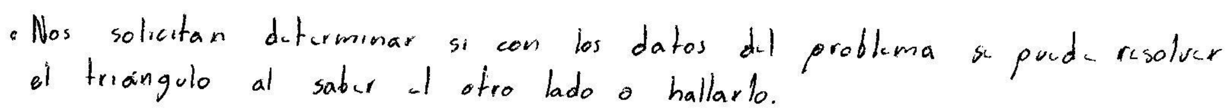

• Nos solicitan determinar si con los datos del problema se puede resolver el triángulo al saber el otro lado o hallarlo.

Figura 6. Identificación de la incógnita del problema 1

- Problema 2.


• Solicitan la distancia entre las dos cometas, el lado opuesto al ángulo que dan.

Figura 7. Identificación de la incógnita del problema

- Problema 3.

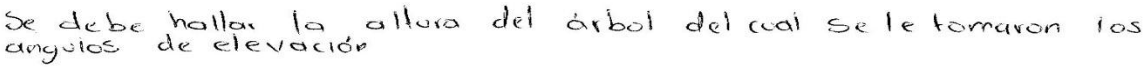

Se debe hallar la altura del árbol del cual se le tomaron los angulos de elevación

Figura 8. Identificación de la incógnita del problema 3

- Problema 4.

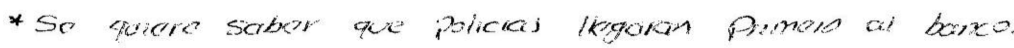

* Se quiere saber que policías llegaron primero al banco.

Figura 9. Identificación de la incógnita del problema 4

- Problema 5.

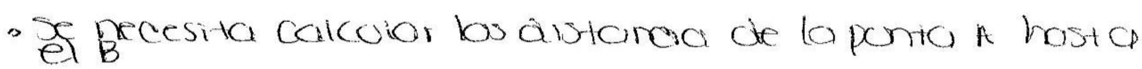

∘ Se necesita calcular la distancia de la punta A hasta el B

Figura 10. Identificación de la incógnita del problema 5

- Problema 6.

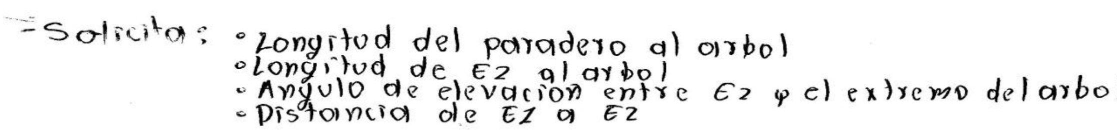

-Solicita:
∘ Longitud del paradero al arbol
∘ Longitud de E2 al arbol
∘ Angulo de elevacion entre E2 y el extremo del arbol
∘ Distancia de E1 a E2

Figura 11. Identificación de la incógnita del problema 6

En la **identificación de la incógnita en el enunciado del problema** hubo un gran avance en esta competencia por parte de los estudiantes, se pasó de no saber que se requería hallar en los problemas a que los estudiantes escribieran aparte el dato solicitado; aunque algunos siguen siendo muy literales con lo preguntado en el problema, otros identifican lo solicitado con detalle.

> E21: *Profe, mire que al uno saber que le pide el problema se le hace más fácil solucionarlo.*
> P: *¿En qué te basas para decir eso?*
> E21: *Pues se hace claro todo el proceso de resolver, al saber lo que piden, se planea bien y se puede comparar la respuesta con lo que me pidieron.*

P: *Según lo que planteas, ¿es necesario que se identifique la incógnita al iniciar la resolución del problema?*

E21: *Claro, es una guía para que uno pueda llegar al éxito en el problema, con eso nos guiamos para una buena solución.*

En el segmento de entrevista anterior hay evidencia del cambio de los estudiantes a la hora de llevar a cabo pasos para solucionar problemas, y la importancia de saber con claridad lo que se les solicita.

Respecto a la **identificación de los datos dados en los problemas**, siempre hay más facilidad de realizar esto cuando el enunciado trae un esquema. En el inicio de la resolución de los problemas establecidos en la Secuencia Didáctica, algunos de los estudiantes que sacaban aparte los datos no sabían a que correspondían.

P: *En el problema 7 de la Secuencia, ¿ya tienes claro lo que se necesita hallar?*

E20: *Si, necesitamos saber el perímetro de la parcela para así saber cuántos rollos de alambre comprar.*

P: *Muy bien, ¿qué datos te proporciona el problema?*

E20: *Que la parcela está delimitada por tres árboles.*

P: *¿Con eso podrías solucionar el problema?*

E20: *Noo, porque no hay ningún número.*

P: *Bueno, ¿qué datos numéricos te proporcionan?*

E20: *La distancia entre un árbol y otro que es de 150m y dos ángulos.*

P: *Si llevaras eso a un triángulo, ¿qué datos serían?*

E20: *Me queda difícil saberlo sin hacer un dibujo… pero viendo bien los datos sería el ángulo A, ángulo C y el lado a.*

P: *¿Por qué dices que es ángulo A?*

E20: *No profe me equivoqué, allí dice que es el ángulo ABC por lo tanto es el ángulo B que nos dan y tampoco sería el lado a porque si está entre árbol A y C sería el lado b.*

P: *Muy bien.*

Los estudiantes por lo general tienden a identificar los datos sin realizar un análisis del para qué sirven en la resolución del problema. Algunos identificaban la incógnita de manera correcta, pero cuando escribían los datos prácticamente le daban solución al problema porque aparecía el lado o ángulo solicitado. En los enunciados que presentaban un gráfico, los estudiantes no sacaban aparte los datos.

P: *Veo que ya estás pasando a planear la solución del problema, ¿y dónde están los datos suministrados?*

E14: *No son necesarios escribirlos porque ya están en el gráfico.*

P: *¿Qué nombre le diste a los lados y ángulos que proporciona el problema?*

E14: *Todavía no sé. Pero creo que no es necesario.*

P: *¿Cómo sabrás que datos utilizar en la ley del seno o coseno?*

E14: *Pues me tocará identificar cada lado y ángulo dado.*

P: *Hazlo antes de que pases a plantear la solución.*

E14: *Si profe, tiene razón, no sabía que era necesario sacar los datos, además veo que falta un dato que está en el texto y en gráfico no.*

En la Prueba Final, la mayoría de los estudiantes (86%) identificaron los datos suministrados, a continuación, se presentan algunos ejemplos.

- Problema 1

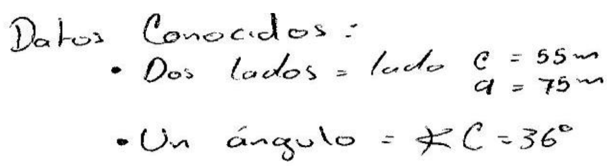

Datos Conocidos:
• Dos lados = lado $c = 55m$, $a = 75m$
• Un ángulo = $\measuredangle C = 36°$

Figura 12. Identifica los datos suministrados en el problema 1

- Problema 2.

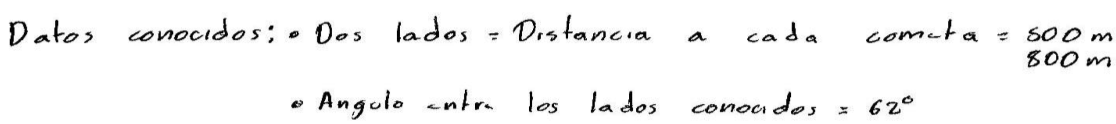

Datos conocidos: • Dos lados = Distancia a cada cometa = 500 m, 800 m
• Angulo entre los lados conocidos = 62°

Figura 13. Identifica los datos suministrados en el problema 2

- Problema 3.

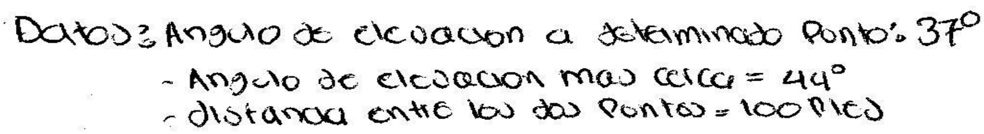

Datos: Angulo de elevacion a determinado Ponto: 37°
- Angulo de elevacion mas cerca = 44°
- distancia entre los dos Pontos = 100 Pies

Figura 14. Identifica los datos suministrados en el problema 3

- Problema 4.

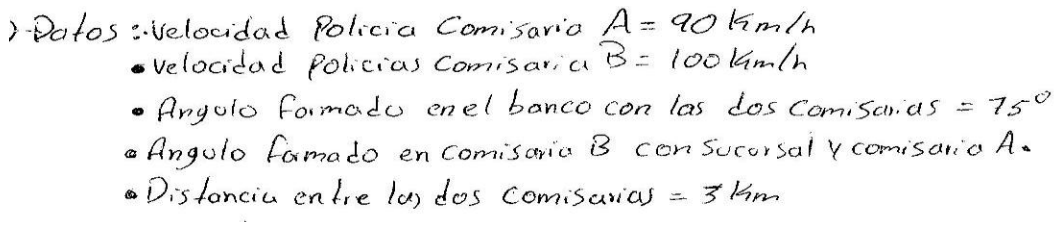

)-Datos: ·Velocidad Policia Comisaria A = 90 km/h
• Velocidad Policias Comisaria B = 100 km/h
• Angulo formado en el banco con las dos Comisarias = 75°
• Angulo formado en comisaria B con Sucursal y comisaria A.
• Distancia entre las dos Comisarias = 3 km

Figura 15. Identifica los datos suministrados en el problema 4

- Problema 5.

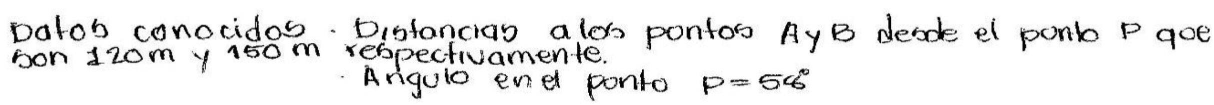

Datos conocidos · Distancias a los pontos A y B desde el ponto P qoe son 120m y 150 m respectivamente.
· Angulo en el ponto P = 56°

Figura 16. Identifica los datos suministrados en el problema 5

- Problema 6.

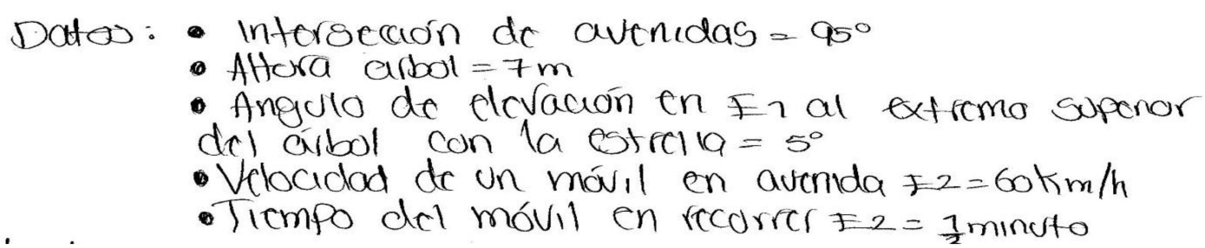

Datos: • Interseccion de avenidas = 95°
• Altura arbol = 7m
• Angulo de elevación en E1 al extremo superior del árbol con la estrella = 5°
• Velocidad de un móvil en avenida E2 = 60 km/h
• Tiempo del móvil en recorrer E2 = 1/2 minuto

Figura 17. Identifica los datos suministrados en el problema 6

En términos generales, los estudiantes escriben aparte los datos suministrados del problema para su debido uso en el planteamiento. Los alumnos realizaban un mejor planteamiento cuando tenían claridad de todos los datos y de la incógnita. Al finalizar la aplicación de la Secuencia Didáctica, algunos estudiantes aún no hacían el análisis respectivo para diferenciar los datos a utilizar en el proceso de resolución del problema; situación recurrente en el área de matemáticas, porque los estudiantes prefieren emplear los datos en algún algoritmo sin razonar previamente en el contexto de las situaciones planteadas.

En todas las metodologías de resolución de problemas, siempre se solicita que se realice un bosquejo para resumir lo estipulado, pero como se mencionó, los estudiantes pasan directamente de los datos a usarlos en algoritmos. En la fase de comprender el problema, el realizar el gráfico no lo tenían en cuenta para resolver problemas, no se le daba la importancia que requiere ya que manifestaban que no era necesario y a partir de esto, no encontraban adecuadamente lo solicitado. Ahora, cuando realizaban el gráfico, este no correspondía a lo planteado ya que no ubicaban bien los lados ni los ángulos, lo cual motivó a realizar la explicación de cómo hacer estos esquemas.

P: *¿Por qué no diseñaste tu esquema en el problema 9 de la Secuencia Didáctica?*

E1: *No es necesario, con los datos que tenemos es suficiente hallar la respuesta.*

P: *En un posible gráfico del problema, ¿cuántos triángulos resultarían?*

E1: *Eso es claro, solo uno.*

P: *¿Por qué afirmas eso?*

E1: *Porque nos dan dos ángulos y un lado, así que queda fácil realizar el dibujo.*

P: *¿El dibujo sería un triángulo rectángulo u oblicuángulo?*

E1: *Un triángulo rectángulo.*

P: *¿Cuánto suman los dos ángulos que conoces?*

E1: *… 121°. ¡Ay! El triángulo no sería rectángulo.*

P: *Entonces, ¿cómo ubicarías en el dibujo los ángulos?*

E1: *(Risas), estaba equivocado. Lo único cierto es que hay un edificio y allí se formaría el ángulo de 90°, por eso decía que era triángulo rectángulo.*

P: *Si, pero no sería uno solo.*

E1: *Claro, desde un mismo punto hay dos ángulos de elevación, quiere decir que hay dos triángulos rectángulos y en el medio de los dos queda uno oblicuángulo.*

Lo anterior es muestra de que con solo los datos del enunciado no se puede llegar a una aproximación correcta de la posible solución del problema cuando no se cuenta con un gráfico que facilite la lectura y análisis de todos los datos. Un buen diseño del esquema del problema es fundamental para alcanzar obtener una respuesta correcta y resume todo lo identificado en la lectura, es por esto que los estudiantes hicieron hincapié en realizar un buen gráfico para lograr el éxito en la resolución de problemas. A continuación, se presentan algunos gráficos realizados en la prueba final para los diversos problemas. Hay que recordar que los problemas 1, 4 y 6 contaban con su gráfico.

- Problema 2.

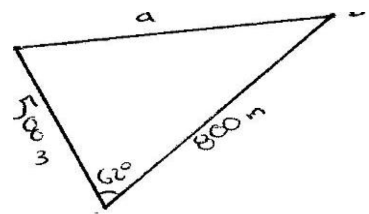


Figura 18. Realiza una representación gráfica del problema 2

- Problema 3.

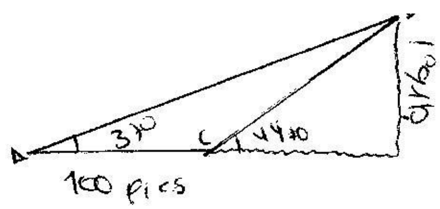


Figura 19. Realiza una representación gráfica del problema 3

- Problema 4.

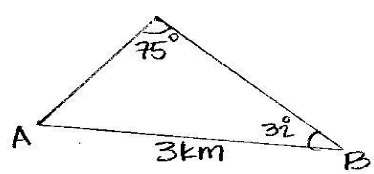


Figura 20. Realiza una representación gráfica del problema 4

- Problema 5.

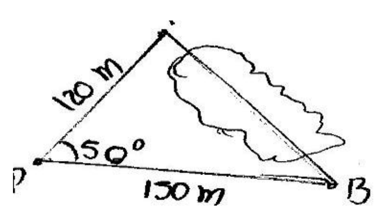


Figura 21. Realiza una representación gráfica del problema 5

- Problema 6.

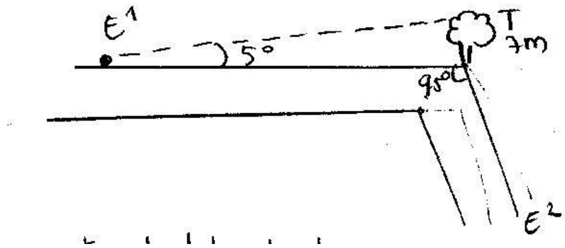


Figura 22. Realiza una representación gráfica del problema 6

Al final de toda la aplicación se entrevistó al estudiante 1 para conocer la importancia que tiene los pasos de la primera fase del método Polya.

> P: *Después de conocer y aplicar cada uno de los pasos del método Polya, ¿cuál crees que es el más importante?*
>
> E1: *Antes de participar en este proceso, yo estaba convencido que era el de ejecutar los teoremas para llegar a la respuesta, pero me di cuenta que la base de todo está en la comprensión del problema, todo parte de allí.*
>
> P: *¿Crees que este paso solo es útil en matemática?*
>
> E1: *No, en los problemas de las otras materias también, solo que en algunas yo no me vería haciendo un gráfico, pero es indispensable que se realice este paso, el de analizar todo lo que nos dan antes de resolver algo.*

Existe una concordancia alta entre los datos aportados en las entrevistas, observación y en la prueba final con respecto a la importancia de comprender el problema. Esta fase es la base para ser competente en la resolución de problemas ya que da las luces para poder enfrentarse a la parte procedimental, y con un buen análisis de los datos dados es un gran avance para alcanzar el éxito a la hora de encontrar respuestas correctas a los problemas planteados.

Concebir un plan. *En esta etapa se plantean las estrategias posibles para resolver el problema y seleccionar la más adecuada. Después de haber identificado la incógnita del problema, los datos suministrados y realizado el bosquejo, se pasa a determinar cómo se resolvería el problema sin llegar a hacerlo todavía.*

Para concebir un plan, es necesario que los estudiantes determinen cada uno de los procedimientos que realizarían en el proceso de resolución, y ello requiere que hagan uso de los saberes previos para establecer que ley se necesita usar, y si se utilizan los dos, determinar cuál sería su orden.

En el inicio de la Secuencia Didáctica, los estudiantes mostraron dificultades para diseñar un plan y explicarlo en sus propias palabras, era difícil establecer que procedimientos realizarían para llegar a la solución sin hacer las operaciones.

P: *Hemos llegado a la etapa donde se debe planear el cómo vas a resolver el problema, ¿tienes alguna idea de cómo resolver el problema 2 planteado en la secuencia didáctica?*
E2: *No sé ni por dónde empezar.*
P: *En los tantos problemas que has hecho, ¿te has encontrado con uno semejante?*
E2: *Pues recuerdo en los que usábamos el teorema de Pitágoras, pero, ¿aquí no se puede cierto?*
P: *Dímelo tú.*
E2: *Los dos ángulos suman más de 90°, así que no quedaría uno de 90°, el teorema de Pitágoras no se podría usar.*
P: *Mira en tus apuntes y dime que te piden hallar en el problema.*
E2: *Me solicitan encontrar dos lados y sumarlos para hallar la medida del cigarrillo.*
P: *¿Qué datos conoces?*
E2: *Conocemos dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos.*
P: *Ahora, dime la diferencia de cuando aplica la ley del Seno y cuando la ley del Coseno.*
E2: *De eso si me acuerdo, la ley del coseno se usa cuando dan tres lados y cuando dan dos lados y un ángulo que no tiene nada que ver con ellos.*
P: *Antes de que sigas, ¿cuál de esas dos situaciones aplica en este problema?*

E2: *Según eso, ninguna.*

P: *Ahora sigue, ¿cuándo se usa la ley del Seno?*

E2: *Fácil, cuándo conocemos dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, o cuando conocemos dos ángulos y … ¡Aah! En este problema conocemos dos ángulos y un lado, aquí se usaría la ley del seno.*

P: *¿Usando la ley del seno solucionarías el problema?*

E2: *Si profe… pero nos faltaría otro lado.*

P: *¿Y lo puedes hallar?*

E2: *Si porque conociendo dos ángulos encuentro el otro y con dos lados puedo usar cualquier ley para hallar el otro lado.*

P: *¿Te das cuenta de que has planteado la solución del problema en tus palabras?*

E2: *Si*

Lo anterior, muestra la dificultad con la que los estudiantes se enfrentaban a los problemas, solo por el hecho de llamarlos problemas ya lo veían como algo imposible de hacer. También evidencia lo útil que es el tener una guía que los lleve a tener un proceso de asimilación de las aplicaciones. Los estudiantes han conceptualizado de manera óptima sobre el cuándo utilizar una ley u otra, solo que al plantear las leyes que usan en sus propias fórmulas presentaban fallas a la hora de resumir el cómo resolverían el problema.

El proceso para lograr que los estudiantes escribieran en sus propias palabras el cómo resolverían los problemas fue lento, pero con ayuda de los grupos de trabajo que estaban propuestos para realizar las actividades de la secuencia, les facilitó el plantear los problemas. De cada grupo se escogía uno antes de realizar una actividad y se le realizaba la entrevista, cuando asimilaban la intención del método Polya volvían a su grupo y eran monitores realizando las preguntas para que sus compañeros pudieran relatar cómo resolver los problemas.

En el problema 3 de la Secuencia Didáctica fue en el que se presenciaron más dificultades. A continuación, se muestra un caso.

P: *¿Ya tienes claros los datos que suministra el problema?*

E15: *Si profe, aunque así el problema tenga su dibujo no me queda claro que pasos seguir para solucionarlo.*

P: *¿Cuál es la duda o dificultad?*

E15: *Es que tengo tres ángulos y no identifico bien los triángulos.*

P: *De los posibles triángulos que se pueden dibujar en el problema, ¿cuál usarías primero?*

E15: *Dentro de mi lógica, sería el formado con los puntos A, B y el avión.*

P: *¿Por qué?*

E15: *Porque del punto A al B es la única distancia que conocemos.*

P: *Muy bien, ahora, en ese triángulo, ¿qué teorema aplicarías?*

E15: *No sé porque el ángulo B no estaría dentro del triángulo, así que el triángulo quedaría con un lado y un ángulo y así no se puede usar ningún teorema.*

P: *¿hay alguna forma de hallar el ángulo interno del triángulo en el punto B?*

E15: *… si, ya recuerdo, a 180° se le resta 63° pues son suplementarios.*

P: *Muy bien, ahora, ¿qué teorema aplicarías?*

E15: *Tenemos dos ángulos, entonces es la ley del Seno, y con eso hallamos la distancia de A hasta el avión y eso es lo primero que nos solicitan.*

Es necesario que se manejen las preguntas adecuadas para que el estudiante alcance la competencia en esta fase del método Polya. En los problemas de la Secuencia Didáctica se propusieron una serie de preguntas que los estudiantes debían responder con previo análisis para que les facilitara su concepción de un plan solución a los problemas.

En la Prueba Final los estudiantes ya habían asimilado el cómo concebir un plan solución en sus propias palabras, a continuación, se presenta algunos ejemplos en los diversos problemas de dicha prueba.

- Problema 1.

* Para solucionar el problema usar la ley del seno para hallar el ángulo opuesto al lado de 75m y con esos datos encontrar el ángulo que falta y usando la ley del seno hallar el lado faltante para lo último sumar los lados y saber la cantidad de metros

Figura 23. Concibe un plan del problema 1

- Problema 2.

• Para encontrar la distancia entre las dos Comisarias se debe usar el teorema de Coseno porque se conocen dos lados en el triangulo y el angulo incluido

• Conocemos el lado b y c y el angulo ∢A Para hallar el lado ya que es el que solicitan.

Figura 24. Concibe un plan del problema 2

- Problema 3.

✓ Lo primero que hay que hacer es hallar al angulo C con el angulo A pues son suplementarios

✓ Con el angulo C se halla el lado a con la ley del seno

. El lado a es la hipotenusa del triangulo formado por el árbor y la distancia del árbol al punto cercano, y con el ángulo de 44° = P y la hipotenosa se halla la altura de árbol con la razón

Figura 25. Concibe un plan del problema 3

- Problema 4.

• lo primero que tengo que encontrar es la distancia de la comisaria A a la Sucursal usando la ley del seno

• Se halla el tiempo requendo por policias de comisarias A porque ya se tiene distancia y velocidad.

• Se Halla el otro angulo porque la suma de los angulos internos deber ser der 180° y se usa la ley del seno para hallar la distancia de la comisaria B a la sucursal.

Se halla el tiempo requerido por policias de comisaria B a la sucursal y se compara con el otro

Figura 26. Concibe un plan del problema 4

- Problema 5.

- En el problema nos dan dos lados, a y b en el dibujo, y el angulo incluido. Por tanto el teorema que aplicca es el de Coseno para encontrar el lado o distancia solicitada.

Figura 27. Concibe un plan del problema 5

- Problema 6.

• En literal a se emplea la razon tangente para hallar la distancia de E_1 a la base del arbol
• En literal b, con la velocidad del movil y el tiempo se halla la distancia ~~de E_1 a la base~~
• En literal c, con con distancia hallada en literal b y la altura del arbol se halla angulo de elevación con tangente.
• En el literal d, con las distancias halladas en literal a y b se usa el teorema del coseno para encontrar la distancia de E_1 a E_2

Figura 28. Concibe un plan del problema 6

Lo anterior muestra como los estudiantes toman su tiempo para concebir su plan de solución para cada uno de los problemas, esto es un avance significativo porque este paso no lo contemplaban para la solución. El plan de solución estaba implícito en el uso de las leyes, era algo mecánico, pero con las preguntas adecuadas los estudiantes formularon el camino a seguir sin realizar un procedimiento, de este modo lograron apropiarse de los pasos que se llevan a cabo en varios problemas y pueden relacionarlos con otros para aplicarlos en posteriores enunciados, dotándolos de una fortaleza a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas.

Ejecución del plan. Después de planear la solución del problema se procede a aplicarlo, para ello se ejecuta en detalle cada operación y se verifica cada paso realizado.

Los estudiantes mostraban mucho entusiasmo cuando empezaban la parte operativa del problema porque querían demostrar que todo lo que escribieron en la concepción del plan les había quedado bueno. Vale la pena recalcar que esta era la fase a la que los estudiantes estaban más acostumbrados porque son los procedimientos que realizan en la mayoría de clases, ellos son excelentes resolviendo ejercicios y su debilidad estaba en el momento de aplicar estos conceptos, pero la dificultad estaba más presente en la comprensión o interpretación del problema que en la parte operativa.

En las actividades planteadas en la Secuencia Didáctica enfocadas en la ejecución del plan, los estudiantes seguían al pie de la letra lo establecido. Algunos tenían su listado de pasos a seguir e iban marcando el que realizaban. Cuando se les preguntaba sobre los pasos seguidos mostraban motivación porque los hacían conforme con que lo habían dicho antes.

> P: *Después de concebir tu plan para resolver el problema, ¿cómo te has sentido en la ejecución de lo propuesto?*
> E12: *Se me ha hecho todo más fácil. A mí siempre me gustaba resolver ejercicios y en los problemas me quedaban malos porque no sabía que aplicar.*
> P: *¿Has realizado todo lo que planeaste?*
> E12: *Si, aunque creía que no era necesario, pero así voy viendo que todo me quede bien.*

Con los pasos a seguir bien definidos, los estudiantes mostraron mucha motivación, y por eso aplicaban todo lo que escribieron. Por esto le dieron mucha importancia a que el plan les quedara bien, de este modo, realizaron en detalle cada operación, aunque, en los primeros problemas de la secuencia, seguían queriendo realizar todo de manera rápida.

> P: *Acabaste rápido todo el procedimiento, ¿seguiste todo lo que planeaste?*
> E18: *Si, por eso acabé rápido.*
> P: *Veo que has reemplazado los valores en la fórmula, pero, ¿Dónde están los resultados que has ido obteniendo en cada paso?*
> E18: *No profe, eso se hace directo en la calculadora.*
> P: *¿Estás seguro que no te equivocaste?*
> E18: *… comprobemos este problema y verá. Tiene que dar lo mismo.*
> P: *Y si anteriormente te equivocaste en un número cuando lo ingresaste en la calculadora, ¿cómo te das cuenta de eso?*
> E18: *Me toca volver a hacer todo.*

P: *Es mejor que vayas haciendo todo paso a paso y así puedes ver donde te equivocas, ¿te dio el mismo resultado en lo que estabas comprobando?*

E18: Risas, *no, algo escribí mal.*

Lo anterior es muestra de algunas fallas que tenían los estudiantes al ejecutar su plan, realizaban el procedimiento directamente en la calculadora sin ir colocando resultados de los pasos intermedios, cuando tenían una falla no sabían en qué parte del proceso estaba y tenían que volver a realizarlo todo. A partir de lo anterior, se hizo necesario enfatizar en que se debía realizar cada operación con detalle para luego poder verificar y así saber en qué momento se pudo presentar alguna falla.

En cuanto a las dificultades que presentaron en la ejecución del plan, estuvieron marcadas por descuidos en algunos despejes o por no hacer uso de manera adecuada de una ley. Por ello fue muy importante que los estudiantes verificaran cada paso que realizaron. Es así como en los primeros problemas de la secuencia, el tiempo requerido para ejecutar lo planeado era muy corto comparado con el que se tomaban cuando verificaban. Pero el proceso de verificación de los pasos fue difícil de apreciarlo cuando presentaron la prueba final porque no es evidente en las transcripciones hechas por los estudiantes. Así que era pertinente realizar una observación detallada, de este modo se notó que varios estudiantes terminaban sus procedimientos y volvían a comprobar que todo estuviera bien, de esta manera requerían más tiempo después de aplicar la Secuencia Didáctica. En las entrevistas se confirmó lo expresado anteriormente.

P: *¿Se te presentó algún inconveniente en la ejecución del plan?*

E6: *Si, resulta que cuando fui a encontrar uno de los ángulos, no podía hallar el resultado porque la división me daba más de uno.*

P: *¿Y entonces qué hiciste?*

E6: *Me devolví y comprobé lo que había resuelto y me di cuenta que me quedó malo un lado cuando usé la ley del coseno.*

P: *Cuando realizaste la operación, ¿por qué no verificaste que estuviera bien?*

E6: *Creía que había quedado bueno.*

P: *No verificaste a tiempo y te tocó cambiar lo demás, ¿qué piensas ahora?*

E6: *Pues dejar la pereza y verificar los pasos, eso es muy importante para que después no lo haga perder tiempo a uno.*

Los resultados de la Prueba Final mostraron que los estudiantes prefieren ejecutar todo paso a paso antes que saltarse los procedimientos, de esta forma aseguraban que los resultados fueran acordes con lo solicitado y podían corregir a tiempo para que la respuesta estuviera correcta. A continuación, se presentan algunos ejemplos de los procedimientos realizados en los seis problemas de la prueba final.

- Problema 1

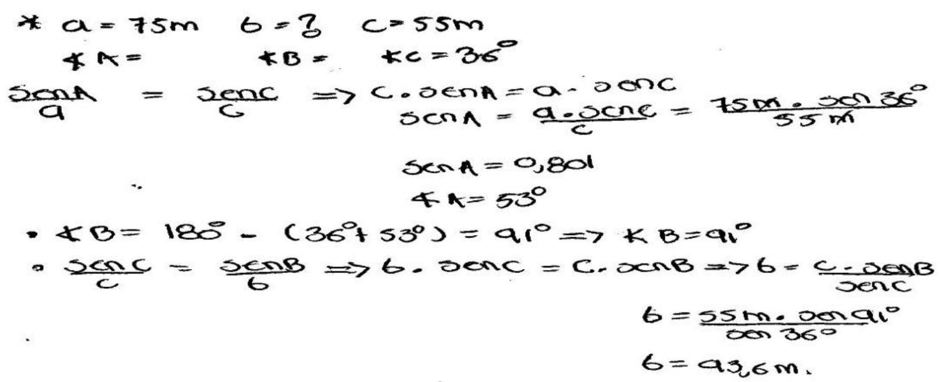


Figura 29. Ejecución del plan del problema 1

- Problema 2.

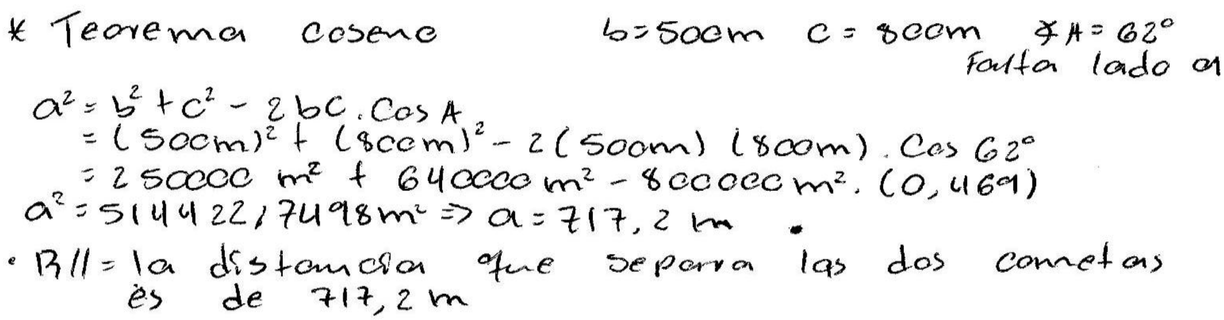


Figura 30. Ejecución del plan del problema 2

- Problema 3.

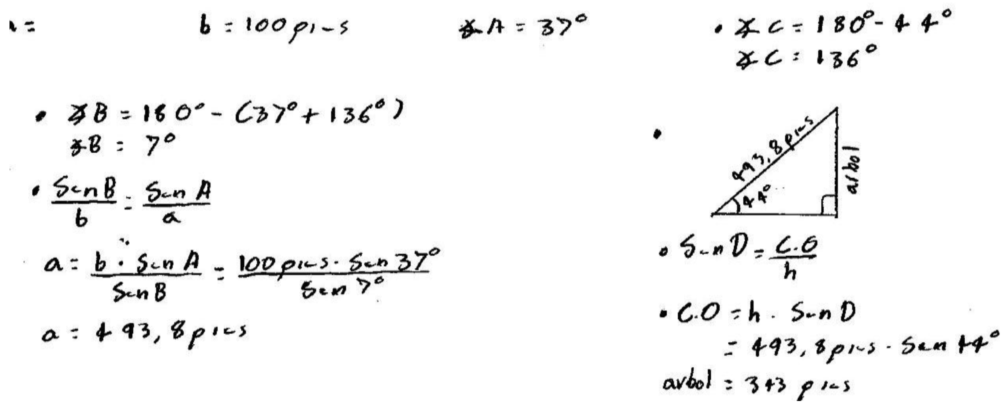


Figura 31. Ejecución del plan del problema 3

- Problema 4.

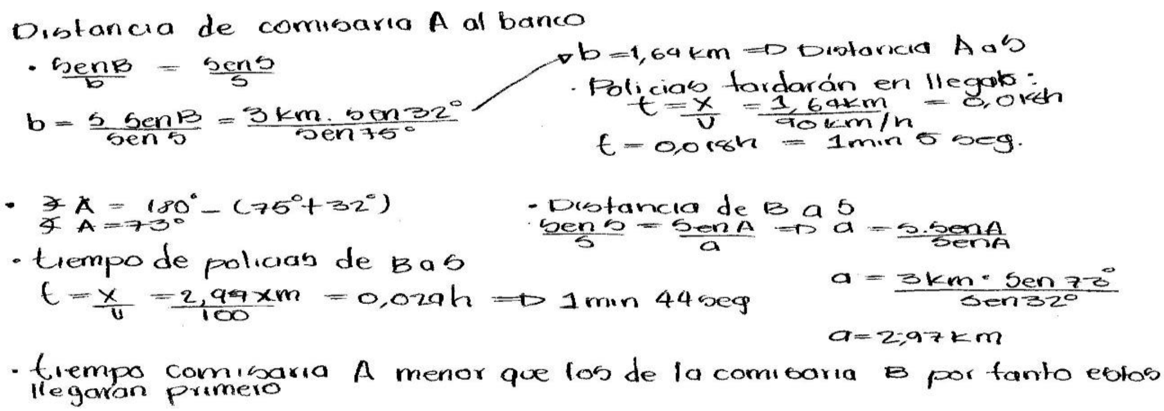


Figura 32. Ejecución del plan del problema 4

- Problema 5.

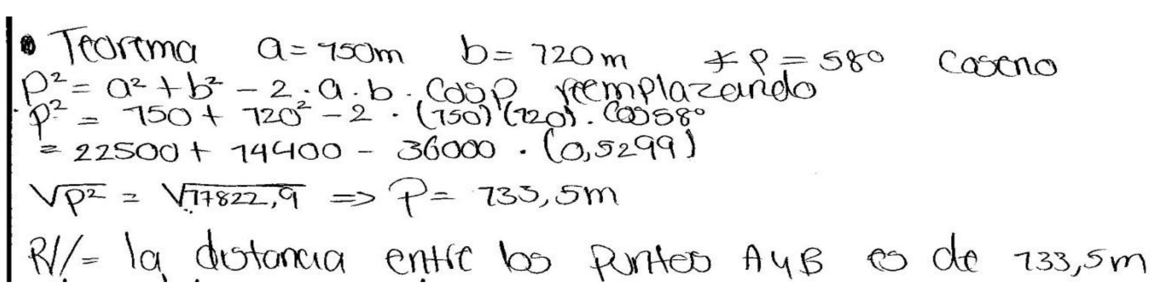


Figura 33. Ejecución del plan del problema 5

- Problema 6.

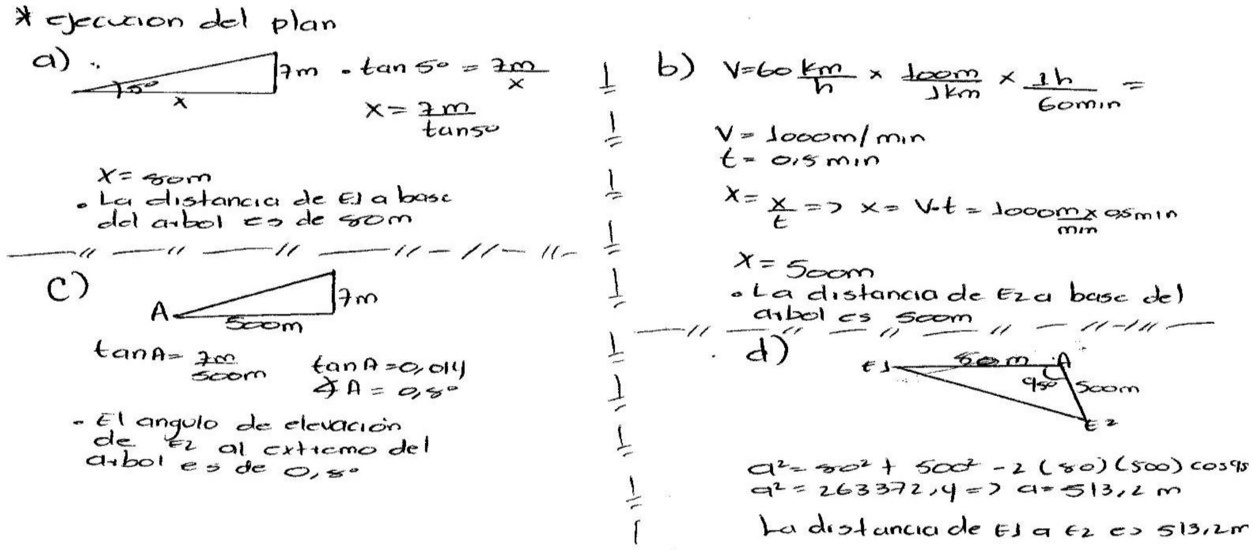


Figura 34. Ejecución del plan del problema 6

Después de la aplicación de la secuencia didáctica, la ejecución del plan pasó a ser solo una fase más en la resolución de problemas para los estudiantes, luego de que era lo más importante en todo el proceso. Con la elaboración de un plan de solución y se sigue a cabalidad, hay facilidad para hacer una autoevaluación del proceso de solución de problemas por parte de los estudiantes porque se dan cuenta de cuando usar una ley o no. También es necesario realizar cada operación con detalle e ir verificando para que puedan ir corrigiendo posibles fallas en el camino y no llegar al final y no saber en dónde está la equivocación.

Visión retrospectiva. El paso a seguir luego de resolver el problema es cerciorarse si la solución es correcta, si es lógica y, si es necesario, analizar otros caminos de solución.

Antes de la aplicación de la Secuencia Didáctica, esta fase de examinar la solución obtenida era prácticamente nula para los estudiantes. Cuando llegaban a una respuesta, no analizaban si era apropiada con respecto a lo que se solicitaba y no hacían una reflexión del proceso de resolución. De este modo, esta fase fue algo nuevo porque tenían que hacer un proceso de autoevaluación antes de presentar la respuesta y a esto no estaban acostumbrados.

P: *Después de haber ejecutado tu plan y hallado una respuesta, ¿los resultados están acorde con lo que se pedía?*

E9: *Yo creo que sí, pero no me he fijado.*

P: *¿Puedes verificar el resultado?*

E9: *... no sé cómo hacerlo.*

P: *¿Qué teorema utilizaste para hallar la respuesta?*

E9: *El del seno.*

P: *¿Qué datos te dieron y cuáles hallaste?*

E9: *Prácticamente ya los tengo todos. Profe, ¿puedo usar uno de los dos teoremas para ver si la respuesta está buena?*

P: *Eso es lo que debes hacer, ¿cómo lo harías?*

E9: *Coloco los datos en la fórmula de la ley del seno y si me da lo mismo pues creo que me quedó bien.*

P: *Muy bien.*

Los estudiantes realizaban todo el proceso de las operaciones, pero creían que hasta allí llegaba la resolución del problema. Para ellos, no era necesario el confirmar de algún modo de que la respuesta era acorde con lo que se pedía. Con la aplicación del método Polya en los problemas de la secuencia, los estudiantes empezaron a apropiarse de que después de encontrar una respuesta al problema era necesario realizar un análisis para verificar que lo hallado era acorde con lo solicitado.

En los últimos problemas propuestos en la Secuencia Didáctica, los estudiantes discutían en sus respectivos grupos sobre la forma de comprobar la respuesta y de mirar si era lógicamente posible o no. A partir de la discusión, se observó que algunos querían pasar por alto este paso asumiendo que lo realizado en los procedimientos estaba muy bien, a continuación, un ejemplo.

P: *¿Comprobaste la respuesta del problema 7?*

E4: *No es necesario ya que todo lo hice bien.*

P: *¿Eso quiere decir que realizaste la verificación de cada paso en la ejecución del plan?*

E4: *Me parece que todos no los verifiqué, pero los hice bien.*

P: *En ese caso, ¿Cuál fue tu respuesta al problema?*

E4: *Me dio que se necesitan comprar 182 rollos de alambre para poder cercar la finca.*

P: *Entonces, ¿Cuántos metros de alambre requiere la finca?*

E4: *Pues se multiplica 182 rollos por 50 metros que trae cada uno y sería 9100 metros.*

P: *Sabiendo que un lado de la parcela mide 150 metros ¿el resultado que te dio es lógicamente posible?*

E4: *No sé, me parece algo exagerado.*

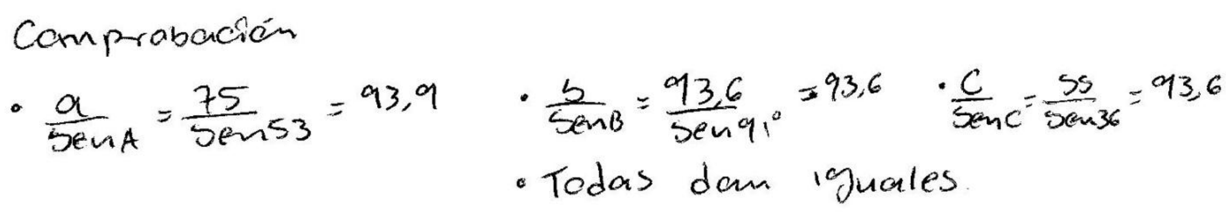
P: *¿Puedes verificar la solución?*

E4: *Si, pero creo que está mal porque no es lógico que los tres lados sumen todo eso. Voy a ver en qué me equivoqué.*

Después de estar seguro que la respuesta era la correcta, con solo basarse en la lógica se percató de que no era posible su solución. Con las preguntas del método Polya se busca que los estudiantes sean críticos ante sus mismos desempeños, y es un gran avance cuando se realizan cuestionamientos del proceso y las respuestas halladas.

Con respecto a la prueba final, la mayoría de los estudiantes (73%) intentaron demostrar que la respuesta si correspondía a lo solicitado en el problema, solo que en los casos donde hubo fallas era lógico de que no se pudiera comprobar. Para verificar la respuesta hacían uso de la comparación de los datos dados con los hallados y también utilizaban las fórmulas de las leyes para comprobar que había quedado bien. A continuación, se muestran algunos ejemplos.

- Problema 1.

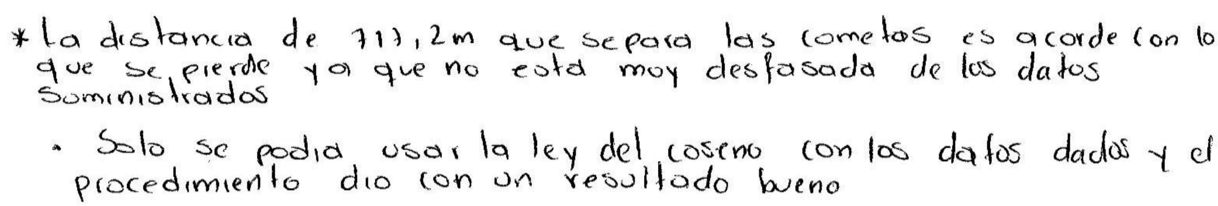

Comprobación

• $\frac{a}{SenA} = \frac{75}{Sen53} = 93,9$ • $\frac{b}{SenB} = \frac{93,6}{Sen91°} = 93,6$ • $\frac{c}{SenC} = \frac{55}{Sen36} = 93,6$

• Todas dan iguales.

Figura 35. Verifica la respuesta del problema 1

- Problema 2.


* La distancia de 711,2m que separa las cometas es acorde con lo que se pierde ya que no esta muy desfasada de los datos suministrados

• Solo se podia usar la ley del coseno con los datos dados y el procedimiento dio con un resultado bueno

Figura 36. Verifica la respuesta del problema 2

- Problema 3.

R/ la altura del árbol es de 343 pies.
* la altura es adecuado con el enunciado porque pasándolo a metros, el árbol mide 104,5m.
Comprobando: Sen 44° $= \frac{343}{493,8} \rightarrow 0,694 = 0,694$ Si da la igualdad.

Figura 37. Verifica la respuesta del problema 3

- Problema 4.

· tiempo comisaria A menor que los de la comisaria B por tanto estos llegaran primero

· Al haber una mayor distancia de la comisaria B a la sucursal bancaria y La velocidad no es considerablemente superior a los de la A, deben llegar primero la comisaria A.

Figura 38. Verifica la respuesta del problema 4

- Problema 5.

* Los datos que se plantearon en el enunciado y la respuesta son algo cercanos por lo que se estima que es acertado.

De igual manera en la comprobación se obtiene:

$P^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos P = \cos P = p^2 - a^2 - b^2 / -2ab$

$\cos P = 133,5^2 - 150^2 - 120^2 / -2(150)(120) = -19077,75 / -36000 = 0,5299$
$\measuredangle P = \cos^{-1} 0,5299 = 58°$: (que es lo quedaban)

Figura 39. Verifica la respuesta del problema 5

Lograr que los estudiantes no presentaran las respuestas de los problemas sin su debido análisis fue un proceso que tuvo muchas dificultades, pero con la aplicación de la Secuencia Didáctica, y cuando la complejidad de los problemas aumentaba, fue necesario el examinar la solución obtenida, pero más que examinar la solución era examinar todo el proceso de la resolución del problema. Después de ser renuentes a realizar la comprobación, se hizo parte del proceso resolutivo logrando que fueran más críticos con sus procedimientos.

Todo lo planteado hasta ahora muestra como una metodología para resolver problemas ayuda a los estudiantes a tener éxito cuando se enfrentan a estos. Los resultados de la prueba final confirman que las actividades planteadas en la secuencia didáctica fueron adecuadas para el fortalecimiento de la habilidad de resolución de problemas.

> P: *Después de toda la aplicación de la secuencia didáctica y de tu desempeño en la prueba final, ¿Qué opinas sobre las actividades planteadas en la secuencia didáctica?*
> E6: *Para mí fue muy productivo todo el trabajo porque aprendí una forma clara para solucionar problemas. Con todo lo que hicimos en la secuencia se me facilitó resolver problemas, a mí antes me daba miedo cuando colocaban problemas y presentar una evaluación con problemas era cosa de otro mundo y no las ganaba, ahora es distinto, gané la evaluación y me parecieron fáciles porque seguí todos los pasos.*

En la opinión anterior se resume el aporte que hicieron las actividades de la secuencia didáctica y la metodología empleada.

Capítulo 4: Conclusiones

El desarrollo de la Tesis de Maestría mostró la evolución que tuvo un grupo de jóvenes frente a la resolución de problemas, en un momento inicial no se tenía una metodología clara que se evidenciaba en que no comprendían lo que el problema les solicitaba, deduciéndose que los estudiantes habían interiorizado un proceso mecánico en donde solo se basaban en los números procediendo a usar los diferentes algoritmos, lo que les dificultó identificar los procedimientos a usar. Igualmente, al momento de realizar las operaciones, no verificaban si estas eran correctas, ya que lo importante era resolverlo directamente, además, cuando se llegaba a la respuesta no se hacía un proceso de reflexión a los problemas resueltos, ya que consideraban que el problema terminaba cuando encontraban una respuesta fuera correcta o no.

Se diseñó una Secuencia Didáctica, basada en el Modelo para el Desarrollo y Evaluación de Competencias Académicas, que permitiera a los estudiantes apropiarse de una metodología para resolver problemas y así fortalecer su habilidad en este aspecto. La secuencia se dividió en varias sesiones, y atendiendo al modelo DECA, se plantearon las actividades de iniciación e introducción, desarrollo y reestructuración, profundización y aplicación, y de evaluación. En este orden de ideas, el hecho que los estudiantes sigan una secuencia en el desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica, fue fundamental en el avance y apropiación de la resolución de problemas, pues como lo sugería Polya, al plantear situaciones problema menos complejas que la original, facilita la creación de estrategias para la solución de situaciones problema, y de esta manera los educandos lograron una mejor apropiación de la resolución de problemas.

Los resultados obtenidos, en la apropiación de la resolución de problemas en la aplicación de la ley del seno y coseno, validan la estrategia considerada en el desarrollo del trabajo, lo que permite concluir, que los estudiantes mejoran su habilidad de resolución problemas, si se realiza un trabajo previo que esté direccionado a refrescar y dar fundamentos que apunten hacia este objetivo, en lugar de trabajar con temas por separado que no muestran las relaciones de unos con otros, como frecuentemente se efectúa en la práctica tradicional.

El trabajar la resolución de problemas con el método Polya permitió que los estudiantes se apropiaran de una metodología clara que les permitió fortalecer su proceso de resolución. De este modo, el proceso de argumentación se fortaleció en los estudiantes, ya que con las actividades implementadas se dieron elementos para afianzar todo el proceso de resolver problemas, y en consecuencia los estudiantes plantearon los problemas en sus propias palabras permitiendo tener claridad en los pasos realizados, y así pueden utilizar lo aprendido en otras actividades o temas que abordan; además, cuando se hace el análisis de la pertinencia de la respuesta obtenida, se fortalece su capacidad de proponer nuevos procesos para resolver un problema.

La aplicación de una secuencia didáctica fundamentada en el método Polya despertó la motivación de los estudiantes para resolver problemas matemáticos, ya no existe el temor de no poder encontrar una solución porque al seguir y hacerse las preguntas del método les facilita el poder llegar a una respuesta correcta, y es así como el método Polya ofrece muchas posibilidades para que los estudiantes desarrollen su creatividad e imaginación convirtiendo las actividades de aprendizaje en un proceso continuo de mejoramiento.

El trabajar con una metodología basada en la resolución de problemas fue muy enriquecedor porque puso a disposición unas herramientas que hicieron que la labor docente fuera más agradable e idónea. El mejoramiento de los procesos de enseñanza aprendizaje en el área de matemáticas requiere cada vez más que se presenten innovaciones, que favorezcan el aprendizaje de aquellos a quienes se les dificulta, y por esto se deben plantear actividades encaminadas a que los estudiantes se sientan en un clima de confianza.

Finalmente, este trabajo de investigación se constituye en una fuente referencial y/o soporte académico para los docentes de matemáticas en el diseño y desarrollo de estrategias metodológicas para la enseñanza en el aula, permitiendo así construir clases que permitan a los estudiantes apropiarse del conocimiento y no ser simplemente almacenadores de información y siendo un recurso pedagógico para profesores e investigadores, que quieran comparar y profundizar más sobre el tema propuesto.

Referentes Bibliográficos

Agudelo, G., Bedoya, V., & Restrepo, A. (2008). *Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos.* (Tesis de pregrado). Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

Alfaro, C. & Barrentes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense, *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.* (4), 83-98. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6902/6588

Bahamonde, S., & Vicuña, J. (2011). *Resolución de problemas matemáticos.* (Tesis de maestría). Universidad de Magallanes, Puerto Arenas, Chile.

Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon* , 49-60.

Bueno, D. (2012). *Propuesta metodológica para mejorar la interpretación, análisis y solución de ejercicios y problemas matemáticos en los estudiantes de quinto grado de la institución educativa Alejandro Vélez Barrientos*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia. Recuperado de http://studylib.es/doc/4499404/1.4-7.-osborn---universidad-nacional-de-colombia

Caballero, O. (2013). *Una transición de la geometría a la trigonometría, utilizando problemas históricos de la astronomía como recurso didáctico en la Clase de matemáticas*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Castañeda, A. (2011). *Aplicación de estrategias que conduzcan a la comprensión y apropiación de metodologías para la resolución de triángulos de cualquier tipo, en estudiantes de grado décimo*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional, Manizales, Colombia.

Cortés, M., & Galindo, N. (2007). *El modelo de Polya centrado en resolución de problemas en la interpretación y manejo de la integral definida*. (Tesis de maestría). Universidad de la Salle, Bogotá, Colombia.

Charnay, R. (1994), "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en Parra, C. y Saiz I., Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones, Buenos Aires, Paidós.

De la Cruz, S., Estrada, P., & Peña, G. (2010). *Estrategias para facilitar el aprendizaje por competencias del teorema del seno y del coseno en décimo grado*. (Tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.

Escobar, M. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de resolución de triángulos con el apoyo del programa Cabri Geometry*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Fernandez, J. (2014). *Resolución de problemas matemáticos.* Madrid: Grupo Mayeutica Conpa.

Gaviria, A., & Barrientos, J. (2001). *Determinantes de la calidad de la educación en Colombia. Archivos de Economía.* Departamento Nacional de Planeación. No. 159

Gómez, H. (2013). *Resolución de triángulos rectángulos y problemas en contexto*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Grupo DECA. (1992). Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación. *Aula de Innovación Educativa*, *006*, 31-40.

Inga, M. (2009). Importancia de la investigación cualitativa para la acción educativa: Presentación de un modelo. *Investigación Educativa*, *13*(24), 205-219.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Compentencias*. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2014). *Derechos Básicos de Aprendizaje. Matemáticas - Grado 10°.* Santafé de Bogotá.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas* (pp. 51-54). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa, Guía didáctica.* Universidad Surcolombiana, Neiva.

Muñoz, J. (2011). *El stomachion de Arquímedes para la enseñanza de la resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos y la verificación de ciertas relaciones trigonométricas en el grado décimo.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Ocampo, I. (2015). *Aprendizaje basado en problemas, ABP: Una propuesta para transformar la enseñanza-aprendizaje de las aplicaciones de la trigonometría en la solución de triángulos en el grado 10º.* (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

Parra, B. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas en la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. *Revista Educación Matemática, vol. 2* , 13-32.

Perales, J. (2000). *Resolución de Problemas.* Madrid: Síntesis S.A.

Perez, M. (2005). Un marco para pensar configuraciones didácticas en el campo del lenguaje, en la educación básica. En *La didáctica de la lengua materna. Estado de la discusión en Colombia.* Cali: Icfes Univalle.

Polya, G. (1989). *Como plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Polya, G. (1961). *Matemáticas y razonamiento pausible.* Madrid: Tecnos.

Rúa, J., & Bedoya, J. (2008). Un modelo de situación problema para la evaluación de competencias ciudadanas. *Entre ciencia e ingeniera*, (4) 9-37. Recuperado de http://biblioteca.ucp.edu.co/ojs/index.php/entrecei/article/download/1951/1857

Schoenfeld, A. (1985). *Solución de problemas matemáticas.* USA: Academic Press.

Skate, R. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata

Tangarife, B. (2012). *Solución de problemas y trabajo cooperativo: una estrategia didáctica a desarrollar en trigonometría*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Torres, J. (1999). Resolución de triángulos: Unidad didáctica incluida en la programación del curso 4° de la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.). *Encuentro Educacional, 6*(2), 123-142. Recuperado de http://produccioncientificaluz.org/index.php/encuentro/article/view/17547/17522

Yin, R. (1994). *Investigación sobre estudio de casos. Diseño y métodos*. Recuperado de https://panel.inkuba.com/sites/2/archivos/YIN%20ROBERT%20.pdf

Zabala, A. (2000). *La práctica educativa. Como enseñar.* Barcelona: Graó.

Zorrilla, Y. (2012). La resolución de problemas en el proceso Enseñanza-Aprendizaje versus el proceso Enseñanza-Aprendizaje desde la resolución de problemas. Recuperado de http://www.faromundi.org.do/2012/11/la-resolucion-de-problemas-en-el-proceso-ensenanza-aprendizaje-versus-el-proceso-ensenanza-aprendizaje-desde-la-resolucion-de-problemas/

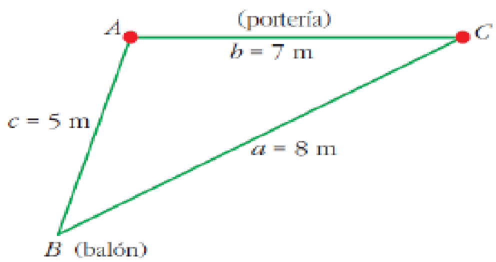
Anexos

Anexo A. Prueba Diagnóstica

PRUEBA DIAGNÓSTICA SOBRE LA APLICACIÓN
DE LEY DEL SENO Y COSENO

Estudiante: ____

1. En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?[6]

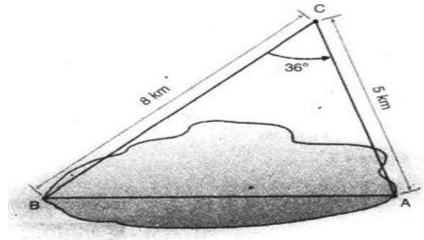


2. Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50º, y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60º. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 km del pueblo A y a 4 km del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B.[7]

3. Un topógrafo situado en un punto C localiza dos puntos A y B en los lados opuestos de un lago. Si el punto C está situado a 5 km de A y a 8 km de B, y además el ángulo formado en el punto C es de 36°, calcula el ancho del lago.[8]

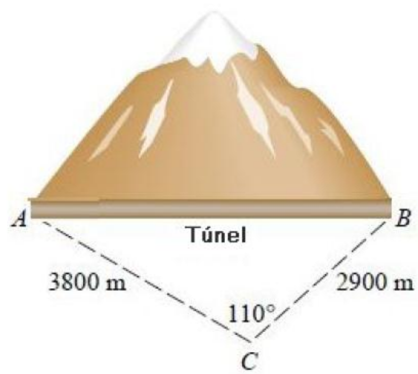
---

[6] Ardila, R. (2004). Espiral 10. Bogotá, Colombia: Editorial Norma, p. 122
[7] http://www.cajondeciencias.com/Descargas%20mate2/ER%20teoremas%20seno%20y%20coseno.pdf
[8] Silva, J. (2002). Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. Ciudad de México: Editorial Limusa, p. 89



4. Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Jhon y Álvaro hay 25 metros, y entre Álvaro y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20º. Calcula la distancia entre Jhon y Camilo.[9]

5. Para la construcción de un túnel dentro de una montaña se tomaron las siguientes medidas desde un punto C. Determina la longitud de este túnel.[10]



6. Una carretera tiene una pendiente de 25° hacia arriba de la horizontal. A lo largo de la carretera están ubicados postes telefónicos. A determinada hora del día, el ángulo de elevación del sol es 67°. El poste proyecta una sombra de 3,89 metros cuesta abajo a lo largo de la carretera. Determine la altura del poste.[11]

7. Desde los puntos A y B de una misma orilla de un río y separados entre sí 12 m, se observan el pie P y la copa C de un pino, situado en la orilla opuesta. Calcular la altura del pino, sabiendo que los ángulos miden BAP = 42°, PBA = 37° y CAP = 50°.[12]

[9] Fuente: Ardila, R. (2004). Espiral 10. Bogotá, Colombia: Editorial Norma, p. 118
[10] Fuente: https://es.slideshare.net/matematicas3/10-leyes-de-senos-y-cosenos-tarea
[11] Fuente: Silva, J. (2002). Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. Ciudad de México: Editorial Limusa, p. 85
Fuente: [12] https://brainly.lat/tarea/5284672

8. Si un hombre mira hacia delante, observa un árbol que está a 8 m de distancia. Su parte más alta tiene un ángulo de elevación de 65°. Si mira hacia atrás, observa un poste a 2 m cuya parte más alta tiene un ángulo de elevación de 35°. Determina la distancia entre las partes más altas de ambos objetos.[13]

[13] Fuente: http://www.jaimeaj.conceptocomputadores.com/uploads/8/0/1/9/8019875/t3mbx14_20121.doc.

Anexo B. Secuencia didáctica

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL FORTALECIMIENTO DE LA COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA APLICACIÓN DE LA LEY DE SENOS Y COSENOS

INTRODUCCIÓN

La labor docente implica diversas tareas, una de las más importantes y en ocasiones difíciles, es la elaboración de las actividades para desarrollar en clase, debido a que no todas las actividades que llevamos al aula permiten que los estudiantes desarrollen su pensamiento matemático y comprendan los contenidos matemáticos vistos.

Existen actualmente muchas herramientas que permiten la elaboración de actividades que promueven el desarrollo de habilidades y capacidades en nuestros estudiantes. Una de ellas son las Secuencias Didácticas, las cuales “son un ejercicio y un posible modelo que se propone al docente interesado en explorar nuevas formas de enseñar las matemáticas” (MEN, 2013, pág. 9). Las Secuencias Didácticas permiten planificar de una manera clara, ordenada y accesible los contenidos matemáticos que se pretenden enseñar en el aula de clases, pero las secuencias didácticas no solo les ayudan a los estudiantes comprender de una manera más fácil los contenidos matemáticos, sino que también le brinda sentido y significado a eso que está aprendiendo. Y a los docentes, les permite enriquecer su conocimiento didáctico en relación con el contenido matemático que están enseñando (MEN, 2013).

La presente Secuencia Didáctica se enfoca en fortalecer la competencia de resolución de problemas que tienen los estudiantes de grado décimo uno de la Institución Educativa Ana Josefa Morales Duque y para lograr este objetivo se tiene como objeto matemático el de la aplicación de las Leyes del Seno y Coseno. Esta Secuencia consta de ocho secciones, las cuales van aumentando el nivel de complejidad de las actividades matemáticas. En la primera sesión los estudiantes se familiarizan con la situación problema y analizan cómo se hacían mediciones indirectas en la antigüedad. En la sesión dos se conceptualiza las Leyes del Seno y Coseno. En la sesión tres se construye un astrolabio casero para poder realizar mediciones de lugares inaccesibles. Las sesiones 4, 5 y 6 se enfocan en las etapas del Método Polya, en ellas se plantean una serie de problemas y se guía a los estudiantes con algunos interrogantes que le permitan llegar a la solución correcta de un problema. En la sesión 7 se procede a darle solución a la situación problema. Y en la sesión 8 se aplica una prueba para validar los aportes de la Secuencia Didáctica.

Desarrollo de la Secuencia Didáctica

Se inicia la Secuencia Didáctica explorando los saberes previos de los estudiantes para determinar qué saben y qué no saben con respecto a la temática a trabajar. Esta exploración corresponde a una evaluación diagnóstica que permite identificar el lugar de donde se puede partir para la construcción de conocimiento. Esta se realiza por medio de una actividad oral.

Además, para explorar los saberes previos se tiene en cuenta los resultados obtenidos en la Prueba Diagnóstica.

Preguntas para explorar saberes previos

- Basándose en sus conocimientos ¿Qué tipos de triángulos existen según las medidas de sus ángulos?
- ¿Qué significa "Resolver un triángulo" en matemáticas?
- ¿El proceso para resolver un triángulo rectángulo aplica para triángulos oblicuángulos?
- ¿Qué métodos conoces para resolver un triángulo oblicuángulo?
- ¿La ley del seno o coseno se puede aplicar para resolver cualquier tipo de triángulo?
- ¿Sabes cuándo aplicar la ley del seno y en que situaciones utilizar la ley del coseno para la resolución de triángulos?
- ¿Has solucionado problemas con triángulos oblicuángulos?
- ¿Has resuelto esos problemas con facilidad?

PRIMERA SESIÓN

AMBIENTÁNDONOS CON LAS MEDICIONES

Objetivo:

Repasar y utilizar los conocimientos previos para la adquisición y comprensión de nuevos conocimientos.

Ideas clave:

- Medidas indirectas
- Aplicación de la trigonometría en problemas cotidianos

Desempeños esperados:

- Enuncia verbalmente las relaciones que existen entre las variables involucradas en la situación.
- Valora la importancia de la aplicación de la trigonometría en problemas cotidianos

Materiales:

- Fotocopias con la situación problema.
- Hojas de papel y lápiz.

Duración:

Dos horas

Situación problema: *Juan y Esteban son dos estudiantes del grado décimo uno de una institución. Ellos se encuentran muy animados en su clase de trigonometría y se colocan un reto: este consiste en obtener la distancia que hay entre los puntos más altos existentes en su colegio. Para ello toman un punto de referencia en el centro del patio desde el cual toman las medidas.*

Guía de trabajo

¿Es posible llevar a cabo este reto? Justificar su respuesta.

En el caso de que sea posible establecer dicha medida; proponer una estrategia.

Realizar un modelo gráfico de la propuesta.

Actividad 1: En grupos de tres estudiantes desarrollar los puntos propuestos en el ítem anterior. Discutir las respuestas a cada una de las preguntas planteadas y realizar un informe que se presentará al final de la clase.

Actividad 2: A continuación, se presentan algunos ejemplos de medidas indirectas que se hicieron en la antigüedad y a partir de esto se plantean unas preguntas y, en los mismos grupos anteriores, discutirlas y socializar.

Recordar que una medida es indirecta cuando se obtiene, mediante cálculos, a partir de las otras mediciones directas. Cuando, mediante una fórmula, calculamos el valor de una variable, estamos realizando una medida indirecta**.**

Medidas indirectas que hicieron los griegos

Se cuenta que Thales de Mileto (aprox. 611-545 a.c), uno de los “siete sabios de Grecia”, utilizando la semejanza resolvió dos problemas: calculó la altura de una pirámide en Egipto, y determinó la distancia de una embarcación a la costa. También se le atribuyen las primeras demostraciones geométricas utilizando un lenguaje lógico.

Eratóstenes de Cirene (aprox. 276-194 a.c.) fue el director de la biblioteca de Alejandría y el primer matemático de la historia del que se tiene noticia que midió el radio de la Tierra, se basó en dos hipótesis muy revolucionarias para su época: Los rayos del Sol inciden paralelamente sobre la Tierra, y la Tierra es redonda.

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) Valiéndose de anteriores estudios, Aristarco apoyaba la idea de que cuando la Luna está en cuarto (ya sea creciente o menguante), la Tierra y el Sol forman un ángulo de 90º entre sí, vistos desde la Luna. Con esto, y midiendo el ángulo que forman la Luna y el Sol vistos desde aquí (β en el dibujo de la izquierda), se podría obtener la relación entre las distancias Tierra-Luna y Tierra-Sol. Este ángulo le dio un valor de ~ 87º a las mediciones que efectuó Aristarco, lo que provocaba que la relación de las distancias fuera de ~20 (es decir, el Sol estaba unas 20 veces más lejos que la Luna). Y puesto que ambos astros se ven desde la Tierra con el mismo tamaño aparente (si observamos el tamaño del Sol, es el mismo que el de la Luna al mirarlos desde aquí, de medio grado), significaría que el sol era 20 veces más grande que la Luna.

Lamentablemente, Aristarco cometió un gran error en la determinación de dicho ángulo, lo cual le llevó a ese resultado, cuando realmente el Sol está aproximadamente a unas 400 veces la distancia a la Luna, aunque eso no empaña su gran trabajo.

De acuerdo con la información responda lo siguiente:

1. ¿Cuál sería el interés en conocer esas medidas?

   ____

   ____

   ____

2. Discutir sobre cómo se pudo obtener esas mediciones

   ____

   ____

   ____

3. ¿Cómo se podría medir la altura de una montaña?

   ____

   ____

   ____

4. ¿Qué dificultades se pueden dar al realizar estas mediciones?

   ____

   ____

   ____

SEGUNDA SESIÓN

GUÍA CONCEPTUAL

Objetivo:

Definir matemáticamente la ley del seno y la ley del coseno.

Ideas clave

- Ley del seno y del coseno.

Desempeños esperados:

- Relaciona los conceptos previos con los nuevos.
- Identifica cuando se usa la ley del seno o coseno.

Materiales:

- Fotocopias de la guía.
- Hojas de papel y lápiz.
- Marcadores.
- Calculadora científica.

Duración:

Dos horas

Conocimientos previos

Resolver un triángulo es el proceso por el cual se calculan las medidas de sus ángulos y la longitud de sus lados conociendo solo algunos de ellos.

Se puede construir un triángulo con tres segmentos dados si cada segmento es menor que la suma de los dos restantes.

La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos; es decir, suman 180°.

Conceptos básicos

Teorema del Seno.

En trigonometría, el Teorema del Seno es una relación de proporcionalidad entre las longitudes de los lados de un triángulo y los senos de los ángulos respectivamente opuestos. Otra forma de expresarlo sería: En todo triángulo la relación de un lado al seno del ángulo opuesto es constante.

Usualmente se presenta de la siguiente forma: Si en un triángulo *ABC*, las medidas de los lados opuestos a los ángulos *A*, *B* y *C* son respectivamente *a*, *b*, *c*, entonces

$$\frac{Sen\ A}{a} = \frac{Sen\ B}{b} = \frac{Sen\ C}{c}$$

Hay tres situaciones en las cuales la Ley de los senos es útil para resolver un triángulo. Estas son:

- Cuando se conocen las medidas de dos ángulos y la longitud del lado incluido.
- Cuando se conocen las medidas de dos ángulos y la longitud del lado opuesto a uno de ellos.
- Cuando se conocen las longitudes de dos lados y la medida del ángulo opuesto a uno de ellos.

Teorema del Coseno

El Teorema del Coseno es una generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos no rectángulos que se utiliza, normalmente, en trigonometría. El teorema relaciona un lado de un triángulo con los otros dos y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados: Si en un triángulo *ABC*, las medidas de los lados opuestos a los ángulos *A*, *B* y *C* son respectivamente *a*, *b*, *c*, entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos\ A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos\ B$$

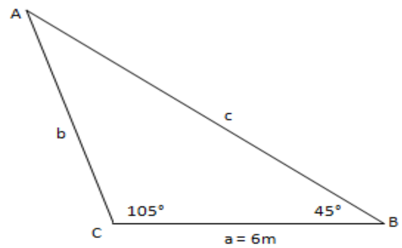
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C$$

La Ley del Coseno se puede usar cuando se conoce las longitudes de los tres lados del triángulo o dos lados y el ángulo incluido.

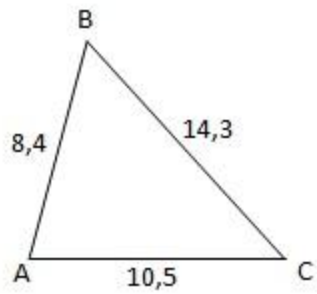
Actividad 1

De manera individual resuelve los siguientes ejercicios:

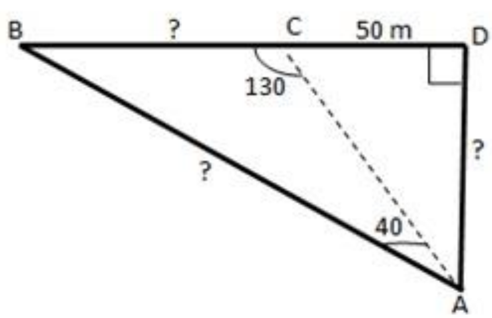
1.- De un triángulo sabemos que: a = 6 m, B = 45° y C = 105°. Determina los restantes elementos.



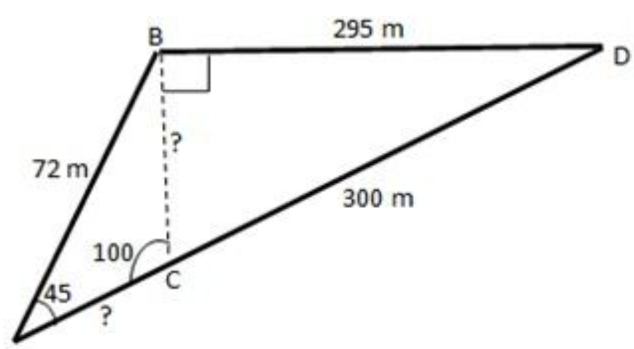
2.-



3.-



4.-



Ahora, formar grupos de tres estudiantes y socializar los resultados alcanzados en la resolución de los triángulos anteriores. En caso de que los resultados sean diferentes, discutir la ley y los pasos usados para resolverlos.

A partir de los procesos llevados a cabo para resolver los triángulos anteriores contestar lo siguiente:

- ¿Los datos planteados en los ejercicios son suficientes para resolver los triángulos?
- ¿Determinan con facilidad que ley aplicar en cada caso?
- En caso de encontrar con facilidad que ley aplicar, ¿es sencillo el procedimiento para encontrar los datos faltantes?
- ¿Qué diferencias encuentran entre los ejercicios 1 y 2 con los ejercicios 3 y 4?

TERCERA SESIÓN

TODOS A MEDIR

Objetivo:

Construir un instrumento que permita realizar mediciones de ángulos.

Ideas clave:

- Ángulo de elevación y de depresión.
- Triángulo rectángulo.
- Razones trigonométricas.

Desempeños esperados:

- Construye un astrolabio teniendo en cuenta las instrucciones dadas.
- Mide distancias y obtiene ángulos de elevación y de depresión.

Materiales:

- Un pedazo de cartulina de 25cm x 25cm.
- Un pitillo de 25cm.
- Piola o cuerda.
- Plomada o una tuerca.
- Transportador.
- Colbón.
- Hojas de papel y lápiz.
- Calculadora científica.
- Cinta métrica.

Duración:

Tres horas

¿Qué es y para qué sirve un Astrolabio?[14]

El astrolabio o cuadrante es una herramienta simple que tiene sus orígenes en la antigua Babilonia. Esta es una herramienta, que, por medio de un sencillo diseño, permitía calcular alturas, distancias e incluso orientarse en la navegación. A partir de estas primitivas piezas, se desarrollaron luego los sextantes, astrolabios esféricos, armilares, nocturlabio etc.

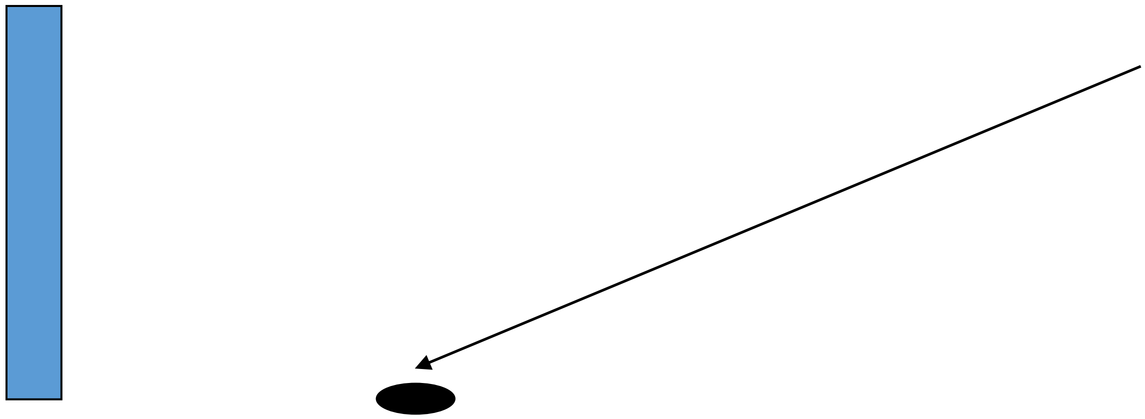
[14] https://es.slideshare.net/RobertsNAR/construccion-astrolabio

Actividad 1

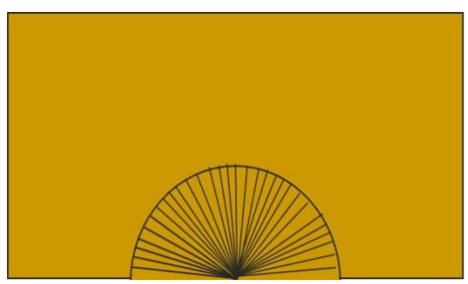
Construir un astrolabio.

Procedimiento

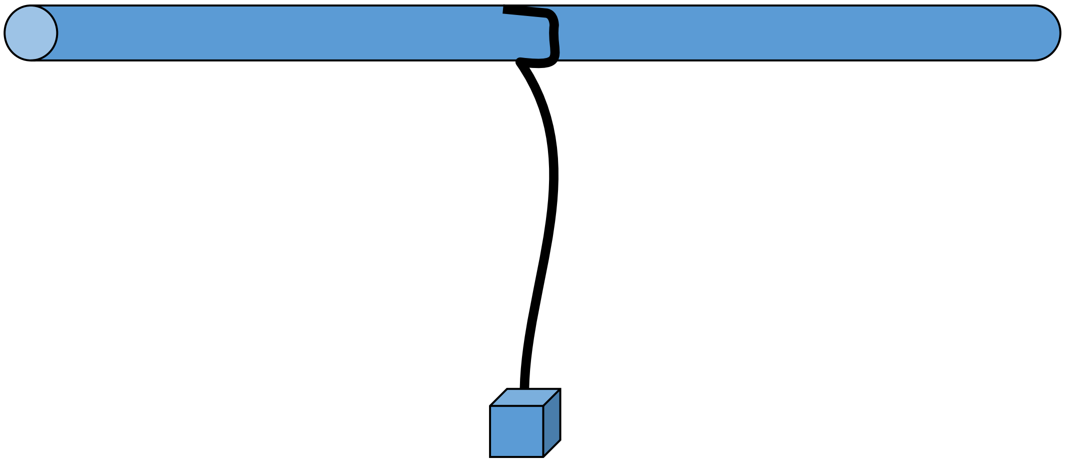
Sobre uno de los lados de la cartulina marcar el punto central



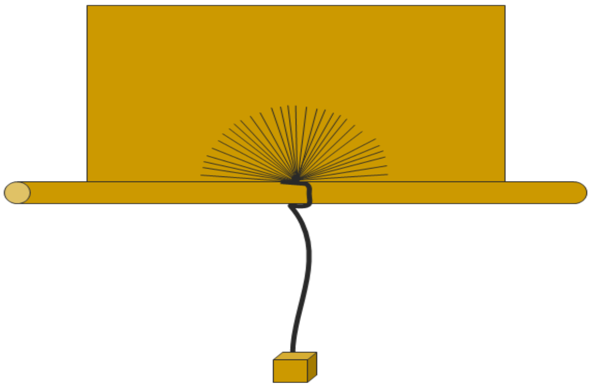
Utilizando el transportador sobre el borde del cartón, marcar la mayor cantidad posible de ángulos (si se puede, cada 5º o menos). Si se desea más precisión extender las líneas hasta el borde de la cartulina.



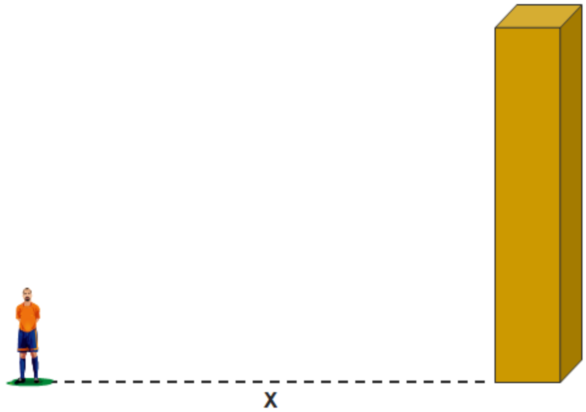
Atar la piola o cuerda al centro del pitillo y el otro extremo a la plomada o tuerca.



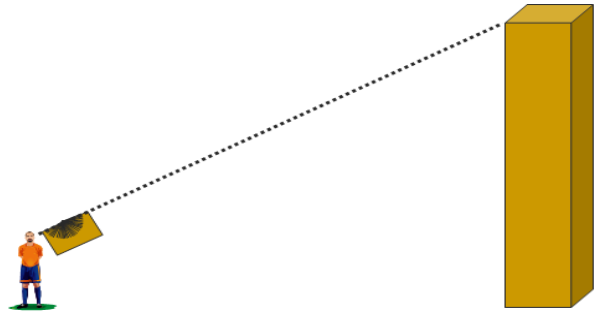
Pegar el pitillo sobre el borde del cartón de manera que el centro del nudo coincida con el centro del haz de líneas de la cartulina.



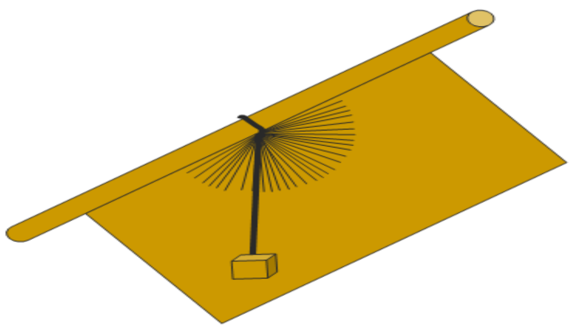
Ahora, colocarse a una distancia conocida desde el elemento a medir (p.e. edificio, árbol, etc.), llamemos a esta distancia X.



Mirar a través del pitillo buscando acertar al extremo superior del elemento a medir. Asegurarse que la marca de 0º quede junto al ojo y la de 180º alejada del mismo. Esperar a que la cuerda que cuelga quede quieta.



Enfocando la punta del objeto que deseas medir, la piola con la plomada se moverá y marcará un ángulo en el transportador. Observa cuál es el ángulo. Este ángulo será α.



Ahora mide la distancia a la que tú estás del objeto. Esta será *l*.

Si h es la altura del objeto, entonces usando las razones trigonométricas, se puede saber que $tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$

En el caso del ejercicio práctico sería $tan \propto = \frac{h}{l}$, entonces la altura que se midió sería $h = l\ tan\alpha$

Esa altura que se obtiene no será la altura exacta del objeto ya que es la medida de horizontal de tu vista a la punta del objeto. Esto quiere decir que debes sumarle lo que tú mides al resultado anterior.

Actividad 2

Sesión realizada en el patio del colegio.

1. Formar grupos de cuatro estudiantes, en los que, cada uno debe tener su propio astrolabio casero. En caso de no disponer de suficientes cintas métricas, los distintos grupos deberán organizarse para repartirse las que estuvieran disponibles en tiempos iguales.
2. Fijar en el lugar de realización de las prácticas diez puntos a medir.
3. Cada grupo se organiza de manera que tengan al menos dos mediciones (dobles) independientes para cada objetivo. La organización del equipo deberá trabajar con un cuaderno de campo en el que realizarán las notas pertinentes.
4. El trabajo lo deberán continuar los grupos en horario no lectivo. Este trabajo constará de un informe en el que deberán adjuntar todas las medidas bien organizadas, y la doble resolución del cálculo de las distancias a cada uno de los objetivos, con un esquema gráfico aclaratorio.
5. Cada grupo expone durante cinco minutos la resolución de uno de los problemas al resto de la clase. Un componente del grupo es el portavoz encargado de defender el trabajo, en el momento de la defensa se elige por sorteo que miembro del grupo haces las veces de portavoz.
6. Se evalúa la actitud positiva hacia el trabajo en equipo, el cuaderno de campo, el informe final y la presentación.

CUARTA SESIÓN

APLICANDO PASOS ADECUADOS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Objetivo:

Conocer el Método de Polya para resolver problemas matemáticos.

Ideas clave

- Método Polya
- Ley del seno y del coseno.

Desempeños esperados:

- Reconoce que resolver un problema no es un procedimiento inmediato.
- Realiza acciones concretas para comprender un problema.

Materiales:

- Fotocopias de la guía
- Hojas de papel y lápiz.
- Marcadores.

Duración:

Dos horas

Conceptos básicos:

La guía que se detalla a continuación y las que le siguen están determinadas a trabajar exclusivamente con problemas. Este trabajo implica la aplicación de una metodología matemática que se pueda implementar a través de la práctica y posteriormente se siga aplicando en las clases que se relacionen con problemas matemáticos, por lo tanto, es preciso aprender a seguir un proceso de resolución que sirva para cualquier problema, es acá donde se va a llevar a cabo la metodología de George Polya con 4 pasos que se aplicarán de manera sencilla.

A partir de aquí se iniciará la resolución del problema siguiendo las 4 fases siguientes:

1. Comprensión del problema.
2. Elaboración de un plan.
3. Ejecución del plan.
4. Comprobación.

En la comprensión del problema es necesario leer el enunciado varias veces, analizarlo, entenderlo y aclarar las dudas, teniendo en cuenta la información que se da (identificación de los datos); lo que se pide (la pregunta) y la información que falta (la incógnita), para proceder a elaborar el plan con su correspondiente ejecución. Para la elaboración del plan se seleccionarán los datos necesarios y los teoremas a utilizar (orden de realización de los mismos). Se calculará mentalmente el resultado aproximado, se efectuarán ejercicios ensayo-error y luego se hará el siguiente derrotero:

- Los datos que se necesitan para solucionar el problema son...
- Para resolver el problema se deben realizar las siguientes operaciones.
- Para contestar la pregunta hay que analizar los resultados posibles.
- Analizar otras posibles soluciones.

Para la ejecución del plan se deben realizar las operaciones necesarias, comprobar si los ejercicios son correctos y si el resultado obtenido es coherente con lo que se pregunta.

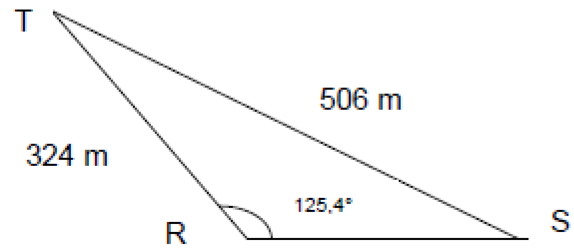
Analizar el resultado obtenido para asegurarse que es viable y que da respuesta a la pregunta formulada; elaborar la respuesta que satisfaga la pregunta.

Actividad 1

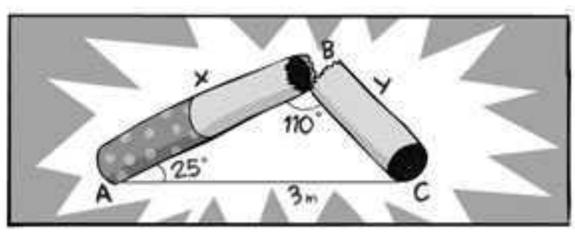
A continuación, se presentan ocho problemas y lo que se pretende es que los estudiantes los comprendan, para esto se le presentarán una serie de preguntas que harán que se tengan todos los detalles claros del problema. Cabe aclarar que en este paso de comprensión del problema no se solucionará el problema como tal, solo se obtendrá toda la información necesaria para su solución.

Para esto se requiere que se trabaje en grupos de tres estudiantes donde se realice una discusión de las preguntas planteadas y posterior a esto se socializa al resto del grupo.

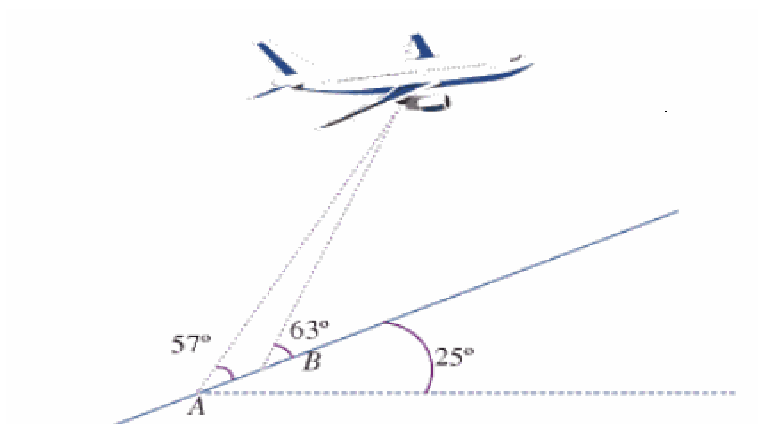
1.- Una parcela triangular con vértices R, S y T se delimita por una cerca, pero se advierte la ausencia de la marca del lindero en S. De la escritura de propiedad, se sabe que la distancia de T a R es 324m, la distancia de T a S es 506m y el ángulo en R del triángulo mide 125,4°. Determine la ubicación de S calculando la distancia de R a S.



2.- Este es el cartel de una campaña publicitaria contra el tabaco. ¿Cuánto mide el cigarro que aparece en él?



3.- Un camino recto hace un ángulo de 25° con relación a la horizontal. Desde el punto A sobre el camino, el ángulo de elevación a un avión es de 57°. En el mismo instante, desde otro punto B situado a 120 metros de A, el ángulo de elevación es de 63°. Encuentra la distancia del punto A hasta el avión y la altura a la que vuela el avión con respecto a la horizontal.



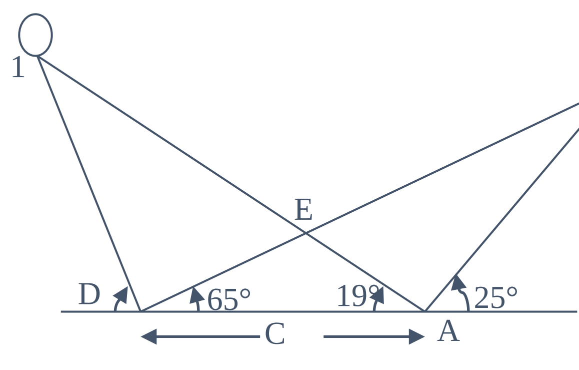
4.- Julián decide ir a la tienda a comprar unas galletas, solo tenía un problema, que necesitaba ir a la tienda y regresar a su casa antes de que su papá llegue y vea que no ha terminado de cocinar. Podía escoger dos tiendas: La Fortunita y El Baratillo. El solo sabía que de la tienda el Baratillo a su casa y de esa misma tienda a la Fortunita hay un ángulo de 60°, que de su casa al Baratillo hay 80m y que de La Fortunita a la otra tienda hay 90m ¿a qué tienda debe ir Julián?

5.- Los ángulos de elevación de un globo desde los puntos A y B a nivel del suelo son de 24° y 47°, respectivamente. Los puntos A y B están a 8,4 kilómetros uno del otro y el globo se encuentra entre ambos, en el mismo plano vertical. Calcular la altura del globo sobre el suelo.

6.- Un avión vuela de ciudad A hacia la ciudad B, a una distancia de 150 Km, y después vira con un ángulo de 50° y se dirige hacia la ciudad C, a una distancia de 100 Km, ¿A qué distancia se encuentra la ciudad A de la ciudad C? ¿Con qué ángulo debe virar el piloto en la ciudad C para regresar a la ciudad A?

7.- Una parcela triangular está delimitada por tres árboles A, B y C. La distancia entre el árbol A y el C es de 150 metros, el ángulo ABC es de 88° y el que se forma en el árbol C es de 41°. Sus dueños han decidido vallarla. Si el alambre se vende en rollos de 50 metros, ¿cuántos rollos necesitan comprar? ¿Cuántos metros les sobrarán?

8.- Dos observadores desde puntos distintos, ven dos globos, que están en el mismo plano vertical en el cual están ellos. La distancia entre los observadores es de 1 Km. La figura muestra los ángulos de elevación con que cada uno observa los globos.
Hallar la distancia BD que hay entre los globos



Para cada problema deben de responder a las siguientes preguntas

- ¿Qué se requiere hallar con el problema?
- ¿Cuáles son los datos que se conocen?
- ¿De qué trata el problema?
- ¿La información suministrada es suficiente para solucionar el problema?

QUINTA SESIÓN

PLANEANDO

Objetivo:

Establecer pautas para trazar un plan claro al resolver un problema

Ideas clave

- Método Polya
- Leyes del seno y del coseno.

Desempeños esperados:

- Reconoce que resolver un problema no es un procedimiento inmediato.
- Plantea una forma adecuada para resolver un problema.

Materiales:

- Fotocopias de la guía
- Hojas de papel y lápiz.
- Marcadores.

Duración:

Dos horas

Actividad 1

Después de haber identificado toda la información suministrada en el problema, se procede a desarrollar el segundo paso que consiste en concebir un plan o idea de solución, se inicia retomando el paso anterior que es identificar los datos y la incógnita en el enunciado del problema y se propone una idea de solución a través del análisis de dichos enunciados, para esto se guía a los estudiantes para que elaboren un plan de solución a través de unos cuestionamientos.

Se trabaja con los ocho problemas a los cuales se les aplicó el paso uno de comprender el problema en la sesión 4 y además se anexarán dos problemas donde los estudiantes hagan los dos pasos.

Los problemas que se adicionan son los siguientes:

9.- Un asta está situada en la parte superior de un edificio de 115 pies de altura. Desde un punto en el mismo plano horizontal de la base del edificio los ángulos de elevación de los extremos superior e inferior del asta son 63° y 58° respectivamente. ¿Cuál es la longitud del asta?

10.- Un carpintero debe hacer una mesa triangular de tal forma que un lado mida 2m., otro 1.5 m. y el ángulo opuesto al primer lado debe ser 40º. ¿Lo conseguirá?

Para cada problema deben de responder a las siguientes preguntas:

- Realiza un esquema que represente el problema.
- ¿Ha realizado un problema similar?
- ¿Qué pasos siguió para resolverlo?
- Realizar un análisis de los datos que ofrece el problema.
- ¿Hay alguna fórmula que puedas usar para resolver el problema y por qué?
- ¿Cuál es la secuencia de teoremas a usar para resolver el problema?

SEXTA SESIÓN

EJECUTANDO Y COMPROBANDO

Objetivo:

Afianzar en los estudiantes las estrategias resolutivas mediante la realización de problemas matemáticos.

Analizar y reflexionar acerca del proceso resolutivo y las respuestas obtenidas en los diferentes planteamientos matemáticos.

Ideas clave

- Método Polya
- Ley del seno y del coseno.

Desempeños esperados:

- Sigue los procedimientos apropiados para resolver un problema.
- Considera diferentes procedimientos para solucionar un problema.
- Comprueba que los datos obtenidos satisface lo propuesto en un problema.

Materiales:

- Fotocopias de la guía
- Hojas de papel y lápiz.
- Marcadores.

Duración:

Dos horas

Actividad 1:

Tomando como referencia los problemas trabajados en las secciones anteriores, se solicita que procedan a ejecutar lo que se planeó en el paso anterior. Para fortalecer este proceso el profesor plantea unas preguntas orientadoras

- ¿Puede ver que el paso realizado es correcto?

- ¿Acompañó cada operación matemática de una explicación contando lo que hizo y para qué lo hizo?
- ¿Ante alguna dificultad volvió al principio, reordenó ideas y probó de nuevo?

Actividad 2:

Como último paso del Método Polya se encuentra el de mirar hacia atrás o visión retrospectiva, es importante que los estudiantes comprendan que un problema no termina cuando se la respuesta a este, por lo tanto, se debe estimular a los estudiantes para que analicen y reflexionen acerca del proceso resolutivo y las respuestas obtenidas en los diferentes planteamientos matemáticos mediante preguntas como:

- ¿Los resultados están acorde con lo que se pedía?
- ¿La solución es lógicamente posible?
- ¿Se puede comprobar la solución?
- ¿Podría esquematizar el plan seguido?
- ¿Ha seguido ese plan o se ha desviado inconscientemente?
- ¿Ha tenido que desviarse para obtener datos intermedios?

SÉPTIMA SESIÓN
RESOLVIENDO LA SITUACIÓN PROBLEMA CENTRAL

Objetivo:

Hacer uso de los conceptos, instrumentos y metodologías adquiridas durante la secuencia para resolver la situación problema central.

Ideas clave

- Resolución de situaciones problemas.

Desempeños esperados:

- Propone posibles soluciones a la situación problema.
- Trabaja en equipo para fortalecer propuestas de solución.

Materiales:

- Fotocopias de la guía
- Hojas de papel y lápiz.

- Marcadores.

Duración:

Dos horas

Actividad 1:

Se propone que los estudiantes revisen sus respuestas a las preguntas de cada una de las secciones y sus contribuciones a la solución de la situación problema. Así mismo, que examinen la propuesta y diseño generados durante la primera sección y otras que se construyeron en el desarrollo de la secuencia.

La invitación es que los estudiantes se reúnan en los grupos que trabajaron la primera sección y den solución a la situación problema para su posterior socialización.

Anexo C. Prueba Final

Objetivo:

Hacer uso de los conceptos y metodologías adquiridas durante la secuencia para resolver situaciones problemas donde se aplique la ley del seno y coseno.

Ideas clave

- Resolución de situaciones problemas.

Desempeños esperados:

- Usa los cuatro pasos del método Polya para solucionar problemas.

Materiales:

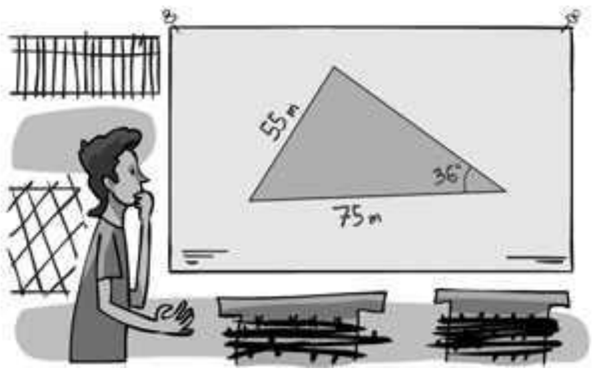
- Fotocopias de la guía.
- Hojas de papel y lápiz.

Duración:

Dos horas

PRUEBA FINAL SOBRE LA APLICACIÓN
DE LEY DEL SENO Y COSENO

1.- Álvaro tiene que vallar una parcela triangular. Fíjate en el croquis que él ha hecho con las medidas de la parcela.[15]



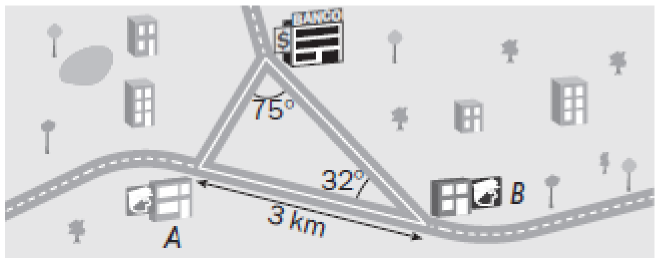
¿Tiene suficientes datos para calcular los metros exactos de alambrada que va a necesitar? Justifica tu respuesta.

2.- Un observador, en un momento dado ve dos cometas a 500 y 800 m de él. Si las líneas imaginarias que unen al observador con las cometas forman un ángulo de 62º, ¿Cuál es la distancia entre las cometas?[16]

3.- Los árboles más grandes del mundo crecen en el Parque Nacional de Redwood en California, Estados Unidos; estos árboles son más grandes que el largo de un campo de futbol. Santiago visitó el parque con sus padres y él quiso conocer la altura de uno de estos árboles; el guía le dijo que en ese preciso momento el ángulo de elevación al pico del árbol era de 37° y cuando se acercaron 100 pies el ángulo de elevación fue de 44°. Encuentre la altura del árbol.[17]

[15] Fuente: https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/tema8_problemas_mc3a9tricos.pdf.
[16] Fuente: http://www.elprofedanycem.com/caldas/carpetas/DECIMO/TRIGONOMETRIA/EXAMENES/EXATRIGOUNIDAD.pdf.
[17] Fuente: Ardila, R. (2004). Espiral 10. Bogotá, Colombia: Editorial Norma, p. 122

4.- Cuando en la sucursal bancaria de la figura suena una alarma, la señal se recibe en las dos comisarías más cercanas. Los policías de la comisaría *A* acuden al banco a una velocidad de 90 kilómetros por hora, y los de la comisaría *B* lo hacen a 100 kilómetros por hora. ¿Qué policías llegarán primero?[18]



5.- Se desea calcular la distancia entre los puntos "A" y "B", inaccesibles por un gran lago entre ellos. Se toma un punto "P" de la superficie de donde se divisa a "A" y "B" a distancias 120 y 150 m, notándose que APB = 58,6°.[19]

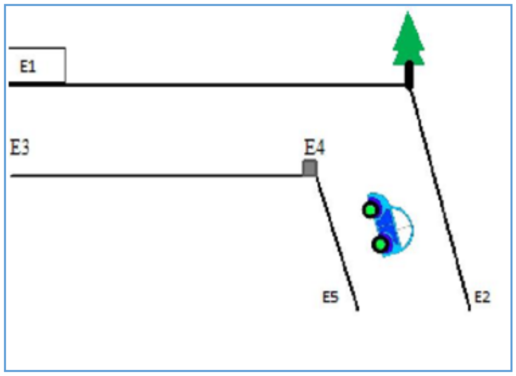
6.- Cada diciembre la Alcaldía de Bogotá coloca un árbol de navidad en la intersección de dos avenidas que forman un ángulo de 95 grados. La longitud del árbol, desde la base hasta la estrella colocada en su extremo superior, es de 7 metros.
Si desde el paradero, ubicado en la esquina E1, hasta la estrella colocada en el extremo superior del árbol se forma un ángulo de elevación de 5 grados.

a) ¿Cuál es la longitud de la calzada desde el paradero hasta la base del árbol?
b) Por la avenida 2 transita un automóvil a una velocidad de 60 km/h y tarda ½ minuto en recorrer la distancia entre la esquina E2 y la base del árbol; ¿Cuál es la longitud de la calzada desde E2 hasta la base del árbol?
c) ¿cuál es el ángulo de elevación formado desde E2 al extremo superior del árbol?
d) ¿cuál es la distancia entre las esquinas E1 y E2?[20]

[18] Ardila, R. (2004). Espiral 10. Bogotá, Colombia: Editorial Norma, p. 121

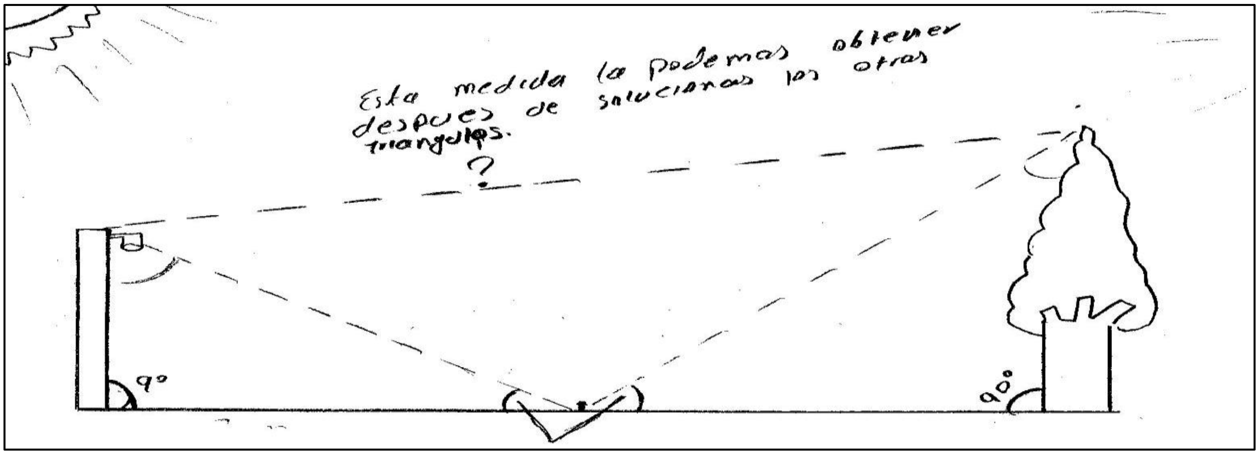
[19] Silva, J. (2002). Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. Ciudad de México: Editorial Limusa, p. 88

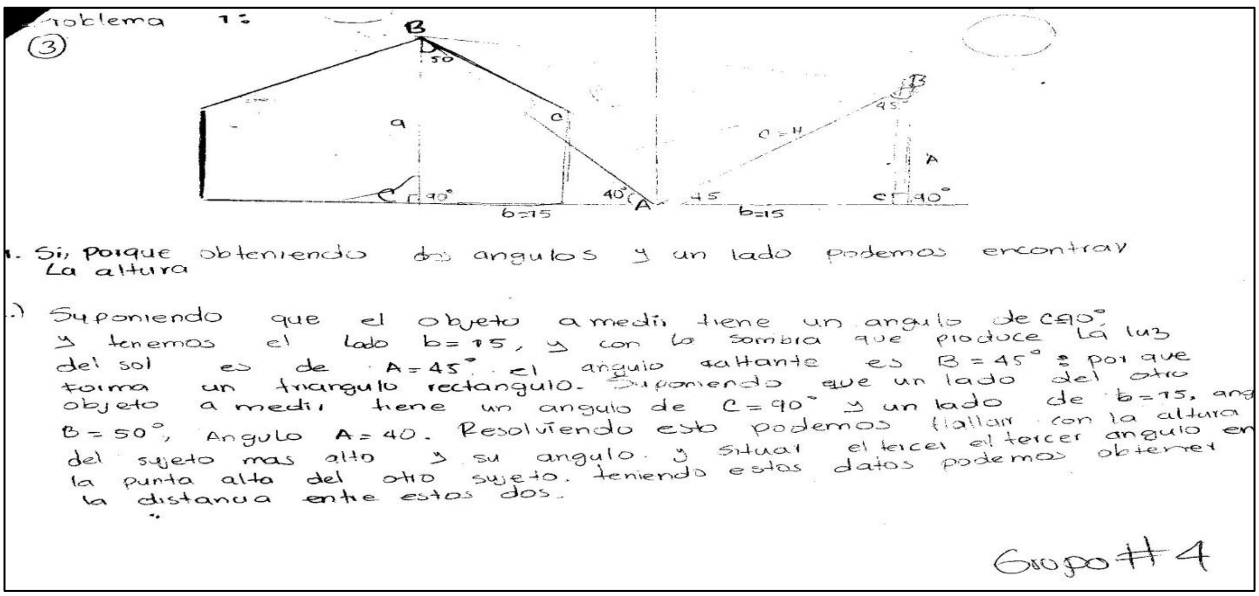
[20] MEN (2010). *Situaciones problema. Estructura objeto competencia*. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, p. 46


E1
E3
E4
E5
E2

Anexo D. Evidencias de las Actividades de la Secuencia

- Sesión uno.





De acuerdo con la información responda lo siguiente:

1) ¿Cuál sería el interés en conocer esas medidas?

la curiosidad del ser humano como ejemplo = antes se creía que la tierra era plana y el Sr Eratóstenes no se quedó con esa teoría quiso cerciorarse si era cierta y encontró un nuevo resultado (la tierra es redonda).

2) Discutir sobre como se pudo obtener esas mediciones

analizando el contexto de tal manera en la que se tenga una base y dos ángulos ← Ej.

3) ¿Cómo se podría medir la altura de una montaña?

Con nailon, escalando la montaña hasta su punto más alto i se marca el ascenso y en el descenso se recoge el nailon y damos la medida

4) ¿Qué dificultades se pueden dar al realizar estas mediciones?

muchas, ya que debemos tener en cuenta las variaciones climáticas y el terreno.

- Sesión dos.

2)

• $\cos A = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{-2bc} = \dfrac{14{,}3^2 - 10{,}5^2 - 8{,}4^2}{-2\,(10{,}5)\,(8{,}4)}$

$\cos A = \dfrac{23{,}6}{-176{,}4}$

$\cos A = -0{,}1$

$\measuredangle A = 95{,}7$

• $\cos B = \dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \dfrac{10{,}5^2 - 14{,}3^2 - 8{,}4^2}{-2\,(14{,}3)\,(8{,}4)}$

$\cos B = \dfrac{-164{,}8}{-240{,}24}$

$\cos B = 0{,}685$

$\measuredangle B = 46{,}7$

3.1)

$a = 287$ $A = 40^\circ$

$b = 77{,}7$ $B = 10^\circ$

$c = 342$ $C = 130^\circ$

• $\dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} A}{a}$

$a = \dfrac{77{,}7 \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 10^\circ}$

$a = 287{,}6$

• $\dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$

$c = \dfrac{77{,}7 \operatorname{sen} 130^\circ}{\operatorname{sen} 10^\circ}$

$c = 342{,}7$

3.2)

$a = 50$ $A = 40^\circ$

$d = 77{,}7$ $D = 90^\circ$

$c = 59{,}5$ $C = 50^\circ$

• $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$

$c = \dfrac{50 \operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ}$

$c = 59{,}5$

• $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} D}{d}$

$d = \dfrac{50 \operatorname{sen} 90^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ}$

$d = 77{,}7$

A partir de los procesos llevados a cabo para resolver los triángulos anteriores contestar lo siguiente:

1 • ¿Los datos planteados en los ejercicios son suficientes para resolver los triángulos?

2 • ¿Determinan con facilidad que ley aplicar en cada caso?

3 • En caso de encontrar con facilidad que ley aplicar, ¿es sencillo el procedimiento para encontrar los datos faltantes?

4 • ¿Qué diferencias encuentran entre los ejercicios 1 y 2 con los ejercicios 3 y 4?

1 Para mí los datos que me dan en aquellos ejercicios son suficientes para resolver los triángulos.

2 Teniendo en cuenta los tips para saber cuando se aplica la ley del seno o Coseno si es Fácil

3 El procedimiento es bastante sencillo, si sabemos que ley debemos aplicar.

4 Los ejercicios 3 y 4 me confunden un poquito, con la única diferencia que encuentro que está dividido.

- Sesión tres.


- Sesiones cuatro, cinco y seis.

COMPRENDER EL PROBLEMA

- ¿Qué se requiere hallar con el problema?

Se requiere hallar lo metros que hay desde el punto A hasta el avión.

- ¿Cuáles son los datos que se conocen?

un camino recto que hace un angulo de 25°. un angulo de elevación del avión de 57°. una distancia de 120m desde el B hasta el A un angulo de elevac de 63°.

- ¿De qué trata el problema?

El problema trata de hallar la distancia del punto A hasta el avión.

- ¿La información suministrada es suficiente para solucionar el problema?

Si porque en este caso nos estan dando 2 angulos y un lado por la cual quedaria con ley del seno

CONCEBIR UN PLAN

- Realiza un esquema que represente el problema.

- ¿Ha realizado un problema similar?

Si lo he Realizado

- ¿Qué pasos siguió para resolverlo?

los pasos para Hallar la altura de la manzana con la ley del seno

- Realizar un análisis de los datos que ofrece el problema.

los datos son 120 metros de el punto A al B. un angulo de elevacion de la manzana de 57° un angulo de elevacion 63° y una linea recta con un angulo 2

- ¿Hay alguna fórmula que puedas usar para resolver el problema y porqué?

la formula de la ley del sen porque me dan un angulo y un lado completo para hallar el lado faltante.

- ¿Cuál es la secuencia de teoremas a usar para resolver el problema?

Se usa la ley del seno para hallar la altura de la manzana

- ¿Puede ver claramente que el paso realizado es correcto?

Si, por que me dio un resultado Perfecto.

- ¿Acompañó cada operación matemática de una explicación contando lo que hizo y para qué lo hizo?

Si hice cada operacion matematica Pero no con explicación porque ya me sabia el procedimiento.

- ¿Ante alguna dificultad volvió al principio, reordenó ideas y probó de nuevo?

no Por que lo entendimos muy Bien

VISIÓN RETROSPECTIVA

- ¿Los resultados están acorde con lo que se pedía?

Hubo momentos en donde no sentí que la actividad no estaba acorde con lo que se pedia.

- ¿La solución es lógicamente posible?

Si es posible, logicamente porque al hacerla nos damos cuenta que tiene solucion.

- ¿Se puede comprobar la solución?

Si, se puede comprobar con el teorema Sen.

- ¿Podría esquematizar el plan seguido?

Si.

- ¿Ha seguido ese plan o se ha desviado inconscientemente?

Utilizamos el Teorema de Sen.

- ¿Ha tenido que desviarse para obtener datos intermedios?

NO.

COMPRENDER EL PROBLEMA

- ¿Qué se requiere hallar con el problema?

la medida del tabaco

- ¿Cuáles son los datos que se conocen?

angulo A = 25° Angulo B = 110° ca. adyacente de A es 3m

- ¿De qué trata el problema?

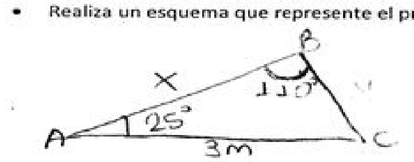
de una campaña publicitaria que necesita saber la medida completa de un tabaco (Resolución de Triangulo)

- ¿La información suministrada es suficiente para solucionar el problema?

Si por que saca los datos suficientes para buscar el ultimo angulo y un lado.

CONCEBIR UN PLAN

- Realiza un esquema que represente el problema.



∢A = 25°
∢B = 110°
∢C = 135°

- ¿Ha realizado un problema similar?

Si, pero buscando una altura de un avion frente a una [illegible]

- ¿Qué pasos siguió para resolverlo?

ley del seno.

- Realizar un análisis de los datos que ofrece el problema.

180 − (25° + 110°) = 180° − 45° = 135° seria el otro angulo

- ¿Hay alguna fórmula que puedas usar para resolver el problema y porqué?

ley del seno por que tiene las condiciones que se necesitan cumplir

- ¿Cuál es la secuencia de teoremas a usar para resolver el problema?

ley del seno, y aplicar los cambios

- ¿Puede ver claramente que el paso realizado es correcto?

Si, por que dice buscar paso a paso cada una de las cosas para encontrar la medida

- ¿Acompañó cada operación matemática de una explicación contando lo que hizo y para qué lo hizo?

Pues busque en mi cuaderno algunos apuntes de lo que se ha hecho en las clases y se hizo siguiendo los pasos

- ¿Ante alguna dificultad volvió al principio, reordenó ideas y probó de nuevo?

muchas veces diria yo. pero aun tengo dudas para resolver problemas como este

VISIÓN RETROSPECTIVA

- ¿Los resultados están acorde con lo que se pedía?

Pues creo que si, hice lo mejor posible esperando que este bien, pero si hubo algun fallo pues pedir otra explicación

- ¿La solución es lógicamente posible?

algo confusa pero creo que esta bien, logica si es por dar datos claros (en mi opinión)

- ¿Se puede comprobar la solución?

Si por intercambiar valores y seguir cosas como sen y shift de cada uno.

- ¿Podría esquematizar el plan seguido?

Si al llegar a algo que dan especializado claro y dan un modelo para seguirlo

- ¿Ha seguido ese plan o se ha desviado inconscientemente?

dudas y mas dudas me han hecho equivocar pero pues... no se al equivocarme creo saber mejorar

- ¿Ha tenido que desviarse para obtener datos intermedios?

Si y pues con esperanza de que esas cosas hayan servido para algo

COMPRENDER EL PROBLEMA

- ¿Qué se requiere hallar con el problema?

calcular la altura del globo sobre el suelo.

- ¿Cuáles son los datos que se conocen?

Angulos de elevación del globo: A= 24° B= 47°
Distancia entre A y B= 8,4 Kilómetros

- ¿De qué trata el problema?

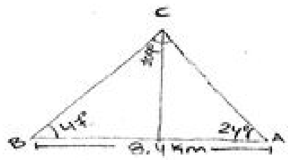
El uso de un modelo de ángulo que nos da unos datos para hallar la altura en que se encuentra un globo.

- ¿La información suministrada es suficiente para solucionar el problema?

si, porque se logra resolver y encontrar lo que se pide.

CONCEBIR UN PLAN

- Realiza un esquema que represente el problema.



$180° - (24°+47°)$
$180° - 71° = 109°$
$\angle C = 109°$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} \times \frac{\operatorname{sen} B}{b}$
$\frac{\operatorname{sen} 24°}{3,6} : \frac{\operatorname{sen} 47°}{b}$
$b \cdot \operatorname{sen} 24° : 3,6 \cdot \operatorname{sen} 47°$
$b : \frac{3,6 \cdot \operatorname{sen} 47°}{\operatorname{sen} 24°}$
$b : 6,5\,km$

$\frac{\operatorname{sen} C}{c} \times \frac{\operatorname{sen} A}{a}$
$\frac{\operatorname{sen} 109°}{8.4\,km} : \frac{\operatorname{sen} 24°}{a}$
$a \cdot \operatorname{sen} 109° : 8.4 \cdot \operatorname{sen} 24°$
$a : \frac{8.4 \cdot \operatorname{sen} 24°}{\operatorname{sen} 109°}$
$a : 3,6\,km$

- ¿Ha realizado un problema similar?

si, en un caso tuve que hallar la altura de un objeto utilizando sus angulos de inclinación

- ¿Qué pasos siguió para resolverlo?

Encontrar su tercer ángulo y sus lados

- Realizar un análisis de los datos que ofrece el problema.

24° es el angulo de A — 47° es el ángulo de B estos sirven para ver la inclinación del triangulo y 8,4 es un lado sirve para ver la distancia que exista entre A y B.

- ¿Hay alguna fórmula que puedas usar para resolver el problema y porqué?

la ley del seno: porque tenia un ángulo y un lado completo y además de eso otro angulo.

- ¿Cuál es la secuencia de teoremas a usar para resolver el problema?

Primero se usa la ley del seno y luego la razón seno para hallar la altura.

- ¿Puede ver claramente que el paso realizado es correcto?

Si, Porque los resultados concuerdan

- ¿Acompañó cada operación matemática de una explicación contando lo que hizo y para qué lo hizo?

Si, porque iba analizando de donde salia cada resultado.

- ¿Ante alguna dificultad volvió al principio, reordenó ideas y probó de nuevo?

Si, Porque sume los lados para hallar la altura y tenia que utilizar la ley del seno.

VISIÓN RETROSPECTIVA

- ¿Los resultados están acorde con lo que se pedía?

Si, porque se logra encontrar la altura que es lo que se pide

- ¿La solución es lógicamente posible?

si, porque al realizar la operación con cada ángulo, nos da lo mismo.

- ¿Se puede comprobar la solución?

Si, porque si hacemos la misma operación con un angulo y su lado, y hacemos lo mismo con el otro, sera igual.

- ¿Podría esquematizar el plan seguido?

Si, porque el problema tiene una inclinación especifica y se dice que existe una distancia

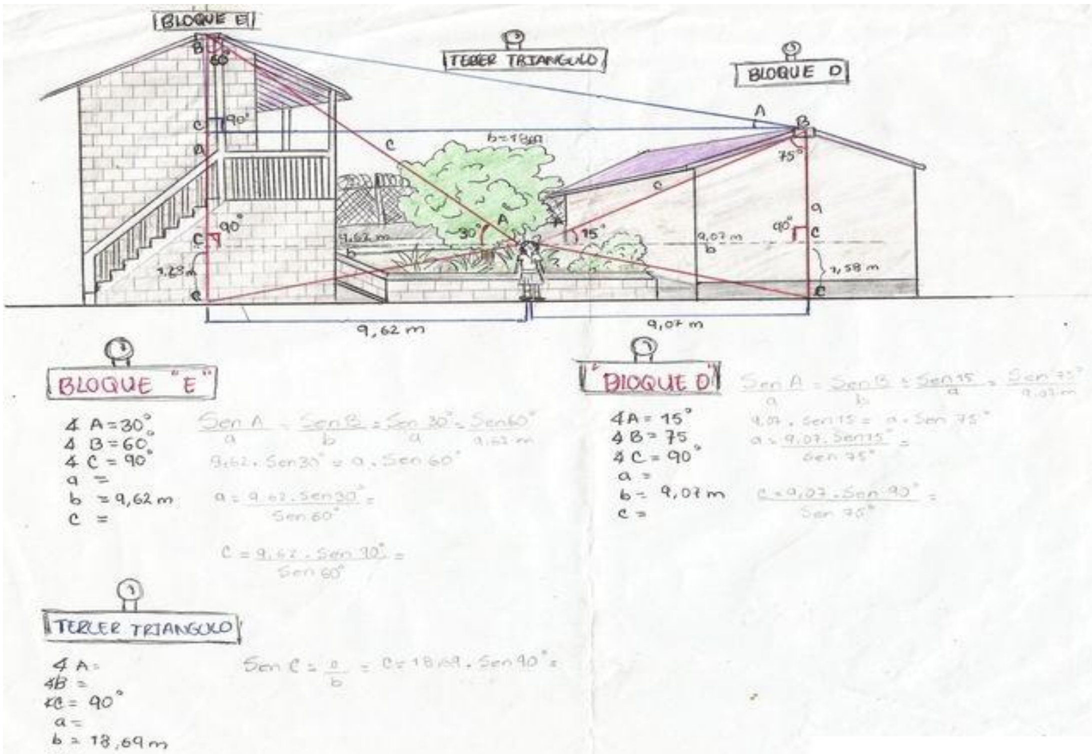
- ¿Ha seguido ese plan o se ha desviado inconscientemente?

lo he seguido, he puesto correctamente cada dato según lo que aparece

- ¿Ha tenido que desviarse para obtener datos intermedios?

No, he seguido los pasos y utilizado bien la ley del seno para resolverlo.

- Sesión siete.



Dibujo hecho por la estudiante No. 6 en el resumen de la situación problema.

Anexo E. Tablas de Resultados por Descriptor en la Prueba Final

En las siguientes tablas se especifica si los estudiantes aplicaron el descriptor respectivo en cada uno de los problemas.

Tabla A1

Identifica la Incógnita en el Enunciado del Problema

Método Polya	Paso 1. Comprender el problema					
Descriptor	Identifica la incógnita en el enunciado del problema					
Prueba Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
1	Si	Si	Si	Si	Si	No
2	Si	No	Si	No	Si	No
3	No	Si	Si	No	Si	Si
4	Si	Si	No	Si	Si	Si
5	Si	Si	Si	No	Si	No
6	Si	Si	Si	Si	Si	Si
7	Si	Si	Si	Si	Si	Si
8	No	Si	Si	No	Si	Si
9	Si	Si	Si	Si	No	Si
10	Si	Si	No	Si	Si	No
11	Si	Si	Si	No	Si	No
12	Si	No	Si	Si	Si	Si
13	No	Si	Si	Si	Si	Si
14	No	Si	Si	No	Si	Si
15	No	Si	Si	Si	Si	No
16	Si	Si	Si	Si	No	Si
17	Si	Si	Si	Si	No	No
18	Si	Si	Si	No	Si	Si
19	Si	No	Si	Si	Si	Si
20	Si	Si	Si	Si	Si	No
21	Si	Si	Si	Si	Si	No
22	No	Si	Si	No	Si	Si
Porcentajes de estudiantes que si aplicaron el descriptor	72%	86%	91%	63%	86%	59%

Tabla A2

Identifica los Datos Suministrados en el Problema

Método Polya	Paso 1. Comprender el problema					
Descriptor	Identifica los datos suministrados en el problema.					
Prueba Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
1	Si	Si	Si	Si	Si	Si
2	Si	No	Si	Si	Si	No
3	Si	Si	Si	No	Si	Si
4	Si	Si	No	Si	Si	Si
5	Si	Si	Si	No	Si	No
6	Si	Si	Si	Si	Si	Si
7	Si	Si	Si	Si	Si	Si
8	Si	Si	Si	No	Si	Si
9	Si	Si	Si	Si	Si	Si
10	Si	Si	No	Si	Si	Si
11	Si	Si	Si	No	Si	No
12	Si	Si	Si	Si	Si	Si
13	Si	Si	Si	Si	Si	Si
14	Si	Si	Si	No	Si	Si
15	Si	Si	Si	Si	Si	No
16	Si	Si	Si	Si	Si	Si
17	Si	Si	Si	Si	Si	Si
18	Si	Si	Si	Si	Si	Si
19	Si	No	Si	Si	Si	Si
20	Si	Si	Si	Si	Si	Si
21	Si	Si	Si	Si	Si	Si
22	Si	Si	Si	No	Si	Si
Porcentajes de estudiantes que si aplicaron el descriptor	100%	91%	91%	73%	100%	82%

Tabla A3

Realiza una Representación Gráfica del Enunciado

Método Polya	Paso 1. Comprender el problema					
Descriptor	Realiza una representación gráfica del enunciado					
Prueba Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
1	-	Si	Si	-	Si	Si
2	-	Si	No	-	Si	No
3	-	Si	Si	-	Si	Si
4	-	Si	Si	-	Si	Si
5	-	Si	No	-	Si	No
6	-	Si	Si	-	Si	Si
7	-	Si	Si	-	Si	Si
8	-	Si	No	-	Si	Si
9	-	Si	Si	-	Si	Si
10	-	Si	Si	-	Si	Si
11	-	Si	Si	-	Si	No
12	-	Si	Si	-	Si	Si
13	-	Si	Si	-	Si	Si
14	-	Si	No	-	Si	Si
15	-	Si	Si	-	Si	No
16	-	Si	Si	-	Si	Si
17	-	Si	Si	-	Si	Si
18	-	Si	Si	-	Si	Si
19	-	Si	No	-	Si	Si
20	-	Si	Si	-	Si	Si
21	-	Si	Si	-	Si	Si
22	-	Si	No	-	Si	Si
Porcentajes de estudiantes que si aplicaron el descriptor		100%	73%		100%	82%

Tabla A4

Identifica que Teorema Usar Para Resolver el Problema

Método Polya	Paso 2. Concebir un plan					
Descriptor	Identifica que teorema usar para resolver el problema					
Prueba Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
1	Si	No	Si	Si	Si	No
2	Si	Si	No	Si	Si	Si
3	No	Si	Si	No	Si	No
4	Si	No	Si	Si	Si	Si
5	Si	Si	No	Si	Si	No
6	Si	No	Si	Si	Si	Si
7	Si	Si	Si	Si	Si	Si
8	Si	Si	No	No	Si	Si
9	No	Si	Si	Si	Si	Si
10	Si	Si	Si	Si	No	No
11	Si	Si	No	Si	Si	Si
12	No	Si	Si	Si	Si	No
13	Si	No	Si	No	Si	Si
14	No	Si	Si	No	Si	No
15	Si	Si	No	No	Si	Si
16	Si	No	Si	Si	Si	Si
17	Si	Si	Si	No	Si	Si
18	Si	Si	Si	Si	No	Si
19	Si	Si	No	Si	Si	No
20	No	Si	Si	Si	Si	Si
21	Si	Si	Si	No	Si	No
22	Si	Si	No	No	Si	No
Porcentajes de estudiantes que si aplicaron el descriptor	77%	77%	68%	63%	91%	59%

Tabla A5

Establece el Orden en que se Utilizan los Teoremas

Método Polya	Paso 2. Concebir un plan					
Descriptor	Establece el orden en que se utilizan los teoremas					
Prueba Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
1	Si	Si	Si	Si	Si	Si
2	Si	Si	No	Si	Si	Si
3	No	Si	Si	No	Si	No
4	Si	No	Si	Si	Si	Si
5	Si	Si	No	Si	Si	No
6	Si	Si	Si	Si	Si	Si
7	Si	Si	Si	Si	Si	Si
8	Si	Si	No	No	Si	Si
9	No	Si	Si	Si	Si	Si
10	Si	Si	Si	Si	No	No
11	Si	Si	No	Si	Si	Si
12	No	Si	Si	Si	Si	Si
13	Si	No	Si	No	Si	Si
14	No	Si	Si	No	Si	No
15	Si	Si	No	No	Si	Si
16	Si	No	Si	Si	Si	Si
17	Si	Si	Si	No	Si	Si
18	Si	Si	Si	Si	No	Si
19	Si	Si	No	Si	Si	No
20	No	Si	Si	Si	Si	Si
21	Si	Si	Si	Si	Si	No
22	Si	Si	No	No	Si	No
Porcentajes de estudiantes que si aplicaron el descriptor	77%	86%	68%	68%	91%	68%

Tabla A6

Idea un Plan de Solución

Método Polya Descriptor			Paso 2. Concebir un plan Idea un plan de solución.			
Prueba Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
1	Si	Si	Si	Si	Si	Si
2	Si	Si	No	Si	Si	Si
3	No	Si	Si	No	Si	No
4	Si	No	Si	Si	Si	Si
5	Si	Si	Si	Si	Si	Si
6	No	Si	Si	Si	Si	Si
7	Si	Si	Si	Si	Si	Si
8	Si	Si	No	No	Si	Si
9	No	Si	Si	Si	Si	Si
10	Si	Si	Si	Si	No	No
11	Si	Si	No	Si	Si	Si
12	No	Si	Si	Si	Si	Si
13	Si	No	Si	No	Si	Si
14	No	Si	Si	Si	Si	No
15	Si	Si	No	No	Si	Si
16	Si	No	Si	Si	Si	Si
17	Si	Si	Si	No	Si	Si
18	No	Si	Si	Si	No	Si
19	Si	Si	No	Si	Si	No
20	Si	Si	Si	Si	Si	Si
21	Si	Si	Si	Si	Si	No
22	Si	Si	No	Si	Si	No
Porcentajes de estudiantes que si aplicaron el descriptor	73%	86%	73%	77%	91%	73%

Tabla A7

Sigue el Plan Elaborado Inicialmente

Método Polya Descriptor	Paso 3. Ejecución del plan Sigue el plan elaborado inicialmente					
Prueba Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
1	Si	Si	Si	Si	Si	Si
2	Si	Si	No	Si	Si	Si
3	No	Si	Si	No	Si	No
4	Si	No	Si	Si	Si	Si
5	Si	Si	Si	Si	Si	Si
6	No	Si	Si	Si	Si	Si
7	Si	Si	Si	Si	Si	Si
8	Si	Si	No	No	Si	Si
9	No	Si	Si	Si	Si	Si
10	Si	Si	Si	Si	No	No
11	Si	Si	No	Si	Si	Si
12	No	Si	Si	Si	Si	Si
13	Si	No	Si	No	Si	Si
14	No	Si	Si	Si	Si	No
15	Si	Si	No	No	Si	Si
16	Si	No	Si	Si	Si	Si
17	Si	Si	Si	No	Si	Si
18	No	Si	Si	Si	No	Si
19	Si	Si	No	Si	Si	No
20	Si	Si	Si	Si	Si	Si
21	Si	Si	Si	Si	Si	No
22	Si	Si	No	Si	Si	No
Porcentajes de estudiantes que si aplicaron el descriptor	73%	86%	73%	77%	91%	73%

Tabla A8

Ejecuta con Detalle Cada Operación

Método Polya Descriptor	Paso 3. Ejecución del plan Ejecuta con detalle cada operación					
Prueba Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
1	Si	Si	Si	Si	Si	Si
2	Si	Si	No	Si	Si	Si
3	Si	Si	Si	Si	Si	No
4	No	Si	Si	Si	No	Si
5	Si	Si	Si	Si	Si	Si
6	Si	Si	Si	Si	No	No
7	Si	Si	Si	Si	Si	Si
8	Si	Si	Si	No	Si	Si
9	No	Si	Si	Si	Si	Si
10	Si	Si	Si	Si	Si	No
11	Si	Si	No	Si	Si	Si
12	Si	Si	Si	Si	Si	Si
13	Si	No	Si	Si	Si	Si
14	Si	Si	Si	No	Si	No
15	No	Si	No	No	Si	Si
16	Si	No	Si	Si	Si	Si
17	Si	Si	Si	No	Si	No
18	Si	Si	Si	Si	No	Si
19	Si	Si	Si	Si	Si	No
20	Si	Si	Si	Si	Si	Si
21	No	Si	Si	Si	Si	No
22	Si	Si	No	Si	Si	No
Porcentajes de estudiantes que si aplicaron el descriptor	82%	91%	82%	82%	86%	63%

Tabla A9

Verifica Cada Paso Realizado

Método Polya Descriptor	Paso 3. Ejecución del plan Verifica cada paso realizado					
Prueba Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
1	No	Si	Si	No	Si	Si
2	Si	No	Si	Si	Si	No
3	Si	Si	No	No	Si	No
4	No	Si	Si	Si	Si	Si
5	Si	No	Si	Si	Si	Si
6	Si	Si	Si	No	Si	Si
7	No	Si	Si	Si	Si	Si
8	Si	Si	No	Si	Si	No
9	Si	No	Si	Si	Si	Si
10	No	Si	Si	No	Si	Si
11	Si	Si	No	Si	Si	Si
12	Si	No	Si	Si	Si	Si
13	No	Si	Si	No	Si	No
14	No	Si	Si	Si	Si	No
15	Si	Si	Si	No	No	Si
16	Si	No	Si	Si	Si	Si
17	No	Si	No	Si	No	Si
18	Si	Si	Si	No	Si	No
19	No	Si	Si	Si	Si	Si
20	Si	Si	Si	Si	Si	No
21	No	Si	Si	Si	Si	Si
22	Si	Si	No	Si	Si	No
Porcentajes de estudiantes que si aplicaron el descriptor	59%	77%	77%	68%	91%	64%

Tabla A10

Demuestra que la Respuesta Corresponde a lo que se Pide en el Problema

Método Polya	Paso 4. Visión retrospectiva					
Descriptor	Demuestra que la respuesta corresponde a lo que se pide en el problema					
Prueba Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
1	Si	Si	No	Si	Si	Si
2	Si	No	Si	Si	Si	Si
3	No	Si	Si	No	No	No
4	Si	Si	No	Si	Si	No
5	Si	No	Si	Si	Si	Si
6	Si	No	Si	No	Si	Si
7	Si	Si	Si	Si	Si	Si
8	No	Si	Si	Si	No	Si
9	Si	Si	No	No	Si	Si
10	Si	No	Si	Si	Si	Si
11	Si	No	Si	No	Si	No
12	No	Si	Si	Si	Si	Si
13	Si	Si	Si	No	Si	No
14	Si	No	Si	Si	No	Si
15	Si	Si	Si	Si	No	Si
16	No	Si	Si	No	Si	Si
17	Si	Si	No	Si	Si	Si
18	Si	No	Si	Si	Si	Si
19	Si	Si	Si	Si	Si	No
20	Si	Si	Si	No	Si	Si
21	Si	Si	No	Si	Si	No
22	Si	Si	Si	No	Si	No
Porcentajes de estudiantes que si aplicaron el descriptor	81%	68%	77%	63%	81%	68%

Tabla A11

Examina el Resultado del Problema

Método Polya	Paso 4. Visión retrospectiva					
Descriptor	Examina el resultado del problema					
Prueba Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
1	No	Si	Si	Si	Si	No
2	Si	Si	Si	No	Si	Si
3	Si	Si	No	Si	Si	No
4	Si	Si	Si	Si	No	Si
5	No	Si	Si	No	Si	No
6	Si	Si	No	No	Si	Si
7	Si	Si	Si	Si	Si	Si
8	Si	No	Si	Si	No	Si
9	Si	Si	Si	No	Si	Si
10	No	No	Si	Si	Si	No
11	Si	Si	Si	No	No	Si
12	Si	Si	No	Si	Si	No
13	Si	Si	Si	No	Si	Si
14	Si	No	Si	Si	Si	No
15	Si	Si	Si	Si	No	Si
16	No	Si	Si	Si	Si	Si
17	Si	Si	No	Si	Si	Si
18	Si	Si	Si	Si	No	Si
19	Si	No	Si	Si	Si	No
20	Si	Si	Si	Si	No	Si
21	No	Si	Si	Si	Si	No
22	Si	No	Si	No	Si	No
Porcentajes de estudiantes que si aplicaron el descriptor	77%	77%	81%	68%	72%	59%