

EFFECTO DE LA CONFIGURACIÓN *AFFINE* EN EL ALGORITMO ACELERADOR VERSIÓN γ ($AR\gamma$)



Universidad
del Cauca

Maria Fernanda Rivera Sanclemente

**Universidad del Cauca
Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones
Maestría en Electrónica y Telecomunicaciones**

Popayán 2013

Efecto de la Configuración *Affine* en el Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ)

MARIA FERNANDA RIVERA SANCLEMENTE

Tesis presentada a la Facultad de Ingeniería
Electrónica y Telecomunicaciones de la
Universidad del Cauca para optar al Título de:

Magister en Ingeniería
Electrónica y Telecomunicaciones.

Director:
Ing. Ph.D. Pablo Emilio Jojoa Gómez.

Popayán 2013

Nota de aceptación:

En cumplimiento de los requisitos legales y Reglamentarios, se declara aprobada la presente tesis de Maestría en Ingeniería.

Jurado

Jurado

Jurado

Dedicatoria

*Cada experto debe ser creído en su arte.
El dialéctico se relaciona con el gramático
en la significación de las palabras;
el retórico toma del dialéctico las bases de sus argumentos;
el poeta, las cadencias del músico;
el geómetra, las proporciones del aritmético;
los metafísicos toman por fundamentos las conjeturas de la física.*
Miguel de Montaigne

*A mis padres: Francisco y Rosario
A mi hermana: Charito
A mis profesores, colegas y amigos*

Agradecimientos

Al Ing. PhD. Pablo Emilio Jojoa Gómez. Director del trabajo de tesis, y del grupo I+D en Nuevas Tecnologías en Telecomunicaciones-GNTT.

Al Ing. Ph.D. Oscar Andrés Vivas Albán Coordinador del Programa de Doctorado en Ciencias de la Electrónica

Al Ing. MSc. Harold A. Romo Romero Docente Facultad Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones.

Al profesor Ing. Ph.D. (c) Evelio Astaiza Hoyos.

A los ingenieros: Ph.D. Carlos Felipe Rengifo Rodas Docente Facultad Ingeniería Electrónica.

Al Ing. Rafael Rengifo Prado Decano de la Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones.

Al personal docente y administrativo del Instituto de Posgrados

y a todos aquellos que contribuyeron con su aporte al logro de este importante proyecto para mi crecimiento personal y desarrollo profesional.

Resumen

La esencia de los filtros adaptativos es el algoritmo que ajusta sus coeficientes, razón por la cual se han diseñado varios algoritmos buscando esta finalidad; ejemplo de ello lo constituyen el *Least mean Square* (LMS) y sus derivados (NLMS, Leaky, etc.) o el *Recursive Least Square* (RLS) y sus derivados (FRLS, Kalman, etc.), con los que se busca un ajuste de sus coeficientes de forma rápida (*rapidez de convergencia*) y que significa qué tan rápido el algoritmo llega al MSE (*Mean Square error*) buscando que la variación alrededor del mínimo (*desajuste*) sea pequeña y capaz de seguir los cambios del ambiente (*seguimiento o tracking*) de forma rápida. En este contexto, Jojoa (2003) creó el algoritmo *Acelerador Regresivo Versión γ* ($AR\gamma$) obteniendo una buena velocidad de convergencia y paralelamente una considerable reducción del error de medida final. Es así, como se han utilizado configuraciones para la implementación de filtros adaptativos con base en el algoritmo LMS; a ésta configuración se le conoce como *Combinación Affine*, es decir, la mezcla de dos filtros adaptativos cuyo fundamento es la selección escalar de un parámetro de mezcla $\lambda(n)$ para combinar las salidas de los dos (2) filtros buscando obtener finalmente una tasa de convergencia más eficiente y un mejor estado de equilibrio. En una *Combinación Affine* se realiza una suma ponderada de las salidas de dos filtros adaptativos sometidos a una misma entrada cuyo factor de ponderación es un parámetro calculado mediante un mecanismo adaptativo (filtros adaptativos) con el propósito de lograr un mejor rendimiento.

El presente estudio operacionaliza el comportamiento del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en Combinación *Affine* con el propósito de lograr una mayor eficiencia y un mejor rendimiento que el que presenta el algoritmo en su configuración básica; así mismo identificar los efectos de la Combinación *Affine* en el Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) como algoritmo adaptativo. El diseño metodológico y el plan operativo se enmarcan dentro de un proceso investigativo con un estudio descriptivo, explicativo y experimental dirigido a responder por qué ocurre el fenómeno y en qué condiciones se da éste.

Palabras clave: Filtros adaptativos, Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ), Combinación *Affine*.

Abstract

The essence of adaptive filters is the algorithm that adjusts its coefficients, which is why they have designed several algorithms pursuing this purpose; example of it are the Least Mean Square (LMS) and its derivatives (NLMS, Leaky, etc.) or the Recursive Least Square (RLS) and its derivatives (FRLS, Kalman, etc.), which seeks to adjust its coefficients quickly (faster convergence) and that means how fast the algorithm reaches the MSE (Mean Square Error) searching that the variation around the minimum (mismatch) is small and able to follow changes in the environment (monitoring or tracking) quickly. In this context, Jojoa (2003) created the algorithm Accelerator Version Regressive γ (AR_{γ}) to obtain a good convergence speed and in parallel a significant reduction in the final measurement error. Thus, such configurations have been used to implement adaptive filters based on the LMS algorithm; this configuration is known as Affine combination, a mix of two adaptive filters which rely on selection of a parameter of scale mixture $\lambda(n)$ to combine the outputs of the two (2) searching filters ultimately obtain a more efficient convergence rate and a better state of balance. Affine combination takes a weighted sum of the outputs of two adaptive filters subjected to the same input whose weighting factor is a parameter calculated using an adaptive mechanism (adaptive filters) in order to achieve a better performance.

This study operationalized the behavior of Algorithm Accelerator Version γ (AR_{γ}) in Affine combination in order to achieve greater efficiency and better performance than the algorithm presented in its basic configuration, likewise identify the effects of the Affine Combination Algorithm Accelerator Version γ

(AR_γ) adaptive algorithm. The methodological design and operational plan are part of a research process with a descriptive, explanatory and directed experimental answer why the phenomenon occurs and under what conditions it occurs.

Key words: Adaptive filters, Algorithm Accelerator Version γ (AR_γ), Affine combination.

Contenido

	Pág.
Lista de Figuras.	12
Lista de Tablas.	15
Lista de Abreviaturas y siglas.	16
Lista de Símbolos.	17
1 Introducción.	18
2. Conceptualización, Especificaciones y Propiedades de los filtros Adaptativos.	26
2.1 Señales, sistemas y procesamiento de señales.	27
2.1.1 Señal.	27
2.1.2. Sistema.	27
2.2. Sistema Adaptativo.	28
2.3. Filtros Adaptativos.	29
2.3.1 Usos y Aplicaciones de los Filtros Adaptativos.	30
2.4. Algoritmos Adaptativos.	31
2.4.1 Algoritmo LMS (<i>Least Mean Square</i>).	31
2.4.2. Algoritmo NLMS (<i>Normalized Least Mean Squared</i>).	33
2.4.3. Algoritmo RLS (<i>Request Least Square</i>).	34
3. Especificaciones del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ ($AR \gamma$).	36
3.1 Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ ($AR \gamma$).	37
3.1.1 Propiedades del Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ ($AR \gamma$).	38
3.2 Combinación de filtros Adaptativos.	39
3.2.1 Combinación Convexa.	44
3.2.2 Combinación <i>Affine</i>	45

3.2.3	Otros esquemas de combinación.	48
3.2.3.1	Esquemas de combinación desacoplados y combinación por bloques.	49
3.3.	El Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ ($AR\gamma$) en Configuración <i>Affine</i>	50
4.	Efecto de la configuración <i>Affine</i> en el Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ ($AR\gamma$) como algoritmo adaptativo.	52
	Experiencia 1. Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ ($AR\gamma$) por parámetro μ_λ	53
	Experiencia 2. Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ ($AR\gamma$) por parámetro m_1	57
	Experiencia 3. Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ ($AR\gamma$) por parámetro m_2	60
	Experiencia 4. Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ ($AR\gamma$) por parámetro α_1	64
	Experiencia 5. Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ ($AR\gamma$) por parámetro α_2	67
4.2	Análisis de Tracking.	71
4.2.1.	Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ ($AR\gamma$) y Proceso de Markov.	72
4.3	Comparación entre el Algoritmo Acelerador Versión γ ($AR\gamma$) en configuración <i>Affine</i> y el Algoritmo LMS en configuración <i>Affine</i>	74
5	Conclusiones y Trabajos Futuros ..	76
5.1	Trabajos Futuros ...	78
	Bibliografía.	80

Lista de figuras

	Pág.
2.1. Sistema Adaptativo.	28
2.2. Filtro adaptativo e incidencia de coeficientes.	30
2.3. Identificación de Sistemas.....	31
3.1. Combinación <i>Affine</i> de las salidas de dos filtros adaptativos LMS que se adaptan utilizando las mismas entradas.	39
3.2. Configuración <i>Affine</i> de dos filtros adaptativos.	41
4.1 Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 0.01$ a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	55
4.2. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 0.5$ a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	55
4.3. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 10$ a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	56
4.4. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 50$ a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	56
4.5. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 0.5$ y $m_1 = 5$ a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	58
4.6. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 30$ y $m_1 = 200$ a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	59
4.7. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 50$ y $m_1 = 300$ a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	59

4.8. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 127$ y $m_1 = 2000$	
a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	60
4.9. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 50$ y $m_2 = 10000$	
a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	62
4.10. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 5$ y $m_2 = 1000$	
a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	62
4.11. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 30$ y $m_2 = 8000$	
a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	63
4.12. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 50$ y $m_2 = 10000$	
a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ	63
4.13. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 1$ y $\alpha_1 = 3$ a) Error Cuadrático Medio,	
b) Parámetro de mezcla λ	65
4.14. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 2$ y $\alpha_1 = 5$ a) Error Cuadrático Medio,	
b) Parámetro de mezcla λ	66
4.15. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 5$ y $\alpha_1 = 10$ a) Error Cuadrático Medio,	
b) Parámetro de mezcla λ	66
4.16. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 10$ y $\alpha_1 = 20$ a) Error Cuadrático Medio,	
b) Parámetro de mezcla λ	67
4.17. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 5$ y $\alpha_2 = 40$ a) Error Cuadrático Medio,	
b) Parámetro de mezcla λ	69
4.18. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 10$ y $\alpha_2 = 50$ a) Error Cuadrático Medio,	
b) Parámetro de mezcla λ	69
4.19. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 30$ y $\alpha_2 = 100$ a) Error Cuadrático Medio,	
b) Parámetro de mezcla λ	70
4.20. Configuración <i>Affine</i> con $\mu_\lambda = 50$ y $\alpha_2 = 150$ a) Error Cuadrático Medio,	
b) Parámetro de mezcla λ	70

- 4.21. Modelo del Proceso de Markov y Sistema de Identificación71
- 4.22. Seguimiento del Algoritmo Acelerador Version γ ($AR\gamma$) en configuración Affine y Proceso de Markov con $\zeta = 0.99$ 73
- 4.23. Seguimiento del Algoritmo Acelerador Version γ ($AR\gamma$) en configuración Affine y Proceso de Markov con $\zeta = 0.9998$73
- 4.24. Seguimiento del Algoritmo Acelerador Version γ ($AR\gamma$) en configuración Affine y Proceso de Markov con $\zeta = 1$74
- 4.25. Configuración Affine de los algoritmos Acelerador Versión γ ($AR\gamma$) y LMS.75

Lista de Tablas

	Pag.
4.1. Valores resultantes del Comportamiento del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en configuración Affine con variación del parámetro μ_λ	54
4.2. Valores resultantes del Comportamiento del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en configuración Affine con variación del parámetro $m_1 y \mu_\lambda$	58
4.3. Valores resultantes del Comportamiento del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en configuración Affine con variación del parámetro $m_2 y \mu_\lambda$	61
4.4. Valores resultantes del Comportamiento del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en configuración Affine con variación del parámetro $\alpha_1 y \mu_\lambda$	65
4.5. Valores resultantes del Comportamiento del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en configuración Affine con variación del parámetro $\alpha_2 y \mu_\lambda$	68
4.6. Comportamiento del Error cuadrático medio para valores de ζ	72

Lista de Abreviaturas y Siglas.

AR γ	Acelerador Regresivo Versión γ
LMS	Least mean Squares
RLS	Recursive Least Square
MSE	Mean Square error
NLMS	Normalized Least Mean Squared
APCM	Acelerador Progresivo Convencional Matricial
ARCM	Acelerador Regresivo Convencional Matricial
SNR	Signal to Noise Ratio

Lista de Símbolos.

m_1, α y γ	Parámetro de ajuste del algoritmo AR γ .
$\lambda(n)$	Parámetro de mezcla combinación Affine.
$x[n]$	Señal de entrada.
$w[n]$	Coefficientes del filtro adaptativo.
$\mathbf{w}_o[n]$	Vector de coeficientes óptimos del filtro (Sistema Desconocido).
$r[n]$	Ruido de medida.
$d[n]$	Señal deseada en el instante n .
$e[n]$	Señal de error de medida en el instante n .
μ	Parámetro de ajuste fijo.
\mathbf{M}_i	Parámetro matricial del algoritmo acelerador.
$E\{x\}$	Valor esperado de una variable aleatoria x .

Capítulo 1

Introducción

1.1 Justificación y Motivación.

Son numerosas las aplicaciones de los filtros adaptativos, entre las que cabe destacar: 1. **Sistemas de antena adaptativa**, en las que los filtros adaptativos se emplean para dirigir el haz y proporcionar nulos en el patrón del haz y eliminar las interferencias indeseadas, (Windrow, Mantey et al. 1967); 2. **Receptores digitales de comunicaciones**, en los que los filtros adaptativos se emplean para ecualizar la interferencia intersímbolos y para identificar el canal. (Nichols and Proakis 1977; Picinbono and Skwirzynski 1978); 3. **Técnicas de cancelación de ruido adaptativas**, en las que los filtros adaptativos se utilizan para estimar y eliminar un componente de ruido de la señal deseada (Ketchum and Proakis 1982) y 4. **Modelado de sistemas**, donde los filtros adaptativos se usan como modelos para estimar las características de un sistema desconocido (Proakis and Manolakis 2007).

Las aplicaciones mencionadas hacen referencia a sistemas que son variantes en el tiempo, por lo cual, la aplicación de los filtros convencionales con parámetros fijos no son aplicables, de allí la necesidad de utilizar filtros cuyos coeficientes se ajustan en el tiempo. El ajuste de estos coeficientes se obtiene

mediante un algoritmo matemático (algoritmo adaptativo o de adaptación) que minimiza una función de costo; esta función de costo puede ser una medida de error existente entre lo que se espera como respuesta y lo que se obtiene del filtro cuyos parámetros se están ajustando a medida que pasa el tiempo. El algoritmo adaptativo ajustará los coeficientes del filtro teniendo en cuenta la señal de entrada, una señal de referencia (señal deseada) y una medida del error.

Esta medida del error puede ser manipulada utilizando diferentes criterios, como el valor absoluto, el cuadrado mínimo o media cuadrática, siendo estos últimos los más utilizados y que se conocen en la literatura como los métodos de mínimos cuadrados (LS, *Least Square*) y error cuadrático medio (MSE, *Mean Square Error*) respectivamente. Cabe destacar que la esencia de los filtros adaptativos es el algoritmo que ajusta los coeficientes.

Desde 1960 (Windrow, Mantey et al. 1967) se han diseñado varios algoritmos con coeficientes ajustables, como por ejemplo el *Least Mean Square* (LMS) y sus derivados (NLMS, Leaky, etc) o el RLS *Recursive Least Square* (RLS) y sus derivados (FRLS, Kalman, etc), donde se busca que estos algoritmos ajusten sus coeficientes de forma rápida (rapidez de convergencia, lo que significa que tan rápido el algoritmo llega al MSE-*Mean Square Error*) buscando que la variación alrededor del mínimo (desajuste) sea pequeña y además, capaz de seguir los cambios del ambiente de forma rápida (seguimiento o *tracking*).

En este contexto el Ingeniero PhD. Pablo Emilio Jojoa Gómez, (Jojoa 2003) diseña un algoritmo denominado *Acelerador Regresivo Versión γ* (AR_{γ}) obteniendo una buena velocidad de convergencia y paralelamente una considerable reducción del error de medida final. Como antecedente al Algoritmo de Jojoa, se disponía del Algoritmo Acelerador de Tiempo Continuo propuesto por F. Pait (Pait 1998), cuya característica es ajustar la segunda

derivada (aceleración) del error con respecto a los coeficientes del algoritmo, su particularidad es la adquisición de un mayor compromiso entre la velocidad de convergencia y la variación del error de estimación, en relación a los algoritmos de gradiente estocástico. A partir de las propiedades presentadas por el Algoritmo Acelerador de Tiempo Continuo surge la necesidad de desarrollar un Algoritmo de Tiempo Discreto.

En 1999 se realiza la discretización del algoritmo acelerador generando tres versiones del algoritmo en tiempo discreto (Jojoa 1999) y que corresponden al Algoritmo Acelerador Progresivo Convencional Matricial (APCM), Algoritmo Acelerador Regresivo Convencional Matricial (ARCM) y el Algoritmo *Acelerador Regresivo Versión γ* ($AR\gamma$). Estas versiones fueron obtenidas utilizando los métodos de discretización de Euler y la transformación bilineal con resultados favorables respecto al desempeño y complejidad computacional.

El análisis realizado por el Ingeniero PhD. Pablo E. Jojoa (Jojoa 1999) de las versiones del algoritmo en tiempo discreto obtenidas, arrojó como resultado que el algoritmo APCM presenta una baja complejidad computacional en contraste con el buen desempeño del algoritmo ARCM. Además el estudio de estabilidad realizado demostró que el algoritmo ARCM es estable (Jojoa 1999).

El *Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ* ($AR\gamma$) diseñado por P. E. Jojoa (Jojoa 2003) el cual es una versión simplificada del algoritmo ARCM, tiene como principal característica es la disminución del número de parámetros de ajuste de cuatro a tres (α , $\mathbf{M}_1 = m_1 \mathbf{I}_M$, $\mathbf{M}_2 = m_2 \mathbf{I}_M$ y $\mathbf{M}_3 = m_3 \mathbf{I}_M$), denominados: α , γ y m_1 , por medio de los cuales se logra una buena velocidad de convergencia y paralelamente una considerable reducción del error de medida final (Gerken, Pait et al. 2000).

La ventaja de este algoritmo es que los parámetros de ajuste se reducen a cantidades escalares (α , γ y m_1). El análisis de convergencia con respecto a la media realizado por Jojoa, establece que el algoritmo converge para valores de α , γ y m_1 positivos. Así mismo, el análisis de tracking del Algoritmo AR_γ en ambientes no estacionarios determinó que éste presenta un error mínimo de desajuste.

Posteriormente, Bershada, Bermúdez y Tourneret (2008), presentaron un trabajo donde utilizaron una nueva configuración para la implementación de filtros adaptativos teniendo como base el algoritmo LMS; a esta configuración se le conoce como combinación "Affine". El novedoso esquema de la combinación *Affine* consiste en la mezcla de dos filtros adaptativos $W_1(n)$ y $W_2(n)$. El fundamento de este método de combinación *Affine* es la selección escalar de un parámetro de mezcla $\lambda(n)$ para combinar las salidas de los dos filtros buscando obtener finalmente una tasa de convergencia más eficiente y un mejor estado de equilibrio.

1.2 Contribución de la Tesis.

Candido, Silva y Nascimento, (2008), implementaron otros algoritmos derivados del LMS bajo la configuración *Affine*. Dado que los resultados obtenidos muestran que ésta implementación permite que se obtenga mayor rapidez de convergencia, este trabajo tiene como finalidad implementar el *Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ* (AR_γ) en Configuración *Affine* con el propósito de obtener mayor rapidez de convergencia que el algoritmo en su configuración convencional.

Con base en las consideraciones anteriores, en el presente estudio, se analiza el efecto del Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (AR_γ) en configuración

Affine. Para lo cual se inicia con la caracterización del Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (AR_{γ}) en configuración *Affine*; se identifica el efecto que tiene la configuración *Affine* al hacer uso del Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (AR_{γ}) como algoritmo adaptativo y se verifica la adaptabilidad de la combinación *Affine* en el Algoritmo Acelerador.

La metodología utilizada corresponde a un estudio de investigación tipo descriptivo, explicativo, experimental (Hernández, Fernández et al. 1991) dirigido a responder o explicar las razones de ocurrencia de un fenómeno y las condiciones en que ocurre, atendiendo un Modelo Secuencial (Laboratorio de Computación Nikolaus Walczuch 2010) por cuanto el estudio tiene como propósito obtener un algoritmo matemático producto de la combinación *Affine* que permita una mayor eficiencia que la obtenida por el Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (AR_{γ}) en su configuración básica.

El estudio “Efecto de la configuración *affine* en el Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (AR_{γ})” tiene como finalidad lograr obtener una mayor rapidez de convergencia que el algoritmo diseñado por P. E. Jojoa (2003) en su configuración convencional; con base en que la combinación *Affine* según la experiencia de Candido, Silva y Nascimento (2008) quienes implementaron algoritmos LMS en esta modalidad que consiste específicamente en la mezcla de dos filtros adaptativos y la selección escalar de un parámetro de mezcla para combinar las salidas de los dos filtros obtuvieron una tasa de convergencia más eficiente y un mejor estado de equilibrio, es decir, con la combinación *affine* se realiza una suma ponderada de las salidas de dos filtros adaptativos sometidos a una misma entrada cuyo factor de ponderación es un parámetro calculado mediante un mecanismo adaptativo con el propósito de lograr un mejor rendimiento.

1.3 Organización de la Tesis.

Para el desarrollo y contextualización del *Efecto de la Configuración Affine en el Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (AR_γ)* se han estructurado cuatro (4) capítulos con los contenidos que a continuación se ilustran.

Capítulo 1. A manera de introducción y como Justificaciones y motivaciones de la tesis se hace referencia a la descripción y aplicación de los algoritmos adaptativos más comunes, igualmente se describe en forma breve los antecedentes para el diseño del *Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (AR_γ)* a partir de los Algoritmos Acelerador en Tiempo Continuo y Tiempo Discreto hasta el diseño del *Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (AR_γ)* propuesto por P. E. Jojoa (2003). Se ilustran igualmente las contribuciones o aportes de la tesis en el campo de investigación relacionado con el Procesamiento Digital de Señales y finalmente se describe en forma breve el contenido y estructura organizativa de la tesis.

Capítulo 2. Relaciona los aspectos conceptuales sobre señales, sistema y procesamiento de señales, características y especificaciones, clasificación y codificación, filtrado, suavizado, usos y aplicaciones de los filtros adaptativos como también especificaciones de los Algoritmos adaptativos LMS (*Least Mean Square*), NLMS (*Normalized Least Mean Square*) y RLS (*Request Least Square*).

Capítulo 3. Hace referencia a la descripción, características, especificaciones y propiedades del *Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (AR_γ)*; formas de combinación de filtros adaptativos. Combinación Convexa, Combinación Affine y otros esquemas de combinación.

Capítulo 4. En este aparte se identifica el efecto que tiene la configuración *Affine* al hacer uso del *Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ* (AR_{γ}) como algoritmo adaptativo. Para el efecto se describe el comportamiento del *Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ* (AR_{γ}) y diferentes variaciones del parámetro de mezcla, análisis de desajuste y tracking.

Capítulo 5. Se registran en este capítulo las conclusiones del estudio realizado con base en los resultados obtenidos de conformidad con los objetivos propuestos y la operacionalización de los mismos. Las conclusiones se enfocan especialmente en las experiencias descritas para la ejecución del Efecto de la Configuración *Affine* en el *Algoritmo Acelerador Versión γ* (AR_{γ}).

Capítulo 2

Conceptualización, especificaciones y Propiedades de los filtros Adaptativos.

Un aspecto importante en el estudio del procesamiento digital de señales es el empleo de algoritmos eficientes para realizar operaciones como el filtrado, la correlación o el análisis de espectros. Interesan aquellos algoritmos que sean eficientes y rápidos en sus cálculos resultando funcionales y prácticos al momento de su implementación.

Una aproximación al procesamiento digital de señales implica abordar aspectos relacionados con señales y sistemas así mismo como los problemas que pueden resolverse mediante técnicas de procesamiento de señales, entre las cuales destaca el filtrado de señales. Algunos Autores (Azpicueta 2011) afirman que los filtros adaptativos constituyen una solución muy atractiva cuando no se cuenta con conocimiento completo del escenario de filtrado y, por lo tanto, el filtrado óptimo no es posible. Así mismo, en entornos donde la solución óptima varía en el tiempo, los filtros adaptativos ofrecen una solución muy eficaz. La selección del tipo de filtro adaptativo a usar depende de ciertos parámetros que, normalmente, imponen un compromiso en el funcionamiento del filtro adaptativo. Actualmente se dispone de una nueva técnica cuyo objetivo es aliviar dichos compromisos con base en la combinación adaptativa de filtros adaptativos con características complementarias.

2.1 Señales, sistemas y procesamiento de señales.

2.1.1 Señal. Puede definirse como una función que contiene información, generalmente acerca del estado o el comportamiento de un fenómeno o entidad física. Normalmente, dicha información varía con el tiempo, el espacio, ambos, u otra variable o variables independientes. Un ejemplo clásico de señal es la voz humana, en la que el mecanismo vocal genera variaciones de presión acústica con el propósito de transmitir un mensaje.

En el presente estudio se hace aplicación de señales unidimensionales cuya variable independiente normalmente es el tiempo. Además, se admite que dicha variable n , sólo puede tomar valores enteros por lo que realmente se está tratando con señales en tiempo discreto que se representan matemáticamente como secuencias $x(n)$, originadas como producto de un proceso de digitalización de una señal continua o directamente generadas en formato digital.

2.1.2. Sistema. Puede verse como cualquier proceso (físico o algorítmico) que transforma una o varias señales (Oppenheim, Willsky et al. 1996). Se denomina procesamiento de señal al acto intencionado mediante el cual se transforma una señal que ha sido introducida en un sistema persiguiendo un determinado fin. Entre las distintas operaciones incluidas dentro del procesamiento de señales cabe destacar: Restauración de señales degradadas, Extracción de características relevantes, Clasificación de señales, Codificación de señales, Generación y diseño de señales. Si cualquiera de estas operaciones se realiza por medio de sistemas digitales hablaremos de *procesamiento digital de señales*.

Entre las diferentes operaciones englobadas en el campo del procesamiento de señales, se denomina normalmente estimación o filtrado a la operación diseñada para extraer información de datos ruidosos. Esta operación encuentra aplicación en diferentes campos, como pueden ser, entre otros: acústica, comunicaciones, ingeniería biomédica y análisis de series financieras. Dependiendo del horizonte temporal de los datos utilizados en esta operación, se pueden distinguir diferentes tipos básicos de estimación (Hayquin 2002) como el Filtrado y el Suavizado (Smoothing).

2.2 Sistema Adaptativo

Es aquel cuya estructura es alterable o ajustable de tal forma que su desempeño mejore de acuerdo con algún criterio deseado a través de la exposición a un ambiente determinado.

El esquema correspondiente a un sistema adaptativo se ilustra en la figura 2.1

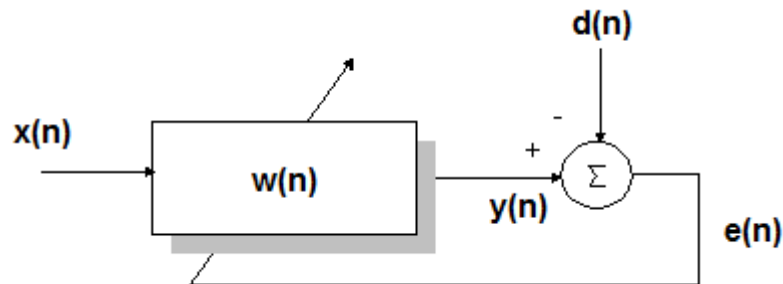


Figura 2.1. Sistema Adaptativo (Fuente: Realpe, Romo y Jojoa, 2007)

Donde $x(n)$ es el vector de la señal de entrada, $w(n)$ es el vector de coeficientes del filtro adaptativo, $d(n)$ es la señal deseada, $e(n)$ es el error de medida y $y(n)$ es la señal de salida del filtro.

Los sistemas adaptativos se caracterizan por: 1. Adaptarse de forma automática en ambientes y sistemas que varían con el tiempo. 2. Desempeñar tareas específicas como filtraje o toma de decisiones. 3. Su capacidad de adaptación a los cambios del mismo sistema. 4. Su mayor complejidad y dificultad de análisis que los diferencia de aquellos sistemas que no poseen la capacidad de adaptarse a su entorno.

Resulta innecesario implementar sistemas adaptativos en ambientes en los cuales las condiciones en los que el sistema opera son conocidas, ya que solo se requiere especificar un criterio de desempeño determinado para cada condición y esperar el mejor resultado. En la mayoría de las situaciones las condiciones de entrada no son totalmente conocidas y pueden cambiar con el tiempo. En estas circunstancias un sistema adaptativo puede adecuarse continuamente y lograr su mejor desempeño. (Widrow and Stearns 1985).

2.3. Filtros Adaptativos

Son estructuras ajustables que tienen la capacidad de cambiar su respuesta automáticamente para mejorar su desempeño. Este tipo de filtro se caracteriza por tres (3) elementos básicos que se ilustran en la figura 2.2 y que corresponden a:

La *estructura del filtro*, que realiza el proceso de filtrado de la señal de entrada según los coeficientes entregados por el algoritmo de adaptación; El *criterio de desempeño* entendiéndose por tal que la señal de salida del filtro y la señal de respuesta deseada son procesadas por este módulo para evaluar su calidad respecto a los requerimientos de una aplicación en particular y finalmente el *algoritmo de adaptación*, el cual usa el valor del criterio de desempeño o alguna

función de él, la señal de entrada y la respuesta deseada para decidir cómo se deben modificar los parámetros del filtro y mejorar su desempeño.

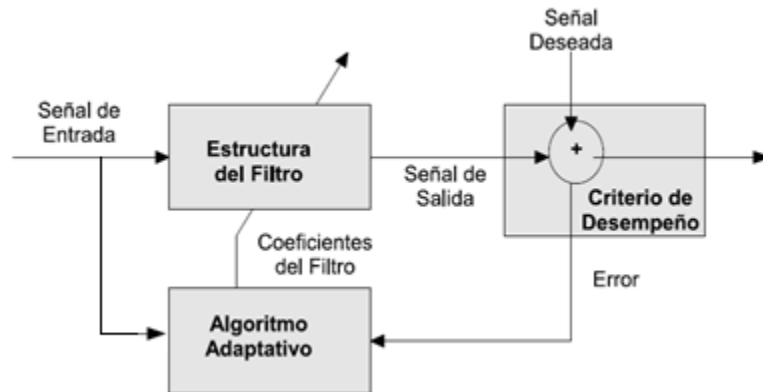


Figura 2.2. Filtro adaptativo e incidencia de coeficientes *Fuente:(Realpe 2009)*

2.3.1. Usos y Aplicaciones de los filtros adaptativos.

Se han clasificado cuatro clases de aplicaciones para los filtros adaptativos conocidos como: Inversión de sistemas, Predicción de señales, Eliminación de interferencia e Identificación de sistemas. La aplicación utilizada en el presente estudio corresponde a *Identificación de sistemas* que se ilustra en la figura 2.3, donde la señal de entrada al filtro adaptativo y al sistema desconocido genera una señal deseada. La diferencia entre la señal deseada y la señal de salida obtenida del filtro adaptativo produce un error que al ser considerado por el sistema de aprendizaje del algoritmo adaptativo que gobierna el filtro, modifica los coeficientes de éste de manera que se produzca una nueva señal que minimiza el error. Al obtener el mínimo error, se puede afirmar que el filtro adaptativo realiza la misma tarea que la estructura desconocida, identificando el sistema.

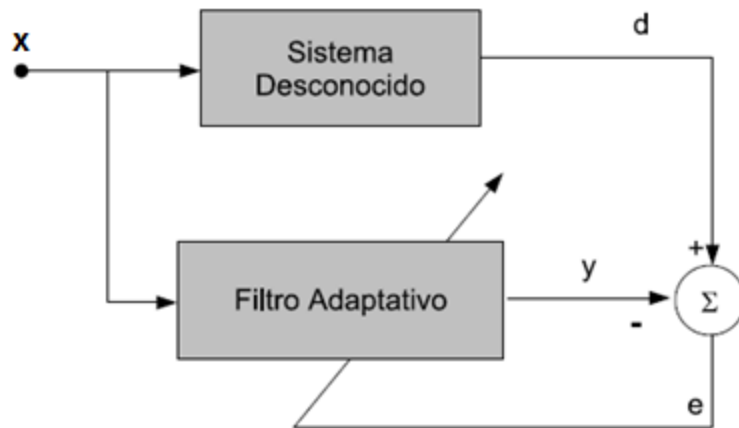


Figura 2.3 Identificación de Sistema.

2.4. Algoritmos Adaptativos

El fundamento de los filtros adaptativos son los algoritmos adaptativos ya que de ellos depende la convergencia de los coeficientes de dichos filtros para lograr sus aplicaciones específicas. Se describen a continuación los algoritmos LMS, NLMS, RLS y $AR\gamma$, algoritmos que ofrecen una interpretación y explicación elemental, permitiendo explicar la rápida adaptación de los parámetros de mezcla en general, y que conduce a un modelo de comportamiento transitorio y en estado de equilibrio de dos algoritmos en combinación.

2.4.1 Algoritmo LMS (*Least Mean Square*):

Corresponde al algoritmo de gradiente estocástico ampliamente utilizado por su baja complejidad. Este algoritmo realiza el ajuste automático de los coeficientes

del filtro, de acuerdo con la estimación del error basado en el gradiente del error con respecto a la variación de los coeficientes del filtro (primera derivada) (Hayquin 2002).

Las ecuaciones que describen este algoritmo son:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{w}^T[n]\mathbf{x}[n] \quad (2.1)$$

$$d[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{w}_o + r[n] \quad (2.2)$$

$$e[n] = d[n] - \mathbf{w}^T[n]\mathbf{x}[n] \quad (2.3)$$

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \mu\mathbf{x}[n]e[n] \quad (2.4)$$

Dónde:

$\mathbf{x}[n]$: Vector de la señal de entrada.

$\mathbf{w}[n]$: Vector de coeficientes del filtro adaptativo.

$\mathbf{w}_o[n]$: Vector de coeficientes óptimos del filtro (Sistema Desconocido).

$r[n]$: Ruido de medida.

$d[n]$: Señal deseada.

$e[n]$: Error de medida.

μ : Parámetro de ajuste fijo.

El criterio de convergencia del algoritmo establece la siguiente condición para los valores de μ :

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}}, \quad (2.5)$$

Dónde:

λ_{\max} es el mayor de los autovalores de la matriz de autocorrelación de la señal de entrada $\mathbf{x}[n]$.

El algoritmo LMS requiere aproximadamente N multiplicaciones para calcular la salida del filtro y $N+1$ multiplicaciones para calcular $\mu e(n)x(n)$ ya que el factor μ permanece constante durante toda la operación del sistema y $\mu e(n)$ es común para todos los coeficientes del filtro. Así, la complejidad del filtro medido en términos del número de multiplicaciones, es $\frac{2N+1}{\text{periodo de muestreo}}$.

2.4.2. Algoritmo NLMS (*Normalized Least Mean Squared*):

Con el fin de amortiguar las amplias variaciones de la señal de entrada, surge el algoritmo NLMS, que es una versión normalizada del algoritmo LMS (Hayquin 2002).

La actualización de los coeficientes para este algoritmo está dada por la expresión:

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \frac{\mu}{\varepsilon + \|\mathbf{x}[n]\|^2} \mathbf{x}[n]e[n] \quad (2.6)$$

Con $\varepsilon > 0$ y como criterio de convergencia, μ debe satisfacer la siguiente condición:

$$0 < \mu < 2$$

Su complejidad computacional es $3N+1$ multiplicaciones y $3N$ sumas, la cual es mayor que la del algoritmo LMS (Iglesias 2012).

2.4.3. Algoritmo RLS (*Request Least Square*):

El **algoritmo RLS** se usa en filtros adaptativos para encontrar los coeficientes del filtro que permiten obtener el mínimo cuadrado de la señal de error (definida como la diferencia entre la señal deseada y la señal producida a la salida del filtro) en forma recursiva. Las ecuaciones del algoritmo RLS son las siguientes: (Iglesias 2012).

Inicializacion

$$C_N(0) = W_N(0) = K_N(0) = 0, P_N(0) = \delta I_N$$

$\delta =$ Cte. positiva pequeña

I= Matriz uniatría

$$e(n) = d(n) + C_N^T(n-1)X_N(n-1) \quad (2.7)$$

$$C_N(n) = C_N(n-1) + K_N(n-1)e(n) \quad (2.8)$$

$$W_N(n) = P_N(n-1)X_N(n) \quad (2.9)$$

$$\gamma_N(n) = \frac{1}{1 - W_N^T(n)X_N(n)} \quad (2.10)$$

$$K_N(n) = \gamma_N(n)W_N(n) \quad (2.11)$$

$$P_N(n) = P_N(n-1) - K_N(n)W_N^T(n) \quad (2.12)$$

Los desarrollos de las ecuaciones se pueden encontrar en (Alcántara 1986; Haykin 1991; Escobar 1997). Las operaciones efectuadas por el algoritmo RLS son $4N^2 + 4N$ multiplicaciones y $3N^2 + N - 1$ sumas. La literatura reporta que la convergencia del algoritmo RLS es del orden $2N$ iteraciones cuando la media del error de convergencia es pequeña comparado con la señal deseada $d(n)$ (Haykin 1991).

Otro de los algoritmos adaptativos es el Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ (AR γ) que constituye el fundamento del presente estudio, el cual se describirá con sus especificaciones y propiedades en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Especificaciones del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ (AR γ)

Jojoa, (2003), en su Tesis Doctoral titulada “Um Algoritmo Acelerador de Parâmetros” describe la teoría referente al Algoritmo Acelerador en sus modalidades de *Tiempo Continuo* y *Tiempo Discreto*. Estos algoritmos fueron propuestos por F Pait (Pait 1998) y P. E. Jojoa (Jojoa 1999) respectivamente, el primero tiene como principal característica un mejor compromiso entre la velocidad de convergencia y la variación del error de estimación, en relación a los Algoritmos de Gradiente Estocástico. Con respecto al Algoritmo Acelerador en Tiempo Discreto se dispone de tres (3) versiones utilizando los métodos de discretización de Euler (Algoritmos APCM y ARCM) y la transformación bilineal (Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ (AR γ)), obteniendo buenos resultados con respecto a su desempeño y complejidad computacional.

El análisis realizado por P. E. Jojoa, (Jojoa 1999) de las versiones del Algoritmo en Tiempo Discreto obtenidas, permitió concluir que el Algoritmo APCM presenta una baja complejidad computacional, en contraste con el buen desempeño del Algoritmo ARCM el cual según el estudio de estabilidad realizado por P. E. Jojoa., evidenció ser estable.

3.1 Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (AR γ).

Con el propósito de disminuir la complejidad computacional del algoritmo ARCM, Jojoa (Jojoa 2003) obtuvo el algoritmo AR γ , el cual es una versión simplificada del algoritmo ARCM, cuya principal característica es la disminución del número de parámetros de ajuste de cuatro a tres (α , $m_1 = m_1 \mathbf{I}_M$, $m_2 = m_2 \mathbf{I}_M$ y $m_3 = m_3 \mathbf{I}_M$), denominados: α , γ y m_1 , por medio de los cuales se logra una buena velocidad de convergencia y paralelamente una considerable reducción del error de medida final (Gerken, Pait et al. 2000).

Las ecuaciones que describen el algoritmo AR γ son:

$$e[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w}[n-1] - d[n] \quad (3.1)$$

$$g[n] = \frac{e[n] + \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w}[n-1]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] m_1 \mathbf{x}[n]} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{q}[n] = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} [\mathbf{q}[n-1] - \alpha g[n] m_1 \mathbf{x}[n]] \quad (3.3)$$

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{w}[n-1] + \alpha \mathbf{q}[n] \quad (3.4)$$

$d[n]$ corresponde a la señal deseada obtenida de la siguiente forma:

$$d[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w}_o \quad (3.5)$$

$\mathbf{x}[n]$: Vector de la señal de entrada.

$\mathbf{w}[n]$: Vector de coeficientes del filtro adaptativo.

$d[n]$: Señal deseada en el instante n .

$e[n]$: Error de medida en el instante n .

$g[n]$: Escalar auxiliar en el instante n .

$\mathbf{q}[n]$: Vector de error auxiliar.

$\mathbf{w}_o[n]$: Vector de coeficientes óptimo.

α : Parámetro de ajuste fijo.

γ : Parámetro de ajuste fijo.

m_1 : Parámetro de ajuste fijo.

Las operaciones efectuadas por el algoritmo AR_γ son $6M + 3$ multiplicaciones, 1 división y $5M$ sumas, siendo de primer orden.

3.1.1 Propiedades del Algoritmo Acelerador Regresivo

Versión γ (AR_γ).

En este algoritmo los parámetros de ajuste se reducen a cantidades escalares α , γ y m_1 . En lo referente al análisis de convergencia con respecto a la media realizado por Jojoa (2003), se establece que el algoritmo converge para valores de α , γ y m_1 positivos ($\alpha > 0$, $\gamma > 0$ y $m_1 > 0$). El análisis de *Tracking* del algoritmo AR_γ en ambientes no estacionarios presenta un mínimo error de desajuste cuando $\alpha, \gamma, m_1 \approx H$ (Criterio de Mínimo Error) en el que H es una constante real positiva con un valor aproximado a 2 como lo establecen algunos valores de H obtenidos por P. E. Jojoa (2003), teórica y prácticamente para distintos valores de m_1, α y γ con los que se obtiene un mínimo de desajuste.

3.2. Combinación de filtros Adaptativos

Bershad, Bermúdez y Tourneret (2008), presentaron un trabajo donde utilizaron una nueva configuración para la implementación de filtros adaptativos teniendo como base el algoritmo LMS, a esta configuración se le conoce como combinación “Affine” (ver figura 3.1).

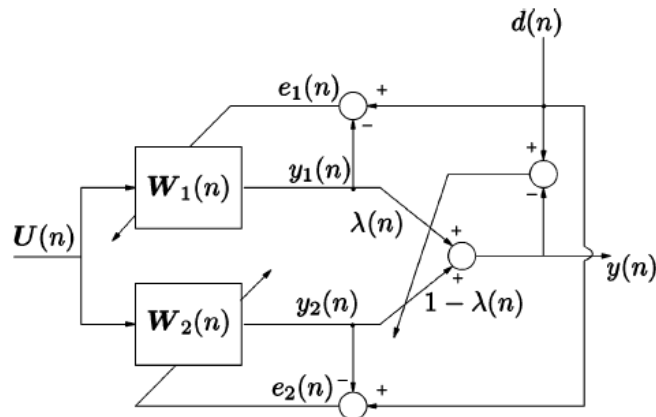


Figura 3.1. Combinación *Affine* de las salidas de dos filtros adaptativos LMS que se adaptan utilizando las mismas entradas (Fuente: (Bershad, Bermudez et al. 2008))

El novedoso esquema de la combinación *Affine* consiste en la combinación de la mezcla de dos filtros adaptativos que se ilustran como $W_1(n)$ y $W_2(n)$

El fundamento de este método o combinación *Affine* es la selección escalar de un parámetro de mezcla $\lambda(n)$ para combinar las salidas de los dos filtros buscando obtener finalmente una tasa de convergencia más eficiente y un mejor estado de equilibrio, es decir, en una combinación *Affine* se realiza una suma ponderada de las salidas de dos filtros adaptativos sometidos a una misma entrada cuyo factor de ponderación es un parámetro calculado mediante

un mecanismo adaptativo (Filtros adaptativos) con el propósito de lograr un mejor rendimiento.

Una de las mayores dificultades en el diseño de los filtros adaptativos es la selección de los parámetros de ajuste del filtro, como ocurre con el parámetro ó paso de adaptación de los algoritmos tipo LMS y el factor de olvido para los algoritmos RLS. Al respecto existen diversas soluciones que proponen el uso de pasos de adaptación o del factor de olvido variables (Kwong and Johnston 1992; Aboulnasr and Mayyas 1997; Zhuang 1998; Bilcu, Kuosmanen et al. 2002; Bermudez, Bershada et al. 2008; Realpe 2009). Para el caso de los algoritmos LMS el paso de adaptación se ajusta de manera que sea mayor cuando se desea garantizar una rápida convergencia y pequeño cuando se desea obtener mayor precisión en el esquema de solución.

Los esquemas de combinación están constituidos por:

Los Filtros propiamente dichos: Pueden ser filtros adaptativos del mismo tipo cuya adaptación difiere en algún aspecto, por ejemplo dos filtros LMS con diferentes velocidades de convergencia, o filtros adaptativos con un filtro de coeficientes constantes. (Azpigueta 2011)

Esquema de combinación: Existen diferentes formas posibles de combinación atendiendo al número y rango de valores posibles que pueden alcanzar los parámetros de mezcla. Además, la forma en la que estos parámetros de mezcla se adaptan puede dar lugar a diferencias en la operación del filtro combinado.

El estudio de la combinación de dos o más filtros adaptativos resulta ser un método simple que ofrece un mejor rendimiento general igual o superior a la de cada filtro individual cuando opera de forma independiente (Arenas-García,

Figueiras-Vidal et al. 2005; Arenas-García, Gómez-Verdejo et al. 2005; Arenas-García, Figueiras-Vidal et al. 2006; Bershad, Bermudez et al. 2008; Silva and Nascimento 2008).

La combinación de filtros adaptativos independientes para lograr un mayor rendimiento se propuso por primera vez por (Andersson 1985) y posteriormente fue mejorado por (Niedźwiecki 1990; Niedźwiecki 1992). No obstante el método de (Arenas-García, Figueiras-Vidal et al. 2006) ha tenido una mejor acogida en razón a sus condiciones de menor complejidad o simplicidad, resultando tan buena como el rendimiento de estos mismos componentes en filtros individuales.

El esquema de combinación de dos filtros adaptativos se ilustra en la figura 3.2., combinación que ofrece diversas aplicaciones como identificación del sistema, la compensación adaptable, cancelación de eco acústico, etc. (Hayquin 2002; Sayed 2003)

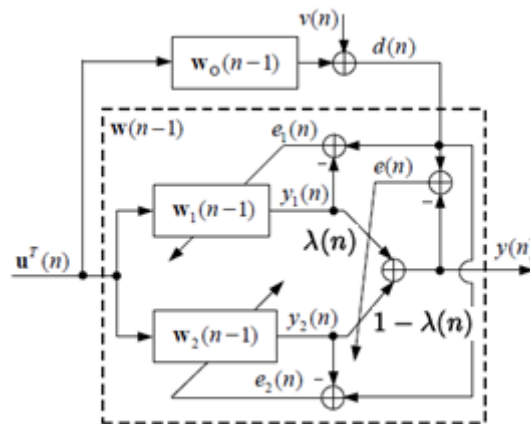


Figura 3.2. Configuración *Affine* de dos filtros adaptativos

Fuente: Candido, Silva et al. 2008

La señal de salida $y(n)$ se obtiene de la combinación de las salidas $y_1(n)$ y $y_2(n)$ de los dos filtros adaptativos individuales así:

$$y(n) = \lambda(n)y_1(n) + [1 - \lambda(n)]y_2(n) \quad (3.6)$$

Siendo $\lambda(n)$ parámetro de mezcla.

Los vectores de coeficientes de cada filtro $w_1(n-1)$ y $w_2(n-1)$ se adaptan a sus respectivos errores.

$$e_i(n) = d(n) - y_i(n), \quad i = 1, 2 \quad (3.7)$$

dónde :

$d(n)$ es la respuesta deseada.

Puede observarse además que el error total $e(n)$ de la combinación viene dado por:

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (3.8)$$

Según la figura 3.1 puede obtenerse

$$e(n) = \lambda(n)e_1(n) + [1 - \lambda(n)]e_2(n) \quad (3.9)$$

Para la combinación se asume un modelo lineal regresivo para $d(n)$ dado por

$$d(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}_o(n-1) + v(n) \quad (3.10)$$

Donde

$w_o(n-1)$ es el vector de coeficientes óptimos $v(n)$ es un proceso aleatorio de media cero y varianza $\sigma_v^2 = E\{v^2(n)\}$, y no está correlacionado con $u(n)$. Las secuencias $u(n)$ y $v(n)$ se suponen estacionarias. En el caso estacionario, $w_o(n)$ es una constante y para el caso no estacionario se puede asumir el modelo *random-walk model* (Sayed 2003), es decir

$$w_o(n) = w_o(n-1) + q(n) \quad (3.11)$$

Donde

$q(n)$ es un vector i.i.d (independiente e idénticamente distribuido) con una matriz de autocorrelación

$$Q = E\{q(n)q^T(n)\} \quad (3.12)$$

definida-positiva, independiente de las condiciones iniciales

$$\{w_o(0), w(0), \eta(0)\} \text{ y } \{u(l), d(l)\} \text{ para todo } l \text{ (Sayed 2003).}$$

Una aplicación inicial para este tipo de combinación de filtros adaptativos corresponde a la combinación convexa. En este esquema el parámetro de mezcla $\lambda(n)$ se limita al intervalo $[0,1]$ (Arenas-García and Figueiras-Vidal 2005; Arenas-García, Figueiras-Vidal et al. 2005; Arenas-García, Figueiras-Vidal et al. 2006; Arenas-García, Martínez-Ramón et al. 2006; Silva and Nascimento 2008). Sin embargo (Bershad, Bermudez et al. 2008) propusieron una combinación *Affine* de dos filtros LMS, que puede decirse que es la generalización de la combinación convexa de (Arenas-García, Figueiras-Vidal et al. 2006). En esta combinación el valor de $\lambda(n)$ no se limita al intervalo $[0,1]$, y además puede adquirir valores negativos. Estos tipos de combinación se detallan a continuación.

3.2.1 Combinación Convexa

En esta combinación, para mantener el parámetro $\lambda(n)$ en el intervalo $[0,1]$, se utiliza la variable auxiliar $\alpha(n-1)$ y una función sigmoide (Arenas-García, Figueiras-Vidal et al. 2006), así:

$$\lambda(n) = \text{sgm}(\alpha(n-1)) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(n-1)}}, \quad (3.13)$$

Donde $\alpha(n)$ se actualiza de la siguiente forma

$$\alpha(n) = \alpha(n-1) + \mu_\alpha e_\lambda(n) \lambda(n) [1 - \lambda(n)], \quad (3.14)$$

Siendo

$$e_\lambda(n) = e(n) [y_1(n) - y_2(n)] \quad (3.15)$$

La ecuación anterior la obtuvieron Arenas-García et al. (2006) y Arenas-García y Figueiras Vidal (2006), utilizando el método de gradiente estocástico para minimizar la función de costo del error cuadrático medio instantáneo.

Es importante observar que en este esquema la actualización de $\alpha(n)$ se fija cuando $\lambda(n)$ se aproxima a 0 ó 1. Frente a lo anterior, Arenas-García et al (2006) sugieren que $\alpha(n)$ debe ser restringido (por saturación simple) al intervalo $(-\alpha^+, \alpha^+)$ garantizando el nivel mínimo de actualización. Igualmente proponen una variante que justifica la generalización de la combinación, redondeando el valor del parámetro de mezcla a 0 y 1 a partir de ciertos valores de $\alpha(n)$ obteniendo $\lambda_u(n)$ que garantiza la universalidad de la combinación cuando:

$$y_u(n) = \lambda_u(n)y_1(n) + [1 - \lambda_u(n)]y_2(n), \quad (3.16)$$

y el parámetro universal de mezcla se calcula mediante

$$\lambda_u(n) = \begin{cases} 1, & \alpha(n) \geq \alpha^+ - \varepsilon_c \\ \eta(n), & -\alpha^+ + \varepsilon_c < \alpha(n) < \alpha^+ - \varepsilon_c, \\ 0, & \alpha(n) \leq -\alpha^+ + \varepsilon_c \end{cases} \quad (3.17)$$

Siendo ε_c una constante positiva de valor pequeño.

Para el caso de la combinación convexa de dos algoritmos de tipo LMS con pasos de adaptación μ_1 y μ_2 , siendo $\mu_1 > \mu_2$, al inicio de la convergencia, $\lambda(n) \rightarrow 1$ y la combinación se aproxima al filtro con paso μ_1 que converge más rápidamente. Cuando $\lambda(n) \rightarrow 0$ se acerca al filtro con paso μ_2 que es el más lento pero con un “ajuste fino” para lograr un error de estimación pequeño.

3.2.2 Combinación *Affine*

La combinación *Affine* es la generalización de la combinación convexa de dos filtros adaptativos LMS. En esta combinación propuesta por Bershad et al, (2008) el parámetro de combinación $\lambda(n)$ es elegido de forma óptima para minimizar el MSE instantáneo, el cual no se limita al intervalo $[0, 1]$. Así la salida

$y(n)$ es una combinación *Affine*¹ de las salidas de los filtros individuales $y_1(n)$ y $y_2(n)$ siendo la combinación convexa un caso particular.

Bershad et al, (2008) hacen una aplicación del combinador óptimo alcanzable en entornos no estacionarios, llegando a la conclusión que el parámetro de mezcla debería ser:

$$\lambda_o(n) = \frac{[w_o - w_2(n)]^T R[w_1(n) - w_2(n)]}{[w_1(n) - w_2(n)]^T R[w_1(n) - w_2(n)]} \quad (3.18)$$

Considerando el paso de adaptación $\mu_2 = \delta\mu_1$, $0 < \delta < 1$ y asumiendo μ_1 para máxima velocidad de convergencia, como entrada blanca y Gaussiana, se determinó que el parámetro de mezcla óptimo sería:

$$\bar{\lambda}_o(\infty) \approx \lim_{n \rightarrow \infty} E\{\lambda_o(n)\} \approx \frac{\delta}{2(\delta - 1)} \quad (3.19)$$

Dado que $0 < \delta < 1$, el parámetro de mezcla óptimo es siempre negativo.

La ecuación (3.19) depende de la matriz de autocorrelación de la señal de entrada y del vector de coeficientes óptimos y por lo tanto no se podría calcular el parámetro de mezcla en una aplicación práctica. Por lo que se han propuesto dos métodos para la adaptación de $\lambda(n)$.

¹ En matemáticas una combinación *Affine* de vectores x_1, \dots, x_n es un vector $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$

Llamado combinación lineal de x_1, \dots, x_n en el cual la suma de los coeficientes es 1, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

El primero utiliza el método de gradiente estocástico y tiene un rendimiento cercano al óptimo no realizable, presentando la misma velocidad de convergencia y comportamiento bajo. En este esquema el parámetro $\lambda(n)$ puede tomar cualquier valor, no usa una función sigmoide y su actualización se realiza por:

$$\lambda(n+1) = \lambda(n) + \mu_\lambda e_\lambda(n), \quad (3.20)$$

el parámetro $e_\lambda(n)$ se calculó con la ecuación 3.15. El algoritmo anterior es llamado λ -LMS y fue desarrollado por Bershada et al, (2008) usando el método de gradiente estocástico, de forma análoga a la usada en la combinación convexa.

La diferencia en la adaptación de las dos combinaciones está dada por $\lambda(n)[1-\lambda(n)]$, que se observa en la combinación convexa debido a la función sigmoide. Bershada et al (2008) observaron que el algoritmo anterior puede divergir durante el inicio de la adaptación cuando se usa un paso de adaptación grande ($\mu_\lambda \geq 1$). Para evitar ese problema Bershada et al, (2008) limitaron el valor de $\lambda(n)$ en 1 para todo n .

En el segundo método de adaptación para el parámetro de mezcla se consideran medias temporales de los errores instantáneos así:

$$\hat{e}_i(n) = \frac{1}{K} \sum_{m=n-K+1}^n e_i^2(m), \quad i=1,2, \quad (3.21)$$

donde K es el tamaño de la media de la ventana móvil. El parámetro de mezcla $\lambda(n)$ está dado por:

$$\lambda(n) = 1 - k_\eta \operatorname{erf} \left(\frac{\hat{e}_1(n)}{\hat{e}_2(n)} \right), \quad (3.22)$$

con

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \quad (3.23)$$

En este esquema de adaptación, $\lambda(n)$ puede variar en el intervalo $[1 - k_\lambda, 1]$. Para que sea posible obtener el valor del parámetro de mezcla óptimo, se considera

$$k_\lambda = 1 - \frac{\delta}{2(\delta - 1)} \quad (3.24)$$

3.2.3 Otros esquemas de combinación

A continuación se mencionan otros esquemas de combinación de filtros que difieren de los anteriormente descritos pero que también sirven para mejorar el funcionamiento de los filtros adaptativos. Se puede dar igualmente la combinación de más de dos elementos. La filosofía de la combinación de filtros puede extenderse considerando un número arbitrario de filtros adaptativos tipo G.

Tanto para el caso de combinación convexo como de combinación *affine*, la salida combinada viene dada por:

$$y(n) = \lambda_1(n)y_1(n) + \lambda_2(n)y_2(n) + \dots + \left[1 - \sum_{g=1}^{G-1} \lambda_g(n) \right] y_G(n) \quad (3.25)$$

Existen diferentes reglas de actualización para la combinación de G filtros, entre las que destaca la publicada en Arenas-García et al., (2005) para el caso convexo, basada en una activación softmax, y la extensión de la regla tipo mínimos cuadrados, publicada en Azpicueta-Ruiz et al., (2010).

3.2.3.1. Esquemas de combinación desacoplados y combinación por bloques.

Existe la posibilidad de, en lugar de utilizar un único parámetro de mezcla para todos los coeficientes de los filtros componentes, según la ecuación

$$w(n) = \lambda(n)w_1(n) + (1 - \lambda(n))w_2(n), \quad (3.25)$$

siendo $w(n)$ el vector de pesos de un filtro único equivalente.

Un parámetro de mezcla para cada bloque de coeficientes, o, en el límite, desacoplar el sistema totalmente, utilizando tantos parámetros de mezcla como coeficientes [Arenas-García et al., 2005]. Esta forma de actuar permite obtener ciertas ventajas desde el punto de vista operativo al tratar independientemente distintas partes de los filtros adaptativos, aunque da lugar a un incremento en el coste computacional.

Cuando se consideran filtros componentes compuestos por núcleos de diferente orden, como por ejemplo los filtros de Volterra, es posible realizar la combinación de núcleos del mismo orden [Azpicueta-Ruiz et al., 2011].

3.3 El Algoritmo Acelerador Regresivo Versión γ (AR γ) en configuración *Affine*.

En la secciones anteriores se han descrito detalladamente y se mencionaron las formas de combinar los filtros adaptativos y una de las formas de combinar estos es por medio de la Configuración *Affine* con la que se ha podido obtener de acuerdo con Arenas-Garcia et al, (2006) y Candido et al, (2010) en la combinación de filtros LMS, características como: No tener limitación en el parámetro de mezcla, máxima velocidad de convergencia, buena capacidad de seguimiento, optimo resultado en desajuste, el filtro combinado resultante tiende a comportarse como el mejor de los filtros y en algunos casos se comporta mejor que los filtros a combinar y alivia el compromiso entre la velocidad de convergencia y el error residual inherente al filtro. Esto es lo que motiva a implementar el Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en configuración *affine*.

El algoritmo se puede escribir con las ecuaciones siguientes:

Ecuaciones Filtro 1

$$y_1(n) = x(n)w_1(n) \quad (4.1)$$

$$e_1(n) = y_1(n) - d(n) \quad (4.2)$$

$$g_1(n) = \frac{e_1(n) + \gamma_1 x^T(n)q_1(n-1)}{1 + \alpha_1 \gamma_1 x^T(n)m_1 x(n)} \quad (4.3)$$

$$q_1(n) = \frac{\gamma_1}{\alpha_1 + \gamma_1} [q_1(n-1) - \alpha_1 g_1(n)m_1 x(n)] \quad (4.4)$$

$$w_1(n) = w_1(n-1) + \alpha_1 q_1(n) \quad (4.5)$$

Ecuaciones Filtro 2

$$y_2(n) = x(n)w_2(n) \quad (4.6)$$

$$e_2(n) = y_2(n) - d(n) \quad (4.7)$$

$$g_2(n) = \frac{e_2(n) + \gamma_2 x^T(n) q_2(n-1)}{1 + \alpha_2 \gamma_2 x^T(n) m_2 x(n)} \quad (4.8)$$

$$q_2(n) = \frac{\gamma_2}{\alpha_2 + \gamma_2} [q_2(n-1) - \alpha_2 g_2(n) m_2 x(n)] \quad (4.9)$$

$$w_2(n) = w_2(n-1) + \alpha_2 q_2(n) \quad (4.10)$$

Configuración Affine

$$y(n) = y_1(n)\lambda(n) + y_2(n)(1 - (\lambda n)) \quad (4.11)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (4.12)$$

$$\lambda(n+1) = \lambda(n) + \mu_\lambda e(n)(y_1(n) + y_2(n)) \quad (4.13)$$

Donde μ_λ corresponde al parámetro de adaptación del filtro en combinación *Affine* y cada algoritmo acelerador AR_γ tienen sus propios parámetros de ajuste que son α, γ y m_1 .

El Algoritmo Acelerador Versión γ (AR_γ) en configuración *Affine* requiere aproximadamente $12M + 9$ multiplicaciones, $11M + 4$ sumas y 2 divisiones, ya que los parámetros $\mu_\lambda, \alpha, \gamma$ y m_1 permanecen constantes durante la operación del sistema.

Capítulo 4

Efecto de la configuración *Affine* en el Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) como algoritmo adaptativo.

En el capítulo anterior se ha descrito la implementación del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en combinación *Affine* (ver ecuaciones 4.1 a 4.13). En este capítulo se analizará el efecto del parámetro de mezcla $\lambda(n)$ con paso de adaptación μ_λ y combinaciones de diferentes valores de los parámetros de ajuste α, γ y m_1 del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) de forma que permita observar la velocidad de convergencia.

Las experiencias realizadas se trabajan con base en la configuración de identificación de sistema. El sistema de identificación está constituido por un filtro FIR de respuesta impulsiva h , señal de entrada $x(n)$ con ruido blanco gaussiano con media cero y $\sigma^2 = 0.04$, señal deseada d la cual es contaminada con ruido de medida $r(n)$ blanco gaussiano con media cero y $\sigma^2 = 10^{-4}$.

Los parámetros del sistema a identificar se suponen invariantes en el tiempo con valores entre -1 y 1 dado por $y(k) = 0.9u(k) - 0.54u(k-1) + 0.21u(k-2) - 0.03u(k-3) + 0.78u(k-4) + 0.52u(k-5) - 0.09u(k-6)$,

orden del filtro $M = 7$, número de muestras $N = 5000$ y número de experiencias $K = 10$.

Experiencia 1. Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ (AR γ) por parámetro μ_λ .

En esta experiencia se observa cómo se comporta el algoritmo acelerador en configuración *affine* al modificar el parámetro μ_λ , teniendo fijos los parámetros de ajuste de los algoritmos aceleradores.

Para observar su comportamiento se obtuvieron las figuras 4.1 a 4.4

Con valores iniciales

$$B = [0.9000 \quad -0.5400 \quad 0.2100 \quad -0.0300 \quad 0.7800 \quad 0.5200 \quad -0.0900]$$

$$m_1 = 0.005; \quad \alpha_1 = 0.008; \quad \gamma_1 = 5.0000e + 004;$$

$$m_2 = 0.5; \quad \alpha_2 = 0.8; \quad \gamma_2 = 5;$$

En la tabla 4.1 se detalla la variación de μ_λ (paso de adaptación configuración *Affine*), el valor del error cuadrático medio para los algoritmos Acelerador AR γ en configuración *Affine* (Eqm_com_AR γ), Acelerador AR γ más lento (Eqm_arg1) y más rápido (Eqm_arg2), donde se observa que no hay un comportamiento lineal, pero que a medida que se aumenta del valor de $\mu_\lambda = 0.5$, el incremento de μ_λ hace que el error aumente, así mismo, a medida que μ_λ se acerca a cero el error aumenta.

μ_λ	Eqm_com_AR γ	Eqm_arg1	Eqm_arg2
0.001	9.0112e-009	0.0340	4.3223e-032
0.005	8.6764e-008	0.0320	3.8074e-032
0.01	5.4793e-008	0.0125	3.8851e-032
0.05	3.5600e-010	0.0090	1.5822e-032
0.1	1.8580e-013	0.0258	1.2735e-032
0.5	7.8867e-033	0.0244	3.0815e-032
1	1.4688e-032	0.0203	3.2693e-032
2	2.4869e-032	0.0281	5.0175e-032
5	1.3949e-032	0.0206	3.5649e-032
10	2.2275e-032	0.0246	3.5620e-032
30	2.1084e-032	0.0265	4.2674e-032
50	3.2029e-032	0.0166	4.8425e-032

Tabla 4.1. Valores resultantes del Comportamiento del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en configuración Affine con variación del parámetro μ_λ

En las figuras 4.1 a 4.4, se puede observar el comportamiento del parámetro de mezcla $\lambda(n)$ al variar el valor de μ_λ entre [0.001, 50]; el algoritmo acelerador en configuración *affine* (color verde) es más lento para valores de μ_λ grandes, como se observa al comparar entre la figura 4.2 de $\mu_\lambda = 0.5$ y la figura 4.3 de $\mu_\lambda = 10$.

Cuando $\mu_\lambda = 0.5$ se obtiene el valor mínimo para el error cuadrático medio en configuración *Affine* y para $\mu_\lambda = 50$ se da inicio a su desajuste.

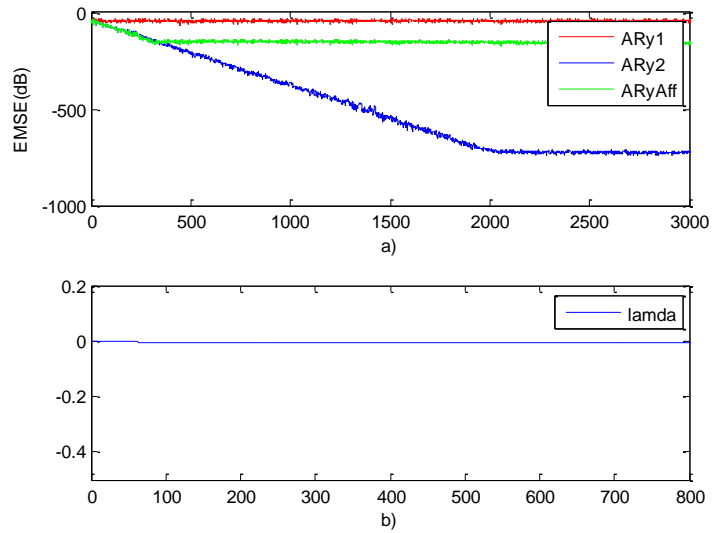


Figura 4.1. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 0.01$

a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

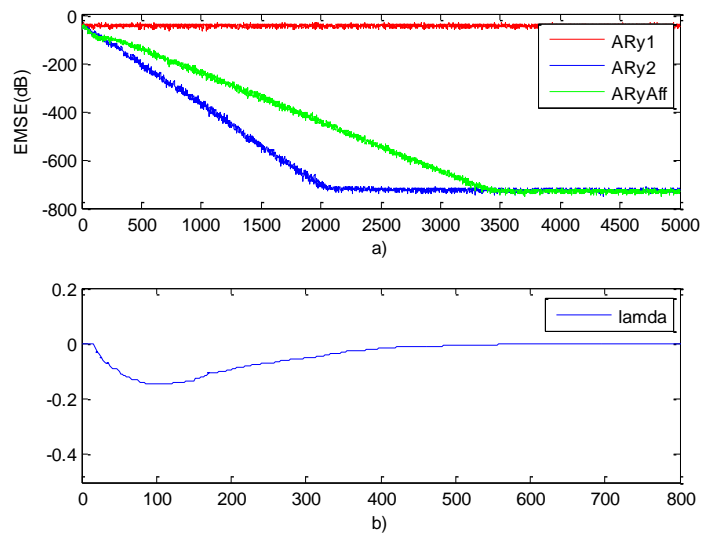


Figura 4.2. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 0.5$

a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

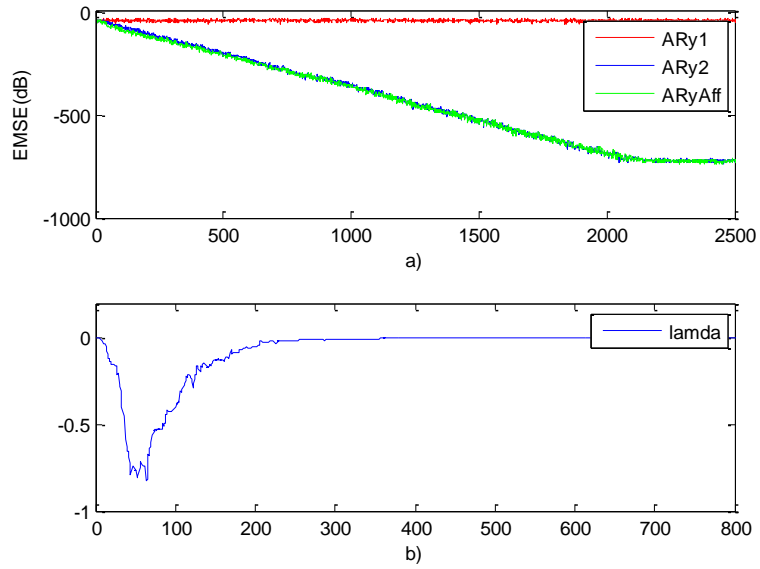


Figura 4.3. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 10$

a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

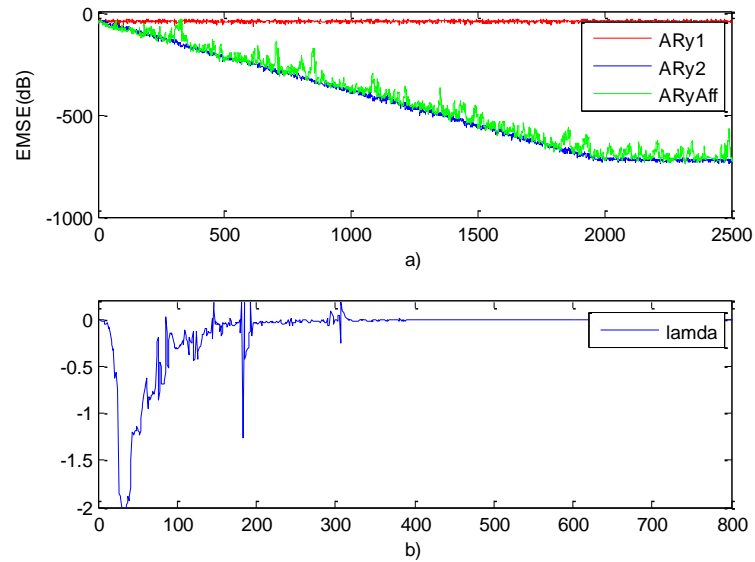


Figura 4.4. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 50$

a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

Experiencia 2. Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ (AR γ) por parámetro m_1 .

La experiencia muestra el comportamiento del algoritmo acelerador en configuración *Affine* al tomar diferentes valores del parámetro m_1 , las figuras 4.5 a 4.8 muestran este comportamiento, con valores iniciales:

$$B = [0.9000 \quad -0.5400 \quad 0.2100 \quad -0.0300 \quad 0.7800 \quad 0.5200 \quad -0.0900]$$

$$\alpha_1 = 0.008; \quad m_2 = 0.5; \quad \gamma_2 = 5; \quad \alpha_2 = 0.8;$$

En la tabla 4.2 se especifica la variación de μ_λ y m_1 , el valor del error cuadrático medio para los algoritmos Aceleradores AR γ en configuración *Affine*. El Acelerador AR γ más lento (color rojo) y más rápido (color azul), se observa que μ_λ y γ_1 son inversamente proporcionales: a medida que aumenta μ_λ , disminuye γ_1 . Respecto al mínimo error cuadrático medio, éste se alcanza cuando $\mu_\lambda = 50$ tanto para el algoritmo acelerador en configuración *Affine* y para el algoritmo AR γ_2 más rápido, siguen sin ser lineales a diferencia del algoritmo AR γ_1 .

Las figuras 4.5 a 4.8 permiten observar el comportamiento del algoritmo acelerador en configuración *affine*. En la figura 4.7 donde $\mu_\lambda = 50$ el algoritmo acelerador en configuración *affine* alcanza el mínimo error cuadrático medio pero cuando $\mu_\lambda = 127$ del algoritmo en configuración *Affine* podría afirmarse que su comportamiento parece ser el más rápido.

μ_λ	m_1	γ_1	eqm_com_ARy	eqm_arg1	eqm_arg2
0.001	0.005	5.0000e+004	6.3464e-009	0.0241	1.8776e-032
0.005	0.05	5000	3.5068e-008	0.0126	3.2764e-032
0.01	0.5	500	9.8839e-008	0.0199	3.6852e-032
0.05	1.5	166.6667	4.3592e-009	0.0141	9.2132e-032
0.1	3	83.3333	7.2807e-011	0.0082	4.8125e-032
0.5	5	50	2.8696e-025	0.0041	3.1643e-032
1	30	8.3333	8.5829e-015	9.9887e-007	3.8515e-032
2	50	5	1.0551e-016	3.0840e-009	6.2829e-032
5	100	2.5000	3.7667e-021	5.5151e-016	3.6473e-032
10	150	1.6667	7.3422e-027	3.7696e-023	2.9998e-032
30	200	1.2500	2.7898e-032	1.1791e-029	3.2988e-032
50	300	0.8333	1.1838e-032	8.5924e-031	7.5352e-033
100	1000	0.2500	6.1851e-032	2.2358e-031	3.0077e-032
127	2000	0.1250	3.4339e-031	2.0251e-031	6.5302e-032
130	5000	0.0500	3.9014e-032	3.9611e-032	3.9611e-032

Tabla 4.2. Valores resultantes del Comportamiento del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en configuración *Affine* con variación m_1 y μ_λ

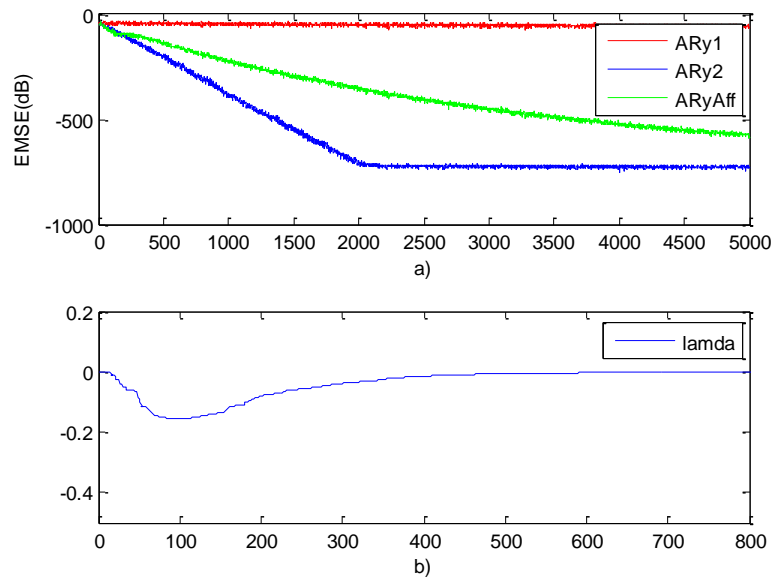


Figura 4.5. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 0.5$ y $m_1 = 5$
a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

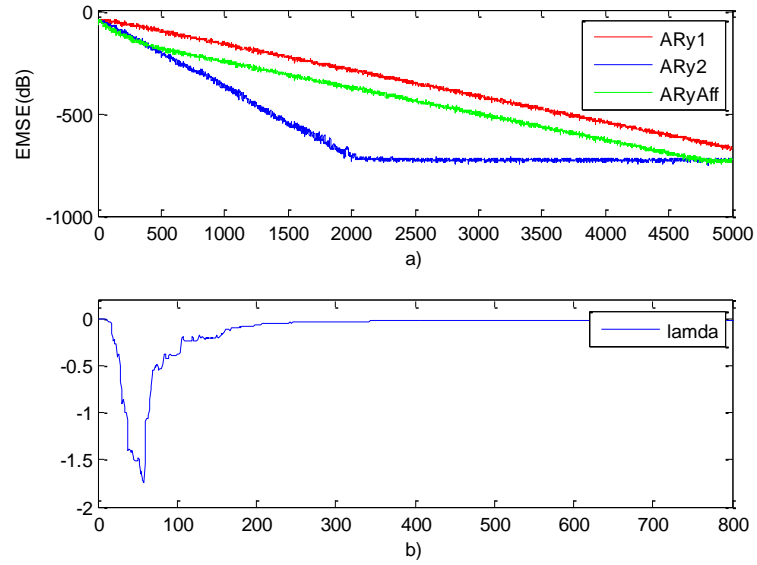


Figura 4.6. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 30$ y $m_1 = 200$

a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

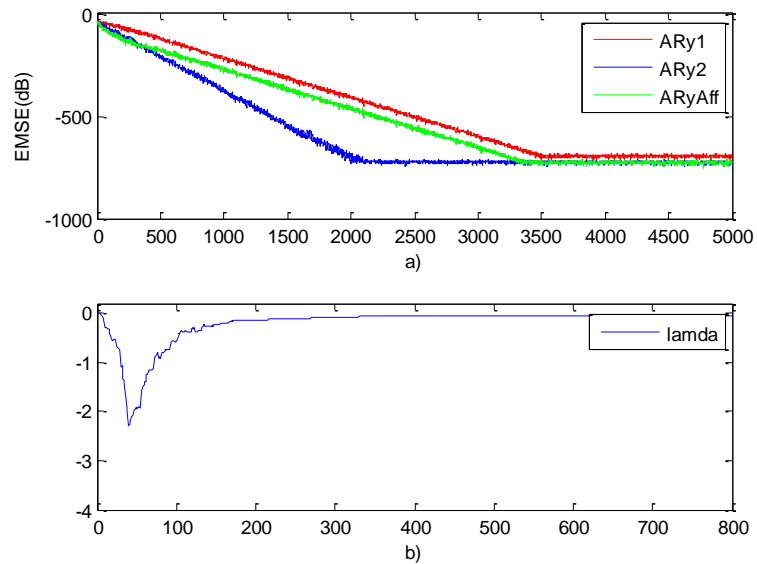


Figura 4.7. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 50$ y $m_1 = 300$

a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

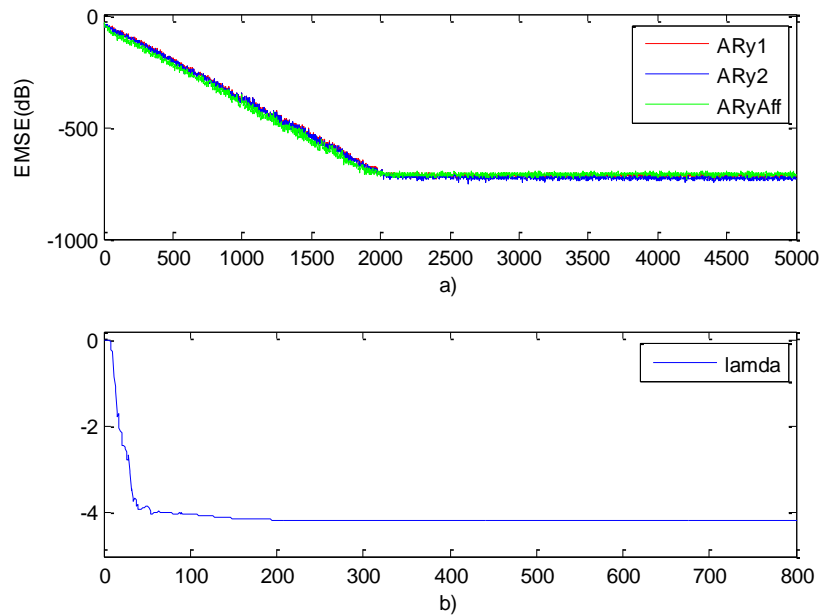


Figura 4.8. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 127$ y $m_1 = 2000$

a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

Experiencia 3. Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ (AR γ) por parámetro m_2 .

Ilustra el comportamiento del algoritmo acelerador en configuración *Affine* al variar los valores del parámetro m_2 . Las figuras 4.9 a 4.12 muestran el comportamiento al tomar valores iniciales como:

$$B = [0.9000 \quad -0.5400 \quad 0.2100 \quad -0.0300 \quad 0.7800 \quad 0.5200 \quad -0.0900]$$

$$\alpha_1 = 0.008; \quad m_1 = 0.005; \quad \gamma_1 = 5.0000e + 004; \quad \alpha_2 = 0.8;$$

En la tabla 4.3 se especifica la variación de μ_λ y m_2 ; el valor del error cuadrático medio para los algoritmos Acelerador AR γ en configuración *Affine*, Acelerador AR γ más lento y más rápido.

En la figura 4.9 $m_2 = 50$ y $\mu_\lambda = 2$ el algoritmo en configuración *affine* alcanza el mínimo error cuadrático medio con un valor muy aproximado para el filtro AR γ 2. Para $\mu_\lambda = 5$ el algoritmo en configuración *affine* se comporta como el filtro más rápido hasta $\mu_\lambda = 50$ donde se empieza a desajustar. El comportamiento con respecto al error sigue siendo no lineal con excepción del algoritmo AR γ 1; los parámetros μ_λ y γ_2 siguen siendo inversamente proporcionales. A partir de $\mu_\lambda = 30$ el algoritmo en configuración *affine* empieza a desajustarse como se ve en las figuras 4.11 y 4.12. Desde la experiencia 1 hasta la experiencia 3 el parámetro $\lambda(n)$ ha tomado valores menores a 0.

μ_λ	m_2	γ_2	eqm_com_ARy	eqm_arg1	eqm_arg2
0.001	0.001	2500	4.9526e-004	0.0138	5.8267e-004
0.005	0.005	500	6.0815e-006	0.0125	1.7580e-009
0.01	0.01	250	4.8860e-006	0.0228	4.8177e-016
0.05	0.05	50.0000	4.1596e-009	0.0286	4.6274e-031
0.1	1	2.5000	1.8460e-013	0.0230	1.0449e-032
0.5	3	0.8333	2.4231e-033	0.0169	2.3641e-033
1	10	0.2500	7.7910e-034	0.0257	7.8241e-034
2	50	0.0500	4.5861e-034	0.0153	4.5380e-034
5	1000	0.0025	1.5648e-033	0.0399	2.2004e-033
10	5000	5.0000e-004	2.3599e-033	0.0317	1.2531e-033
30	8000	3.1250e-004	8.6154e-033	0.0144	6.9019e-034
50	10000	2.5000e-004	1.3406e-033	0.0097	5.1927e-034

Tabla 4.3. Valores resultantes del Comportamiento del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en configuración *Affine* con variación de m_2 y μ_λ

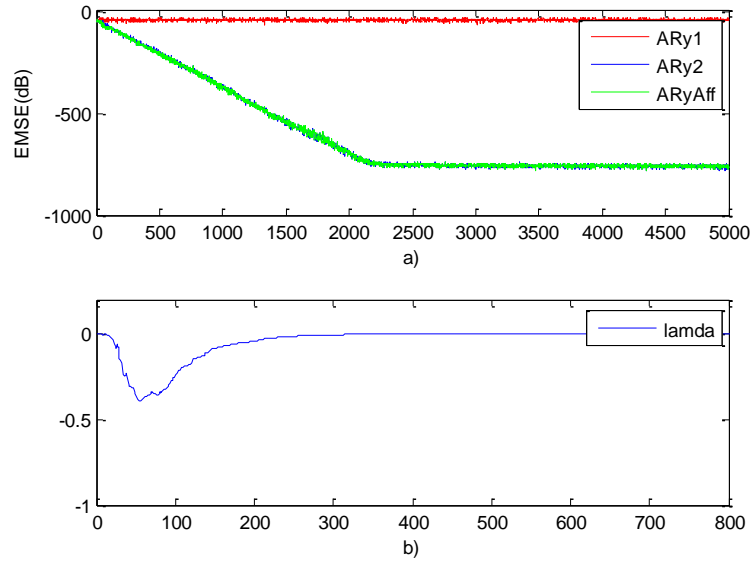


Figura 4.9. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 0.5$ y $m_2 = 3$
a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

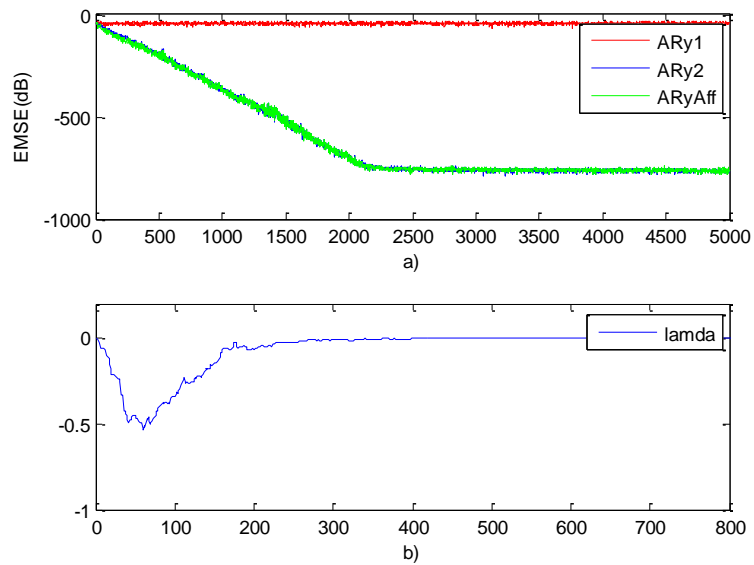


Figura 4.10. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 5$ y $m_2 = 1000$
a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

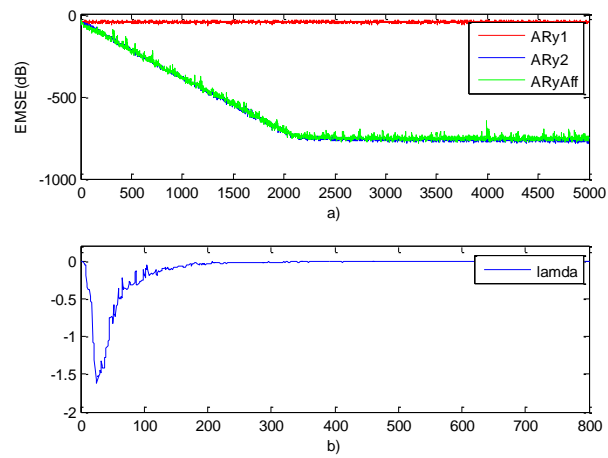


Figura 4.11. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 30$ y $m_2 = 8000$

a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

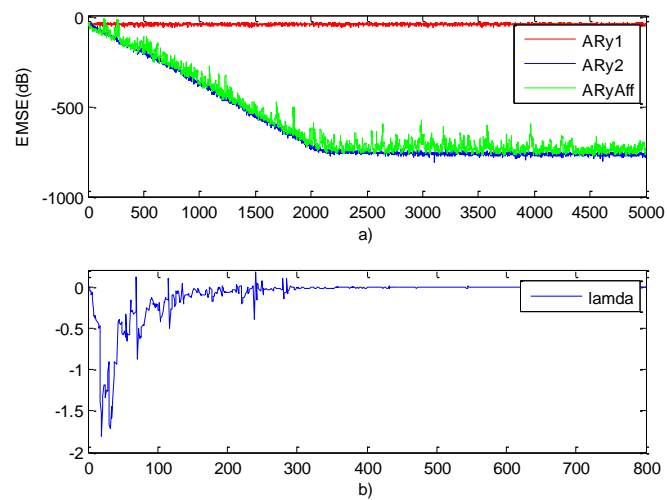


Figura 4.12. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 50$ y $m_2 = 10000$

a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

Experiencia 4. Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo

versión γ (AR γ) por parámetro α_1 .

Se registra el comportamiento del algoritmo acelerador en configuración *Affine* al variar los valores del parámetro α_1 y con las figuras 4.13 a 4.16 se puede observar el modo de comportarse al tomar valores iniciales así:

$$B = [0.9000 \quad -0.5400 \quad 0.2100 \quad -0.0300 \quad 0.7800 \quad 0.5200 \quad -0.0900]$$

$$m_1 = 0.005; \quad \gamma_2 = 5; \quad \alpha_2 = 0.8 \quad m_2 = 0.5;$$

En la tabla 4.4 se especifica la variación de μ_λ y α_1 observando los valores del error cuadrático medio para los algoritmos Acelerador AR γ en configuración *Affine*; Algoritmo Acelerador AR γ más lento y más rápido.

En las figuras 4.13 a 4.16 se plasma el comportamiento de los algoritmos observando que para $\mu_\lambda = 5$ se obtiene el mínimo error cuadrático medio para el algoritmo en configuración *affine* como se ilustra en la figura 4.16, además se observa que en las figuras 4.13 a 4.16 el comportamiento del algoritmo en configuración *Affine* es más rápido que los algoritmos AR γ en su configuración convencional.

Respecto al parámetro $\lambda(n)$ en las figuras 4.13 a 4.16 se observa que puede tomar valores tanto negativos como positivos.

μ_λ	α_1	γ_1	eqm_com_ARy	eqm_arg1	eqm_arg2
0.001	0.01	40000	3.6553e-009	0.0142	1.5308e-032
0.005	0.05	8000	5.7583e-008	0.0189	2.3655e-032
0.01	0.1	4000	1.0469e-007	0.0189	5.0209e-032
0.05	0.5	800	1.1433e-008	6.7455e-005	3.3623e-032
0.1	1	400	9.4291e-016	7.2842e-013	6.3503e-032
0.5	2	200	2.0040e-032	3.7492e-031	2.3930e-032
1	3	133.3333	1.5645e-032	8.8805e-032	1.8623e-032
2	5	80	1.5145e-032	6.1957e-032	2.0179e-032
5	10	40	7.0785e-033	4.1420e-033	7.6077e-033
10	20	20	1.4772e-032	3.5533e-033	2.6294e-032

Tabla 4.4. Valores resultantes del Comportamiento del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR γ) en configuración *Affine* con variación de los parámetros α_1 y μ_λ

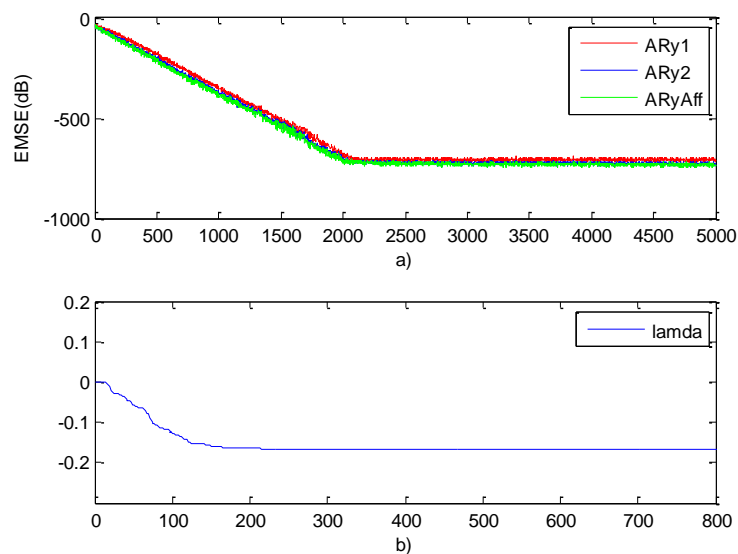


Figura 4.13. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 1$ y $\alpha_1 = 3$
a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

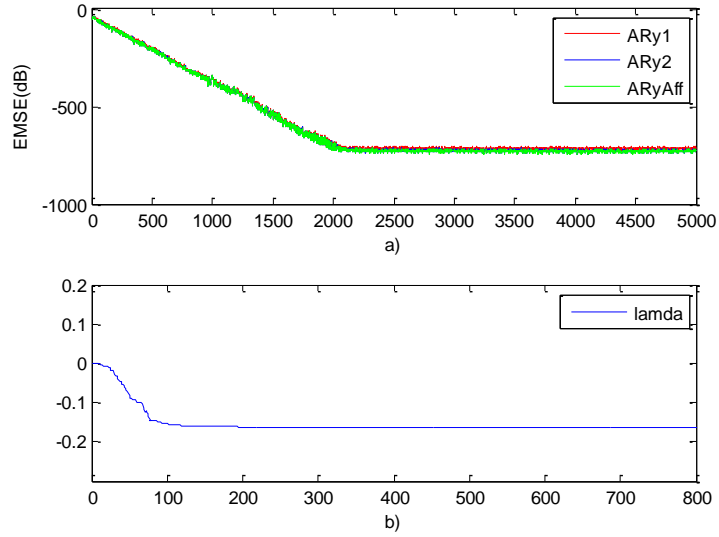


Figura 4.14. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 2$ y $\alpha_1 = 5$

a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

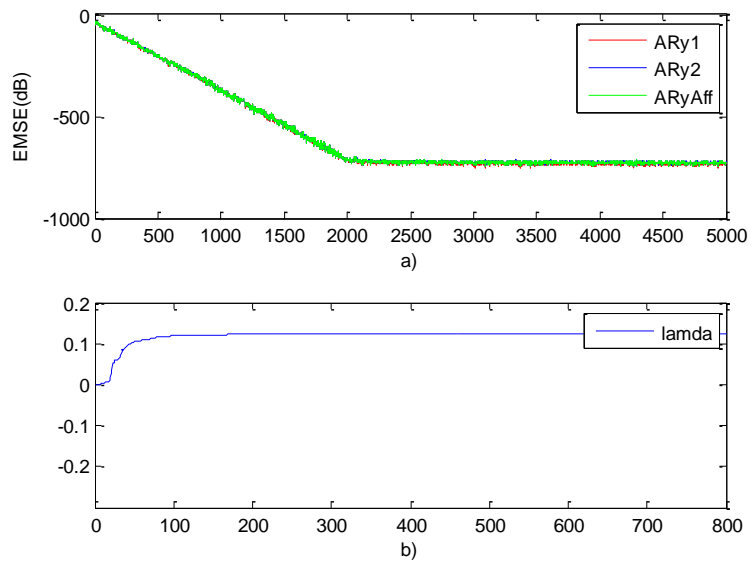


Figura 4.15. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 5$ y $\alpha_1 = 10$

a) Mínimo Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

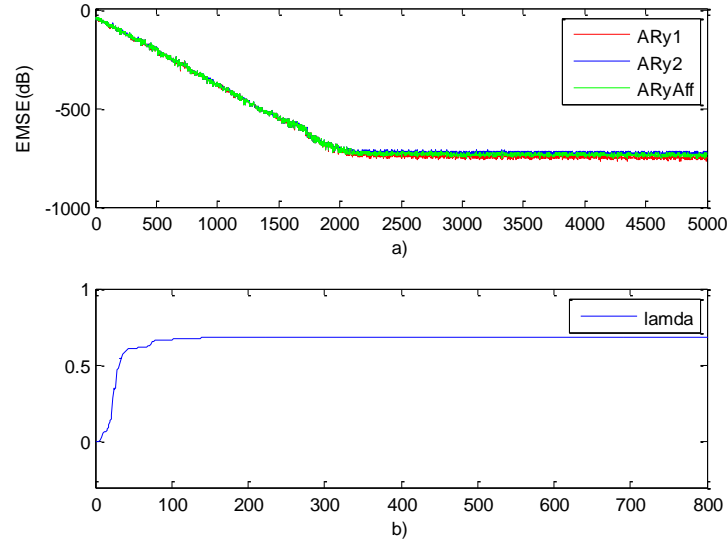


Figura 4.16. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 10$ y $\alpha_1 = 20$

a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

Experiencia 5. Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ (AR γ) por parámetro α_2 .

Registra el comportamiento del algoritmo acelerador en configuración *Affine* al variar los valores del parámetro α_2 y con las figuras 4.17 a 4.20 se puede observar el modo de comportarse al tomar valores iniciales así:

$$B = [0.9000 \quad -0.5400 \quad 0.2100 \quad -0.0300 \quad 0.7800 \quad 0.5200 \quad -0.0900]$$

$$m_1 = 0.005; \quad \gamma_1 = 5.0000e+004; \quad \alpha_1 = 0.008 \quad m_2 = 0.5;$$

En la tabla 4.5 se especifica la variación de μ_λ y α_2 observando los valores del error cuadrático medio para los algoritmos Acelerador AR γ en configuración

Affine, Algoritmo Acelerador $AR_{\gamma 1}$ y $AR_{\gamma 2}$ más lento y más rápido respectivamente.

Con las figuras 4.17 a 4.20 se observa el comportamiento de los algoritmos con $\mu_2 = 10$ y que corresponde al momento en que se obtiene el mínimo error cuadrático medio para el algoritmo en configuración *affine* como se ve en la figura 4.19.

Además se observa que en las figuras 4.17 a 4.20 el comportamiento del algoritmo en configuración *Affine* es más rápido que los algoritmos AR_{γ} en su configuración convencional.

Para valores de α_2 entre [10, 50] y μ_λ entre [0.5, 10] el error cuadrático medio no tiene un comportamiento lineal.

μ_λ	α_2	γ_2	eqm_com_ARy	eqm_arg1	eqm_arg2
0.001	0.01	400	0.0246	0.0315	0.0246
0.005	0.1	40	2.8789e-006	0.0143	2.8959e-013
0.01	1	4	1.2105e-007	0.0278	2.2962e-032
0.05	3	1.3333	6.9351e-010	0.0191	3.5497e-033
0.1	5	0.8000	1.8851e-013	0.0186	7.6593e-034
0.5	10	0.4000	9.3408e-034	0.0321	8.5222e-034
1	20	0.2000	3.2861e-034	0.0196	2.7083e-034
2	30	0.1333	2.5699e-034	0.0064	2.8197e-034
5	40	0.1000	3.0454e-034	0.0092	3.0333e-034
10	50	0.0800	1.7333e-034	0.0120	3.0815e-034
30	100	0.0400	3.9873e-033	0.0301	8.0468e-034
50	150	0.0267	2.9377e-030	0.0147	1.0123e-033

Tabla 4.5. Valores resultantes del Comportamiento del Algoritmo Acelerador Versión γ (AR_{γ}) en configuración *Affine* con variación de α_2 y μ_λ

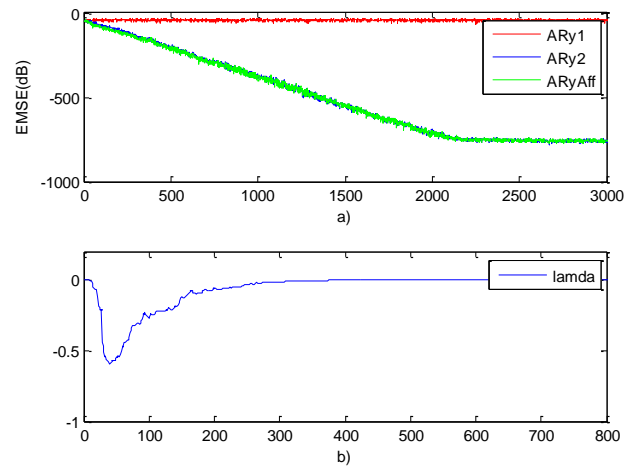


Figura 4.17. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 5$ y $\alpha_2 = 40$
a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

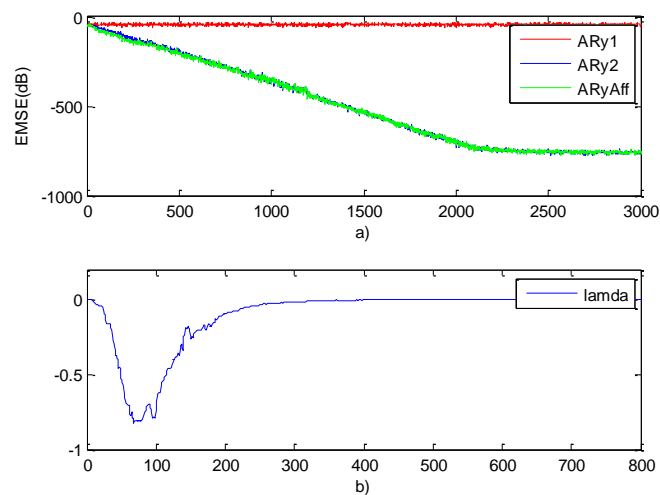


Figura 4.18. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 10$ y $\alpha_2 = 50$
a) Mínimo Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

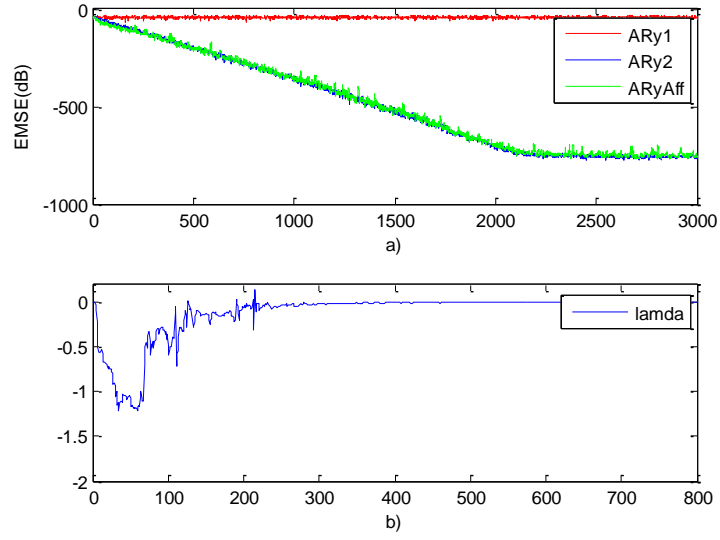


Figura 4.19. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 30$ y $\alpha_2 = 100$
 a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

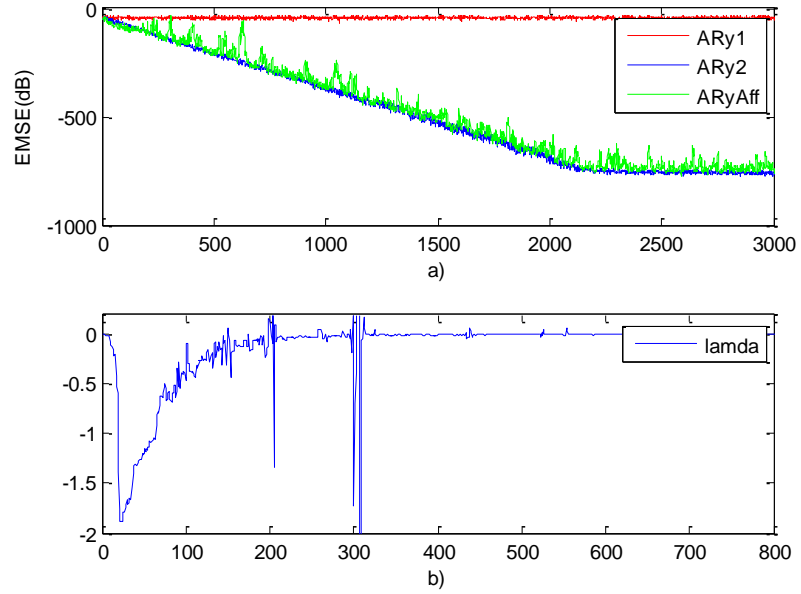


Figura 4.20. Configuración *Affine* con $\mu_\lambda = 50$ y $\alpha_2 = 150$
 a) Error Cuadrático Medio, b) Parámetro de mezcla λ

4.2 Análisis de Tracking.

A continuación se examinará el comportamiento del algoritmo en un ambiente no estacionario siguiendo el procedimiento descrito en Hayking (2002) el cual implementa un modelo variante en el tiempo para un sistema de identificación, o un sistema modelado por un filtro transversal que sigue un proceso de Markov de primer orden como se describe a continuación.

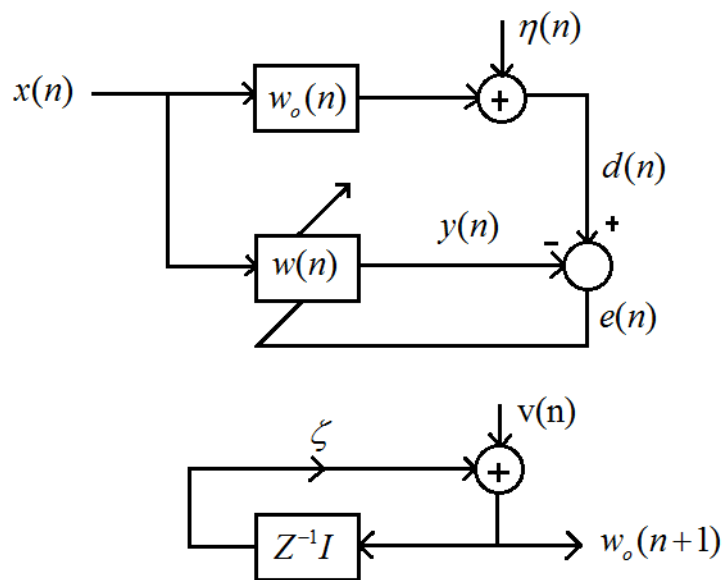


Figura 4.21. Modelo del Proceso de Markov y Sistema de Identificación.

ecuación:

$$w_o(n+1) = \zeta w_o(n) + v(n) \quad (4.5)$$

ζ = parametro fijo (aproximado a 1)

$v(n)$ = vector de ruido con media cero

$w_o(n)$ = coeficientes del sistema a ser identificado

$\eta(n)$ = ruido blanco gaussiano con media cero y varianza σ_η^2

$x(n), v(n)$ y $\eta(n)$ = estadísticamente independientes

Para verificar el análisis se efectúan diferentes experiencias con las siguientes condiciones:

$L =$ longitud de la señal $L = 8000$

$\sigma_v^2 =$ varianza del Proceso de Markov $= 0.01$

$\sigma_x^2 =$ varianza de la señal de entrada $= 0.1$

$\sigma_\eta^2 =$ varianza del ruido de medida $= 0.05$

ζ	eqm_com_ARy
0.99	2.5111e-005
0.9998	2.6146e-005
1	2.5573e-005

Tabla 4.6. Comportamiento del Error cuadrático medio para valores de ζ

4.2.1. Comportamiento del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ (AR γ) y Proceso de Markov.

De las figuras 4.22 a 4.24 se puede observar que el mejor comportamiento se obtiene con $\zeta = 0.99$

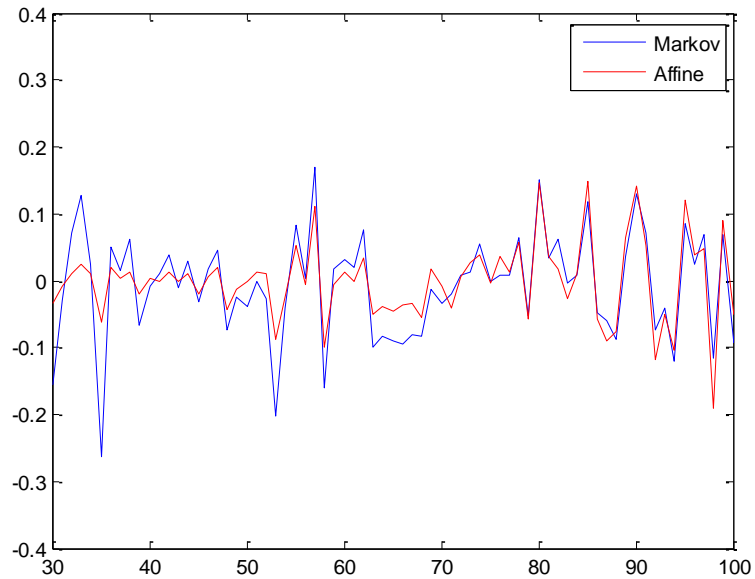


Figura 4.22. Seguimiento del Algoritmo Acelerador Versión γ ($AR\gamma$) en configuración *Affine* y Proceso de Markov con $\zeta = 0.99$

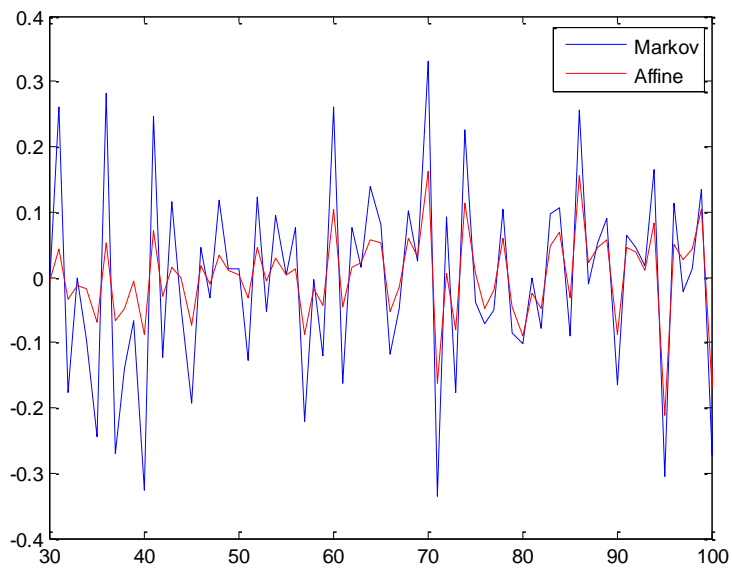


Figura 4.23. Seguimiento del Algoritmo Acelerador Version γ ($AR\gamma$) en configuración *Affine* y Proceso de Markov con $\zeta = 0.9998$

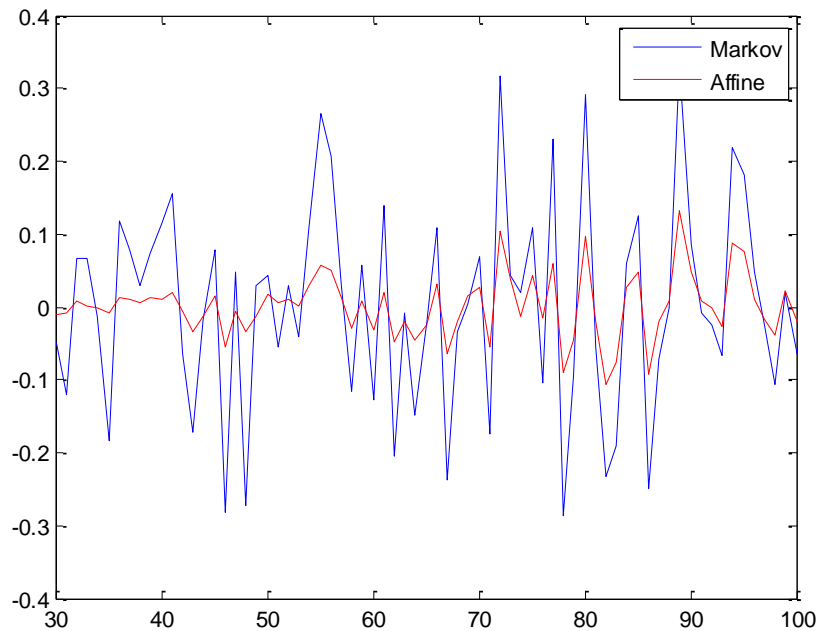


Figura 4.24. Seguimiento del Algoritmo Acelerador Versión γ ($AR\gamma$) en configuración *Affine* y Proceso de Markov con $\zeta = 1$

4.3 Comparación entre el Algoritmo Acelerador Versión γ ($AR\gamma$) en configuración *Affine* y el Algoritmo LMS en configuración *Affine*.

En el ítem 4.2 se ha descrito detalladamente el comportamiento que tiene el Algoritmo Acelerador Versión γ ($AR\gamma$) en configuración *Affine* con la variación de los diferentes parámetros $\mu_\lambda, \alpha, \gamma$ y m_1 . La figura 4.25 ilustra la configuración *Affine* con otro tipo de filtro como es el LMS permitiendo observar de forma simultánea el comportamiento de la configuración *Affine* tanto para el algoritmo LMS como el algoritmo Acelerador Versión γ ($AR\gamma$). Esta experiencia permite

obtener un error cuadrático medio para el Algoritmo acelerador de $1.3308e-032$ y para el algoritmo LMS de $1.9707e-032$ valores que resultan cercanos entre los dos Algoritmos, lo que permite concluir que el algoritmo Acelerador Versión γ ($AR\gamma$) tiene una velocidad de convergencia mayor al Algoritmo LMS en configuración *Affine*.

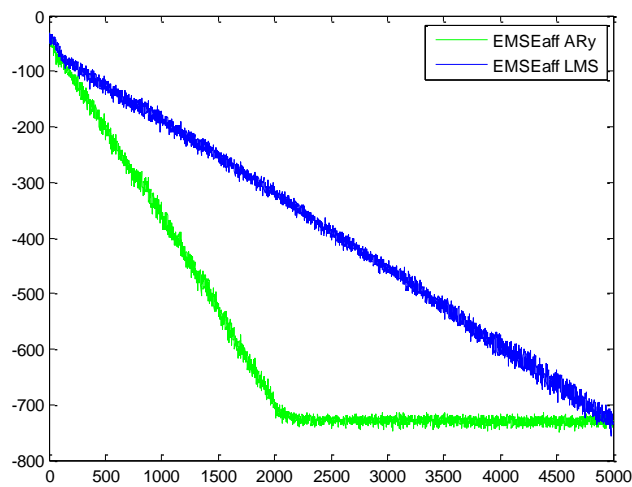


Figura. 4.25. Configuración Affine de los algoritmos Acelerador Versión γ ($AR\gamma$) y LMS.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos Futuros.

En términos generales *una señal* puede definirse como una función que contiene información acerca del estado o el comportamiento de un fenómeno o entidad física, dicha información varía con el tiempo, el espacio, ambos u otra variable o variables independientes. Al hacer aplicación de señales unidimensionales cuya variable independiente normalmente es el tiempo, como ocurre en el presente estudio, se admite que dicha variable n solo puede tomar valores enteros, es decir, en tiempo discreto y que se representan matemáticamente como secuencias $x(n)$, originadas como producto de un proceso de digitalización de una señal continua o directamente generadas en formato digital. Así mismo *un sistema adaptativo* es aquel cuya estructura es alterable o ajustable de tal forma que su desempeño mejore de acuerdo con algún criterio deseado a través de la exposición a un ambiente determinado. Los *filtros adaptativos* son estructuras ajustables que tienen la capacidad de cambiar su respuesta automáticamente para mejorar su desempeño y que se expresan básicamente como *algoritmos adaptativos*, de éstos depende la convergencia de los coeficientes de dichos filtros para lograr sus aplicaciones específicas; como ejemplo se describen los algoritmos LMS, NLMS, RLS y $AR\gamma$, los cuales permiten una interpretación y explicación elemental de la rápida adaptación de sus parámetros, que conducen a un modelo de comportamiento transitorio y en estado de equilibrio cuando dos algoritmos se combinan con el propósito de mejorar su rendimiento.

Para el efecto de la combinación de dos algoritmos, con el propósito de obtener un mejor rendimiento se lleva a cabo la utilización del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ (AR γ). Algoritmo descrito por Pablo Emilio Jojoa Gómez en 2003, que presenta como principal característica la disminución del número de parámetros de ajuste denominados: α , γ y m_1 , con una buena velocidad de convergencia y una considerable reducción del error de medida final. Al algoritmo anterior se le aplica la configuración *Affine* registrando el comportamiento que presenta por medio de parámetros como λ que es el parámetro que permite la combinación y se observa que al hacer uso del Algoritmo Acelerador versión γ (AR γ) en combinación *Affine* se logra una buena adaptabilidad mejorando características como velocidad, reducción del error de medida final; buena capacidad de seguimiento (tracking) como se observa en la figura 4.22 ($\zeta = 0.99$) y óptimos resultados en desajuste. El filtro combinado resultante tiende a comportarse como el mejor de los filtros, aliviando el compromiso entre la velocidad de convergencia y el error residual inherente al filtro.

Las características anteriormente descritas se evidencian en los registros obtenidos para las diferentes experiencias llevadas a cabo en el desarrollo del estudio. Así por ejemplo la experiencia 1 permite concluir que el algoritmo en cuestión frente a valores de μ_λ próximos a cero el error cuadrático medio aumenta sin presentar un comportamiento lineal (comportamiento presente en las cinco (5) experiencias realizadas) además se observa más lento para valores altos de μ (ver figura 4.2 con $\mu = 0.5$ y figura 4.3 con $\mu = 10$).

El Algoritmo Acelerador versión γ (AR γ) en combinación *Affine* se comporta como el más rápido frente a valores de $\mu_\lambda = 1, 5, 127$ (figura 4.13 experiencia 4; figura 4.10 y 4.17 experiencias 3 y 5; figura 4.8 experiencia 2) respectivamente.

Las experiencias realizadas permiten concluir igualmente que el comportamiento de λ puede tomar valores tanto positivos como negativos.

Al realizar la comparación entre el Algoritmo Acelerador versión γ (AR_{γ}) en combinación *Affine* y el algoritmo LMS también en configuración *Affine* (figura 4.25) con variación de los diferentes parámetros, se concluye que el algoritmo acelerador tiene una velocidad de convergencia mayor que el algoritmo LMS.

5.1 Trabajos Futuros

Realizar implementaciones con otras configuraciones de filtros adaptativos como por ejemplo la ecualización de canal incluyendo el efecto del ruido con diferentes SNR.

Investigar respecto al proceso de selección de las constantes del Algoritmo Acelerador Regresivo versión γ (AR_{γ}) en combinación *Affine* con base en las diferentes aplicaciones posibles de realizar.

Bibliografía

[Aboulnasr y Mayyas, (1997)] Aboulnasr, T. y Mayyas, K. (1997). A robust variable step-size LMS-type algorithm: analysis and simulations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45:631–639, Mar.

[Alcántara, (1886)] Alcántara R. (1986). *Implantation D'algorithmes Rapides Sur des Processeur de Traitement du Signal*. These de Docteur Ingenieur, ENST Paris, France.

[Andersson, (1985)] Andersson, P. (1985). Adaptive forgetting in recursive identification through multiple models. *International Journal of Control*, 42:1175–1193, Nov.

Arenas-Garcia, J. Gomez-Verdejo, V. Martinez-Ramon, M. y Figueiras-Vidal, A. R. (2003) Separate-variable adaptive combination of LMS adaptive filters for plant identification. In *Proc. 13th IEEE Int. Workshop Neural Networks Signals Processing*, Toulouse, France, pp. 239-248.

[Arenas-García and Figueiras-Vidal, 2005] Arenas-García, J. y Figueiras-Vidal, A. R. (2005). Adaptive combination of normalized filters for robust system identification. *Electronics Letters*, 41(15):874–875, Jul.

Arenas-García, J. y Figueiras-Vidal, A. R. (2006). Improved blind equalization via adaptive combination of constant modulus algorithms. In *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'06)*, volume III, pages 756–759. IEEE.

Arenas-García, J., Martínez-Ramón, M., Gómez-Verdejo, V. y Figueiras-Vidal, A. R. (2003). Multiple plant identifier via adaptive LMS convex combination. In *Proceedings of IEEE International Workshop on Intelligent Signal Processing*.

Arenas-García, J., Figueiras-Vidal, A. R. y Sayed, A. H. (2005a). Tracking properties of a convex combination of two adaptive filters. In *Proceedings of IEEE 13th Workshop on Statistical Signal Processing (SSP'05)*, pages 109–114. IEEE.

Arenas-García, J., Gómez-Verdejo, V. y Figueiras-Vidal, A. R. (2005b). New algorithms for improved adaptive convex combination of LMS transversal filters. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 54:2239–2249, Dec.

[Arenas-García et al., 2006a] Arenas-García, J., Figueiras-Vidal, A. R. y Sayed, A. H. (2006a). Mean-square performance of a convex combination of two adaptive filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54:1078–1090, Mar.

[Arenas-García et al., 2006b] Arenas-García, J., Martínez-Ramón, M., Navia-Vázquez, A. y Figueiras-Vidal, A. R. (2006b). Plant identification via adaptive combination of transversal filters. *Signal Processing*, 86:2430–2438, Sep.

[Azpicueta, 2011] Azpicueta, L. (2011) Aplicación de algoritmos combinados de filtrado adaptativo a acústica de salas. Tesis Doctoral. Universidad Carlos III. Leganes, España.

[Bermudez et al., 2008] Bermudez, J. Bershad, N. y Tournet, J. (2008). An *Affine* Combination of Two NLMS Adaptive Filters—Transient Mean-Square Analysis. In Proc of 42 Asilomar Conf. on Signals, Systems & Computers.

[Bershad et al., 2008] Bershad, N. Bermudez, J. y Tournet, J. (2008). An *Affine* Combination of Two LMS Adaptive Filters—Transient Mean-Square Analysis *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 5, Mayo.

[Bilcu et al., 2002] Bilcu, R. C., Kuosmanen, P. y Egiazarian, K. (2002). A transform domain LMS adaptive filter with variable step-size. *IEEE Signal Processing Letters*, 9:51–53, Feb.

[Bonzingo y Miller, 1980] Bonzingo, R. A.; Miller, T.W.(1980). *Introduction to Adaptive Arrays*, John Wiley and Sons. N.Y. 1980

[Candido y Nascimento., 2008] Candido, R. Silva, M. y Nascimento, V, (2008). *Affine Combinations of Adaptive Filters*.

[Escobar., 1997] Escobar S.L. (1997). Algoritmos de filtrado adapt able: Implementación, evaluación, comparación y aplicaciones en telecomunicaciones. Tesis de Maestría en Ingeniería Eléctrica, UNAM, México DF, noviembre.

[Gerken et al., 2000] Gerken, M.; Pait, F.; Jojoa P.E. (2000). An Adaptive Algorithm with Parameter Acceleration, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processings 2000. Istanbul, 2000. CASSP'2000*, CD-ROM.

[Hassibi et al., 1993a] Hassibi, B., Sayed, A. H. y Kailath, T. (1993). LMS is Optimal. In *Proc. Of the 32nd IEEE Conf. on Decision and control*, pages 74-80, San Antonio, TX.

[Hassibi et al., 1993b] Hassibi, B., Sayed, A. H. y Kailath, T. (1993). LMS is Optimality of the LMS Algorithm. *IEEE Trans. On signal Proc.*, 44:267-280.

[Haykin, 1991] Haykin S. (1991). *Adaptive Filter Theory*. Englewood Cliffs, NJ Prentice-Hall.

[Haykin, 2002] Haykin, S. (2002). *Adaptive Filter Theory*, 3a. Ed., Upper Saddle River, Prentice Hall, NJ, 4th edition.

[Hernández et al., 1991] Hernández R, Fernández C y Batista P. (1991) Metodología de la Investigación, Editorial Mc Graw-Hill, Capítulo 4, Definición de Tipo de Investigación a Realizar: Básicamente Exploratoria, Descriptiva, Correlacional o Explicativa. México.

[Iglesias, M., 2012] Iglesias M. (2012) Técnicas de Filtrado Adaptativo y Estadística de Orden Superior para la Implementación de Algoritmos de Cancelación de Ruido sobre una Arquitectura Reconfigurable. *Tesis de Maestría. Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" CUJAE. La Habana, Cuba.*

[Jojoa, 1999] Jojoa, P.E. (1999). Análise de Algoritmo Adaptativo que Ajusta a Diferença de Segunda Ordem dos Parâmetros, *Tesis de Maestrado. Escola Politécnica da Universidade de Sao Paulo, Brasil.*

[Jojoa 2003] Jojoa, P.E. (2003). Um Algoritmo Acelerador de Parâmetros, *Tesis de Doctorado. Escola Politécnica da Universidade de Sao Paulo, Brasil.*

[Kalman, 1960] Kalman, R. E. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Trans. ASME J. Basic Eng.*, 82:34–45.

[Kalman and Bucy, 1961] Kalman, R. E. and Bucy, R. S. (1961). New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *Trans. ASME J. Basic Eng.*, 83:95–107.

[Ketchum y Proakis., 1982] Ketchum, J. W. y Proakis, J. G. (1982) Adaptive Algorithms for Estimating and Suppressing Narrow-Band Interference in PN

Spread-Spectrum Systems, IEEE Trans. Communications, Vol. COM-30, págs.913-923, mayo.

[Kwong y Johnston., 1992] Kwong, R. H. y Johnston, E. W. (1992). A variable step size LMS algorithm. IEEE Transactions on Signal Processing, 40:1633–1642, Jul.

LCNW (2010)., Laboratorio de Computación Nikolaus Walczuch, *Modelos para el Desarrollo, Universidad de Los Andes*, Disponible en: http://sistemas.ing.ula.ve/pr2/unidad_1/unidad_1_parte2.html, [accedido el 16 de septiembre de 2010]

[Levinson, 1947] Levinson, N. (1947). The Wiener RMS Error Criterion in Filter Design and Prediction. Journal of Mathematics and Physics, 25.

[Lopes and Sayed, 2008] Lopes, C. and Sayed, A. (2008). Diffusion Least-Mean Squares Over Adaptive Networks: Formulation and Performance Analysis. IEEE Trans. on Signal Proc., 56:3122 – 3136.

[Mandic et al., 2007] Mandic, D., Vayanos, P., Boukis, C., Jelfs, B., Goh, S. L., Gautama, T., and Rutkowski, T. (2007). Collaborative Adaptive Learning using Hybrid Filters. In Proc. of 2007 IEEE ICASSP, volume 3, pages 921 – 924, Honolulu, Hawaii.

[Manolakis, 2000] Manolakis, D. (2000). *Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering and Array Processing*, McGraw Hill, USA, 2000.

[Mulgrew y Cowan, 1996] B. Mulgrew,; C.F.N. Cowan, C.F.N. (1996). Adaptive Filters and Equalisers, *Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 1988*.

[Nascimento et al., 2010] Nascimento, V. H., Silva, M. T. M., Azpicueta-Ruiz, L. A., and Arenas-Garcia, J. (2010). On the Tracking Performance of Combinations of Least Mean Squares and Recursive Least Squares Adaptive Filters. In Proc. Of 2010 IEEE ICASSP, pages 3710 – 3713, Dallas, Texas.

[Niedźwiecki., 1990] Niedźwiecki, M. (1990). Identification of nonstationary stochastic systems using parallel estimation schemes. IEEE Transactions on Automatic Control, 35:329–334, Mar.

[Niedźwiecki., 1992] Niedźwiecki, M. (1992). Multiple-model approach to finite memory adaptive filtering. IEEE Transactions on Signal Processing, 40:470–473, Feb.

Nichols, H. E y Proakis, J. G. (1977) MLD and MSE Algorithms for Adaptive Detection of Digital Signals in the Presence of Interchannel Interference. IEEE Trans. Information Theory, Vol. IT-23, págs. 1.7.1-1.7.6, Hamilton, ON, Agosto.

[Oppenheim et al., 1996] Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., and Hamid, S. (1996). Signals and Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2nd edition.

[Pait, 1998] Pait, F. (1998). A Tuner that Accelerates Parameters, *Systems and Control Letters*, vol. 35, n.1, pp. 65-68,

[Picinbono., 1978] Picinbono, B. (1978) Adaptive Signal Processing for Detection and Communication, en *Communications Systems and Random Process Theory*, J. K. Skwirzynski, ed., Sijthoff en Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Países Bajos.

[Proakis y Manolakis., 2007] Proakis, J. G. y Manolakis, D. G. (2007) Tratamiento Digital de Señales, 4ed, Pearson Education S.A. Madrid.

[Realpe et al., 2007] Realpe, J. Romo, H. y Jojoa, P. (2007), Estudio del efecto de la Variación Temporal de Parámetros del Algoritmo Acelerador Regresivo Version γ . XII Simposio de Tratamiento de Señales, Imágenes y Visión Artificial. STSIVA.

[Realpe, J., 2009] Realpe, J, (2009) Estudio del efecto de la Variación Temporal de Parámetros del Algoritmo Acelerador Regresivo Version γ . Universidad del Cauca. Colombia.

[Sayed, 2003] Sayed, A. H. (2003). Fundamentals of Adaptive Filtering. Wiley, New York, NY.

[Silva and Nascimento, 2008] Silva, M. T. M. and Nascimento, V. H. (2008). Improving the Tracking Capability of Adaptive Filters via Convex Combination. IEEE Trans. on Signal Proc., 56:3137 – 3149.

[Tse y Viswanath., 2005] Tse David, Viswanath Pramod. (2005), Fundamentals of Wireless Communication, Cambridge University.

[Wiener, 1949] Wiener, N. (1949). Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, with Engineering Applications. MIT Press, Cambridge, MA.

[Wiener and Hopf, 1931] Wiener, N. and Hopf, E. (1931). On a Class of Singular Integral Equations. In Proc. Prussian Acad. Math. - Phys. Ser., page 696.

[Windrow y Stearns, 1985] Widrow, B.; Stearns, S. (1985). *Adaptive Signal Processing*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, USA, 1985.

[Windrow et al., 1967] Windrow, B. Mantey, P y Griffiths, L. J. (1967). Adaptive Antenna Systems. IEEE, vol. 55, Pag. 2143-2159, Diciembre.

[Zhang and Chambers, 2006] Zhang, Y. and Chambers, J. A. (2006). Convex Combination of Adaptive Filters for a Variable Tap-Length LMS Algorithm. IEEE Signal Proc. Letters, 13:628 – 631.

[Zhuang., 1998] Zhuang, W. (1998). RLS algorithm with variable forgetting factor for decision feedback equalizer over time-variant fading channels. Wireless Personal Communications, 8:15–29, Aug.