Secuencia Didáctica para el aprendizaje del concepto de Hexágono en el marco del modelo de Van Hiele

Neysa Valencia Otero

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Maestría en Educación

Línea de profundización en Matemáticas

Programa de Becas para la Excelencia Docente

Ministerio de Educación Nacional

Santander de Quilichao, Julio de 2018

Secuencia Didáctica para el aprendizaje del concepto de Hexágono en el marco del modelo de Van Hiele

Trabajo de grado para optar el Título de:
Magister en Educación, Modalidad Profundización

Neysa Valencia Otero

Director
Mg. Helmer Ruiz

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Maestría en Educación

Línea de profundización en Matemáticas

Programa de Becas para la Excelencia Docente

Ministerio de Educación Nacional

Santander de Quilichao, Julio de 2018

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Lista de anexos

CAPÍTULO I. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

1.1 Presentación

Este proyecto presenta los resultados de una intervención pedagógica enmarcada en la teoría del Modelo de Van Hiele y Pierre (1957), mediante la cual se intenta explicar la evolución de los razonamientos geométricos desde un pensamiento informal hasta uno más formal, guiado por las fases de aprendizaje, las cuales contribuyen a organizar de forma gradual el currículo escolar en procura de minimizar las dificultades que los estudiantes presentan con el conocimiento y apropiación de conceptos de la geometría.

El trabajo contó con la participación de estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Limbania Velasco de Santander de Quilichao, Cauca, con quienes, a través de años de experiencia y fruto de observaciones y reflexiones hechas por los docentes en torno a la enseñanza de conceptos básicos de la geometría, se pudo evidenciar dificultades en la fundamentación y la comprensión de dichos conceptos, especialmente en aspectos relacionados con el aprendizaje de figuras planas. De ahí el interés particular por implementar una secuencia didáctica que aportaró situaciones significativas, la cual, a través de la elaboración y manipulación de materiales concretos, posibilitó la construcción y comprensión de elementos relacionados con la conceptualización del hexágono regular.

De esta manera, con el fin de potenciar nuevos niveles de razonamiento geométrico a partir de la conceptualización del hexágono regular, se efectúo un diagnóstico que mostró un gran número de estudiantes ubicados en niveles inferiores razonamiento visual o visualización; información que facilitó adelantar el diseño y experimentación con una serie de actividades que finalmente fueron evaluadas con un test que permitió observar avances en los razonamientos geométricos de los estudiantes dentro del modelo de Van Hiele.

Es importante considerar que el trabajo efectuado durante la intervención aumentó el interés en los estudiantes, el deseo y la disposición por aprender los conocimientos geométricos desarrollados en las diferentes secciones, así mismo mejoraron aspectos como la responsabilidad, la participación, el respeto a la escucha, se valoró más el trabajo y el colectivo lo que contribuyó a mejorar habilidades comunicativas y sociales desde el aula de clases.

Este documento muestra cómo se dio el proceso de intervención y la herramienta didáctica seleccionada, los elementos teóricos del modelo de Van Hiele como soporte para adelantar la experiencia, también se describen los objetivos y la forma como se recolectó la información, finalmente presenta las conclusiones del proceso de intervención educativa.

1.2 Descripción del Problema

Es frecuente encontrar en la práctica pedagógica cotidiana, problemas relacionados con la apropiación de conceptos básicos de la geometría por parte de los estudiantes; en particular con el aprendizaje de figuras planas, situación que limita significativamente procesos que ayudan a fortalecer razonamientos geométricos en general.

La presente intervención pedagógica surgió a partir de la observación de diversas dificultades que los estudiantes presentaban en la conceptualización de elementos básicos de la geometría y como alternativa de solución, planteó una secuencia didáctica como estrategia dinámica, donde los estudiantes en sus actividades escolares, a través de la manipulación de material concreto verificaron, analizaron, descubrieron y estudiaron propiedades de los polígonos regulares.

Como producto final, las actividades desarrolladas durante la clase, se materializaron en la construcción de un rompecabezas hexagonal, por parte de los estudiantes quienes lo reconocieron como figura geométrica, diferente del triángulo, cuya construcción permite abordar temáticas como vértice, ángulo, sus partes, clases de ángulos, número de diagonales, suma interna de ángulos, clasificación de triángulos; logrando fortalecer los procesos de aprendizaje capturando la atención del estudiante, aumentando el interés y la expectativa de lo que efectuó en el desarrollo de la clase.

Desde el diagnóstico se logró establecer que los estudiantes del grado séptimo de básica secundaria se encontraban en el nivel uno, según lo propuesto por los descriptores del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. Presentando dificultades en medición y clasificación de ángulos, así como en el diseño de figuras geométricas básicas entre otras. Por lo tanto, se hizo necesario adelantar procesos metodológicos y didácticos que aportaron a los estudiantes aprendizajes efectivos, desde esta propuesta titulada “secuencia didáctica para el aprendizaje del concepto de hexágono en el marco del modelo de Van Hiele”, que fue implementada por secciones, partiendo de los aprendizajes previos de los estudiantes, en busca de fortalecerlos con nuevas redes de conocimientos geométricos, que ayudaron a dar sentido a lo que se estaba estudiando.

Por otra parte, con respecto a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN] (1998), se puede decir que estos brindan orientaciones, reflexiones y fundamentos para el estudio de los procesos pedagógicos permitiendo que el docente tome libremente las decisiones frente a contenidos a enseñar, metodologías a aplicar y estrategias didácticas a desarrollar; se fundamentan en el constructivismo ligado a una pedagogía activa, para lograr que el estudiante genere procesos mentales que construyan y desarrollen conocimiento; en particular, en lo referente al pensamiento geométrico, dichos lineamientos aceptan al modelo de Van Hiele porque describe cómo evoluciona, la construcción del pensamiento acompañado de una enseñanza que aplica el diseño de estrategias como: dibujar, construir esquemas, conjeturar y apropiar un lenguaje geométrico avanzado en lo pedagógico y en lo conceptual, dando así una visión diferente a la matemática que confluye en una actividad social que valora lo individual y respeta lo colectivo.

También es importante mencionar que, el Ministerio de Educación Nacional en los últimos, años viene implementado mecanismos internos que evalúan las competencias de los estudiantes, aplicadas en diferentes grados de la educación básica y media (3°, 5°, 9° y 11°); además se vienen participando en pruebas internacionales, entre las más mencionadas se encuentran las Pruebas Pisa que, en las ultimas evaluaciones y en particular a nivel latinoamericano, Colombia ha obtenido un quinto lugar mejorando sus resultados en matemáticas desde 370 puntos en el 2006 a 390 puntos en el 2015, prueba que se desarrolla con estudiantes de 15 años en áreas como lectura, matemáticas y ciencias.

Tabla 1. Resultados prueba pisa – Colombia en Latinoamérica

País	Lectura				Matemáticas				Ciencias			
	2006	2009	2012	2015	2006	2009	2012	2015	2006	2009	2012	2015
Chile	442	449	441	459	411	421	423	423	438	448	445	447
Uruguay	413	426	411	437	427	427	409	418	428	427	416	435
Argentina	374	398	396	–	381	388	388	–	391	401	406	–
Costa Rica	–	443	441	427	–	409	407	400	–	431	429	420
Colombia	385	413	403	425	370	381	376	390	388	402	399	416
México	410	425	424	423	406	419	413	408	410	416	415	416
Brasil	393	412	410	407	370	386	391	377	390	405	405	401
Perú	–	370	384	398	–	365	368	387	–	369	373	397
República Dominicana	–	–	–	358	–	–	–	328	–	–	–	332

Fuente: (Ministerio de Educación Nacional [MEN] & Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [ICFES], 2015).

Los resultados son alentadores y se debe seguir trabajando desde la pedagogía en beneficio de una educación de mayor calidad.

Por otro lado, y en relación con las Pruebas Saber, presentadas por noveno grado quienes son el referente para adelantar actividades de mejoramiento en el área de matemáticas, la Institución Educativa Limbania Velasco ha obtenido avances mínimos especialmente en el componente geométrico evidenciando un crecimiento del 49% de sus dificultades en el 2016.

Freire (2006), afirma que "enseñar no significa transferir conocimiento, sino crear las posibilidades para su propia producción o construcción" (p. 47).

Esto permite reflexionar sobre la importancia de crear espacios de diálogo constante con los estudiantes, saber cuáles fueron sus aciertos e inquietudes que favorecieron el aprendizaje, del tema de las figuras planas, sus propiedades y relaciones con otros polígonos, en procura de que obtuvieran mejores conocimientos, particularmente con el hexágono regular.

Es así como se plantea el siguiente interrogante, que servirá de guía orientadora para el proceso de intervención, ¿Qué secuencia didáctica se puede implementar, siguiendo los criterios del modelo de Van Hiele, para que los estudiantes construyan el concepto de hexágono regular?

1.3 Justificación

Este trabajo se enmarcó dentro del campo de la educación matemática, considerando que dicho campo se encarga de explicar los fenómenos que suceden alrededor de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular por tratarse de un objeto incluido dentro del pensamiento geométrico. De acuerdo con los lineamientos curriculares, se destacó la importancia de la geometría y el desarrollo del razonamiento geométrico, así como el diseño de una serie de actividades soportadas en el modelo educativo de Van Hiele como facilitador en la conceptualización del hexágono regular.

Históricamente, la geometría ha brindado a la humanidad aportes significativos que han contribuido a la solución de diferentes problemáticas; ella permite explorar, descubrir, orientar y organizar el mundo desde sus formas y relaciones al respecto, Santa (2013) afirma que: "La geometría es uno de los componentes más importantes en el currículo escolar debido en primer lugar a que puede posibilitar procesos de visualización, argumentación, formulación y en segundo lugar porque debe ser cercano a los contextos de los estudiantes" (p. 4).

La geometría valora en los procesos efectivos de aprendizaje, la observación y la reflexión, evidenciando que el saber geométrico es dinámico y favorece las habilidades del pensamiento porque el estudiante puede discutir y argumentar sus respuestas, de tal manera que logre dar cuenta de su avance en la apropiación del lenguaje y del conocimiento geométrico, aportando desde las matemáticas a su desarrollo intelectual y personal.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM por sus siglas en inglés) (2003), propone sobre el estudio de las matemáticas que aquellos que comprendan y puedan usar las matemáticas, tendrán cada vez más oportunidades y opciones para determinar su futuro (p. 5); al respecto Vargas (2013), afirma que: "La importancia de la geométrica es que ayuda al individuo a desarrollar destrezas mentales de diversos tipos, como la intuición espacial, la integración de la visualización con la conceptualización y la manipulación (…) independientemente del nivel en que se encuentren" (p. 78).

Sin embargo, el estudio de la geometría presenta dificultades por parte de los alumnos; al respecto Báez (2007), manifiesta que: "La mayoría de las Instituciones Educativas desarrollan la enseñanza de la geometría de una manera tradicional caracterizada por la clase magistral, trabajo en grupo, y el discurso del profesor no ofrece al estudiante posibilidades de desarrollo” (p. 67).

Desde la época de los 70´ con la aparición de la matemática moderna, la geometría perdió espacio dentro del currículo académico, se mermó su intensidad horaria y fue relegada para las últimas unidades del año escolar, de igual forma los libros de texto en los que se apoyan los docentes para referenciar sus clases desmejoraron los fundamentos de la misma; por lo tanto, frente al hecho de perder relevancia el estudio de la geometría, son varias las generaciones que han hecho evidente las dificultades respecto a las destrezas y habilidades que potencializa el desarrollo del pensamiento geométrico. Es así como los estudiantes de la Institución Educativa Limbania Velasco hacen parte de dichas generaciones; por lo tanto, fue indispensable realizar actividades académicas que le facilitaran al estudiante remediar sus dificultades de forma activa y propositiva frente a su proceso de construcción de los objetos geométricos; al respecto Gutiérrez (1998), afirma que: “Las dificultades con el aprendizaje de las matemáticas está ampliamente relacionada con la poca acción que tienen los estudiantes durante la realización de las actividades matemáticas”.

Por la relevancia que tiene la geometría en el área de matemáticas, fue necesario diseñar un proyecto como alternativa didáctica que facilitara involucrar al estudiante, esto con el fin de potencializar el aprendizaje del concepto de hexágono regular como objeto matemático de estudio de este trabajo, fundamentado en el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

Por otra parte, dados los resultados en prueba internas y externas en las que participa la Institución Educativa Limbania Velasco, fue pertinente realizar acciones educativas para avanzar en el nivel de razonamiento frente al tema de figuras planas, tomando al hexágono regular como punto de llegada y en el cual se verá reflejado los elementos comunes de otros polígonos regulares en cuanto a las siguientes temáticas: diagonal, apotema, radio, clasificación de ángulos, clasificación de triángulos, ángulos, vértice y propiedades de polígonos regulares.

Las Pruebas Saber (ICFES, 2016), evidenciaron algunas dificultades al evaluar las competencias de comunicación, razonamiento y resolución de problemas, especialmente en el pensamiento geométrico, donde aparecen porcentajes desde el 23% al 79% en nivel inferior, en temas como: figuras planas, procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y sólidos, transformaciones sobre figuras bidimensionales, resolución de problemas geométricos y uso de modelos geométricos, contenidos fundamentales para fortalecer el aprendizaje de temas como: expresiones algebraicas, aplicaciones de polinomios, ecuaciones de segundo grado, volumen de sólidos, teorema de Pitágoras, razones trigonométricas, entre otros conocimientos de las matemáticas que se estudian en la escuela.

Teniendo en cuenta lo anterior y, contando con un modelo educativo como lo es el modelo de Van Hiele, fue posible proponer una secuencia didáctica que facilitara la organización de la enseñanza del hexágono regular. Cabe resaltar que dicho modelo está conformado por dos partes, una descriptiva que narra la forma en que los estudiantes razonan geométricamente valorando su proceso, y la segunda, considera las pautas que debe seguir el docente para contribuir a mejorar el nivel de razonamiento geométrico en que está ubicado el estudiante.

Según Crowley (1987, citado por Vargas, 2013), el modelo de razonamiento de Van Hiele explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes en cinco niveles consecutivos, la visualización, deducción informal, formal, rigor, los cuales se repiten en cada aprendizaje.

Por lo mencionado en los párrafos anteriores, en la presente propuesta se adoptó el modelo de Van Hiele que, por sus características, permitió proponer y diseñar situaciones para superar las dificultades que presentaban los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Limbania Velasco en el componente del razonamiento geométrico, comunicación y resolución de problemas según lo propuesto en los lineamientos curriculares que rigen la enseñanza de las matemáticas en Colombia.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Analizar las relaciones de aprendizaje de los elementos geométricos del hexágono regular que tienen los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Limbania Velasco, teniendo en cuenta los planteamientos del modelo de Van Hiele.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Diagnosticar los conocimientos previos que tienen los estudiantes de los elementos geométricos que potencializan el aprendizaje de las propiedades de las figuras planas en el marco del modelo de Van Hiele.
- Diseñar actividades de aprendizaje que fortalezca temas relacionados con las propiedades de las figuras planas.
- Aplicar las propiedades de las figuras planas utilizando material concreto para el aprendizaje de concepto del hexágono regular, desde los niveles de razonamiento de Van Hiele.

- Evaluar el proceso de los estudiantes con un test dentro de los primeros niveles del modelo de Van Hiele.

1.5 Antecedentes en relación con la implementación del Modelo de Van Hiele

Con respecto a la teoría del Modelo de Van Hiele, son varias las investigaciones en el ámbito nacional e internacional que dan cuenta de la importancia del estudio de la geometría y de sus niveles de razonamiento, lo que ha contribuido a identificar aspectos relevantes en la didáctica para aportar significativamente a la comprensión de conceptos geométricos.

Por ejemplo, Silva García y Leticia López Escudero (2008, p. 28), sostiene que

> La geometría ofrece a quien la aprende, una oportunidad para comprender un viaje hacia formas superiores de pensamiento (...), desarrolla la percepción del espacio, la capacidad de visualización, abstracción y la habilidad para establecer relaciones entre una o varias figuras geométricas, argumentando al validar las conjeturas que se hacen.

De modo que, a partir de actividades dirigidas y secuenciales que permitan aumentar el grado de dificultad, se puedan obtener mejores desempeños en cuanto al cómo y el porqué de sus construcciones geométricas.

La enseñanza de la geometría debe potenciar la capacidad de abstraer y de relacionar figuras geométricas mentalmente apoyándose de las reglas estipuladas dentro del campo matemático, especialmente el geométrico; igualmente, el docente debe desarrollar actividades didácticas que estén ligadas con modelos matemáticos que beneficien procesos de razonamiento geométrico. Piedrahita (2007), explica que:

> El Modelo de Razonamiento Van Hiele, describe cómo se lleva a cabo el desarrollo del razonamiento geométrico y cómo se les puede acompañar para que avancen de un nivel a

> otro. El modelo divide el conocimiento en cinco niveles de razonamiento en cada uno de los cuales se plantean diferentes fases de aprendizaje de contenidos y habilidades que permiten a los estudiantes pasar de un nivel de pensamiento a otro más avanzado. (p. 72)

Samper y Leguizamón (2001, p. 41), exponen que “el aprendizaje de la geometría es un proceso complejo que debe estar ligado a estructurar, organizar y justificar de forma lógica para potenciar el desarrollo de competencias comunicativas y cognitivas”.

En Gómez (2015), se expone un análisis de experiencias didácticas desarrolladas desde la enseñanza, teniendo en cuenta las carencias conceptuales que presentaban los docentes para lograr pensamiento geométrico y métrico en los estudiantes del grado quinto de la básica primaria; de igual modo, analizaron las dificultades que se pueden presentar en el proceso de enseñanza e indagaron sobre indicadores que evidencian aprendizajes significativos, apropiaron en su investigación lo expuesto por Ausubel (1978), con el propósito de mejorar la práctica pedagógica desde la implementación de una secuencia didáctica que enseña los conceptos básicos de la geometría como son el perímetro y el área, y concluyeron que el empleo de herramientas didácticas físicas o concretas mejoran el nivel de conceptualización, y contribuyen a tener aprendizajes significativos, siendo la teoría del Modelo de Van Hiele la más adecuada para comprender los conceptos geométricos.

El trabajo de Arboleda (2011), muestra como la geometría ha evolucionado en su forma de enseñanza y de su aprendizaje; esto conlleva a que el trabajo del docente debe salir de lo tradicional y debe propender por el diseño de estrategias didácticas que vinculen al estudiante activamente en su proceso de aprendizaje. De igual forma, llevarlo a que logre relacionar los conceptos geométricos con el mundo que lo rodea, partieron del refuerzo de los conocimientos previos, en busca de facilitar la comprensión del pensamiento espacial y los sistemas geométricos en los estudiantes del grado 6to bachillerato desde el estudio de los poliedros apoyados en el Modelo de Van Hiele; relacionando el objeto de estudio con la teoría del constructivismo.

Además, Arboleda (2011), señala que es importante contribuir desde la geometría a la madurez del pensamiento en busca de interpretar el contexto donde se encuentren; la investigación usa como referente los planteamientos de Soler (1992), quien argumenta que el docente, con su trabajo pedagógico, debe propender por el fortalecimiento del mundo espacial del niño desde lo concreto hacia lo abstracto, a partir de la visualización en beneficio de lo cognitivo en el estudiante.

En la investigación realizada por Bedoya, Esteban y Vasco (2007), con 39 estudiantes del primer semestre de universidad, en torno al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, se manifiesta como objetivo principal la representación de las relaciones posibles entre conceptos presentados en proposiciones que facilitan en análisis del lenguaje utilizado al momento de diseñar la estructura del mapa conceptual, el cual evidencia como el estudiante organiza y hace la integración de conceptos.

Se fundamentan en el modelo de Van Hiele proponiendo que se puede aplicar fuera del campo geométrico, aplicándolo en el cálculo matemático, dado que este modelo permite analizar el lenguaje dentro de los descriptores de cada uno de los niveles geométricos propuestos dentro del mismo “dos personas no se pueden entender si razonan en diferentes niveles” (Van & Pierre, 1957); de igual forma, se fundamentan en el aprendizaje significativo de Ausubel, desde los mapas conceptuales como herramienta didáctica que contribuye a mejorar las estructuras cognitivas con respecto a las actividades escolares a las que se enfrentan los estudiantes.

Calderón y Peñuela (2013), enmarcaron su trabajo desde un análisis de la forma tradicional cómo se ha enseñado la geometría, haciendo énfasis que, con esta forma de enseñanza, el estudiante es un ser pasivo en el momento de desarrollar procesos de aprendizaje; de igual forma, hacen un recorrido histórico de las cónicas como objeto de estudio geométrico, a partir de la didáctica donde el estudiante entienda lo que aprende, comprendiendo el ¿Por qué? y ¿Para qué?, saliendo de la enseñanza tradicional y de la forma algorítmica o algebraica con la que normalmente es enseñada, proponiendo enseñar sus propiedades desde el contexto con elementos concretos para manipular dichas curvas, apoyaron en los estándares básicos de competencias, en el pensamiento espacial y la ubicación del tema en el grado 10° del bachillerato, tomando el modelo educativo de Van Hiele y las ideas principales en que las se fundamentan Jaime y Gutiérrez (1990), quienes afirman

> Encontrar diferentes niveles en los estudiantes, se comprenden conceptos dentro del nivel en que se ubique, no se puede avanzar si en un contenido presenta dificultades el estudiante, se puede orientar al estudiante para razonar de forma diferente y obtener mejores resultados. (p. 68)

El recurso para enseñar de forma diferente las cónicas, donde lo principal no es partir de la parte algorítmica o algebraica, generó clases más dinámicas, procesos de mejoramiento en los niveles de razonamiento geométrico de los estudiantes.

En la investigación de Acevedo, Londoño y Ramírez (2008), se presentó un trabajo desarrollado desde la geometría dinámica con el uso de la herramienta didáctica GeoGebra, con el propósito de posibilitar en los estudiantes de cuarto de la Básica Primaria comprensión frente al concepto de ángulo y sus propiedades, dado que, desde esta aplicación en el ámbito escolar, le permite al estudiante estructurar y dinamizar sus conocimientos desde la mirada del modelo educativo de Van Hiele y sus fases de aprendizaje, así como de la apropiación de los lineamientos curriculares en matemáticas dentro de la geometría, les facilitó las representaciones mentales con la exploración y modelación de objetos que pueden estar en movimiento o en reposo, concluyendo que el uso de: GeoGebra, el modelo de Van Hiele, Los Lineamientos Curriculares proporciona cambios metodológicos que mejoran las competencias tecnológicas tanto a los estudiantes como a los docentes.

CAPÍTULO II. REFERENTES TEÓRICOS

Las reflexiones y las decisiones tomadas por el docente frente al proceso del aprendizaje de los estudiantes han sido y seguirá siendo una motivación del profesional que debe tener unos referentes teóricos que le permitan al profesor adelantar actividades pedagógicas, es por eso que en este proyecto se tuvo en cuenta algunos conceptos que fundamentaron la propuesta didáctica.

En las últimas décadas, ha incrementado considerablemente el número de investigaciones concernientes a la caracterización y clasificación de temas específicos, encaminados a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, en especial en el área de la geometría, considerada como un área importante para el desarrollo y crecimiento de la humanidad por su función instrumental y porque promueve el desarrollo del pensamiento crítico y creativo con el propósito de comprender y modificar el entorno.

En el ejercicio de la educación matemática confluyen procesos históricos, sociales, culturales que privilegian desde el quehacer escolar cambios hacia el conocimiento matemático. Al respecto, Escudero (1981), manifiesta que: ‘‘La educación matemática es la ciencia que tiene por objeto la organización y orientación de las situaciones de enseñanza, aprendizaje de carácter instructivo tendentes a la formación del individuo en estrecha dependencia de la educación integral” (p. 117).

Es así como desde la educación matemática, el trabajo en la escuela posibilita la organización del conocimiento matemático involucrando al estudiante como un ser social que interactúa en un contexto institucional y local.

En particular, se consideró que la geometría es un área que está presente en muchas facetas de la vida cotidiana, ésta tiene influencia en el desarrollo integral de los estudiantes, sobre todo en lo relacionado con la percepción visual, la expresión verbal, el razonamiento lógico y la aplicación a problemas concretos de la matemática y otras áreas. Por lo tanto, como lo plantea Barrantes y Blanco (2004), la principal finalidad de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría es conectar a los estudiantes con el mundo en que se mueven, pues el conocimiento, la intuición y las relaciones geométricas son muy útiles en el desarrollo de la vida cotidiana.

Sin embargo, tradicionalmente la enseñanza de la geometría ha priorizado la memorización de conceptos, teoremas y fórmulas, dejando de un lado la intuición como una forma inicial de acceder al conocimiento geométrico, más en el desarrollo de este trabajo, la manipulación, la vista y el dibujo fueron un factor importante que le permitieron al estudiante familiarizarse con las figuras, formas y movimientos de su entorno para luego, en otro momento establecer abstracciones.

En otro intento por mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, se llegó a la reflexión que ésta se debe planificar de forma progresiva, cíclica, activa y comunicativa que propicie simultáneamente la representación gráfica y la expresión oral, manual o escrita en la cual el estudiante, además de jugar, aprende.

Si se tiene como punto de partida una concepción constructivista del aprendizaje basada en que aquellos conocimientos construidos por los propios alumnos son operativos, duraderos y generalizables a diferentes contextos, el modelo de Van Hile juega un papel importante en la planificación de la enseñanza y en el seguimiento a los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Más adelante se hace una exposición más amplia y rigurosa del método.

2.1 El Teorema de Pappus

Pappus es el autor de la colección matemática que recopila la historia de la matemática clásica y quien comenta los trabajos de Euclides, Arquímedes, Apolonio, entre otros, colección formada por 8 libros, donde el libro numero 4 está dedicado a estudiar las figuras planas, equiláteros, equiángulos, pertinente con la propuesta didáctica frente al concepto del hexágono. Según este autor, o el teorema de Pappus como se llama, define al hexágono como una figura formada por seis puntos del plano que son los vértices del hexágono y sus reis rectas que unen pares consecutivos de vértices que son los lados del hexágono, se llaman lados opuestos a los pares de los lados que son opuestos, si el hexágono es regular, es decir, ABCDEF es un hexágono.

- Los puntos ABCDEF son los vértices.
- Las rectas AB, BC, CD, DE, EF y FA son los lados.
- AB, DE, BC y FE, CD, FA son los pares de los lados opuestos.

Este teorema del hexágono, donde Pappus afirma lo siguiente

> Si en un par de rectas escogemos tres puntos colineales al azar en cada una y las unimos dos a dos las intersecciones de las rectas escogemos tres puntos colineales al azar en cada una de las mismas dos a dos las intersecciones de las rectas que se unen estarán en una línea recta. (citado por Mosquera, s.f., p. 224)

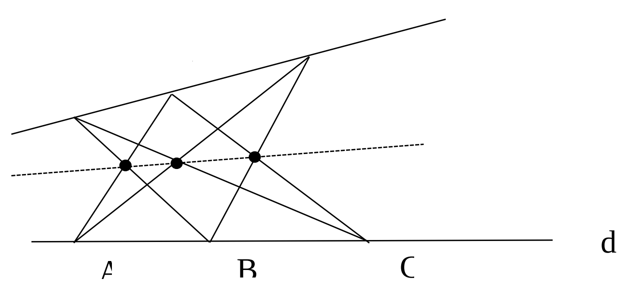


Figura 1. Teorema del hexágono

Fuente: (Mosquera, s.f., p. 224).

Es un teorema puramente de incidencia, no hace referencia a medidas, pero se demuestra usando los axiomas de congruencia de segmentos. El hexágono es un polígono que puede ser apreciado en la naturaleza, en la piel de la serpiente, en el caparazón de la tortuga.

Es el símbolo de la creación judaica llamada semilla de vida o flor hexagonal; también estrella de seis puntas donde es representado lo femenino y lo masculino. En la ciencia el hexágono está representado en el planeta Saturno, en donde alrededor del polo norte del planeta hay un anillo hexagonal que tiene unos 25.000 km de perímetro, gira en un periodo de 10 horas y tienen una profundidad de 100 km.

2.2 Razonamiento

Como se ha mencionado en párrafos anteriores, el modelo de Van Hiele es una teoría que se ha interesado en el campo de la geometría, en explicar cómo se progresa de un nivel a un nivel de razonamiento superior y cómo se puede ayudar al estudiante a lograr esos avances desde las fases de aprendizaje; de igual forma, aporta en la organización del currículo escolar en sus diferentes grados, por lo que, currículos como el soviético en los años 60 y el holandés en los 80, lo han implementado como referente importante que le permite a sus estudiantes comprender la geometría. Del mismo modo, los estándares de la NCTM (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas), están fundamentados en los aportes del modelo de Van Hiele, ante lo cual, Gutiérrez (1994) y Gutiérrez y Jaime (1995), citados en NCTM, 2003, afirman respecto al modelo y en especial a los niveles de razonamiento, que: *"Cada uno de los niveles de Van Hiele está formado por varios procesos de razonamiento diferentes, identificación de ejemplos, de conceptos geométricos, comprensión y verbalización de definiciones, demostración de propiedades y clasificación de familias geométricas"* (p. 3).

De lo anterior se puede evidenciar que, para guiar y potenciar un conocimiento geométrico que permita un desarrollo de razonamiento, se debe trabajar de forma secuencial dichos aspectos, lo que favorece el alcance de los diferentes niveles de razonamiento propuestos por Van Hiele.

Hershkowitz 1998 citado por Torregrosa y Quesada (2007), explica que: "Los procesos de razonamiento son considerados hoy día como una variedad de acciones que toman los alumnos para comunicarse y explicar a otros, tanto como a ellos mismos, lo que ven, descubren, piensan y concluyen" (p. 288).

En el proceso de enseñanza aprendizaje el docente selecciono varios ejemplos que facilitaron las diferentes experiencias de los estudiantes frente al objeto matemático de estudio, cambiando la dinámica del desarrollo de la clase en busca de una mejor apropiación de los temas escolares, dando al estudiante la motivación para expresar cuáles fueron los aspectos relevantes en su proceso de aprendizajes que lograron evidenciar en beneficio de su desarrollo intelectual, posibilitándole aspectos de argumentación, demostración, representación de sus conocimientos, buscando patrones matemáticos apoyados en material manipulativo que les facilitó la visualización del componente o elemento central del objeto matemático.

Al respecto Battista y Clements (1995, citado por Fernández, 2013), manifiestan que:

> El camino más efectivo para engendrar un uso útil de la geométrica en la escuela secundaria es evitar la demostración formal durante gran parte del trabajo con los estudiantes. Sin nos centramos en ayudar a los estudiantes a construir unos cimientos empíricos y visuales para los niveles más altos del pensamiento geométrico; podemos llegar a conseguir que aprecien la necesidad de una prueba formal. Sólo entonces, serán capaces de utilizarlo significativamente como mecanismo para clasificar ideas. (p. 53)

En educación matemática, la utilización de elementos manipulativos es importante porque ayuda a organizar las representaciones cognitivas de un objeto de estudio. En especial del geométrico, de esta manera se hizo uso de los saberes previos sobre las figuras geométricas del contexto, de las que podían tomar información, por medio de la estimulación de sus sentidos (visual, tacto, auditivo), en muchos casos, entendiendo el concepto de estudio desde lo informal, lo cual facilitó al estudiante poder demostrar sus argumentos en el proceso de aprendizaje que buscaba potencializar el primer nivel de razonamiento en consecuencia, validaron el uso de sus argumentos matemáticos.

La selección adecuada, de las tareas que el docente implementó, para la conceptualización de este tema específico del currículo académico en geometría, tuvo como eje articulador las propiedades relevantes e irrelevantes, apoyándose en imágenes que favorecieron la adquisición del concepto geométrico con el propósito de facilitar el proceso de construcción o fundamentación de nuevas redes de conocimiento o de conceptos; por tanto, Vinner y Hershkowitz (citado por Samper & Leguizamón, 2003)), proponen "Adquirir un concepto significa adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto, tal como este está concebido por la comunidad matemática" (p. 9).

Con lo anterior se invitó al estudiante a robustecer sus procesos conceptuales permitiéndole explorar, hacer preguntas, cuestionar sus argumentos, desarrollar estrategias facultándole en la construcción gradual de un concepto matemático, sus propiedades y sus relaciones; en consecuencia, su actividad mental fue más dinámica con gran capacidad de síntesis que le favoreció en la construcción de nuevas estructuras en el desarrollo del razonamiento.

En este sentido Van Hiele (1955, citado por Jaime & Gutiérrez, 1990), afirma que

> Puede decirse que alguien ha alcanzado un nivel superior de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento permite con respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones a nuevos objetos. El alcance de un nuevo nivel no se puede conseguir por la enseñanza, pero aun así, mediante una adecuada elección de ejercicios, el profesor puede crear una situación favorable para que el alumno alcance un nivel superior de pensamiento. (p. 289)

Cada persona en su proceso de aprendizaje, modifica sus estructuras mentales en estructuras más complejas y más profundas, a lo que Van Hiele denomina redes de relaciones, en donde los vértices (conocimiento previo) aprendidos y las líneas de conexión entre vértices (relaciones entre conceptos) aumentan la capacidad de razonamiento, adquiriendo un adecuado dominio del lenguaje, de habilidades geométricas como consecuencias de sus nuevas experiencias de aprendizaje, donde el estudiante es parte activa de sus redes de relaciones, logrando la maduración de las redes mentales de los alumnos en sincronía con las fases de aprendizaje.

Por esta razón, Van Hiele (1986), citado por Jaime y Gutiérrez (1990), argumenta que.

> La imposibilidad de los niños no depende de la falta de maduración, sino de una ignorancia de las reglas del juego de la lógica, el niño no tiene a su disposición las estructuras a partir de las cuales se organizan las preguntas. No puede aprender las cuestiones porque no ha terminado el proceso de aprendizaje. La guía al nivel de pensamiento requerido es importante la edad de los niños en cuanto que debe haber tenido el tiempo suficiente para llevar a cabo el necesario proceso de aprendizaje. (p. 32)

Es así que desde las diferentes experiencias en el aula de clase, le permitieron a los estudiantes la maduración en su proceso de aprendizaje, puesto que lograron justificar, comparar y plasmar, estructuras que daban cuenta de sus nuevas habilidades geométrica, compaginando la creación de vértices y luego las conexiones que se pueden obtener entre ellos, en consecuencia los utilizaron en sus actividades de aprendizaje, por lo cual la enseñanza se convirtió en un factor importante que propició razonamientos adecuados.

2.3 Secuencia Didáctica

La secuencia didáctica es una herramienta pedagógica que el profesional de la docencia utiliza para profundizar en los contenidos curriculares, reflexionar en cómo debe organizar, desarrollar y evaluar su práctica pedagógica; involucrando a los estudiantes del curso en las nuevas estrategias de enseñanza; teniendo en cuenta las dificultades y saberes previos frente a un objeto de estudio con contenidos que deben estar ligados a unos objetivos coherentes y claros. El docente constantemente debe estar analizando y evaluando todo el proceso de la ejecución de la secuencia didáctica, con el fin de tomar decisiones frente al aprendizaje de los estudiantes y las posibles retroalimentaciones de los contenidos académicos propuestos.

El diseño y la ejecución de las actividades demandaron tiempo, porque el desarrollo de la secuencia didáctica debía evidenciar cambios en el lenguaje y el razonamiento de los estudiantes frente a la actividad matemática, desde ambientes que favorecieron la confianza, y los animaran a realizar las actividades de conceptualización.

Al respecto Brousseau (2007) citado por Diaz (2013), establece que "Las secuencias constituyen una organización de las actividades de aprendizaje que se realizan con los alumnos y para los alumnos con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo" (p. 1).

El interés con la secuencia didáctica era propender por estudiantes que argumentaran y justificaran sus procedimientos sobre su aprendizaje, para ello desde la enseñanza se debía tener claro cuáles son los elementos pertinentes al objeto de estudio, teniendo como camino tres momentos en la ejecución de una secuencia didáctica: la apertura, desarrollo y cierre; para lograr recorrer estos tres aspectos, el docente estaba en disposición de afrontar los retos que permitieron ayudar a sus estudiantes a salir de sus dificultades cognitivas, siempre en constantes preguntas, interrogantes que les permitieron aclarar los conceptos empleando correctamente el lenguaje geométrico, apoyándose en material concreto.

El renovar la enseñanza y comprender cómo los estudiantes logran sus aprendizajes, ha motivado a diferentes grupos de investigación en el campo de la educación matemática. Es así como desde diferentes teorías y metodologías se han logrado aportes para mejorar la práctica pedagógica, siendo Jean Piaget quien marca, hacia la década de los años 60', el inicio en la didáctica de la geometría cuando se interesa por investigar cómo los niños construyen sus relaciones con el espacio que los rodea y cómo van logrando razonamientos lógicos en el desarrollo de los sistemas operacionales. Para Piaget la representación mental de una forma geométrica no era asunto de obtener en la memoria una figura que se observa pasivamente, sino el resultado de acciones coordinadas (citado por Camargo, 2011, p. 4).

Las actividades de la secuencia didáctica que se propusieron impulsaron al mejoramiento de las habilidades y renovaron su conocimiento frente al objeto de estudio, para ello el conocimiento del objeto de estudio, se ligó a procesos académicos que facilitaron aspectos como el razonamiento lógico, visuales, dibujo, lenguaje, transferencia de figuras, que favorecieron la comprensión de relaciones y propiedades dando una estructura lógica para un aprendizaje significativo, duradero y no memorístico.

El modelo de Van Hiele le permite al docente enfrentar las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, puesto que facilita diseñar actividades didácticas dentro del campo de la geometría, donde los estudiantes avanzan en el mejoramiento de sus niveles de razonamientos inductivos y cualitativos hacia razonamientos deductivos y abstractos.

Enseñar geometría no es fácil, las actividades que se le presentaron a los estudiantes fueron situaciones sencillas que implicaron desarrollo cognitivo y apropiación del lenguaje geométrico requerido, donde los estudiantes lograron aprender lógicamente y lograron extraer la información requerida de un dibujo geométrico, aplicando propiedades, interpretando sus relaciones desde las imágenes mentales que crearon de la situaciones problema. Así mismo, el docente logro establecer un balance entre el proceso formativo en el campo de la geometría desde las habilidades de visualización y la argumentación en el desarrollo de una red de conocimientos por parte del estudiante, ante lo cual expresan Torregrosa y Quesada (2007), "En el estudio de la geometría se denomina visualización al proceso o acción de transferencia de un dibujo a una imagen mental de un objeto es ante todo un proceso, esto implica que debe darse de forma paulatina" (p. 131).

En el proceso de comprender el objeto matemático, la visualización fue parte importante en el aprendizaje, puesto que le permitió a los estudiantes cuestionarse sobre aspectos que les inquietaron y que querían aprenderlos, justificarlos, argumentarlos, razonarlos, y llegar a decisiones lógicas y verdaderas desde la aplicación de algunas propiedades geométricas que consideraron necesarias emplear, por tanto, fue importante en el desarrollo de la práctica pedagógica, que las actividades fueran aumentando el grado de dificultad, donde el estudiante de forma autónoma, y guiado por el docente adquirió un sentido más significativo y menos memorístico de su aprendizaje, equilibrando constantemente los contenidos del currículo escolar con el aprendizaje de los estudiantes.

Báez e Iglesias (2007) citados por Gamboa y Ballesteros (2009), afirman que en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, existen seis principios que se deben tener en cuenta en la didáctica de la geometría.

- Principio globalizador o interdisciplinario.
- Integración del conocimiento.
- Contextualización del conocimiento.
- Principio de flexibilidad.
- Aprendizaje por descubrimiento.
- Innovación de estrategias metodológicas. (p. 128)

Estos seis principios didácticos involucraron al docente y estudiante con el propósito de cambiar las practicas del docente y el rol del estudiante en el aula de clase, permitiendo al docente organizar sus actividades escolares según las necesidades o dificultades del estudiante; del mismo modo, los estudiantes fueron dinámicos, reflexivos cambiaron la forma de estudiar y de aprender geometría, lo que les posibilito mejores niveles de razonamientos geométricos.

La geometría no se debe seguir enseñando como un conjunto de fórmulas para memorizar y aplicar sin sentido, como un producto terminado que no permite procesos de construcción, experimentación o discusión frente a un objeto de estudio. De acuerdo con Goncalves (2006), se puede pensar que "frecuentemente la enseñanza de la geometría se limita a reconocer figuras y dibujarlas en el papel, las lecciones se desarrollan de manera abstracta sin proporcionarles a los estudiantes ejemplos reales que faciliten un mejor entendimiento de los contenidos" (p. 118).

Desde esta perspectiva, la enseñanza de la geometría no deja nada interesante, propositivo e innovador para los estudiantes, sino que provoca apatía o rechazo con clases que no satisfacen sus intereses. Por lo tanto, desde la secuencia didáctica implementada en este trabajo se presentaron los temas del currículo escolar de forma diferente, que los objetivos propuestos por el docente se lograron cumplir, teniendo claro a dónde quería llegar con sus estudiantes, cuáles son los procesos cognitivos que buscaba desarrollar, entre otros aspectos; para esta tarea, el uso del material manipulativo o concreto en la didáctica de la geometría logró facilitar dichos procesos.

Por otro lado, Godino y Ruiz (2002), afirma que "un estudiante puede memorizar sin hacer relaciones o demostraciones geométricas, pero fallar, en crear los pasos exigidos o comprender la razón de ser del proceso" (p. 501). De lo anterior, se puede entender que los estudiantes no han tenido un acercamiento correcto a sus vértices y redes de relaciones del tema de estudio, solo han logrado memorizar fórmulas o algoritmos que aplican sin tener en cuenta las relaciones o propiedades que tengan, por lo tanto serán estudiantes con bajos niveles de razonamientos que no logran tener la comprensión geométrica adecuada frente a estructuras perceptivas, lingüísticas y lógicas que, según Van Hiele, se deben posibilitar desde la enseñanza y aprendizaje de la geometría, donde aspectos como: clasificar, identificar, describir, modelar, dibujar, medir, observar, resolver, clasificar por propiedades, entre otros, son convenientes en un proceso de acompañamiento que favorezca el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico propuestos por Van Hiele y Dina Gelfor.

2.4 El Modelo de Van Hiele

En el campo de la educación, y en especial en la investigación matemática, los investigadores brindan diferentes alternativas o estructuras pedagógicas que movilicen el conocimiento de los estudiantes. Por ello desde las actividades didácticas de esta intervención se buscó facilitar esquemas o procesos que acompañaran la labor educativa y pedagógica para proponer tareas diferentes de la que habitualmente se les ofrecían a los estudiantes en el desarrollo de sus clases;

al respecto Jaime & Gutiérrez (1990), aseguran que "un modelo matemático tiene como objetivo describir matemáticamente una situación del mundo real que se representa con la suficiente frecuencia como para que merezca la pena estudiarla y tratar de comprenderla" (p. 299).

Por lo tanto, para estudiar hechos que son repetitivos, en la enseñanza, y el aprendizaje de las matemáticas se requirió de un modelo que valora la observación, para explicar los diferentes fenómenos que ocurren en el aula de clase. Este modelo alcanzó el éxito en la enseñanza y el aprendizaje de las estrategias, que se utilizaron para que los estudiantes comprendieran las relaciones entre los contenidos, con el apoyo de su material manipulativo, que ayudaron al estudiante a definir, explicar y dar soluciones frente al objeto de estudio. Por consiguiente, se identificaron las características que hacen al modelo ser el apropiado para representar el proceso académico que fortaleció las redes de conocimiento de los estudiantes quienes exploraron de manera más tangible los conocimientos geométricos.

Es por ello que este trabajo tomó como referente el modelo educativo y didáctico de los esposos Pierre y Diana Van Hiele Gelford, docentes de secundaria quienes se preocuparon por las constantes dificultades que encontraban en sus estudiantes para comprender el estudio de la geometría, su significado y la utilidad de las matemáticas; dichos docentes en el año de 1957, en Holanda, desarrollaron el modelo de los niveles de pensamiento que explica la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes en sus estructuras de pensamiento en el campo de la geometría; este modelo guía al docente y permite organizar el currículo, por eso "Alcanzar un nivel superior de pensamiento significa que, con un nuevo orden de pensamiento, una persona es capaz respecto a determinadas operaciones, de aplicarlas a nuevos objetos" (Van Hiele, citado por Fouz & De Donosti, 2013, p. 68).

Por lo tanto, se identificaron las características específicas que el modelo de Van Hiele propone para lograr el máximo desempeño en el aprendizaje geométrico de los estudiantes.

Este modelo brinda la ruta desde los primeros años de escolaridad hasta la etapa profesional en dos aspectos en cinco niveles de razonamiento y en fases de aprendizaje; el modelo asegura que para que dos personas se comprendan en el campo de la geometría deben estar en el mismo nivel de razonamiento, dando importancia a la adquisición de un lenguaje adecuado que dé razón de aprendizaje, de conocimiento, de la geometría; de igual forma los niveles de razonamiento frente a una temática no van relacionadas con la edad cronológica, sino de la forma cómo se haya acercado al objeto de estudio.

2.4.1 Componentes del Modelo de Van Hiele.

En la aplicación del modelo de Van Hiele se organiza en cinco niveles consecutivos organizados de la siguiente manera.

Nivel 1. Razonamiento o Visualización.

Nivel 2. Análisis.

Nivel 3. Deducción Informal u Orden.

Nivel 4. Deducción.

Nivel 5. Rigor.

Para la ejecución del modelo de Van Hiele fue necesario de unos descriptores que permitieron determinar el avance de los estudiantes, para lo cual se tuvo en cuenta autores como: Fouz y Donosti (2005); Jaime (1993); Jaime y Gutiérrez (1994); Beltranett, Ezequiel y Ferrari (2005);

Concalves (2006); de la Torre (2003), quienes explican cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo fueron aplicados en la geometría por Van Hiele.

2.4.2 Niveles del Modelo de Van Hiele

2.1.1.1 Nivel 1. Razonamiento o Visualización.

- El estudiante reconoce las figuras geométricas de forma global.
- No reconoce las partes de las figuras geométricas.
- Emplea un escaso vocabulario para los nombres de las figuras geométricas.
- Reconoce las figuras por su forma.
- No reconoce ni explica las propiedades explicitas de las figuras geométricas.
- Compara las figuras con elementos de su entorno.

2.4.2.1 Nivel 2. Análisis.

- Los alumnos reconocen y analizan las figuras geométricas, sus partes y propiedades de manera informal pero no establecen relaciones entre diferentes grupos de figuras.
- No elaboran definiciones, pueden describir algunas características, elementos o propiedades que pertenecen a un grupo de figuras geométricas.
- Pueden analizar, deducir por la experimentación, manipulación, observación de algunas propiedades o características de forma empírica.
- Logran explicar de forma lógica cómo algunos elementos geométricos hacen parte de propiedades geométricas.

2.4.2.2 Nivel 3. Deducción Informal u Orden.

- Constituye relaciones entre familias geométricas.
- Razona de forma pertinente las definiciones, aunque no logra hacer demostraciones, no comprende el empleo de axiomas matemáticos.
- La manipulación es factor primordial para potencializar sus razonamientos lógicos.

2.1.1.2 Nivel 4. Deducción.

- Demuestra, deduce y justifica las propiedades geométricas y sus relaciones.
- Familiariza los sistemas axiomáticos de las matemáticas.
- Adquiere un alto nivel de razonamiento lógico, teniendo una visión globalizada de las matemáticas.

2.4.2.3 Nivel 5. Rigor.

- Capta la geometría de forma abstracta, emplea y compara los diferentes axiomas matemáticos.
- Logra trabajar la geometría sin el empleo de objetos manipulables.
- Es el nivel de más alto rigor geométrico alcanzado por estudiantes que se hayan preparado en la geometría, es desarrollado en un nivel universitario.

Es importante resaltar que la obtención o el paso de un nivel a otro deben ser secuenciales, no se puede llegar a un nivel superior sin antes haber pasado por el nivel anterior.

2.5 Las fases del aprendizaje del modelo de Van Hiele

El segundo aspecto del modelo de Van Hiele, es el instructivo que ofreció las recomendaciones, al profesor de geometría con el propósito que el docente realizara experiencias significativas y secuenciales, en este camino el profesor hizo uso de material tangible para ayudar a sus alumnos a fortalecer sus redes de conocimientos geométricos, potencializando el avance entre los niveles de razonamiento.

Las fases de aprendizaje le permitieron al docente organizar el currículo académico en torno del objeto de estudio; las fases de aprendizaje son cinco que deben ser aplicadas dentro de cada nivel, en donde resalta cómo deben ser enseñadas y qué materiales didácticos pueden ser utilizados.

Al respecto Van Hiele expresa que la misión en educación matemática es proporcionar experiencias adicionales bien organizadas para que sean lo más útiles posibles a lo que él llama las “fases de aprendizaje”, ellas son como sigue: preguntas de información; orientación dirigida; explicitación; orientación libre; integración.

2.5.1 Fase Información.

En esta primera fase el docente presentaba el tema de estudio, en diálogo constante, indagó sobre los conocimientos previos o básicos que debían tener los estudiantes, lo cual permitió determinar el nivel de razonamiento en que estaban los estudiantes frente al tema presentado.

Es una fase que puede llegar a ser obviada si el conocimiento básico de los estudiantes es el pertinente; en esta fase los estudiantes fueron atentos a seguir las indicaciones sobre el material didáctico que fue empleado en el desarrollo de las clases de geometría.

2.5.2 Fase Orientación Dirigida.

La segunda fase es donde el docente organizó su secuencia, sus estructuras temáticas básicas, apoyado en material didáctico, con el propósito de motivar a los estudiantes a indagar, descubrir o confirmar sus redes de conocimientos geométricos que le permitió avanzar o suponer un nivel de razonamiento.

2.5.3 Explicitación.

En la tercera fase de aprendizaje el estudiante hizo evidente sus argumentos, los expuso y los justifico con los compañeros de grupo, se dio un inicio parcial a la nueva red de conocimientos, en donde el uso frecuente del lenguaje geométrico de sus experiencias individuales y grupales; de esta fase de aprendizaje se debe destacar, que es constante en todo el proceso de ejecución y desarrollo de un nivel de razonamiento, que al igual que la fase dos (orientación dirigida), son fundamentales para la apropiación de un nuevo aprendizaje y de la capacidad de razonar, por lo que se debe tener en cuenta que estas dos fases no se pueden obviar.

2.5.4 Orientación Libre.

La fase de orientación libre fundamentó la secuencia de la actividad didáctica hacia el avance de un nuevo nivel de razonamiento, los estudiantes debían aplicar su conocimiento y relaciónalo con el vocabulario geométrico en la solución de las actividades que tenían mayor complejidad en su resolución, buscando diferentes alternativas de solución, buscando consolidar nuevas redes de aprendizaje.

2.5.5 Integración.

La quinta fase se manifestó en que el estudiante tiene una visión general del objeto de estudio, ya lo puede expresar como un todo encontrando relaciones entre redes de conocimiento, demostrando sus habilidades y cualidades geométricas, su capacidad argumentativa mejoró y su vocabulario es más apropiado y contextualizado.

2.6 Comprensión

Una particularidad importante del modelo educativo de Van Hiele es reconocer, en el proceso didáctico, los aspectos inherentes que evidencian el progreso adquirido respecto a la comprensión de un objeto de estudio, al respecto Van Hiele (1957), afirma que

> La comprensión en geometría se da cuando a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran es capaz de llegar a una conclusión en una situación a la que no se había enfrentado antes. Utiliza palabras como: "Ah ya lo veo o sea que si…" y a continuación formula un nuevo teorema. (p. 1)

Del mismo modo Arboleda (2005), expresa que:

> La comprensión es el proceso cognitivo socio-afectivo y operativo a través del cual alguien reflexiona y construye adecuadas expresiones en torno a una situación, aspecto, hecho, acto, proceso u objeto de conocimiento y frente a la experiencia que vive al examinar, usar y aplicar este último. (p. 48)

La ejecución del proceso didáctico se sustentó en una estructura de rigurosidad, de tal forma que fue evidente en el logro de la relación coherente al pensamiento del estudiante con la experiencia y vivencia, por las conclusiones que sustentaron la comprensión de su conocimiento.

2.6.1 Proceso de comprensión en geometría.

En el proceso de comprensión en geometría, Van Hiele (1957) plantea lo siguiente:

Un estudiante en el campo de la geometría debe seguir un proceso de:

- Estructuración del campo perceptivo.
- La estructuración del campo perceptivo va unido a distintas palabras.
- El proceso mental acerca de las figuras se va desarrollando cada vez más en el terreno verbal, la estructuración perceptiva se va convirtiendo paulatinamente en estructuración lingüística.
- Se crea cierta autonomía en la estructuración lingüística.

Los tres primeros momentos hay comprensión, al llegar al cuarto momento se pasa a una estructuración mayor (p. 29).

2.6.2 Descriptores para el primer nivel del modelo de Van Hiele para la secuencia didáctica

Nivel 1. Visualización.

- Reconoce globalmente la figura geométrica.
- Describe y evidencia características y relaciones de elementos matemáticos en la medida y conformación de ángulos.
- Evidencia algunos elementos matemáticos de los polígonos regulares.
- Uso incorrecto de aspectos matemáticos para caracterizar un polígono regular.
- Uso impreciso del vocabulario para descubrir e identificar polígonos regulares.
- No reconoce ni explica las propiedades explicitas de los polígonos regulares.
- Compara las figuras geométricas con elementos de su entorno.
- Compara polígonos para determinar sus elementos.
- Representa polígonos donde identifica ángulos diagonales.
- Representa figuras geométricas donde puede evidenciar las principales características de una figura geométrica.
- Identifica un polígono como un todo e identifica sus elementos.

- Representa nuevas figuras geométricas al trazar una de las diagonales.
- Identifica, analiza, experimenta y manipula figuras geométricas para valorar propiedades.
- Reconoce que diferentes polígonos se nombran según el número de lados o vértices que tengan.
- Reconocer que las características que se cumplen para el hexágono como polígono regular se cumplen para los polígonos de la misma clase.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

3.1 Marco Metodológico

En este capítulo se exponen los principales aspectos tomados en cuenta para el desarrollo del proyecto, como son la metodología y sus referentes, los instrumentos utilizados para obtener la información y el análisis frente al nivel uno (visualización y reconocimiento), de los estudiantes del grado séptimo frente al concepto del hexágono regular en el marco del modelo de Van Hiele.

En la investigación participaron los 35 estudiantes del grado 7-2 de la jornada tarde de la Institución Educativa Limbania Velasco, quienes realizaron diferentes actividades, talleres escritos, trabajo colaborativo y de socialización, donde el docente desde la observación, evidenció en los estudiantes el empleo adecuado del lenguaje geométrico con respecto a las ideas o justificaciones expresadas de forma gráfica como oral, lo que evidenció que su proceso de razonamiento estaba progresando, dado que el lenguaje es la extensión del conocimiento y el referente que manifiesta el cambio de estructura cognitiva al expresar sus argumentos lógicos de razonamiento frente al objeto de estudio.

Es importante reconocer que, desde las actividades planteadas, permitieron obtener la información para el desarrollo de la triangulación y el análisis en relación coherente con la pregunta, y los objetivos propuestos en el proyecto, los cuales se fundamentaron desde lo cualitativo puesto que les permitieron explorar, interactuar, analizar y descubrir las relaciones en el proceso de maduración del razonamiento geométrico de los estudiantes con respecto a la comprensión del objeto de estudio desde una perspectiva descriptiva – interpretativa.

3.2 Tipo de estudio

Para el proceso de desarrollo de este proyecto se tomó como estrategia metodológica el estudio de caso debido a que posibilita dar en detalle las relaciones particulares y comunes de un contexto, que reflejaron los elementos que dieron cuenta de la aproximación a un conocimiento específico de la realidad social como educativa. Entendido el estudio de caso como

> El estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas, de igual forma para Yin (1989) el estudio de caso consiste en una descripción y análisis detallados de unidades sociales o entidades educativas únicas. (Stake, 1998, citado por Barrio et al., 2010)

De acuerdo con lo anterior, es importante destacar algunas características del estudio de caso según Álvarez y San Fabián (2012), el estudio de caso se interesa por:

- Realizar una descripción contextualizada de objeto de estudio.
- Son estudios holísticos.
- Reflejan la peculiaridad y la particularidad de cada realidad / situación a través de una descripción densa y fiel del fenómeno investigado.
- Son heurístico.
- Se incorporan diferentes fuentes de datos y el análisis se realiza de modo global e interrelacionado.
- El razonamiento es inductivo, lo que exige una descripción minuciosa del proceso investigador seguido.

Por otro lado, Pérez (1990, citado por Álvarez & San Fabián, 2012), afirma que:

> El estudio de caso orienta a comprender la realidad individual o colectiva de un grupo social que busca descubrir y analizar situaciones únicas con la finalidad de llegar a una descripción contextualizada encaminada a la toma de decisiones para finalmente obtener conclusiones generarles. (p. 4)

Por consiguiente, el estudio de caso permitió comprender las acciones y relaciones que efectuaron los estudiantes frente al objeto de estudio; de igual forma, se tuvo claro cuál es el estudio de caso pertinente abordar, ante lo cual Stake (1999, citado por Álvarez & San Fabián, 2012), señala tres clases de estudio de caso el intrínseco, instrumental y elemento, que facilitan encontrar relaciones desde la particularidad y lo colectivo, aprendiendo en consecuencia de cada uno.

En concordancia con los elementos teóricos establecidos y desde el estudio de caso que permitieron relacionar conclusiones generales de lo individual o de lo colectivo; se seleccionó a un estudiante como referente del aula de clase frente al nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele desde los descriptores propuestos para el desarrollo de las actividades didácticas que aproximen al estudiante al concepto del hexágono regular.

3.3 Contexto y Participantes

La población objeto de intervención estuvo conformada por los estudiantes del grado séptimo de educación básica de la Institución Educativa Limbania Velasco de carácter pública y mixta, sede única que ofrece los niveles de preescolar, básica primaria y secundaria; el grado séptimo está conformado por tres grupos de 38, 37, 38 estudiantes respectivamente, con edades entre 11 y 13 años, son de población afro descendiente, indígenas, mestizos de estrato socio económico uno y dos.

Dentro del aula de clase, la mayoría de estudiantes son participativos y respetuosos con el docente y sus compañeros de clase. El desarrollo de la secuencia didáctica se efectuó en la asignatura de geometría, clase que consta de cincuenta y cinco minutos un día a la semana, de los tres cursos en donde se efectuó la intervención, se selecciona una estudiante del grado siete dos por ser una estudiante bastante receptiva, disciplinada, con un fuerte deseo de aprender; con ella se efectuó el análisis y evaluación de los descriptores propuestos en el primer nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele.

Para efectuar la intervención se recurrió a diferentes fuentes de información, una prueba diagnóstica efectuada en el primer periodo del año escolar sobre los conocimientos de figuras planas, información necesaria con la que el docente logró dar inicio a una actividad didáctica pertinente que facilitó a los estudiantes reflexionar sobre su labor académica y de igual forma les posibilitó mejores niveles de razonamiento geométrico; y al docente lo facultó para guiar el plan de mejoramiento diseñado desde el marco del modelo de Van Hiele, por medio de la observación directa de la clase, el docente pudo entender cómo los estudiantes interpretaron y comunicaron el desarrollo de sus tareas escolares; la última fuente para obtener información fueron las justificaciones escritas frente a algunas actividades realizadas por los estudiantes, con el propósito de identificar la apropiación del lenguaje geométrico que se fue incrementando en el desarrollo de cada una de las clases.

La confrontación de cada una de estas fuentes de información y la ejecución de una prueba escrita final, permitieron caracterizar la estudiante según los descriptores propuestos frente al nivel uno razonamiento o visualización razonamiento de esta intervención, siguiendo los parámetros del modelo de Van Hiele.

3.4 Análisis de la Información

Se inicia con un diagnóstico realizado a los estudiantes del grado séptimo, el cual fue analizado y verificado con los descriptores del nivel de razonamiento uno propuestos por esta intervención al lado de ello con la transcripción efectuada de los datos, de la experimentación piloto y focalizado el estudio de caso se diseñaron las diferentes actividades de la secuencia didáctica, donde el estudiante respondió preguntas que partían desde lo intuitivo y lo visual, y logró justificaciones de lo aprendido frente al objeto de estudio. Todos los datos obtenidos fueron analizados de forma cualitativa porque se evidenció el proceso en el avance del nivel de razonamiento geométrico, identificando errores y aciertos que surgieron en el transcurso de la solución a las preguntas efectuadas; es importante resaltar que con la confrontación de las fuentes de información se logró comprender y constatar la realidad del salón de clase.

3.5 Camino Metodológico

- El trabajo realizado en esta intervención se efectuó de forma secuencial; inicialmente se elaboró un listado de preguntas sobre los conocimientos previos de los estudiantes que posteriormente fueron revaluadas para una mejor aproximación al objeto de estudio; diagnostico que permitió comprobar que los estudiantes se encontraron en el nivel uno del modelo de Van Hiele con muchas deficiencias conceptuales y procedimentales.
- Se diseñó una secuencia didáctica que inició con la fase de información, los datos obtenidos del diagnóstico previo; se seleccionó una estudiante como caso de análisis, la cual posibilitó llevar a la práctica la teoría del modelo de Van Hiele y la importancia de la conceptualización del hexágono regular, para lograr esto se trabajó inicialmente con el diagnóstico el cual evidenció el mayor número de dificultades en los conceptos previos, en el manejo de los instrumentos de medida como: el transportador y la regla lineal, así como el empleo incorrecto del leguaje geométrico y con esas dificultades hacer el acercamiento al desarrollo de la secuencia didáctica, en donde la comunicación verbal es un factor relevante; de igual forma Van Hiele (1954) afirma que el lenguaje, especialmente el oral, en los primeros niveles de razonamiento es un factor importante que evidencia si una persona ha logrado avanzar en el nivel o trascender a un segundo nivel del razonamiento geométrico.

- Finalmente se diseñó e implementó una prueba que posibilitó dar cuenta del proceso de aprendizaje en el cual se confrontaron los descriptores propuestos para el primer nivel de razonamiento geométrico, logrando caracterizar la información y describir el acercamiento al concepto de hexágono regular.

3.6 Fuentes de Información

Como fuente de recolección de la información se utilizaron la prueba diagnóstica, la secuencia didáctica y la prueba final.

3.7 Prueba Diagnóstica

Se realizó una prueba diagnóstica con la intención de lograr una primera caracterización y observar posibles cambios en los niveles de razonamiento de los estudiantes desde la teoría de Van Hiele, que permitió saber cómo relacionaban las figuras planas en particular el hexágono regular y sus propiedades; así mismo, se tomaron decisiones en el proceso de enseñanza aplicado al estudio de caso.

Al respecto conviene decir que el diagnóstico tuvo como propósito identificar en los estudiantes el reconocimiento de elementos que conforman el objeto de estudio de esta intervención.

3.8 Observación

Uno de los métodos que se utilizó de forma permanente antes, durante y después de las actividades de la secuencia didáctica, es la observación, dado que le permite al observador reconocer directamente los datos y los registros que fortalecen una descripción relativamente incuestionable (Stake, 1999); llevando entonces al observador a tener una posición libre de juicios así como de estar expectante a nuevos hechos que le permitan generar estrategias didácticas, y con ello guiar y facilitar el proceso de aprendizaje.

El proceso de observación posibilitó evaluar constantemente las actividades para tomar decisiones frente a las tareas seleccionadas que potencializaron la conceptualización de hexágono regular, lo cual permitió destacar en los estudiantes la utilización de sus conocimientos previos y el material concreto en procura de familiarizarse con una nueva red de cocimientos, se logró observar desde el plegado del papel como identificaron inicialmente los elementos que conforman un ángulo, aunque no lograban clasificarlos por las propiedades de sus medidas, en un segundo momento con la experimentación del uso del transportador, diferenciaron medidas de ángulos agudos y obtusos haciendo explícita su construcción en polígonos regulares. Se observa que los estudiantes en sus construcciones comprenden como al trazar una diagonal desde un mismo vértice forman triángulos al interior de la figura descubriendo la propiedad de suma interna de ángulos en un triángulo; luego se estableció con la colaboración del docente como denotar un polígono con una letra (n); se les motivo para que dibujaran un hexágono con sus lados iguales, lo que genero un debate donde se observó el empleo adecuado de algunos términos geométricos y del cual concluyeron que al dividir la circunferencia entre n=6, los lados del hexágono quedarían con igual longitud, dado el momento se propone encontrar el número de triángulos internos de un de un polígono regular se observó, en sus dibujos una justificación insipiente para el logro de un algoritmo. Por medio de la observación se evidenció que a los estudiantes les gusta prender haciendo lo cual motivo, a un cambio de actitud frente al desarrollo de las clases de geometría en beneficio de su aprendizaje.

3.9 Secuencia Didáctica

La secuencia didáctica fue la fuente de información permanente que permitió abordar el primer nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele, en donde cada tarea le posibilitó al docente utilizar los conocimientos previos de los estudiantes para guiar el plan de actividades en beneficio de un nivel de razonamiento más consolidado, que potencializó una forma de razonar diferente. Sobre el objeto de estudio se debe enfatizar aquí que la secuencia didáctica persiguió el cumplimiento de unos descriptores propuestos con anterioridad para el nivel uno, apoyándose en diferentes tareas y tomando algunas de ellas como el eje principal para adquirir la comprensión del objeto de estudio.

3.10 Prueba Final

La prueba final permitió conocer si el estudiante asimiló todos los contenidos que conforman el objeto de estudio, además de identificar si el desarrollo de las estrategias fueron pertinentes para el nivel de razonamiento geométrico, identificado y valorado a la luz de los referentes teóricos seleccionados, reconocer desde el lenguaje como indicador que evidencia el avance de la adquisición del conocimiento de los elementos geométricos que conforman el hexágono regular.

3.11 Implementación

Prueba Diagnóstica:

Para la ejecución de la prueba diagnóstica con los estudiantes del grado séptimo se efectuó en las horas de clase de geometría que consta de 55 minutos, prueba que fue desarrollada de forma individual; en el registro escrito de los estudiantes se logró observar que la mayoría no recuerdan los elementos que conforman un ángulo, además de no recordar su unidad de medida (grados sexagesimales).

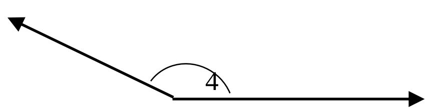
Con respecto a los nombres de los polígonos regulares, no logran identificar el nombre de ellos por la cantidad de lados; cuando los lados de las figuras son de forma irregular con relación a los elementos que contiene una figura plana, solo lograron identificar la parte exterior de la misma, regularmente los más nombrados son el cuadrado y el triángulo, muy pocos identificaron el dibujo del hexágono.

Con relación a las respuestas, no tienen un conocimiento claro que los ángulos, además de tener una parte que lo conforman, también tienen nombres que los diferencian por el tamaño de su medida angular; no usan la información que visualizan para caracterizar elementos geométricos que les permita concluir que un polígono regular tiene como base lados y ángulos iguales, entre otros aspectos.

Nombre: ángulo

Partes: dos

Medida: 40



En la respuesta de algunos estudiantes se evidenció que no especificaron los nombres de los ángulos, además de dar una medición incorrecta del ángulo.

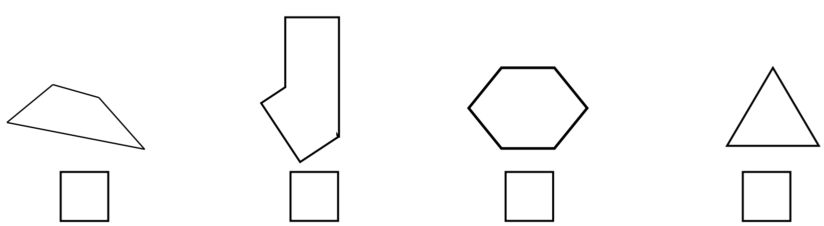


Figura 2. Medición de los ángulos

Fuente: Elaboración propia.

La dificultad para definir los polígonos se evidenció en muchos de los estudiantes, expresando de manera general o incorrecta sus justificaciones; no identificaban, que todos los dibujos de figuras geométricas son polígonos independientes de su forma evocan la clase de geometría, pero no indica el nombre apropiado para la pregunta.

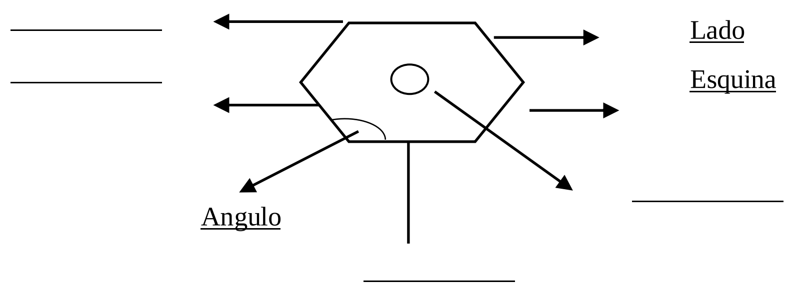


Figura 3. Definición de polígonos

Fuente: Elaboración propia.

Lograron identificar algunos elementos, entre ellos los lados y el ángulo cuando está demarcado o resaltado en la figura; sin embargo, hay dificultades al expresar los elementos internos como la diagonal y la apotema, el vértice, ángulo central, siendo información que se debe apreciar desde la visualización como elementos que existen en las figuras geométricas, e importantes para el desarrollo de un problema geométrico.

3.12 Secuencia Didáctica

La aplicación de la secuencia didáctica se diseñó para ser efectuada en un periodo escolar, sin embargo, por las actividades adicionales que se debieron agregar, se demoró en ser desarrollada, intensificando la hora de 55 minutos de clase a dos horas para poder cumplir con las actividades diseñadas, puesto que muchas de ellas debían ser implementadas con la orientación del docente con el propósito de contribuir a institucionalizar algunos conocimientos desde el aula de clase.

Algunas actividades que se implementaron desde diferentes fases ayudaron a la descripción específica y al acercamiento del hexágono regular como objeto de estudio.

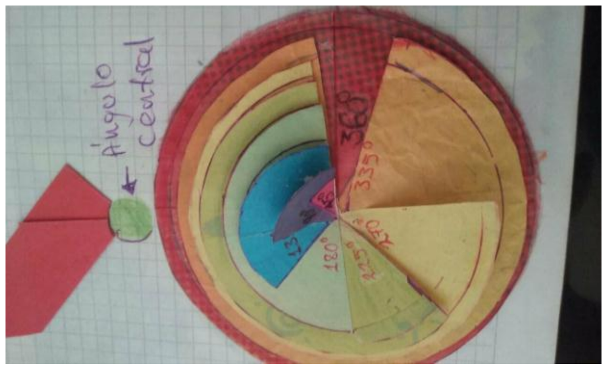


Figura 4. Descripción del hexágono regular

Fuente: Elaboración propia.

Esta actividad retoma todos los elementos que conforman un ángulo, el nombre del ángulo cuando es menor y mayor de noventa grados (agudo, obtuso), así mismo el giro que se presentó en el centro de la figura y el empleo de la herramienta para medir ángulos (transportador).

1. Escribe que puedes evidenciar en las siguientes figuras:

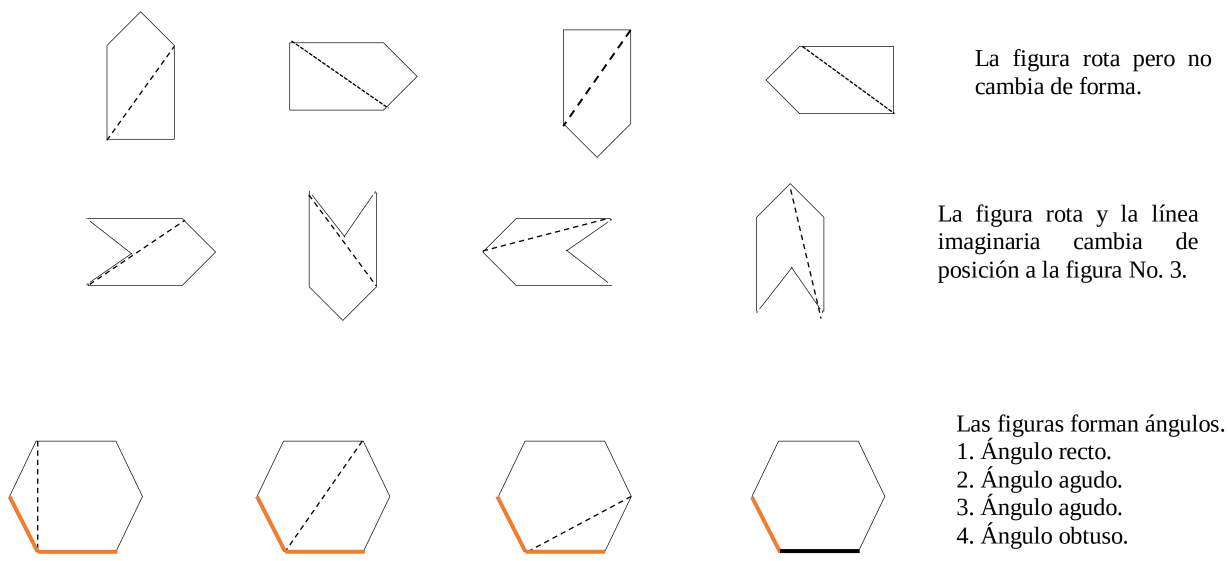
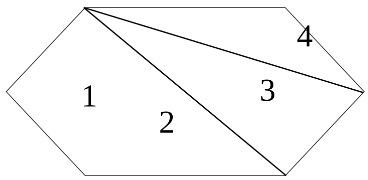


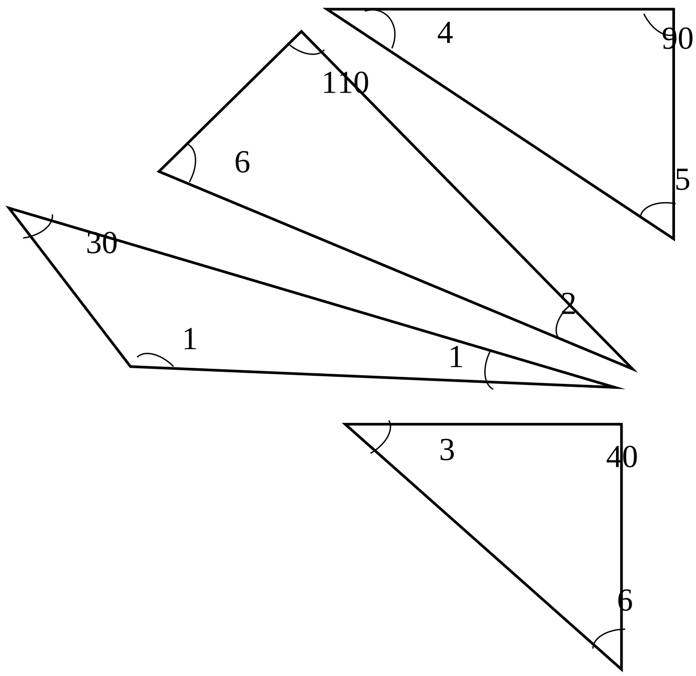
Figura 5. Actividad 1

Fuente: Elaboración propia.

Esta actividad tuvo el propósito de identificar la diagonal como un elemento que, en los polígonos regulares, se encuentran dentro de ella desde un vértice a otro no consecutivo, actividad realizada en grupos en donde el grupo de la estudiante seleccionada observan a la diagonal como un ángulo en movimiento dentro del hexágono.



La figura muestra como al trazar una diagonal desde un mismo vértice, la figura inicial queda dividida en cuatro triángulos permitiendo recordar que la suma interna de ángulos de todo triangulo es de 180° facilitando hallar la suma total de los ángulos del hexágono regular dibujado.



30° + 140° + 10° = 180°

Figura 6. Actividad 2

Fuente: Elaboración propia.

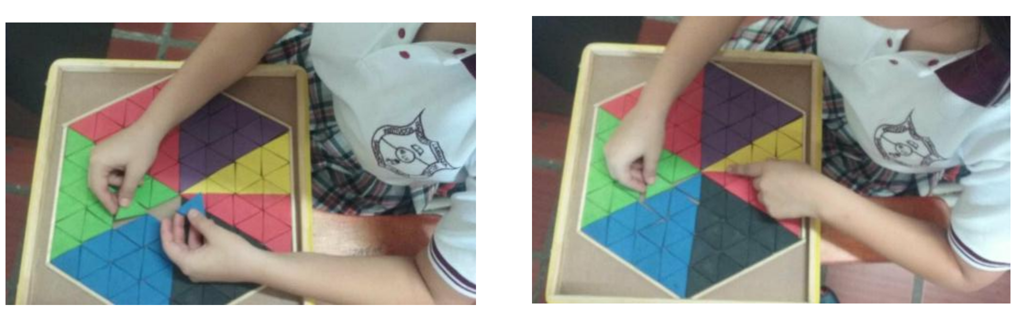


Figura 7. Uso del material de apoyo

Fuente: Elaboración propia.

La elaboración de un hexágono regular, donde el estudiante logró visualizar, palpar y medir lo expuesto en todas las actividades de la secuencia didáctica, permitió hacer el recorrido de todo el proceso de redes de conocimientos que robustecen el concepto de hexágono regular.

La siguiente actividad tuvo como propósito hacer uso del transportador para seccionar en partes iguales la circunferencia y dibujar polígonos regulares, con esta actividad los estudiantes diseñaron diferentes polígonos donde lograron evidenciar que este proceso permite trazar lados de igual longitud en una figura geométrica regular.

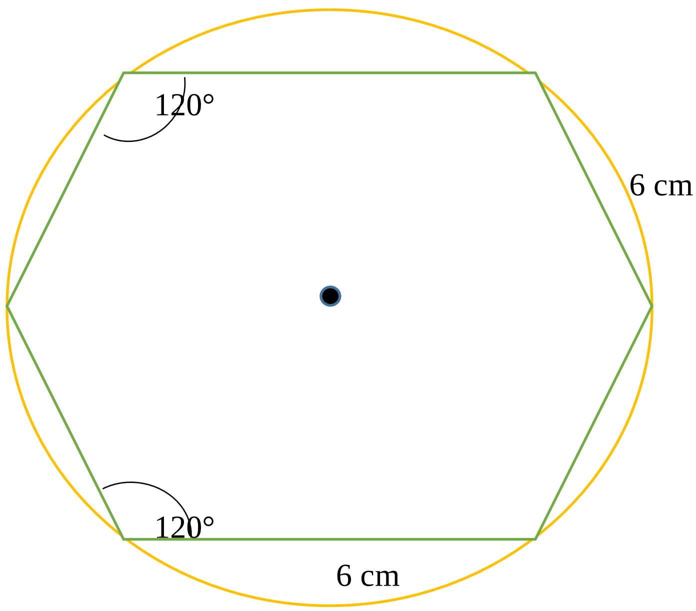


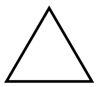
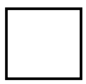
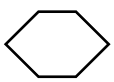
Figura 8. Actividad pregunta # 6

Fuente: Elaboración propia.

En la pregunta número 6 logró hacer la suma haciendo la división interna de triángulos en cada uno de los polígonos regulares.

1. Interpreta y completa los datos que faltan.

Tabla 2. Interpreta y completa los datos que faltan

Forma	Lados	Suma de ángulos internos	Valor de cada ángulo
	3	180°	60°
	4	360°	90°
	6	720°	120°
	.		
	.		
	.		
	.		
	N		

Fuente: Elaboración propia.

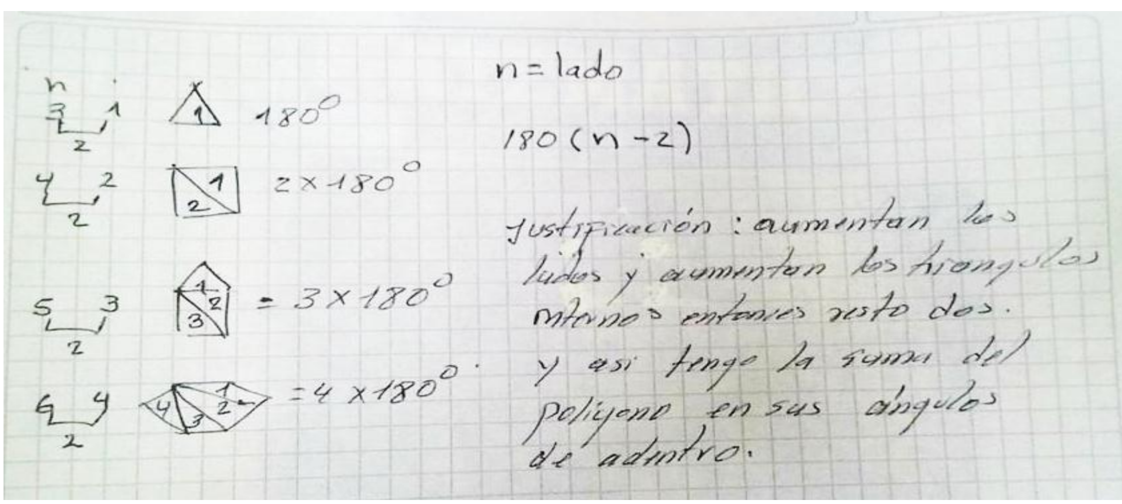


Figura 9. Respuesta pregunta # 7

Fuente: Elaboración propia.

Con relación a la pregunta número siete, esbozó la relación de triángulos internos con los lados del polígono quedando muy cerca de generar el algoritmo que permite calcular la suma interna de un polígono regular.

3.13 Evaluación Final

Este trabajo da un aporte a los procesos de aprendizaje desde el hexágono regular, teniendo en cuenta los niveles de razonamiento geométrico identificados en el modelo de Van Hiele, considerando los elementos utilizados por una estudiante al momento de desarrollar una prueba final después de haber realizado una secuencia didáctica.

Para conseguir este propósito se consideró analizar el resultado de una estudiante para limitar la aplicabilidad del modelo geométrico en cuestión y así lograr un análisis riguroso del en la comprensión del objeto de estudio.

Para la caracterización del nivel de razonamiento frente a las respuestas dadas por la estudiante se consideró una serie de actividades que fueron confrontadas con los descriptores propuestos en el capítulo II.

Actividad 1

En el análisis de la actividad uno se encontró que la estudiante selecciona adecuadamente la definición de polígono regular haciendo uso de la observación y justificando que, para que sea un polígono regular, el dibujo de la figura geométrica debe estar cerrado y debe tener sus lados con la igual medida.

Se identificó en su respuesta un razonamiento que se relaciona con el descriptor 1; 2, dado que reconoció a un polígono regular como un todo basándose en la apariencia y refiriéndose en termino de figura geométrica cerrada y de lados iguales.

Actividad 2

En su producción la estudiante planteó: “me di cuenta de que en los triángulos (se refiere al triangulo dibujado en la pregunta) no se pueden trazar diagonales porque al dibujar queda sobre el lado del triángulo”. En este caso se le asignó el descriptor 8; 9 porque logra comparar el significado de diagonal dentro de una figura plana.

Actividad 4 y 5

En el desarrollo de estas dos actividades se presentó un avance en el razonamiento uno, porque la estudiante explicó como al trazar las diagonales desde un vértice se originan diferentes clases de triángulos al interior del hexágono regular, y observó que al efectuar la suma de los ángulos internos de dichos triángulos siempre es igual a 180 grados. Todo lo anterior permitió afirmar que la estudiante logró identificar relaciones entre figuras geométricas, lo que permitió asignarle el descriptor 11 en la primera parte y el descriptor 12 en la parte final de las dos actividades.

Actividad 6

En la revisión de la actividad número seis se encontró como la estudiante identificó que la suma total de los ángulos internos de un polígono regular se puede obtener al multiplicar la cantidad de triángulos formados por 180 grados, de igual forma justificó cómo encontrar el valor de cada ángulo del polígono regular asignado. Expresó, que al conocer la suma total de los ángulos internos se puede dividir por el número de lados del polígono regular que se quiera elegir, logrando acercarse al planteamiento de un algoritmo. Este razonamiento está representado en el descriptor 15 la estudiante reconoce las características y establece las relaciones que se cumplen entre polígonos regulares.

Actividad 7

En esta actividad se hizo uso del material concreto (rompecabezas hexagonal) como producto final, sobre el cual la estudiante debió extraer la información que le permitió comprender que en una figura geométrica hay una red de conocimientos que se complementan, se asigna el descriptor 14 porque la estudiante logró identificar, analizar, experimentar y manipular los elementos geométricos que hacen parte del hexágono regular.

3.14 Evaluación

3.14.1.1 Evaluación Prueba Diagnóstica por favor revisar el tiempo verbal

Con relación a la prueba diagnóstica y elegida la estudiante se evidenció que ha olvidado y no reconoce los nombres de los elementos geométricos como: lado inicial, lado final, vértice, medición de ángulos en grados sexagesimales, de igual forma hace uso inadecuado de la regla lineal cuando mide los lados de un polígono, cambia nombres de términos como el de lado por el de ángulo; lo que indica y siguiendo los descriptores propuestos con la teoría de Van Hiele y los de esta propuesta la estudiante se encuentra en un nivel 1 de razonamiento puesto que encuentra muchas dificultades frente al objeto de estudio.

3.15 Análisis de la Prueba Final

Para este proceso se definieron los contenidos de la secuencia didáctica y los de la prueba final unidos a los descriptores que permitieron caracterizar los elementos del nivel de visualización de Van Hiele, previendo que las tareas como las actividades posibilitaron la aproximación al concepto de hexágono regular.

En el proceso de este trabajo se evidenció que la estudiante en sus primeros acercamientos al objeto de estudio desconocía algunos conceptos geométricos, sintiéndose insegura al momento de efectuar las tareas propuestas en la secuencia didáctica pero a medida que fue implementada se obtuvo buenos resultados, logrando significativamente avances en su nivel de razonamiento geométrico.

En cuanto a la evaluación del nivel de razonamiento de la estudiante se observó: en la actividad 1 y 2 de la prueba final el reconocimiento global, de los elementos que conforman un polígono regular en la actividad 3, 4 y 5 la identificación de nuevos elementos geométricos, en la actividad 6 valida y relaciona propiedades, en la actividad 7 uso de definiciones en busca del desarrollo de un algoritmo.

La forma de razonar de la estudiante indica que con las actividades adecuadas, logró desarrollar habilidades propias del nivel de visualización y estar en transición a un nivel dos de razonamiento frente al objeto de estudio.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES FINALES

4.1 Conclusiones

Los niveles de Van Hiele, la implementación y ejecución de la secuencia didáctica; así como el diagnóstico frente al objeto de estudio permitió el logro de los objetivos propuestos para este trabajo de intervención.

- Se logró planear y ejecutar una serie de actividades ligadas en forma de secuencia didáctica con el propósito de mejorar el nivel de razonamiento en el concepto de hexágono regular en los estudiantes del grado séptimo, teniendo en cuenta el estudio de caso en la Institución Educativa Limbania Velasco de Santander de Quilichao.
- Las actividades propuestas desde la secuencia didáctica tuvieron el propósito de permitirle al estudiante ir avanzando desde los conocimientos más elementales o conocimientos previos hacia procesos más estructurados que les permitió relacionar unos con otros; avanzando desde lo informal a lo algorítmico, lo que ejemplificará entonces la obtención o preparación para trascender al siguiente nivel de razonamiento.
- El uso del recorte, plegado y elaboración de rompecabezas hexagonal, el uso del transportador, así como de la percepción visual permitieron que los estudiantes tuvieran otros elementos que les facilitaran apropiarse de un lenguaje adecuado que con cada una de las actividades desarrolladas fue adquiriendo un mejor refinamiento.
- Con los descriptores propuestos para esta intervención y tomando como referente los sugeridos por la teoría de Van Hiele, se caracterizó el estudio de caso en la consecución del nivel uno, puesto que se logró vincular no solo los elementos principales de un polígono regular, sino que se logró relacionar otras figuras y elementos que pueden estar inscritos en el objeto de estudio en cuestión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acevedo. G., Londoño. Y., & Ramírez. G., (2008). *Geogebra como el soporte en el proceso de construcción del ángulo. Tesis. Licenciados Educación Básica.* Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

Álvarez, A., C. & San Fabián, M. (2012). La elección del estudio de caso en investigación educativa. *Gazeta de Antropología, 28 (1)*.

Arboleda, A. (2011). *Desarrollo del Pensamiento Espacial y sistema geometría en el aprendizaje de los sólidos regulares mediante el modelo de Van Hiele, con estudiantes de 6° grado del Colegio San José de la Comunidad Marista. Tesis.*

Arboleda, J. (2005). *Modelos Pedagógicos Autónomos, Elementos para la Construcción Fortalecimiento o Flexibilización. Tesis.* Popayán, Colombia: Universidad Autónoma del Cauca.

Báez, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la U.P.E.L. *Enseñanza de la Matemática Vol. 12*.

Barrantes, M. & Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la Geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias, 22(2)*, 241-250.

Barrio del C., I., González J., J., Padín M., L., Peral S., P., Sánchez M., I. & Tarín L., E. (2010). *El estudio de casos* . Madrid, España: Univresidad Autónoma de Madrid.

Bedoya, Y., Esteban, D. & Vasco A., E.D. (2007). Fases de aprendizaje del Modelo educativo de Van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local. *Lecturas Matemáticas. Vol. 28*, 77-95.

Calderón, W. & Peñuela, S. . (2013). *Propuesta Metodológica para la Enseñanza de las Secciones Cónicas.* Tesis. Bogotá: Universidad de los Andes.

Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la Didáctica de la Geometría. *Revista Colombiana de Educación No. 60. Bogotá, Colombia*, 41 - 60.

Consejo Nacional de Profesores de Matemática [NCTM]. (2003). *Principios para la Acción. Resumen ejecutivo.* Obtenido de NCTM: https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Principles_to_Actions/PtAExecutiveSummary_Spanish.pdf

Díaz, A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica.* México: Universidad Nacional Autónoma de México. No hay cita de este autor

Escudero, J. (1981). *Modelos Didácticos.* Barcelona.

Fernández, T. (2013). *La investigación en visualización espacial pasado, presente y futuro Universidad de Santiago de Compostela.* España.

Fouz, F. & De Donosti, D. (2013). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. *Un paseo para la geometría*, 67-81.

Freire, P. (2006). *Pedagogía de la Autonomía: saberes necesarios para la práctica educativa.* Caracas, Venezuela: Siglo XXI.

Gamboa, R. & Ballesteros, E. (2009). Algunas reflexiones sobre didáctica de la geometría. . *4 (5), 113-136*, 113 - 136.

García P., S. & López E., L. (2008). *La enseñanza de la Geometría.* Obtenido de https://www.oei.es/historico/pdf2/ensenanza-geometria-mexico.pdf

Godino, J. & Ruiz, F. (2002). *Geometría y su Didáctica para Maestros.* España: Facultad de Ciencias de Educación Universidad de Granada. .

Gómez, D. . (2015). *Diseño de una unidad didáctica para la enseñanza de los conceptos básicos de la geometría con énfasis en el perímetro y área en el grado quinto de la Institución Educativa Fe y Alegría.* Tesis. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Goncalves, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Revista Ciencias de la Educación. Valencia, España. Año 6, Vol. 1, N°27, pp. 83-98.*

Gutiérrez, A. (1998). Tendencias actuales de investigación en Geometría y visualización. *Universidad de Valencia 2 (2)*, 1-9.

Instituto Colombiano de la Evaluación de la Educación [ICFES]. (6 de septiembre de 2016). *Divulgación 2016 de Saber 3, 5 y 9.* Obtenido de ICFES: http://www.icfes.gov.co/divulgaciones-establecimientos/saber-3-5-y-9

Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1990). Análisis sobre las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y Fortuny como guía en el proceso de ejecución de las fases de aprendizaje. En L. y. (coords)., *Teoría y práctica en Educación matemática.* Sevilla: Alfar.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] & Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [ICFES]. (2015). *Resumen ejecutivo: Colombia en Pisa 2015*. Bogotá: MEN. ICFES.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN] . (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* . Bogotá: MEN.

Mosquera L., S. (s.f.). El teorema de Pappus en la adición y la multiplicación. En U. d. Andes (Ed.), *Memorias XVIII encuentro de geometría y VI de aritmética*, (págs. 223-229). Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/5583/1/MosqueraElteoremaGeometr%C3%ADa2008.PDF

Piedrahita, W. (2007). Geometría y Desarrollo Humano. *Educación Hoy Confederación Interamericana de Educación*, pp. 67-82.

Samper, H. & Leguizamón, C. (2003). *Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría*. Bogotá: Asociación Colombiana de Matemáticas.

Samper, C. & Leguizamón, C. (2001). Razonamiento en Geometría. *Revista EMA. Vol. 6, No. 2*, 141-158.

Soler F., E. (1992). *La educación infantil en la escuela infantil*. España: Ediciones Rialp.

Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 10, núm. 2, julio*, 275-300.

Van, H. & Pierre, M. (1957). *El Problema de la Comprensión en Conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tesis doctoral* . Holanda: Universidad Real de Ultrech.

Vargas, V., G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *UNICIENCIA Vol. 27, No. 1, [74-94]. Enero – junio* .

ANEXOS

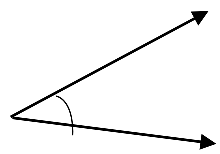
Anexo A. Formato de evaluación

1. Identifica las partes que conforman un ángulo, mídelo, clasifícalo por su medida

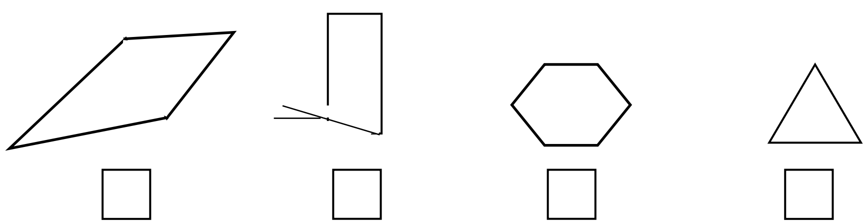
Partes:

Medida:

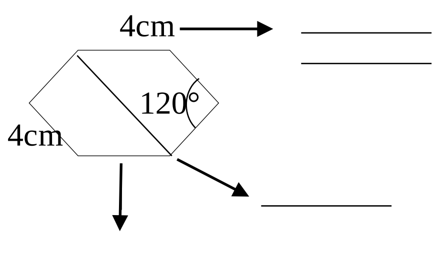
Clasificación:



2. Identifica en las siguientes figuras, cuales son polígonos regulares. Escribe su nombre.



3. En la siguiente figura, identifica características.



1. ____________
2. ____________
3. ____________
4. ____________

Anexo B. Diseño de la secuencia didáctica

Sección uno

Nivel visualización

Fase información

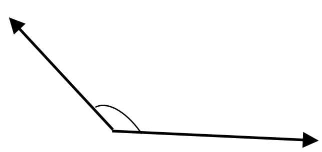
Diagnóstico

Objetivos:

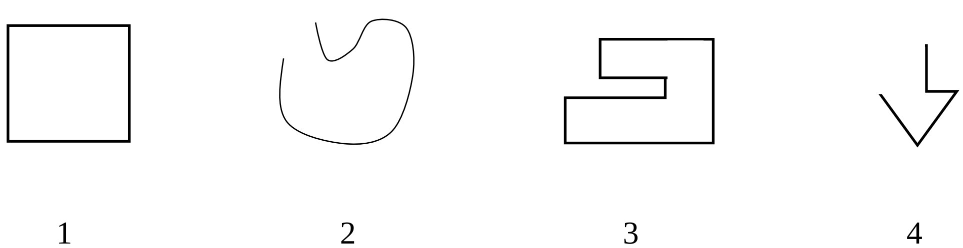
- Reconoce que un polígono lo conforman segmentos de líneas consecutivas cerradas.
- Reconoce los segmentos de una figura plana como sus lados.
- Reconoce que el punto común de los lados consecutivos se llaman vértices.

Sección Uno

1. Observa la siguiente figura, indica que elemento geométrico es y qué partes lo conforman.

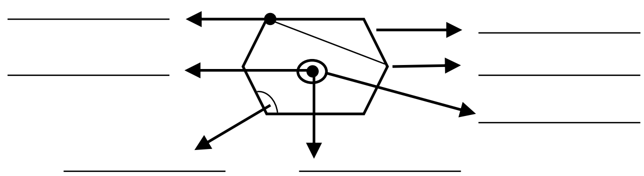


2. Observa las siguientes figuras y justifica si son polígonos.

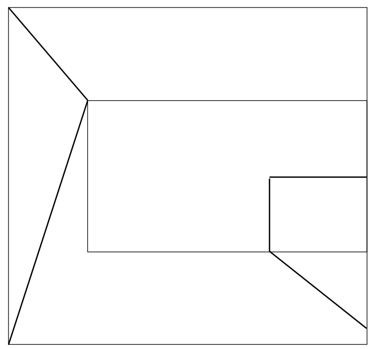


1 2 3 4

3. Escribe en el siguiente polígono los nombres que lo conforman.



4. Recorta las siguientes figuras:

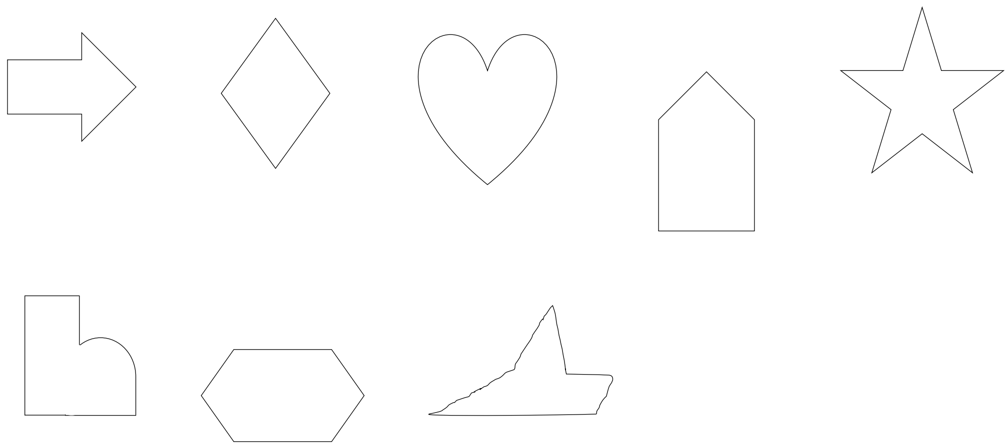


1. La figura 2: dibuja en el plano de coordenadas. Identifica sus vértices con las letras A, B, C, D, E, F.

2. La figura 3: asígnale una letra diferente a cada vértice, luego nombra cada lado desde la letra en posición inicial a la posición final.

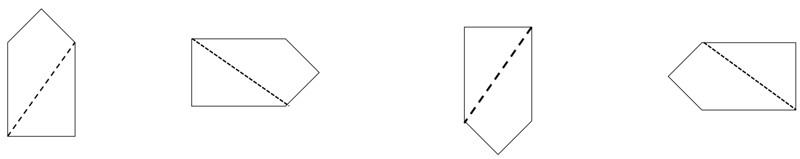
3. Escribe el nombre de la figura número cuatro y cinco.

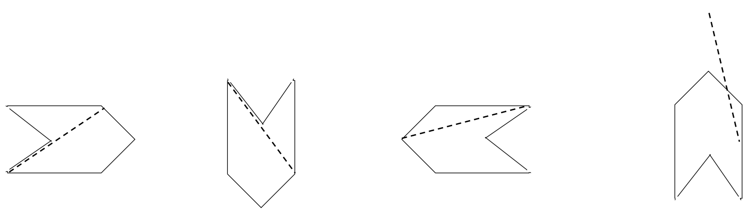
4. En las siguientes figuras pinta de color rojo dos lados; de azul dos lados.

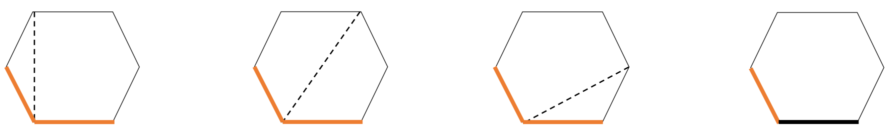


1. Dibuja en los espacios en blanco figuras diferentes de 6 lados.

2. Escribe que puedes evidenciar en las siguientes figuras:







Las anteriores actividades buscaran identificar los saberes previos sobe las figuras planas, además de incentivar la expectativa y el cuestionamiento frene al objeto de estudio.

Sección Dos

Fase de Orientación Dirigida

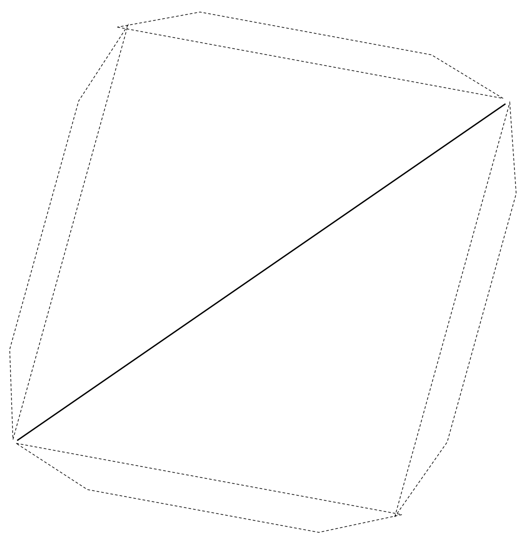
Objetivos:

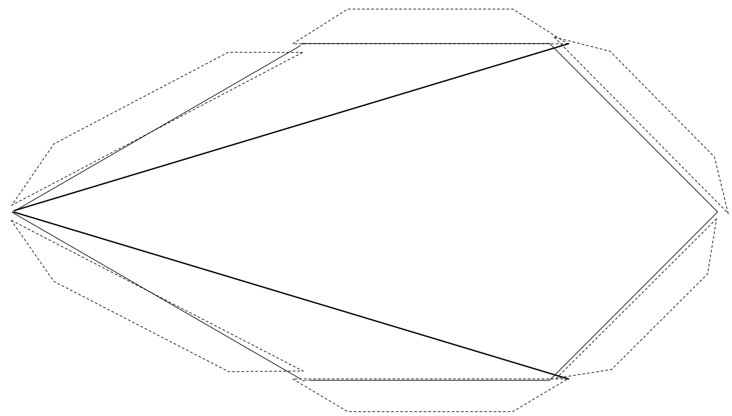
- Reconoce en una figura plana, la asignación de lados, vértices, diagonal, clasificación de ángulos agudos, obtusos.
- Reconocer un polígono regular pro su número de lados.

Recorta ocho ángulos de diferente medida, ubícalas en el plano cartesiano, asígnale sus coordenadas, clasifícalos en agudos u obtusos, registra los datos en la siguiente tabla.

Ángulo	Vértice Coordenada	Lado inicial Coordenada	Lado final Coordenada	Longitud Lado inicial	Longitud Lado final

Recorta los siguientes polígonos y efectúa los pliegues indicados:





Escribe el polígono que representa la señal de tránsito.

______________ ______________

______________ ______________

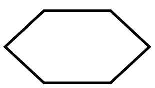
______________ ______________

________________ ________________

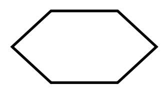
En el hexágono 1 pinta los ángulos internos y enumerados.

En el hexágono 2 traza las diagonales desde un vértice.

En el hexágono 3 traza todas las diagonales desde cada vértice.



1

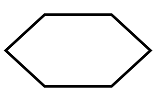


2

Numero de ángulos internos _____

Número de diagonales desde un vértice

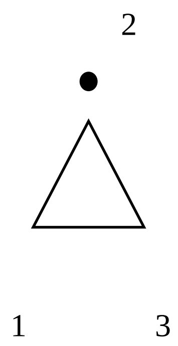
Número de lados _____



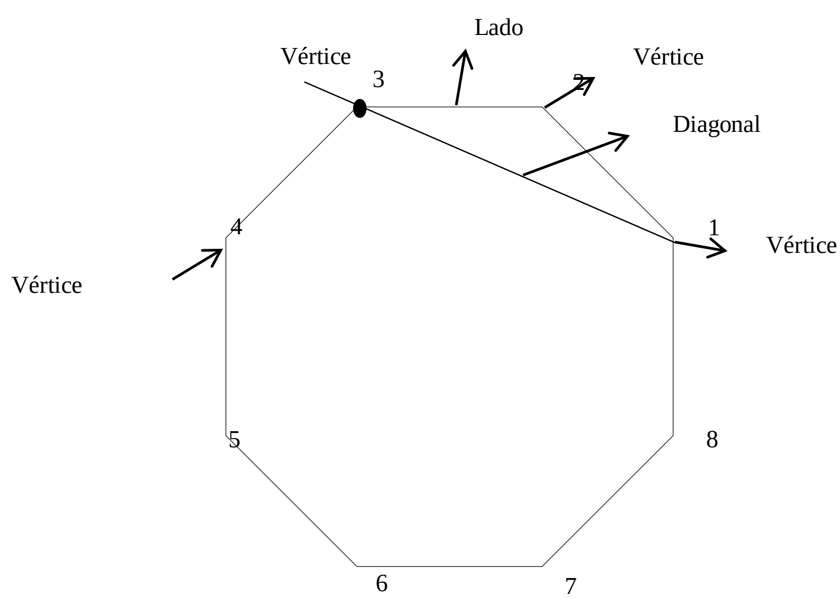
3

Número de diagonales desde todos los vértices del hexágono _____

En el siguiente, cuantas diagonales se pueden trazar al vértice 2. Justifica tu respuesta.



Observa la siguiente figura:



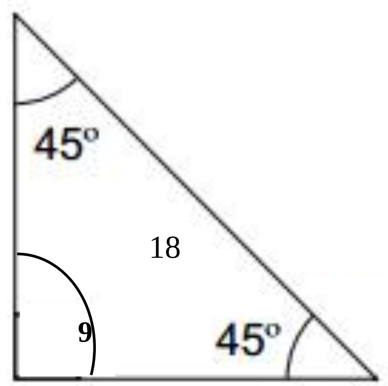
n = lados

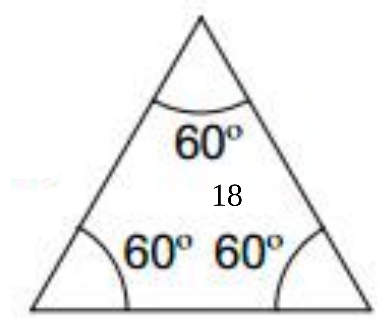
n = 8

¿Cuántas diagonales se traza en el vértice 1 desde él y hacia él?

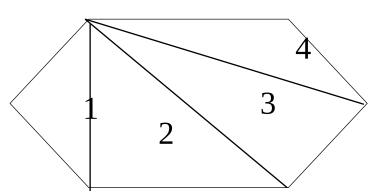
La expresión $n-3$ se puede emplear para obtener el número de diagonales de un polígono regular desde un vértice, compruébalo en tres polígonos regulares que prefieras, traza las diagonales, luego verifícalo con la expresión, comparte la respuesta con tu compañero.

Una característica de los triángulos es que la suma interna de sus ángulos es 180°.





a. Traza las diagonales desde un mismo vértice en el hexágono y pinta de diferentes colores casa uno de los 4 triángulos que formaron al interior de él.



b. recorta los triángulos y mide cada uno de sus ángulos.

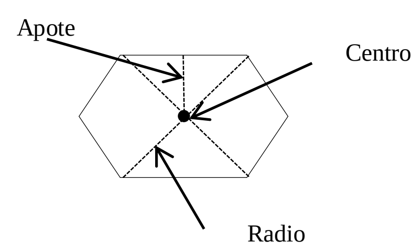
c. Clasifica los anteriores triángulos por sus lados: equilátero, isósceles, escaleno; por sus ángulos: acutángulo, rectángulo, obtusángulo.

d. Si se desea saber cuál es la suma total de los ángulos internos de hexágono anterior, como darías tu respuesta. Justifique.

Determina si cada una de las proposiciones siguientes, es verdadera o es falsa. Justifica tu respuesta.

1. Todo polígono es regular cuando sus lados y ángulos anteriores son diferentes.
2. La suma interna de los ángulos del hexágono regular es igual 720° porque al multiplicar 90° por 8 se obtiene el valor total de los ángulos internos.
3. La suma interna de los triángulos equiláteros es igual a 180° porque dos de sus lados son congruentes.
4. El hexágono está conformado por seis triángulos equiláteros y la suma del ángulo central es 360° porque 60 por 6 es igual a 360°.

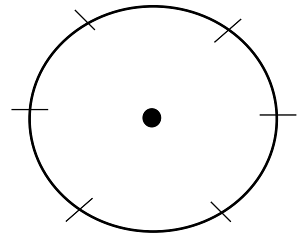
Los elementos de un polígono regular son centro; radio; apotema.



El centro: es un punto interior que equidista de cada vértice, es decir la distancia del centro a cualquiera de sus vértices es igual.

Sigue los siguientes pasos para diseñar un hexágono regular partiendo de los 360° que tiene la circunferencia.

El hexágono regular es igual a 6 lados.



La circunferencia 360°.

360° dividido 6 = 60°, mide 6 ángulos de 60° haciendo los cortes en la circunferencia.

A) Traza las líneas.
B) Mide cada lado.
C) Mide los ángulos internos del hexágono formado.
D) Traza todas las diagonales desde cada vértice.

Sección 3

Fase explicitación

- Utilizar y reconocer los elementos de los polígonos regulares con un lenguaje apropiado.

- Justificar y argumentar las respuestas de los elementos geométricos empleados.

Propiedad o característica	Clases de polígonos
1. Tiene todos los ángulos interiores de igual medida. 2. Tiene por lo menos un anglo de 180° 3. Tiene diagonales exteriores. 4. Tiene todos los lados de igual longitud. 5. Tiene solo diagonales interiores. 6. Tiene todos los lados de igual longitud y todos los ángulos de igual medida. 7. Todos sus ángulos interiores miden menos de 180°	a. Todos tienen esa propiedad. b. Polígono regular. c. Polígono irregular. d. Polígono cóncavo. e. Polígono convexo. f. Polígono equilátero. g. No existen polígonos con esa propiedad.

En el material de apoyo hexagonal, visualiza los triángulos que lo conforman. Encuentra diferencias en sus lados y en sus ángulos.

Dibújalas en tu cuaderno y toma las respectivas medidas.

Prueba Final

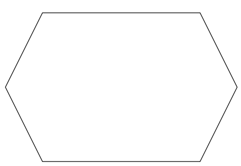
2. Observa las siguientes figuras. Selecciona una única respuesta.

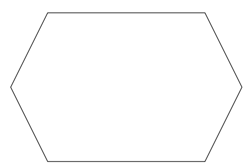
   Según las anteriores figuras, un polígono regular es:

   - Una figura plana abierta.
   - Una figura plana cerrada.
   - Una figura plana con segmentos.
   - Una figura plana cerrada con sus lados de igual longitud.

3.

4. En el siguiente hexágono número 1, pinta los ángulos internos y enuméralos; en el número 2 traza las diagonales desde un vértice; en el hexágono 3 traza todas las diagonales.

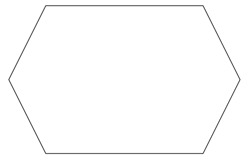




1

2

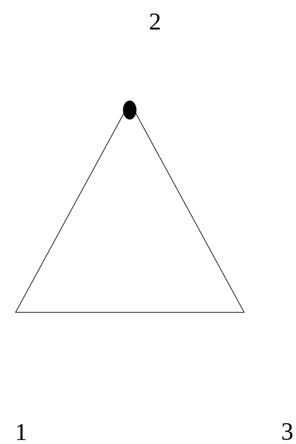
Numero de ángulos internos: ______ Numero de diagonales desde Número de lados: ______ un vértice _____



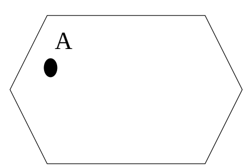
3

Numero de diagonales desde todos los vértices del hexágono: ______

5. En el siguiente polígono cuantas diagonales se pueden trazar al vértice 2.



6. Dibuja un hexágono regular de 4 cm de lado. Grafica 3. Triángulos desde un mismo vértice.

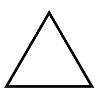
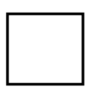
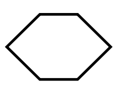


Designa con una letra mayúscula cada uno de los vértices que conforman los triángulos internos del hexágono.

7. Con la anterior figura completa el cuadro.

Nombre del triángulo	Valor de cada ángulo interno de cada triángulo	Suma de los tres ángulos internos de cada lado	Suma de los ángulos adyacentes de los triángulos formados
Suma total de ángulos internos de la figura No.			

8. Interpreta y completa los datos que faltan.

Forma	Lados	Suma de ángulos internos	Valor de cada ángulo
	3	180°	60°
	4	360°	90°
	6	720°	120°
	.		
	.		
	.		
	.		
	n		

9. ¿Puedes generar una fórmula para encontrar la suma interna de ángulos de un polígono regular?

1. Arma el rompecabezas hexagonal y mide los ángulos centrales del mismo.
2. ¿Cuánto mide el grito completo del ángulo central?
3. Mide los lados de los seis triángulos que se forman al interior del rompecabezas hexagonal, ¿Cómo son sus medidas?
4. ¿Qué clase de triángulos puedes visualizar en el interior del rompecabezas?
5. ¿Cuánto mide el contorno del hexágono regular que se forma? ¿Cuánto mide un lado del triángulo?
6. ¿Cuántos triángulos equiláteros se forman?
7. ¿Por qué está dividido un triángulo equilátero en dos? ¿Qué triángulo genera? ¿Cómo se llama esa línea y donde nace?