

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS PARA UN ROBOT BÍPEDO BASADAS  
EN CAPTURA DE MOVIMIENTO HUMANO



DIEGO ALBERTO BRAVO MONTENEGRO

Tesis de Doctorado en Ciencias de la Electrónica

Director:

Ph.D. Carlos Felipe Rengifo Rodas

Comisión Evaluadora:

Ph.D. Juan Manuel Ibarra Zannatha, CINVESTAV, México.

Ph.D. Alberto Luviano Juárez, Unidad Profesional Interdisciplinaria en  
Ingeniería y Tecnologías Avanzadas, IPN. México.

Ph.D. José Miguel Ramírez Scarpetta, Universidad del Valle, Colombia.

Ph.D. Germán Arturo Bacca Bastidas, Universidad del Cauca, Colombia.

Universidad del Cauca

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones  
Doctorado en Ciencias de la Electrónica. Área: Automática

Popayán, Agosto de 2016



DIEGO ALBERTO BRAVO MONTENEGRO

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS PARA UN ROBOT BÍPEDO  
BASADAS EN CAPTURA DE MOVIMIENTO HUMANO

Tesis presentada a la Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones de la  
Universidad del Cauca para la Obtención del Título de:

Doctor en Ciencias de la Electrónica

Director:

Ph.D. Carlos Felipe Rengifo Rodas

Popayán

2016



En memoria a mi mamá, Flor María Montenegro  
Guzmán, todo esto ha sido por y para ti.



# Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director, Ph.D. Carlos Felipe Rengifo Rodas por ser mi maestro, amigo y compartirme su conocimiento y tiempo para la culminación exitosa de este trabajo.

A mi familia, especialmente a mi amada esposa Laura Isabel, por toda su paciencia y apoyo en esta etapa de mi vida. A mis hijos: Daniel y Ana María por todo el tiempo robado.

A mis amigos, gracias por estar siempre dispuestos a escucharme y divertirme en ese lazo inquebrantable de complicidad.

A cada uno de mis profesores desde el kinder hasta el Doctorado, en ustedes sustento hoy mi formación profesional.





# Resumen

La locomoción bípeda es una característica natural del ser humano utilizada para desplazarse en su entorno. Sin embargo, para un robot bípedo es muy difícil imitar estos movimientos debido a las grandes diferencias cinemáticas y dinámicas entre ambos.

Por tal razón, en este trabajo de investigación se propone un método para adaptar las trayectorias de marcha de un ser humano a un robot bípedo. Para lograrlo, primero se realizaron experimentos con dos sistemas distintos de captura de movimiento para obtener las trayectorias articulares de la marcha humana. Después, se estudió la generación de patrones de marcha mediante dos enfoques: patrón de marcha basado en el modelo *cart-table* y por optimización. En este último enfoque se consideran dos vertientes. En el primero se hace la optimización de la norma euclidiana del torque. En el segundo, las trayectorias obtenidas mediante captura de movimiento sirven como entrada a un generador de trayectorias *off-line*, llamado *filtro dinámico* en el que se tienen en cuenta las restricciones cinemáticas y dinámicas necesarias para impedir que el robot caiga mientras camina.

Una vez se calculan las trayectorias de marcha estables para el robot, obtenidas por tres métodos: modelo *cart-table*, optimización de torques y el filtro dinámico, estas se compararon mediante dos índices de desempeño que evalúan el consumo energético de los actuadores del robot. El filtro presenta la ventaja de una menor carga computacional frente al método de optimización de torques, aunque éste es el que consume la menor cantidad de energía. Para validar las trayectorias se desarrolló al interior de la Universidad del Cauca un simulador para el robot Bioid Premium kit basado en el entorno V-Rep y después se implementaron sobre el robot real.

A pesar de que la generación de trayectorias se lleva a cabo fuera de línea, el filtro dinámico es una buena opción para generar trayectorias que permitan mantener la estabilidad del robot. En el corto plazo se espera implementar el filtro dinámico para la generación de trayectorias en línea, en un robot humanoide con dimensiones aproximadas a las de un ser humano.

**Palabras clave: Generación de Trayectorias, Robot Bípedo, Captura de Movimiento, Marcha Humana.**

# Abstract

Bipedal locomotion is a natural characteristic of human beings used to move in their environment. However, for a biped robot it is very difficult to imitate these movements due to large kinematic and dynamic differences.

For this reason, in this research work, we propose a method to adapt the gait trajectories of a human being to a biped robot. To achieve this goal, first we made an experiments with with two different motion capture systems to obtain the joint trajectories of human walking. Then, we studied gait generator patterns, using two approaches: gait generator pattern based on the cart-table model and optimization. In the latter approach considers two aspects. First, it makes optimization of the Euclidean norm of torque. In the second, the trajectories obtained by motion capture serve as input to a trajectory generator offline, called dynamic filter that takes into account the kinematic and dynamic constraints necessary to prevent the robot fall while walking.

Once stable motion trajectories are calculated for the robot, it was obtained by three methods: model cart-table, torques optimization and dynamic filter, these were compared with two performance index that assess the energy consumption of the actuators of the robot. The filter has the advantage of a lower computational load versus torque optimization method, although this is consuming the least amount of energy. To validate the trajectories, it developed within the Universidad del Cauca a simulator for the robot Bioloid Premium Kit based on the V-Rep environment. After, these were implemented on the real robot.

Even though the motion generation is done offline, the dynamics filter is a good option for making in automated way the trajectories generation. The next step will be to test the dynamics filter in other humanoid robots and try to implement an online dynamics filter.

**Keywords: Trajectory Generation, Biped Robot, Motion Capture, Human Gait**

# LISTA DE CONTENIDOS

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción General</b>	<b>1</b>
<b>1. Sistemas de Captura de Movimiento</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Clasificación de los Sistemas de Captura de Movimiento . . . . .	8
1.3. Diseño del experimento . . . . .	11
1.3.1. Modelo geométrico directo de la pierna . . . . .	14
1.4. Trayectorias articulares como un problema de optimización . . . . .	16
1.5. Resultados . . . . .	17
1.6. Conclusión . . . . .	20
<b>2. Modelado y Control de un Robot Bípedo</b>	<b>21</b>
2.1. Introducción . . . . .	21
2.2. Estructuras serie, arborescente y cerrada . . . . .	21
2.2.1. Estructura serie . . . . .	22
2.2.2. Estructura arborescente . . . . .	24

2.2.3. Estructura cerrada . . . . .	27
2.3. Cadenas Cinemáticas de Base Móvil . . . . .	28
2.4. Modelo Geométrico Directo . . . . .	29
2.5. Modelo cinemático directo de primer orden . . . . .	30
2.6. Modelo cinemático directo de segundo orden . . . . .	32
2.7. Modelo Dinámico del Robot . . . . .	34
2.7.1. Modelo de control para la fase de apoyo simple sobre el pie derecho	35
2.8. Resumen . . . . .	38
<b>3. Generación de Patrones de Marcha para un Bípedo</b>	<b>39</b>
3.1. Introducción . . . . .	39
3.2. Generador de patrón de marcha basado en ZMP . . . . .	39
3.2.1. Modelo <i>cart-table</i> . . . . .	40
3.2.2. Preview Control . . . . .	42
3.2.3. Trayectorias de la marcha . . . . .	44
3.3. Generador de patrón de marcha basado en Optimización . . . . .	48
3.3.1. Índice de desempeño y restricciones . . . . .	52
3.3.2. Trayectorias parametrizadas como una expansión de series de Fourier	55
3.3.3. Solución del problema de optimización . . . . .	56
3.4. Comparación de los Patrones de Marcha . . . . .	62
3.5. Resumen . . . . .	64

<b>4. Trayectorias a partir de captura de movimiento</b>	<b>71</b>
4.1. Introducción . . . . .	71
4.2. Filtro Dinámico . . . . .	71
4.2.1. Trayectorias de Referencia . . . . .	73
4.2.2. Optimizador . . . . .	74
4.3. Resumen . . . . .	80
<b>5. Pruebas y Resultados</b>	<b>87</b>
5.1. Introducción . . . . .	87
5.2. Herramientas de Simulación Dinámica . . . . .	88
5.3. Robot Humanoide Bioloid . . . . .	89
5.4. Simulación y Resultados Experimentales . . . . .	91
5.4.1. Patrón de Marcha basado en ZMP . . . . .	91
5.4.2. Patrón de Marcha basado en Optimización . . . . .	92
5.4.3. Filtro Dinámico . . . . .	93
5.5. Conclusión . . . . .	93
<b>Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>95</b>
<b>A. Descripción de la Marcha Humana</b>	<b>99</b>
A.1. El Ciclo de Marcha . . . . .	99
A.2. Cinemática de la Marcha Humana . . . . .	101
<b>B. Modelo Geométrico Inverso del Robot Bioloid</b>	<b>105</b>
B.1. Cinemática inversa de la pierna derecha . . . . .	105

B.2. Cinemática inversa de la pierna izquierda . . . . . 107

Bibliografía . . . . . 110

# LISTA DE FIGURAS

<b>1-1.</b> Clasificación de Sistemas de Captura de Movimiento . . . . .	8
<b>1-2.</b> Puesta de marcadores según el protocolo Helen Hayes. . . . .	12
<b>1-3.</b> Ubicación de ejes para cada articulación y el referente del sensor. . . . .	13
<b>1-4.</b> Trayectorias angulares pierna derecha. . . . .	18
<b>1-5.</b> Comparación de histogramas de la longitud del fémur . . . . .	19
<b>2-1.</b> Estructura cinemática serial. . . . .	22
<b>2-2.</b> Articulación rotoide. . . . .	22
<b>2-3.</b> Articulación prismática. . . . .	22
<b>2-4.</b> Estructura cinemática arborescente. . . . .	24
<b>2-5.</b> Sistema arborescente compuesto por un carro y dos péndulos con origen común. . . . .	25
<b>2-6.</b> Sistema arborescente compuesto por un carro y dos péndulos con origen diferente. . . . .	26
<b>2-7.</b> Estructura cinemática cerrada. . . . .	27
<b>2-8.</b> Modelo Geométrico del Robot Bioid . . . . .	28
<b>3-1.</b> Modelo <i>cart-table</i> . . . . .	40
<b>3-2.</b> Diagrama de fuerzas que la masa $M$ ejerce sobre la mesa. . . . .	41

<b>3-3.</b> Diagrama en bloques del <i>preview control</i> . . . . .	43
<b>3-4.</b> Diagrama en bloques del patrón de marcha basado en el modelo <i>cart-table</i> . . . . .	44
<b>3-5.</b> Trayectorias del ZMP y CoM. . . . .	47
<b>3-6.</b> Trayectorias cartesianas de la marcha, Pie Derecho. . . . .	48
<b>3-7.</b> Trayectorias cartesianas de la marcha, Pie Izquierdo. . . . .	49
<b>3-8.</b> Trayectorias articulares de la marcha, 1 <sup>era</sup> parte. . . . .	50
<b>3-9.</b> Trayectorias articulares de la marcha, 2 <sup>da</sup> parte. . . . .	51
<b>3-10.</b> Video. Simulación del ciclo de marcha de Bioloid . . . . .	52
<b>3-11.</b> Pie del robot. (polígono de soporte). . . . .	54
<b>3-12.</b> Trayectorias angulares por optimización, 1 <sup>era</sup> parte. . . . .	59
<b>3-13.</b> Trayectorias angulares por optimización, 2 <sup>da</sup> parte. . . . .	60
<b>3-14.</b> Video. Simulación de la marcha de Bioloid por optimización . . . . .	61
<b>3-15.</b> Pares articulares . . . . .	61
<b>3-16.</b> Evaluación de las restricciones de fuerza . . . . .	66
<b>3-17.</b> Trayectorias a distintas velocidades . . . . .	67
<b>3-18.</b> Comparación de los patrones de marcha . . . . .	68
<b>3-19.</b> Densidad Espectral de $\mathbf{q}^d$ . . . . .	69
<b>4-1.</b> Pares a partir de captura de movimiento. . . . .	72
<b>4-2.</b> Estructura del Filtro Dinámico. . . . .	73
<b>4-3.</b> Trayectorias angulares del filtro dinámico, 1 <sup>era</sup> parte. . . . .	76
<b>4-4.</b> Trayectorias angulares del filtro dinámico, 2 <sup>da</sup> parte. . . . .	77
<b>4-5.</b> Video. Simulación de un paso de Bioloid mediante el filtro dinámico . . . . .	78
<b>4-6.</b> pares articulares . . . . .	78



4-7. Evaluación de las restricciones de fuerza . . . . .	82
4-8. Trayectorias obtenidas por dos funciones de costo . . . . .	83
4-9. Comparación entre el filtro dinámico y la optimización de pares . . . . .	84
4-10. Comparación de la Densidad espectral de las trayectorias . . . . .	85
5-1. Robot Humanoide Bioid. . . . .	91
5-2. Video. Simulación en V-Rep del patrón de marcha basado en ZMP. . . . .	92
5-3. Video. Ciclo de marcha de Bioid basado en ZMP. . . . .	92
5-4. Video. Simulación en V-Rep del patrón de marcha basado en Optimización. . . . .	93
5-5. Video. Ciclo de de marcha de Bioid basado en Optimización. . . . .	93
5-6. Video. Simulación en V-Rep del patrón de marcha basado en el Filtro. . . . .	94
5-7. Video. Ciclo de marcha de Bioid basado en el Filtro Dinámico. . . . .	94
A-1. Ciclo de Marcha . . . . .	100
A-2. Trayectorias articulares de la marcha humana . . . . .	102
B-1. Alineación de Referentes mediante ${}^{17}\mathbf{R}_{rf}$ . . . . .	107
B-2. Alineación de Referentes mediante ${}^{18}\mathbf{R}_{rf}$ . . . . .	109



# LISTA DE TABLAS

<b>1-1.</b> Coordenadas articulares de la pierna derecha . . . . .	14
<b>1-2.</b> Parámetros geométricos de la pierna . . . . .	14
<b>2-1.</b> Parámetros geométricos de un sistema arborescente . . . . .	25
<b>2-2.</b> Parámetros geométricos del sistema arborescente . . . . .	26
<b>2-3.</b> Parámetros Geométricos de los miembros inferiores del Robot Bioid. . . . .	29
<b>3-1.</b> Parámetros de simulación . . . . .	46
<b>3-2.</b> $J$ en función de la duración del paso . . . . .	62
<b>3-3.</b> Comparación de los patrones de marcha . . . . .	63
<b>3-4.</b> Energía en función de los armónicos de las trayectorias . . . . .	64
<b>4-1.</b> Comparación entre el filtro dinámico y la optimización de pares . . . . .	79
<b>5-1.</b> Características de los Simuladores más populares en Robótica . . . . .	89
<b>5-2.</b> Especificaciones Bioid Premium Kit . . . . .	90



# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz de Inercia	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$E$	Función de Costo	$\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$
$F_{rn} \in \mathbb{R}$	Componente normal de la fuerza de reacción	N
$F_{tn} \in \mathbb{R}^2$	Vector de Fuerza de reacción tangencial	N
$g$	Aceleración de la gravedad	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$H \in \mathbb{R}^n$	Vector de fuerzas centrífugas, Coriolis y gravedad	$\text{N} \cdot \text{m}$
${}^i\mathbf{J}_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$	Matriz Jacobiana (relaciona el referente j con respecto al i)	
$J(\theta)$	Función de costo	$[(\text{N} \cdot \text{m})^2]$
${}^i p_j \in \mathbb{R}^3$	Vector de traslación (relaciona el referente j con respecto al i)	m
$q \in \mathbb{R}^n$	Vector de coordenadas generalizadas	rad
$q_v \in \mathbb{R}^n$	Vector de velocidades generalizadas	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$q_a \in \mathbb{R}^n$	Vector de aceleraciones generalizadas	$\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$
$q^d \in \mathbb{R}^n$	Vector de coordenadas óptimas	rad
$q^{ref} \in \mathbb{R}^n$	Vector de coordenadas de referencia	rad
${}^i\mathbf{R}_j \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	Matriz de Rotación	Adimensional
${}^i\mathbf{T}_j \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$	Matriz de Transformación	Adimensional
${}^i v_j \in \mathbb{R}^3$	Vector de velocidades lineales	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI
$\Gamma \in \mathbb{R}^n$	Vector de Torques	N · m
$\sigma \triangleq \{\phi, \theta, \psi\}$	Ángulos de Euler	rad
$\mu$	Coefficiente de fricción estática	Adimensional
${}^i\omega_j \in \mathbb{R}^3$	Vector de velocidades angulares	$\frac{rad}{s}$

## Lista de Acrónimos

Abreviatura	Término
<i>CAD</i>	Computer Aided Design. (Diseño Asistido por Computador).
<i>COM</i>	Center of Mass. (Centro de Masa).
<i>CTC</i>	Computed Torque Control. (Control por Par Calculado).
<i>DOF</i>	Degree of Freedom. (Grado de Libertad).
<i>DTW</i>	Dynamic Time Warping (Alineamiento Dinámico del Tiempo).
<i>FFT</i>	Fast Fourier Transform. (Transformada Rápida de Fourier).
<i>FIFO</i>	First-In-First-Out (Primero en en Entrar Primero en Salir).
<i>ZMP</i>	Zero Moment Point. (Punto de Momento Cero).

# Introducción General

Se denomina *robot bípedo* a un sistema mecánico con capacidad para moverse sobre las dos extremidades inferiores (piernas). El primer prototipo de un robot bípedo fue diseñado y construido por Leonardo Da Vinci en el siglo XV. Pero fue solamente hasta 1960 que la robótica bípeda se consolidó como una área activa en la investigación [Bezerra and Zampieri, 2004].

La caminata bípeda puede clasificarse en estática y dinámica. El llamado equilibrio estático o caminata estática, se refiere a un robot que permanece equilibrado manteniendo siempre la proyección vertical del centro de masa (CoM) sobre el polígono de soporte formado por la superficie de contacto con el suelo [Raibert, 1986]. El equilibrio dinámico o caminata dinámica, se refiere a un robot en el que el CoM puede salir del polígono de soporte durante ciertos períodos de tiempo. El equilibrio de un ser humano en movimiento no es el resultado de que la proyección del CoM sobre el suelo permanezca dentro del polígono de soporte, sino que es el resultado de la compleja coordinación de las distintas partes del cuerpo [Ivancevic and Ivancevic, 2008].

En 1972, Vukobratović presentó los primeros estudios sobre el control y la locomoción bípeda [Vukobratović and Stepanenko, 1972]. Él propuso el concepto de punto de momento cero (ZMP), que se define como el punto donde el momento resultante de todas las fuerzas de contacto sobre la planta del pie es cero. El ZMP ha sido utilizado desde entonces como un criterio de estabilidad en robótica bípeda.

Una trayectoria es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en movimiento. En robótica, la generación de trayectorias involucra el cálculo de posiciones, velocidades, aceleraciones y *jerks* de cada una de las articulaciones que componen el robot a lo largo de un camino geométrico de referencia [Luigi Biagiotti, 2009]. La generación de trayectorias para un robot puede hacerse de dos formas. Estas son:

- Cálculo y posterior procesamiento de trayectorias (*Off-Line*).
- Cálculo y procesamiento continuo de trayectorias (*On-Line*).

Aunque la planificación de trayectorias *On-Line* no es el objeto de estudio de esta investigación, muchos de los conceptos de generación de trayectorias *On-Line* tienen sus fundamentos en la generación de trayectorias *Off-Line* [Kröger, 2010].

El cálculo de las trayectorias (o las consignas articulares) deseadas, puede hacerse por dos métodos [Siciliano and Khatib, 2008]. A partir de la captura de movimiento humano, o generadas directamente por el computador. En este último caso, el enfoque habitual incluye dos pasos: primero, se elige un conjunto de variables de salida con dimensión adecuada. Generalmente, las coordenadas cartesianas tridimensionales de algunos puntos seleccionados en el robot (por ejemplo el CoM). En segundo lugar, después de algún tipo de parametrización como *splines* por ejemplo, las trayectorias deseadas de estas variables se calculan para cada fase de la marcha: apoyo, balanceo e impactos. Una de las formas de hacer este cálculo es utilizar un algoritmo de optimización basado en la dinámica del robot teniendo en cuenta las restricciones físicas del mismo. Finalmente, estas trayectorias son las señales de referencia para un sistema de control en lazo cerrado, que sintonizado correctamente, permite el seguimiento de éstas y evita la caída del robot.

La captura, comprensión y reproducción de la marcha humana es uno de los grandes retos de la investigación actual en robótica bípeda [Grizzle et al., 2014]. Para lograr esto es natural intentar utilizar los datos de captura de movimiento humano para transferirlos al robot. Sin embargo, las diferencias cinemáticas y dinámicas entre el ser humano (cuyo movimiento es registrado) y el robot bípido, hacen que el robot caiga tratando de seguir las trayectorias obtenidas por un sistema de captura de movimiento.

La captura de movimiento se puede utilizar para permitir a los robots imitar el movimiento humano. Aunque la imitación de movimiento es simplemente el mapeo de movimiento humano a robots humanoides que tienen una apariencia similar, no es un problema trivial [Munirathinam et al., 2012]. Las principales dificultades a superar en la imitación del movimiento humano para robots bípedos, son las diferencias antropomórficas entre humanos y robots, los límites físicos de los actuadores del robot y el equilibrio.

Algunos investigadores han tratado de combinar, la dinámica del robot y los datos de captura de movimiento para generar trayectorias factibles o realistas. Popovic [Popovic, 2000] y Pollard [Pollard et al., 2002] utilizaron modelos matemáticos simplificados de la



dinámica del cuerpo humano para reducir la complejidad computacional. Poubel [Poubel et al., 2014] desarrolló un método basado en la cinemática inversa para la imitación *On-Line* de un robot humanoide. Hu [Hu et al., 2014], propone una metodología *On-Line* para imitar la marcha humana por un robot humanoide. [Koenemann et al., 2014] describe una técnica para la imitación en tiempo real de los movimientos de todo el cuerpo humano.

El objetivo principal de esta tesis, es desarrollar un esquema de generación de trayectorias para un robot bípedo, a partir de captura de movimiento humano y teniendo en cuenta consideraciones de estabilidad. Para lograrlo, se debe determinar cómo mapear los movimientos de un ciclo de marcha humana por un robot bípedo, cuya cinemática tiene menos grados de libertad que el cuerpo humano y además diferentes masas y momentos de inercia.

## Objetivos

### Objetivo General

Desarrollar un esquema de generación de trayectorias para un robot bípedo, basado en captura de movimiento humano y teniendo en cuenta consideraciones de estabilidad.

### Objetivos Específicos

- Proponer un sistema de captura de movimiento humano en 3D sin la utilización de marcadores en la piel.
- Desarrollar una aplicación que genere trayectorias articulares *Off-line* para un robot bípedo a partir de datos de captura de movimiento humano, teniendo en cuenta la estabilidad de la marcha.
- Realizar un estudio comparativo de los métodos clásicos y bio-inspirados en la generación de trayectorias articulares.

## Aportes de la Tesis

Las contribuciones principales de esta tesis, son:

- El desarrollo de un *filtro dinámico* para la generación de trayectorias de marcha estables en un robot bípedo basadas en captura de movimiento humano. El filtro, realiza el mapeo de las trayectorias de marcha de un ser humano y las adapta a las trayectorias articulares de un robot bípedo con diferente masa, grados de libertad y momentos de inercia. Este método fue probado y validado en el robot humanoide Bioloid Premium kit.
- El análisis comparativo entre tres métodos distintos de generación de trayectorias para robots bípedos, como son: modelo *cart-table*, optimización de torques y el filtro dinámico. Los patrones de marcha se compararon mediante dos índices de desempeño que evalúan el consumo energético de los actuadores del robot.
- La evaluación y comparación del sensor Kinect<sup>TM</sup> y el sistema profesional de captura de movimiento Vicon<sup>TM</sup>, por medio de las trayectorias articulares y las medidas antropométricas de una persona en un ciclo de marcha normal.

## Organización de la Tesis

El presente documento está compuesto de cinco capítulos. En el primero de ellos se presenta una descripción y clasificación de los sistemas de captura de movimiento. Se comparan las trayectorias articulares y las medidas antropométricas de una persona en un ciclo de marcha normal, obtenidas por dos sistemas de captura de movimiento; el primero de ellos es un sistema comercial de precisión que utiliza marcadores (Vicon<sup>TM</sup>) y el segundo, es la cámara Microsoft Kinect<sup>TM</sup>. El capítulo dos está dedicado al modelo matemático del robot bípedo *Bioloid* utilizado para la experimentación. El capítulo tres se refiere a la generación de patrones de marcha basado en el modelo de *cart-table*, [Kajita et al., 2001], [Kajita, 2003], [Kajita et al., 2006] y mediante optimización con restricciones [Chevallerau and Aoustin, 2001]. En el capítulo cuatro se describe un filtro dinámico para generar trayectorias de marcha estables a partir de captura de movimiento. El capítulo cinco expone la implementación de las trayectorias de marcha en el robot Bioloid, primero en el

simulador dinámico V-Rep y posteriormente sobre el robot real. Finalmente, se escriben las conclusiones y perspectivas de este trabajo de investigación.

## LISTA DE PUBLICACIONES EN REVISTAS INDEXADAS

- [1] D. Bravo, C. Rengifo, W. Agredo. Comparación de dos Sistemas de Captura de Movimiento por medio de las Trayectorias Articulares de Marcha *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*. Volumen 37. Nro. 2, Mayo de 2016. pág. 15-29. ISSN 2395-9126. <http://dx.doi.org/10.17488/RMIB.37.2.2>.
- [2] D. Bravo, C. Rengifo. Trajectory Generation from Motion Capture for a Planar Biped Robot in Swing Phase. *Revista Ingeniería y Ciencia*. Volumen 11. Nro. 22, Agosto de 2015. pág. 25-47. ISSN 1794-9165. <http://dx.doi.org/10.17230/ingciencia.11.22.2>.
- [3] D. Bravo, C. Rengifo. Sistema de Captura para la Imitación del Movimiento Humano por un Robot Planar de Base Fija. *Revista Inge@uan*. Volumen 5. Nro. 09, Mayo de 2015. pág. 25-33. ISSN 2145-0935. <http://csifesvr.uan.edu.co/index.php/ingeuan/article/view/297/pdf>.
- [4] D. Bravo, C. Rengifo. Herramienta para la Enseñanza de las Ecuaciones de Lagrange basada en la Simulación de Sistemas Dinámicos. *Revista Mexicana de Física E*. Volumen 60. Nro. 2, Diciembre de 2014. pág. 111-115. ISSN 1870-3542. [http://rmf.smf.mx/pdf/rmf-e/60/2/60\\_2\\_111.pdf](http://rmf.smf.mx/pdf/rmf-e/60/2/60_2_111.pdf).
- [5] D. Bravo, C. Rengifo. Modelo Biomecánico de una Prótesis de Pierna. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. Volumen 11. Nro. 4, Octubre de 2014. pág. 417-425. ISSN 1697-7912. <http://dx.doi.org/10.1016/j.riai.2014.08.003>.

## LISTA DE PUBLICACIONES EN CONFERENCIAS

- [1] D. Bravo, C. Rengifo, A. Cortes. Simuladores en Robótica: Qué Validar: La Cinemática o la Dinámica? Caso de Estudio: Simulación de Postura de un Robot Bípedo (2015). *XVII Congreso Mexicano de Robótica. (COMROB 2015)*.

- [2] D. Bravo, C. Rengifo, J. Ibarra. Control Conmutado para seguimiento de trayectorias de un robot bípedo. (2014). *XVI Congreso Mexicano de Robótica. (COMROB 2014)*.
- [3] D. Bravo, C. Rengifo. Motion Capture System for Applications in Robotics. (2014). *III International Congress of Engineering Mechatronics and Automation (CIIMA)*. 978-1-4799-7932-5/14/\$31.00 ©2014 IEEE. <http://dx.doi.org/10.1109/CIIMA.2014.6983433>.

# Capítulo 1

## Sistemas de Captura de Movimiento

### 1.1. Introducción

La captura de movimiento es el proceso del registro de un evento en movimiento, mediante el seguimiento de una serie de puntos de interés en el espacio y tiempo para obtener una representación tridimensional (3D) digital. En resumen, es la tecnología que permite el proceso de traducción del movimiento en algún formato digital [Menache, 2011]. El sujeto de estudio puede ser cualquier objeto del mundo real que tenga movimiento; los puntos claves a capturar, son las áreas que mejor representan el movimiento del sujeto. Éstos pueden ser puntos de rotación o conexiones entre las partes rígidas del sujeto. Para un ser humano, por ejemplo, algunos de los puntos claves son las articulaciones que actúan como puntos de pivote y conexiones para los huesos. En cada uno de estos puntos de interés se colocan sensores o marcadores que sirven para recolectar datos de posición, velocidad y aceleración.

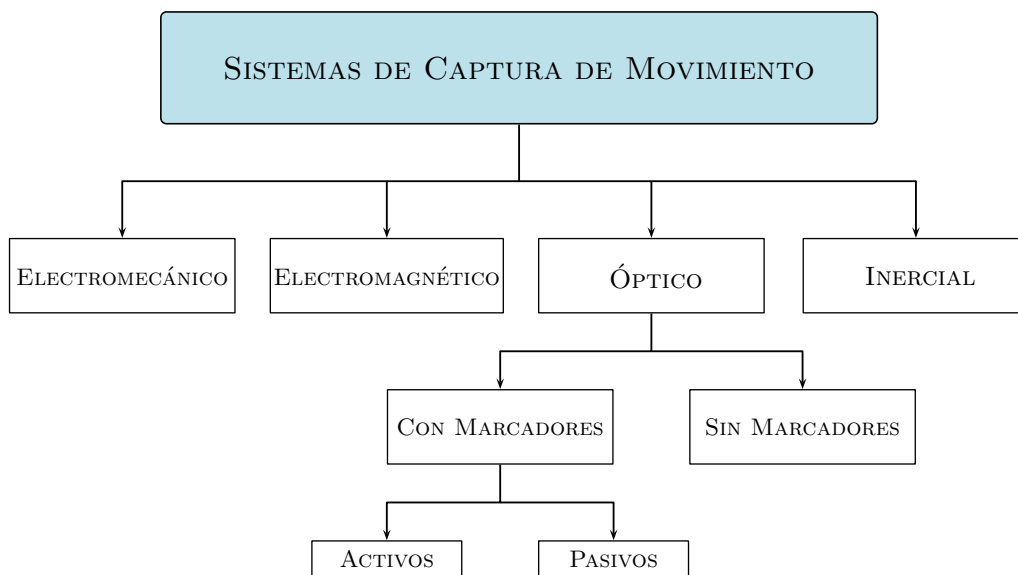
En la actualidad, los métodos más comunes para una adecuada captura del movimiento humano en tres dimensiones requieren de un entorno de laboratorio y la fijación de marcadores, accesorios o sensores a los segmentos corporales. Sin embargo, el alto costo de estos equipos es un factor limitante para muchos proyectos de investigación. Sistemas de captura de movimiento como Microsoft Kinect <sup>TM</sup>, presentan un enfoque alternativo a la tecnología de captura de movimiento basada en marcadores.

En este capítulo se comparan las trayectorias articulares y las medidas antropométricas de una persona en un ciclo de marcha normal, obtenidas por dos sistemas de captura

de movimiento. El primero de ellos, es un sistema comercial de alta precisión que utiliza marcadores (Vicon <sup>TM</sup>) y el segundo, es la cámara Microsoft Kinect. Ambos sistemas se evaluaron con el propósito de comparar la diferencia entre las trayectorias articulares de la marcha humana, obtenidas por cada uno de los sistemas.

## 1.2. Clasificación de los Sistemas de Captura de Movimiento

En el mercado existen sistemas especializados para la captura de movimiento, por ejemplo: PeakMotus (Vicon) <sup>TM</sup>, SkillSpector <sup>TM</sup> y DartFish<sup>TM</sup> <sup>TM</sup>, entre otros. Estos sistemas son utilizados para registrar el movimiento de un ser humano con un grado de precisión relativamente alto. Pueden clasificarse según su tecnología en: electromecánicos, electromagnéticos, inerciales y ópticos. La clasificación se ilustra en la Figura 1-1



**Figura 1-1:** Clasificación de Sistemas de Captura de Movimiento

En los sistemas de captura de movimiento electromecánicos (Gypsy7 <sup>TM</sup>), la captura del movimiento se realiza usando sensores mecánicos. En el proceso de captura de movimiento, la persona viste un traje especial adaptable al cuerpo. Estos trajes son generalmente estructuras rígidas compuestas de barras metálicas o plásticas, unidas mediante potenciómetros colocados en las principales articulaciones. Básicamente, el actor coloca la estructura sobre su cuerpo y mientras se mueve, el traje se adapta a los movimientos que éste realiza; los

potenciómetros recogen toda la información del grado de rotación de las articulaciones. La desventaja de estos sistemas con respecto a otros, es la incapacidad de medir traslaciones globales, miden las posiciones relativas de entre los segmentos corporales, pero no el desplazamiento del actor en el escenario. Por otro lado, dichos sistemas asumen que la mayoría de los huesos humanos están unidos por articulaciones de un grado de libertad con centro instantáneo de rotación fijo, pero no tiene en cuenta rotaciones complejas que se producen en las articulaciones humanas; las estructuras suelen ser rígidas y restringen el movimiento del actor.

Para los sistemas de captura de movimiento electromagnéticos (Polhemus <sup>TM</sup>) [Lee et al., 2013], se dispone de una colección de sensores electromagnéticos que miden la relación espacial con un transmisor cercano. Los sensores se colocan en el cuerpo y se conectan a una unidad electrónica central; están constituidos por tres espiras ortogonales que miden el flujo magnético, determinando posición y orientación del sensor. Un transmisor genera un campo electromagnético de baja frecuencia que los receptores detectan y transmiten a la unidad electrónica de control, una desventaja es que estos sensores son muy sensibles a cambios en los campos magnéticos.

En los sistemas de captura de movimiento inerciales (Xsens <sup>TM</sup>) [Zhang et al., 2013], se colocan sensores inerciales en distintas partes del cuerpo (acelerómetros triaxiales y giroscopios). Una ventaja es que se obtienen datos precisos de aceleración y orientación del individuo. Sin embargo, no es posible medir traslaciones globales y la principal desventaja de estos sensores es que las variables medidas deben ser integradas numéricamente para obtener posiciones articulares y orientaciones de segmentos corporales trayendo consigo problemas de derivación numérica.

Los sistemas ópticos utilizan los datos recogidos por sensores de imagen para inferir la posición de un elemento en el espacio, utilizando una o más cámaras sincronizadas para proporcionar proyecciones simultáneas. Generalmente se usan marcadores fijados al cuerpo del actor, pero los sistemas más recientes permiten recoger datos confiables, rastreando superficies del sujeto identificadas dinámicamente [Bolink et al., 2016]. Estos sistemas entregan la posición cartesiana  $(x, y, z)$  de cada marcador en un marco de referencia inercial; la orientación de una superficie se calcula utilizando la posición relativa, de al menos, 3 marcadores. Los sistemas ópticos de captura de movimiento, permiten la grabación en tiempo real, con algunas limitaciones como son: el número de cámaras, marcadores y actores. Estos sistemas pueden capturar un gran número de marcadores a frecuencias del orden de hasta 2000 cuadros por segundo.

Los sistemas ópticos de captura de movimiento son los más utilizados en laboratorios de biomecánica [Ivancevic and Ivancevic, 2008] y se pueden clasificar como sistemas ópticos sin marcadores y con marcadores, éstos a su vez se dividen en: activos y pasivos. En los sistemas ópticos con marcadores pasivos (Vicon <sup>TM</sup>), se colocan al sujeto marcadores reflectantes en todos los puntos de interés de captura de movimiento, a diferencia de los sistemas ópticos activos (Optotrack <sup>TM</sup>), donde se colocan marcadores activos (diodos emisores de luz [LED]). Una desventaja en los sistemas ópticos con marcadores es la oclusión; aquí los marcadores no aparecen en varias tomas de la cámara, debido a la obstrucción de la línea de visión de los objetos de la escena o por otras partes del cuerpo del sujeto. La mayoría de los paquetes de pos-procesamiento comerciales tienen la capacidad de tratar con los marcadores ocluidos; para ello se crean marcadores virtuales para sustituir la información de los ocluidos, o pueden usar marcadores redundantes (más que el mínimo requerido en el protocolo estándar), para compensar los marcadores ocluidos.

El movimiento de los marcadores se suele utilizar para deducir el movimiento relativo entre dos segmentos consecutivos, con el objetivo de definir con precisión el movimiento de una articulación. El movimiento de la piel (donde se coloca el marcador), en relación con el hueso subyacente, es el principal factor que limita la aplicación de algunos sensores, [Cappozzo et al., 1997], [Holden et al., 1997], [Reinschmidt et al., 1997].

Los sistemas de captura de movimiento sin marcadores, como la cámara Microsoft Kinect y Organic Motion <sup>TM</sup>, ofrecen una alternativa distinta a la tecnología de captura de movimiento [Mutto et al., 2012]. El Kinect es una cámara capaz de estimar la geometría 3D de la escena adquirida, a 30 cuadros por segundo; está construida con un sensor de profundidad de resolución espacial de  $640 \times 480$  píxeles, una vídeo-cámara VGA de la misma resolución y un arreglo de micrófonos para reconocimiento de voz. El Kinect fue desarrollado como un dispositivo periférico para uso con la consola de juegos Xbox 360, aunque se ha adaptado fácilmente para otros campos como: la robótica [Du et al., 2012], seguimiento del esqueleto humano [Schwarz et al., 2012], reconstrucción 3D [Izadi et al., 2011], terapia asistencial [Clark et al., 2012] y biomecánica [Schmitz et al., 2014].

Con excepción del Kinect, la característica común de los sistemas descritos anteriormente es su alto costo y dificultad de implementación. Surge entonces el interrogante: ¿Es posible construir un sistema de captura de movimiento con Kinect de bajo costo y fácil implementación?. En nuestro caso particular, un sistema de captura de movimiento permitirá extraer las trayectorias articulares de la marcha humana, con el fin de adaptarlas como referencias para el ciclo de marcha de un robot bípedo. Algunos autores han comparado



el Kinect con otros sistemas de captura de movimiento con marcadores; en [Clark et al., 2013, Stone and Skubic, 2011], se comparan las variaciones de las posiciones cartesianas de un sistema de captura de movimiento con marcadores y Kinect; en [Schmitz et al., 2014] se comparan las variaciones de los ángulos de un brazo robótico obtenidas por Kinect y un sistema con marcadores. Estos aportes en el área, han sido trabajos sobre soluciones específicas que no integran la captura de movimiento para el cálculo de las trayectorias articulares de la marcha humana, propósito de éste trabajo. En el presente documento, se comparan las diferencias entre las trayectorias articulares obtenidas por un sistema de captura de movimiento con marcadores y Kinect; también se evalúa la variación de las medidas antropométricas entre los dos sistemas. Para cumplir con este objetivo, las piernas del sujeto de estudio se modelaron como una estructura robótica según los parámetros geométricos de Denavit-Hartenberg [Denavit and Hartenberg, 1965]. Después se desarrolló una aplicación para transformar las coordenadas cartesianas que entregan los dos sistemas de captura de movimiento en coordenadas articulares; en esta parte se propuso un nuevo algoritmo, basado en los mínimos cuadrados para el cálculo de la cinemática inversa, utilizando las coordenadas cartesianas del experimento y el modelo geométrico de las piernas. Posteriormente, estos datos fueron analizados estadísticamente, mostrando el error y la varianza asociada a las medidas antropométricas y articulares.

### 1.3. Diseño del experimento

Para realizar el experimento de captura de movimiento, se dispuso de un sistema con 12 cámaras OptiTrack<sup>TM</sup> con resolución de  $1280 \times 1024$  píxeles, una caminadora con velocidad variable, un sensor Kinect y el software apropiado para la recolección de datos. El experimento se realizó en el Laboratorio de Biomecánica de la Universidad Autónoma de Occidente de la Ciudad de Cali. La idea básica de funcionamiento del sistema óptico utilizado, es que cada una de las cámaras envía luz infrarroja que se refleja de regreso cuando choca con una superficie reflectante. La posición cartesiana  $(x, y, z)$  del centro de un marcador reflectante (normalmente esférico) puede ser identificado por la intersección de las luces infrarrojas de tres cámaras. Kinect entrega también, la posición cartesiana  $(x, y, z)$  de 20 puntos articulares del esqueleto óptico del usuario; para miembros inferiores son 8 vectores que contienen las tres posiciones cartesianas de cada uno. Dichos vectores, corresponden a la cadera, la rodilla, el tobillo y la posición del metatarso del pie en cada una de las piernas. La posición del Kinect con respecto al sujeto de estudio es en el plano

frontal. La posición del Kinect con respecto al sujeto de estudio es en el plano frontal. Es en esta posición en la que se obtiene el esqueleto óptico de la persona. El algoritmo de inicialización desarrollado por el fabricante (Microsoft) no permite obtener las coordenadas cartesianas del esqueleto óptico en otro plano distinto al frontal. <sup>1</sup>

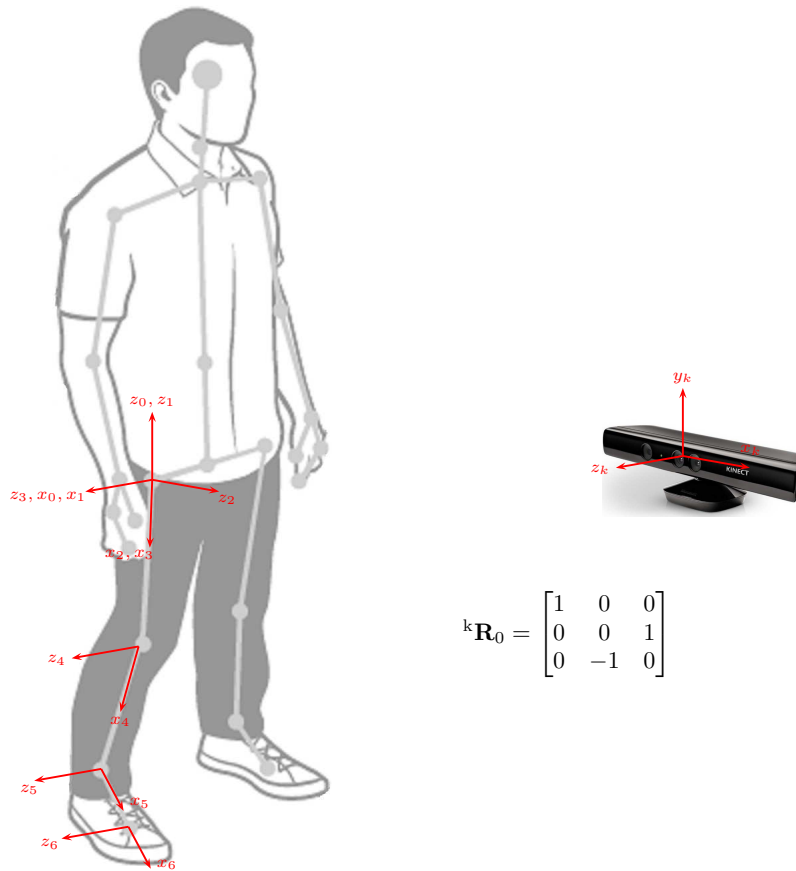


**Figura 1-2:** Puesta de marcadores según el protocolo Helen Hayes.

La Figura 1-2 muestra al sujeto de estudio con 15 marcadores unidos a los miembros inferiores de su cuerpo. La distribución de marcadores en el cuerpo sigue un protocolo determinado. El protocolo Helen Hayes, implementado en este experimento, es un protocolo estándar muy utilizado para el análisis de la marcha [Chris Kirtley, 2006]. El sujeto de prueba fue una mujer sana sin antecedentes de problemas músculo-esqueléticos. La altura fue de 154 cm, su peso fue 54 kg y la edad de 22 años; su participación en este estudio fue voluntaria.

Cada pierna se modeló con los parámetros geométricos de Denavit-Hartenberg [Denavit and Hartenberg, 1965]. En la Figura 1-3, se muestra la ubicación de ejes para la pierna

<sup>1</sup>Ver más información en: <https://developer.microsoft.com/es-es/windows/kinect>



$${}^k\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Figura 1-3:** Ubicación de ejes para cada articulación y el referente del sensor.

derecha; en este diagrama nos interesa ver la evolución temporal de las articulaciones de la Tabla 1-1. La tabla de parámetros geométricos de la pierna derecha para la Figura 1-3 se muestra en la Tabla 1-2, donde  $D3$  es la longitud del fémur,  $D4$  es la longitud de la tibia y  $D5$  es la distancia que hay entre el tobillo y la posición del metatarso del pie. Las coordenadas articulares  $q_1, q_2, \dots, q_5$  son los ángulos en los distintos planos: transversal, sagital y frontal; la especificación de cada uno de ellos se puede leer en la Tabla 1-1

La escogencia de los parámetros y los grados de libertad de la Tabla 1-1, se hizo con el fin de adaptar las trayectorias articulares de un ser humano a las trayectorias angulares que deben seguir los servomotores del robot bípedo Bioloid. Es por esta razón que las articulaciones de los miembros inferiores se modelan como si fueran las piernas de un robot. Para que las trayectorias articulares sean independientes del marco de referencia del sistema de captura de movimiento (Vicon o Kinect), se hace una transformación homogénea entre el referente del sistema de visión y el marco de referencia cero de la pierna [Corke, 2011]. Los datos para ambos sistemas fueron adquiridos mediante archivos de texto en formato ASCII

$\theta$ [°]	Coordenada articular
$q_1$	Cadera en el plano transversal
$q_2$	Cadera en el plano frontal
$q_3$	Cadera en el plano sagital
$q_4$	Rodilla en el plano sagital
$q_5$	Tobillo en el plano sagital

**Tabla 1-1:** Coordenadas articulares de la pierna derecha

(\* .txt). Las coordenadas de cada marcador se registraron en metros; estos archivos fueron importados en Matlab © y se transformaron los datos de ambos sistemas ,en alineación con el marco de referencia cero de la pierna, mediante una matriz de transformación homogénea Ec. (1.2), como se explica en la sección 1.3.1.

### 1.3.1. Modelo geométrico directo de la pierna

j	i	$\sigma_j$	$\alpha_j$	$d_j$	$q_j$	$r_j$
1	0	0	0	0	$q_1$	0
2	1	0	$-\pi/2$	0	$q_2 + \pi/2$	0
3	2	0	$\pi/2$	0	$q_3$	0
4	3	0	0	D3	$q_4$	0
5	4	0	0	D4	$q_5 + \pi/2$	0
6	5	0	0	D5	0	0

**Tabla 1-2:** Parámetros geométricos de la pierna

El modelo geométrico directo permite calcular la posición cartesiana y orientación de cada una de las articulaciones de la cadena cinemática de la Figura 1-3, en el referente del Kinect  $\langle x_k, y_k, z_k \rangle$ . El vector que denota la posición cartesiana del referente cero con respecto al marco de referencia inercial (Sistema de Captura de movimiento, Vicon ó Kinect) es  ${}^s p_0$  y la matriz de rotación que denota la orientación del referente cero con respecto al marco de referencia inercial es  ${}^s \mathbf{R}_0$ . El sentido de la marcha es en dirección del

eje  $x$ . La matriz de rotación se escribe en términos de los ángulos de euler  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ .

$${}^s\mathbf{R}_0(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi - S\phi S\psi \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Donde:

$$\begin{aligned} S\phi &\triangleq \sin \phi & C\phi &\triangleq \cos \phi \\ S\theta &\triangleq \sin \theta & C\theta &\triangleq \cos \theta \\ S\psi &\triangleq \sin \psi & C\psi &\triangleq \cos \psi \end{aligned}$$

Para facilidad en la notación, se define  $\sigma \triangleq \{\phi, \theta, \psi\}$ , entonces la matriz de transformación para pasar del marco de referencia cero al referente inercial en términos de  ${}^s\mathbf{R}_0(\sigma)$  y  ${}^s p_0$  es

$${}^s\mathbf{T}_0(\sigma) = \begin{bmatrix} {}^s\mathbf{R}_0(\sigma) & {}^s p_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

La transformación  ${}^s\mathbf{T}_0(\sigma)$ , permite expresar la posición de la cadera en el marco de referencia inercial. La matriz de transformación para pasar del marco de referencia  $j$  a  $i$ , está definida por un vector  ${}^i p_j$  que expresa la posición del marco  $j$  en  $i$  y una matriz de rotación  ${}^i\mathbf{R}_j$  que define la orientación del marco  $j$  en  $i$ . La matriz de rotación depende, además, de la posición articular  $q_j$ .

$${}^i\mathbf{T}_j(q) = \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{R}_j(q_j) & {}^i p_j \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$${}^i\mathbf{R}_j(q_j) = \begin{bmatrix} Cq_j & -Sq_j & 0 \\ C\alpha_j Sq_j & C\alpha_j Cq_j & -S\alpha_j \\ S\alpha_j Sq_j & S\alpha_j Cq_j & C\alpha_j \end{bmatrix} \quad {}^i p_j = \begin{bmatrix} d_j \\ -r_j S\alpha_j \\ r_j C\alpha_j \end{bmatrix}$$

Los parámetros  $\alpha_j$ ,  $d_j$ ,  $q_j$  y  $r_j$  fueron presentados en la Tabla **1-2**.

## 1.4. Trayectorias articulares como un problema de optimización

La anatomía humana se puede representar mediante una secuencia de cuerpos rígidos conectados por articulaciones [Abdel-Malek and Arora, 2013]. Kinect permite el seguimiento óptico del esqueleto humano y entrega las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  de 20 puntos articulares. Por otra parte, el sistema de marcadores ofrece las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  de cada uno de los marcadores adheridos al sujeto de estudio según el protocolo de Helen Hayes. En este trabajo estamos interesados en las trayectorias articulares de los miembros inferiores en el plano sagital y frontal. Por lo tanto, fue necesario desarrollar una aplicación para transformar las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  en coordenadas articulares  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Generalmente este problema se resuelve utilizando cinemática inversa [Khalil and Dombre, 2004]. Los intentos por resolver el problema de cinemática inversa en robótica, han utilizado numerosos enfoques que van desde iteraciones sucesivas del modelo geométrico, diversas técnicas de optimización [Ayusawa and Nakamura, 2012] y métodos basados en aprendizaje, [Damas and Santos-Victor, 2012], [Toshani and Farrokhi, 2014]. El problema de cinemática inversa consiste en mapear del espacio cartesiano al espacio articular, esto significa encontrar la función no lineal:

$$q^{ref} = f^{-1}(\mathbf{X}^{exp}) \quad (1.3)$$

Donde  $q^{ref} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas articulares,  $\mathbf{X}^{exp} \in \mathbb{R}^{3m}$  es el vector con las coordenadas cartesianas obtenidas mediante el sistema de captura de movimiento. Siendo  $m$  el número de marcadores considerados y  $n$  el número de grados de libertad de la

cadena cinemática objeto de estudio. Las técnicas analíticas tienen la ventaja de un cálculo más rápido, pero están limitadas a robots con un pequeño número de articulaciones. Los métodos basados en optimización son más genéricos y tienen la ventaja de incorporar restricciones físicas y/o geométricas.

Con el fin de resolver el problema de cinemática inversa por optimización, la función de costo (1.4) llamada *error de marcador*, es minimizada. La función *error de marcador*, se define como la norma euclidiana de la diferencia de posiciones entre un marcador (ó centro de la articulación) experimental y la posición cartesiana que tendría dicho marcador si las coordenadas articulares fueran las definidas por el vector  $\mathbf{q}$ . En cada intervalo de tiempo, el algoritmo de mínimos cuadrados calcula un vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}^{ref}(t_k)$ , que minimiza la suma de la norma del error de marcador.

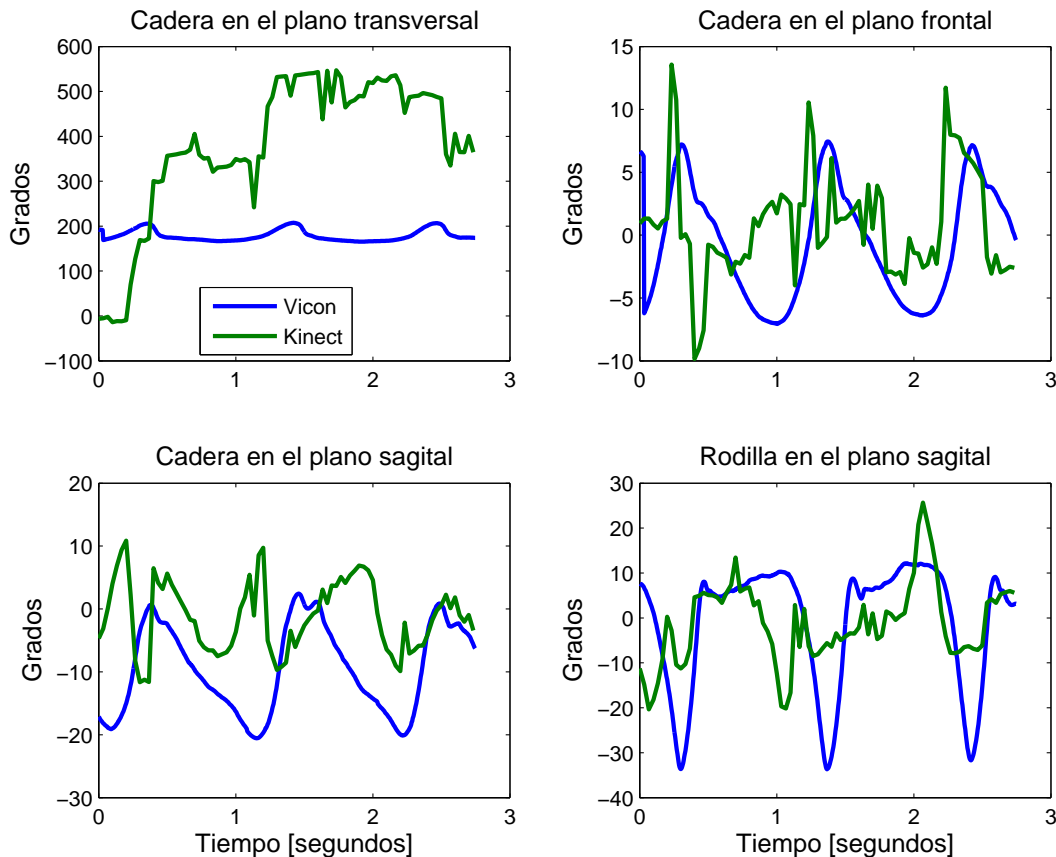
$$\min_{\mathbf{q}(t_k)} \left[ \sum_{i=1}^m \left\| \mathbf{X}_i^{exp}(t_k) - \hat{\mathbf{X}}_i(\mathbf{q}(t_k)) \right\|^2 \right] \quad (1.4)$$

Donde  $\mathbf{X}_i^{exp}(t_k) \in \mathbb{R}^3$  denota la posición cartesiana del marcador experimental  $i$  medida en el instante  $t = t_k$  por el sistema de captura de movimiento y  $\hat{\mathbf{X}}_i(\mathbf{q}(t_k)) \in \mathbb{R}^3$  son las posiciones cartesianas estimadas, asociadas a un vector  $\mathbf{q}(t_k)$  dado;  $\hat{\mathbf{X}}_i(\cdot)$  es la función que contiene el modelo geométrico directo del robot. El modelo geométrico del robot describe la cinemática del mismo, en el se describen los grados de libertad permitidos y las distancias y ángulos entre articulaciones. Por esta razón, al modelar las piernas del ser humano como si fuera un robot con los mismos grados de libertad, se puede realizar la diferencia entre las coordenadas entregadas por los marcadores experimentales y las obtenidas por el modelo geométrico directo, para calcular las coordenadas articulares  $\mathbf{q}(t_k)$  que mejor se ajustan a este criterio de optimización. Una vez que cada una de las trayectorias articulares  $\mathbf{q}(t_k)$  se calculan, el robot podría realizar un seguimiento de las trayectorias articulares con el controlador apropiado. Sin embargo, hay muchas diferencias entre un robot bípedo y un ser humano real. Esto significa que no podemos simplemente enviar estos datos al robot y esperar que se mueva correctamente.

## 1.5. Resultados

Con el fin de comparar las trayectorias obtenidas por la captura de movimiento, se graficaron las trayectorias obtenidas por los dos sistemas de captura. Sin embargo, ambos

sistemas se ejecutan a diferentes frecuencias de muestreo; el sistema Vicon muestrea a 240 Hz mientras que Kinect a 30 Hz, para alinear en el tiempo las dos trayectorias se obtuvo una marca de tiempo en los datos entregados por Kinect y se hizo coincidir con el resultado más cercano posible a Vicon. La Figura 1-4 muestra la comparación de trayectorias angulares, obtenidas por el algoritmo de cinemática inversa para ambos sistemas de captura de movimiento.

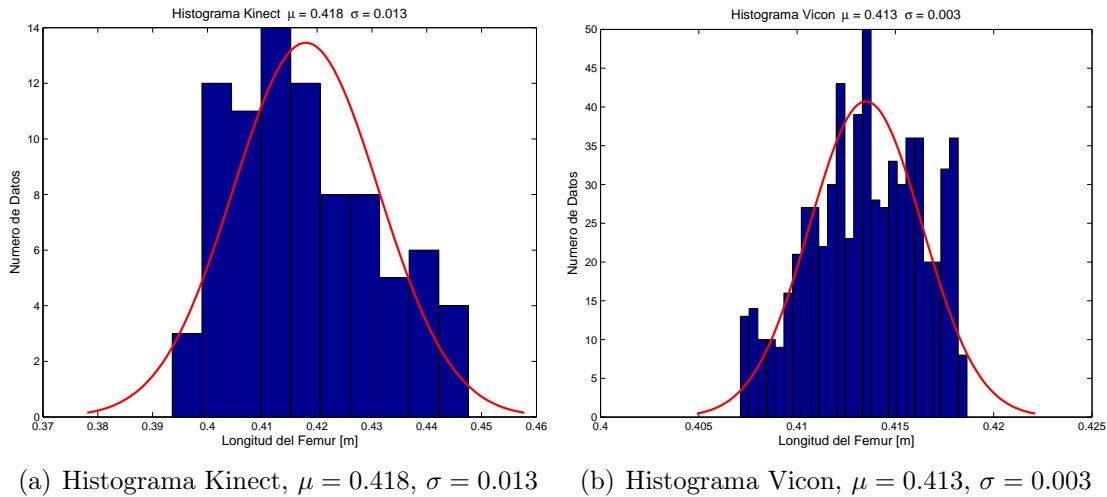


**Figura 1-4:** Trayectorias angulares pierna derecha. La trayectoria de la cadera en el plano transversal corresponde a la a rotación, mientras que en el plano frontal corresponde a la aducción. Las trayectorias en el plano sagital corresponden a la Flexión-Extensión.

Existe una diferencia entre los dos conjuntos de datos debido a los diferentes métodos de captura de posición articular. El Kinect utiliza algoritmos de procesamiento de imágenes basado en la silueta del participante para las coordenadas del plano frontal y se basa en un sensor de profundidad infrarrojo para la profundidad. El algoritmo de esqueletización del Kinect es en esencia, sólo una estimación de la posición cartesiana, debido al algoritmo de captura de movimiento sin marcadores [Mutto et al., 2012]; mientras que Vicon triangula



el punto central de los grupos de marcadores colocados en las posiciones articulares de interés.



**Figura 1-5:** Comparación de histogramas de la longitud del fémur. La distribución de datos en la longitud del fémur es aproximada por una curva Gaussiana para ambos sistemas de captura.

La Figura 1.5(a) muestra una distribución de los datos obtenidos por Kinect para la longitud del fémur; estos se aproximaron por una curva Gaussiana de media igual a 0.418 m, con una desviación estándar de 0.013 m, mientras que la Figura 1.5(b) muestra una distribución Gaussiana para la longitud del fémur, tomada con Vicon de media igual a 0.413 m, con una desviación estándar de 0.003 m. Aunque ambos sistemas coinciden con dos cifras significativas en la longitud promedio del fémur, el sistema Vicon resulta ser  $0.013/0.003 \approx 4$  veces más preciso que el Kinect.

Los estudios para determinar la resolución espacial del Kinect en las coordenadas  $X, Y, Z$ , evidencian que el error asociado a la medición de las coordenadas cartesianas aumenta a medida que el sujeto de análisis se aleja del sensor (escala logarítmica), obteniendo valores mínimos y máximos de: 1mm hasta 6.5 mm para las coordenadas  $X$  e  $Y$ ; y 2 mm hasta 5 cm en la coordenada  $Z$  para valores de distancia del sujeto de estudio al sensor de 0.8 m hasta 4 m respectivamente, [Dutta, 2012]. Las desviaciones en la medidas de las coordenadas es considerable frente a la presencia de fuentes parásitas infrarrojas por tal motivo es necesario realizar un adecuado control de las mismas.

## 1.6. Conclusión

En este capítulo, se compararon las trayectorias de la marcha humana obtenidas mediante dos sistemas de captura de movimiento. Para ello se implementó un algoritmo para la estimación de las posiciones articulares humanas, a partir de las posiciones cartesianas mediante ajuste por mínimos cuadrados. Los resultados antropométricos obtenidos con Kinect mostraron una mayor varianza en relación a los obtenidos con Vicon en una razón 1/4. Los movimientos a lo largo del eje  $X$  (sentido de la marcha) afectan significativamente la precisión de las lecturas basadas en Kinect; en consecuencia, las trayectorias articulares no coinciden con el sistema Vicon. El sistema de captura de movimiento con Kinect es de bajo costo y fácil instalación y se presenta como una opción para realizar un estudio preliminar de los parámetros cinemáticos de la marcha humana, que aunque no es de alta precisión, permitirá realizar estudios previos antes de dirigirse a centros especializados en la marcha.

Los resultados muestran una varianza mayor en las medidas antropométricas y trayectorias articulares para el Kinect; aunque este sistema es de bajo costo y de fácil uso e instalación, no puede ser utilizado para un análisis preciso de la cinemática de la marcha humana.

# Capítulo 2

## Modelado y Control de un Robot Bípido

### 2.1. Introducción

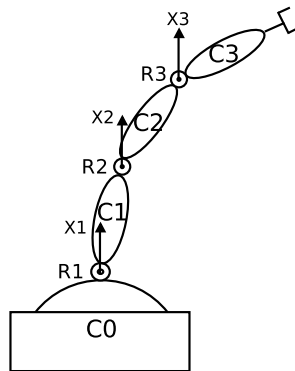
En este capítulo se describen los modelos geométrico, cinemático y dinámico del robot humanoide Bioloid. La configuración mecánica de los robots varía de acuerdo a la disposición de cada uno de sus cuerpos, clasificándolos en serial, arborescente, paralela y cerrada. Un robot humanoide como el *Bioloid* es un robot con estructura arborescente. El robot *Bioloid* de la empresa Coreana Robotis, tiene 18 grados de libertad, 12 para los miembros inferiores (6 en cada pierna) y 6 para los miembros superiores (3 en cada brazo). Con el propósito de simplificar el modelo del robot, solamente se tuvieron en cuenta los miembros inferiores y el torso para el modelado.

### 2.2. Estructuras serie, arborescente y cerrada

En esta sección se describe cada tipo de estructura y el procedimiento para seleccionar los ejes del sistema de referencia asociado a cada una de las articulaciones. Una vez seleccionados estos referentes se procede a determinar los parámetros geométricos necesarios para continuar con el desarrollo del modelo dinámico, utilizando el procedimiento descrito en [Khalil and Dombre, 2004].

### 2.2.1. Estructura serie

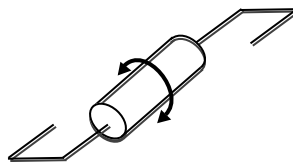
Una cadena cinemática se denomina serial si cada uno de los cuerpos que la compone tiene un solo predecesor y un solo sucesor. En la figura 2-1 se presenta una estructura serie compuesta de 4 cuerpos y 3 articulaciones rotoides.



**Figura 2-1:** Estructura cinemática serial.

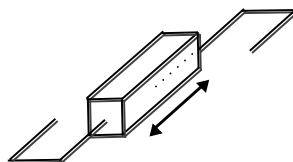
Las articulaciones que conforman el mecanismo pueden ser de dos tipos:

**Rotoide:** El movimiento de los dos cuerpos unidos por este tipo de articulación, se realiza rotatoriamente alrededor de un eje común, ver Figura 2-2.



**Figura 2-2:** Articulación rotoide.

**Prismática:** El movimiento de los dos cuerpos unidos por este tipo de articulación, se realiza traslacionalmente a lo largo de un eje común, ver Figura 2-3.



**Figura 2-3:** Articulación prismática.

A cada una de las articulaciones se le asocia un sistema de referencia para describir la posición de los cuerpos, unos en referencia a los otros. Se le llama  $R_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) al sistema de referencia asociado al cuerpo  $C_j$  y se escoge teniendo en cuenta las siguientes consideraciones [Khalil and Dombre, 2004]:

- Si la articulación que conecta los cuerpos  $C_{j-1}$  y  $C_j$  es prismática, entonces el eje  $z_j$  debe seleccionarse para que tenga la misma dirección del eje de desplazamiento de la articulación.
- Si la articulación que conecta los cuerpos  $C_{j-1}$  y  $C_j$  es rotoide, entonces el eje  $z_j$  debe seleccionarse para que coincida con el eje de rotación de la articulación.
- El eje  $x_j$  debe ser paralelo a la perpendicular común entre  $z_j$  y  $z_{j+1}$ . Si estos últimos son paralelos, la selección de  $x_j$  no será única, sin embargo es recomendable ubicarlo a lo largo del cuerpo involucrado.

Una vez seleccionados los sistemas coordenados asociados a cada uno de los cuerpos que componen la estructura, se procede a determinar los parámetros geométricos:

- $\alpha_j$ : Es el ángulo de rotación alrededor del eje  $x_{j-1}$  necesario para hacer coincidir el eje  $z_{j-1}$  con el eje  $z_j$ .
- $d_j$ : Es el desplazamiento necesario a lo largo del eje  $x_{j-1}$  para hacer coincidir el eje  $z_{j-1}$  con el eje  $z_j$ .
- $\theta_j$ : Es el ángulo de rotación alrededor del eje  $z_j$  necesario para hacer coincidir el eje  $x_{j-1}$  con el eje  $x_j$ .
- $r_j$ : Es el desplazamiento necesario a lo largo del eje  $z_j$  necesario para hacer coincidir el eje  $x_{j-1}$  con el eje  $x_j$ .

Los parámetros geométricos definen una matriz de transformación que permite pasar del referente  $j$  al referente  $j - 1$ ; el movimiento del robot se puede interpretar como la sucesión de transformaciones de sistemas de referencia, es por ello la importancia de la definición

de la siguiente matriz de transformación:

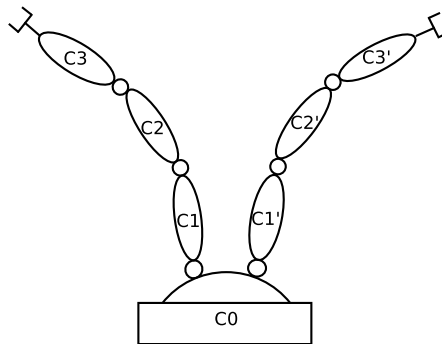
$${}^{j-1}\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & s\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$C\theta_j$  y  $S\theta_j$  son abreviaciones para  $\cos(\theta_j)$  y  $\sin(\theta_j)$ .

### 2.2.2. Estructura arborescente

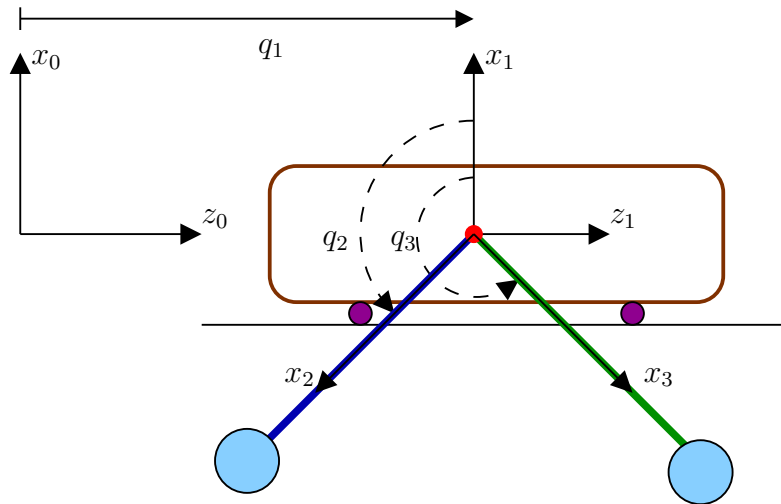
Una cadena cinemática se denomina arborescente si cada uno de los cuerpos que la compone tiene un único predecesor. Sin embargo, a diferencia de la cadena serie, en una arborescente un cuerpo puede tener más de un sucesor. En la Figura 2-4 se presenta una estructura en la cual el cuerpo  $C_0$  tiene como sucesores a los cuerpos  $C_1$  y  $C_1'$ .

Para la selección de los ejes de referencia  $z_j$  se utilizan las mismas reglas que en la sección precedente 2.2.1. Aunque para los ejes  $x_j$  la situación es diferente. Si el cuerpo  $i$  es el antecedente del cuerpo  $j$ , el eje  $x_i$  debe estar a lo largo de la perpendicular común entre  $z_i$  y  $z_j$ . Esto significa, por ejemplo, que si los cuerpos 2 y 3 están precedidos del cuerpo 1, entonces  $x_1$  debe satisfacer dos condiciones simultaneas: (i) debe estar a lo largo de la perpendicular común entre  $z_1$  y  $z_2$  y (ii) debe estar a lo largo de la perpendicular común entre  $z_1$  y  $z_3$ .



**Figura 2-4:** Estructura cinemática arborescente.

En el sistema presentado en la Figura 2-5, los ejes  $z_2$  y  $z_3$  son concurrentes y perpendiculares al plano de la página, por lo tanto existe un eje  $x_1$  que satisface las dos condiciones anteriores. En tal caso, el sistema, a pesar de ser arborescente, puede ser modelado con los mismos 4 parámetros geométricos de una estructura serial:  $\alpha_j$ ,  $d_j$ ,  $\theta_j$  y  $r_j$  (ver Tabla 2-1). En la Tabla 2-1 se definen adicionalmente los parámetros  $a(j)$  y  $\sigma_j$ . El primero indica el precedente del cuerpo  $j$  y el segundo indica si la articulación es prismática (1) o rotoide (0).



**Figura 2-5:** Sistema arborescente compuesto por un carro y dos péndulos con origen común.

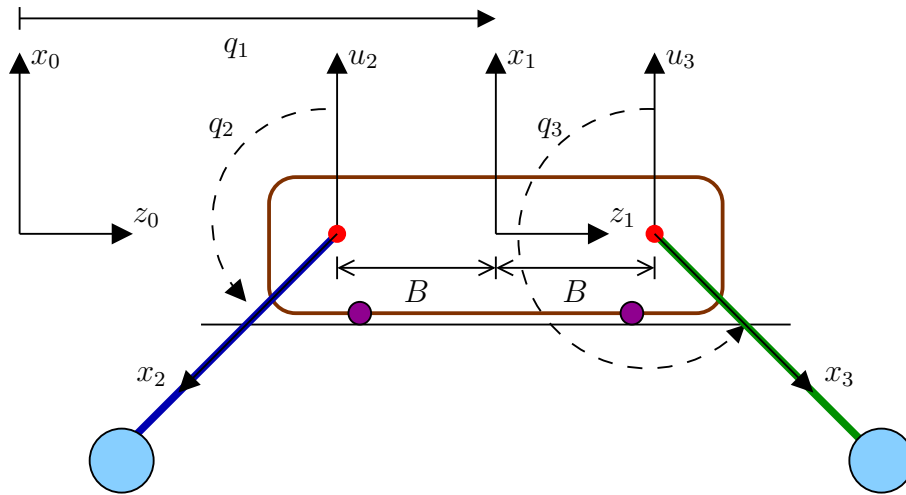
$j$	$a(j)$	$\sigma_j$	$\alpha_j$	$d_j$	$\theta_j$	$r_j$
1	0	1	$0^\circ$	0	0	$q_1$
2	1	0	$-90^\circ$	0	$q_2$	0
3	2	0	$-90^\circ$	0	$q_3$	0

**Tabla 2-1:** Parámetros geométricos del sistema arborescente presentado en la Figura 2-5.

En la estructura de la Figura 2-6 se presenta otro caso de arborescencia, donde las articulaciones 2 y 3 están separadas y por tanto al definir los ejes  $z_2$  y  $z_3$  aparecerá a una distancia constante entre ellos. A pesar de existir un eje  $x_1$  que satisfaga las dos condiciones mencionadas anteriormente, es necesario establecer ejes  $x$  adicionales que en el caso del presente ejemplo se denotarían  $u_2$ ,  $u_3$  y deberán satisfacer las siguientes condiciones:

(i)  $u_2$  debe estar a lo largo de la perpendicular común entre  $z_1$  y  $z_2$  (ii)  $u_3$  debe estar a lo largo de la perpendicular común entre  $z_1$  y  $z_3$ .

Una vez definidos los ejes  $u$  adicionales, se determinan los siguientes parámetros: (i)  $\gamma_j$ , como el ángulo entre  $x_i$  y  $u_j$  alrededor de  $z_i$  y (ii)  $b_j$  como la distancia ente  $x_i$  y  $u_j$  alrededor de  $z_i$ . Finalmente para este caso de arborescencia se trabaja con 6 parámetros geométricos; si se intentara trabajar con 4 parámetros siendo esto posible, la distancia que separa las articulaciones 2 y 3 del sistema de la Figura 2-6 no resultaría involucrada en el modelo del sistema.



**Figura 2-6:** Sistema arborescente compuesto por un carro y dos péndulos con origen diferente.

Con estos parámetros adicionales se conforma la Tabla 2-2. Así, la matriz de transformación  ${}^i\mathbf{T}_j$  se obtiene a partir de los 6 parámetros geométricos  $(\gamma_j, b_j, \alpha_j, d_j, \theta_j, r_j)$ .

$j$	$a(j)$	$\sigma_j$	$\gamma_j$	$b_j$	$\alpha_j$	$d_j$	$\theta_j$	$r_j$
1	0	1	$0^\circ$	0	$0^\circ$	0	0	$q_1$
2	1	0	$0^\circ$	$-B$	$-90^\circ$	0	$q_2$	0
3	2	0	$0^\circ$	$B$	$-90^\circ$	0	$q_3$	0

**Tabla 2-2:** Parámetros geométricos del sistema arborescente de la Figura 2-6.

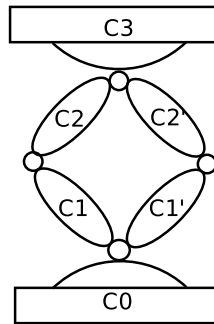


Con los parámetros anteriormente descritos se escribe la matriz de transformación que permite pasar del referente  $j$  al referente  $a(j)$  (siendo  $a(j)$  el antecedente de  $j$ ).

$${}^{a(j)}\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} C\gamma_j C\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -C\gamma_j S\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & S\gamma_j S\alpha_j & d_j C\gamma_j + r_j S\gamma_j S\alpha_j \\ s\gamma_j C\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -S\gamma_j S\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & -C\gamma_j S\alpha_j & d_j S\gamma_j - r_j C\gamma_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j + b_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

### 2.2.3. Estructura cerrada

Una cadena cinemática se denomina cerrada si cada uno de los cuerpos que la compone puede tener múltiples predecesores y múltiples antecesores. En la figura 2-7 el cuerpo  $C_0$  tiene como sucesores  $C_1$ ,  $C_1'$  y el cuerpo  $C_3$  tiene como predecesores a  $C_2$ ,  $C_2'$  formando una cadena cerrada.



**Figura 2-7:** Estructura cinemática cerrada.

La definición de los ejes de referencia y posterior obtención de los parámetros geométricos para este tipo de robots inicia con la construcción de una estructura arborescente equivalente realizando un corte en una articulación pasiva del lazo cerrado [Khalil and Dombre, 2004].



los ángulos de las variables motorizadas del robot.

$$q_p \triangleq \begin{bmatrix} {}^{\mathfrak{s}}p_0 \\ \sigma \\ q \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

El vector  ${}^{\mathfrak{s}}p_0$  y el conjunto  $\sigma$  definen la matriz de transformación que permite expresar una coordenada Cartesiana dada en el referente 0 en el referente inercial

$${}^{\mathfrak{s}}\mathbf{T}_0(\sigma) = \begin{bmatrix} {}^{\mathfrak{s}}\mathbf{R}_0(\sigma) & {}^{\mathfrak{s}}p_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.4. Modelo Geométrico Directo

El modelo geométrico directo calcula la posición y la orientación absoluta del cuerpo  $i$  ( $i \in 1, \dots, m$ ) con respecto al referente inercial. La tabla de parámetros geométricos para el robot humanoide Bioloid de la Figura 2-8 se presenta en la Tabla 2-3.

j	i	$\sigma_j$	$\alpha_j$	$d_j$	$\theta_j$	$r_j$
7	0	0	$-\pi/2$	$d_7$	$q_7$	$r_7$
8	0	0	$-\pi/2$	$d_8$	$q_8 + \pi$	$r_8$
9	7	0	$\pi/2$	0	$q_9 + \pi/2$	$r_9$
10	8	0	$-\pi/2$	0	$q_{10} - \pi/2$	$r_{10}$
11	9	0	$\pi/2$	0	$q_{11}$	0
12	10	0	$-\pi/2$	0	$q_{12}$	0
13	11	0	0	$d_{13}$	$q_{13}$	0
14	12	0	0	$d_{14}$	$q_{14}$	0
15	13	0	0	$d_{15}$	$q_{15}$	0
16	14	0	0	$d_{16}$	$q_{16}$	0
17	15	0	$-\pi/2$	0	$q_{17}$	0
18	16	0	$\pi/2$	0	$q_{18}$	0

**Tabla 2-3:** Parámetros Geométricos de los miembros inferiores del Robot Bioloid.

La transformación para pasar del marco de referencia 17 (pie derecho) al marco de referencia 0, se calcula en función de  ${}^i\mathbf{T}_j(q)$ , así:

$${}^0\mathbf{T}_{17}(q) = {}^0\mathbf{T}_7(q) {}^7\mathbf{T}_9(q) {}^9\mathbf{T}_{11}(q) {}^{11}\mathbf{T}_{13}(q) {}^{13}\mathbf{T}_{15}(q) {}^{15}\mathbf{T}_{17}(q)$$

La transformación  ${}^0\mathbf{T}_{17}(q)$  permite determinar la posición y la orientación del pie derecho con respecto al referente cero. Sin embargo, se desea expresar las posiciones en el marco de referencia inercial; esta matriz de transformación es definida por:

$${}^g\mathbf{T}_{17}(q_p) = {}^g\mathbf{T}_0(\sigma) {}^0\mathbf{T}_{17}(q)$$

Igualmente, para el pie izquierdo (marco de referencia 18):

$$\begin{aligned} {}^g\mathbf{T}_{18}(q_p) &= {}^g\mathbf{T}_0(\sigma) {}^0\mathbf{T}_{18}(q) \\ &= {}^g\mathbf{T}_0(\sigma) {}^0\mathbf{T}_8(q) {}^8\mathbf{T}_{10}(q) {}^{10}\mathbf{T}_{12}(q) {}^{12}\mathbf{T}_{14}(q) {}^{14}\mathbf{T}_{16}(q) {}^{16}\mathbf{T}_{18}(q) \end{aligned}$$

Las matrices de transformación  ${}^g\mathbf{T}_{17}(q_p)$  y  ${}^g\mathbf{T}_{18}(q_p)$  se utilizarán a lo largo de la presente investigación para determinar la altura del pie con el suelo y verificar que los impactos ocurran con el pie paralelo al suelo.

## 2.5. Modelo cinemático directo de primer orden

El modelo cinemático directo de primer orden permite expresar las velocidades lineal y angular de cada pie en función del vector de velocidades generalizadas  $q_v$ , definido como:

$$q_v \triangleq \begin{bmatrix} {}^0v_0 \\ {}^0\omega_0 \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Dónde:

$$\begin{aligned} {}^0v_0 &\triangleq {}^0\mathbf{R}_g \cdot {}^g v_0 \\ {}^0\omega_0 &\triangleq {}^0\mathbf{R}_g \cdot {}^g \omega_0 \end{aligned}$$

${}^g v_0$  y  ${}^g \omega_0$  son respectivamente las velocidades lineales y angulares del cuerpo cero (torso del robot) con respecto al marco de referencia galileano.  ${}^0\mathbf{R}_g$  es la transpuesta de la matriz  ${}^g\mathbf{R}_0$ . Los vectores  ${}^0v_0$  y  ${}^0\omega_0$  son respectivamente las velocidades lineales y angulares del cuerpo cero con respecto al marco de referencia galileano, descritas según las direcciones de los ejes del referente

cero (ver Figura 2-8). De manera general, los vectores  ${}^i v_j$  y  ${}^i \omega_j$  representan respectivamente la velocidad lineal y angular del cuerpo  $j$  con respecto al marco de referencia galileano, descritas según las direcciones de los ejes del referente  $i$ . Cabe anotar que  ${}^g v_0$  es la derivada con respecto al tiempo de  ${}^g p_0$ . Los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ , definen tres rotaciones sucesivas alrededor de ejes que pertenecen a distintos marcos de referencia. Cada rotación, es efectuada alrededor de un eje que pertenece al marco de referencia establecido por la rotación anterior. Por lo tanto, las velocidades de rotación no son las derivadas con respecto al tiempo de  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ . La relación entre  ${}^g \omega_0$  y las derivadas de los ángulos de orientación está dada por [Khalil and Dombre, 2004]:

$${}^g \omega_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\phi} + \begin{bmatrix} -S\phi \\ C\phi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} + \begin{bmatrix} C\phi C\theta \\ S\phi C\theta \\ -S\theta \end{bmatrix} \dot{\psi} \quad (2.5)$$

Como consecuencia de la ecuación anterior se tiene la derivada con respecto al tiempo de  $q_p$  es diferente de  $q_v$ , dado que  $\dot{\sigma} \neq {}^g \omega_0$ . Una vez entendido el vector de velocidades generalizadas  $q_v$ , se tiene que las velocidades lineales y angulares del pie derecho se pueden calcular a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} {}^g v_{17} \\ {}^g \omega_{17} \end{bmatrix} = {}^g \mathbf{J}_{17}(q_p) q_v \quad (2.6)$$

Para el pie izquierdo se tiene:

$$\begin{bmatrix} {}^g v_{18} \\ {}^g \omega_{18} \end{bmatrix} = {}^g \mathbf{J}_{18}(q_p) q_v \quad (2.7)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} {}^g \mathbf{J}_{17}(q_p) &= {}^g \mathbf{R}_{17}(q_p) {}^{17} \mathbf{J}_{17}(q) \\ {}^g \mathbf{J}_{18}(q_p) &= {}^g \mathbf{R}_{18}(q_p) {}^{18} \mathbf{J}_{18}(q) \end{aligned}$$

Las matrices  ${}^{17} \mathbf{J}_{17}(q) \in \mathbb{R}^{6 \times 18}$  y  ${}^{18} \mathbf{J}_{18}(q) \in \mathbb{R}^{6 \times 18}$  se calcularon a partir de la implementación en matemática simbólica del algoritmo de cálculo de velocidades descrito en la sección 5.5 de [Khalil and Dombre, 2004].

## 2.6. Modelo cinemático directo de segundo orden

El modelo cinemático directo de segundo orden permite expresar las aceleraciones lineal y angular de cada pie en función del vector de aceleraciones generalizadas  $q_a$ , definido como:

$$q_a \triangleq \begin{bmatrix} {}^0\dot{v}_0 \\ {}^0\dot{\omega}_0 \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Dónde:

$$\begin{aligned} {}^0\dot{v}_0 &\triangleq {}^0\mathbf{R}_g \cdot {}^g\dot{v}_0 \\ {}^0\dot{\omega}_0 &\triangleq {}^0\mathbf{R}_g \cdot {}^g\dot{\omega}_0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

${}^g\dot{v}_0$  y  ${}^g\dot{\omega}_0$  son respectivamente las aceleraciones lineales y angulares del cuerpo cero con respecto al marco de referencia galileano. Estas variables son las derivadas con respecto al tiempo de  ${}^g v_0$  y de  ${}^g \omega_0$ . De otra parte, al derivar con respecto al tiempo  ${}^0 v_0$  y  ${}^0 \omega_0$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}^0 v_0 &= {}^0\dot{\mathbf{R}}_g {}^g v_0 + {}^0\mathbf{R}_g {}^g\dot{v}_0 \\ \frac{d}{dt} {}^0 \omega_0 &= {}^0\dot{\mathbf{R}}_g {}^g \omega_0 + {}^0\mathbf{R}_g {}^g\dot{\omega}_0 \end{aligned}$$

Se reemplaza (2.9) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}^0 v_0 &= {}^0\dot{\mathbf{R}}_g {}^g v_0 + {}^0\dot{v}_0 \\ \frac{d}{dt} {}^0 \omega_0 &= {}^0\dot{\mathbf{R}}_g {}^g \omega_0 + {}^0\dot{\omega}_0 \end{aligned}$$

Se aplican las siguientes igualdades  ${}^0\dot{\mathbf{R}}_g {}^g v_0 = -{}^0\omega_0 \times {}^0 v_0$  y  ${}^0\dot{\mathbf{R}}_g {}^g v_0 = 0$  tomadas de [Rengifo, 2011]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}^0 v_0 &= {}^0\dot{v}_0 - {}^0\omega_0 \times {}^0 v_0 \\ \frac{d}{dt} {}^0 \omega_0 &= {}^0\dot{\omega}_0 \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se evidencia que  ${}^0\dot{v}_0$  NO corresponde a la derivada con respecto al tiempo de  ${}^0 v_0$ . En consecuencia, la derivada del vector velocidades generalizadas  $q_v$  no es el vector de

aceleraciones generalizadas  $q_a$ . La relación entre  $q_a$  y  $q_v$  es la siguiente [Rengifo, 2011]:

$$\dot{q}_v = q_a - \omega v_0, \quad \omega v_0 \triangleq \begin{bmatrix} {}^0\omega_0 \times {}^0v_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Una vez entendido el vector de aceleraciones generalizadas  $q_a$ , se procede a derivar con respecto al tiempo la cinemática de primer orden descrita por las ecuaciones (2.6) y (2.7)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^g\dot{v}_{17} \\ {}^g\dot{\omega}_{17} \end{bmatrix} &= \frac{d}{dt} [{}^g\mathbf{J}_{17}(q_p) q_v] \\ &= {}^g\dot{\mathbf{J}}_{17}(q_p) q_v + {}^g\mathbf{J}_{17}(q_p) \dot{q}_v \end{aligned}$$

Se reemplaza (2.10) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^g\dot{v}_{17} \\ {}^g\dot{\omega}_{17} \end{bmatrix} &= {}^g\dot{\mathbf{J}}_{17}(q_p) q_v + {}^g\mathbf{J}_{17}(q) q_a - {}^g\mathbf{J}_{17}(q_p) \omega v_0 \\ &= {}^g\mathbf{J}_{17}(q_p) q_a + R_{17}(q_p, q_v) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Siendo:

$$R_{17}(q_p, q_v) = {}^g\dot{\mathbf{J}}_{17}(q) q_v - {}^g\mathbf{J}_{17}(q) \omega v_0$$

Con base en un procedimiento similar se obtiene la cinemática de segundo orden para el pie izquierdo

$$\begin{bmatrix} {}^g\dot{v}_{18} \\ {}^g\dot{\omega}_{18} \end{bmatrix} = {}^g\mathbf{J}_{18}(q_p) q_a + R_{18}(q_p, q_v) \quad (2.12)$$

Siendo:

$$R_{18}(q_p, q_v) = {}^g\dot{\mathbf{J}}_{18}(q) q_v - {}^g\mathbf{J}_{18}(q) \omega v_0$$

La cinemática de segundo orden, descrita por las ecuaciones (2.11) y (2.12) será utilizada para deducir el efecto que tienen las restricciones generadas por el contacto del pie con el suelo en el vector  $q_a$ .

## 2.7. Modelo Dinámico del Robot

El modelo dinámico del robot es descrito por su ecuación de movimiento, esta a su vez se puede obtener a partir de la formulación clásica de Lagrange, [Landau and Lifshitz, 1978] o el algoritmo dinámico de Newton-Euler, [Featherstone, 2008]. Un algoritmo dinámico es un procedimiento para calcular los valores numéricos de las cantidades que son relevantes a la dinámica, tales como las fuerzas que actúan sobre el sistema (robot) y las aceleraciones que ellas producen. El algoritmo de Newton-Euler permite hacer el cálculo de la dinámica directa y la dinámica inversa, [Siciliano and Khatib, 2008]. La dinámica directa es muy usada en la simulación para calcular las aceleraciones de cada una de las articulaciones del robot, dada una fuerza aplicada. La dinámica inversa tiene una gran variedad de usos, como por ejemplo: sistemas de control de movimiento, generación de trayectorias, diseño mecánico y como un componente en el cálculo de la dinámica directa.

En virtud de lo anterior, el modelo dinámico del robot, se obtuvo a partir del algoritmo de Newton-Euler:

$$\mathbf{A}(q_p) q_a + H(q_p, q_v) = \mathbf{B} \Gamma + \mathbf{J}_r^T(q_p) F_r + \mathbf{J}_l^T(q_p) F_l \quad (2.13)$$

Aquí  $q \in \mathbb{R}^{18}$  es el vector de coordenadas generalizadas y los vectores  $q_v \in \mathbb{R}^{18}$  y  $q_a \in \mathbb{R}^{18}$  son respectivamente las velocidades y las aceleraciones generalizadas.  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{18 \times 18}$  es la matriz de inercia del robot.  $H \in \mathbb{R}^{18}$  es el vector de fuerzas centrífugas, gravitacionales y de Coriolis. La matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{18 \times 12}$  contiene únicamente unos y ceros. Las 6 primeras filas de  $\mathbf{B}$  son cero, indicando que  $\Gamma$  no incide directamente sobre las aceleraciones de las seis primeras coordenadas generalizadas. Las siguientes 12 filas de  $\mathbf{B}$  conforman una matriz identidad, indicando que  $\Gamma_i$  ( $i = 7, \dots, 18$ ) incide directamente sobre  $\ddot{q}_i$ .  $\Gamma \in \mathbb{R}^{12}$  es el vector de pares aplicados a las articulaciones del robot. Lo anterior conlleva a que  $\mathbf{B}$  cumpla con la siguiente propiedad:

$$\mathbf{B} \Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ \Gamma \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$\mathbf{J}_r \triangleq {}^g \mathbf{J}_{17} \in \mathbb{R}^{6 \times 18}$  es la matriz que permite expresar las velocidades lineales y angulares del pie derecho del robot con respecto al suelo.

$$\begin{bmatrix} {}^g v_{17} \\ {}^g \omega_{17} \end{bmatrix} = {}^g \mathbf{J}_{17}(q) \cdot q_v \quad (2.15)$$

La matriz  $\mathbf{J}_l \triangleq {}^g \mathbf{J}_{18} \in \mathbb{R}^{6 \times 18}$  permite expresar las velocidades lineales y angulares del pie



izquierdo del robot con respecto al suelo.

$$\begin{bmatrix} {}^g v_{18} \\ {}^g \omega_{18} \end{bmatrix} = {}^g \mathbf{J}_{18}(q) \cdot q_v \quad (2.16)$$

El vector  $F_r \in \mathbb{R}^6$  contiene las fuerzas y momentos de reacción generadas por el contacto entre el pie y el suelo. Si el pie derecho no está en contacto con el suelo  $F_r = 0$ . El vector  $F_l \in \mathbb{R}^6$  es el equivalente del vector  $F_r \in \mathbb{R}^6$  para el pie izquierdo.

### 2.7.1. Modelo de control para la fase de apoyo simple sobre el pie derecho

Cuando el robot se encuentra apoyado sobre el pie derecho, el modelo (2.13) puede reescribirse como:

$$\mathbf{A}(q_p) q_a + H(q_p, q_v) = \mathbf{B} \Gamma + \mathbf{J}_r^T(q_p) F_r \quad (2.17)$$

Teniendo en cuenta la cinemática de segundo orden y las restricciones de inmovilidad del pie derecho:

$$\begin{bmatrix} {}^g \dot{v}_{17} \\ {}^g \dot{\omega}_{17} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_r(q_p) q_a + R_{17}(q_p, q_v) = 0 \quad (2.18)$$

Se reescribe la restricción (2.18) bajo la forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{ru}(q_p) & \mathbf{J}_{rb}(q_p) \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_r(q_p)} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{au} \\ \ddot{q}_b \end{bmatrix}}_{q_a} + R_{17}(q_p, q_v) = 0 \quad (2.19)$$

Siendo  $q_{au}$  el vector de aceleraciones asociado a las coordenadas no accionadas y  $\ddot{q}_b = \ddot{q}$  el vector de coordenadas accionadas

$$q_{au} \triangleq \begin{bmatrix} {}^0 \dot{v}_0 \\ {}^0 \dot{\omega}_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad \ddot{q}_b \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{q}_7 \\ \vdots \\ \ddot{q}_{18} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12} \quad (2.20)$$

La matriz  $\mathbf{J}_{ru}(q_p) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  está compuesta por las 6 primeras columnas de  $\mathbf{J}_r(q_p)$ ,  $\mathbf{J}_{rb}(q_p) \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$  por las 12 columnas siguientes. Al despejar  $q_{au}$  de (2.19) se obtiene:

$$q_a = \begin{bmatrix} q_{au} \\ \ddot{q}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_{ru}^{-1}(q_p) \mathbf{J}_{rb}(q_p) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \ddot{q}_b + \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_{ru}^{-1}(q_p) R_{17}(q_p, q_v) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

La ecuación anterior, indica que el contacto entre el pie derecho y el suelo, conlleva a que las aceleraciones de las coordenadas no accionadas dependan directamente de las aceleraciones de las coordenadas accionadas. Con el fin de aligerar la notación matemática se definen las siguientes variables

$$\mathbf{M}(q_p) \triangleq \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_{ru}^{-1}(q_p) \mathbf{J}_{rb}(q_p) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad N(q_p, q_v) \triangleq \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_{ru}^{-1}(q_p) R_{17}(q_p, q_v) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Se reemplaza  $q_a = \mathbf{M} \ddot{q}_b + N$  en el modelo dinámico (2.17)

$$\mathbf{A}(q) \mathbf{M}(q_p) \ddot{q}_b + \mathbf{A}(q) N(q_p, q_v) + H(q_p, q_v) = \mathbf{B} \Gamma + \mathbf{J}_r^T(q_p) F_r \quad (2.23)$$

Se pre-multiplica la ecuación anterior por  $\mathbf{M}^T(q_p)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^T(q_p) \mathbf{A}(q) \mathbf{M}(q_p) \ddot{q}_b + \mathbf{M}^T(q_p) \mathbf{A}(q) N(q_p, q_v) + \mathbf{M}^T(q_p) H(q_p, q_v) \\ = \mathbf{M}^T(q_p) \mathbf{B} \Gamma + \mathbf{M}^T(q_p) \mathbf{J}_r^T(q_p) F_r \end{aligned}$$

Se simplifica el lado derecho de la ecuación anterior con base en las siguientes igualdades:

- Para el término que multiplica al vector de pares:

$$\mathbf{M}^T(q_p) \mathbf{B} \Gamma = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_{rb}^T(q_p) \mathbf{J}_{ru}^{-T}(q_p) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Gamma = \Gamma$$

- Para el término que multiplica al vector de fuerzas:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^T(q_p) \mathbf{J}_r^T(q_p) F_r &= \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_{rb}^T(q_p) \mathbf{J}_{ru}^{-T}(q_p) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{ru}^T(q_p) \\ \mathbf{J}_{rb}^T(q_p) \end{bmatrix} F_r \\ &= (-\mathbf{J}_{rb}^T(q_p) \mathbf{J}_{ru}^{-T}(q_p) \mathbf{J}_{ru}^T(q_p) + \mathbf{J}_{rb}^T(q_p)) F_r \\ &= 0 \end{aligned}$$

La expresión resultante es igual al modelo dinámico de una cadena cinemática sin restricciones de movilidad:

$$\Gamma = \mathbf{M}^T(q_p) \mathbf{A}(q) \mathbf{M}(q_p) \ddot{q}_b + \mathbf{M}^T(q_p) \mathbf{A}(q) N(q_p, q_v) + \mathbf{M}^T(q_p) H(q_p, q_v) \quad (2.24)$$

Con el fin de expresar el modelo anterior unicamente en términos de  $q_b$ ,  $\dot{q}_b$  y  $\ddot{q}_b$  se particionan los vectores  $q_p$  y  $q_v$  en términos de componentes accionados y no accionados

$$q_p = \begin{bmatrix} q_{pu} \\ q_b \end{bmatrix}, \quad q_v = \begin{bmatrix} q_{vu} \\ \dot{q}_b \end{bmatrix}$$

La restricción de movilidad del pie derecho permite expresar a  $q_{pu} \in \mathbb{R}^6$  en términos de  $q_b \in \mathbb{R}^{12}$  y a  $q_{vu} \in \mathbb{R}^6$  y  $\dot{q}_b \in \mathbb{R}^{12}$ . En el primer caso utilizando el modelo geométrico directo y en el segundo utilizando la cinemática de primer orden ( $q_{vu} = -\mathbf{J}_{ru}^{-1}(q) \mathbf{J}_{rb}(q) \dot{q}_b$ ). Al eliminar los componentes  $q_{pu}$  y  $q_{vu}$  de los vectores  $q_p$  y  $q_v$  estos se convierten respectivamente en  $q_b$  y  $\dot{q}_b$ . De esta manera la ecuación (2.24) se reduce a:

$$\Gamma = \mathbf{M}^T(q_b) \mathbf{A}(q_b) \mathbf{M}(q_b) \ddot{q}_b + \mathbf{M}^T(q_b) \mathbf{A}(q_b) N(q_b, \dot{q}_b) + \mathbf{M}^T(q_b) H(q_b, \dot{q}_b) \quad (2.25)$$

Si  $\ddot{q}_b$  es remplazada por la aceleración deseada  $\ddot{q}_b^d$  y es calculada como sigue, la ecuación (2.25) se convierte en una ley de control por par calculado (CTC) [Khalil and Dombre, 2004].

$$\ddot{q}_b^d = \ddot{q}^{ref} + k_v (\dot{q}^{ref} - \dot{q}_b) + k_p (q^{ref} - q_b) \quad (2.26)$$

Los vectores  $q^{ref} \in \mathbb{R}^{12}$ ,  $\dot{q}^{ref} \in \mathbb{R}^{12}$  y  $\ddot{q}^{ref} \in \mathbb{R}^{12}$  son las posiciones, velocidades y aceleraciones de las trayectorias de referencia, obtenidas a partir del sistema de captura de movimiento. Remplazando  $\ddot{q}_b^d$  en la Ec. (2.25), obtenemos las ecuaciones que permiten calcular el vector de pares articulares requeridos para que las coordenadas articulares sigan sus respectivos valores de referencia.

$$\Gamma = \mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M} \ddot{q}_b^d + \mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{N} + \mathbf{M}^T H \quad (2.27)$$

$$\ddot{q}_b^d = \ddot{q}^{ref} + k_v (\dot{q}^{ref} - \dot{q}_b) + k_p (q^{ref} - q_b) \quad (2.28)$$

Donde  $k_v$  y  $k_p$  son valores constantes que se escogen para que el error de seguimiento converja asintóticamente a cero.<sup>1</sup> Con un procedimiento similar puede obtenerse el modelo de control para la fase de apoyo simple sobre el pie izquierdo. En tal caso la única diferencia provendrá de la definición de la matriz  $\mathbf{M}$  y el vector  $N$  que ahora estarán expresados en términos de la

<sup>1</sup>El modelo de control para la fase de apoyo simple sobre el pie izquierdo, es equivalente en la estructura matemática de las ecuaciones al del pie derecho, intercambiando los subíndices  $r$  por  $l$ .

Jacobiana  $\mathbf{J}_l(q)$  de la Ec. (2.13). En el caso de la fase de soporte simultáneo sobre los dos pies, el robot bípedo se convierte en una cadena cinemática sobre-actuada, dado que el número de grados de libertad se reduce de 18 a 6 como consecuencia de las 12 restricciones holonómicas que impone la bipedestación (3 de posición y 3 de orientación por cada pie). Para esta configuración la sobre-actuación se sustenta en el hecho de tener 12 actuadores pero solo 6 grados de libertad. La obtención del modelo de control en bipedestación implica la re-definición del vector  $q_{au}$  que ahora tendrá seis variables adicionales. En resumen, independientemente de la configuración del robot, apoyo simple sobre el pie derecho, apoyo simple sobre el pie izquierdo o doble apoyo, el modelo dinámico siempre puede expresarse bajo la forma presentada por la Ec. (2.27).

## 2.8. Resumen

En este capítulo se presentó el modelo geométrico, cinemático y dinámico del robot Bioloid considerandolo como un sistema mecánico de referencia móvil. Estos modelos constituyen los elementos de base para la generación de trayectorias de un ciclo de marcha del robot. El modelo matemático del robot, permite calcular la ley de control y la formulación de un problema de optimización con restricciones, para adaptar las trayectorias obtenidas por captura de movimiento a las articulaciones del robot. Estas temáticas se tratarán en los dos capítulos siguientes.

# Capítulo 3

## Generación de Patrones de Marcha para un Robot Bípedo

### 3.1. Introducción

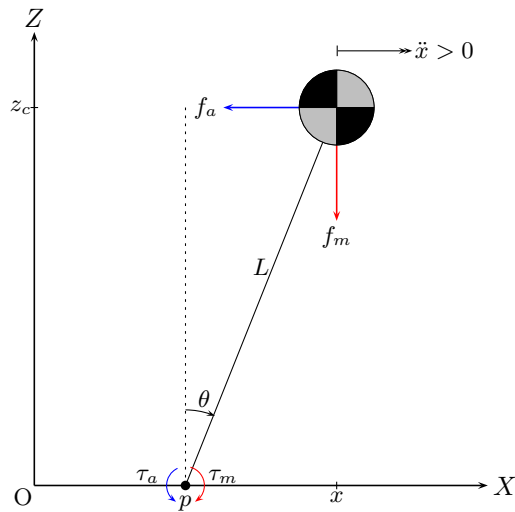
Al conjunto de series de ángulos articulares en el tiempo para una marcha deseada, se le denomina *patrón de marcha*. La marcha de los robots bípedos se clasifica según la proyección del centro de masa (CoM) en *marcha estática* y *marcha dinámica*. En el caso de la *marcha estática*, la proyección del CoM sobre el suelo nunca sale del polígono de soporte, mientras que en la *marcha dinámica* existen períodos en donde la proyección del CoM sobre el suelo abandona el polígono de soporte.

En este capítulo, se presentan dos generadores de patrones de marcha. El primero, basado en los modelos de *péndulo invertido* y *cart-table* planteados por Kajita [Kajita et al., 2001], [Kajita, 2003], [Kajita et al., 2006]. El otro es un generador de patrón de marcha mediante optimización, [Chevallerau and Aoustin, 2001]. Ambos se caracterizan por generar trayectorias articulares dinámicamente estables y se implementaron fuera de línea.

### 3.2. Generador de patrón de marcha basado en ZMP

Esta técnica de generación de trayectorias pre-calculadas, consta de cuatro etapas. En la primera se define  $ZMP^d(t) = (P_x^d(t), P_y^d(t))$ , que representa la trayectoria deseada para el punto de momento cero. Posteriormente a partir de  $ZMP^d(t)$  se obtiene la posición del centro de gravedad del robot denotada  $CoM^d(t)$ . La tercera etapa consiste en encontrar, vía cinemática inversa,





**Figura 3-2:** Diagrama representativo de las fuerzas que la masa  $M$  ejerce sobre la mesa. La posición  $(x, z_c)$  corresponde al centro de masa del robot.

$$\begin{aligned}
 \tau_m(p) &= L f_m \sin \theta \\
 &= L f_m \frac{(x - p)}{L} \\
 &= f_m (x - p)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

El momento debido a  $f_a$  es

$$\begin{aligned}
 \tau_a(p) &= L f_a \cos \theta \\
 &= L f_a \frac{z_c}{L} \\
 &= f_a z_c
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

De las ecuaciones (3.1) y (3.2) se obtiene que el momento resultante total alrededor del punto  $p$  es:

$$\begin{aligned}
 \tau(p) &= f_m (x - p) - f_a z_c \\
 &= M g (x - p) - M z_c \ddot{x}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

El punto  $p$  donde se cancelan  $\tau_m(p)$  y  $\tau_a(p)$  se denomina el punto de momento cero. Dicho punto, denotado  $p_{zmp}$ , satisface entonces la siguiente igualdad:

$$\tau_{zmp} = M g (x - p_{zmp}) - M z_c \ddot{x} = 0 \tag{3.4}$$

De la Ec. (3.4), se obtiene la ecuación diferencial que relaciona la posición del punto de momento

cero con la aceleración del centro de gravedad del robot

$$p_{zmp} = x - \frac{z_c}{g} \ddot{x} \quad (3.5)$$

A continuación se aplica la transformada de Laplace, con condiciones iniciales iguales a cero a la Ec. (3.5), con el fin de obtener la función de transferencia que relaciona la posición del centro de gravedad con la posición del punto de momento cero:

$$\frac{X(s)}{P_{zmp}(s)} = \frac{1}{1 - \frac{z_c}{g} s^2} \quad (3.6)$$

La anterior función de transferencia tiene dos polos reales, uno en  $s_1 = +\sqrt{g/z_c}$  y el otro en  $s_2 = -\sqrt{g/z_c}$ . Dado que uno de ellos tiene parte real positiva, el sistema representado por la Ec. (3.6) es inestable, indicando que para una entrada acotada del ZMP deseado  $p_{zmp}(t)$ , la salida resultante  $x(t)$  diverge. Una forma de resolver el anterior problema es utilizando la técnica de control realimentado descrita en la sección 3.2.2.

### 3.2.2. Preview Control

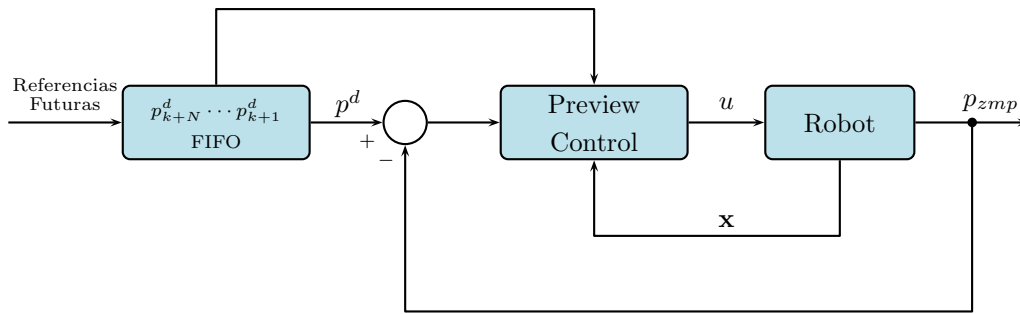
Si se considera que el *jerk* del carro  $\ddot{x}$  se puede imponer directamente mediante una entrada externa  $u$ , la Ec. (3.5) conlleva al siguiente modelo en espacio de estados:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.7)$$

$$p_{zmp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_c/g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

Para este sistema, es posible diseñar un controlador digital que permita a la salida  $p_{zmp}$  el seguimiento de la entrada de referencia  $p^d$ . Dicho control que utiliza información futura de la señal de referencia, es llamado *preview-control* [Katayama et al., 1985] , [Takaba, 2003]. El diagrama en bloques del sistema realimentado se muestra en la Figura 3-3.





**Figura 3-3:** Diagrama en bloques del *preview control*.

Para el sistema representado por la Ec. (3.7), se diseña un servo-controlador digital que permita minimizar, para cada instante de muestreo  $k$ , el índice de desempeño Ec. (3.8), el cual es una suma ponderada de dos factores. El primero busca penalizar la diferencia entre el ZMP deseado y el obtenido. El segundo, el esfuerzo de control  $u$ .

$$J(k) = \sum_{j=k}^{\infty} \left[ Q \left( p_j^d - p_j \right)^2 + R u_j^2 \right] \quad (3.8)$$

Donde  $Q$  y  $R$  son factores no negativos de ponderación. El problema de minimización Ec. (3.8), se resuelve para cada instante de muestreo  $k$  utilizando la ley de control (3.9) [Kajita and Espiau, 2008].

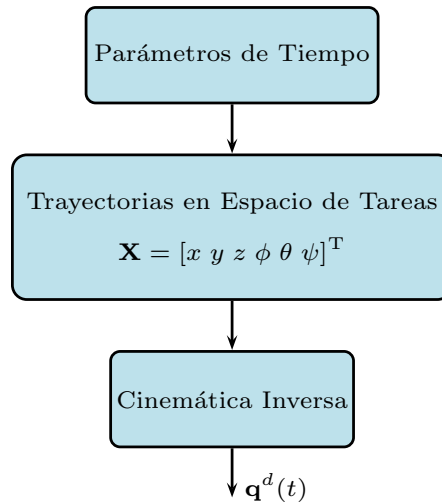
$$u(k) = -G_i \sum_{i=0}^k e(i) - G_x \mathbf{x}(k) - \sum_{j=1}^{N_l} G_p(j) p^d(k+j) \quad (3.9)$$

$$e(i) = p(i) - p^d(i)$$

Donde  $G_i$  es la ganancia (constante) para el error de seguimiento del ZMP,  $G_x$  es la ganancia (constante) de realimentación del estado y  $\mathbf{x}(k) \triangleq \begin{bmatrix} x & \dot{x} & \ddot{x} \end{bmatrix}^T$  es el valor del vector de estado en el instante  $k$ . El tercer término contiene las referencias del ZMP hasta  $N_l$  muestras futuras;  $G_p(j)$  (variable) es la llamada *ganancia previa* y depende del número de muestras  $N_l$  de las referencias futuras del ZMP. El esfuerzo de control Ec. (3.9) está compuesto de tres términos: la acción integral sobre el error de seguimiento del ZMP  $e(i)$ , la realimentación del vector de estado  $\mathbf{x}(k)$  y la acción *preview* mediante la referencia futura del ZMP  $p^d(k+j)$ .

Las referencias futuras del ZMP son almacenadas en un buffer FIFO (First-In-First-Out); la señal de control es calculada usando la referencia del ZMP y el estado  $\mathbf{x}$ . Los estados  $x$ ,  $\dot{x}$  son

el resultado del generador del patrón de marcha y el movimiento del CoM que satisface el ZMP deseado.



**Figura 3-4:** Diagrama en bloques del patrón de marcha basado en el modelo *cart-table*.

La manera de generar patrones de marcha usando el modelo *cart-table*, es permitir que el marco de referencia  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ , asociado al cuerpo 0 del robot<sup>1</sup> (parte superior del robot: tronco, cabeza y brazos) siga el movimiento del CoM obtenido mediante el preview-control. Además, se deben calcular las trayectorias en el espacio de tareas (posición y orientación  $[x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$ ) para el referente  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$  y los referentes  $\langle x_{rf}, y_{rf}, z_{rf} \rangle$ ,  $\langle x_{lf}, y_{lf}, z_{lf} \rangle$  de ambos pies. Estas trayectorias son convertidas en trayectorias articulares  $\mathbf{q}^d(t)$  por medio de la solución de la cinemática inversa, en esta parte del documento, a diferencia del capítulo 1 en donde la cinemática inversa se obtuvo por medio de optimización; ésta se calculó por medio del modelo geométrico inverso analítico del robot, presentado en el apéndice B, con el propósito de aligerar la carga computacional debida a los algoritmos utilizados en este capítulo. También se deben tener en cuenta los parámetros del tiempo (duración del paso, duración de simple y doble soporte). Este proceso se ilustra en el diagrama de bloques de la Figura 3-4.

### 3.2.3. Trayectorias de la marcha

Para la generación de las trayectorias, se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones:

- (i) El robot se desplaza sobre una superficie plana y horizontal.

---

<sup>1</sup>Ver Figura 2-8 del capítulo 2.

(ii) La secuencia del pie derecho e izquierdo es la misma, aunque desfasada: mientras un pie tiene la función de pie de apoyo (fase de soporte simple), el otro inicia su fase de oscilación y viceversa alternándose por una fase de doble soporte.

Las trayectorias para la marcha consisten en la posición cartesiana  $(x, y, z)$  y orientación en ángulos de Euler  $\phi, \theta, \psi$  para el referente  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$  asociado al cuerpo 0 del robot y cada uno de sus pies (pie derecho, denotado por el subíndice  $r$  y pie izquierdo  $l$ ) durante cada paso, es decir que se deben especificar los siguientes tres vectores en cada instante de la marcha:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_0 &= [x_0, y_0, z_0, \phi_0, \theta_0, \psi_0]^T \\ \mathbf{X}_{rf} &= [x_r, y_r, z_r, \phi_r, \theta_r, \psi_r]^T \\ \mathbf{X}_{lf} &= [x_l, y_l, z_l, \phi_l, \theta_l, \psi_l]^T\end{aligned}$$

La marcha propuesta es omnidireccional y considera que varias de las componentes de las coordenadas en el espacio de tareas se mantienen constantes durante toda la marcha, como lo es la altura del CoM  $z_c$ , asociada a la distancia vertical que existe desde el referente inercial (suelo), hasta el origen del referente  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ . También la desviación  $\phi$  del pie con respecto al eje  $x_g$  y  $\theta$  del pie con respecto al eje  $y_g$  se hacen nulas, para mantener siempre los pies paralelos al suelo durante el ciclo de marcha. Los ángulos  $(\phi, \theta, \psi)$  constituyen una medida de la desalineación de los ejes del pie con respecto a los ejes del referente galileano.

Los parámetros del tiempo (duración del paso  $T_p$ , duración de doble soporte  $T_{ds}$  y soporte simple  $T_{ss}$ ) para un caminado estable, se establecieron según la recomendación presentada en [Al-shuka et al., 2014].

$$\begin{aligned}T_{ss} &= 0.8 \cdot T_p && 80\% \text{ del paso} \\ T_{ds} &= 0.2 \cdot T_p && 20\% \text{ del paso}\end{aligned}$$

Los parámetros de simulación utilizados para el ciclo de marcha del Robot Bioid, se muestran en la Tabla 3-1.

La Figura 3-5, muestra la proyección del CoM y el ZMP sobre la dirección de la marcha (eje  $x$ ) y el eje  $y$  en función del tiempo. Se puede observar que la longitud del paso permanece constante en el patrón de marcha. La trayectoria del ZMP se diseñó de tal forma que el ZMP no abandone

Parámetro	Valor	Descripción
$g$	$9.8 [m/s^2]$	gravedad
$z_c$	$21.3 \times 10^{-3} [m]$	altura del CoM
$Lp$	$4 \times 10^{-2} [m]$	longitud del paso
$Wp$	$8 \times 10^{-2} [m]$	distancia entre el centro de los pies
$Tp$	$2 [seg]$	duración del paso
$Np$	6	número de pasos
$h$	$0.005 [seg]$	periodo de muestreo
$Q$	1	factor de ponderación
$R$	$1 \times 10^{-4}$	factor de ponderación
$N_l$	320	número de muestras futuras del ZMP

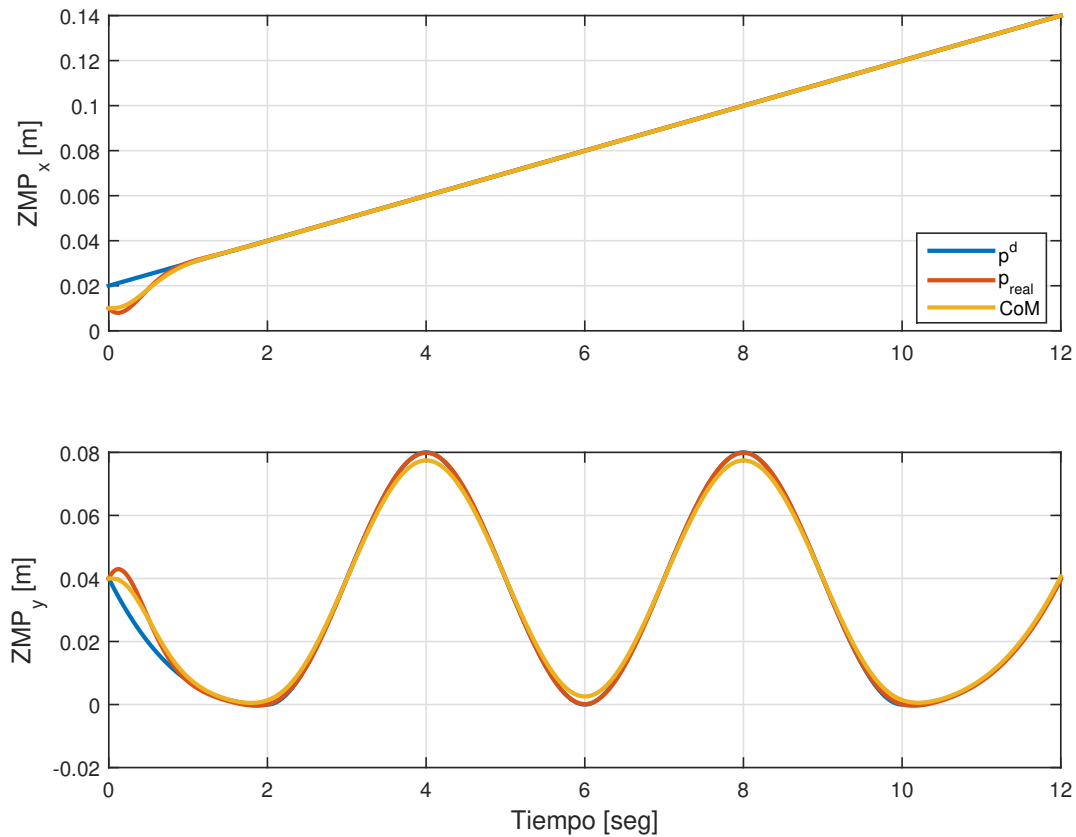
**Tabla 3-1:** Parámetros de simulación

nunca el polígono de soporte en cada una de las fases del marcha del robot, para garantizar la estabilidad del robot mientras camina.

La trayectoria cartesiana en  $x$ , indica el avance (sentido de la marcha) del pie del robot; la trayectoria en  $y$  muestra el camino geométrico que debe seguir el pie para dar los pasos preestablecidos (3 pasos por cada pie), mientras que la trayectoria en  $z$ , se mantiene constante con el fin de lograr una marcha omnidireccional. Las Figuras 3-6 y 3-7, muestran el resultado obtenido de la simulación del diagrama de bloques de la Fig. 3-4. Se puede observar que para las trayectorias  $x$  y  $y$  los pies se alternan simétricamente para avanzar según la dirección preestablecida; mientras el pie derecho está en fase de oscilación el pie izquierdo esta en fase de soporte simple y viceversa. En simulación, los errores de la orientación de cada uno de los pies son del orden de  $10^{-6}$ , garantizando que el pie está siempre paralelo al suelo. El error de seguimiento en la trayectoria  $z$  es menor a  $10^{-15}$ , asegurando que la marcha es omnidireccional.

Las Figuras 3-8 y 3-9, son las trayectorias angulares  $\mathbf{q}^d(t)$ , necesarias para hacer el seguimiento en el espacio articular de las trayectorias impuestas en el espacio de tareas y que son definidas por las trayectorias cartesianas en las Figuras 3-6 y 3-7.

Los ángulos de cada articulación para los miembros inferiores (piernas del robot) son denotados por  $Q_i$   $i \in \{7, 8, \dots, 18\}$ . Las variables son distribuidas de acuerdo al ID de cada servo-motor Dynamixel que componen al Robot Bioid: la pierna derecha corresponde a los números impares ( $Q_7$  a  $Q_{17}$ ) y la pierna izquierda a los números pares ( $Q_8$  a  $Q_{18}$ ). La distribución de estas variables se pueden observar en la Figura 2-8 del capítulo 2.

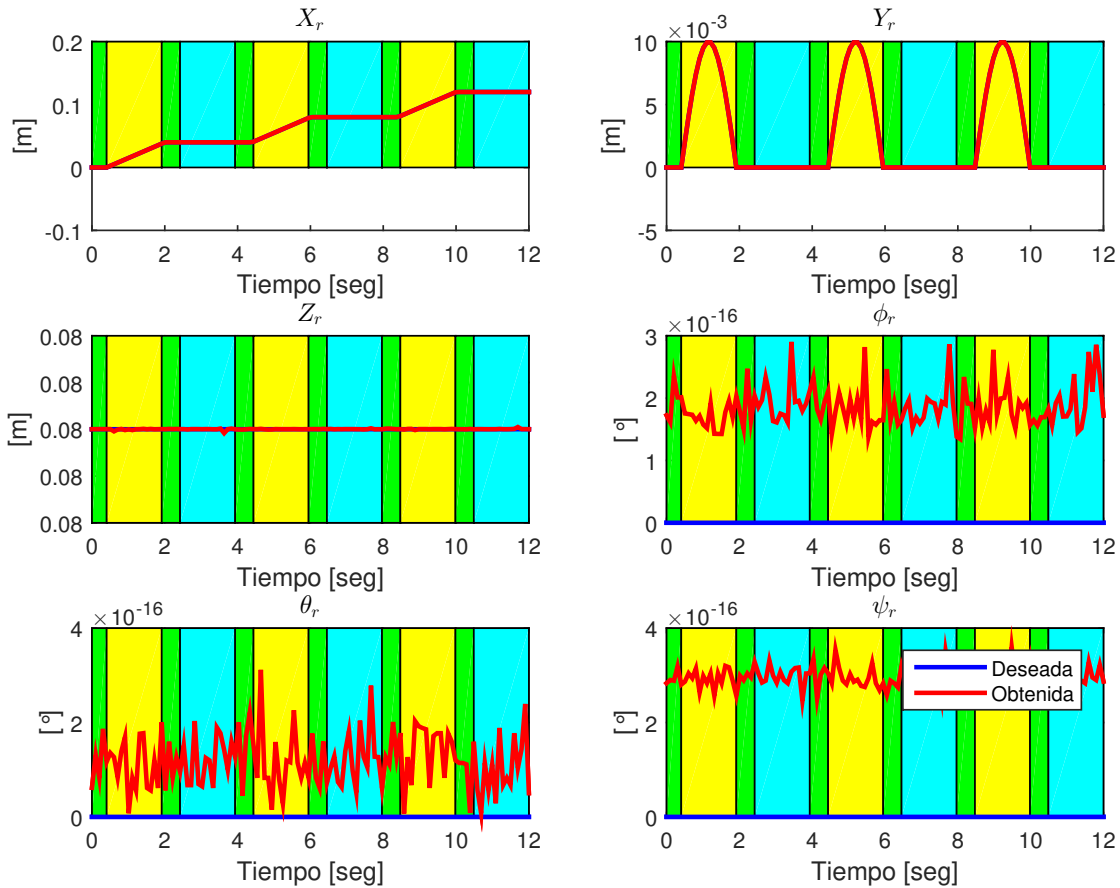


**Figura 3-5:** Trayectorias del ZMP y CoM.

Un video de la simulación del robot para el ciclo de marcha, utilizando el modelo *cart-table* presentado en esta sección y determinado por las trayectorias articulares de las figuras, Fig. 3-8 y 3-9; se puede observar en la Fig. 3-10.<sup>2</sup>

Como se observa en el video de la Fig. 3-10 el seguimiento del CoM permite que el peso del robot sea transferido hacia la pierna de apoyo en cada paso de la marcha. La siguiente sección 3.3 de este capítulo, está dedicada a un generador de patrones de marcha basado en optimización. Aunque ambos deben garantizar la estabilidad del robot mientras camina, su formulación y procedimiento son muy diferentes.

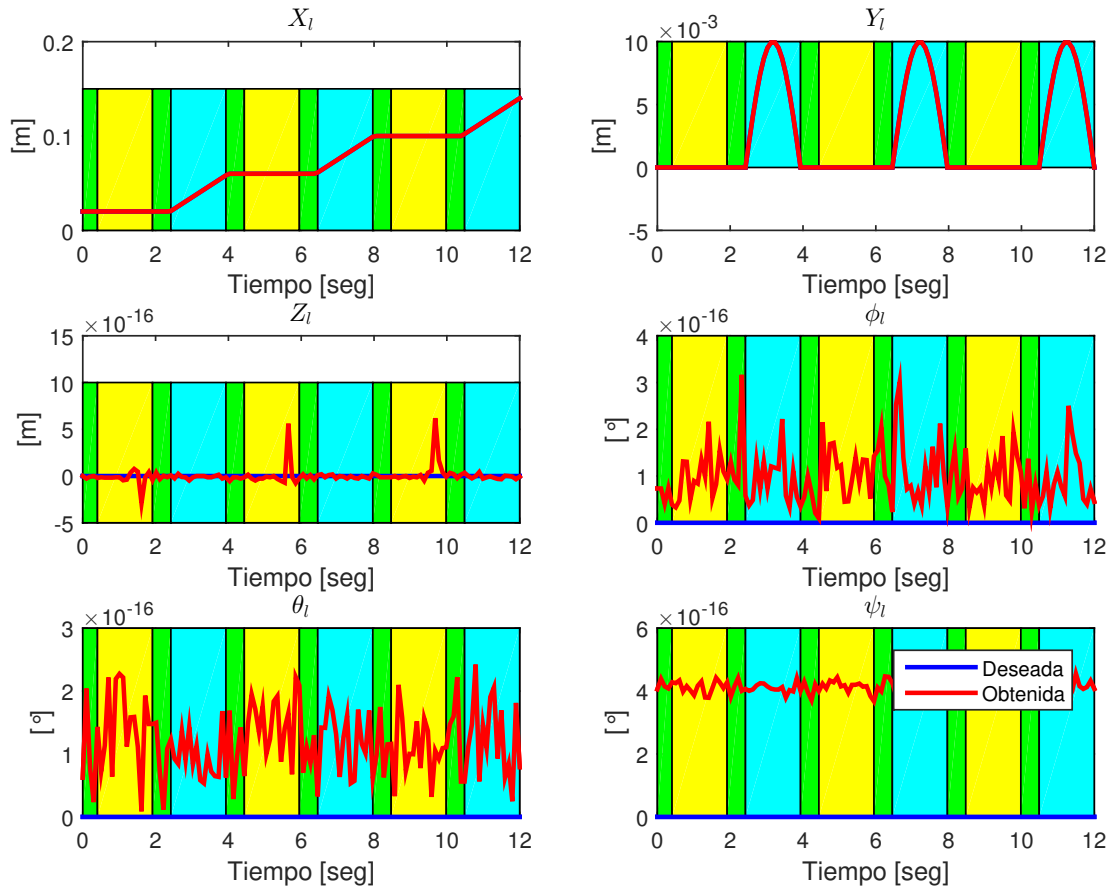
<sup>2</sup>Para ver el video se debe habilitar el lector de pdf y estar conectado a Internet.



**Figura 3-6:** Trayectorias Cartesianas de la marcha.  $(x_r, y_r, z_r)$  corresponden a la posición cartesiana del pie derecho,  $(\phi_r, \theta_r, \psi_r)$  corresponden a la orientación del pie derecho. El color verde indica la fase de doble soporte, el amarillo es la fase de soporte simple sobre el pie izquierdo, mientras que el color azul establece la fase de soporte simple para el pie derecho.

### 3.3. Generador de patrón de marcha basado en Optimización

La marcha es una secuencia continua de fases (ver apéndice A); cada fase es caracterizada por un modelo dinámico y sus restricciones. Para garantizar la marcha de un robot bípedo, es necesario generar movimientos perfectamente coordinados que garanticen el equilibrio del robot; esto se logra respetando todas las restricciones cinemáticas y dinámicas. Una forma de resolver el problema, es encontrar una solución a partir de las ecuaciones dinámicas y las restricciones, que permitan minimizar un índice de desempeño o función de costo, para un ciclo de marcha. Por lo



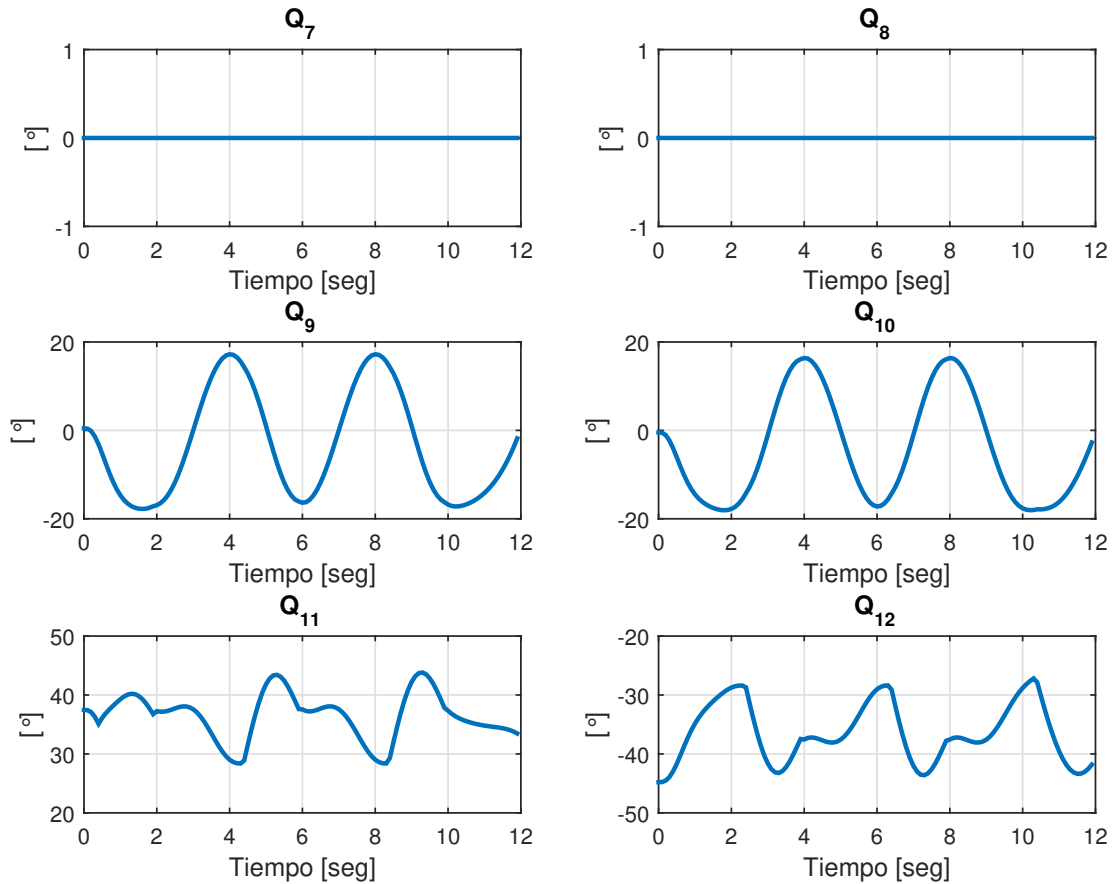
**Figura 3-7:** Trayectorias Cartesianas de la marcha.  $(x_l, y_l; z_l)$  corresponden a la posición cartesiana del pie izquierdo,  $(\phi_l, \theta_l, \psi_l)$  corresponden a la orientación del pie izquierdo. El color verde indica la fase de doble soporte, el amarillo es la fase de soporte simple sobre el pie izquierdo, mientras que el color azul establece la fase de soporte simple para el pie derecho.

tanto, se debe tener en cuenta el modelo dinámico completo del robot, Ec. (3.10)<sup>3</sup> con todas las restricciones impuestas, expresadas en la función  $g(\cdot)$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(q) q_a + H(q, q_v) &= \mathbf{B} \Gamma + \mathbf{J}_r^T(q) F_r + \mathbf{J}_l^T(q) F_l \\ g(q, q_v, \Gamma, F_l, F_r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

En esta sección se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

<sup>3</sup>El modelo dinámico está descrito en el capítulo 2.

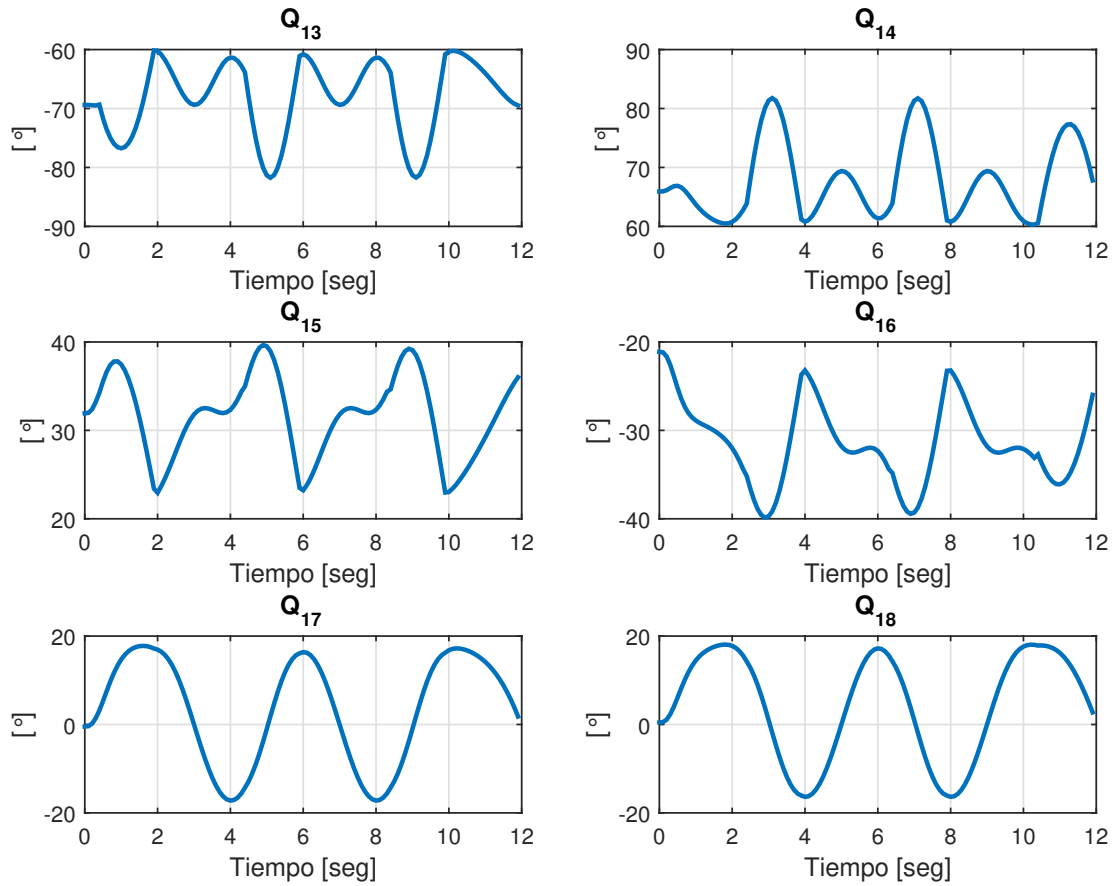


**Figura 3-8:** Trayectorias Articulares de la marcha.  $Q_7$  y  $Q_8$  corresponden a la rotación de la cadera en el plano transversal,  $Q_9$  y  $Q_{10}$  corresponden a la aducción de la cadera,  $Q_{11}$  y  $Q_{12}$  corresponden a la flexión-extensión de la cadera.

- (i) El robot se desplaza sobre una superficie plana y horizontal.
- (ii) La secuencia del pie derecho e izquierdo es la misma, aunque desfasada: mientras un pie tiene la función de pie de apoyo (fase de soporte simple), el otro inicia su fase de oscilación y viceversa alternándose por una fase de doble soporte.
- (iii) La velocidad y aceleración de los pies es igual a cero cuando el pie aterriza sobre el suelo, por lo tanto el modelo de impacto no es considerado.

La evolución articular del pie en balanceo es definida por una función polinomial de tercer orden  $q_b(t)$ , donde los coeficientes del polinomio son calculados usando las posiciones y velocidades





**Figura 3-9:** Trayectorias Articulares de la marcha.  $Q_{13}$  y  $Q_{14}$  corresponden a la flexión-extensión de la rodilla,  $Q_{15}$  y  $Q_{16}$  corresponden a la dorsiflexión del pie,  $Q_{11}$  y  $Q_{12}$  corresponden al giro vertical (guiñada) de los pies.

angulares iniciales y finales.

$$q_b(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3, \quad (3.11)$$

Siendo  $C_i \in \mathbb{R}^{12}$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) los vectores que contienen los coeficientes de los 12 polinomios. Los vectores de coeficientes  $C_i$  se pueden definir en términos de las posiciones y de las velocidades

**Figura 3-10:** Video. Simulación del ciclo de marcha de Bioloid basado en ZMP. Disponible en: <https://youtu.be/-WMri4EztMg>

angulares iniciales y finales, siendo  $T$  el tiempo de duración del paso.

$$\begin{aligned}
 q_b(0) &= C_0 \\
 q_b(T) &= C_0 + C_1 T + C_2 T^2 + C_3 T^3 \\
 \dot{q}_b(0) &= C_1 \\
 \dot{q}_b(T) &= C_1 T + 2 C_2 T + 3 C_3 T^2
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Al resolver el sistema anterior se obtiene:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}_{48 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -3T^{-2}\mathbf{I} & 3T^{-2}\mathbf{I} & -2T^{-1}\mathbf{I} & -T^{-1}\mathbf{I} \\ 2T^{-3}\mathbf{I} & -2T^{-3}\mathbf{I} & T^{-2}\mathbf{I} & T^{-2}\mathbf{I} \end{bmatrix}_{48 \times 48} \begin{bmatrix} q_b(0) \\ q_b(T) \\ \dot{q}_b(0) \\ \dot{q}_b(T) \end{bmatrix}_{48 \times 1} \tag{3.13}$$

Siendo  $\mathbf{I}$  una matriz identidad de  $12 \times 12$  y  $\mathbf{0}$  una matriz de ceros de  $12 \times 12$ .

### 3.3.1. Índice de desempeño y restricciones

En los motores eléctricos y para un ciclo de marcha, la mayor parte del consumo de energía es originado por la fricción y el efecto Joule [Chevallerau and Aoustin, 2001]. Entonces, el criterio de optimización es proporcional a esta pérdida de energía. El índice de desempeño o función de

costo, seleccionado en esta parte del trabajo es el que permite minimizar los pares de los motores del robot, integrando el promedio de la suma del cuadrado de los torques (norma Euclidiana del vector de pares), así:

$$J(q) = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma^T(q) \cdot \Gamma(q) dt \quad (3.14)$$

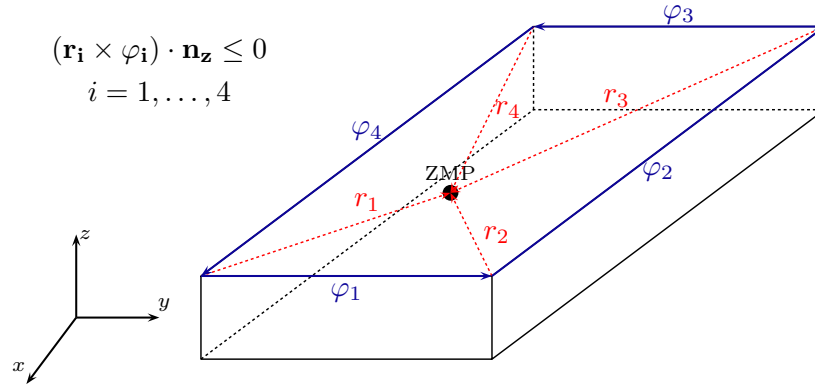
Donde  $T$  es el tiempo que se demora el robot en dar un paso y  $\Gamma^T$  es el vector de torques transpuesto. En general,  $J(q)$  puede ser cualquier función con sentido físico. Por ejemplo: si se desea minimizar la energía consumida por los actuadores del robot,  $J(q)$  deberá ser una función que integre los torques de los actuadores; también es posible minimizar el *jerk* para obtener movimientos *suaves* del robot. Si lo que se desea es que el movimiento del robot sea semejante a la marcha humana,  $J(q)$  debería minimizar la diferencia de las trayectorias de un ser humano<sup>4</sup> y el robot, como el caso del capítulo 4. Los problemas para el cálculo de la Ec. (3.14) son variados; éstos incluyen el cálculo de la dinámica inversa, cinemática inversa, entre otros. El cálculo de los pares  $\Gamma \in \mathbb{R}^{12}$  se hace mediante la dinámica inversa, Ec. (2.25) del capítulo 2.

Las restricciones impuestas a este problema de optimización son:<sup>5</sup>

- (i) La componente normal de la fuerza de reacción  $F_{rn}$  ejercida por el suelo sobre el pie de apoyo debe ser positiva.
- (ii) La fuerza tangencial  $F_{tn} \in \mathbb{R}^2$  debe permanecer en el interior del cono de fricción, para evitar que el pie en apoyo se deslice.
- (iii) El pie derecho debe estar siempre en contacto con el suelo.
- (iv) El actuador de cada articulación debe ejercer un par menor  $\Gamma^{max} \in \mathbb{R}^{12}$  al par máximo permitido.
- (v) El punto de momento cero (ZMP) debe permanecer dentro del polígono de soporte formado por la superficie de contacto entre el pie y el suelo (fase de soporte simple) o la envolvente mínima convexa de ambos pies y el suelo (fase de doble soporte). La Fig. 3-11 ilustra esta condición. Aquí  $\varphi_i$  es un vector a lo largo de los límites del polígono de soporte (pie del robot) y  $\mathbf{r}_i$  es el vector de posición desde cada uno de los vértices del polígono de soporte hasta el ZMP y  $\mathbf{n}_z$  es un vector unitario sobre el eje  $z$ .
- (vi) Las posiciones y las velocidades al inicio y finalización de cada paso, deben satisfacer *condiciones de simetría* para generar movimientos de marcha continuos.

<sup>4</sup>Obtenidas mediante captura de movimiento

<sup>5</sup>El lector puede encontrar en la lista de símbolos (al inicio de este trabajo), cada uno de los símbolos que representan las variables físicas utilizadas a lo largo de este documento.



**Figura 3-11:** Pie del robot. (polígono de soporte).

En resumen, el problema de optimización se puede escribir como:

$$\text{Minimice: } J(\theta) = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma^T(q(t)) \cdot \Gamma(q(t)) dt$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a: } & F_{rn}(t) \geq 0 \quad 0 \leq t \leq T \\ & |F_{tn}(t)| < \mu \cdot F_{rn}(t) \quad 0 \leq t \leq T \\ & {}^s p_{17}(q, \sigma) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \\ & |\Gamma(t)| \leq \Gamma^{max} \quad 0 \leq t \leq T \\ & (\mathbf{r}_i \times \varphi_i) \cdot \mathbf{n}_z \leq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \\ & q(T) = \mathbf{E} \cdot q(0) \end{aligned} \tag{3.15}$$

El índice de desempeño Ec. (3.14) es un funcional. Es decir, una función que depende de otra función. Este tipo de problemas de optimización se denominan problemas de *cálculo de variaciones* y son complejos de resolver. La parametrización del problema es una alternativa eficiente para enfrentar estas dificultades

Dada la dificultad en su solución, sobre todo cuando la función a encontrar está sujeta a desigualdades matemáticas, la Ec. (3.14) se transformará en un problema de *optimización paramétrica*. En este tipo de problemas, la incógnita no es un vector de funciones del tiempo, sino un vector  $\theta$  que contiene los parámetros de un conjunto de funciones previamente determinado.

A diferencia de los trabajos mencionados en [Chevallerau and Aoustin, 2001], [Tlalolini et al., 2009], y [Tlalolini et al., 2011] en los cuales se utilizan polinomios de tercer orden para parametrizar  $q(t)$ . En esta parte del trabajo se utilizaron las series de Fourier para describir las trayectorias

$q(t)$ . Una de las principales razones para la utilización de las series de Fourier es que, al ser la locomoción humana un proceso periódico, es deseable mantener esta característica para preservar la fluidez y naturalidad en los movimientos del robot. Bajo esta hipótesis,  $q(t)$  puede ser analizada por medio de la expansión de series de Fourier.

### 3.3.2. Trayectorias parametrizadas como una expansión de series de Fourier

Las series de Fourier son una herramienta matemática utilizada para el análisis de funciones periódicas, descritas por una suma ponderada de sinusoides [Suslov, 2003]. Dada una función  $q(t)$  continua a tramos, con periodo  $T_0$  y de cuadrado integrable en el intervalo  $[-T_0/2, T_0/2]$ , así:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |q(t)|^2 dt < +\infty$$

La expansión en series de Fourier de  $q(t)$  es:

$$q(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\omega_0 t + b_i \sin i\omega_0 t) \quad (3.16)$$

Donde,  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  [rad/seg] es la frecuencia fundamental de  $q(t)$  y  $a_0, a_n, b_n$  son los coeficientes de Fourier. Sin embargo, la expansión en series de Fourier para las trayectorias articulares del robot implica un número infinito de coeficientes desconocidos., en el caso del presente trabajo solamente se considerarán los  $n$  primeros armónicos. Esto nos permite formular un problema de mínimos cuadrados para determinar los coeficientes desconocidos de la serie de Fourier:

$$q(t) = \varphi(t)^T \theta \quad (3.17)$$

Donde:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega_0 t, \dots, \cos i\omega_0 t & \sin \omega_0 t, \dots, \sin i\omega_0 t \end{bmatrix}^T$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_0 & a_1, \dots, a_i & b_1, \dots, b_i \end{bmatrix}^T$$

$\varphi(t)$  es el vector de regresión y  $\theta$  es el vector con los coeficientes de la serie truncada de Fourier.

La idea básica es utilizar una expansión en series de Fourier de las trayectorias  $q(t)$  de cada una de las articulaciones, considerando solamente los primeros  $n$  términos de la serie. De esta manera, es posible obtener una trayectoria con propiedades específicas en el dominio de la frecuencia, por ejemplo: armónicos de orden bajo para evitar vibraciones u oscilaciones no deseadas en el robot.

### 3.3.3. Solución del problema de optimización

Para resolver el problema de optimización Ec. (3.15), se utilizará un *método de penalización* [Polyakova and Karelin, 2014]. Los métodos de penalización son ampliamente utilizados en programación no lineal. La idea básica de los métodos de penalización es convertir un problema de optimización con restricciones en un problema de optimización sin restricciones. Una desventaja de utilizar esta técnica, es que se requiere una solución inicial que debe ser compatible con factores de penalización muy cercanos a cero. Debe existir un compromiso entre la exactitud de la solución encontrada y la capacidad del algoritmo para evitar soluciones numéricas que tienden a degenerarse [Chevallerau et al., 2009].

El problema de optimización Ec. (3.15) se puede transformar en:

$$\min_{\theta} V(\theta) = \min_{\theta} [J(\theta) + P_b(\mathbf{H}(q, \dot{q}, \ddot{q})) + P_u(\mathbf{G}(q, \dot{q}, \ddot{q}))] \quad (3.18)$$

Donde  $V$  es la nueva función a minimizar que está conformada por la suma del índice de desempeño original  $J(\theta)$  y las penalizaciones generadas por la violación de las restricciones bilaterales y unilaterales.  $\mathbf{H}(q, \dot{q}, \ddot{q})$  es una función de valor vectorial cuyos componentes son iguales a cero cuando se satisfacen todas las restricciones bilaterales en todos los instantes de tiempo para un ciclo completo de marcha. Ejemplos de restricciones bilaterales son las relacionadas con la orientación de los pies y la condición de simetría de la marcha.  $\mathbf{G}(q, \dot{q}, \ddot{q})$  es una función de valor vectorial cuyos componentes son menores que cero cuando satisfacen todas las restricciones unilaterales para todos los instantes de tiempo en un ciclo completo de marcha. Ejemplos de restricciones unilaterales son las debidas a las fuerzas de reacción, condición de no deslizamiento, saturación de actuadores y punto de momento cero.

$P_b$  es una función de valor real que es igual a cero si todos los componentes de  $\mathbf{H}$  son cero. Si al menos uno de los elementos de  $\mathbf{H}$  es distinto de cero,  $P_b$  toma un valor muy grande; la función `penalty_eq` penaliza las restricciones bilaterales. Esta función fue escrita en Matlab ©, como se muestra a continuación.

```

% Penalties for the problem equalities
function [PEq]          = penalty_eq(Eq)
    Eq                  = max(abs(Eq)-1E-3,0);
    PEq                 = 1E6 * sum( exp(10*abs(Eq)) - 1);
end

```

$P_u$  es una función de valor real que es igual a cero si todos los componentes de  $\mathbf{G}$  son menores que cero. Si al menos uno de los elementos de  $\mathbf{G}$  viola esta condición,  $P_u$  toma un valor muy grande; la función `penalty_ineq`, penaliza las restricciones unilaterales, esta función se codificó en Matlab ©, como se muestra abajo.

```

% Penalties for the problem inequalities
function [PIneq]       = penalty_ineq(InEq)
    PIneq               = 1E10 * sum( exp(100*max(InEq,0) ) - 1);
end

```

La principal característica de las funciones de penalización  $P_b$  y  $P_u$ , es que son iguales a cero cuando las restricciones son satisfechas, pero toman un valor muy grande cuando éstas son violadas. De tal manera que el algoritmo no realiza la búsqueda del mínimo de  $V$  en esta región. Las penalizaciones  $P_b$  y  $P_u$  modifican la función de costo original  $J(\theta)$ , incrementando su valor en aquellas regiones donde no se satisfacen las restricciones.

Una de las características principales al resolver el problema del cálculo de trayectorias mediante optimización, es que solamente se deben calcular las trayectorias articulares para un paso, basándose en el hecho de que el ciclo de marcha debe ser simétrico. Esto significa que la configuración articular de la pierna derecha en los pasos impares debe ser igual a la configuración de la pierna izquierda en los pasos pares, así:

$$\begin{array}{lll}
 q_7(t+T) = -q_8(t) & q_9(t+T) = -q_{10}(t) & q_{11}(t+T) = -q_{12}(t) \\
 q_8(t+T) = -q_7(t) & q_{10}(t+T) = -q_9(t) & q_{12}(t+T) = -q_{11}(t) \\
 q_{13}(t+T) = -q_{14}(t) & q_{15}(t+T) = -q_{16}(t) & q_{17}(t+T) = -q_{18}(t) \\
 q_{14}(t+T) = -q_{13}(t) & q_{16}(t+T) = -q_{15}(t) & q_{18}(t+T) = -q_{17}(t)
 \end{array}$$

Al evaluar las ecuaciones anteriores en  $t = 0$  se obtiene que las posiciones articulares finales están definidas por las posiciones articulares iniciales

$$q_b(T) = \mathbf{E} q_b(0) \quad (3.19)$$

Siendo:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera se pueden calcular la cantidad de pasos deseados, mediante el uso de las ecuaciones (3.15) y (3.19).

Los parámetros necesarios para la simulación dinámica del robot Bioloid y resolver el problema de optimización son tres: la longitud de paso  $L_p = 0.04 [m]$ , la duración del paso  $T = 2 [seg]$  y el número de armónicos  $n$ .

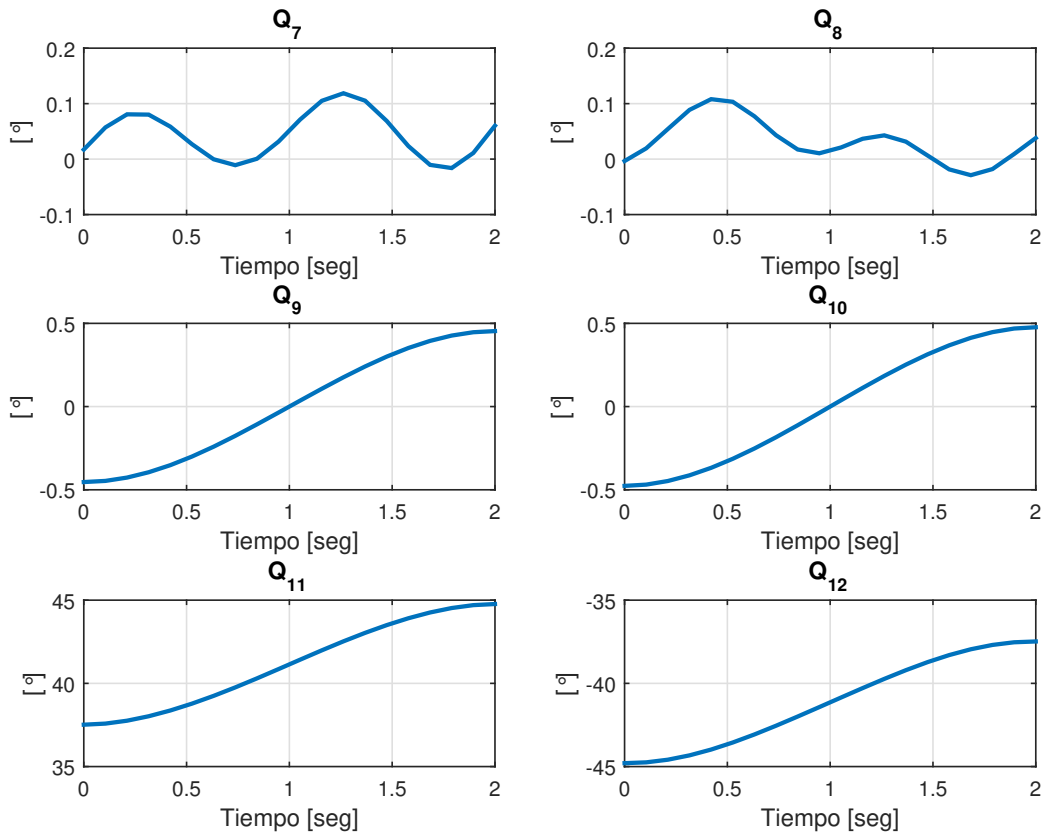
Las Figuras 3-12 y 3-13, son las trayectorias angulares  $\mathbf{q}^d(t)$  obtenidas mediante la solución del problema de optimización con  $n = 5$ .

Un video de la simulación del robot dando cuatro pasos y utilizando los resultados de la solución del problema de optimización de la norma Euclidiana de los pares articulares, presentado en esta sección y determinado por las trayectorias articulares de las Figuras 3-12 y 3-13; se puede observar en la Fig. 3-14. <sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>Para ver el video se debe habilitar el lector de pdf y estar conectado a Internet.





**Figura 3-12:** Trayectorias Articulares de la marcha obtenidas mediante optimización.  $Q_7$  y  $Q_8$  corresponden a la rotación de la cadera en el plano transversal,  $Q_9$  y  $Q_{10}$  corresponden a la aducción de la cadera,  $Q_{11}$  y  $Q_{12}$  corresponden a la flexión-extensión de la cadera.

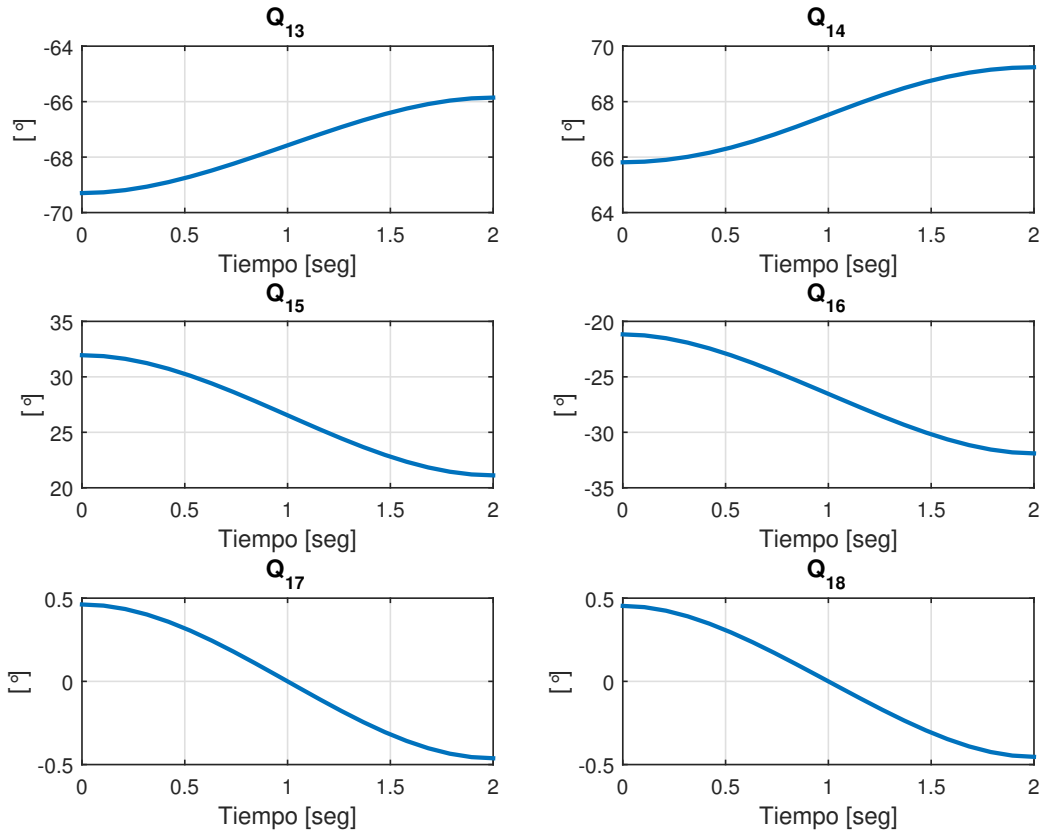
Como se observa en el video de la Fig. 3-14 el robot da un paso con la pierna derecha, cumpliendo con todas las restricciones unilaterales y bilaterales impuestas.

### Evaluación de las restricciones

La figura 3-15 muestra los pares de entrada a los servomotores de las piernas del robot <sup>7</sup>. Los pares son factibles, considerando todas las restricciones físicas, Ecs. (3.15)

Las condiciones iniciales de simulación indican que el pie izquierdo del robot se encuentra en fase de apoyo simple y el pie derecho está en fase de oscilación, el robot da un paso con la pierna derecha, por lo tanto la trayectoria del ZMP debe mantenerse dentro del área de sustentación

<sup>7</sup>El torque máximo de los servomotores AX12-A Dynamixel es:  $\Gamma^{max} = 1.5 N \cdot m$



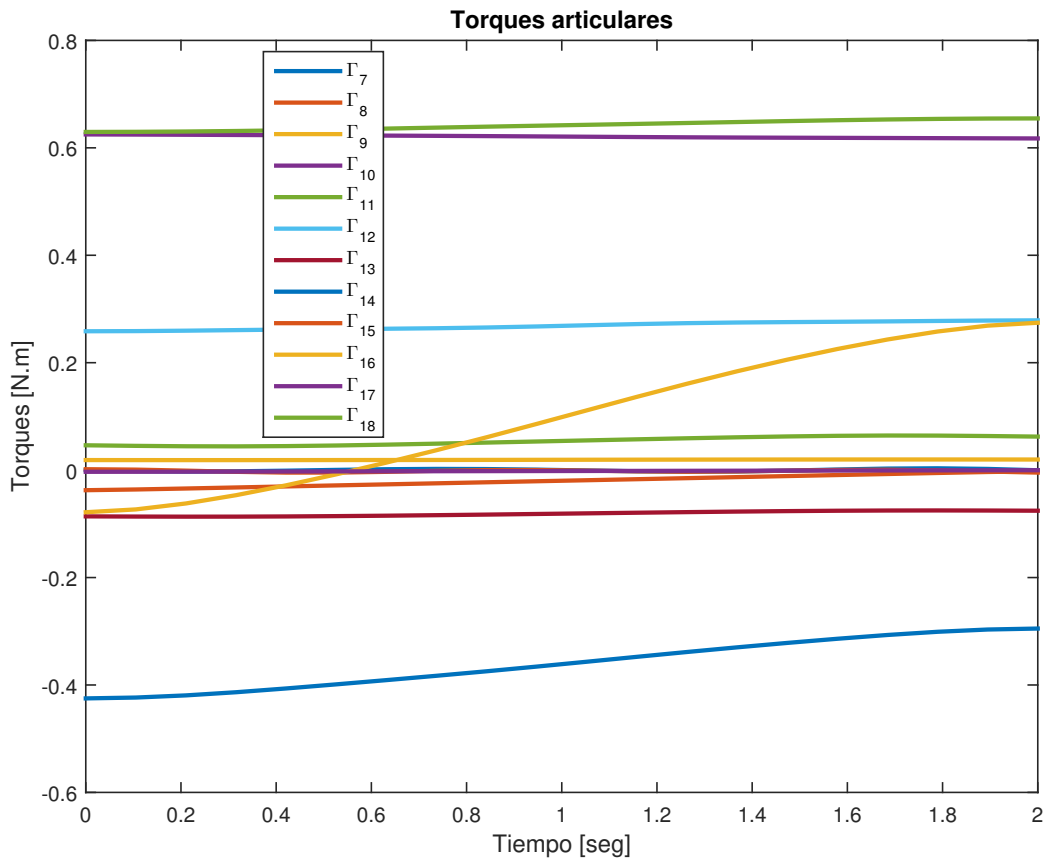
**Figura 3-13:** Trayectorias Articulares de la marcha obtenidas mediante optimización.  $Q_{13}$  y  $Q_{14}$  corresponden a la flexión-extensión de la rodilla,  $Q_{15}$  y  $Q_{16}$  corresponden a la dorsiflexión del pie,  $Q_{11}$  y  $Q_{12}$  corresponden al giro vertical (guiñada) de los pies.

del pie izquierdo. El ZMP se mantiene dentro del polígono de soporte (pie izquierdo) para el movimiento y garantiza la estabilidad del robot como se observa en la Figura 3.16(a). Por lo tanto, la restricción para el ZMP  $(\mathbf{r}_i \times \varphi_i) \cdot \mathbf{n}_z \leq 0$  se satisface. La Figura 3.16(b) que la fuerza tangencial permanece dentro de los límites del cono de fricción, para un coeficiente de fricción  $\mu = 0.5$ . Por lo tanto el robot cumple la restricción  $|F_{tn}(t)| \leq \mu \cdot F_{rn}(t)$  se cumple y el robot no se desliza.

### Trayectorias a distintas velocidades de marcha

Con el objetivo de estudiar las trayectorias de marcha, obtenidas mediante la optimización de los pares del robot a diferentes velocidades de marcha se realizaron tres experimentos, los parámetros:

**Figura 3-14:** Video. Simulación de la marcha de Bioloid minimizando la norma Euclidiana de los pares. Disponible en: <https://youtu.be/RSSkzVqnn-U>



**Figura 3-15:** Pares articulares para las piernas del robot

longitud de paso  $L_p = 0.04 [m]$  y el número de armónicos  $n = 5$  se mantuvieron constantes, pero se varió la duración del paso con  $T_1 = 1.5 [seg]$ ,  $T_2 = 2 [seg]$  y  $T_3 = 2.5 [seg]$ . Las figuras 3.17(a)

y 3.17(b) muestran las trayectorias de marcha a distintas velocidades en una escala porcentual del 0 al 100 % de la duración del paso.

La Tabla 3-2 cuantifica el valor de  $J$  Ec. (3.14) en función del tiempo de duración del paso.

$T$ [seg]	$J(\theta)$ [(N · m) <sup>2</sup> ]
1.5	1.0373
2	1.0361
2.5	1.0359

**Tabla 3-2:**  $J$  en función de la duración del paso  $T$ .

Los valores de la tabla 3-2 indican que al variar la duración del paso, el índice  $J$  no tiene mayores variaciones, lo que permite concluir que la evolución temporal de los pares y por lo tanto, el consumo de energía para un paso del robot; permanece constante para los parámetros de simulación descritos anteriormente.

### 3.4. Comparación de los Patrones de Marcha mediante el Costo Energético

Un factor muy importante en la generación de trayectorias de marcha para un robot bípedo es el costo energético asociado a las mismas. Los robots bípedos necesitan de una fuente de energía, como son las baterías, para una locomoción autónoma. Por esta razón es necesario comparar la eficiencia energética de los distintos patrones de marcha.

Si bien el valor cuadrático medio del torque, Ec. (3.14) no es una medida del consumo energético asociado a la realización de una trayectoria determinada, su valor es proporcional a las pérdidas por efecto Joule en los motores eléctricos que constituyen los actuadores del robot, [Rengifo et al., 2012]. Lo anterior se fundamenta en el hecho de que en los motores de corriente continua con excitación independiente la corriente en el devanado de armadura es proporcional al torque mecánico ejercido por el motor [Chiasson, 2005]. La minimización de la Ec. (3.14) tiene entonces por objetivo minimizar el calentamiento del motor.

Un factor de comparación para el consumo energético es la Ec. (3.20) que es una medida de la

energía mecánica promedio consumida por el robot, durante un paso.

$$E(q) = \frac{1}{T} \int_0^T |\Gamma(q)^T \cdot \dot{q}_b| dt \quad (3.20)$$

El valor absoluto de la Ec. (3.20) representa la incapacidad de los actuadores de recuperar la energía mecánica empleada durante la marcha del robot. Para el experimento, se tuvieron en cuenta los mismos parámetros de las trayectorias generadas por el modelo *cart-table* y de optimización consideradas en éste capítulo. La longitud del paso  $L_p = 4$  [cm], se mantuvo constante y la duración del paso  $T_p$  se cambio a tres valores distintos ( $T_1 = 1.5$ ,  $T_2 = 2$ ,  $T_3 = 2.5$  [seg]), para evaluar los índices de desempeño Ec.(3.14) y Ec. (3.20) a diferentes velocidades en ambos métodos.

Método	$J [(N \cdot m)^2]$			$E [J \cdot s^{-1}]$		
	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
<i>Cart-Table</i>	0.9608	0.8708	0.8364	0.0730	0.0395	0.0234
Optimización	1.0373	1.0361	1.0359	0.0099	0.0068	0.0050
Diferencia en (%)	7.37	15.95	19.25	86.43	82.78	78.63

**Tabla 3-3:** Comparación de los patrones de marcha a distintas velocidades mediante dos índices de desempeño, ( $T_1 = 1.5$ ,  $T_2 = 2$ ,  $T_3 = 2.5$  [seg]).

La Tabla 3-3 presenta los resultados obtenidos mediante simulación. Los resultados nos permiten concluir lo siguiente:

- (i). Para el índice Ec.(3.14), el patrón de marcha calculado por el modelo *cart-table* muestra valores menores de perdida por efecto Joule de los actuadores del robot, en comparación con el patrón de marcha de optimización, esta diferencia se acrecienta cuando la velocidad de marcha disminuye, a diferencia del patrón de marcha de optimización donde la perdida por efecto Joule de los actuadores del robot se mantiene aproximadamente constante.
- (ii). Para el índice Ec. (3.20), el patrón de marcha calculado por el modelo *cart-table* muestra valores mayores de consumo de energía de los actuadores del robot, en comparación con el patrón de marcha de optimización, ésta diferencia disminuye a medida que la duración del paso aumenta.

La Figura 3-18 ilustra de manera gráfica los resultados de la Tabla 3-3.

Para el enfoque propuesto en este capítulo, se estudiaron dos índices de desempeño Ec. (3.14) y Ec. (3.20) en función del número de armónicos  $n$  de las trayectorias de referencia  $\mathbf{q}^d(t)$ .

$n$	$J [(N \cdot m)^2]$	$E [J \cdot s^{-1}]$
1	1.0358	0.0066
2	1.0362	0.0067
3	1.0368	0.0067
4	1.0360	0.0067
5	1.0361	0.0068

**Tabla 3-4:** Dos índices de desempeño en función del número de armónicos de las trayectorias de referencia  $\mathbf{q}^d(t)$ .

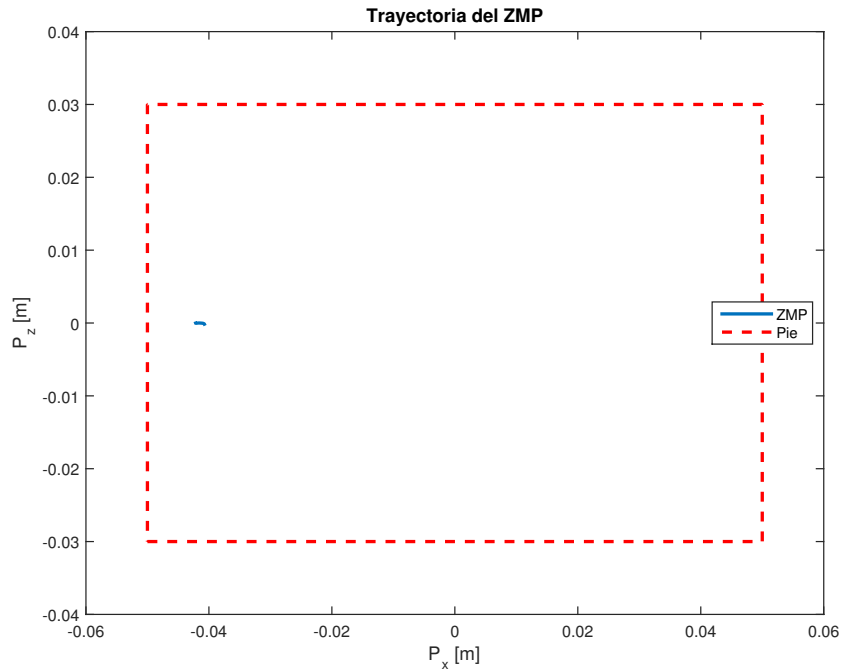
La Tabla 3-4 muestra el valor de los índices de desempeño Ec. (3.14) y Ec. (3.20) en función del número  $n$  de armónicos. Los valores en la Tabla 3-4 tienen un comportamiento distinto al esperado. A mayor cantidad de armónicos en las trayectorias de referencia, se esperaría una disminución en el valor del promedio de energía mecánica Ec. (3.20) y el valor cuadrático medio del par Ec. (3.14). Sin embargo, su valor se mantiene igual hasta la tercera cifra significativa. Para encontrar una explicación a este comportamiento, se analizaron las trayectorias  $\mathbf{q}^d(t)$  en el dominio de la frecuencia  $\mathbf{Q}^d(\omega)$  por medio de la transformada rápida de Fourier (FFT) [Oppenheim and Schaffer, 2008]. Las Figuras 3.19(a) y 3.19(b) permiten concluir que la mayor cantidad de la energía esta situada en la región de bajas frecuencias; lo que confirma que los armónicos de orden superior, no tienen una contribución significativa en la evolución temporal de la posición articular.

### 3.5. Resumen

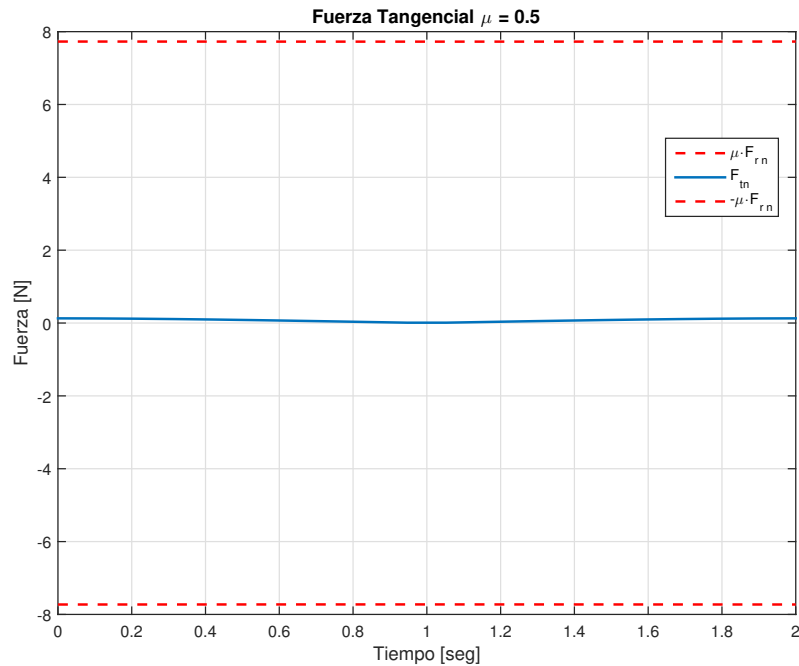
Dos métodos para la generación de trayectorias de marcha en un robot bípedo se presentaron en este capítulo. El primero consiste en encontrar una trayectoria para el CoM a partir del ZMP deseado y posteriormente con el CoM obtenido, las trayectorias cartesianas deseadas para los pies y la cinemática inversa se determinan las consignas de posición articular para el robot. El segundo incluye un conjunto de parámetros de marcha y restricciones, que permiten minimizar un índice de desempeño deseado para obtener trayectorias parametrizadas en todas las fases de la marcha. Con respecto a este segundo método se analizó el efecto del número de armónicos utilizado para parametrizar la trayectoria articular  $q(t)$  en el índice de desempeño Ec. (3.14), esto permitió evidenciar que los armónicos dominantes de las trayectorias articulares se sitúan en la región de bajas frecuencias y por lo tanto, los armónicos de orden superior no contribuyen significativamente

en la evolución temporal de la posición articular. Esta misma situación se presenta al variar la duración del paso de la marcha en  $\pm 0.5$  [seg]. Los dos métodos descritos en el presente capítulo se compararon mediante los índices de desempeño Ec. (3.14) y Ec. (3.20) utilizando tres velocidades de marcha, el patrón de marcha obtenido por el modelo *cart-table* revela un consumo energético mucho mayor que el de optimización. Sin embargo, el modelo *cart-table* muestra valores menores de pérdida por efecto Joule de los actuadores del robot en comparación de su contra-parte.

Una diferencia fundamental para la generación de trayectorias de marcha entre ambos patrones es el modelo matemático del robot a utilizar. El primero, utiliza un modelo simplificado del robot, donde toda la masa se concentra en el centro de masa (CoM), mientras que el segundo necesita del modelo dinámico completo del robot con todas las restricciones cinemáticas y dinámicas impuestas. Esto se deriva en una mayor carga computacional para el segundo método, además de la identificación de los parámetros inerciales del robot.



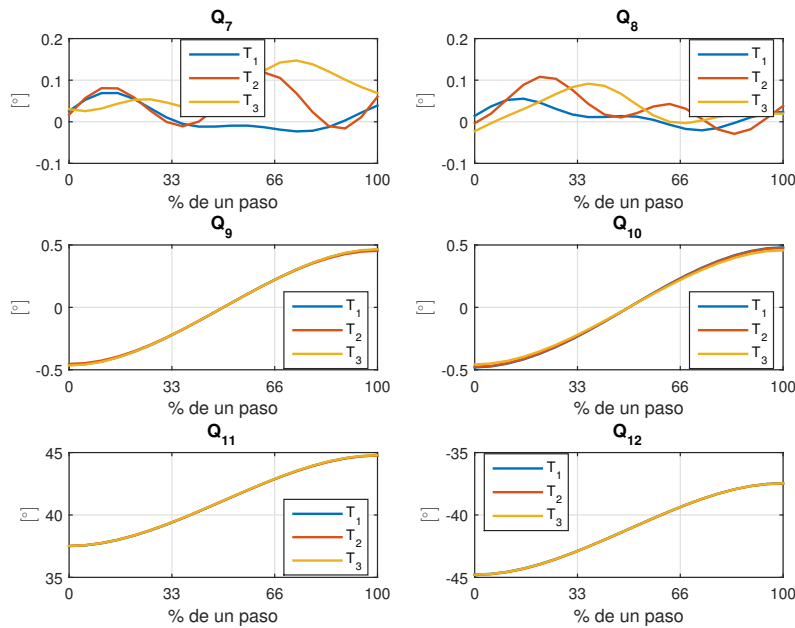
(a) Trayectoria del ZMP para el pie izquierdo. Los límites del polígono de soporte son representados por una línea roja discontinua.



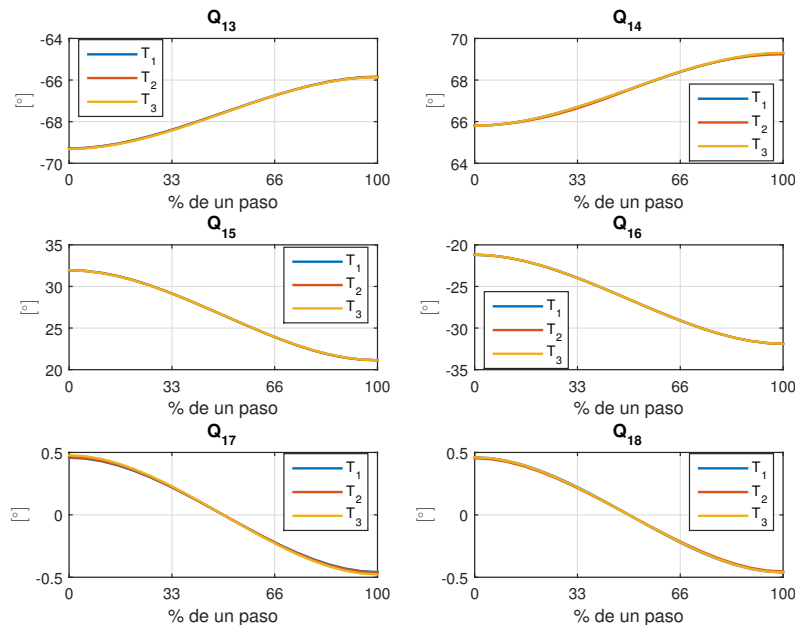
(b) Trayectoria de la fuerza tangencial  $F_{tn}$  para el pie izquierdo. Los límites del cono de fricción son representados por una línea roja discontinua.

**Figura 3-16:** Evaluación de las restricciones de fuerza



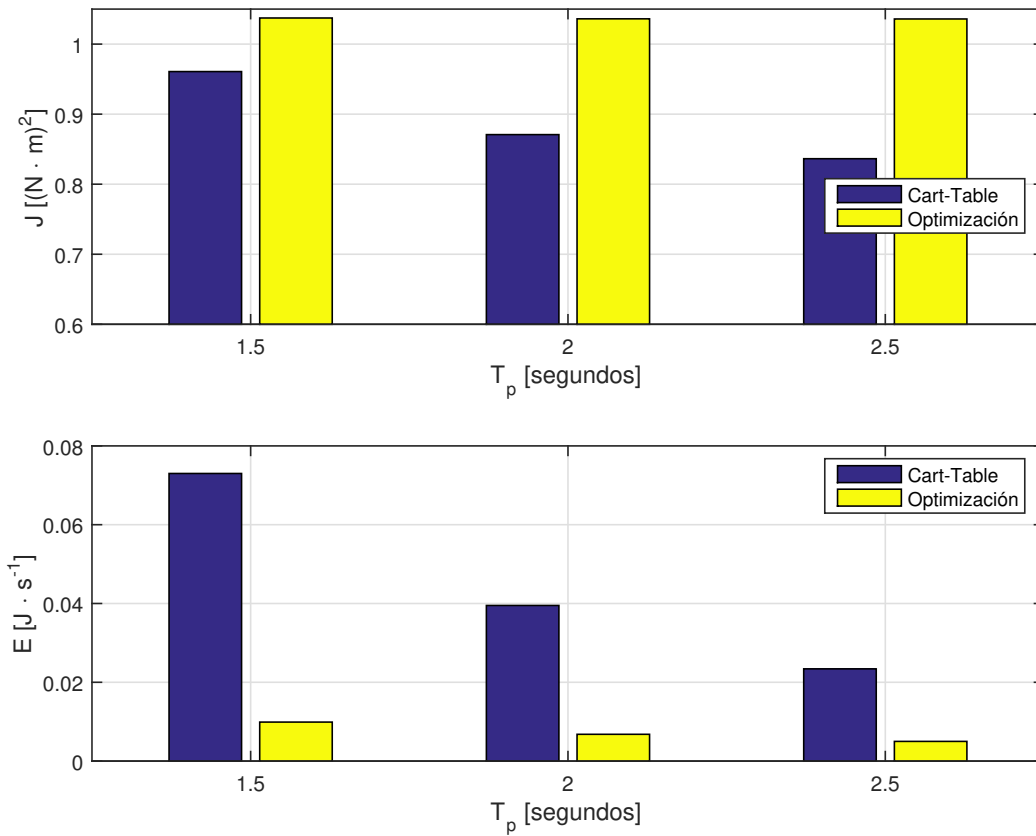


(a) Trayectorias a distintas velocidades, 1<sup>era</sup> parte.  $Q_7$  y  $Q_8$  corresponden a la rotación de la cadera en el plano transversal,  $Q_9$  y  $Q_{10}$  corresponden a la aducción de la cadera,  $Q_{11}$  y  $Q_{12}$  corresponden a la flexión-extensión de la cadera.

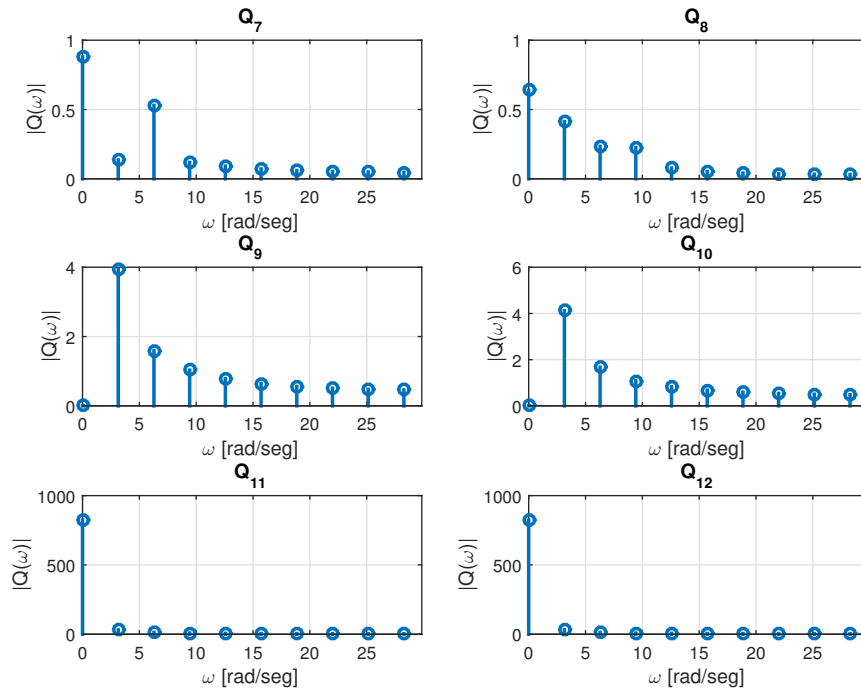


(b) Trayectorias a distintas velocidades, 2<sup>da</sup> parte.  $Q_{13}$  y  $Q_{14}$  corresponden a la flexión-extensión de la rodilla,  $Q_{15}$  y  $Q_{16}$  corresponden a la dorsiflexión del pie,  $Q_{17}$  y  $Q_{18}$  corresponden al giro vertical (guñada) de los pies.

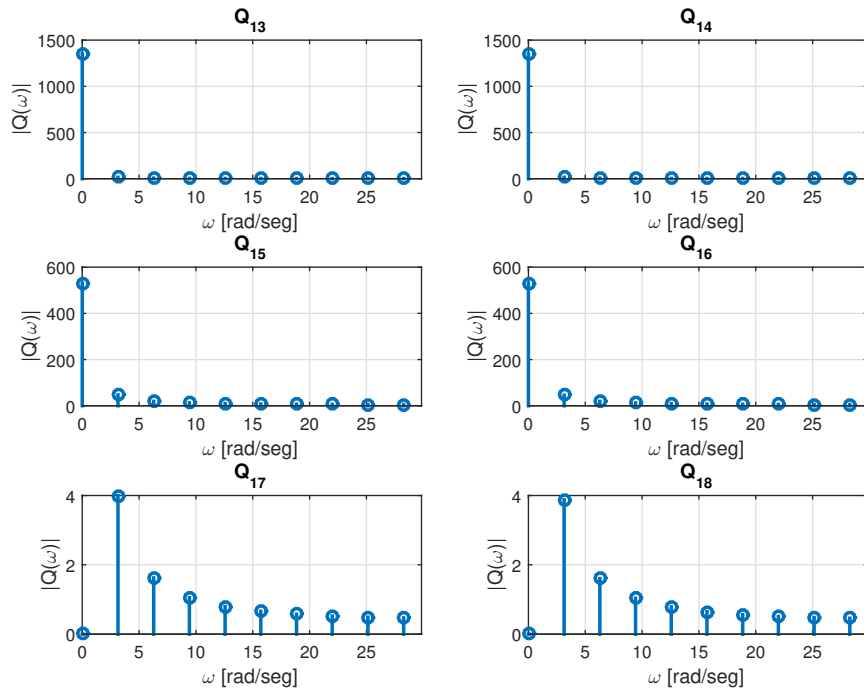
**Figura 3-17:** Trayectorias Articulares de la marcha a distintas velocidades.  $T_1 = 1$  [seg],  $T_2 = 2$  [seg] y  $T_3 = 2.5$  [seg].



**Figura 3-18:** Comparación de los patrones de marcha a distintas velocidades basado en el consumo energético.



(a) Densidad Espectral  $|Q(\omega)|$  en función de la frecuencia  $\omega$ .



(b) Densidad Espectral  $|Q(\omega)|$  en función de la frecuencia  $\omega$ .

**Figura 3-19:** Densidad Espectral de  $\mathbf{q}^d$ . La escala de frecuencias se encuentra dentro del intervalo  $[0, \omega_s/2]$



# Capítulo 4

## Generación de Trayectorias de Marcha a partir de Captura de Movimiento

### 4.1. Introducción

Con el objetivo de lograr que un robot bípedo pueda caminar en forma similar a un ser humano, se propone un método para transferir las trayectorias obtenidas mediante datos de captura de movimiento humano a éste. La idea es utilizar un filtro dinámico que reciba como entrada las trayectorias de marcha de un ser humano, para generar trayectorias de caminata realizables por el robot. Esta idea, pese a haber sido propuesta hace más de una década [Shiller et al., 2001], [Yamane and Nakamura, 2003], aún no ha sido probada en robots reales. Adicionalmente, nuestra propuesta no requiere de la utilización de un bloque integrador y a diferencia de otros métodos [Poubel et al., 2014], [Hu et al., 2014] no se requiere conocer el punto de momento cero de la persona que ejecuta el movimiento capturado. El enfoque propuesto involucra el modelo dinámico y cinemático del robot. Nuestro método no funciona en tiempo real, pero incluso en su forma actual, este filtro permite generar de manera automática trayectorias articulares de referencia para robots bípedos a partir de captura de movimiento humano.

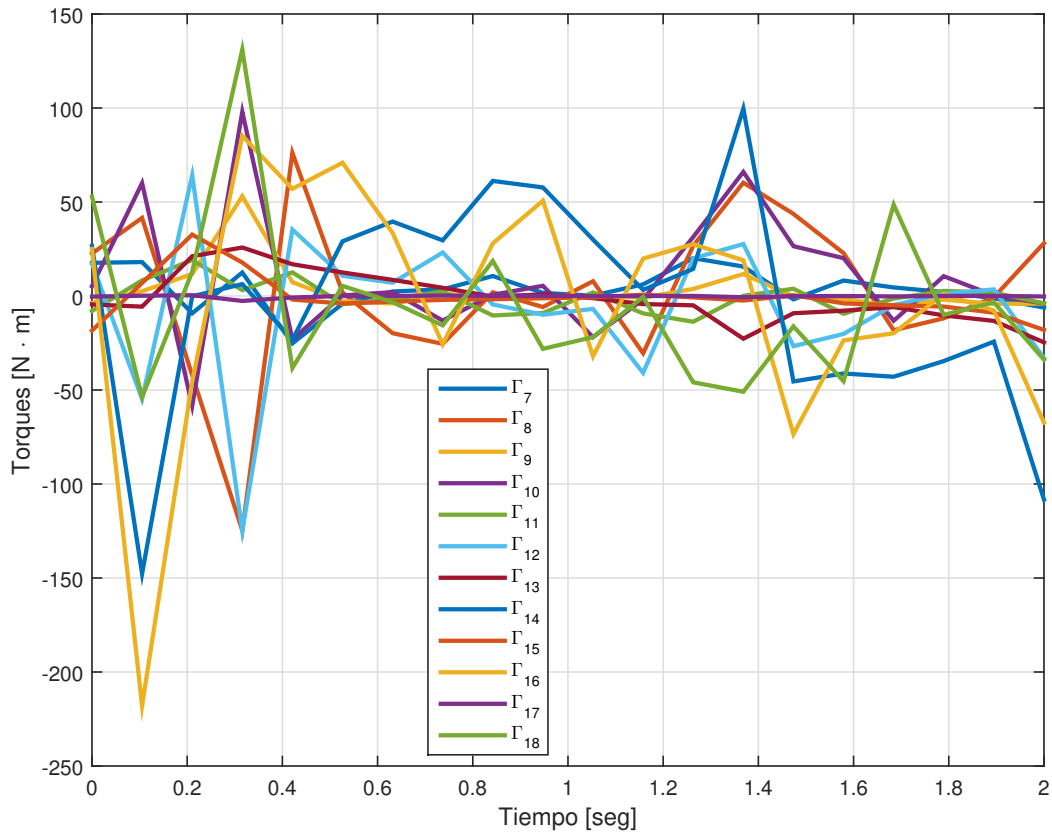
### 4.2. Filtro Dinámico

El filtro dinámico es un procedimiento computacional orientado a producir movimientos físicamente factibles a partir de trayectorias de referencia que pueden no ser físicamente posibles. Las trayectorias de referencia, incluso cuando son generadas a partir de una base de datos de captura

de movimiento, es muy probable que estas no sean realizables físicamente, debido a las diferencias antropomórficas y dinámicas entre el robot bípedo y el sujeto de estudio [Shiller et al., 2001].

Para ilustrar esta condición, calculamos los pares necesarios para imitar el ciclo de marcha de una persona normal con las trayectorias de captura de movimiento de la Fig. A-2 (apéndice A). El modelo de control para la fase se apoyo simple nos permite calcular los pares articulares  $\Gamma$  para las trayectorias de referencia  $\mathbf{q}^{ref}$  con la ecuación (4.1).

$$\Gamma = \mathbf{A}_r(q^{ref}) \dot{q}_a^{ref} + H_r(q^{ref}, \dot{q}_v^{ref}) \quad (4.1)$$

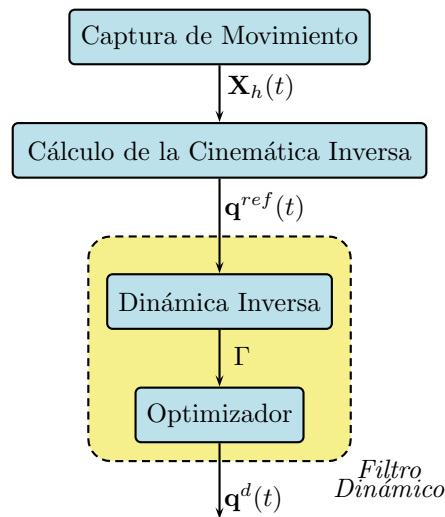


**Figura 4-1:** Pares necesarios para reproducir el movimiento de la Fig. A-2 en el robot Bioloid.

La Figura 4-1 muestra los pares articulares requeridos, para que el robot Bioloid imite el movimiento obtenido a partir de captura de movimiento. Los pares no se pueden aplicar directamente al robot, ya que el par máximo de los servomotores AX12-A Dynamixel es  $\Gamma^{max} = 1.5 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Aún

si los pares fueran factibles, todavía no se han evaluado las condiciones de estabilidad (ZMP) y de no deslizamiento.

La Figura 4-2 muestra la estructura del filtro dinámico propuesto. Donde  $\mathbf{X}_h(t) \in \mathbb{R}^{3m}$  es un vector que contiene las coordenadas Cartesianas de todas las articulaciones de la persona que ejecuta el movimiento capturado, cada uno de sus componentes es un vector en  $\mathbb{R}^3$ , siendo  $m$  el número de marcadores puestos. El vector  $\mathbf{q}^{ref}(t)$  contiene las trayectorias articulares de referencia calculadas mediante la aplicación de la cinemática inversa a  $\mathbf{X}_h(t)$ . Posteriormente, el vector  $\mathbf{q}^{ref}(t)$  y sus dos primeras derivadas con respecto al tiempo, se utilizan como entradas a la función de dinámica inversa (Ec. (4.1)) que permite calcular los pares  $\Gamma \in \mathbb{R}^{12}$  necesarios para hacer el seguimiento de las trayectorias  $\mathbf{q}^{ref}(t)$ . El bloque optimizador calcula  $\mathbf{q}^d(t)$  que son las trayectorias más parecidas a la marcha humana, buscando que sean lo más próximas a las trayectorias de referencia  $\mathbf{q}^{ref}(t)$  y además satisfaga todas las restricciones físicas del robot (límites físicos de los actuadores, equilibrio dinámico, condiciones de simetría).



**Figura 4-2:** Diagrama de Bloques propuesto para generar trayectorias a partir de captura de movimiento.

### 4.2.1. Trayectorias de Referencia

Las trayectorias de referencia utilizadas en esta parte del trabajo, se obtuvieron mediante la base de datos de captura de movimiento tomadas de la aplicación *OpenSim* para un ciclo de marcha normal. *OpenSim* es una plataforma *open source* para modelar, simular y analizar el sistema musculoesquelético [Delp et al., 2007]. El software nos permite obtener las trayectorias articulares de marcha  $\mathbf{q}^{ref}$  a partir de datos de captura de movimiento, Figura A-2 (apéndice A).

Cada componente del vector  $\mathbf{q}^{ref}$ , corresponde a una articulación que contiene  $N + 1$  puntos estimados para un ciclo completo de marcha. Las doce trayectorias articulares son denotadas como  $q_i^{ref}$  ( $i = 1, \dots, 12$ ). Donde la trayectoria para la articulación  $i$  es representada por medio de un conjunto de  $N$  polinomios de tercer orden calculados mediante interpolación basada en segmentación cúbica [Boor, 2001].

$$q_i^{ref}(t) = C_{0ij} + C_{1ij} \cdot t + C_{2ij} \cdot t^2 + C_{3ij} \cdot t^3 \quad (4.2)$$

Donde  $C_{0ij}$ ,  $C_{1ij}$ ,  $C_{2ij}$ ,  $C_{3ij}$  son los coeficientes de un polinomio de tercer orden y describen el movimiento de referencia para la articulación  $i$  en el intervalo de tiempo  $t \in [t_{j-1}, t_j]$  ( $j = 1, \dots, N + 1$ ). La longitud del intervalo de tiempo es constante e igual al periodo de muestreo usado por el sistema de captura de movimiento ( $h = t_j - t_{j-1}$ ). Para estimar la velocidad  $q_{vi}^{ref}(t)$  y aceleración  $q_{ai}^{ref}(t)$  de las trayectorias de referencia, la secuencia de polinomios resultantes se deriva una y dos veces respectivamente.

$$\begin{aligned} q_{vi}^{ref}(t) &= C_{1ij} + 2 \cdot C_{2ij} \cdot t + 3 \cdot C_{3ij} \cdot t^2 \\ q_{ai}^{ref}(t) &= 2 \cdot C_{2ij} + 6 \cdot C_{3ij} \cdot t \end{aligned} \quad (4.3)$$

El conjunto de trayectorias conformadas por las ecuaciones (4.2) y (4.3) permiten calcular la dinámica inversa del robot por medio de la Ec. (4.1). Sin embargo, la Ec. (4.1) no considera las coordenadas no actuadas del robot.

### 4.2.2. Optimizador

Las trayectorias deseadas para que el robot camine sin caerse, se formulan como un problema de optimización no lineal con restricciones, definido como: “Encuentre las trayectorias óptimas  $\mathbf{q}^d(t)$  para minimizar una función de costo sujeta a restricciones físicas”.

Se tienen en cuenta las mismas restricciones de la sección 3.3.1 del capítulo 3.

- (i) La componente normal de la fuerza de reacción  $F_{rn}$  ejercida por el suelo sobre el pie de apoyo debe ser positiva.
- (ii) La fuerza tangencial  $F_{tn} \in \mathbb{R}^2$  debe permanecer en el interior del cono de fricción, para evitar que el pie en apoyo se deslice.
- (iii) El pie derecho debe estar siempre en contacto con el suelo.



- (iv) El actuador de cada articulación debe ejercer un par menor  $\Gamma^{max} \in \mathbb{R}^{12}$  al par máximo permitido.
- (v) El punto de momento cero (ZMP) debe permanecer dentro del polígono de soporte formado por la superficie de contacto entre el pie y el suelo (fase de soporte simple) o la envolvente mínima convexa de ambos pies y el suelo (fase de doble soporte).
- (vi) Las posiciones y las velocidades al inicio y finalización de cada paso, deben satisfacer *condiciones de simetría* para generar movimientos de marcha continuos Ec.(3.19).

Matemáticamente, el problema se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimice: } J(\theta) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \mathbf{q}^{ref} - \mathbf{q}^d \right\|^2 dt \\
 \text{Sujeto a: } F_{rn}(t) &\geq 0 \quad 0 \leq t \leq T \\
 |F_{tn}(t)| &< \mu \cdot F_{rn}(t) \quad 0 \leq t \leq T \\
 \varepsilon_{p17}(q, \sigma) &= 0 \quad 0 \leq t \leq T \\
 |\Gamma(t)| &\leq \Gamma^{max} \quad 0 \leq t \leq T \\
 (\mathbf{r}_i \times \varphi_i) \cdot \mathbf{n}_z &\leq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \\
 q(T) &= \mathbf{E} \cdot q(0)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

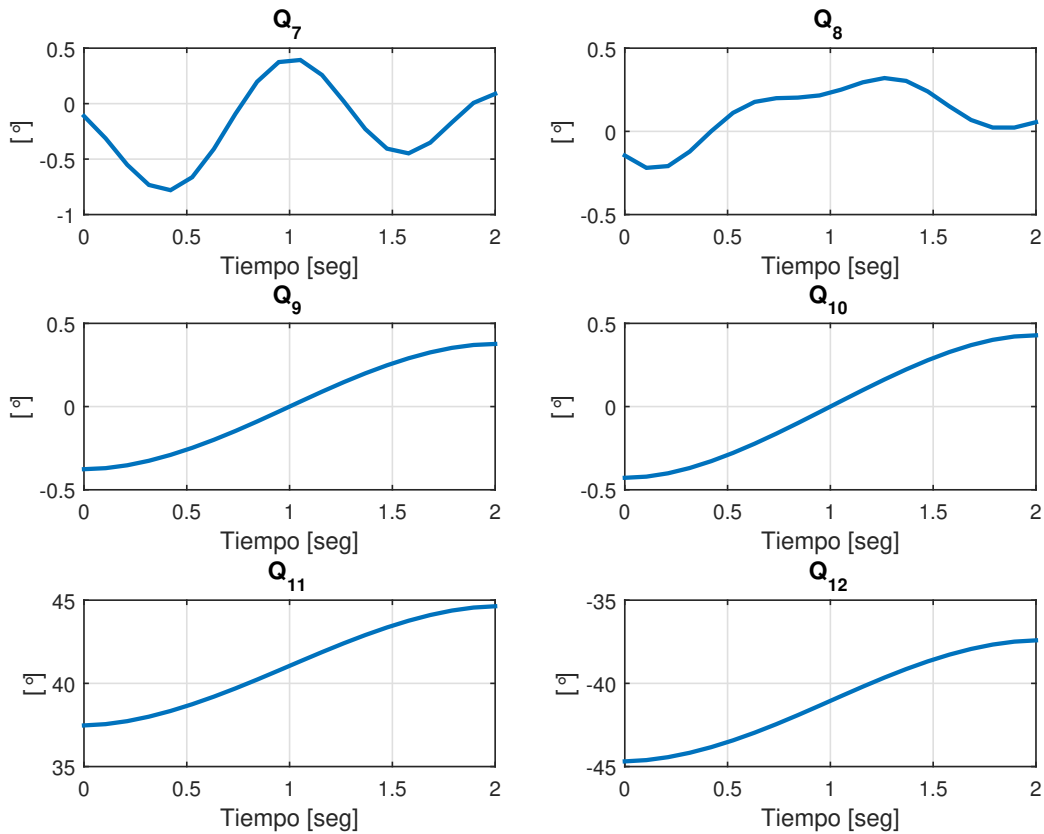
El problema de minimización descrito por la Ec. (4.4) difiere de la Ec. (3.15) presentada en la sección 3.3.1 del capítulo 3, solamente en la función  $J(\theta)$  a minimizar. El nuevo índice a minimizar es el promedio de la integral para la norma Euclidiana del *error articular*; definido como la diferencia entre la trayectoria de referencia del ser humano  $\mathbf{q}^{ref}(t)$  y la trayectoria deseada para el robot  $\mathbf{q}^d(t)$ . También, las trayectorias  $\mathbf{q}^d(t)$  fueron parametrizadas como una expansión de series de Fourier (ver sección 3.3.2) y la solución del problema de optimización se resolvió, utilizando funciones de penalización<sup>1</sup>.

Las Figuras 4-3 y 4-4, son las trayectorias angulares  $\mathbf{q}^d(t)$  obtenidas mediante el filtro dinámico con  $n = 5$  armónicos.

Un video de la simulación del robot dando cuatro pasos y utilizando los resultados de la solución del problema de optimización de la norma Euclidiana del error articular, determinado por las trayectorias articulares de las figuras, Fig. 4-3 y 4-4; se puede observar en la Fig. 4-5.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>La solución del problema de optimización se detalla en la sección 3.3.3 del capítulo 3

<sup>2</sup>Para ver el video se debe habilitar el lector de pdf y estar conectado a Internet.



**Figura 4-3:** Trayectorias Articulares de la marcha obtenidas por el filtro dinámico.  $Q_7$  y  $Q_8$  corresponden a la rotación de la cadera en el plano transversal,  $Q_9$  y  $Q_{10}$  corresponden a la aducción de la cadera,  $Q_{11}$  y  $Q_{12}$  corresponden a la flexión-extensión de la cadera.

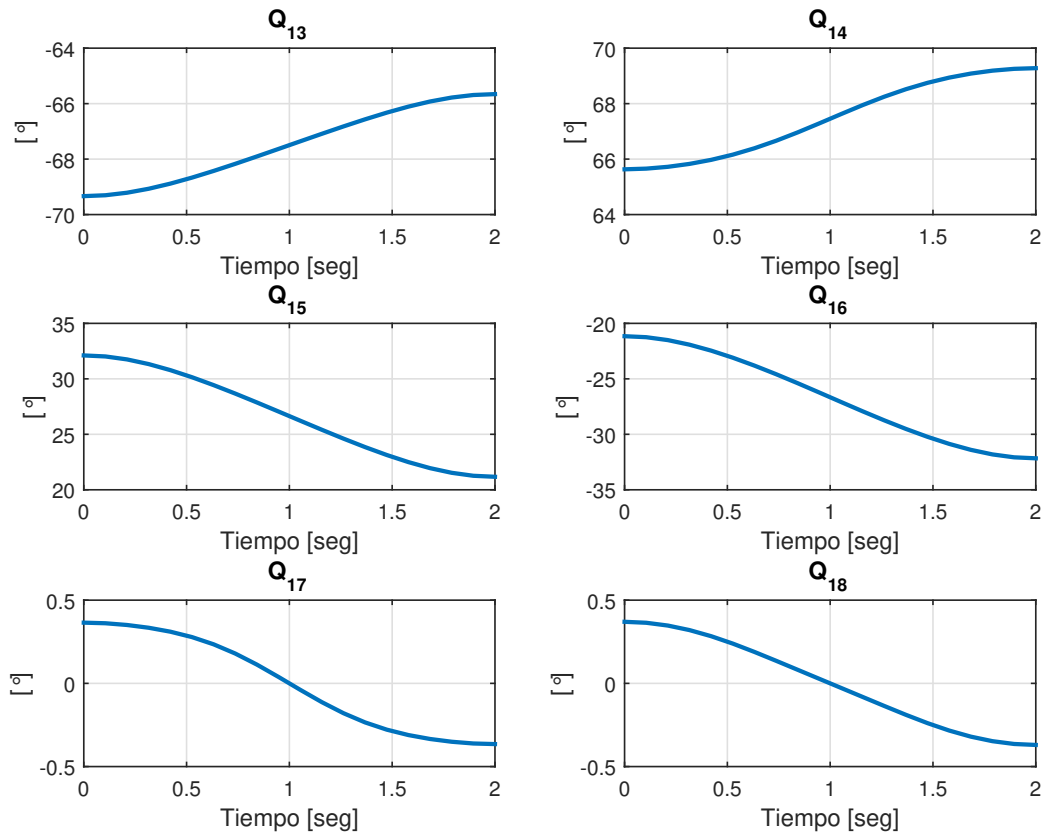
Como se observa en el video de la Fig. 4-5 el robot da un paso con la pierna derecha, cumpliendo con todas las restricciones; las trayectorias se obtuvieron a partir de captura de movimiento con datos de marcha de un ser humano.

### Evaluación de las restricciones

La figura 4-6 muestra los pares de entrada a los servomotores de las piernas del robot.<sup>3</sup> Los pares son alcanzables, considerando todas las restricciones físicas, Ecs. (4.4)

Las condiciones iniciales de simulación indican que el pie izquierdo del robot se encuentra en fase de apoyo simple y el pie derecho está en fase de oscilación, el robot da un paso con la pierna

<sup>3</sup>El par máximo de los servomotores AX12-A Dynamixel es:  $\Gamma^{max} = 1.5 \text{ N} \cdot \text{m}$

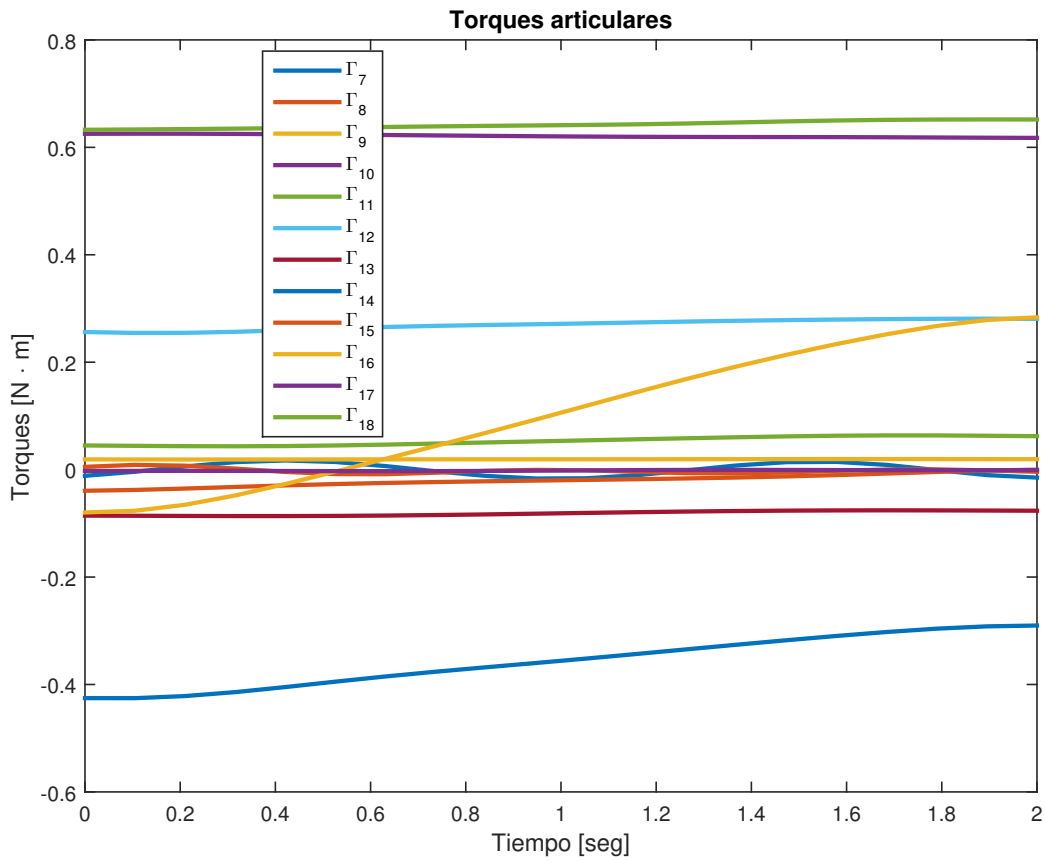


**Figura 4-4:** Trayectorias Articulares de la marcha obtenidas por el filtro dinámico.  $Q_{13}$  y  $Q_{14}$  corresponden a la flexión-extensión de la rodilla,  $Q_{15}$  y  $Q_{16}$  corresponden a la dorsiflexión del pie,  $Q_{11}$  y  $Q_{12}$  corresponden al giro vertical (guiñada) de los pies.

derecha, por lo tanto la trayectoria del ZMP debe mantenerse dentro del área de sustentación del pie izquierdo. El ZMP se mantiene dentro del polígono de soporte (pie izquierdo) para el movimiento y garantiza la estabilidad del robot como se observa en la Figura 4.7(a). Por lo tanto, la restricción para el ZMP  $(\mathbf{r}_i \times \varphi_i) \cdot \mathbf{n}_z \leq 0$  se satisface. La Figura 4.7(b) que la fuerza tangencial permanece dentro de los límites del cono de fricción, para un coeficiente de fricción  $\mu = 0.5$ . Por lo tanto el robot cumple la restricción  $|F_{tn}(t)| \leq \mu \cdot F_{rn}(t)$  se cumple y el robot no se desliza.

Las restricciones tienen la misma evolución temporal que las encontradas en el capítulo 3, sección 3.3. Para explicar este comportamiento, primero se graficó la solución encontrada por la optimización del índice Ec. (3.14) (optimización de pares) y el índice Ec. (4.5) (optimización del error articular) para la longitud de paso  $L_p = 0.04$  [m], duración del paso  $T = 2$  [seg] y el número de

**Figura 4-5:** Video. Simulación de la marcha de Bioid con trayectorias calculadas por el filtro dinámico. Disponible en: <https://youtu.be/13hdGMMh8Rc>



**Figura 4-6:** pares articulares obtenidos por el filtro dinámico.

armónicos  $n = 5$ .

$$J(q) = \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{q}^{ref} - \mathbf{q}^d\|^2 dt \quad (4.5)$$

Aunque las funciones de costo descritas por Ec. (3.14) y Ec. (4.5) evalúan aspectos completamente diferentes de una trayectoria articular, las Figuras 4.8(a) y 4.8(b) muestran que las evoluciones temporales de las variables articulares son muy similares. Como consecuencia de lo anterior se tiene que cuando se evaluó una trayectoria resultado de optimizar la Ec. (4.5) en el índice de desempeño de la Ec. (3.14), el valor de la función de costo será muy similar al obtenido mediante la minimización de Ec. (3.14). De las tres primeras columnas de la Tabla 4-1 se puede observar que las trayectorias óptimas entregadas por Ec. (3.14) y por Ec. (4.5) conllevan a pares cuyos valores cuadráticos promedio difieren en menos del 0.1%. Las tres últimas columnas de la Tabla 4-1 muestran que las diferencias de costo energético también son muy similares. En este caso menores al 10%. La Figura 4-9 ilustra de manera gráfica los resultados de la Tabla 4-1.

Método	$J [(N \cdot m)^2]$			$E [J \cdot s^{-1}]$		
	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
Pares, Ec. (3.14)	1.0373	1.0361	1.0359	0.0099	0.0068	0.0050
Error Articular, Ec. (4.5)	1.0379	1.0369	1.0363	0.0106	0.0072	0.0055
Diferencia en (%)	0.05	0.07	0.03	6.60	5.55	9.09

**Tabla 4-1:** Comparación entre el filtro dinámico y la optimización de pares a distintas velocidades de marcha, ( $T_1 = 1.5$ ,  $T_2 = 2$ ,  $T_3 = 2.5$  [seg]).

Estos resultados indican que cuando se presentan grandes diferencias en la geometría y en la dinámica de quién ejecuta el movimiento de referencia (humano) y el robot que intentará imitarlo (Bioid), el movimiento óptimo entregado por el filtro dinámico, Ec. (4.5) estará determinado principalmente por las restricciones de estabilidad y de las limitaciones de los actuadores y no por el movimiento de referencia en si mismo. Desde una perspectiva matemática, esto implica que las restricciones asociadas a los problemas de optimización Ec. (3.14) y Ec. (4.5) reducen demasiado el espacio de búsqueda de las trayectorias realizables. A continuación se ilustra esta hipótesis con un ejemplo bastante simple. Considere los siguientes problemas de optimización:

**Problema 4.1** Minimice  $F_1(x) = x^2$  para  $x \in I$ , siendo  $I$  el intervalo cerrado  $[1.0, 1.1]$

$$\min_{x \in I} F_1(x)$$

El valor de  $x$  que minimiza la función  $F_1(x)$  y pertenece al intervalo  $I$  es  $x = 1.0$ .

**Problema 4.2** *Minimice  $F_2(x) = \cos(x)$  para  $x \in I$ , siendo  $I$  el intervalo cerrado  $[1.0, 1.1]$*

$$\min_{x \in I} F_2(x)$$

El valor de  $x$  que minimiza la función  $F_2(x)$  y pertenece al intervalo  $I$  es  $x = 1.1$ .

En ambos problemas aunque la función de costo a minimizar es distinta,  $F_1(x) \neq F_2(x)$ , la solución óptima es muy similar. Esto es debido a que el espacio de búsqueda esta reducido al tamaño del intervalo  $I$ .

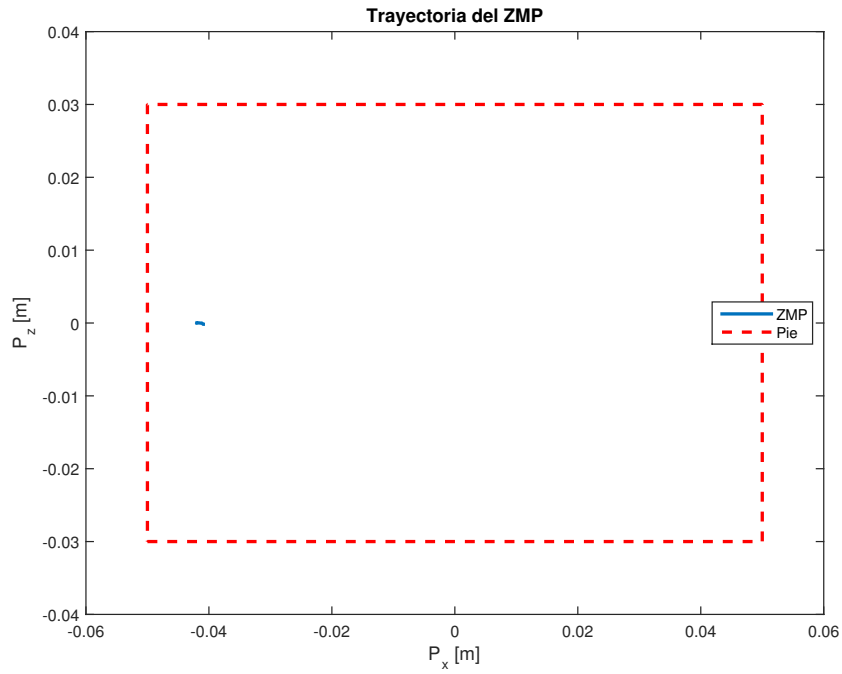
Los resultados de la Tabla 4-1 demuestran que la evolución temporal de los pares y posiciones articulares del robot, tienen el mismo camino geométrico a seguir, haciendo que la marcha del robot sea aproximadamente igual a la obtenida por optimización de pares. Sin embargo, el consumo energético debido al índice Ec. (3.20) muestra un mayor valor para el filtro dinámico. A diferencia del método presentado en la sección 3.3, el filtro dinámico ofrece una menor carga computacional en comparación con el índice Ec. (3.14), permitiendo converger más rápidamente a la solución óptima. Este resultado es de suma importancia; si se desea aplicar este enfoque para la generación de trayectorias en línea, donde la carga computacional es un factor crítico a tener en cuenta.

Al utilizar el concepto de filtro, se puede preguntar: ¿En cuales componentes de frecuencia está contenida la mayor parte de la energía de las trayectorias?, para responder a esta pregunta se analizaron las trayectorias  $\mathbf{q}^{ref}(t)$  y  $\mathbf{q}^d(t)$  en el dominio de la frecuencia  $\mathbf{Q}_{Captura}(\omega)$ ,  $\mathbf{Q}_{Filtro}(\omega)$  por medio de la transformada rápida de Fourier (FFT). Las Figuras 4.10(a) y 4.10(b) permiten concluir que la mayor cantidad de la energía esta situada en la región de bajas frecuencias; el filtro dinámico atenúa las componentes de energía a baja frecuencia de las trayectorias obtenidas mediante captura de movimiento  $\mathbf{q}^{ref}(t)$ , con el propósito adaptarlas al robot bípedo Bioloid y generar trayectorias  $\mathbf{q}^d(t)$  de marcha estables.

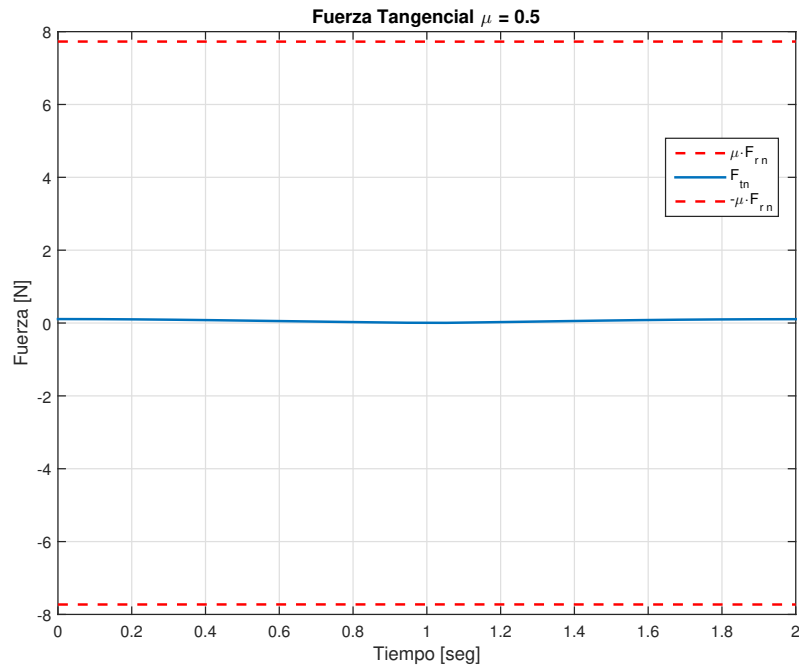
### 4.3. Resumen

En este capítulo, se propone un método para generar trayectorias de locomoción para un robot bípedo a partir de datos de captura de movimiento humano. El filtro dinámico puede generar movimientos de marcha factibles *Off-Line*, se puede utilizar para cualquier intérprete y robot si el esquema de la figura 4-2 es seguido, no requiere ningún escalamiento de las trayectorias obtenidas a partir de captura de movimiento. El problema de optimización expresado en la Ec. (4.4) requiere el modelo cinemático y dinámico del robot que ejecuta el movimiento. En las

restricciones se imponen las condiciones dinámicas y de estabilidad para permitir que el robot ejecute la marcha tomando como referencia las trayectorias articulares de un ser humano. El filtro dinámico descrito en el presente capítulo y el patrón de marcha mediante optimización de pares, (sección 3.3) se compararon mediante los índices de desempeño Ec. (3.14) y Ec. (3.20) utilizando tres velocidades de marcha, el filtro revela un consumo energético mayor que el de optimización. Además, el filtro y el método de optimización de pares muestran valores aproximadamente iguales de pérdida por efecto Joule de los actuadores del robot. Sin embargo, el filtro presenta una menor carga computacional frente a la optimización de pares, (sección 3.3). A pesar de que la generación de trayectorias se lleva a cabo fuera de línea, el filtro dinámico es una buena opción para hacer en forma automática la generación de trayectorias que permitan mantener la estabilidad del robot.



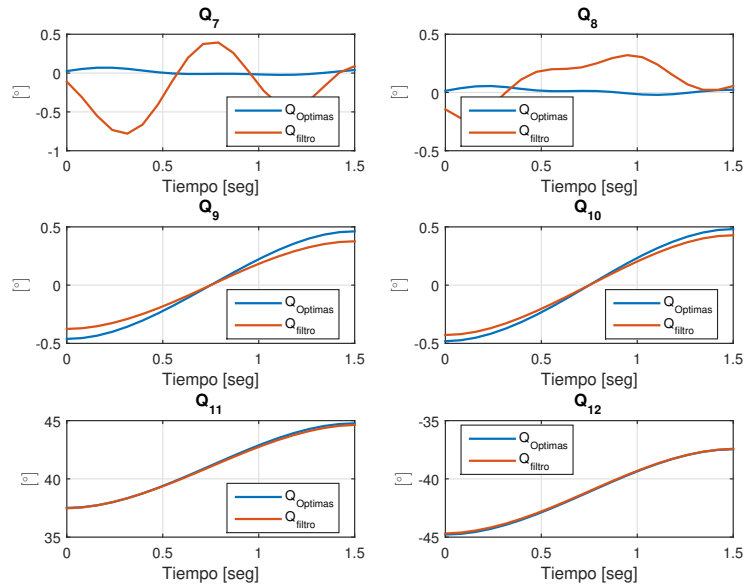
(a) Trayectoria del ZMP para el pie izquierdo. Los límites del polígono de soporte son representados por una línea roja discontinua.



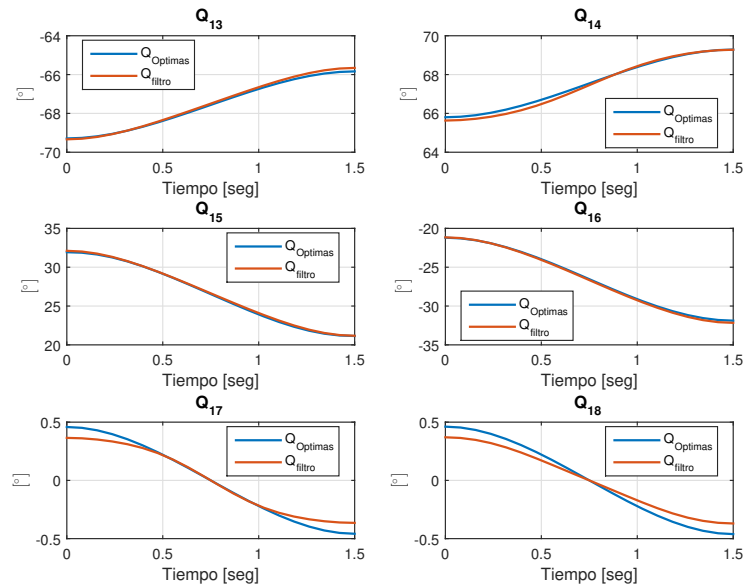
(b) Trayectoria de la fuerza tangencial  $F_{tn}$  para el pie izquierdo. Los límites del cono de fricción son representados por una línea roja discontinua.

**Figura 4-7:** Evaluación de las restricciones de fuerza



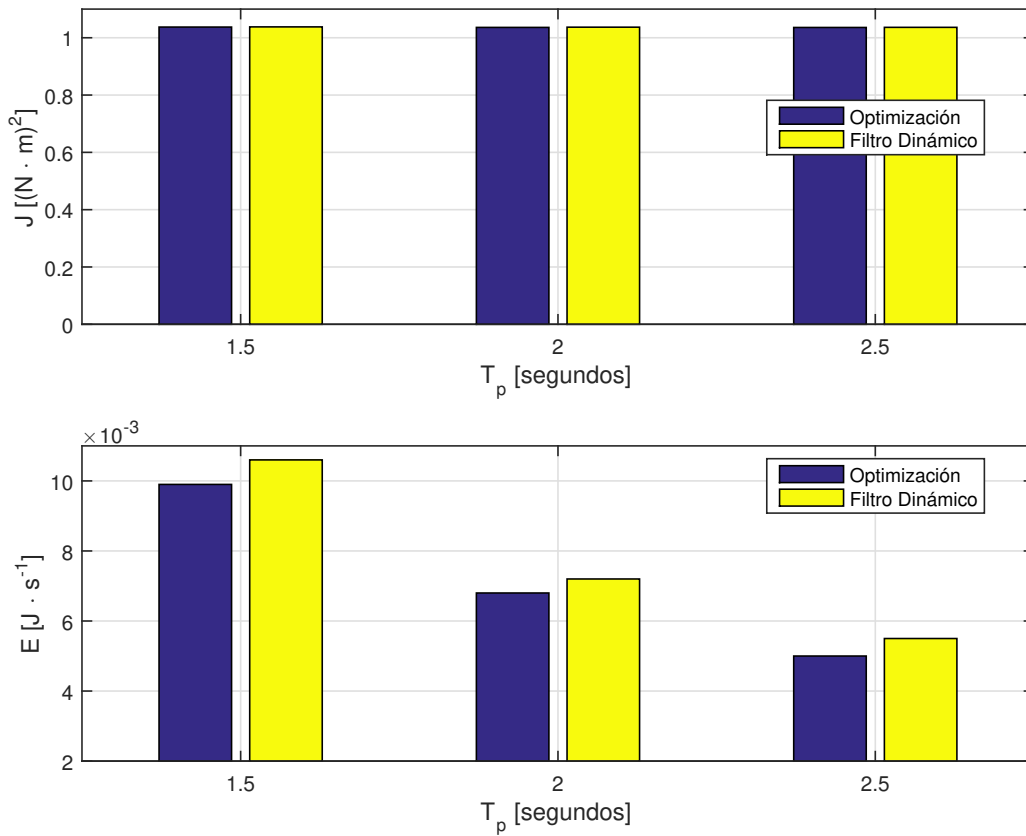


(a) Trayectorias obtenidas por dos índices de optimización, 1<sup>era</sup> parte.  $Q_7$  y  $Q_8$  corresponden a la rotación de la cadera en el plano transversal,  $Q_9$  y  $Q_{10}$  corresponden a la aducción de la cadera,  $Q_{11}$  y  $Q_{12}$  corresponden a la flexión-extensión de la cadera.

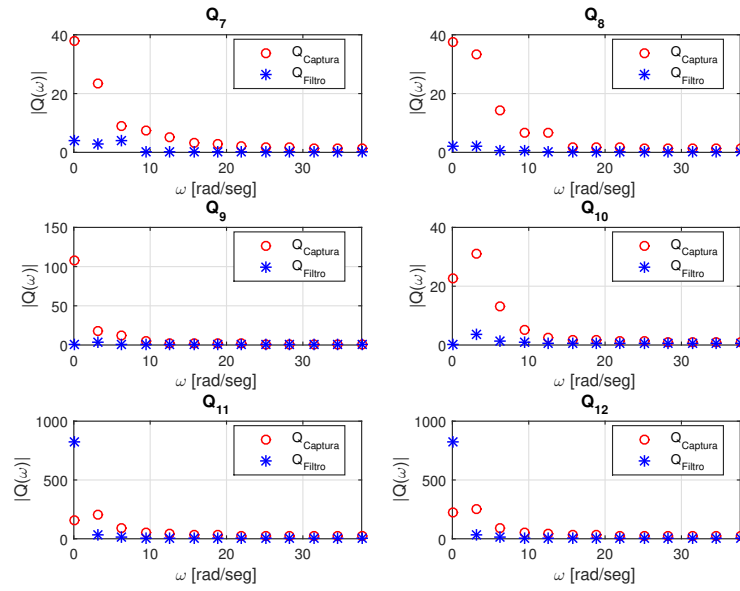


(b) Trayectorias obtenidas por dos índices de optimización, 2<sup>da</sup> parte.  $Q_{13}$  y  $Q_{14}$  corresponden a la flexión-extensión de la rodilla,  $Q_{15}$  y  $Q_{16}$  corresponden a la dorsiflexión del pie,  $Q_{17}$  y  $Q_{18}$  corresponden al giro vertical (guñada) de los pies.

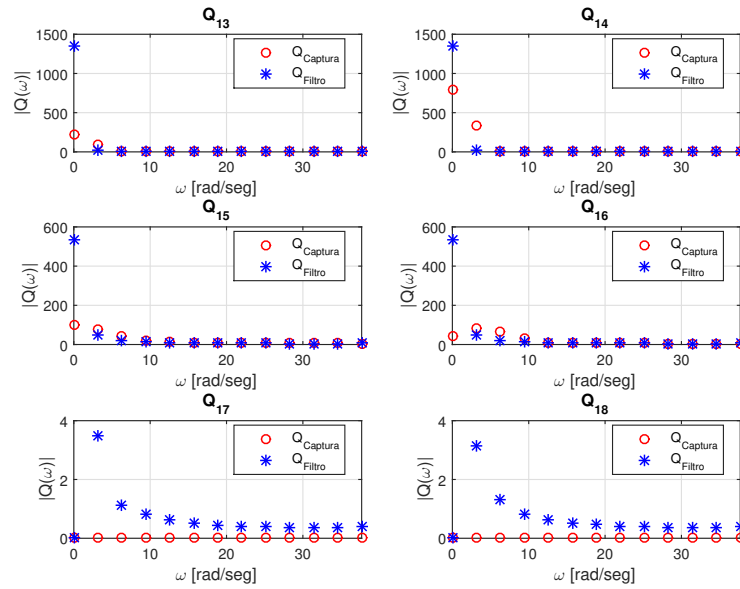
**Figura 4-8:** Comparación de las Trayectorias Articulares de la marcha obtenidas por dos funciones de costo,  $Q_{Optimas}$  corresponde a la solución de la optimización de pares, mientras que  $Q_{filtro}$  es la solución de la optimización del error articular.



**Figura 4-9:** Comparación entre el filtro dinámico y la optimización de pares a distintas velocidades de marcha, ( $T_1 = 1.5$ ,  $T_2 = 2$ ,  $T_3 = 2.5$  [seg]).



(a) Densidad Espectral  $|Q(\omega)|$  en función de la frecuencia  $\omega$ .



(b) Densidad Espectral  $|Q(\omega)|$  en función de la frecuencia  $\omega$ .

**Figura 4-10:** Comparación de la densidad espectral de las trayectorias obtenidas por captura de movimiento  $Q_{Captura}$  y las trayectorias filtradas  $Q_{Filtro}$ . La escala de frecuencias se encuentra dentro del intervalo  $[0, \omega_s/2]$



# Capítulo 5

## Pruebas y Resultados de Experimentación con el Robot Humanoide Bioloid

### 5.1. Introducción

En este capítulo, se discutirá sobre la implementación y validación de las trayectorias de marcha en el robot humanoide Bioloid, descritas en los capítulos 3 y 4. En primera instancia se desarrolló al interior de la Universidad del Cauca un simulador para el robot Bioloid Premium kit basado en el entorno virtual V-Rep [Tacué et al., 2015]. Esto tiene la finalidad de poder visualizar de una forma rápida las trayectorias y su potencial éxito en el robot real. Si las trayectorias causan que el robot caiga en el simulador, es muy probable que el robot real también caiga. Una vez se validan las trayectorias de la marcha  $\mathbf{q}^d$  en un simulador dinámico, éstas se implementan en el robot real.

La simulación es crucial para el estudio del movimiento, prototipado rápido, diseño de controladores y validación en un ambiente virtual antes de la ejecución sobre un robot real. Aunque el número de herramientas para la simulación de robots ha aumentado en los últimos años, es muy difícil seleccionar la mejor herramienta para un proyecto determinado, [Erez et al., 2015]. A continuación, se describirán las herramientas de simulación más populares utilizadas en robótica bípeda.

## 5.2. Herramientas de Simulación Dinámica

Las tecnologías actuales para la simulación en robótica tuvieron su origen en la industria de videojuegos, [Ivaldi et al., 2014]. En este tipo de aplicaciones, el costo computacional juega un papel muy importante, los avatares no necesitan calcular el punto de momento cero (ZMP), para caminar sin caerse. Sin embargo, para los robots bípedos las herramientas de simulación deben calcular las fuerzas de reacción entre el suelo y los pies del robot, con el fin de evitar la interpenetración de los pies con el suelo y evaluar las condiciones de deslizamiento. Estas condiciones hacen que se deba incluir motores físicos que respeten las leyes de la física, en cada paso de simulación a un bajo costo computacional. Bajo esta premisa, se han desarrollado distintos motores de simulación, como son:

- (i) **ODE** (Open Dynamics Engine), es una librería open-source para simular la dinámica de cuerpos rígidos y detector de colisiones. Es un motor de simulación multi-propósito muy popular, usado en muchos juegos de computador y utilizado por varias herramientas de simulación.
- (ii) **PhysX**, es un motor físico desarrollado por NVIDIA orientado al uso de videojuegos y optimizado para cálculos GPU.
- (iii) **Bullet**, es una librería open-source orientada también al desarrollo de videojuegos. Su gran ventaja frente a los demás motores, es que en la última versión (v.2.82) incluye el algoritmo de cuerpo articulado de Featherstone's [Featherstone, 2008] y resuelve problemas mixtos de complementariedad lineal.
- (iv) **MuJoCo** es un motor dinámico desarrollado por Todorov, diseñado para robótica y biomecánica, incluye computación paralela, dinámica inversa, cálculo de contactos, restricciones de igualdad y lazos de control en tiempo real.

Las herramientas de simulación en robótica más populares según Ivaldi, [Ivaldi et al., 2014] son:

1. **Gazebo** es un simulador para múltiples robots (robótica móvil, de manipuladores y humanoides), incluye el desarrollo de ambientes al aire libre, desarrollado por *Open-Source Robotics Foundation*. Está es la herramienta de software oficial para el desafío Darpa Robotics. Es compatible con varios motores físicos (ODE, Bullet, DART).
2. **V-Rep** es un software simulador de robots con un entorno integrado de desarrollo, producido por *Coppelia Robotics*. Como Gazebo, soporta varios motores físicos (ODE, Bullet, Vortex).

3. **Webots** es un entorno de simulación desarrollado por *Cyberbotics Ltd.* Utiliza ODE como motor físico, está especialmente diseñado para aplicaciones de robótica móvil y también dispone de interfaces para el control de algunos robots (Epuck, DARwIn-OP, NAO).
4. **OpenHRP**, es un simulador desarrollado en Japón para los robots HRP. Esta compuesto de varios módulos: un simulador de dinámica, una interfaz de control para el robot, detector de colisiones, etc.

La Tabla 5-1 agrupa las distintas características de las herramientas de simulación presentadas en esta sección.

Simulador	Lenguajes de programación	Motores de simulación	Motor de gráficos	Licencia	Sistema Operativo	Open source	Documentación
Gazebo	Python	ODE Bullet Simbody DART	OGRE	GPL Gratuita	Mac OS X Linux Windows	Si	Buena
V-Rep	Python C/C++ Java Matlab	ODE Bullet Vortex	OpenGL	V-Rep Pro Edu Licencia Gratuita	Mac OS X Linux Windows	Si	Buena
Webots	Python C/C++ Java Matlab	ODE		Comercial	Mac OS X Linux Windows	No	Buena
OpenHRP	Python C/C++ Java Matlab	Motor Propio		Eclipse Public Licence	Windows Linux	Si	Buena

Tabla 5-1: Características de los Simuladores más populares en Robótica

Características como: open-source, multi-plataforma, personalización y documentación son deseables en los todos los simuladores. Sin embargo estas no se encuentran en todas las herramientas de simulación, es por esta razón que se escogió a V-Rep<sup>1</sup> como la herramienta de simulación dinámica para el desarrollo de ésta parte del trabajo.

### 5.3. Robot Humanoide Bioloid

Bioloid es una plataforma robótica modular que puede ser ensamblada como un robot humanoide, es utilizado como una plataforma para la enseñanza de la robótica en niveles de pregrado y posgrado, [Thai and Paulishen, 2011]. El robot humanoide Bioloid (Tipo A) es un robot de 18 grados de libertad (DOF) fue concebido por la empresa Koreana *Robotis*, tiene 18 grados de libertad: 6 a nivel de cada pierna, y tres por cada brazo, con 35 cm de altura y 1.95 kg,

<sup>1</sup>Virtual Robot Experimentation Platform

ver Figura 5-1. Dicho robot ha permitido hacer estudios de la marcha en robots humanoides, donde la generación de trayectorias para los servomotores de cada articulación se hacen con base en la proyección con el centro de masa y el punto de momento cero para un ciclo de marcha estable, [Nunes et al., 2011]. La Tabla 5-2 muestra las especificaciones de los componentes de esta plataforma.

Componente	Descripción
Controlador	CM-530, CPU: ARM Cortex (32 bit), Comunicación USB, Wireless (IR, Zigbee, Bluetooth).
Actuadores	18 Servomotores AX-12A, Par: 1.5 N.m (@ 11.1 V, 1.5 A).
Sensores	1 Giróscopo (2 ejes), 1 DMS (10-80 cm), 2 Sensores IR.
Software	RoboPlus
Alimentación	Batería LiPo (@ 11.1 V, 1000 mAh), SMPS (@ 12 V, 5 A).
Control Remoto	RC-100, ZigBee 110-A.

**Tabla 5-2:** Especificaciones Bioloid Premium Kit

Cada actuador es un servomotor AX-12A con una resolución de  $0.29^\circ$  para la medida de posición angular. Un giroscopio de 2 ejes para la medida de velocidad angular. Los datos de entrada y salida son procesados por un Controlador CM 530. Bioloid es un robot de bajo costo con las siguientes limitaciones: (i) las entradas de control a los servomotores son las consignas de un controlador PD. Esto significa que no es posible hacer control de par (el firmware de los servomotores es de código cerrado). (ii) Aunque cada parte del cuerpo del robot Bioloid se puede desmontar y medir su masa, es muy difícil predecir el centro de masa de cada articulación y por lo tanto de todo el robot.

Para realizar la construcción del robot virtual dentro del simulador, es necesario disponer del modelo CAD, Robotis<sup>2</sup> permite la descarga de cada una de las piezas que componen al robot. Los parámetros dinámicos fueron derivados del modelo CAD del robot, el cual incluye las medidas del tensor de inercia y centro de masa, se desconoce si el modelo CAD incluye todas las contribuciones de masa debidas a las tarjetas electrónicas, cableado, y espacios huecos en las partes plásticas.

<sup>2</sup><http://support.robotis.com>





**Figura 5-1:** Robot Humanoide Bioloid.

## 5.4. Simulación y Resultados Experimentales

La simulación en el entorno virtual V-Rep permite validar las trayectorias de marcha con los algoritmos descritos en los capítulos 3 y 4. Con el fin de probar los métodos de generación de trayectorias antes de implementarlos sobre el robot Bioloid para asegurar su estabilidad.

### 5.4.1. Patrón de Marcha basado en ZMP

Las trayectorias presentadas en la sección 3.2 se implementaron en el simulador V-Rep mediante una comunicación tipo cliente-servidor entre Matlab y V-Rep. La Fig. 5-2 muestra el video<sup>3</sup> del resultado de la implementación de las trayectorias según los parámetros de simulación descritos en la Tabla 3-1.

Posteriormente, se transfieren las trayectorias desde el simulador hacia el robot real. El video 5-3 evidencia la correspondencia entre la simulación dinámica y el robot real.

---

<sup>3</sup>Para ver los videos se debe habilitar el lector de pdf y estar conectado a Internet.



**Figura 5-2:** Video. Simulación en V-Rep del patrón de marcha basado en ZMP. Disponible en: <https://youtu.be/OeMOPDjofMM>



**Figura 5-3:** Video. Ciclo de marcha de Bioloid basado en ZMP. Disponible en: <https://youtu.be/W-MXQ-2S8Y8>

### 5.4.2. Patrón de Marcha basado en Optimización

De igual manera, las trayectorias de la sección 3.3 se implementaron en V-Rep. El video<sup>4</sup> 5-4 muestra al robot dando cuatro pasos y utilizando los resultados de la solución del problema de optimización de la norma Euclidiana de los pares articulares para un número de armónicos  $n = 5$ , longitud de paso  $L_p = 0.04$  [m] y duración del paso  $T = 2$  [seg].

Después de validar las trayectorias en el simulador, se transfirieron al robot como se observa en el video 5-5, demostrando su concordancia entre el robot virtual y el real.

---

<sup>4</sup>Para ver los videos se debe habilitar el lector de pdf y estar conectado a Internet.



**Figura 5-4:** Video. Simulación en V-Rep del patrón de marcha basado en Optimización. Disponible en: <https://youtu.be/bJZtEtNK9UY>



**Figura 5-5:** Video. Ciclo de de marcha de Bioloid basado en Optimización. Disponible en: <https://youtu.be/P1eBDGz2f6Q>

### 5.4.3. Filtro Dinámico

Las trayectorias  $\mathbf{q}^d$  obtenidas por el filtro dinámico del capítulo 3 para un número de armónicos  $n = 5$ , longitud de paso  $L_p = 0.04$  [m] y duración del paso  $T = 2$  [seg] se validaron en V-Rep (Fig. 5-6) y después se muestra su correspondencia con el robot real (Fig. 5-7).

## 5.5. Conclusión

El simulador dinámico V-Rep, permitió evaluar y validar las trayectorias de marcha en un entorno virtual antes de ejecutarlas sobre el robot real, esta aproximación del robot permite tener en cuenta las fuerzas y momentos generados en las articulaciones del robot bípedo para un ciclo de marcha. Sin embargo, incluso con un modelo perfecto, hay fenómenos del mundo real que nuestro

**Figura 5-6:** Video. Simulación en V-Rep del patrón de marcha basado en el Filtro. Disponible en: [https://youtu.be/MZ\\_IvaMhrYA](https://youtu.be/MZ_IvaMhrYA)

**Figura 5-7:** Video. Ciclo de marcha de Bioloid basado en el Filtro Dinámico. Disponible en: <https://youtu.be/OR1TIepwADE>

modelo no tiene en cuenta o no se pueden identificar. Estos incluyen la fricción de los engranajes en los servomotores, así como la banda muerta programada en la lógica de control. Estas fuentes de error, ocasionan que la simulación se pueda comportar en forma distinta al robot real, a menos que el controlador este diseñado para compensar estas dinámicas no modeladas.

# Conclusiones y Perspectivas

Este trabajo presenta los resultados de investigación sobre la generación de trayectorias de marcha para un robot humanoide comercial, llamado Bioloid. Se abordaron cuatro problemas: la captura de movimiento humano, el modelado matemático del robot, los patrones de marcha por el modelo *cart-table* y mediante optimización, además de las trayectorias de marcha a partir de la captura de movimiento.

Para la captura de movimiento humano, se realizó una taxonomía de la tecnología empleada por los sistemas de captura de movimiento, se compararon dos sistemas ópticos, Vicon <sup>TM</sup> y Kinect <sup>TM</sup>; por medio de las trayectorias de la marcha humana calculadas por ambos sistemas. Para lograrlo, se implementó un algoritmo para la estimación de las posiciones articulares humanas a partir de las posiciones cartesianas mediante un ajuste por mínimos cuadrados. Los resultados antropométricos obtenidos con Kinect mostraron una mayor varianza en relación a los obtenidos con Vicon en una razón de 1/4. Los movimientos a lo largo del plano frontal afectan significativamente la precisión de las lecturas basadas en Kinect, en consecuencia las trayectorias articulares no coinciden con las del sistema Vicon. La sincronización de los sistemas de captura de movimiento es esencial, aunque ambos sistemas trabajan a frecuencias de muestreo distintas, el algoritmo DTW permite alinear en el dominio del tiempo ambas señales y permite comparar de manera cualitativa las dos formas de onda. El sistema de captura de movimiento con Kinect es de bajo costo y fácil instalación y se presenta como una opción para realizar un estudio preliminar de los parámetros cinemáticos de la marcha humana. Sin embargo, el análisis de los datos de validación indica que el sensor Kinect no se puede emplear para hacer un análisis preciso de la cinemática del movimiento humano. Una vez se obtuvieron las trayectorias de marcha humana, se busco adaptarlas al robot Bioloid, aunque primero se debe obtener el modelo matemático del mismo. Sin embargo, los robots bípedos, son sistemas difíciles de modelar y simular debido a los impactos y a la intermitencia de contactos entre el pie y el suelo. Desde el punto de vista del modelado, la dinámica de un robot bípedo no puede describirse de la misma manera que un sistema mecánico clásico como un robot manipulador. El modelado de un bípedo exige la utilización de objetos matemáticos conocidos como ecuaciones diferenciales algebraicas híbridas [Hamann and

[Mehrmann, 2008]. Desde el punto de vista de simulación, las técnicas numéricas de resolución de esta clase de ecuaciones son aun materia de intenso estudio [Acary, 2009]. El modelo matemático del robot incluye: el modelo geométrico, cinemático y dinámico del humanoide. Para éste modelo solamente se consideraron los miembros inferiores (piernas) del robot, con un total de 18 coordenadas generalizadas: seis coordenadas absolutas para describir la posición y orientación del robot en el espacio, y las 12 coordenadas relativas restantes, describen las posiciones articulares. Cada pie del robot se modeló como un cuerpo rígido con cuatro puntos de contacto. Esto permitió describir cada una de las fases de la marcha para un robot humanoide que se desplaza en un suelo plano y libre de obstáculos. Después de obtener el modelo matemático del robot, se abordó el problema de generación de patrones de marcha mediante dos enfoques: patrón de marcha basado en el modelo *cart-table* y por optimización.

El primero, utiliza un modelo simplificado del robot, toda la masa del robot se concentra en el centro de masa (CoM), el “carro” conduce el movimiento del CoM durante la marcha. En este caso, el movimiento del carro es tratado como un sistema servocontrolado, y el movimiento del CoM es calculado con los actuales y futuros valores de referencia del punto de momento cero (ZMP). El segundo busca encontrar una solución a partir del modelo dinámico del robot y las restricciones cinemáticas y dinámicas impuestas, que permitan minimizar un índice de desempeño para un ciclo de marcha. El problema de optimización con restricciones se transformo en uno sin restricciones por medio de funciones de penalización para buscar una solución, además se hizo una parametrización del problema de optimización mediante una expansión en series de Fourier de las trayectorias articulares, esto permitió estudiar el valor del índice de desempeño en función del número de armónicos de las trayectorias, demostrando que los armónicos de orden superior no contribuyen significativamente en la evolución temporal de la posición articular. Se compararon ambos métodos, mediante dos índices de desempeño a tres velocidades de marcha, el patrón de marcha obtenido por el modelo *cart-table* revela un consumo energético mucho mayor que el de optimización. Sin embargo, el modelo *cart-table* muestra valores menores de perdida por efecto Joule de los actuadores del robot en comparación de su contra-parte. Ambos patrones de marcha, generan trayectorias articulares dinámicamente estables y se implementaron fuera de línea. Posteriormente, se busco adaptar las trayectorias de marcha de un ser humano, obtenidas por captura de movimiento, en el robot bípedo Bioloid.

Para la generación de trayectorias a partir de captura de movimiento, se enfrentó el problema por medio del concepto de un filtro dinámico. El filtro dinámico es un procedimiento computacional, que transforma las trayectorias de la marcha humana en trayectorias articulares físicamente realizables por el robot. El filtro dinámico y el patrón de marcha mediante optimización de pares, se compararon mediante dos índices de desempeño utilizando tres velocidades de marcha, el filtro revela un consumo energético mayor que el de optimización. También, el filtro y el método de optimización de pares muestran valores aproximadamente iguales de perdida por efecto Joule de

los actuadores del robot. El filtro presenta la ventaja de una menor carga computacional frente al método de optimización de pares. Una vez se calcularon las trayectorias de marcha estables para el robot, obtenidas mediante tres métodos: modelo *cart-table*, optimización de pares y el filtro dinámico, estas se deben implementar y validar en el robot real.

Todas las anteriores propuestas de generación de trayectorias fueron validadas inicialmente mediante simulación. Esta es crucial para el estudio del movimiento, prototipado rápido, diseño de controladores y validación en un ambiente virtual antes de la ejecución sobre un robot real. En el caso de la simulación dinámica, esta ofrece información visual en el mundo virtual y del comportamiento del robot en el mundo real, siendo la forma más eficiente de validar las trayectorias de un ciclo de marcha para un robot bípedo. Antes de la implementación de las trayectorias sobre el robot Bioloid, se utilizó el simulador dinámico V-Rep. El modelo CAD de Bioloid fue ensamblado en Solid Edge e importado a V-Rep, este contiene todas las propiedades físicas de cada una de las piezas constitutivas del robot real, e incluye los algoritmos de control PD articular de los 18 servomotores Dynamixel AX-12A. Sin embargo, incluso con un modelo perfecto, hay fenómenos del mundo real que nuestro modelo no tiene en cuenta o no se pueden identificar. Estos incluyen la fricción de los engranajes en los servomotores, así como la banda muerta programada en la lógica de control. Estas fuentes de error, ocasionan que la simulación se pueda comportar en forma distinta al robot real, a menos que el controlador este diseñado para compensar estas dinámicas no modeladas. En el caso de la simulación dinámica, esta ofrece información visual en el mundo virtual y del comportamiento del robot en el mundo real, siendo la forma más eficiente y segura de validar las trayectorias de un ciclo de marcha para un robot bípedo.

## Perspectivas

Desde el punto de vista de la estabilidad, se utilizó solamente el criterio de estabilidad del ZMP. El criterio del ZMP sumado a condiciones adicionales para evitar el deslizamiento y/o el giro del pie sobre un eje perpendicular a la superficie de sustentación, asegura un contacto un contacto rígido, manteniendo el pie fijo y plano en el piso. Otra forma de estudiar la estabilidad de un robot bípedo es ver el movimiento como cíclico y verificar de forma matemática las condiciones para tener el mismo estado del sistema de un paso al siguiente, de esta forma el robot entra en un ciclo límite. Este tipo de estabilidad es analizada y sintetizada utilizando herramientas de la teoría de control como son los mapas de Poincaré y la teoría de puntos fijos que estudian procesos cuyo comportamiento es repetitivo o cíclico.

De manera general, la principal perspectiva de esta tesis es implementar el filtro dinámico, para la generación de trayectorias en línea, de un robot humanoide con dimensiones aproximadas a las de un ser humano. El objetivo sería validar el filtro dinámico en un robot de más grados de libertad, con mejores prestaciones en cuanto a la instrumentación (sensores para el cálculo del ZMP, posición, orientación y valor del par en cada una de las articulaciones) y una antropometría similar al ser humano. El filtro dinámico puede generar movimientos de marcha factibles *Off-Line*, se puede utilizar para cualquier intérprete y robot si el esquema de la figura 4-2 es seguido, no requiere ningún escalamiento de las trayectorias obtenidas a partir de captura de movimiento. El problema de optimización expresado en la Ec. (4.4) requiere el modelo cinemático y dinámico del robot que ejecuta el movimiento. En las restricciones se imponen las condiciones dinámicas y de estabilidad para permitir que el robot ejecute la marcha tomando como referencia las trayectorias articulares de un ser humano.

A largo plazo se esperará contribuir desde la perspectiva de la biomecánica con la adaptación de los modelos dinámicos de un robot bípedo al cuerpo humano, con el objetivo de simular las trayectorias de marcha mediante captura de movimiento, esto permitirá construir un prototipo virtual de prótesis de miembro inferior antes de la implementación real de la misma. Aunque existen diferentes sistemas para probar prótesis de pierna, los robots bípedos, a pesar de sus diferencias con el humano, constituyen una plataforma de validación mucho más realista, [Bravo and Rengifo, 2014].



# Apéndice A

## Descripción de la Marcha Humana

La marcha humana se define como la repetición de una serie de movimientos articulares simultáneos que son ocasionados por la actividad muscular y que desplazan al cuerpo, manteniendo una postura estable, sobre una línea de progresión. Para ello, los músculos deben actuar en el momento preciso y con la intensidad adecuada. Los requisitos básicos para que exista locomoción, [Vaughan et al., 1992] son:

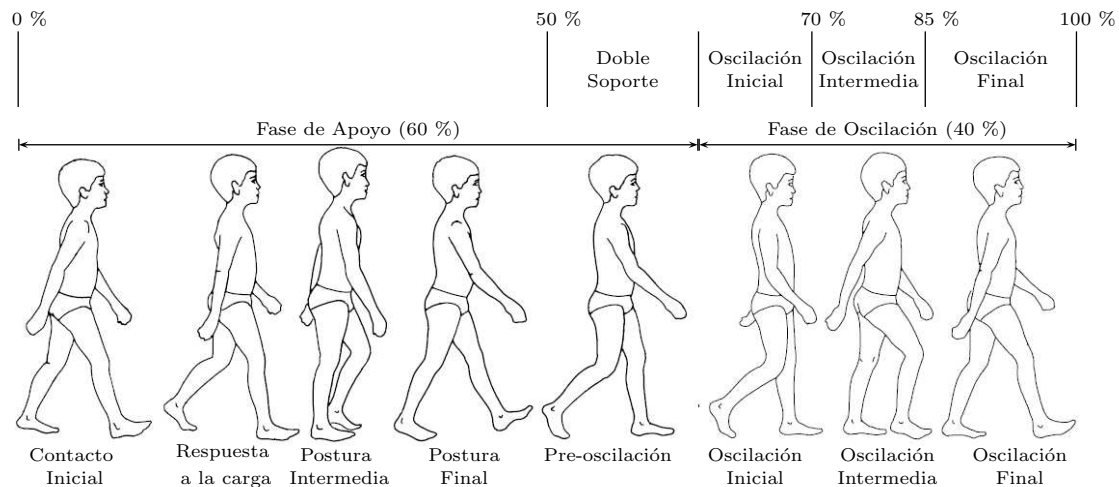
1. Movimientos periódicos de cada pie para llevarlo de una posición de soporte a otra siguiente.
2. Fuerzas de reacción generadas por el suelo sobre los pies, suficientes para soportar el peso del cuerpo.

El movimiento periódico de las piernas es la esencia de la naturaleza cíclica de la marcha.

### A.1. El Ciclo de Marcha

En el proceso de locomoción bípeda el cuerpo se mueve de forma erguida hacia adelante, siendo su peso soportado alternativamente por ambas piernas. Mientras el cuerpo se desplaza sobre la extremidad soporte, la otra pierna se balancea como preparación para el siguiente apoyo. Siempre un pie se encuentra sobre el piso, y en el periodo de transferencia del peso del cuerpo de la pierna de soporte a la otra, existe un breve lapso de tiempo en el cual ambos pies descansan simultáneamente sobre el suelo. Al aumentar la velocidad de la marcha, los periodos bipodales o de doble soporte se tornan más cortos, hasta que el sujeto eventualmente comienza a correr, siendo así reemplazados por lapsos breves de tiempo en los que ambos pies se encuentran en el

aire. El plano sagital se identifica con el plano de progresión de movimiento; los movimientos más importantes de las articulaciones que permiten la caminata ocurren en este plano, aunque se requieren movimientos adicionales en el plano frontal para lograr un adecuado balance y en el plano transversal para mejorar la eficiencia energética de la caminata, [Chevallerau et al., 2009].



**Figura A-1:** Ciclo de marcha de un niño de 8 años, descrito para la pierna derecha. Figura Modificada de [Vaughan et al., 1992].

Durante un ciclo de marcha completo cada pierna pasa por una fase de apoyo, durante la cual el pie se encuentra en contacto con el suelo y por una fase de oscilación, en la cual el pie se halla en el aire mientras se desplaza hacia adelante como preparación para el siguiente apoyo, como se muestra en la Figura A-1. La fase de apoyo comienza con el contacto inicial y finaliza con el despegue del antepié. Se destacan cinco eventos a saber: contacto inicial, apoyo inicial o respuesta de carga, postura intermedia, postura final y pre-oscilación. La fase de oscilación transcurre desde el instante de despegue del antepié hasta el contacto con el suelo y la constituyen tres eventos: oscilación inicial, oscilación intermedia y oscilación final, [Ivancevic and Ivancevic, 2008].

Los eventos o periodos que constituyen un ciclo de marcha para la pierna derecha, Figura A-1 son:

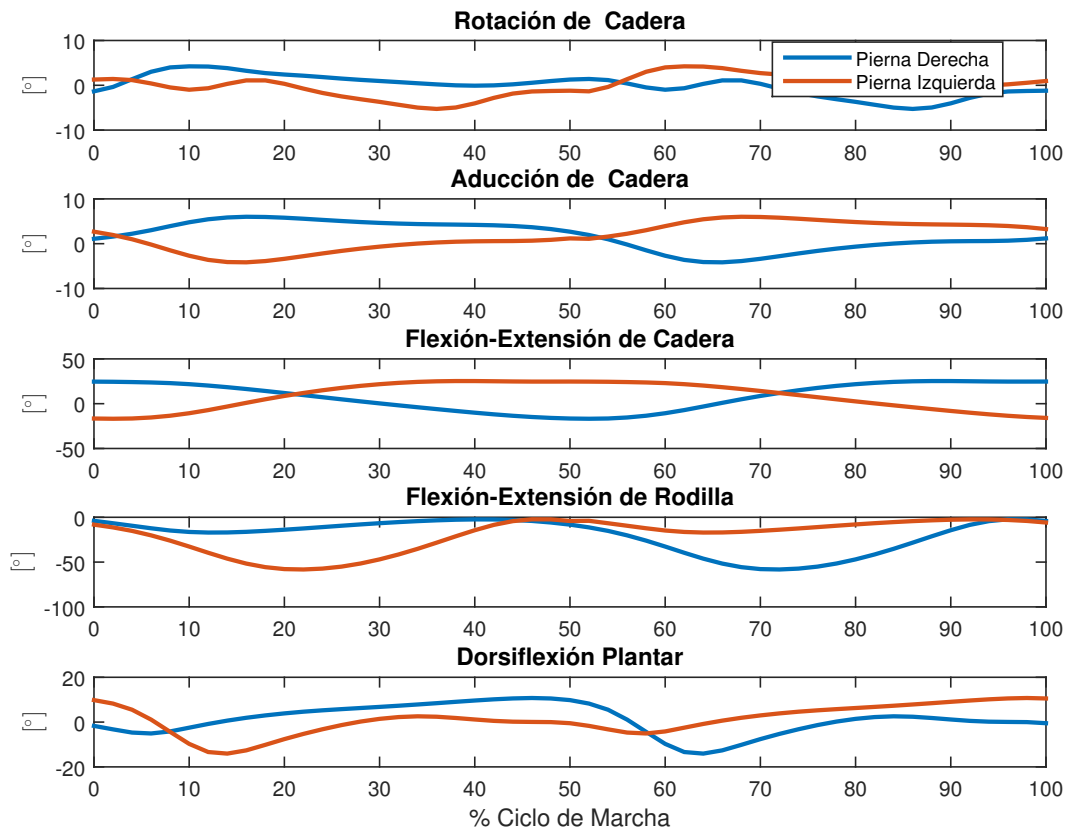
1. *Contacto inicial* (0%): Inicia cuando el pie toca el suelo. Conforme el talón va girando, el área de contacto entre la planta del pie y la superficie aumenta. En este momento se logra ubicar a la pierna en la posición de inicio del periodo de postura.
2. *Respuesta a la carga* (0 – 10%): Este evento marca el inicio de la fase de doble soporte. Comienza cuando el pie toca la superficie de apoyo, y continúa hasta que el otro pie se levanta. En esta fase se reduce el impacto causado por la superficie sobre el cuerpo al flexionar la rodilla, se estabiliza la marcha y se permite seguir con el avance.

3. *Postura intermedia* (10 – 30 %): Este momento representa la primera mitad de la fase de soporte simple. Inicia cuando el otro pie se levanta y continúa hasta que el centro de masa se alinea con la parte delantera del pie de apoyo. Mientras la pierna derecha se encuentra en esta fase, la pierna izquierda está en la fase de oscilación inicial. En este eventose consigue el apoyo completo del pie y se logra estabilizar al tronco y a las extremidades.
4. *Postura final* (30 – 50 %): En esta unidad funcional se completa el movimiento realizado en la fase de soporte simple. Inicia cuando el talón del pie de apoyo asciende y continúa hasta que el otro pie toca la superficie de contacto. En esta fase se logra desplazar al centro de masa del cuerpo por delante del pie de apoyo.
5. *Pre-oscilación* (50 – 60 %): Ésta es el último evento perteneciente al periodo de postura; representa a la fase de dobel soporte del pie contrario. Inicia cuando la otra pierna hace contacto con la superficie. Durante esta fase se realiza una transferencia de carga entre las extremidades y se logra ubicar a la pierna en la posición de inicio del periodo de oscilación.
6. *Oscilación inicial* (60 – 70 %): Corresponde, aproximadamente, a una tercera parte del periodo de oscilación. Inicia cuando el pie abandona la superficie y se extiende hasta que éste se encuentra al lado del pie de apoyo. El pie se eleva mediante la flexión de la cadera y rodilla. Mientras un pie se encuentra en este evento, el otro está en el momento de postura intermedia.
7. *Oscilación intermedia* (70 – 85 %): Inicia cuando la pierna oscilante se encuentra a un lado de la pierna de apoyo, y continúa hasta que la pierna rebasa la posición del pie flotante (plano lateral) y la posición de la tibia es ortogonal con respecto a la superficie de apoyo. La pierna se extiende como efecto a la gravedad, y el tobillo continúa su flexión para llegar a su posición natural.
8. *Oscilación final* (85 – 100 %): El momento final de la fase de oscilación inicia cuando la tibia es ortogonal a la superficie de apoyo; se extiende hasta que la pierna establece contacto con la superficie. En este evento se logra completar el avance de la pierna y se le prepara para entrar al periodo de postura.

## A.2. Cinemática de la Marcha Humana

La cinemática describe los elementos espaciales y temporales de movimiento, como son: la posición, la velocidad y la aceleración de los cuerpos rígidos. En un contexto biomecánico, la cinemática se refiere a la traslación y rotación de los segmentos del cuerpo con respecto a un sistema de coordenadas fijo o relativo.

Los sistemas de captura de movimiento permiten calcular las trayectorias articulares para un ciclo de marcha. Es posible también calcular las velocidades y aceleraciones mediante derivación numérica. En este trabajo utilizamos la base de datos de captura de movimiento de una persona con un ciclo de marcha normal tomadas del software *OpenSim*. *OpenSim* es una aplicación *open source* para modelar, simular y analizar el sistema musculoesquelético [Delp et al., 2007]. El software nos permite obtener las trayectorias articulares de marcha  $\mathbf{q}^{ref}$  a partir de datos de captura de movimiento, Figura A-2.



**Figura A-2:** Trayectorias articulares de la marcha humana para un ciclo de marcha normal.

La Figura A-2 ilustra el movimiento típico de la cadera, la rodilla y el tobillo al caminar. En contacto con el suelo, la aceleración hacia abajo ejercida por el peso del cuerpo debe ser absorbida, esto se logra mediante la flexión de la cadera, la flexión de la rodilla y la flexión dorsal del tobillo. Estas flexiones continúan mientras que el cuerpo se desplaza sobre el pie de apoyo. Al final de la fase de apoyo, la acción articular se invierte para la extensión de cadera, extensión de la rodilla y la flexión plantar del tobillo.

Durante la marcha, la flexión de la cadera en el momento en el que el talón toca el suelo se encuentra en el intervalo de  $35^\circ$  a  $40^\circ$ . Hasta despegue de los dedos, la flexión de la cadera se reduce a alrededor de  $0^\circ$  a  $3^\circ$ . Durante la fase de oscilación, la cadera se flexiona de nuevo con un máximo de  $25^\circ$  a  $50^\circ$ .

La rodilla está flexionada a  $10^\circ$  a  $15^\circ$  en el momento del aterrizaje del talón para reducir las fuerzas de impacto. Si bien se acepta el peso corporal al comienzo de la fase de apoyo, la rodilla se flexiona más y alcanza su máximo en la postura intermedia con  $20^\circ$  a  $25^\circ$ . La rodilla entonces se extiende sin alcanzar la extensión completa, y se flexiona de nuevo durante la propulsión hacia la fase de apoyo. En el despegue de los dedos, la rodilla oscila entre  $10^\circ$  a  $45^\circ$ , dependiendo de la velocidad al caminar. La longitud de la pierna se acorta durante la fase de oscilación para garantizar la distancia al suelo y la rodilla se flexiona un poco más, aproximadamente  $50^\circ$  a  $65^\circ$ .

El tobillo muestra una flexión plantar de  $5^\circ$  a  $6^\circ$  cuando el talón aterriza, después se mueve lentamente con una dorsiflexión de  $10^\circ$  a  $12^\circ$  hasta que todo el pie toca el suelo. Durante la fase de apoyo, retorna gradualmente con una flexión plantar de aproximadamente  $15^\circ$  a  $20^\circ$  hasta el despegue de los dedos. El aumento de la dorsiflexión mantiene los dedos de los pies tocando el suelo durante la fase de oscilación.



# Apéndice B

## Modelo Geométrico Inverso del Robot Bioloid

El modelo geométrico inverso permite calcular las posiciones articulares del robot a partir de la posición y orientación de los pies. En general es un problema con múltiples soluciones y su complejidad depende en gran medida de la geometría del robot, [Khalil and Dombre, 2004]. Para calcular la cinemática inversa del robot Bioloid se utilizó el Método de Paul, éste es un método geométrico que permite resolver la cinemática inversa para cada una de las piernas del robot (derecha e izquierda).

### B.1. Cinemática inversa de la pierna derecha

Para el cálculo de la cinemática inversa de las piernas se tuvieron en cuenta los parámetros geométricos descritos en la Tabla 2-3 del capítulo 2. Se considera la posición  $q_7 = 0 = \text{cte.}$  y se resolverá el siguiente problema:

$${}^0p_{\text{ra}} \triangleq \begin{bmatrix} {}^0p_x \\ {}^0p_y \\ {}^0p_z \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{T}_7 \cdot {}^7\mathbf{T}_9(q_9) \cdot {}^9\mathbf{T}_{11}(q_{11}) \cdot {}^{11}\mathbf{T}_{13}(q_{13}) \cdot {}^{13}\mathbf{T}_{15}(q_{15}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Donde  ${}^0p_{\text{ra}}$  es la posición cartesiana del tobillo derecho expresado en el marco de referencia 0 y  ${}^0\mathbf{T}_7 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  es una matriz de transformación constante. Dada la dificultad de resolver

simultáneamente  $q_9$ ,  $q_{11}$ ,  $q_{13}$  y  $q_{15}$  se multiplica por  ${}^7\mathbf{T}_9^{-1}(q_9)$  a ambos lados de la Ec. (B.1), el problema puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 {}^7\mathbf{T}_9^{-1}(q_9) \cdot \begin{bmatrix} {}^7p_x \\ {}^7p_y \\ {}^7p_z \end{bmatrix} &= {}^9\mathbf{T}_{11}(q_{11}) \cdot {}^{11}\mathbf{T}_{13}(q_{13}) \cdot {}^{13}\mathbf{T}_{15}(q_{15}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} {}^7p_z \cos(q_9) - {}^7p_x \sin(q_9) \\ {}^7p_z \sin(q_9) - {}^7p_x \cos(q_9) \\ {}^7p_y - r_9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{15} \cos(q_{11} + q_{13}) + d_{13} \cos(q_{11}) \\ 0 \\ d_{15} \sin(q_{11} + q_{13}) + d_{13} \sin(q_{11}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

La relación  ${}^7p_z \sin(q_9) - {}^7p_x \cos(q_9) = 0$  es una ecuación de Paul Tipo II,<sup>1</sup> y permite calcular directamente el valor de  $q_9$ .

Haciendo una segunda iteración, multiplicando por  ${}^9\mathbf{T}_{11}^{-1}(q_{11})$  a ambos lados de la Ec. (B.2), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 {}^9\mathbf{T}_{11}^{-1}(q_{11}) \cdot \left( {}^7\mathbf{T}_9^{-1}(q_9) \cdot \begin{bmatrix} {}^7p_x \\ {}^7p_y \\ {}^7p_z \end{bmatrix} \right) &= {}^{11}\mathbf{T}_{13}(q_{13}) \cdot {}^{13}\mathbf{T}_{15}(q_{15}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} {}^9p_x \cos(q_{11}) + {}^9p_z \sin(q_{11}) \\ {}^9p_z \cos(q_{11}) + {}^9p_x \sin(q_{11}) \\ {}^9p_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{13} + d_{15} \cos(q_{13}) \\ d_{15} \sin(q_{13}) \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Las dos primeras ecuaciones de la Ec. (B.3) forman un sistema de ecuaciones de Paul Tipo VI,<sup>2</sup> y permite calcular directamente los valores de  $q_{11}$  y  $q_{13}$ .

<sup>1</sup>La ecuación de la forma:  $X \sin \theta_i + Y \cos \theta_i = Z$  es de Tipo II, [Khalil and Dombre, 2004].

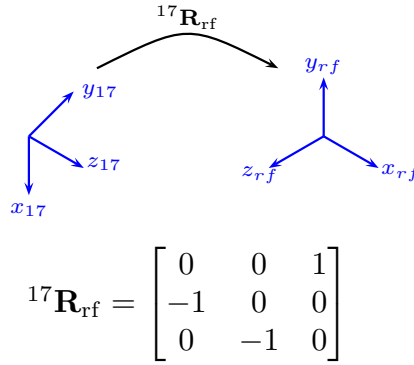
<sup>2</sup>Al sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}
 W \sin \theta_i &= X \cos \theta_i + Y \sin \theta_i + Z_1 \\
 W \cos \theta_i &= X \sin \theta_i - Y \cos \theta_i + Z_2
 \end{aligned}$$

es de Tipo VI, [Khalil and Dombre, 2004].



Para asegurar la estabilidad del robot, se propone que cuando el robot inicie la marcha, sus pies permanezcan siempre paralelos a la superficie de contacto, para evitar que el pie rote y el robot caiga. Esto se logra haciendo coincidir los sistemas de referencia de las articulaciones del pie  $q_{15}$  y  $q_{17}$  con el referente  $\langle X_{rf}, Y_{rf}, Z_{rf} \rangle$ . En la Fig. B-1 se observa la matriz de rotación  ${}^{17}\mathbf{R}_{rf}$  para pasar del referente 17 al referente del pie derecho.



**Figura B-1:** Alineación de Referentes mediante  ${}^{17}\mathbf{R}_{rf}$ .

De estas relaciones geométricas se calcula que los valores para hacer coincidir ambos referentes  ${}^{15}\mathbf{T}_{rf}(q_{15})$  y  ${}^{15}\mathbf{T}_{rf}(q_{17})$  con el referente del pie derecho, son:

$$\begin{aligned} q_{15} &= -(q_{11} + q_{13}) \\ q_{17} &= -q_9 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Finalmente se define el vector de coordenadas generalizadas  $q_{RL}$  para la pierna derecha del robot  $q_{RL} = \begin{bmatrix} q_7 & q_9 & q_{11} & q_{13} & q_{15} & q_{17} \end{bmatrix}^T$

## B.2. Cinemática inversa de la pierna izquierda

De igual forma que para la pierna derecha, se considera la posición  $q_8 = 0 = \text{cte.}$  y se resuelve la primera iteración:

$${}^0p_{1a} \triangleq \begin{bmatrix} {}^0p_x \\ {}^0p_y \\ {}^0p_z \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{T}_8 \cdot {}^8\mathbf{T}_{10}(q_{10}) \cdot {}^{10}\mathbf{T}_{12}(q_{12}) \cdot {}^{12}\mathbf{T}_{14}(q_{14}) \cdot {}^{14}\mathbf{T}_{16}(q_{16}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Donde  ${}^0p_{1a}$  es la posición cartesiana del tobillo izquierdo expresado en el marco de referencia 0 y  ${}^0\mathbf{T}_8 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  es una matriz de transformación constante. Dada la dificultad de resolver simultáneamente  $q_8$ ,  $q_{10}$ ,  $q_{12}$  y  $q_{16}$  se multiplica por  ${}^8\mathbf{T}_{10}^{-1}(q_{10})$  a ambos lados de la Ec. (B.5), el problema puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 {}^8\mathbf{T}_{10}^{-1}(q_{10}) \cdot \begin{bmatrix} {}^8p_x \\ {}^8p_y \\ {}^8p_z \end{bmatrix} &= {}^{10}\mathbf{T}_{12}(q_{12}) \cdot {}^{12}\mathbf{T}_{14}(q_{14}) \cdot {}^{14}\mathbf{T}_{16}(q_{16}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} {}^8p_z \cos(q_{10}) + {}^8p_x \sin(q_{10}) \\ {}^8p_x \cos(q_{10}) - {}^8p_z \sin(q_{10}) \\ {}^8p_y - r_{10} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{16} \cos(q_{12} + q_{14}) + d_{14} \cos(q_{12}) \\ 0 \\ -d_{16} \sin(q_{12} + q_{14}) - d_{14} \sin(q_{12}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

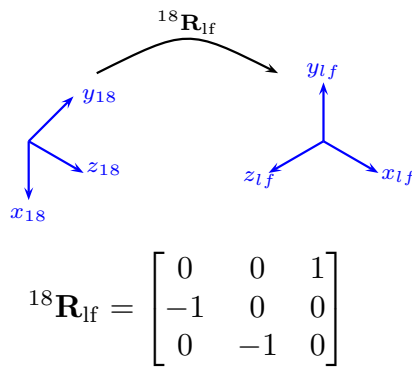
La relación  ${}^8p_x \cos(q_{10}) - {}^8p_z \sin(q_{10}) = 0$  es una ecuación de Paul Tipo II y permite calcular directamente el valor de  $q_{10}$ .

Haciendo una segunda iteración, multiplicando por  ${}^{10}\mathbf{T}_{12}^{-1}(q_{12})$  a ambos lados de la Ec. (B.6), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 {}^{10}\mathbf{T}_{12}^{-1}(q_{12}) \cdot \left( {}^8\mathbf{T}_{10}^{-1}(q_{10}) \cdot \begin{bmatrix} {}^8p_x \\ {}^8p_y \\ {}^8p_z \end{bmatrix} \right) &= {}^{12}\mathbf{T}_{14}(q_{14}) \cdot {}^{14}\mathbf{T}_{16}(q_{16}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} {}^{10}p_x \cos(q_{12}) + {}^{10}p_z \sin(q_{12}) \\ {}^{10}p_z \cos(q_{12}) + {}^{10}p_x \sin(q_{12}) \\ {}^{10}p_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{14} + d_{16} \cos(q_{14}) \\ d_{16} \sin(q_{14}) \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Las dos primeras ecuaciones de la Ec. (B.7) forman un sistema de ecuaciones de Paul Tipo VI y permite calcular directamente los valores de  $q_{16}$  y  $q_{18}$ .

Haciendo coincidir los sistemas de referencia de las articulaciones del pie  $q_{16}$  y  $q_{18}$  con el referente  $\langle X_{lf}, Y_{lf}, Z_{lf} \rangle$ . En la Fig. B-2 se observa la matriz de rotación  ${}^{18}\mathbf{R}_{lf}$  para pasar del referente 18 al referente del pie izquierdo.



**Figura B-2:** Alineación de Referentes mediante  ${}^{18}\mathbf{R}_{\text{rf}}$ .

De estas relaciones geométricas se calcula que los valores para hacer coincidir ambos referentes  ${}^{16}\mathbf{T}_{\text{rf}}(q_{16})$  y  ${}^{18}\mathbf{T}_{\text{rf}}(q_{18})$  con el referente del pie izquierdo, son:

$$\begin{aligned} q_{16} &= -(q_{12} + q_{14} + \pi) \\ q_{18} &= -(q_{10} + \pi) \end{aligned} \tag{B.8}$$

Finalmente se define el vector de coordenadas generalizadas  $q_{LL}$  para la pierna izquierda del robot

$$q_{LL} = \begin{bmatrix} q_8 & q_{10} & q_{12} & q_{14} & q_{16} & q_{18} \end{bmatrix}^T$$



# Bibliografía

- [Abdel-Malek and Arora, 2013] Abdel-Malek, K. and Arora, J. (2013). *Human Motion Simulation: Predictive Dynamics*. Elsevier Science.
- [Acary, 2009] Acary, V. (2009). Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts. In *JNRR'09 7ème Journées Nationales de la Recherche en Robotique*.
- [Al-shuka et al., 2014] Al-shuka, H. F. N., Corves, B. J., hong Zhu, W., and Vanderborght, B. (2014). A simple algorithm for generating stable biped walking patterns. *International Journal of Computer Applications*, 101(4):29–33.
- [Ayusawa and Nakamura, 2012] Ayusawa, K. and Nakamura, Y. (2012). Fast inverse kinematics algorithm for large dof system with decomposed gradient computation based on recursive formulation of equilibrium. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 3447–3452.
- [Bezerra and Zampieri, 2004] Bezerra, C. A. D. and Zampieri, D. E. (2004). Biped robots: The state of art. In Ceccarelli, M., editor, *International Symposium on History of Machines and Mechanisms*, pages 371–389. Springer Netherlands.
- [Bolink et al., 2016] Bolink, S., Naisas, H., Senden, R., Essers, H., Heyligers, I., Meijer, K., and Grimm, B. (2016). Validity of an inertial measurement unit to assess pelvic orientation angles during gait, sit-stand transfers and step-up transfers: Comparison with an optoelectronic motion capture system\*. *Medical Engineering & Physics*, 38(3):225 – 231.
- [Boor, 2001] Boor, C. D. (2001). *A Practical Guide to Splines*. Springer.
- [Bravo and Rengifo, 2014] Bravo, D. A. and Rengifo, C. F. (2014). Modelo biomecánico de una prótesis de pierna. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial {RIAI}*, 11(4):417–425.

- [Brian, 2009] Brian, F. (2009). *Analytical System Dynamics*, volume 1 of *Modeling and Simulation*. Springer US, 1 edition.
- [Cappozzo et al., 1997] Cappozzo, A., Cappello, A., d. Croce, U., and Pensalfini, F. (1997). Surface-marker cluster design criteria for 3-d bone movement reconstruction. In *Biomedical Engineering*.
- [Chevallerau and Aoustin, 2001] Chevallerau, C. and Aoustin, A. (2001). Optimal reference trajectories for walking and running of a biped robot. *Robotica*, 19:557–569.
- [Chevallerau et al., 2009] Chevallerau, C., Bessonnet, G., Abba, G., and Aoustin, Y. (2009). *Bipedal Robots. Modeling, design and building walking robots*. Wiley, 1 edition.
- [Chiasson, 2005] Chiasson, J. (2005). *Modeling and High Performance Control of Electric Machines*. IEEE Press Series on Power Engineering. Wiley.
- [Chris Kirtley, 2006] Chris Kirtley, M. P. A. (2006). *Clinical Gait Analysis. Theory and Practice*. Churchill Livingstone, 1 edition.
- [Clark et al., 2013] Clark, R. A., Bower, K. J., Mentiplay, B. F., Paterson, K., and Pua, Y.-H. (2013). Concurrent validity of the microsoft kinect for assessment of spatiotemporal gait variables. *Journal of Biomechanics*, 46(15):2722 – 2725.
- [Clark et al., 2012] Clark, R. A., Pua, Y.-H., Fortin, K., Ritchie, C., Webster, K. E., Denehy, L., and Bryant, A. L. (2012). Validity of the microsoft kinect for assessment of postural control. *Gait & Posture*, 36(3):372 – 377.
- [Corke, 2011] Corke, P. I. (2011). *Robotics, vision and control : fundamental algorithms in Matlab*. Star, 73.; Springer tracts in advanced robotics, 73. Springer, 1st ed edition.
- [Damas and Santos-Victor, 2012] Damas, B. and Santos-Victor, J. (2012). An online algorithm for simultaneously learning forward and inverse kinematics. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 1499–1506.
- [Delp et al., 2007] Delp, S., Anderson, F., Arnold, A., Loan, P., Habib, A., John, C., Guendelman, E., and Thelen, D. (2007). Opensim: Open-source software to create and analyze dynamic simulations of movement. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 54(11):1940–1950.
- [Denavit and Hartenberg, 1965] Denavit, J. and Hartenberg, R. S. (1965). A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 22(2):215 – 221.
- [Du et al., 2012] Du, G., Zhang, P., Mai, J., and Li., Z. (2012). Markerless kinect-based hand tracking for robot teleoperation. *International Journal of Advanced Robotic Systems*.

- [Dutta, 2012] Dutta, T. (2012). Evaluation of the kinect sensor for 3-d kinematic measurement in the workplace. *Applied Ergonomics*, 43(4):645 – 649.
- [Erez et al., 2015] Erez, T., Tassa, Y., and Todorov, E. (2015). Simulation tools for model-based robotics: Comparison of bullet, havok, mujoco, ode and physx. In *Robotics and Automation (ICRA), 2015 IEEE International Conference on*, pages 4397–4404.
- [Featherstone, 2008] Featherstone, R. (2008). *Rigid Body Dynamics Algorithms*. ISBN 978-0-387-74314-1. Springer.
- [Grizzle et al., 2014] Grizzle, J. W., Chevallereau, C., Sinnet, R. W., and Ames, A. D. (2014). Models, feedback control, and open problems of 3d bipedal robotic walking. *Automatica*, 50(8):1955 – 1988.
- [Hamann and Mehrmann, 2008] Hamann, P. and Mehrmann, V. (2008). Numerical solution of hybrid systems of differential-algebraic equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6 – 8):693 – 705.
- [Holden et al., 1997] Holden, J. P., Orsini, J. A., Siegel, K. L., Kepple, T. M., Gerber, L. H., and Stanhope, S. J. (1997). Surface movement errors in shank kinematics and knee kinetics during gait. *Gait & Posture*, 5(3):217 – 227.
- [Hu et al., 2014] Hu, K., Ott, C., and Lee, D. (2014). Online human walking imitation in task and joint space based on quadratic programming. In *Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on*, pages 3458–3464.
- [Ivaldi et al., 2014] Ivaldi, S., Peters, J., Padois, V., and Nori, F. (2014). Tools for simulating humanoid robot dynamics: A survey based on user feedback. In *Humanoid Robots (Humanoids), 2014 14th IEEE-RAS International Conference on*, pages 842–849.
- [Ivancevic and Ivancevic, 2008] Ivancevic, V. and Ivancevic, T. (2008). *Human-Like Biomechanics: A Unified Mathematical Approach to Human Biomechanics and Humanoid Robotics*. Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering, v. 28. Springer.
- [Izadi et al., 2011] Izadi, S., Kim, D., Hilliges, O., Molyneaux, D., Newcombe, R., Kohli, P., Shotton, J., Hodges, S., Freeman, D., Davison, A., and Fitzgibbon, A. (2011). Kinect-fusion: Real-time 3d reconstruction and interaction using a moving depth camera. In *Proceedings of the 24th Annual ACM Symposium on User Interface Software and Technology, UIST '11*, pages 559–568, New York, NY, USA. ACM.
- [Kajita, 2003] Kajita, S. (2003). Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point. In *International Conference on Robotics and Automation*, pages 1620–1626.

- [Kajita and Espiau, 2008] Kajita, S. and Espiau, B. (2008). Legged robots. In Siciliano, B. and Khatib, O., editors, *Springer Handbook of Robotics*, pages 361–389. Springer Berlin Heidelberg.
- [Kajita et al., 2014] Kajita, S., Hirukawa, H., Harada, K., and Yokoi, K. (2014). *Introduction to Humanoid Robotics*, volume 1 of *1610-7438*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Original Japanese edition published by Ohmsha Ltd., Tokyo 2005.
- [Kajita et al., 2006] Kajita, S., Kanehiro, F., Kaneko, K., k. Fujiwara, Harada, K., Yokoi, K., and Hirukawa, H. (2006). Biped walking pattern generator allowing auxiliary zmp control. In *International Conference on Intelligent Robots and Systems*.
- [Kajita et al., 2001] Kajita, S., Kanehiro, F., Kaneko, K., Yokoi, K., and Hirukawa, H. (2001). The 3d linear inverted pendulum mode: a simple modeling for a biped walking pattern generation. In *Intelligent Robots and Systems, 2001. Proceedings. 2001 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 1, pages 239–246 vol.1.
- [Katayama et al., 1985] Katayama, T., Takahira, O., Inoue, T., and Kato, T. (1985). Design of an optimal controller for a discrete-time system subject to previewable demand. *International Journal of Control*, 41(3):677 – 699.
- [Khalil and Dombre, 2004] Khalil, W. and Dombre, E. (2004). *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science. Butterworth - Heinemann, Paris, France, 2 edition.
- [Koenemann et al., 2014] Koenemann, J., Burget, F., and Bennewitz, M. (2014). Real-time imitation of human whole-body motions by humanoids. In *Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on*, pages 2806–2812.
- [Kröger, 2010] Kröger, T. (2010). *On-Line Trajectory Generation in Robotic Systems: Basic Concepts for Instantaneous Reactions to Unforeseen (Sensor) Events (Springer Tracts in Advanced Robotics, 58)*. Springer tracts in advanced robotics, 1st edition. edition.
- [Landau and Lifshitz, 1978] Landau, L. and Lifshitz, E. (1978). *Mecánica*. Number v. 1 in Curso de física teórica. Reverté.
- [Lee et al., 2013] Lee, S. J., Motai, Y., and Choi, H. (2013). Tracking human motion with multi-channel interacting multiple model. *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, 9(3):1751–1763.
- [Luigi Biagiotti, 2009] Luigi Biagiotti, C. M. a. (2009). *Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Menache, 2011] Menache, A. (2011). *Understanding motion capture for computer animation*. Elsevier, 2nd edition.



- [Munirathinam et al., 2012] Munirathinam, K., Sakkay, S., and Chevallereau, C. (2012). Dynamic motion imitation of two articulated systems using nonlinear time scaling of joint trajectories. In *International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Algarve, Portugal.
- [Mutto et al., 2012] Mutto, C. D., Zanuttigh, P., and Cortelazzo, G. M. (2012). *Time-of-Flight Cameras and Microsoft Kinect(TM)*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- [Nunes et al., 2011] Nunes, V., Olvera, L., and Pamanes, J. (2011). Simulation and experimentation of walking of the bioloid humanoid robot. In *13th World Congress in Mechanism and Machine Science*.
- [Oppenheim and Schafer, 2008] Oppenheim and Schafer (2008). *Discrete Time Signal Processing*. Prentice Hall of India, 2nd edition.
- [Pollard et al., 2002] Pollard, N., Hodgins, J., Riley, M., and Atkeson, C. (2002). Adapting human motion for the control of a humanoid robot. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 1390 – 1397.
- [Polyakova and Karelin, 2014] Polyakova, L. and Karelin, V. (2014). Exact penalty methods for nonsmooth optimization. In *Beam Dynamics and Optimization (BDO), 2014 20th International Workshop on*, pages 1–2.
- [Popovic, 2000] Popovic, Z. (2000). Editing dynamic properties of captured human motion. In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, volume 1, pages 670–675 vol.1.
- [Poubel et al., 2014] Poubel, L., Sakka, S., Cehajic, D., and Creusot, D. (2014). Support changes during online human motion imitation by a humanoid robot using task specification. In *Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on*, pages 1782–1787.
- [Raibert, 1986] Raibert, M. H. (1986). *Legged Robots That Balance*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA.
- [Reinschmidt et al., 1997] Reinschmidt, C., van den Bogert, A., Nigg, B., Lundberg, A., and Murphy, N. (1997). Effect of skin movement on the analysis of skeletal knee joint motion during running. *Journal of Biomechanics*, 30:729–732.
- [Rengifo et al., 2012] Rengifo, C., Kaddar, B., Aoustin, Y., and Chevallereau, C. (2012). Reactive power compensation in mechanical systems. In *International Conference on Multibody Dynamics*, Stugart, Germany.
- [Rengifo, 2011] Rengifo, C. F. (2011). *Contributions à la commande d'un robot bipède 3D: modélisation, calcul des forces de réaction, commande et actionnement*. Éditions Universitaires Européennes,, Saarbrücken, Germany.

- [Schmitz et al., 2014] Schmitz, A., Ye, M., Shapiro, R., Yang, R., and Noehren, B. (2014). Accuracy and repeatability of joint angles measured using a single camera markerless motion capture system. *Journal of Biomechanics*, 47(2):587 – 591.
- [Schwarz et al., 2012] Schwarz, L. A., Mkhitarayan, A., Mateus, D., and Navab, N. (2012). Human skeleton tracking from depth data using geodesic distances and optical flow. *Image and Vision Computing*, 30(3):217 – 226.
- [Shiller et al., 2001] Shiller, Z., Yamane, K., and Nakamura, Y. (2001). Planning motion patterns of human figures using a multi-layered grid and the dynamics filter. In *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on*, volume 1, pages 1–8 vol.1.
- [Siciliano and Khatib, 2008] Siciliano, B. and Khatib, O. (2008). *Springer Handbook of Robotics*. Springer.
- [Stone and Skubic, 2011] Stone, E. and Skubic, M. (2011). Passive in-home measurement of stride-to-stride gait variability comparing vision and kinect sensing. In *Engineering in Medicine and Biology Society, EMBC, 2011 Annual International Conference of the IEEE*, pages 6491–6494.
- [Suslov, 2003] Suslov, S. K. (2003). *An Introduction to Basic Fourier Series*. Developments in Mathematics 9. Springer US, 1 edition.
- [Tacué et al., 2015] Tacué, J., Naranjo, F., and Rengifo R, C. (2015). Simulación del ciclo de marcha del robot bípedo bioloid en un entorno virtual 3d. In *Memorias del XVII Congreso Mexicano de Robótica 2015*.
- [Takaba, 2003] Takaba, K. (2003). A tutorial on preview control systems. In *SICE 2003 Annual Conference*, volume 2, pages 1388–1393 Vol.2.
- [Teodoro, 2007] Teodoro, P. D. D. (2007). Development of a simulation environment of an entertainment humanoid robot. Master’s thesis, Instituto Superior Técnico. Universidade Técnica de Lisboa.
- [Thai and Paulishen, 2011] Thai, C. N. and Paulishen, M. (2011). Using robotis bioloid systems for educational robotics. *IEEE Transactions on Robotics*.
- [Tlalolini et al., 2009] Tlalolini, D., Chevallereau, C., and Aoustin, Y. (2009). Comparison of different gaits with rotation of the feet for a planar biped. *Robotics and Autonomous Systems*, 57(4):371 – 383.

- [Tlalolini et al., 2011] Tlalolini, D., Chevallereau, C., and Aoustin, Y. (2011). Human-like walking: Optimal motion of a bipedal robot with toe-rotation motion. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 16(2):310–320.
- [Toshani and Farrokhi, 2014] Toshani, H. and Farrokhi, M. (2014). Real-time inverse kinematics of redundant manipulators using neural networks and quadratic programming: A lyapunov-based approach. *Robotics and Autonomous Systems*, 62(6):766 – 781.
- [Vaughan et al., 1992] Vaughan, C., Davis, B., and O’Connor, J. (1992). *Dynamics of human gait*. Number v. 2 in Dynamics of Human Gait. Human Kinetics Publishers.
- [Vukobratović and Stepanenko, 1972] Vukobratović, M. and Stepanenko, J. (1972). On the stability of anthropomorphic systems. *Mathematical Biosciences*, 15:1 – 37.
- [Yamane and Nakamura, 2003] Yamane, K. and Nakamura, Y. (2003). Dynamics filter - concept and implementation of online motion generator for human figures. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 19(3):421–432.
- [Zhang et al., 2013] Zhang, J.-T., Novak, A. C., Brouwer, B., and Li, Q. (2013). Concurrent validation of xsens mvn measurement of lower limb joint angular kinematics. *Physiological Measurement*, 34(8):N63.