

**ANÁLISIS DE UN SISTEMA DE COMUNICACIONES CON CODIFICACIÓN  
GOLAY BASADO EN HARDWARE RECONFIGURABLE**



**Santiago Esteban Erazo Ruiz  
Andrés Osiris López Martínez**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES  
DEPARTAMENTO DE TELECOMUNICACIONES  
GRUPO I+D NUEVAS TECNOLOGÍAS EN TELECOMUNICACIONES – GNTT  
GRUPO DE RADIO E INALÁMBRICAS – GRIAL  
POPAYÁN  
2017**

**ANÁLISIS DE UN SISTEMA DE COMUNICACIONES CON CODIFICACIÓN  
GOLAY BASADO EN HARDWARE RECONFIGURABLE**



**Santiago Esteban Erazo Ruiz  
Andrés Osiris López Martínez**

**Trabajo de Grado presentado como requisito para obtener el título de  
Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones**

**Director  
MSc. Jesús Mauricio Ramírez Viáfara**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES  
DEPARTAMENTO DE TELECOMUNICACIONES  
GRUPO I+D NUEVAS TECNOLOGÍAS EN TELECOMUNICACIONES – GNTT  
GRUPO DE RADIO E INALÁMBRICAS – GRIAL  
POPAYÁN  
2017**

## TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
<b>OBJETIVO GENERAL.....</b>	<b>2</b>
<b>OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....</b>	<b>2</b>
<b>CAPÍTULO I .....</b>	<b>3</b>
<b>SISTEMAS DE COMUNICACIÓN DIGITAL .....</b>	<b>3</b>
1.1. COMPONENTES DE UN SISTEMA DE COMUNICACIÓN DIGITAL .....	3
1.2. MODULACIÓN DIGITAL .....	4
1.2.1. Modulación por Desplazamiento de Fase Cuaternaria .....	6
1.2.1.1. Modulador QPSK.....	7
1.3. CODIFICACIÓN .....	11
1.3.1. Códigos bloque lineal .....	13
1.3.2. Códigos Golay .....	14
1.3.3. Código Golay Extendido.....	15
1.3.4. Codificación Golay Extendida .....	15
1.3.5. Decodificación Golay Extendida .....	16
1.3.5.1. Cálculo del primer síndrome ( $s_1$ ) .....	17
1.3.5.2. Cálculo del segundo síndrome ( $s_2$ ) .....	19
1.4. PROBABILIDAD DE ERROR EN LA DECODIFICACIÓN .....	20
<b>CAPÍTULO II .....</b>	<b>23</b>
<b>SISTEMA DE COMUNICACIONES CON CODIFICACIÓN GOLAY SOBRE     HARDWARE RECONFIGURABLE.....</b>	<b>23</b>
2.1. DESCRIPCIÓN BÁSICA SOBRE HARDWARE RECONFIGURABLE .....	23
2.2. USRP® B210.....	24
2.3. DEFINICIÓN DE UN SISTEMA DE COMUNICACIONES BASADO EN HARDWARE RECONFIGURABLE.....	29
2.3.1. Definición del módulo transmisor .....	29
2.3.1.1. Sub módulo: Generador Binario .....	31
2.3.1.2. Sub módulo: Modulador QPSK. ....	34
2.3.1.3. Sub módulo: Filtro RC .....	34
2.3.1.4. Sub módulo: Módulo USRP®.....	35
2.3.2. Definición del módulo receptor.....	35
2.3.2.1. Sub módulo: Módulo USRP®.....	37
2.3.2.2. Sub módulo: Filtro RC .....	37
2.3.2.3. Sub módulo: Compensador .....	37
2.3.2.4. Sub módulo: Sincronizador.....	38
2.3.2.5. Sub módulo: Demodulador QPSK.....	38
2.3.2.6. Sub módulo: Decodificador.....	38

<b>CAPÍTULO III .....</b>	<b>39</b>
<b>SIMULACIÓN, IMPLEMENTACIÓN, PRUEBAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS .</b>	<b>39</b>
3.1. SELECCIÓN DE LA HERRAMIENTA DE SIMULACIÓN .....	39
3.2. DISEÑO Y EJECUCIÓN DE UN PLAN DE PRUEBAS .....	40
3.2.1. Definición del escenario de simulación .....	40
3.2.2. Definición del escenario de implementación .....	41
3.2.3. Definición de los casos de implementación .....	42
3.2.4. Definición de los parámetros físicos del sistema de comunicaciones .....	43
3.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	44
3.3.2.1. Primer caso de implementación: Frecuencia portadora en 2.5GHz .....	49
3.3.3. Segundo caso de implementación: Frecuencia portadora en 4.5GHz .....	54
<b>CAPÍTULO IV .....</b>	<b>60</b>
<b>CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS .....</b>	<b>60</b>
4.1. CONCLUSIONES .....	60
4.2. TRABAJOS FUTUROS .....	61
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>62</b>
<b>APÉNDICES .....</b>	<b>65</b>
APÉNDICE A. EJEMPLOS DE CODIFICACIÓN GOLAY EXTENDIDA .....	65
APÉNDICE B. DESCARGA E INSTALACIÓN DEL SDR Y EL UHD .....	84
APÉNDICE C. CALIBRACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE FRECUENCIA CON EL USRP® B210 .....	87
APÉNDICE D. ARCHIVOS DE MATLAB® PARA LA CODIFICACIÓN Y DECODIFICACIÓN EXTENDIDA .....	89
APÉNDICE E. ARCHIVOS DE COMPARACIÓN PARA ENCONTRAR EL NÚMERO DE BITS ERRADOS CON Y SIN CODIFICACIÓN .....	93
APÉNDICE F. TABLA GENERAL DE RESULTADOS OBTENIDOS PARA LOS DOS CASOS DE IMPLEMENTACIÓN .....	94

### LISTA DE TABLAS

Tabla 1.1. Alfabeto QPSK .....	7
Tabla 2.1. Especificaciones técnicas USRP® B210 .....	25
Tabla 3.1. Casos de Implementación .....	43
Tabla 3.2. Parámetros físicos .....	44
Tabla 3.3. Resultados sistema de comunicaciones con y sin codificación Golay con frecuencia portadora de 2.5GHz .....	53
Tabla 3.4. Resultados sistema de comunicaciones con y sin codificación Golay con frecuencia portadora de 4.5GHz .....	57

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1.1 Componentes de un sistema de comunicación digital .....	3
Figura 1.2. Modulador y demodulador digital .....	5
Figura 1.3. Constelación QPSK .....	7
Figura 1.4. Modulador QPSK .....	7
Figura 1.5. Canal de comunicaciones.....	8
Figura 1.6. Demodulador QPSK .....	9
Figura 1.7. Curva de desempeño teórica para la modulación QPSK, sin codificación. ....	11
Figura 1.8. Proceso de codificación .....	11
Figura 1.9 Clasificación de la codificación de canal .....	12
Figura 1.10. Periodo de bit del bloque sin codificar y codificado .....	13
Figura 1.11. Sistema de comunicaciones a nivel de bit .....	21
Figura 1.12. Curva de desempeño teórica de la modulación QPSK, con y sin codificación. .....	22
Figura 2.1. Vista panorámica USRP® B210 .....	25
Figura 2.2. Diagrama de bloques USRP® B210 .....	26
Figura 2.3. Diagrama canal de transmisión .....	27
Figura 2.4. Diagrama canal de recepción .....	28
Figura 2.5. Sistema de comunicaciones general.....	29
Figura 2.6. Diagrama real del módulo transmisor.....	30
Figura 2.7. Diagrama lógico del módulo transmisor general.....	30
Figura 2.8. Módulo generador binario .....	31
Figura 2.9. Palabra generada.....	32
Figura 2.10. Palabra codificada .....	32
Figura 2.11. Mensaje con periodo de T segundos .....	32
Figura 2.12. Polinomio Scramble .....	33
Figura 2.13. Trama de sincronización.....	33
Figura 2.14. Mensaje a enviar.....	33
Figura 2.15. Constelación QPSK y Mapeo Gray .....	34
Figura 2.16. Mensaje modulado.....	34
Figura 2.17. Mensaje filtrado.....	35
Figura 2.18. Diagrama real módulo receptor .....	36
Figura 2.19. Módulo receptor general.....	36
Figura 3.1. Escenario de simulación sin codificación Golay extendida .....	41
Figura 3.2. Escenario de simulación con codificación Golay extendida .....	41
Figura 3.3. Escenario de implementación.....	42
Figura 3.4. Sistema banda base con codificación Golay.....	45
Figura 3.5. Curva BER vs $E_b/N_0$ sistema banda base con Codificación Golay .....	46
Figura 3.6. Sistema banda base sin Codificación.....	47
Figura 3.7. Curva BER vs $E_b/N_0$ sistema banda base sin Codificación .....	47
Figura 3.8. Comparación Curva BER vs $E_b/N_0$ sistema banda base con y sin codificación Golay.....	48

Figura 3.9. Diagramas de constelación con frecuencia portadora de 2.5Ghz a distancias de 30cm, 50cm y 80cm entre el transmisor y el receptor .....	50
Figura 3.10. Espectro de la señal en transmisión.....	50
Figura 3.11. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 2.5GHz a 30cm de distancia entre el transmisor y el receptor.....	51
Figura 3.12. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 2.5GHz a 50cm de distancia entre el transmisor y el receptor.....	51
Figura 3.13. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 2.5GHz a 80cm de distancia entre el transmisor y el receptor.....	51
Figura 3.14. Diagrama del ojo en transmisión.....	52
Figura 3.15. Diagrama del ojo en recepción con frecuencia portadora de 2.5GHz.....	52
Figura 3.16. Curvas de desempeño BER vs distancia con frecuencia portadora de 2.5GHz.....	53
Figura 3.17 Diagramas de constelación con frecuencia portadora de 4.5Ghz a distancias de 30cm, 50cm y 80cm entre el transmisor y receptor .....	54
Figura 3.18. Espectro de la señal en transmisión.....	55
Figura 3.19. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 4.5GHz a 30cm de distancia entre el transmisor y el receptor .....	55
Figura 3.20. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 4.5GHz a 50cm de distancia entre el transmisor y el receptor .....	56
Figura 3.21. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 4.5GHz a 80cm de distancia entre el transmisor y el receptor .....	56
Figura 3.22. Diagrama del ojo en recepción con frecuencia portadora de 4.5GHz.....	57
Figura 3.23. Curvas de desempeño BER vs distancia a 4.5GHz .....	58
Figura 3.24. Gráficas de BER vs Distancia .....	59

### **LISTA DE FIGURAS DE APÉNDICES**

Figura B.1. Comando en la consola de Matlab® para descargar el SDR.....	84
Figura B.2. Selección paquete USRP® Radio.....	84
Figura B.3. Ingreso de la cuenta MathWorks para continuar con el proceso de instalación .....	85
Figura B.4. Proceso exitoso de instalación del SDR.....	85
Figura B.5. Link de descarga del UHD desde la página de Ettus.....	86
Figura B.6. Forma de actualizar el controlador UHD.....	86
Figura C.1. Modelo en transmisión para calcular la frecuencia de calibración.....	87
Figura C.2. Modelo en recepción para calcular la frecuencia de calibración.....	87
Figura C.3. Subsistema en el receptor para calcular el desplazamiento de la frecuencia .88	
Figura C.4. Bloque de configuración en recepción del USRP® B210 donde debe ir el valor del desplazamiento de la frecuencia.....	88

## LISTA DE ACRÓNIMOS

<b>ADC</b>	:	Analog Digital Converter, Conversor Análogo Digital.
<b>ALE</b>	:	Automatic Link Establishment, Establecimiento del Enlace Automático.
<b>AWGN</b>	:	Additive White Gaussian Noise, Ruido Blanco Aditivo Gaussiano.
<b>BER</b>	:	Bit Error Rate, Tasa de Error de Bit.
<b>BPSK</b>	:	Binary Phase Amplitude shift Keying, Modulación por Desplazamiento de Fase Binaria.
<b>DAC</b>	:	Digital Analog Converter, Conversor Digital Análogo.
<b>DSP</b>	:	Digital Signal Processor, Procesador Digital de Señal.
<b>DUC</b>	:	Digital UpConverter, Conversor Digital de Subida.
<b>DDC</b>	:	Digital DownConverter, Conversor Digital de Bajada.
<b>FPGA</b>	:	Field Programmable Gate Array, Arreglo de Compuertas Programables en Campo.
<b>GPS</b>	:	Global Positioning System, Sistema de Posicionamiento Global.
<b>ISI</b>	:	Intersymbol Interference, Interferencia Intersimbólica.
<b>JPL</b>	:	Jet Propulsion Laboratory, Laboratorio de Propulsión a Chorro.
<b>LNA</b>	:	Low Noise Amplifier, Amplificador de Bajo Ruido.
<b>PSK</b>	:	Phase shift Keying, Modulación por Desplazamiento de Fase.
<b>QPSK</b>	:	Quaternary Phase Shift Keying, Modulación Digital por Cambio de Fase Cuaternaria.
<b>RFIC</b>	:	Radio Frequency Integrated Circuit, Circuito de Radio Frecuencia.
<b>SDR</b>	:	Software Defined Radio, Radio Definido por Software.
<b>SER</b>	:	Symbol Error Rate, Tasa de Error de Símbolos.
<b>SNR</b>	:	Signal to Noise Ratio, Relación Señal a Ruido.
<b>SR-RCF</b>	:	Square Root Raised Cosine Filter, Filtro en Raíz Cuadrada de Coseno Alzado.

- UHD** : USRP Hardware Driver, Controlador de Hardware USRP.
- USB** : Universal Serial Bus, Bus Universal en serie.
- USRP** : Universal Software Radio Peripheral, Periférico Universal de Radio Software.



# INTRODUCCIÓN

Los sistemas de comunicaciones desde sus inicios han sido un elemento importante para la vida del ser humano, desde guerras, seguridad, exploraciones espaciales, telemedicina hasta entretenimiento del hogar, ya que cada vez se puede transmitir más información<sup>1</sup> en menor tiempo y en diferentes formatos como voz, datos, imágenes y video, razón por la cual, estos sistemas están en constante proceso de investigación y desarrollo, con el fin de encontrar técnicas y metodologías que permitan aumentar el desempeño de cada componente que lo conforma [1]. Existen dos posibles tipos de comunicaciones; digitales o analógicas, la principal diferencia entre ellas es que en la primera el emisor sólo tiene un conjunto finito y discreto de formas de onda<sup>2</sup>, las cuales tienen que hacerse coincidir con los bits por transmitir, mientras que en la segunda el número de posibles formas de onda por enviar es infinito. Además se debe mencionar un factor importante de la comunicación digital y es que ésta permite realizar con mayor facilidad y precisión la regeneración de las señales<sup>3</sup>. También se debe considerar que los procesos en las comunicaciones digitales se realizan independientemente del tipo de información a transmitir, de ahí la importancia de la migración hacia las comunicaciones digitales.

En un sistema de comunicaciones son de gran importancia los procesos de codificación y modulación, los cuales garantizan el envío de la información de una forma confiable y adecuada a través de un canal de comunicaciones, para que en el receptor se pueda recuperar el mensaje enviado con la mínima tasa de errores posible [2]. En el presente trabajo de grado se analiza un sistema de comunicaciones, empleando Modulación Digital por Cambio de Fase Cuaternaria (QPSK, *Quaternary Phase Shift Keying*) y Codificación Golay, la cual permite detectar y corregir hasta 3 errores por palabra código y algunas variantes como la codificación Golay extendida, llega a detectar hasta 4 errores por palabra código [3], lo cual es ideal cuando se tiene un canal propenso al ruido aleatorio, como es el espacio libre.

El presente documento consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo se presentan las generalidades teóricas de los sistemas de comunicación digital con modulación QPSK y codificación Golay. En el segundo capítulo se abordan las generalidades del hardware reconfigurable, el diseño de un sistema de comunicación digital con modulación QPSK y codificación Golay en un canal con Ruido Blanco Gaussiano Aditivo (AWGN, *Additive White Gaussian Noise*). En el capítulo tercero se muestra la implementación del sistema de comunicaciones sobre hardware reconfigurable, las pruebas realizadas y el análisis de los resultados. Finalmente en el capítulo cuarto se dan las conclusiones y propuestas de trabajos futuros.

---

<sup>1</sup> Información: se define información como el conocimiento o las señales inteligentes o recibidos [19].

<sup>2</sup> La forma de onda es la forma de una señal en el dominio del tiempo, una representación visual o gráfica del valor instantáneo de la señal, trazado contra el tiempo.

<sup>3</sup> Señal: cantidad física que varía con respecto a una o más variables independientes. Estas contienen información de la naturaleza o comportamiento de algún fenómeno [19].

A continuación se presenta el objetivo general y los objetivos específicos planteados en el presente trabajo de grado:

### **OBJETIVO GENERAL**

Analizar el desempeño a nivel físico, de un sistema de comunicaciones basado en hardware reconfigurable que emplee codificación Golay.

### **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Estudiar las características de la codificación Golay en un sistema de comunicaciones.
- Implementar<sup>4</sup>, sobre hardware reconfigurable, un sistema de comunicaciones banda base con codificación Golay y un modelo de canal AWGN.
- Evaluar el desempeño del sistema de comunicaciones con codificación Golay sobre hardware reconfigurable con modelo de canal AWGN.

---

<sup>4</sup> Implementar: proceso de ejecutar una decisión o plan [19].

# CAPÍTULO I

## SISTEMAS DE COMUNICACIÓN DIGITAL

### 1.1. COMPONENTES DE UN SISTEMA DE COMUNICACIÓN DIGITAL

El objetivo de los sistemas de comunicación digital es enviar información desde una fuente emisora hasta un destino final, de manera que los datos recibidos en el destino sean los mismos que la fuente emisora envió [4]. Pero, dado que la fuente y el destino se encuentran separados físicamente entre sí, la información recibida puede llegar con errores, los cuales son provocados por interferencias y contaminaciones del entorno que rodean al sistema de comunicaciones [5].

En la figura 1.1 se muestran los elementos necesarios en un sistema de comunicación digital para que éste garantice una mínima cantidad de errores en el destino.

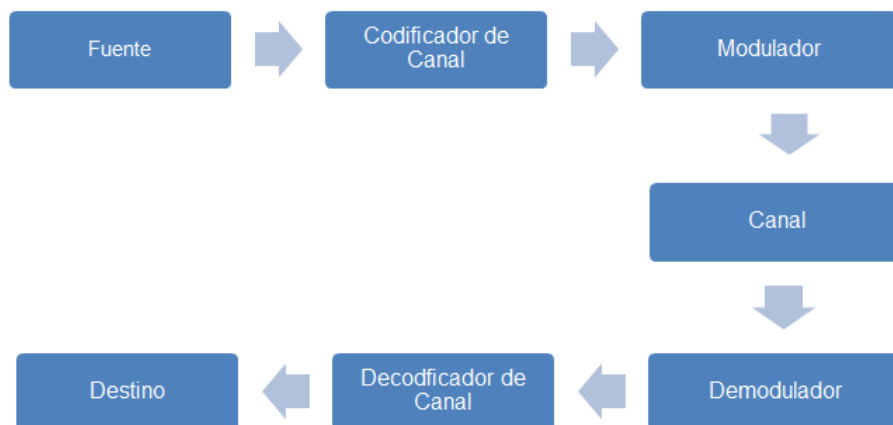


Figura 1.1 Componentes de un sistema de comunicación digital

Cada componente del sistema realiza una función específica; a continuación se describe cada uno de ellos:

- **Fuente:** Se encarga de generar la información a transmitir, la cual se representa como una secuencia de símbolos estadísticamente independientes, pertenecientes a un alfabeto finito discreto cuyo significado es conocido en el destino [5].
- **Codificador de canal:** Elemento que realiza una técnica conocida como codificación de canal o de control de errores, esta permite minimizar los bits erróneos en el receptor, para esto el codificador genera secuencias de bits con redundancia estructurada de información a partir de unos códigos generadores, la redundancia agregada a la información original permite que el receptor detecte y en algunos casos corrija errores presentes en la información recibida [5].

- **Modulador:** Se encarga de adaptar la secuencia de bits que salen del codificador, transformándolos en una forma de onda adecuada a las características del canal de comunicaciones. Esta adaptación se puede realizar con o sin traslación del espectro original de la salida del codificador [5].
- **Canal:** Es el medio por el cual la información viaja desde el origen hacia su destino, este medio puede ser cableado, óptico o el espacio libre. Una característica del canal de comunicaciones es que la señal sufre contaminaciones, de ahí la necesidad de la robustez en la codificación y/o en la modulación [5].
- **Demodulador:** Se encarga del proceso complementario al modulador. Para recuperar la información enviada es necesario reconstruir la secuencia de símbolos a partir de la forma de onda recibida (contaminada por ruido) y así obtener una réplica de la secuencia de bits original [5].
- **Decodificador:** En este bloque se realiza el proceso de decodificación, que es complementario al de codificación y se encarga de aprovechar la redundancia estructurada que se adicionó a la información, para que mediante una serie de procesos se detecten los posibles errores y en el mejor de los casos se corrijan [5].
- **Destino:** Componente final en el cual se recupera la información transmitida con la mayor fidelidad posible, para esto se cuenta con un parámetro de calidad, en el cual se tiene la relación de la cantidad de bits errados sobre el número total de bits transmitidos, este parámetro se denomina la Tasa de Error de Bit (BER, *Bit Error Rate*), entre más bajo sea este valor, mayor será la calidad del sistema de comunicaciones [5].

## 1.2. MODULACIÓN DIGITAL

La modulación digital es un proceso que convierte una secuencia de bits en una señal, cuya forma de onda permita ser transmitida adecuadamente sobre un canal de comunicaciones ruidoso y posteriormente a partir de la forma de onda recibida obtener una réplica de la información enviada [5].

El proceso de modulación se lleva a cabo mediante un modulador y un demodulador como se muestra en la figura 1.2, el objetivo de la modulación es lograr transmitir un mensaje binario a la mayor velocidad de bit, ocupando el menor ancho de banda posible, y que en el destino se reciba la información con la menor cantidad posible de errores.

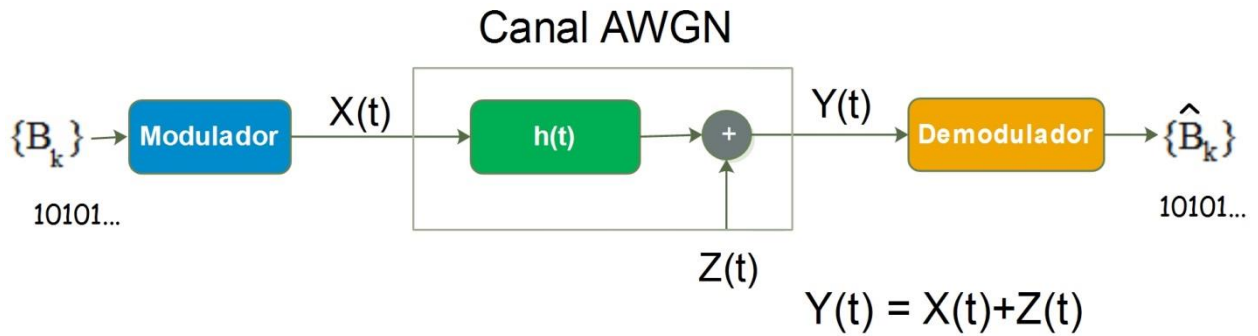


Figura 1.2. Modulador y demodulador digital

Donde,

$\{B_k\}$ , Mensaje binario  $B_k \in \{0,1\}$ .

$X(t)$ , Señal modulada (proceso aleatorio).

$Z(t)$ , Proceso de ruido blanco aditivo Gaussiano (AWGN) con densidad espectral de potencia  $\frac{N_0}{2}$ .

$Y(t)$ , Señal modulada contaminada con ruido en la salida del canal.

$h(t)$ , Respuesta del canal al impulso.

$\{\hat{B}_k\}$ , Mensaje binario recibido o estimado.

Teniendo en cuenta que uno de los objetivos de la modulación es transmitir información con el menor ancho de banda posible, se define un factor llamado eficiencia espectral [6], el cual es el cociente entre la velocidad de transmisión en bits por segundo [bps] y el ancho de banda de la señal modulada  $X(t)$  en Hertz [Hz], como se indica en la ecuación 1.1, donde se observa que la relación  $\frac{R_b}{B}$  debe ser lo más grande posible para hacer un uso eficiente del espectro.

$$\rho = \frac{R_b}{B} \quad \left[ \frac{\text{bps}}{\text{Hz}} \right] \quad (1.1)$$

Donde,

$B$ , Ancho de banda de la señal modulada [Hz].

$R_b$ , Tasa de bit - velocidad de bit [b/s].

Debido a que en el demodulador se desea la menor cantidad de errores, se introduce el concepto de probabilidad de error de bit  $P_b$ , como la probabilidad de detectar erróneamente un bit en un instante de tiempo  $k$ , pero si el mensaje binario  $\{B_k\}$  es una secuencia independiente e idénticamente distribuida, esta probabilidad se puede estimar mediante la BER definida por la ecuación 1.2.

$$\text{BER} = \frac{\# \text{ de bits detectados erróneamente}}{\# \text{ de bits transmitidos}} \quad (1.2)$$

Por tanto, con la introducción de estos dos conceptos se tiene que el objetivo en la modulación es maximizar la eficiencia espectral  $\rho$  y minimizar la tasa de error de bit (BER).

La modulación digital se clasifica, según la cantidad de estados<sup>5</sup> de la constelación, en dos tipos:

- Modulación binaria: La constelación sólo tiene dos estados, es decir se tiene un bit por símbolo, lo cual indica que la eficiencia espectral es baja.
- Modulación multinivel: En esta modulación se tienen M posibles estados, presentando así una mayor eficiencia espectral que la modulación binaria.

$$m = \log_2(M) \quad (1.3)$$

Donde,

m, Número de bits por símbolo.

M, Número de símbolos de la constelación, siempre es una potencia entera de dos.

Teniendo en cuenta esta clasificación, en el presente trabajo de grado se implementa una modulación multinivel PSK cuaternaria, dado su eficiencia espectral y protección frente al ruido, a continuación se realiza la descripción detallada de ésta [7].

### 1.2.1. Modulación por Desplazamiento de Fase Cuaternaria

La modulación QPSK consiste en transmitir sinusoides con cuatro posibles fases. Cada fase se representa con un número complejo conocido como símbolo, ubicado sobre una circunferencia de radio  $\lambda$ . La constelación está formada por cuatro puntos uniformemente espaciados utilizando un mapeo Gray como se ilustra en el diagrama de constelación de la figura 1.3. Como hay cuatro símbolos, cada uno de ellos contiene dos bits de información.

En la tabla 1.1 se describe la ubicación de cada símbolo en la constelación según los bits a modular.

---

<sup>5</sup> En la modulación digital, la cantidad de estados indican el número posible de símbolos con que se representara la información.

$B_i$	$S_k$
00	$\lambda e^{\frac{j5\pi}{4}}$
01	$\lambda e^{\frac{j3\pi}{4}}$
11	$\lambda e^{\frac{j\pi}{4}}$
10	$\lambda e^{\frac{j7\pi}{4}}$

Tabla 1.1. Alfabeto QPSK

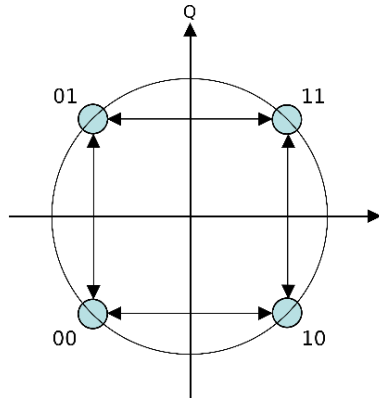


Figura 1.3. Constelación QPSK

### 1.2.1.1. Modulador QPSK

En la figura 1.4 se muestra el modulador QPSK mediante un diagrama de bloques, en donde se llama mapeo al proceso de asignar dos bits a un símbolo. La señal modulada  $X(t)$  en QPSK expresada en el dominio del tiempo se describe en la ecuación 1.4.

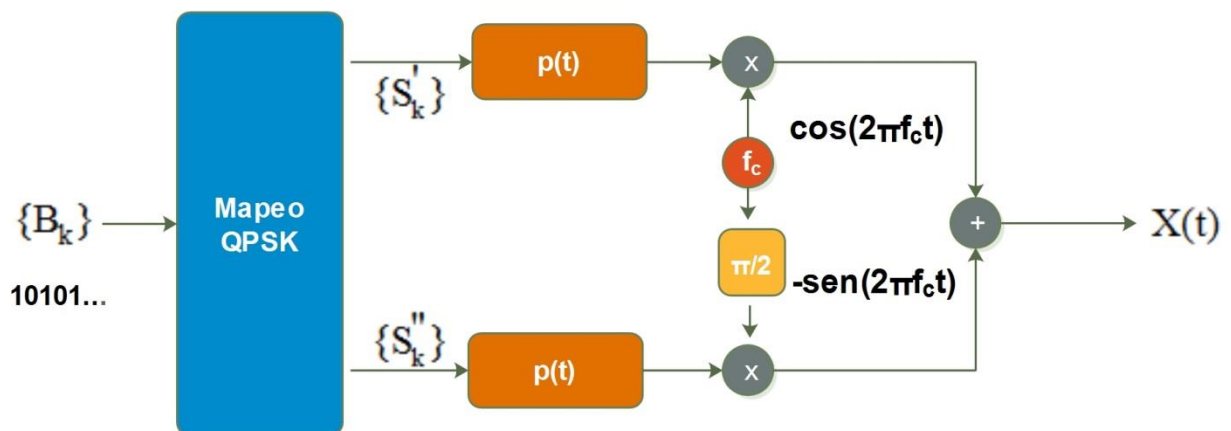


Figura 1.4. Modulador QPSK

$$X(t) = \cos(2\pi f_c t) \sum_k S'_k p(t - kT) - \text{sen}(2\pi f_c t) \sum_k S''_k p(t - kT) \quad (1.4)$$

Con  $S'_k = \lambda \cos \theta_k$ ,  $S''_k = \lambda \text{sen} \theta_k$ ,  $|S_k| = \lambda$ , y  $\theta_k \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

Donde,

$\{B_k\}$ , Mensaje binario  $B_k \in \{0,1\}$ .

$p(t)$ , Filtro conformador.

El ancho de banda ocupado por la señal modulada está definido por la ecuación 1.5.

$$B = B_w\{X(t)\} = 2B_w\{p(t)\} \quad (1.5)$$

Si el filtro conformador es de tipo Filtro en Raíz Cuadrada de Coseno Alzado (SR-RCF, *Square Root Raised Cosine Filter*), el ancho de banda de transmisión es como lo indica la ecuación 1.6.

$$B = 2 \frac{1}{2T} (1+\alpha) = R(1+\alpha) = \frac{R_b(1+\alpha)}{\log_2 M} = \frac{R_b(1+\alpha)}{2} \quad (1.6)$$

Donde,

T, Periodo de bit.

$\alpha$ , Factor de exceso de ancho de banda o factor de ondulación (en inglés Roll-off factor), esta constante toma valores en el rango  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

R, Tasa de bit en símbolos por segundo.

$R_b$ , Tasa de bit en bits por segundo.

M, Número de niveles de la modulación.

Al salir la señal  $X(t)$  del modulador, ésta ingresa al canal de comunicaciones, donde se contamina por ruido  $Z(t)$ , este proceso se describe en la figura 1.5, pero si el canal es no distorsivo, es decir si la respuesta impulsiva  $h(t)$  del canal es igual a  $\delta(t)$ , entonces la señal a la salida del canal está definida por la ecuación 1.7.

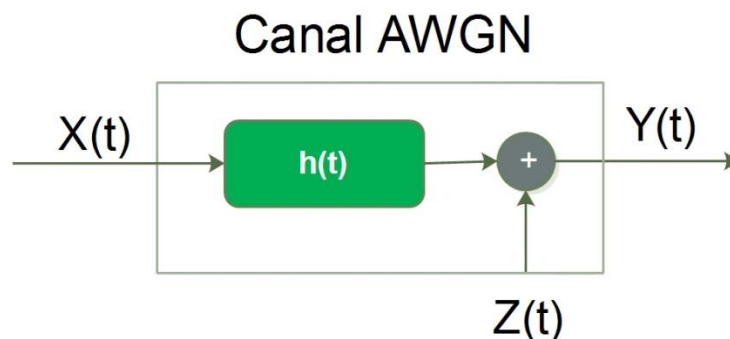


Figura 1.5. Canal de comunicaciones

$$Y(t) = X(t) + Z(t) \quad (1.7)$$



### 1.2.1.2. Demodulador QPSK

En la figura 1.6 se muestra el diagrama en bloques de un demodulador QPSK, cuyo objetivo es estimar el mensaje  $\hat{B}_i$ , a partir de la señal ruidosa  $Y(t)$ .

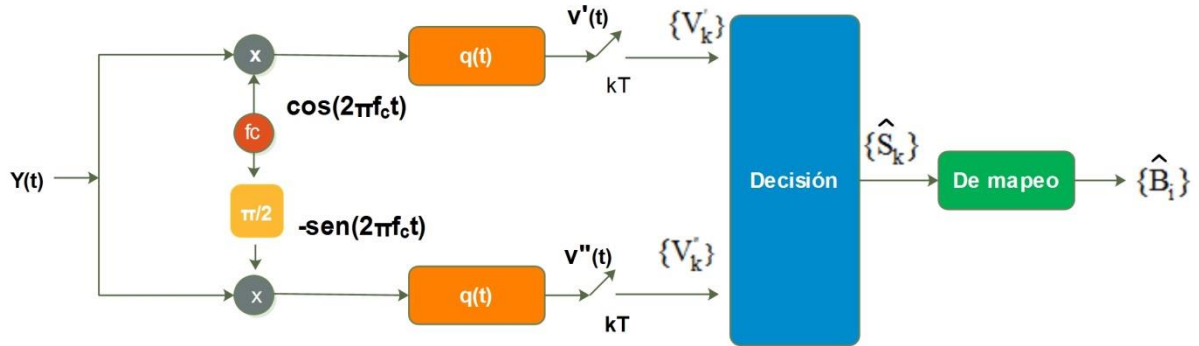


Figura 1.6. Demodulador QPSK

En la salida del filtro  $q(t)$  cuyo propósito es limitar el efecto del ruido en la señal  $Y(t)$ , además de conformar adecuadamente los pulsos para optimizar los procesos de decisión y demapeo, se tiene la señal  $V'(t)$ , la cual está definida por la ecuación 1.8.

$$V'(t) = [Y(t) \cos(2\pi f_c t) * q(t)] \quad (1.8)$$

Aplicando la ecuación 1.7 se obtiene:

$$V'(t) = [(X(t) + Z(t)) \cos(2\pi f_c t) * q(t)] \quad (1.9)$$

Por lo tanto la señal  $V(t)$  queda expresada por la ecuación 1.10 y 1.11.

$$V(t) = V'(t) + jV''(t) \quad (1.10)$$

$$V(t) = \sum_k S_k g(t - kT) + W(t) \quad (1.11)$$

Donde,

$$g(t) = p(t) * h(t) * q(t).$$

$$W(t) = W'(t) + jW''(t), \text{ Ruido AWGN complejo filtrado}$$

$$W'(t), W''(t) \text{ son iid} \sim N(0, \sigma^2), \text{ con } \sigma^2 = \frac{N_0}{2}$$

Una vez la señal es filtrada, se muestrea periódicamente cada  $T$  segundos, obteniendo antes del decisor una secuencia de muestras  $V_k$  descrita en la ecuación 1.12.

$$V_k = V'_k + jV''_k = V(t_0 + kT), k \in \mathbb{Z} \quad (1.12)$$

Si los filtros de transmisión y recepción se diseñan para eliminar la Interferencia Intersimbólica (ISI, *Intersymbol Interference*), entonces la señal en la entrada del decisor será descrita como en la ecuación 1.14.

$$V_k = S_k + W_k \quad (1.13)$$

Donde,

$$W_k = W'_k + jW''_k: \text{iid} \sim N(0, \sigma^2) \quad (1.14)$$

La ecuación 1.14 corresponde al modelo de canal AWGN equivalente en tiempo discreto.

Una vez definida la señal de entrada al bloque decisor, se aplica un criterio para cuantificar la secuencia  $\{V_k\}$ , según el alfabeto  $\mathcal{A}$  de la modulación QPSK. El criterio de cuantificación para el presente trabajo de grado es el de distancia mínima, el cual consiste en asociar cada muestra  $V_k$  con el elemento geoméricamente más cercano. Por tanto la señal a la salida del decisor es  $\hat{S}_k$ , definida por la ecuación 1.15.

$$\text{argmin}_{S \in \mathcal{A}} [|U_k - S|] \quad (1.15)$$

Donde,

$U_k$ , Símbolo recibido por el demodulador.

$S$ , Símbolo transmitido más cercano a  $U_k$ .

En esta etapa se define la probabilidad de error de símbolo  $P_s$ , y la Tasa de Error de Símbolos (SER, *Symbol Error Rate*) expresadas por la ecuación 1.16 y 1.17.

$$P_s = \Pr\{\hat{S}_k \neq S_k\}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.16)$$

$$\text{SER} = \frac{\# \text{ de símbolos detectados erróneamente}}{\# \text{ de símbolos transmitidos}} \quad (1.17)$$

Finalmente se procede a realizar el demapeo de los símbolos recibidos, obteniendo una secuencia estimada  $\hat{B}_i$  del mensaje binario, definida por la ecuación 1.18.

$$\hat{B}_i = \text{demap}\{\hat{S}_k\} \quad (1.18)$$

La probabilidad de error de bit teórica del esquema QPSK  $P_b$  se muestra en la ecuación 1.19.

$$P_b \cong Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (1.19)$$

Donde,

$E_b$ , Energía de bit.

$N_0$ , Densidad espectral de potencia de Ruido.

De la ecuación 1.19, se puede obtener la gráfica 1.7 en escala logarítmica, en la cual se puede observar la curva de desempeño teórica para la modulación QPSK.

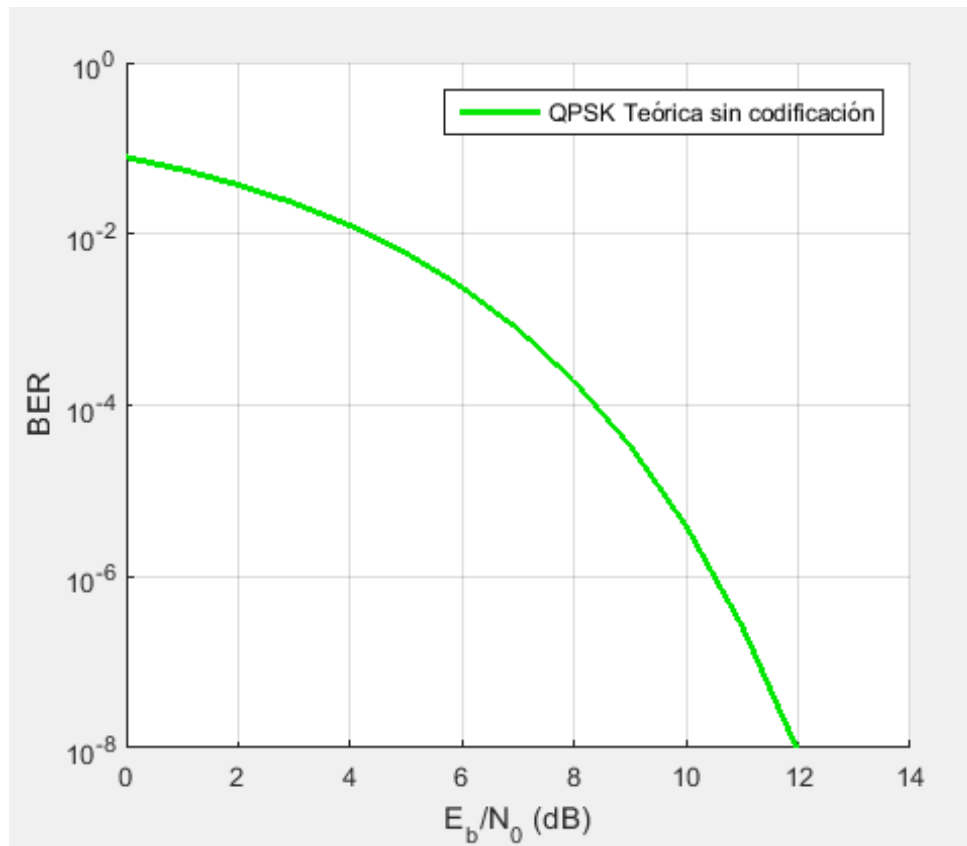


Figura 1.7. Curva de desempeño teórica para la modulación QPSK, sin codificación.

### 1.3. CODIFICACIÓN

La codificación es el proceso mediante el cual se obtiene una señal digital a partir de una señal analógica, para esto es necesario que la señal analógica pase por tres fases bien diferenciadas [8], las cuales se pueden observar en la figura 1.8.



Figura 1.8. Proceso de codificación

Cada bloque se encarga de una tarea específica, la cual se explica a continuación:

La señal analógica ingresa al muestreador, donde se toman una cantidad de muestras de amplitud cada segundo, luego estas muestras son evaluadas y se les asigna uno de los

niveles disponibles para cuantificar, y finalmente las muestras cuantificadas son representadas con unos y ceros en el codificador.

Existen dos tipos de codificación, las cuales se describen a continuación:

- **Codificación de fuente:** Es la encargada de digitalizar la señal analógica y trata de representar la información de la fuente con la mínima cantidad de bits posible, lo cual requiere una compresión de la información. Para efectuar esta tarea el codificador de fuente elimina la redundancia presente en la señal de entrada.
- **Codificación de canal:** Esta codificación añade redundancia estructurada de manera intencionada para proteger los bits a la salida de la fuente de información o del codificador de fuente de los errores originados por el canal. En el presente trabajo de grado se hará énfasis en este tipo de codificación ya que permite reducir la probabilidad de error de bits en la detección, sin necesidad de aumentar la relación de energía de bit a densidad de ruido  $\frac{E_b}{N_0}$ . La codificación de canal se clasifica como se describe en la figura 1.9.

Para el presente trabajo de grado se lleva a cabo con un código bloque lineal cíclico ya que permite corrección y detección de errores en tiempo real sin necesidad de retransmisión, además que para su generación sólo se necesita de un polinomio.

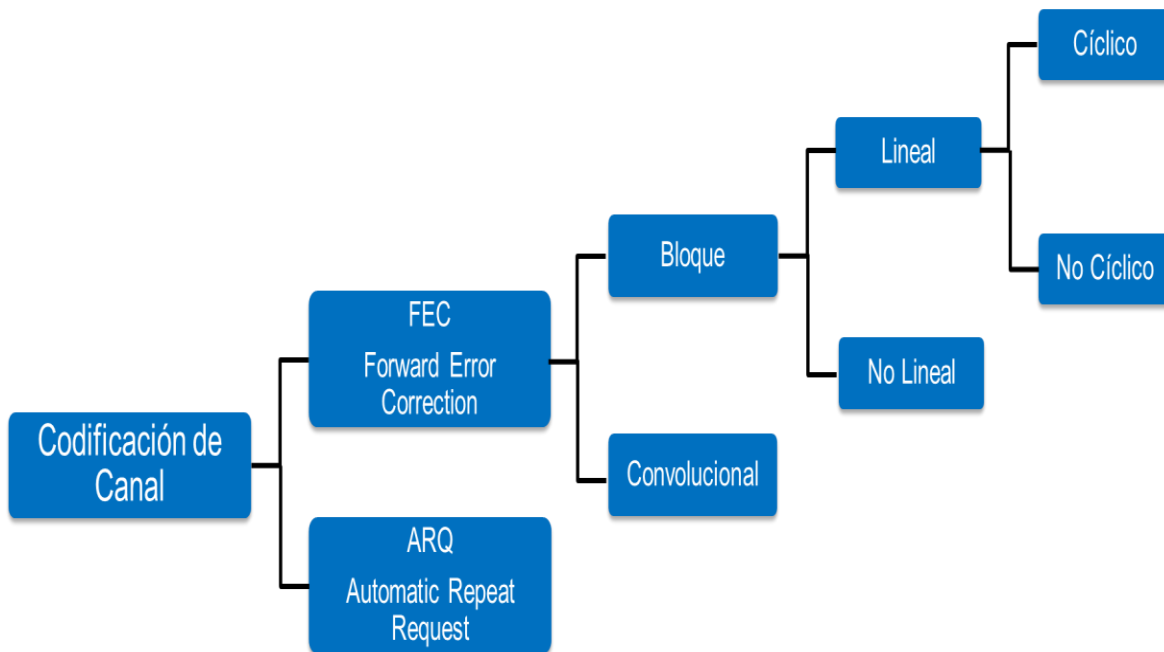


Figura 1.9 Clasificación de la codificación de canal

### 1.3.1. Códigos bloque lineal

Este código segmenta la información de una fuente binaria (mensaje binario) en bloques de  $k$  bits, generando por cada bloque una palabra código de  $n$  bits, teniendo en cuenta que  $n$  es mayor que  $k$  y que ambos son números enteros, por tanto se agrega  $n - k$  bits de redundancia por cada bloque. Este proceso se ilustra en la figura 1.8, donde  $T_b$  corresponde al periodo de bit del mensaje binario y  $T_c$  el periodo de bit de la secuencia codificada.

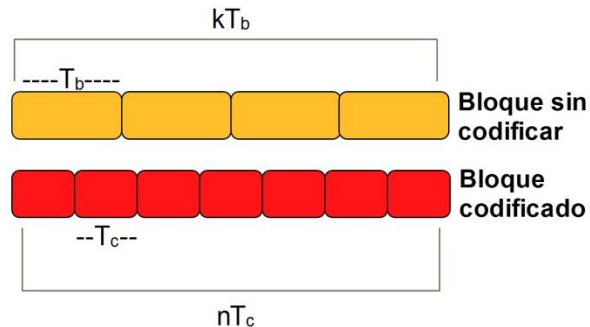


Figura 1.10. Periodo de bit del bloque sin codificar y codificado

Teniendo en cuenta el periodo de bit del mensaje binario, la tasa de bit de la palabra codificada  $R_c$ , está dada por la ecuación 1.20.

$$R_c = \frac{n}{k} \frac{1}{T_b} = \frac{n}{k} R_b \text{ [bps]} \quad (1.20)$$

Donde,

$R_b$ , Tasa de bit del mensaje binario.

A continuación se presentan dos características importantes de los códigos bloque:

- Un código bloque  $(n, k)$  se dice que es lineal si y sólo si, la suma módulo 2 de dos palabras código, da como resultado otra palabra código (propiedad clausurativa), además la palabra código en la que todas sus posiciones son cero pertenece al código.
- Un código bloque lineal  $(n, k)$  se dice que es cíclico si cualquier corrimiento de los bits de una palabra código, genera otra palabra código válida (propiedad cíclica).

Teniendo en cuenta las características de los códigos bloques lineales y cíclicos, muchos investigadores han desarrollado variantes de estos códigos, tales como: códigos de Hamming, de Hamming extendidos, simplex, de Reed-Muller, de Reed - Solomon, de residuos cuadráticos, de Goppa geométricos, de Golay y de Golay Extendidos. Para el presente trabajo de grado se realiza un enfoque en este último código, ya que es un

código altamente utilizado en sistemas satelitales, entre otras aplicaciones, dada su gran capacidad de corregir errores.

### 1.3.2. Códigos Golay

El código Golay debe su nombre al matemático Suizo Marcel J.E. Golay (1902 - 1989). Quien utilizó las matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana, entre ellos codificar mensajes. La característica más relevante del código Golay es la posibilidad de corregir hasta tres errores por palabra de código y en algunas variantes como la versión extendida, puede incluso detectar cuatro errores por palabra de código. Una de sus principales aplicaciones es la corrección de fenómenos de error de dirección [9]. Actualmente, los códigos Golay están siendo usados en sistemas de alta frecuencia como el actual estándar estadounidense para el Establecimiento del Enlace Automático (ALE, *Automatic Link Establishment*) [10], en la red de espacio profundo de la NASA administrado por el Laboratorio de Propulsión a Chorro (JPL, *Jet Propulsion Laboratory*), en imágenes de ultrasonido y una de sus principales aplicaciones tuvo lugar en las fotografías tomadas a Júpiter y Saturno, por la sonda espacial Voyager a principios de los años ochenta, entre otras aplicaciones [11].

Los códigos Golay tienen la forma  $G_n[n, k, d]$  donde  $n$  representa la longitud de la palabra código,  $k$  la cantidad de bits del bloque mensaje y  $d$  la distancia mínima de Hamming<sup>6</sup>. Dentro de estos códigos existe una versión llamada binaria, que maneja dos bits y cuyas representaciones son  $G_{23}[23, 12, 7]$  y  $G_{24}[24, 12, 8]$ , las cuales tienen las matrices de coeficientes  $P_{23}$  y  $P_{24}$  expresadas por las ecuaciones 1.21 y 1.22 respectivamente.

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

El código binario Golay  $G_{23}[23, 12, 7]$  es un código bloque, lineal, cíclico perfecto<sup>7</sup>, el cual puede ser generado por los polinomios  $g(x) = X^{11} + X^{10} + X^6 + X^5 + X^4 + X^2 + 1$  y  $g(x) = X^{11} + X^9 + X^7 + X^6 + X^5 + X + 1$ .

<sup>6</sup>La distancia Hamming, es el número de posiciones en que difieren dos palabras código.

<sup>7</sup>Un código  $[n, k, d]$  es perfecto si y sólo si es impar y cumple la cota de Hamming.

### 1.3.3. Código Golay Extendido

El código Golay extendido  $G_{24}[24, 12, 8]$  es un código obtenido a partir del código Golay perfecto  $G_{23}$  adicionando un bit de paridad [12]. Este presenta la matriz de coeficientes  $P_{24}$ , de doce filas por doce columnas, expresada por la ecuación 1.22.

$$P_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

### 1.3.4. Codificación Golay Extendida

La codificación Golay extendida se realiza como una multiplicación matricial entre el vector mensaje ( $\mathbf{m}$ ) de doce bits y la matriz generadora ( $\mathbf{G}$ ), cuyo resultado es el vector codificado ( $\mathbf{c}$ ) [12], como se muestra en la ecuación 1.23.

$$\mathbf{c} = \mathbf{mG} \quad (1.23)$$

Donde  $\mathbf{G}$  esta definida por la ecuación 1.24.

$$\mathbf{G}_{12 \times 24} = [\mathbf{P}_{12 \times 12} : \mathbf{I}_{12 \times 12}] \quad (1.24)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto la palabra codificada se expresa como:

$$\mathbf{c} = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_{12}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta multiplicación se hace de la siguiente forma. Cada  $i$ -ésimo elemento del mensaje se multiplica por cada  $i$ -ésimo elemento de la  $i$ -ésima columna de la matriz generadora ( $\mathbf{G}$ ), lo que es equivalente a multiplicar cada  $i$ -ésimo elemento del mensaje por cada elemento de la  $i$ -ésima fila correspondiente de ( $\mathbf{G}$ ). Luego se hace la suma módulo dos<sup>8</sup> en cada columna y de esta forma se obtiene la palabra codificada ( $\mathbf{c}$ ) como se muestra en la ecuación 1.25.

$$\mathbf{c} = \underbrace{[c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6 \ c_7 \ c_8 \ c_9 \ c_{10} \ c_{11} \ c_{12}]}_{\text{Redundancia}} \underbrace{[m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_4 \ m_5 \ \dots \ m_{10} \ m_{11} \ m_{12}]}_{\text{Mensaje}} \quad (1.25)$$

La palabra codificada ( $\mathbf{c}$ ), es un vector de 24 bits donde los primeros doce bits ( $c_1 \dots c_{12}$ ) corresponden a la redundancia y los últimos doce ( $m_1 \dots m_{12}$ ) al mensaje. Esta es la secuencia de bits que se envía a través del canal, la cual debido a las contaminaciones puede llegar con errores al receptor.

### 1.3.5. Decodificación Golay Extendida

Para encontrar el mensaje estimado ( $\hat{\mathbf{m}}$ ), utilizando la decodificación Golay extendida, primero debe encontrarse la palabra decodificada estimada ( $\hat{\mathbf{c}}$ ), y aprovechar el hecho de que la codificación Golay extendida es sistemática, para tomar los últimos doce bits de la como el vector mensaje estimado ( $\hat{\mathbf{m}}$ ) [12].

La palabra código estimada ( $\hat{\mathbf{c}}$ ) se obtiene a partir de la suma entre la palabra recibida ( $\mathbf{r}$ ), la cual ha sufrido contaminaciones al viajar por el canal, y el patrón de error ( $\mathbf{e}$ ) como se observa en la ecuación 1.26.

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{r} + \mathbf{e} \quad (1.26)$$

<sup>8</sup> La suma módulo dos de un par de bits es igual a 1, cuando los bits son diferentes.



Para solucionar la ecuación anterior, se procede a calcular el patrón de error ( $e$ ), el cual se obtiene a partir del primer síndrome ( $s_1$ ), y de ser necesario del segundo síndrome ( $s_2$ ), el cual se obtiene a partir del primero, lo cual se ilustra a continuación.

### 1.3.5.1. Cálculo del primer síndrome ( $s_1$ )

El vector síndrome es el resultado de multiplicar la palabra recibida ( $r$ ) por la matriz de verificación transpuesta<sup>9</sup> ( $H^T$ ) como se muestra en la ecuación 1.27.

$$s_1 = rH^T \quad (1.27)$$

Donde  $H^T$  está definida por la ecuación 1.28.

$$H^T = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$s_1 = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ \dots \ r_{24}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = [s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ s_5 \ s_6 \ s_7 \ s_8 \ s_9 \ s_{10} \ s_{11} \ s_{12}]$$

<sup>9</sup> La matriz transpuesta de  $H$ , denotada  $H^T$ , es aquella que se obtiene cambiando ordenadamente sus filas por sus columnas.

Ahora se calcula el peso Hamming<sup>10</sup> del vector síndrome ( $w_H(\mathbf{s}_1)$ ), sumando todos los unos de este vector, como se muestra en la ecuación 1.29.

$$w_H(\mathbf{s}_1) = \sum_{i=1}^n s_i \quad (1.29)$$

Si el peso Hamming del síndrome es menor o igual a tres ( $w_H(\mathbf{s}_1) \leq 3$ ), que es la capacidad máxima de corrección<sup>11</sup> de la codificación Golay extendida, entonces el vector error será el síndrome obtenido en la ecuación 1.27, concatenado con un vector de doce ceros, como se muestra en la ecuación 1.30.

$$\mathbf{e} = [\mathbf{s}_1 \ ; \ 0] \quad (1.30)$$

$$\mathbf{e} = [s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]$$

Si el peso del síndrome es superior a tres ( $w_H(\mathbf{s}_1) > 3$ ), entonces se le suma a éste la matriz de coeficientes ( $\mathbf{P}$ ) y se calcula el peso Hamming de cada fila. Para esto, el vector síndrome ( $\mathbf{s}_1$ ) se convierte en una matriz de igual dimensión que la matriz de coeficientes ( $\mathbf{P}$ ), replicándolo doce veces, como se muestra en la ecuación 1.31.

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{P} = \begin{bmatrix} s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \\ s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Después de realizar la suma matricial, se procede a calcular el peso Hamming ( $W_H$ ) de cada una de las filas, para verificar si en alguna de ellas el peso es menor o igual a dos  $W_H(\mathbf{s}_1 + \mathbf{p}_i) \leq 2$ , si esto sucede, el patrón de error ( $\mathbf{e}$ ) será como se muestra en la ecuación 1.32.

$$\mathbf{e} = [\mathbf{s}_1 + \mathbf{p}_i \ ; \ \mathbf{u}_i] \quad (1.32)$$

<sup>10</sup> El peso Hamming ( $w_H$ ) es el número de unos que contiene una palabra código.

<sup>11</sup> La capacidad máxima de corrección ( $t$ ) de un código, es el número de errores que puede corregir por palabra de  $n$  bits,  $t = \left\lfloor \frac{\min(d_H)-1}{2} \right\rfloor$  donde  $\min(d_H)$ , representa la distancia mínima de Hamming.

Donde,

$\mathbf{u}_i$ , Es el vector de doce ceros con un uno (1) en la posición que corresponde al número de la fila donde se cumplió la condición  $w_H(\mathbf{s}_1 + \mathbf{p}_i) \leq 2$ .

En caso de que no se cumpla ninguna de las anteriores condiciones se procede a calcular el segundo síndrome como se muestra a continuación.

### 1.3.5.2. Cálculo del segundo síndrome ( $s_2$ )

Este se obtiene multiplicando el primer síndrome ( $s_1$ ) por la matriz de coeficientes ( $\mathbf{P}$ ) como se muestra en la ecuación 1.33.

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 \mathbf{P} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{s}_2 = [s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = [k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12}]$$

Ahora se calcula el peso Hamming de este síndrome ( $w_H(\mathbf{s}_2)$ ), lo cual se hace sumando todos los unos.

Si el peso Hamming del síndrome es menor o igual a tres ( $w_H(\mathbf{s}_2) \leq 3$ ), entonces el patrón de error ( $\mathbf{e}$ ) será un vector de doce ceros concatenado con el nuevo síndrome ( $s_2$ ) obtenido en la ecuación 1.33, como se muestra en la ecuación 1.34.

$$\mathbf{e} = [0 : \mathbf{s}_2] \quad (1.34)$$

$$\mathbf{e} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12}]$$

Si el peso del síndrome ( $w_H(\mathbf{s}_2)$ ) es superior a tres, entonces se le suma a éste la matriz de coeficientes ( $\mathbf{P}$ ) y se calcula el peso Hamming de cada fila, como se muestra en la ecuación 1.35.

$$\mathbf{S}_2 + \mathbf{P} = \begin{bmatrix} k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \\ k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9 k_{10} k_{11} k_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Después de realizar la suma matricial, se procede a calcular el peso Hamming  $w_H(\mathbf{s}_2 + \mathbf{p}_i)$  de cada una de las filas, para verificar si en alguna de ellas, éste es menor o igual a dos ( $w_H(\mathbf{s}_2 + \mathbf{p}_i) \leq 2$ ), si esto sucede, el vector error será como se muestra en la ecuación 1.36.

$$\mathbf{e} = [\mathbf{u}_i : \mathbf{s}_2 + \mathbf{p}_i] \quad (1.36)$$

Donde  $\mathbf{u}_i$  es el vector de doce ceros con un uno (1) en la posición que corresponde al número de la fila donde se cumplió la condición  $w_H(\mathbf{s}_2 + \mathbf{p}_i) \leq 2$ .

Si con el cálculo de los anteriores síndromes, no se ha establecido el patrón de error ( $\mathbf{e}$ ), significa que se han detectado exactamente cuatro errores, por lo cual el mensaje estimado ( $\hat{\mathbf{m}}$ ), se toma como los últimos doce bits de la palabra recibida ( $\mathbf{r}$ ).

En caso que se presenten más de cuatro errores en una palabra recibida, se superará la capacidad de corrección y detección de la codificación Golay extendida y por tanto la palabra de código enviada no coincidirá con la recibida.

En el anexo A se muestran ejemplos de la codificación Golay extendida, donde intencionalmente se agregan errores (causados por el canal) a la palabra recibida ( $\mathbf{r}$ ), y luego de hacer los procesos de decodificación en el receptor, se obtiene el mensaje estimado ( $\hat{\mathbf{m}}$ ) el cual será igual al transmitido en caso de que los errores cometidos no superen los límites de corrección del decodificador Golay extendido.

#### 1.4. PROBABILIDAD DE ERROR EN LA DECODIFICACIÓN

Con la definición de los conceptos de modulación QPSK y codificación Golay, se procede a realizar el análisis de la probabilidad de error de bit [13] obtenida al final del sistema de comunicaciones completo, para esto en el demodulador QPSK se tiene un criterio de decisión de distancia mínima y en el decodificador Golay un esquema *Hard Decision* [14]. En la figura 1.11 se presenta el sistema de comunicaciones a nivel de bits.

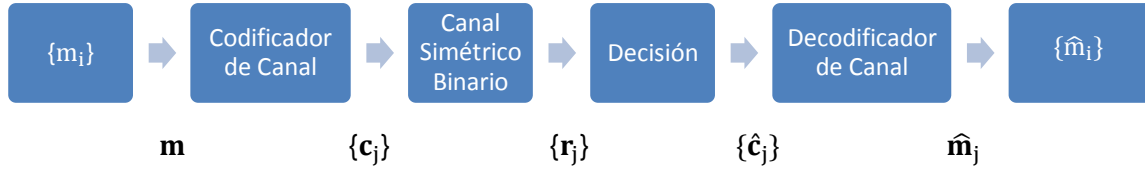


Figura 1.11. Sistema de comunicaciones a nivel de bit

Se definen las siguientes probabilidades de error:

- $P_c$ : Probabilidad de detectar incorrectamente un bit codificado, ecuación 1.37.

$$P_c = P_r\{\hat{c}_j \neq c_j\} \quad (1.37)$$

Esta probabilidad depende del esquema de modulación (QPSK) y del codificador Golay,  $P_c$  está dado por la ecuación 1.38.

$$P_c = Q\left(\sqrt{2 \frac{k E_b}{n N_0}}\right) \quad (1.38)$$

- $P_w$ : Probabilidad de detectar incorrectamente una palabra código, ecuación 1.39.

$$P_w = P_r\{\hat{c}_j \neq c_j\} \quad (1.39)$$

Donde,  $P_w$  depende de la capacidad de corrección del código Golay extendido ( $t = 3$ ) y de la  $P_c$ .

- $P_b$ : Probabilidad de detectar incorrectamente un bit mensaje, ecuación 1.40.

$$P_b = P_r\{\hat{m}_j \neq m_j\} \quad (1.40)$$

El desempeño frente al ruido lo determina la curva  $P_b$  vs  $\frac{E_b}{N_0}$

Donde,

$E_b$ , Representa la energía promedio de un bit mensaje.

$N_0$ , Representa la densidad de ruido en una canal AWGN con varianza  $\sigma^2$

Por tanto hay un error en la detección de una palabra código si el número de errores individuales de bit en una palabra supera la capacidad de corrección del código, es decir, si el peso del patrón de error es mayor a  $t$ .

Sea  $L$  una variable aleatoria discreta que representa el número de errores de bit en una palabra de código de  $n$  bits. Como las detecciones son independientes,  $L$  seguirá una distribución Binomial con probabilidad de éxito  $P_c$ , como se define en las ecuaciones 1.41, 1.42, 1.43 y 1.44.

$$L \sim \text{Binomial}(n, P_c)$$

$$P_r\{L = l\} = \binom{n}{l} P_c^l (1 - P_c)^{n-l}, \text{ donde } l = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.41)$$

$$P_w = P_r\{L > t\} \quad (1.42)$$

$$P_w = \sum_{l=t+1}^n \binom{n}{l} P_c^l (1 - P_c)^{n-l} \quad (1.43)$$

$$P_w = 1 - \sum_{l=0}^t \binom{n}{l} P_c^l (1 - P_c)^{n-l} \quad (1.44)$$

Finalmente en promedio, por cada error en la detección de una palabra código se cometen  $k/2 = 6$  errores en los bits mensaje. Como cada palabra contiene  $k = 12$  bits mensaje, se tiene que la probabilidad de error de bit está dada por la ecuación 1.45, cuya gráfica se muestra en la figura 1.12.

$$P_b \cong \frac{k/2}{k} P_w = \frac{1}{2} P_w \quad (1.45)$$

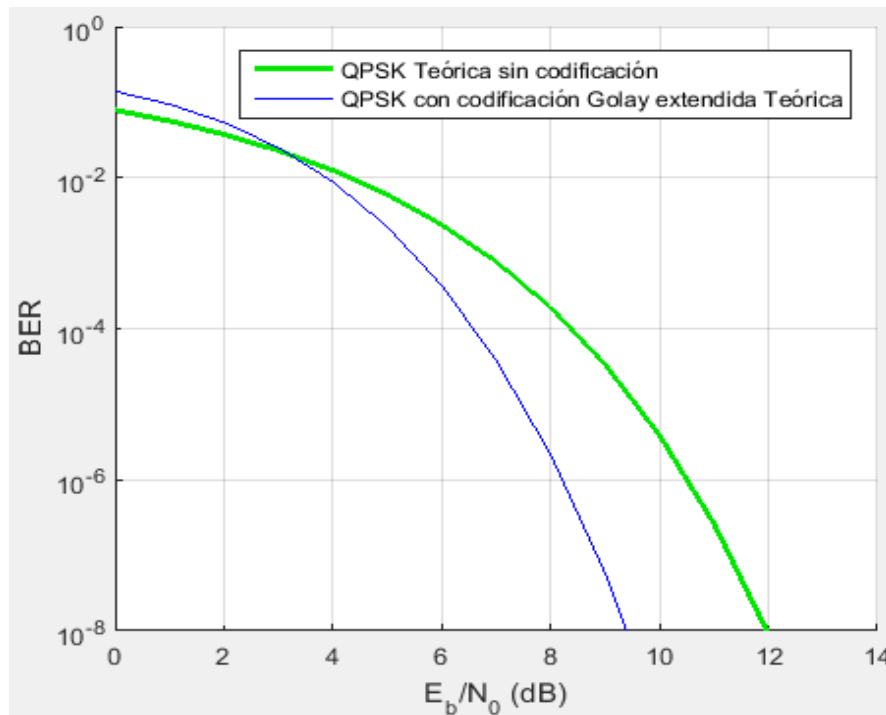


Figura 1.12. Curva de desempeño teórica de la modulación QPSK, con y sin codificación.

# CAPÍTULO II

## SISTEMA DE COMUNICACIONES CON CODIFICACIÓN GOLAY SOBRE HARDWARE RECONFIGURABLE

El sistema de comunicaciones unidireccional considerado en el presente trabajo de grado se implementa sobre hardware reconfigurable, por tanto en este capítulo se realiza la descripción de este tipo de hardware, así como la definición del sistema y parámetros adicionales necesarios para una adecuada implementación sobre estos dispositivos.

### 2.1. DESCRIPCIÓN BÁSICA SOBRE HARDWARE RECONFIGURABLE

La constante investigación de diferentes tecnologías y mecanismos que permitan mejorar las características y elementos en un sistema de comunicaciones, por ejemplo generando nuevas técnicas o procesos que hagan más eficiente<sup>12</sup> y eficaz cierta codificación o modulación, han creado la necesidad de buscar una alternativa libre y de bajo costo para que los investigadores y desarrolladores puedan simular, implementar y analizar sistemas de comunicaciones a nivel físico [15]. En respuesta a lo anterior algunas empresas han puesto en el mercado dispositivos con la característica de tener un hardware reconfigurable, de tal manera que estos permiten modificar sus parámetros físicos, logrando que en tiempo real se tengan sistemas de comunicaciones funcionando e interactuando con un computador.

Teniendo en cuenta las propiedades de los sistemas de comunicación digital, sus múltiples aplicaciones en el campo de las telecomunicaciones y su elevado costo de implementación, se han desarrollado varios tipos de hardware que permiten simular el comportamiento de un sistema de comunicaciones, con la característica de ser configurables y tener un bajo costo de implementación. Actualmente existen cuatro tecnologías principales de hardware reconfigurable, las cuales están en el mercado con dispositivos que se actualizan constantemente y donde cada una cuenta con una gran comunidad de soporte, estas son: Arduino, Raspberry Pi, Arreglo de Compuertas Programables en Campo (FPGA, *Field Programmable Gate Array*) y el Periférico Universal de Radio Software (USRP®<sup>13</sup>, *Universal Software Radio Peripheral*), este último permite la interacción con diferentes tipos de antenas y tecnologías radio. Para el desarrollo del presente trabajo de grado se seleccionó la tarjeta USRP B210, ya que

---

<sup>12</sup> Eficiente: que consigue un propósito empleando los medios idóneos [19].

<sup>13</sup> USRP® es una marca registrada de National Instruments Corp.

cuenta con mayor reconocimiento dentro del ámbito investigativo que las otras tres tecnologías y además posee una plataforma de desarrollo o programación denominada Radio Definido por Software (SDR, *Software Defined Radio*), la cual permite programar el USRP® desde entornos como Matlab®, LabVIEW y GNU radio, tanto en sistemas operativos Windows como Linux.

El concepto de SDR es un sistema de radiocomunicación, donde la mayor parte de los componentes (por ejemplo, mezcladores, filtros, amplificadores, moduladores, demoduladores, detectores, etc.) se implementan en software en lugar de hardware. Para esto se definen un conjunto de procedimientos y técnicas para realizar el procesamiento de señales radio por medio de un dispositivo de propósito general. El principal atractivo de esta plataforma es la posibilidad de implementar un sistema de comunicaciones tan sólo con un computador y un dispositivo con hardware reconfigurable.

Las empresas líderes en la investigación y distribución de dispositivos USRP® a nivel mundial son: Ettus Research™ y National Instruments, cada una de ellas cuenta con su plataforma SDR y proporcionan drivers compatibles con diferentes herramientas software para el diseño de un sistema de comunicaciones. Dado que la empresa Ettus Research™ dentro de su plataforma SDR tiene módulos y drivers compatibles con Matlab® y GNU Radio, y teniendo en cuenta que el presente trabajo de grado se encuentra enmarcado dentro del proyecto “Diseño e Implementación de un Prototipo de Comunicación de Datos basado en Hardware Reconfigurable” de la Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones de la Universidad del Cauca, la cual adquirió recientemente dispositivos USRP® de esta empresa, se seleccionó el USRP® B210, siendo éste el de mayores características adquirido.

## **2.2. USRP® B210**

El USRP® B210 de la empresa Ettus Research™ mostrado en la figura 2.1 cuenta con siete puertos periféricos, de los cuales cuatro son para transmitir y recibir información, un puerto opcional para colocar una antena del Sistema de Posicionamiento Global (GPS, *Global Positioning System*), la cual puede ser utilizada para sincronismo del reloj interno de la FPGA Spartan Xilinx 6XC6SLX150, un puerto Bus Universal en Serie (USB, *Universal Serial Bus*) para comunicarse con el computador y un conector de corriente continua (DC, *Direct Current*) para alimentación, en caso que la energía proporcionada por el puerto USB sea insuficiente. La FPGA es la encargada de recibir la información digital del computador y pasarla a frecuencia intermedia en el proceso de transmisión y el proceso contrario en recepción, además simultáneamente está enviando información a la plataforma SDR. En la tabla 2.1 se presentan las características técnicas del USRP® B210. Este dispositivo tiene la capacidad de transmitir y recibir información de señales como FM, TV, Celular, Wi-Fi<sup>14</sup>, entre otras, en un rango de frecuencias de 70 MHz a 6 GHz, adicionalmente cuenta con dos canales full dúplex y compatibilidad con MIMO 2X2.

---

<sup>14</sup> Wi-Fi es el nombre comercial de la norma IEEE 802.11b-1999 o 802.11b, la cual alcanza una tasa de transferencia de hasta 11 Mbps en la banda de 2.4 GHz.



El USRP® B210, es compatible con el Controlador de Hardware USRP® (UHD, *USRP® Hardware Driver*), el cual es un driver que le permite al dispositivo interactuar con plataformas SDR desarrolladas para Matlab® y GNU Radio, con lo cual se tiene flexibilidad en el diseño y la posibilidad de realizar cambios en tiempo real.

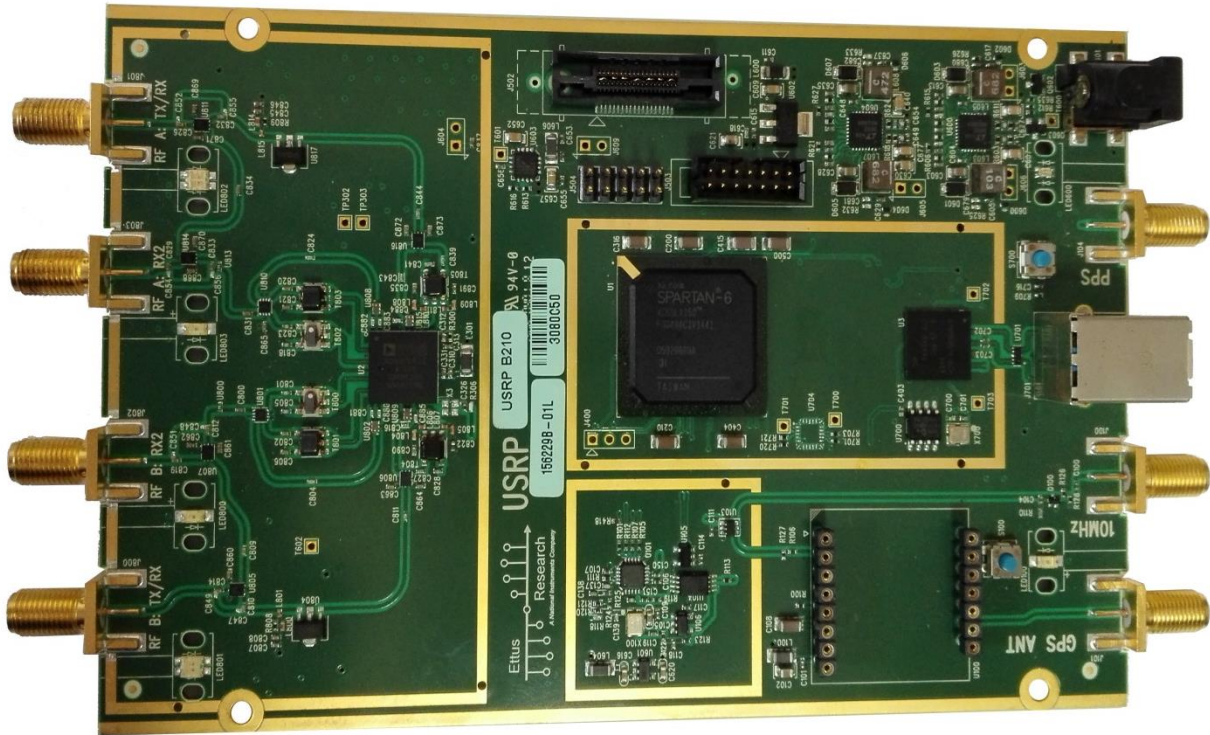


Figura 2.1. Vista panorámica USRP® B210

El USRP® B210 contiene el integrado AD9361 el cual posee cuatro convertidores análogo – digital, los cuales tienen una resolución de doce bits para cuantificar una muestra y tienen la capacidad de capturar 61.11 millones de muestras (símbolos) por segundo, con lo cual es posible muestrear una señal con un ancho de banda máximo de 30.555 MHz, ya que sería el límite impuesto por el ancho de banda de Nyquist<sup>15</sup>.

Especificaciones Técnicas	Unidad
Alimentación DC	6 V
Frecuencia de muestreo DAC - ADC	61.11 MS/seg
Resolución DAC - ADC	12 Bits
Potencia de Salida	>10 dBm
Figura de Ruido en Receptor	<8 dB
Canales Full Dúplex	2
Frecuencia RF	70 MHz – 6 GHz
Frecuencia de Reloj	100 MHz

Tabla 2.1. Especificaciones técnicas USRP® B210

<sup>15</sup> Para transmitir a una velocidad de  $R$  símbolos reales por segundo sin ISI se requiere un ancho de banda mínimo  $\frac{R}{2}$  [Hz]. El ancho de banda  $\frac{R}{2}$  [Hz] se denomina ancho de banda de Nyquist.

Para comprender el funcionamiento del USRP® B210 es necesario acudir al diagrama lógico mostrado en la figura 2.2, donde se observa que está compuesto por una serie de bloques, los cuales cumplen ciertas funciones específicas e independientes, pero que al interconectarlos se tiene un dispositivo capaz de comunicarse con un computador, además de transmitir y recibir señales radio.

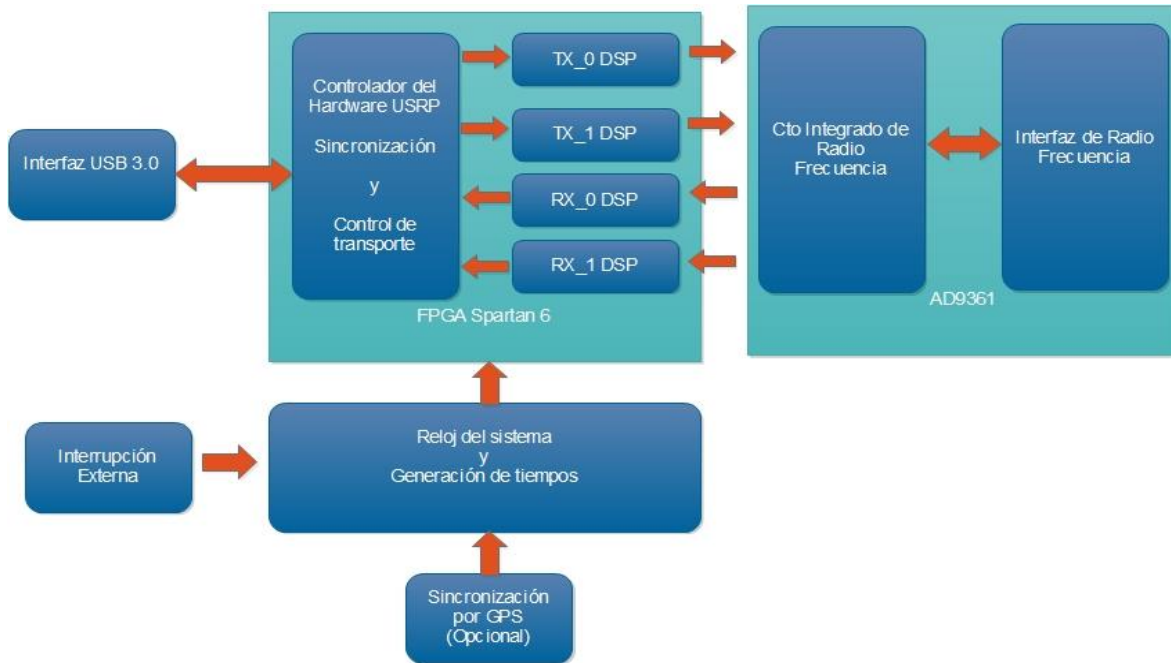


Figura 2.2. Diagrama de bloques USRP® B210

Teniendo en cuenta el diagrama anterior el funcionamiento del dispositivo USRP® B210 es el siguiente:

1. Una vez conectado el cable USB en una interfaz USB<sup>16</sup> del computador, la FPGA espera que la plataforma SDR le envíe la configuración de sus parámetros, incluida la frecuencia portadora en la cual trabajará el sistema de comunicaciones.
2. Una vez configurada la FPGA y determinada la frecuencia portadora, ésta revisa que canales hayan sido configurados como semidúplex (en inglés *half-dúplex*) o full-dúplex, en el caso de ser semidúplex analiza si es configurado como transmisor o receptor, para así activar la interfaz lógica del Procesador Digital de Señal (DSP, *Digital Signal Processor*). El primer canal, es decir el canal 1 cuenta con dos DSP, uno para transmitir y otro para recibir (TX\_0 DSP y RX\_0 DSP) y el segundo canal, es decir el canal 2 igualmente cuenta con dos DSP (TX\_1 DSP y RX\_1 DSP). El objetivo de los DSP es recibir o entregar información digital a la FPGA y recibir o entregar señales analógicas al Circuito de Radio Frecuencia (RFIC, *Radio Frequency Integrated Circuit*).

<sup>16</sup> La especificación USB 2.0 permite tasas de transferencia de hasta 480 Mbit/s (60 MB/s) y la especificación USB 3.0 permite tasas de transferencia de hasta 5 Gbit/s (625 MB/s).

3. El RFIC se encarga de generar una señal de radio frecuencia entre 70 MHz y 6 GHz para luego ser enviada a la interfaz radio la cual está conectada a la antena. Hay que tener en cuenta el rango de operación de la antena, ya que si la antena no opera en la frecuencia deseada la señal radio emitida sufrirá deformación y pérdidas.
4. Opcionalmente el USRP® cuenta con una interfaz GPS con el objetivo de sincronizar su reloj interno con el de un satélite.

En el diagrama de la figura 2.3 se muestra el proceso que sigue una señal a través de un canal que ha sido configurado como transmisor, es decir desde que la señal en banda base es enviada por el puerto USB hasta que es emitida por la antena de RF.

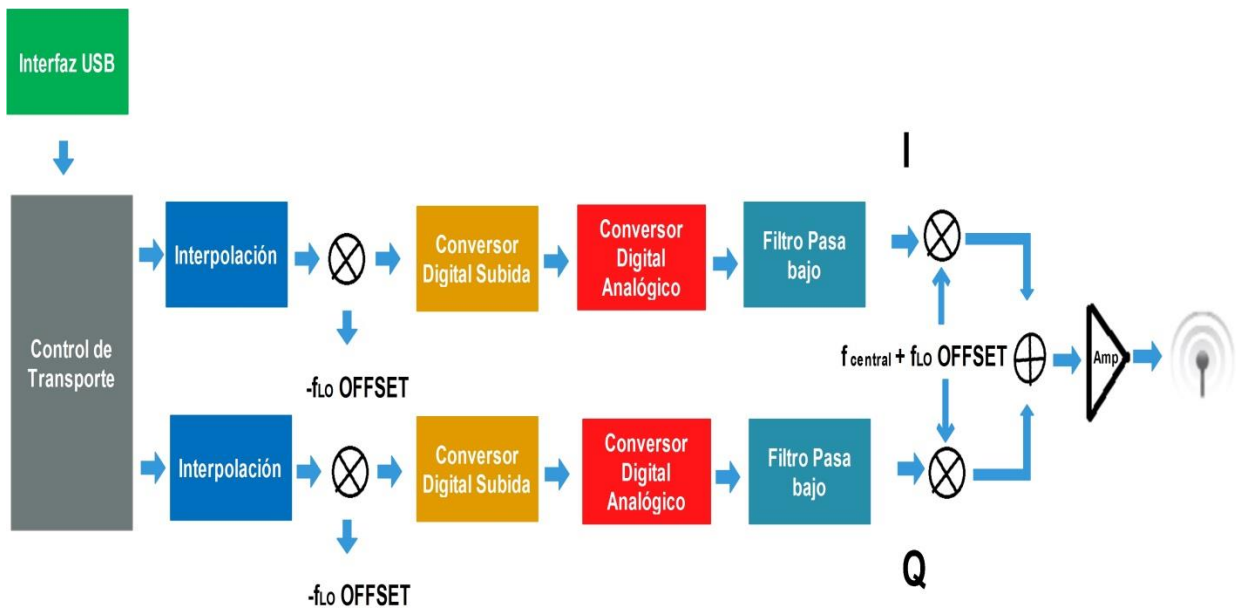


Figura 2.3. Diagrama canal de transmisión

En la figura anterior se observa que la señal llega por la interfaz USB 2.0 o 3.0 para posteriormente ingresar al control de transporte, donde según como esté configurado el canal, permite o pone en espera la información, luego pasa por un Conversor Digital de Subida (DUC, *Digital UpConverter*) donde se realiza un sobremuestreo de la señal en un factor de interpolación<sup>17</sup>  $N$  de 4 a 512, este factor será la relación entre la frecuencia de reloj y la tasa de muestreo de los datos de entrada al USRP®. Una vez realizado este proceso, en la salida del DUC se tendrá una señal en frecuencia intermedia con un desfase de unos cuantos Hertz, dado que la frecuencia del reloj en la mayoría del USRP® no es exacta, por tanto se tendrá una Frecuencia de Desplazamiento por Oscilador Local ( $F_{LO}$  offset), el procedimiento para calcular este desplazamiento de frecuencia se encuentra en el apéndice C. Luego la señal ingresa al DAC donde se genera una señal analógica a una velocidad de 61.11 MS/seg la cual ingresa a un filtro pasabajo con el fin

<sup>17</sup>El factor de interpolación es el incremento de la frecuencia de muestreo en un factor  $N$ .

de eliminar componentes en alta frecuencia. Con esto se tiene una señal analógica en frecuencia intermedia lista para ser modulada en la frecuencia portadora, para luego ser mezclada con su otra componente I o Q. Por último se amplifica la señal y se envía a la interfaz física de la antena para ser radiada.

La figura 2.4 muestra el diagrama completo del procesamiento que se realiza en un canal de recepción en el USRP® B210, desde que la señal es captada por la antena hasta que es enviada a la plataforma SDR a través de la interfaz USB.

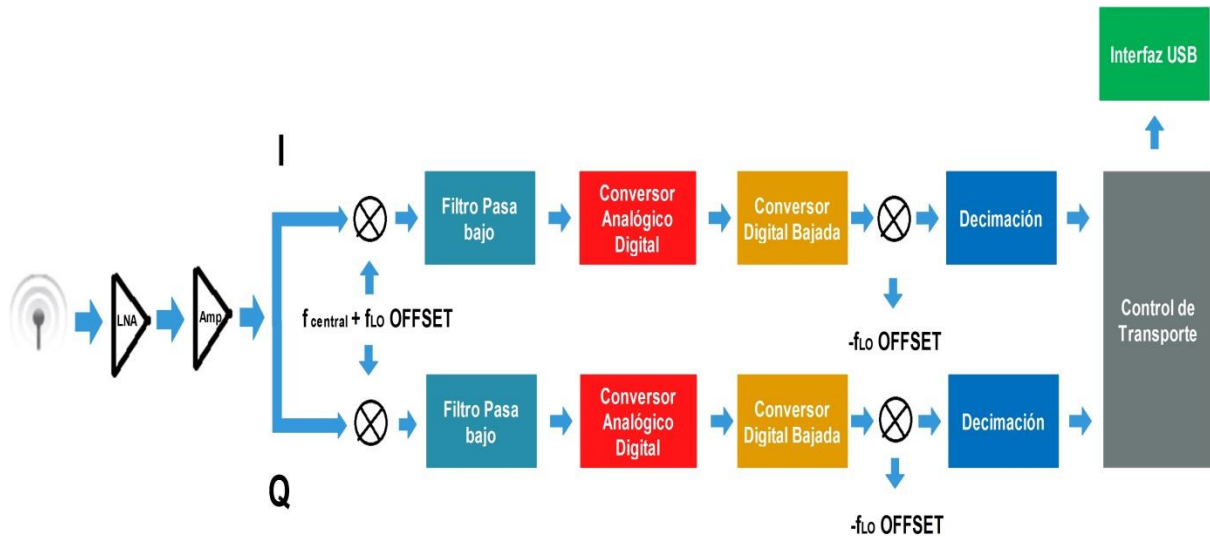


Figura 2.4. Diagrama canal de recepción

Una vez la señal es recibida por la antena pasa por un Amplificador de Bajo Ruido (LNA, *Low Noise Amplifier*) con el fin de amplificar las componentes de la señal que tengan una baja potencia, después pasa por un amplificador con el fin de tener una buena Relación Señal a Ruido (SNR, *Signal to Noise Ratio*), luego se demodula la frecuencia portadora, teniendo en cuenta que esta frecuencia está adicionada con una frecuencia de desplazamiento (offset).

Hecho esto la señal en frecuencia intermedia pasa por un filtro pasabajo, luego por el conversor analógico digital, a la señal resultante se le debe suprimir la frecuencia de desplazamiento, para esto es necesario conocer este valor. Finalmente la señal pasa por el Conversor Digital de Bajada (DDC, *Digital DownConverter*) donde se realiza un submuestreo de la señal teniendo en cuenta el factor de diezmado<sup>18</sup> el cual está entre 8 a 512. Con esto ya se tiene una señal digital en banda base I o Q para que sea enviada a la plataforma SDR según la configuración que tenga el control de transporte de la FPGA.

El USRP® B210 cuenta con dos canales full - duplex y cuatro interfaces físicas para conectar las correspondientes antenas, cabe resaltar que un canal puede ser half - duplex, es decir puede estar sólo transmitiendo o recibiendo, si se hace uso del modo full

<sup>18</sup> El factor de diezmado es el decremento de la frecuencia de muestreo en un factor  $L$ .

- duplex es necesario tener en cuenta que la frecuencia portadora para la transmisión debe ser diferente de la portadora para recepción.

### 2.3. DEFINICIÓN DEL SISTEMA DE COMUNICACIONES BASADO EN HARDWARE RECONFIGURABLE

El sistema de comunicaciones descrito en el capítulo I, cuenta con 7 elementos principales: fuente, codificador, modulador, canal, demodulador, decodificador y destino. Pero cuando se requiere implementar un sistema de comunicaciones sobre hardware reconfigurable es necesario agregar nuevos elementos al sistema, además de dividir el diseño en dos etapas, una etapa correspondiente al diseño del transmisor, el cual se implementa sobre un USRP® B210 y otra etapa correspondiente al diseño del receptor el cual también se implementa sobre un USRP® B210 diferente, el canal de comunicaciones en este caso es el aire. Por tanto el sistema queda descrito de manera general por tres elementos principales: transmisor – canal - receptor, como se muestra en la figura 2.5.



Figura 2.5. Sistema de comunicaciones general

#### 2.3.1. Definición del módulo transmisor

El módulo transmisor es el encargado de enviar la información de interés por un canal de comunicaciones (el aire) al módulo receptor, este consta de cuatro elementos físicos: un equipo de cómputo, un cable USB, un USRP® B210 y una antena, como se muestra en la figura 2.6.



Figura 2.6. Diagrama real del módulo transmisor

En la figura 2.7 se muestra los cuatro principales elementos que se definen en el transmisor: un generador binario, un modulador banda base QPSK, un filtro transmisor de Coseno Alzado (RC, *Raised Cosine*) y un módulo USRP®. Cada uno de ellos cumple funciones específicas con el objetivo de que la información a transmitir sea enviada de la mejor manera posible por el canal.

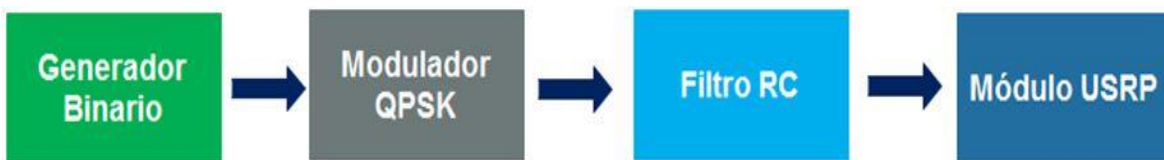


Figura 2.7. Diagrama lógico del módulo transmisor general

La división del módulo transmisor en cuatro elementos generales simplifica el diseño, además de facilitar la lógica y comprensión del funcionamiento del mismo, ya que en el primer elemento se realiza todo el procesamiento de la información binaria (sincronización, codificación, entre otros). En el segundo elemento se modula la información con un modulador QPSK banda base, con el fin de dar una forma de onda adecuada a la señal. En el tercer elemento se utiliza un filtro de coseno alzado con el fin de reducir al máximo la ISI, teniendo a la salida de éste una señal con un ancho de banda bien definido y finalmente el cuarto elemento es el encargado de transmitir la información

por el aire, mediante una portadora de alta frecuencia, para esto hace uso del USRP® B210.

A continuación se realiza una descripción detallada de los cuatro elementos que conforman el módulo transmisor.

### 2.3.1.1. Sub módulo: Generador Binario

Este sub módulo es el de mayor interés para el presente trabajo de grado, ya que es aquí donde se implementa la codificación Golay extendida. Para mayor entendimiento de las funciones que cumple este sub módulo, se ha subdividido en cinco elementos, como se muestra en la figura 2.8, los cuales son: un generador de mensajes, un codificador Golay, un generador Bernoulli, un polinomio Scramble y un generador de códigos Barker, además de módulos concatenadores los cuales se encargan de unir dos palabras binarias. En la figura 2.8 también se observa el tamaño en bits de cada palabra que se genera en cada elemento, con lo cual se tiene que este sub módulo genera en su salida una palabra de 100 bits.

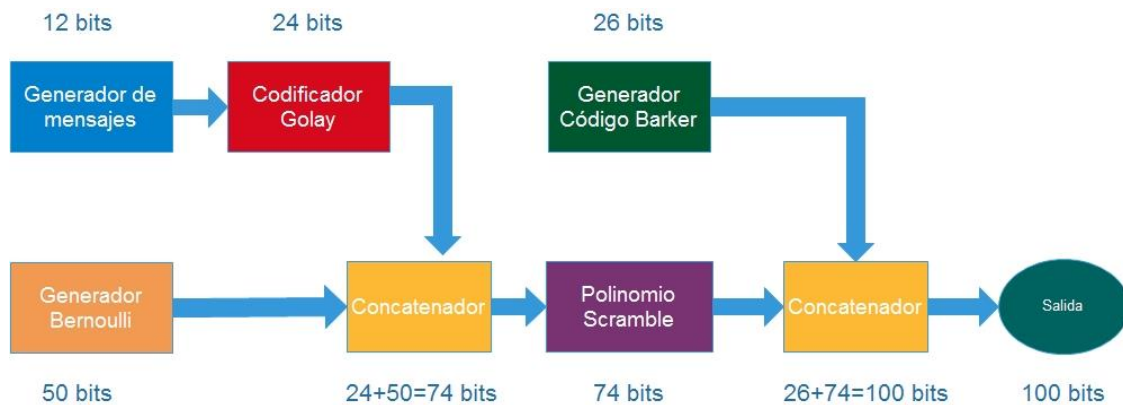


Figura 2.8. Módulo generador binario

La descripción detallada de cada elemento, los procesos, el orden como se genera cada palabra y la forma de la trama final de 100 bits se realiza a continuación.

- a) Generador de mensajes: este módulo se encarga de generar aleatoriamente una palabra binaria de 12 bits, es decir se tiene un alfabeto de 4096 palabras, las cuales pueden representar números o caracteres del Código Estándar Estadounidense para el Intercambio de Información (ASCII, *American Standard Code for Information Interchange*). Esta limitación en el número de palabras en el alfabeto se debe al codificador Golay extendido, el cual sólo codifica palabras de 12 bits, por tanto el generador de mensajes rellena con ceros a la izquierda cuando se tienen palabras con una longitud menor a 12 bits, como se observa en la figura 2.9, donde el número dos tiene diez ceros a la izquierda.

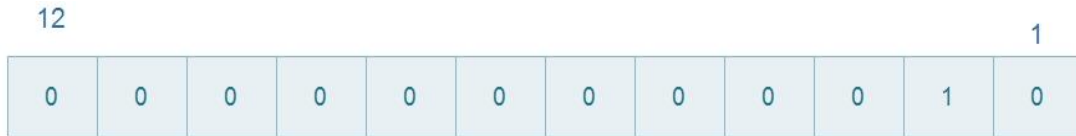


Figura 2.9. Palabra generada

b) Codificador Golay: este módulo ejecuta una codificación Golay extendida, de forma que la palabra que ingresa al codificador proveniente del generador de mensajes (12 bits) se codifica en una nueva palabra de 24 bits, en la figura 2.10 se muestra un ejemplo de la palabra codificada para el número dos, donde se observa que los bits del 24 al 13 de la palabra corresponden a la redundancia adicionada por el codificador y los bits del 12 al 1 corresponden al número dos en binario o sea el mensaje.

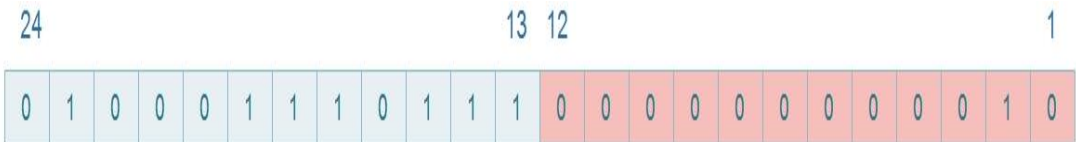


Figura 2.10. Palabra codificada

c) Generador Bernoulli: el objetivo de este módulo es generar una trama Bernoulli la cual define el periodo  $T$  de la trama final de 100bits. La trama Bernoulli es una palabra binaria de 50 bits equiprobable, es decir veinticinco unos y veinticinco ceros, con lo cual se tiende a que la trama final de 100 bits tenga el mismo número de unos y número de ceros, teniendo así una trama mejor conformada. Con la trama Bernoulli generada se procede a concatenar esta palabra de 50 bits con la palabra codificada de 24 bits, para así generar una nueva palabra de 74 bits en  $T$  segundos como se muestra en la figura 2.11.

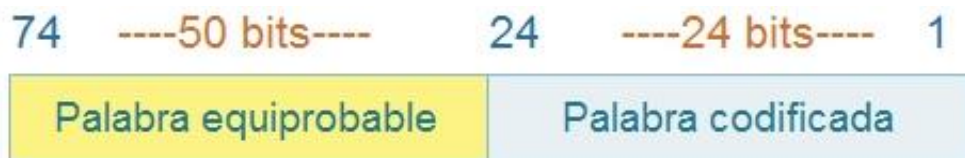


Figura 2.11. Mensaje con periodo de  $T$  segundos

d) Polinomio Scramble: el mensaje de 74 bits a la entrada de este bloque en la mayoría de los casos tiene el inconveniente de tener series de unos y ceros consecutivos, lo cual causa conflictos de temporización, ya que las tramas de sincronización por lo general son las que tienen series de 1s y 0s consecutivos. Por lo tanto es necesario reorganizar esta trama de 74 bits mediante un polinomio, de forma que se reduzca la cantidad de unos y ceros consecutivos. Este polinomio Scramble mejora la densidad en la transición de datos y ayuda a recuperar la temporización en el módulo receptor. En la figura 2.12 se muestra el proceso general de codificación según un polinomio Scramble de grado  $n$ . Cabe aclarar



que este módulo no aumenta la longitud del mensaje, por tanto a la salida de este, se tiene una nueva trama de 74 bits reorganizados.

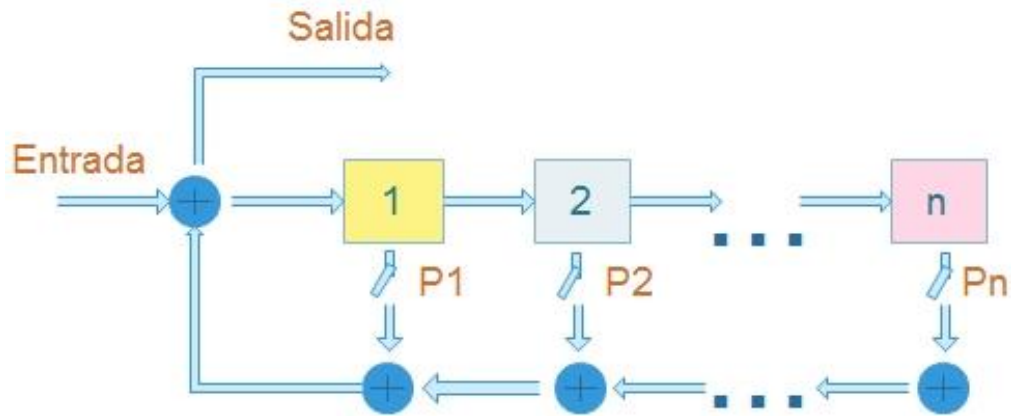


Figura 2.12. Polinomio Scramble

- e) Generador código Barker: este módulo genera una palabra de 13 bits, siendo ésta la máxima longitud del código Barker, al trabajar con la máxima longitud se tiene una baja SNR. Este módulo repite la secuencia generada de forma que a la salida se tiene una palabra de 26 bits, la cual se utiliza como trama de sincronización. La palabra generada por este módulo se muestra en la figura 2.13.

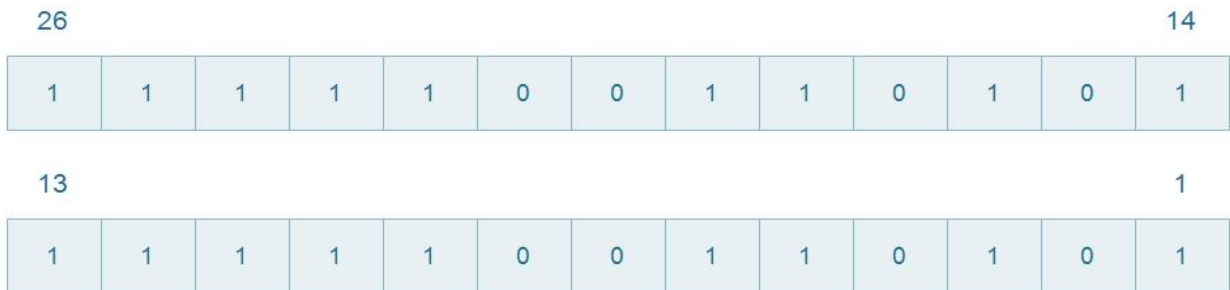


Figura 2.13. Trama de sincronización

Con el mensaje de 74 bits sin secuencias de unos o ceros consecutivos y con la trama de sincronización de 26 bits se genera una trama de 100 bits tendiendo a ser equiprobables la cual es enviada al modulador QPSK. La trama binaria se muestra en la figura 2.14.

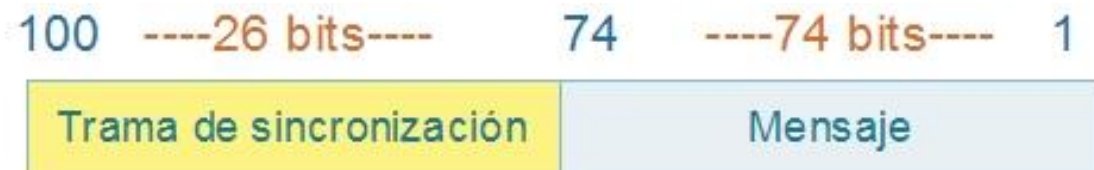


Figura 2.14. Mensaje a enviar

### 2.3.1.2. Sub módulo: Modulador QPSK.

Este modulador se encarga de mapear dos bits en un símbolo mediante un código Gray, el cual se basa en el hecho que entre dos símbolos adyacentes sólo cambie un bit, teniendo en cuenta que el modulador QPSK posee un alfabeto de cuatro símbolos, cuya constelación se muestra en la figura 2.15. En la entrada de este módulo se tiene en un instante de tiempo  $T$  una trama de 100 bits, por tanto a la salida del modulador se tiene una trama de 50 símbolos en el mismo instante  $T$ , este proceso se ilustra en la figura 2.16.

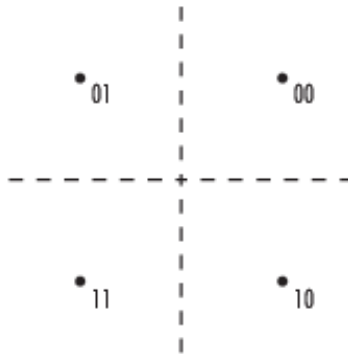


Figura 2.15. Constelación QPSK y Mapeo Gray



Figura 2.16. Mensaje modulado

### 2.3.1.3. Sub módulo: Filtro RC

El filtro transmisor de coseno alzado, filtra los símbolos QPSK utilizando una forma de Raíz Cuadrada (Root Squared), sobremuestreando cada símbolo en un factor de  $N$ , es decir se envía por cada símbolo QPSK  $N$  símbolos repetidos en el mismo periodo de tiempo del símbolo QPSK, con esto se agrega robustez a la información y se disminuye la Interferencia Intersimbólica (ISI, *Intersymbol Interference*), es decir que disminuye el solapamiento de pulsos facilitando la correcta recuperación de la información.

Para el presente trabajo de grado se realiza un sobremuestreo  $N = 4$ , por tanto en la entrada de este módulo se tiene una trama de 50 símbolos y a la salida una trama de 200 símbolos en un instante de tiempo  $T$ , como se muestra en la figura 2.17.



Figura 2.17. Mensaje filtrado

#### 2.3.1.4. Sub módulo: Módulo USRP®

Aquí se implementa la plataforma SDR, es decir desde este módulo se configuran parámetros del USRP® B210 como: frecuencia portadora, desplazamiento de frecuencia Offset, frecuencia de reloj de la FPGA, factor de interpolación, ganancia en decibeles y el canal físico donde está conectada la antena en la cual el USRP® debe estar transmitiendo señales de radio frecuencia. Luego la trama de 200 símbolos modula una portadora de alta frecuencia entre 70 MHz y 6 GHz y la envía por la antena conectada en un canal transmisor del USRP® B210.

Con la definición del módulo transmisor y teniendo claro el procesamiento de la información a enviar, a continuación se define el módulo receptor encargado de recuperar la información enviada.

#### 2.3.2. Definición del módulo receptor

A nivel físico el módulo receptor consta de los mismos cuatro elementos que el módulo transmisor: una antena, un USRP® B210, un cable USB y un computador, como se muestra en la figura 2.18.



Figura 2.18. Diagrama real módulo receptor

El módulo receptor cumple funciones específicas como: recibir la información, calcular y compensar desfases en tiempo y en frecuencia, demodular la información, detectar y corregir posibles errores en los datos enviados.

A nivel general el módulo se ha dividido en seis sub módulos mostrados en la figura 2.19, donde se observa que hay dos sub módulos especiales: el compensador y el sincronizador, los cuales mediante procesamiento permiten compensar en tiempo y en frecuencia la trama de información.



Figura 2.19. Módulo receptor general

A continuación se presenta la descripción de los seis sub módulos que conforman el módulo receptor, desde que la señal de radiofrecuencia ingresa al USRP® B210, hasta que es decodificada la información de interés.

### **2.3.2.1. Sub módulo: Módulo USRP®**

Al igual que en el sub módulo USRP® del transmisor, este módulo selecciona la frecuencia portadora de la señal radio, el factor de diezmado, la frecuencia de desplazamiento, frecuencia de reloj de la FPGA, ganancia en decibeles y el canal físico donde está conectada la antena en la cual el USRP® debe estar recibiendo señales de radio frecuencia.

Este módulo USRP® receptor es el encargado de recibir la señal de radiofrecuencia, pasarla a banda base y enviarla al computador mediante un puerto USB. Luego esta información pasa al filtro de coseno alzado en la plataforma de Simulink®, para luego continuar con el filtrado de la señal.

Debido a la posibilidad de almacenar en un buffer de recepción cierto número de tramas, se tiene una disminución en la cantidad de datos perdidos. Este módulo se debe configurar para que reciba una trama de 200 símbolos cada  $T$  segundos.

### **2.3.2.2. Sub módulo: Filtro RC**

Debido a que en el módulo transmisor los símbolos QPSK fueron filtrados y sobre muestreados  $N$  veces por un filtro de coseno alzado, en este módulo se aplica el mismo filtro de coseno alzado teniendo en cuenta el factor de sobre muestreo  $N$  y un nuevo factor de submuestreo  $L$ , el cual entrega a la salida símbolos QPSK repetidos  $L$  veces.

El filtro receptor de coseno alzado filtra  $M$  tramas de 200 símbolos, donde  $M$  es el número de tramas en el buffer del módulo USRP®, y entrega  $M$  tramas de  $\frac{200}{L}$  símbolos. Por lo general  $L < N$ , esto con el fin de que en los siguientes módulos se tengan copias del símbolo enviado, para posibles cálculos de compensación y sincronismo.

Para el presente trabajo de grado  $L = 2$  y  $M = 10$ , con lo cual en la salida de este filtro de tiene 10 tramas de 100 símbolos consecutivas, es decir un trama de 1000 símbolos.

### **2.3.2.3. Sub módulo: Compensador**

Este submódulo compensador se encarga de calcular el desplazamiento en frecuencia y en fase que han sufrido los símbolos QPSK, debido a posibles interferencias en el trayecto. Por lo general estas frecuencias son de unos pocos Hertz.

Una vez calculada la frecuencia y fase de desplazamiento se procede a adicionar estos desplazamientos a la señal de entrada, esto con el fin de obtener la constelación QPSK sin ningún desplazamiento. Por tanto este módulo realiza un sub muestreo de 2 símbolos, por lo que a la salida de este módulo se tiene 10 tramas de 50 símbolos QPSK.

#### **2.3.2.4. Sub módulo: Sincronizador**

Este módulo es de vital importancia, ya que es aquí donde se realiza el procesamiento temporal de la información. Este módulo cumple dos funciones principales:

1. Sincronizar el periodo de símbolo de los 500 símbolos que están ingresando en un periodo de  $T$  segundos, para luego almacenar las 10 tramas de 50 símbolos en un buffer y enviar cada trama en orden pero cada una con un periodo de  $T$  segundos.
2. Al tener la trama de 50 símbolos en  $T$  segundos se procede a comparar los primeros 13 símbolos que corresponden a la trama de sincronización con la trama de sincronización generada con el código Barker, esto con el fin de calcular posibles retardos en la trama y de esta forma compensarlos.

Por tanto en la salida de este módulo hay una trama de 50 símbolos QPSK lista para ser demodulada.

#### **2.3.2.5. Sub módulo: Demodulador QPSK**

Este bloque demodula la trama de 50 símbolos utilizando el método de *Hard -Decision*, es decir aquí se decide que símbolo fue el que se envió, teniendo en cuenta que la constelación tiene cuatro puntos, es decir se tienen un alfabeto de cuatro símbolos. En la salida de este módulo se tiene una trama de 100 bits, ya que se tiene 2 bits por símbolo. Este módulo además de realizar la demodulación de la información, también procesa la trama de 100 bits, retirando los primeros 26 bits de sincronización y los 50 bits de la trama de Bernoulli obteniendo a la salida de este módulo una trama de 24 bits en un instante  $T$ .

#### **2.3.2.6. Sub módulo: Decodificador**

Este sub módulo es el encargado de decodificar la trama de 24 bits utilizando la decodificación Golay extendida, entregando en su salida la trama de 12 bits, siendo esta la información útil que se envió desde el transmisor.

Con la definición del módulo transmisor y receptor se tiene definido el sistema de comunicaciones basado en hardware reconfigurable.

# CAPÍTULO III

## SIMULACIÓN, IMPLEMENTACIÓN, PRUEBAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el presente capítulo se realiza la descripción de los procedimientos efectuados para la implementación del sistema de comunicación digital, diseñado en el capítulo II, sobre hardware reconfigurable, específicamente sobre el USRP® B210, además se describen los resultados obtenidos, para lo cual se sigue la metodología orientada hacia el marco de acción del modelo lineal secuencial o modelo en cascada [17], puntualmente se aborda la cuarta fase de la metodología, la fase de pruebas y resultados, dividida como se muestra a continuación:

- Selección de la herramienta de simulación
- Diseño y ejecución de un plan de pruebas
- Análisis del desempeño del sistema de comunicaciones

### 3.1. SELECCIÓN DE LA HERRAMIENTA DE SIMULACIÓN

La elección de la herramienta de simulación se realizó teniendo en cuenta las siguientes consideraciones, primero el tipo de software que permita configurar el USRP® B210, segundo el reconocimiento a nivel de investigación del software y tercero la experiencia con el lenguaje de programación.

Como se mencionó en el capítulo II, el USRP® B210 del fabricante Ettus Research™, permite interactuar con plataformas SDR en Matlab®, GNU Radio y LabVIEW. Matlab® goza de alto reconocimiento y estabilidad, su lenguaje de programación es semejante al de C, y sobre todo permite el modelado y simulación de diferentes tecnologías de sistemas de comunicaciones, teniendo herramientas específicamente diseñadas para realizar análisis de desempeño.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores la herramienta software escogida para realizar la simulación del sistema de comunicaciones en banda base es Matlab® en su versión R2015, que es la más actualizada con que cuenta la Universidad del Cauca.

Es de resaltar que Matlab® no es de libre distribución, pero, la Universidad del Cauca proporciona las licencias para dicho software.

La plataforma SDR para la interacción con el USRP® B210, viene incluida para trabajar mediante complementos dentro de Matlab® y está diseñada en Simulink®, lo cual permite

modelar el sistema de comunicaciones a nivel de bloques. Por tanto el sistema de comunicaciones con codificación Golay está diseñado en Simulink®, particularmente los bloques de codificación y decodificación Golay, están interactuando entre Simulink® y un código en Matlab®.

### **3.2. DISEÑO Y EJECUCIÓN DE UN PLAN DE PRUEBAS**

Para el diseño del plan de pruebas hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1. El sistema de comunicación banda base llevado a cabo en el presente trabajo de grado, es un sistema que genera un mensaje binario de doce bits, el cual se codifica utilizando una codificación Golay extendida, obteniendo una palabra código de veinticuatro bits. Posteriormente esta palabra se modula utilizando una modulación QPSK, cuyo resultado es un vector complejo de doce símbolos, que finalmente es enviado a un receptor mediante un canal AWGN, y en el receptor se realizan los procesos de demodulación y decodificación para obtener el mensaje estimado, el cual se compara con el mensaje transmitido y de esta forma se analiza la cantidad de errores ocurridos en la transmisión, y se comprueba el funcionamiento de la modulación QPSK y la codificación Golay extendida, en un sistema banda base.
2. Al sistema de comunicaciones banda base del primer ítem, se le agrega información binaria después del codificador Golay extendido, con el fin de obtener una trama bien conformada, esta trama es modulada con un modulador QPSK en banda base, luego es filtrada con un filtro conformador SR-RCF, y enviada en pasa banda al espacio libre, por medio del USRP® B210. A determinada distancia del transmisor está el receptor, es decir otro USRP® B210, el cual recibe esta información y realiza los procesos necesarios para recuperar con la mayor fidelidad la información enviada.

Con las anteriores consideraciones y dado que el objetivo del presente trabajo de grado es analizar el desempeño de un sistema de comunicaciones, cuando se utiliza una codificación Golay extendida, basado en hardware reconfigurable, es necesario primero analizar el sistema de comunicaciones en banda base con y sin codificación Golay extendida y posteriormente analizar el sistema de comunicaciones en pasa banda en una frecuencia portadora determinada con y sin codificación Golay extendida.

#### **3.2.1. Definición del escenario de simulación**

Para el sistema de comunicaciones diseñado en el capítulo II, se tiene un escenario de simulación llevado a cabo en software, en la herramienta de Matlab® bajo el entorno de programación visual Simulink®. Los dos escenarios de simulación se presentan en la



figura 3.1 y figura 3.2, donde se realiza el diseño del sistema de comunicaciones sin codificación y con codificación Golay extendida respectivamente.

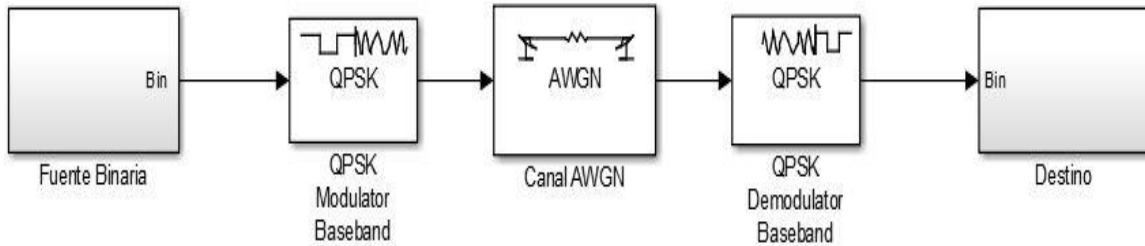


Figura 3.1. Escenario de simulación sin codificación Golay extendida

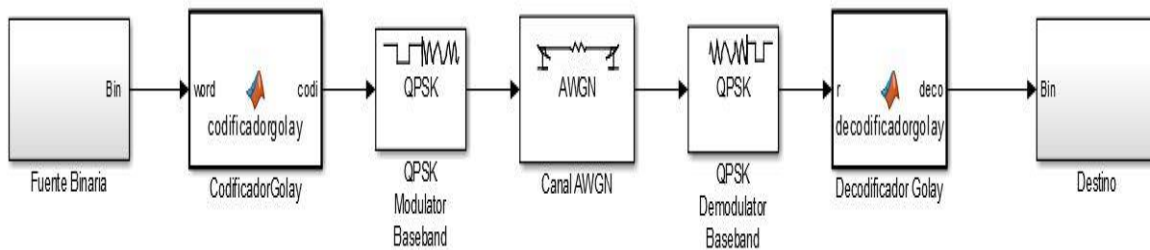


Figura 3.2. Escenario de simulación con codificación Golay extendida

### 3.2.2. Definición del escenario de implementación

En el sistema de comunicaciones diseñado en el capítulo II, se tiene un escenario con tres elementos principales: un transmisor, un canal de comunicaciones y un receptor, por lo cual se presenta un escenario de implementación conformado por un computador, conectado mediante una interfaz USB con un USRP® B210, el cual a su vez tiene una antena omnidireccional, que se encarga de radiar la señal de interés en una frecuencia portadora. Esto en conjunto conforma el módulo transmisor. El espacio libre actúa como canal de comunicaciones con un comportamiento ruidoso e interferente y en el receptor se tiene una configuración similar al módulo transmisor, el escenario se ilustra en la figura 3.3.



Figura 3.3. Escenario de implementación

Con el escenario definido se procede a especificar los casos de implementación, teniendo en cuenta dos de los posibles parámetros que afectan la señal transmitida por el aire, como son, la distancia entre la antena transmisora y la antena receptora y la frecuencia portadora de la señal en radiofrecuencia.

### 3.2.3. Definición de los casos de implementación

Se definen dos casos de implementación, en ambos se varía la distancia entre el USRP® del módulo transmisor y el USRP® del módulo receptor, con el fin de analizar el desempeño del sistema y la capacidad de corrección de la codificación Golay extendida, cuando se tiene una potencia en la señal portadora cada vez más débil, debido a que aumenta la distancia entre el transmisor y el receptor.

Además se cambia la frecuencia de la señal portadora, para determinar el comportamiento de la codificación Golay extendida y el desempeño del sistema, cuando la frecuencia es cercana a otras portadoras como señales celulares, o señales de Wi-Fi y cuando la señal portadora está en una banda menos utilizada.

En la siguiente tabla se describen los dos casos analizados en el presente documento.

Casos de Implementación	Frecuencia (GHz)	Distancia (cm)
Primero	2.5	30, 40, 50, 60, 70, 80
Segundo	4.5	30, 40, 50, 60, 70, 80

Tabla 3.1. Casos de implementación

Para ambos casos se analiza el desempeño del sistema cuando se implementa la codificación Golay extendida y cuando no se implementa ningún tipo de codificación de canal. Con los casos de implementación ya definidos se procede a presentar los parámetros físicos que son necesarios para el correcto funcionamiento del sistema sobre el USRP® B210.

### 3.2.4. Definición de los parámetros físicos del sistema de comunicaciones

El sistema de comunicaciones con codificación Golay sobre hardware reconfigurable requiere de unos parámetros específicos para un correcto funcionamiento, parámetros tanto del USRP® B210 como de la información a transmitir. La tabla 3.2 describe los parámetros más importantes.

PARÁMETRO	MÓDULO	
	Transmisor	Receptor
Frecuencia portadora	2.5GHz - 4.5GHz	2.5GHz - 4.5GHz
Frecuencia de reloj	20MHz	20MHz
Frecuencia de muestreo DAC-ADC	61.11 MS/seg	61.11 MS/seg
Factor de decimación/interpolación	100	100
Frecuencia de operación ( $F_s$ )	200KHz	200KHz
Periodo de trama	2ms	2ms
Periodo de bit ( $T_b$ )	20 $\mu$ s	20 $\mu$ S
Velocidad de bit ( $R_b$ )	50Kbps	50Kbps
Información útil (número a codificar)	12bits	12bits
Información codificada	24bits	24bits
Información aleatoria Bernoulli	50bits	50bits
Trama con polinomio Scramble	76bits	76bits
Trama código Barker	26bits	26bits
Tamaño de trama final	100bits	100bits

<b>Esquema de modulación (M)</b>	QPSK	QPSK
<b>Velocidad de símbolo (<math>R_S</math>)</b>	25Kbaudios	25Kbaudios
<b>Factor de roll-off (<math>\alpha</math>)</b>	0.5	0.5
<b>Ancho de banda de la señal</b>	37.5KHz	37.5KHz
<b>Ganancia USRP</b>	35 dB	30 dB
<b>Tipo de antena</b>	Omnidireccional	Omnidireccional
<b>Ganancia de antena</b>	3dBi	3dBi

Tabla 3.2. Parámetros físicos

Con esta última tabla se tiene todo lo necesario para realizar las pruebas de implementación y proceder a presentar el análisis de los resultados obtenidos para el sistema de comunicación con codificación Golay extendida y para el sistema sin codificación.

### 3.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Dado que existen dos tipos de resultados, los que se obtienen en la simulación del sistema de comunicaciones en banda base y los que se obtienen en la implementación del sistema de comunicaciones en pasa banda, sobre el hardware reconfigurable, primero se analizan los resultados en banda base, para verificar el desempeño y el correcto funcionamiento de los módulos de codificación y decodificación Golay extendida, diseñados en Simulink®, luego se analizan los resultados del sistema en pasa banda, para estimar el desempeño y finalmente validar los resultados de simulación con los de implementación.

Es importante aclarar que en el sistema en banda base, el parámetro a variar es la relación  $\frac{E_b}{N_0}$ , debido a que se tiene un canal AWGN, mientras que en el sistema pasa banda el parámetro a variar es la distancia y la frecuencia portadora, ya que el canal es el espacio libre. Los resultados a tener en cuenta para hacer los correspondientes análisis de diagramas de constelación, diagramas del ojo y espectro, se toman cuando el transmisor y el receptor están separados a distancias de 30cm, 50cm y 80 cm, las cuales son las distancias más significativas de las pruebas realizadas. El análisis se hace teniendo en cuenta dos frecuencias portadoras. La tabla general que contiene todos los resultados se encuentra en el anexo F, con los cuales se realizó un promedio de datos estadístico<sup>19</sup>.

<sup>19</sup> Un promedio de datos estadístico se conoce como la media aritmética y para calcularla se suman todas las cifras de la distribución y se divide entre el número de cifras.

### 3.3.1. Análisis de resultados del sistema de comunicaciones en banda base.

El sistema en banda base mostrado en la figura 3.4, consta de una fuente aleatoria de  $2^{12}$  números enteros entre 0 y 4095, cada número es convertido a una secuencia de 12 bits, de forma que si el número binario tiene menos de 12 bits, se le agregan ceros a la izquierda hasta completar 12 bits, estas secuencias ingresan al codificador Golay, en donde se aplica una codificación Golay extendida a dicha secuencia de bits, para así entregar al modulador QPSK banda base una palabra código de 24 bits, posteriormente este módulo representa esta palabra en 12 símbolos, hecho este procedimiento, se envía la señal por un canal AWGN y se aplican en el receptor los procesos de demodulación y decodificación, para obtener el mensaje estimado y realizar el cálculo de la BER, comparando bit a bit el mensaje enviado con el estimado por el receptor.

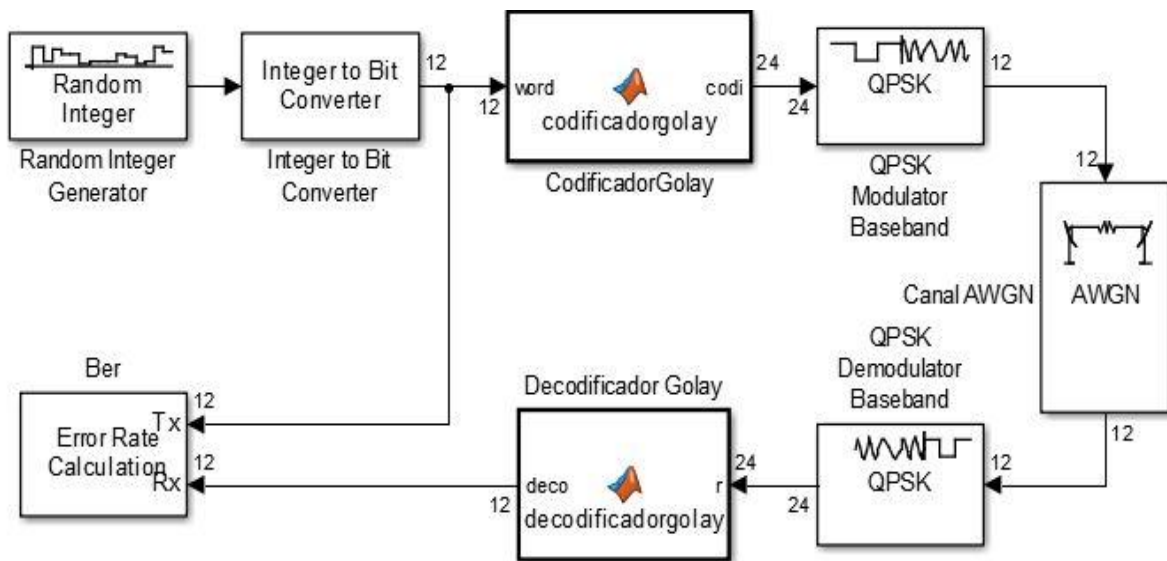


Figura 3.4. Sistema banda base con codificación Golay

La prueba de simulación se lleva a cabo en Simulink® y consiste en enviar aleatoriamente diez millones de números entre 0 y 4095 por un sistema en banda base que implementa la codificación Golay extendida y la modulación QPSK en un canal AWGN. El parámetro de desempeño a analizar es la BER, para ello se utiliza la herramienta BERTool<sup>20</sup> de Matlab®, la cual permite el cálculo de la BER de un sistema de comunicaciones mediante la variación de la relación de Energía de Bit a Ruido ( $E_b/N_o$ ), además da la posibilidad de graficar la probabilidad de error teórica dada una modulación y aplicando o no una técnica de codificación.

En la figura 3.5. se presentan las gráficas de BER vs  $E_b/N_o$  obtenidas mediante BERTool, en la cual la curva azul representa la BER teórica que se obtiene en un sistema que

<sup>20</sup> BERTool es una Interfaz Gráfica de Usuario (GUI, *Graphical User Interface*) interactiva de Matlab®, para el análisis de la Tasa de Error de Bit (BER) de los sistemas de comunicaciones. Calcula la BER en función de la Relación Señal a Ruido y es útil para verificar las curvas de desempeño de BER simuladas contra curvas de BER teóricas.

implementa una codificación Golay extendida y una modulación QPSK en un canal AWGN, es decir, es el punto de referencia para el comportamiento que debe tener cualquier sistema que utilice dicha codificación y modulación, además es de notar que la curva de puntos rojos indica el comportamiento de la BER que se obtiene en el sistema banda base del presente trabajo de grado, donde se evidencia que la BER obtenida en cada punto  $E_b/N_0$  tiene un comportamiento similar al obtenido teóricamente, la diferencia entre las dos curvas se debe a que la curva teórica es la representación del sistema de comunicaciones con un método de decisión óptimo, el cual tiene una carga computacional muy grande, con lo cual se asegura un desempeño ideal.

Es importante resaltar la robustez de la codificación Golay extendida frente al ruido, ya que con un valor de aproximadamente 8.5dB en la relación de energía de bit a ruido, se obtienen valores de BER del orden de  $1 \times 10^{-6}$ , es decir 1 bit errado de 1 millón de bits recibidos y con valores por encima de 10dB en la relación de energía de bit a ruido, siguiendo el comportamiento de la curva, el sistema no presenta ningún bit errado.

Por lo anterior se evidencia que el sistema banda base con los módulos de codificación y decodificación funcionan adecuadamente.

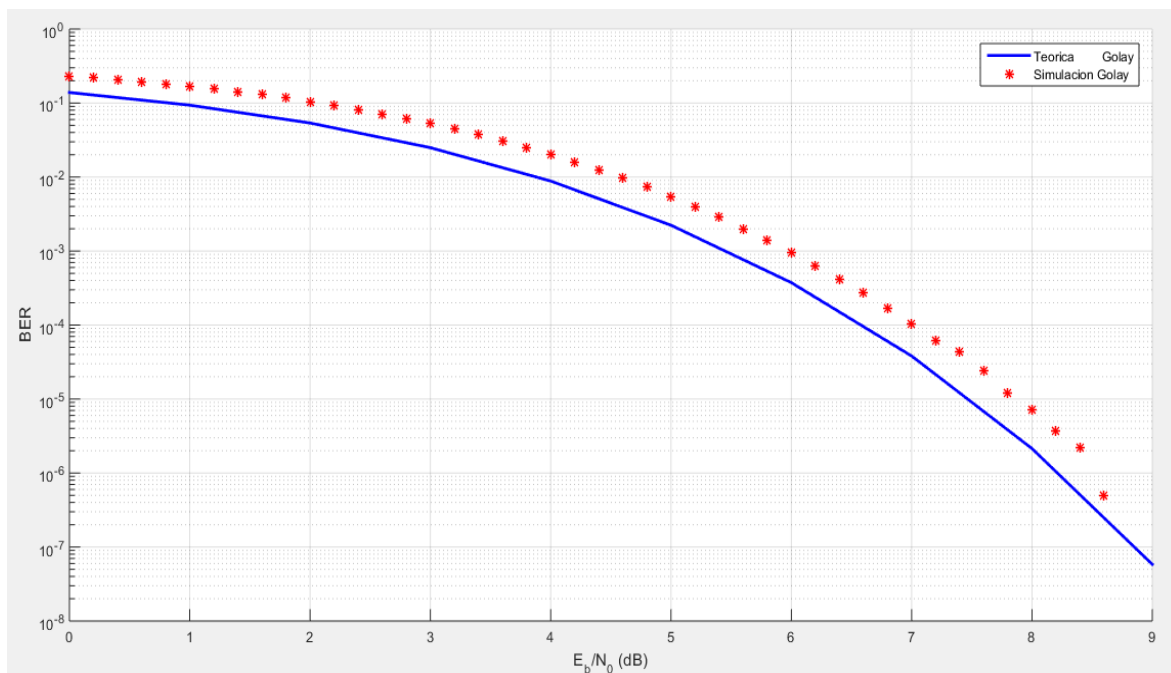


Figura 3.5. Curva BER vs  $E_b/N_0$  sistema banda base con Codificación Golay

El siguiente paso es comparar el comportamiento de la BER de este sistema en banda base, con el mismo sistema en banda base, pero sin los módulos de codificación y decodificación Golay extendida.

En la figura 3.6 se presenta el sistema en banda base con modulación QPSK y sin codificación Golay extendida. Al igual que en el sistema anterior, la fuente se encarga de generar diez millones de números aleatorios, luego se convierte cada número a una

secuencia de 12 bits, después se modulan mediante una modulación QPSK y se envían a través de un canal AWGN. Posteriormente en el receptor se demodulan con el fin de comparar el mensaje transmitido con el mensaje estimado y así calcular la cantidad de bits errados.

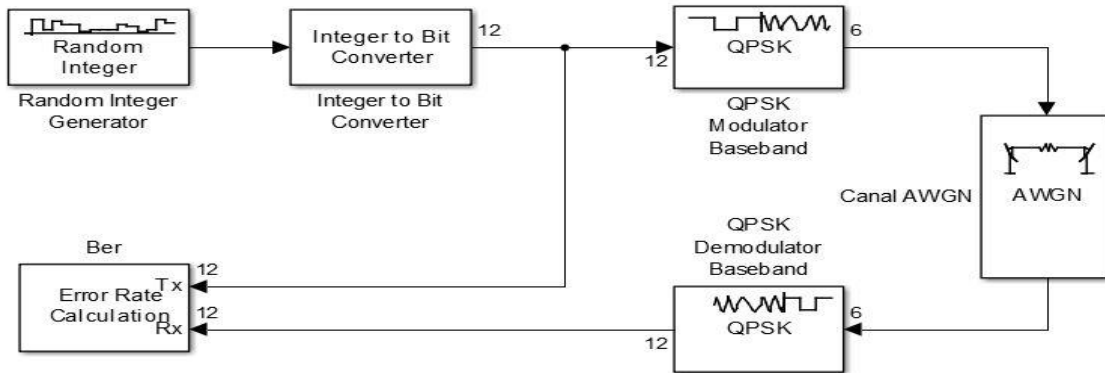


Figura 3.6. Sistema banda base sin Codificación

Los resultados que se obtienen se grafican mediante BERTool y se muestran en la figura 3.7, donde se observa como las dos curvas de BER vs  $E_b/N_0$ , para el sistema en banda base sin codificación Golay extendida, tanto la curva teórica como la obtenida por simulación son idénticas, debido a que en ambos se toman casos ideales.

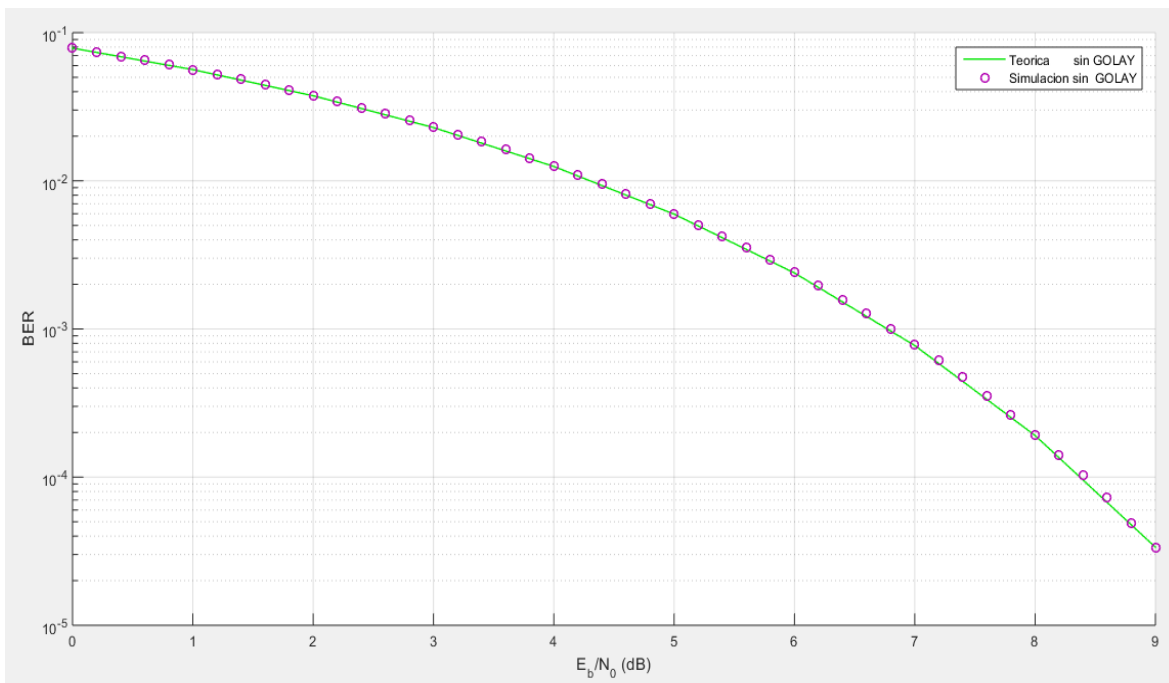


Figura 3.7. Curva BER vs  $E_b/N_0$  sistema banda base sin Codificación

Con el fin de analizar que desempeño tiene el sistema en banda base, cuando se implementa la codificación Golay extendida, se comparan las curvas de BER vs  $E_b/N_0$  obtenidas anteriormente, como se muestra en la figura 3.8, donde se resalta que después

de los 5dB en la relación  $E_b/N_0$  el comportamiento de la BER obtenida con el sistema en banda base con codificación Golay extendida, disminuye significativamente la cantidad de errores, en comparación cuando el sistema no presenta la codificación Golay extendida.

Por tanto se concluye, que en un sistema en banda base la codificación Golay extendida, permite obtener una baja BER para valores de  $E_b/N_0$  por encima de los 5dB y su desempeño es óptimo para ser implementado en un sistema pasa banda.

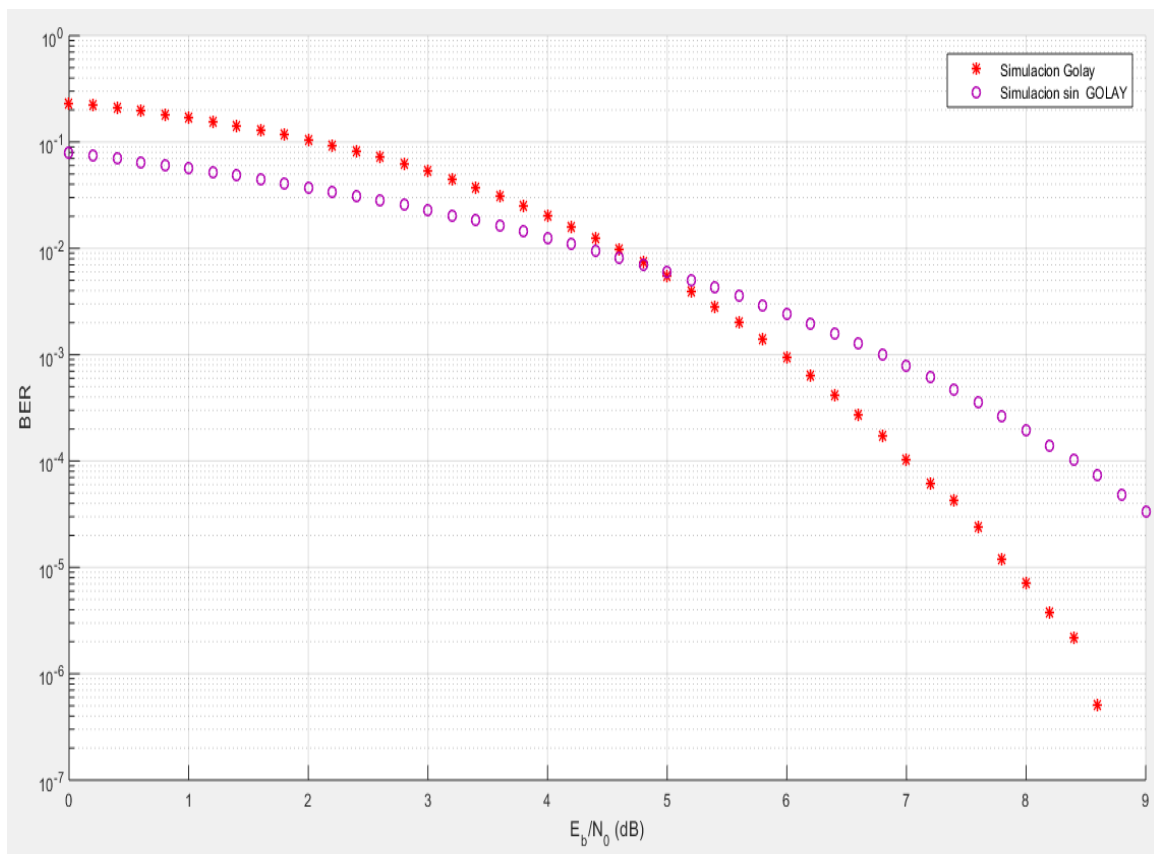


Figura 3.8. Comparación Curva BER vs  $E_b/N_0$  sistema banda base con y sin codificación Golay

Ahora se presentan los resultados que se obtienen para los dos casos de implementación con el sistema en pasa banda con codificación Golay extendida sobre el USRP® B210 en el escenario ya definido, con el espacio libre como canal de comunicaciones entre el módulo transmisor y el módulo receptor.

### 3.3.2. Análisis de resultados del sistema de comunicaciones en pasa banda.

Las pruebas para los dos escenarios de implementación consiste en enviar aleatoriamente 84.000 números entre 0 y 4095, donde cada número se representa con 12 bits, lo cual equivale a la información útil, esta información es enviada en una trama de 100 bits, por lo cual al final de la prueba en el receptor se tiene un total de 8.400.000 bits,



de los cuales la carga útil de información corresponde a 1.008.000 bits y con base en este valor se calcula la tasa de errores de bit.

Los resultados que se obtienen para cada caso de implementación se presentan en el siguiente orden: diagramas de constelación en el módulo receptor, espectros en transmisión y recepción, diagramas del ojo en transmisión y recepción y una tabla resumen para el sistema cuando implementa una codificación Golay extendida y cuando no tiene ningún tipo de codificación de canal.

Finalmente a manera de conclusión, se presenta una gráfica de BER contra distancia, dado que no es posible variar la relación de energía de bit a ruido  $E_b/N_o$ , pero variando la distancia se consigue un resultado similar.

### **3.3.2.1. Primer caso de implementación: Frecuencia portadora en 2.5GHz**

En este caso de implementación la frecuencia portadora de la señal se configura en 2.5GHz, por dos razones principales:

- La antena VERT2450 en su rango de frecuencia más bajo radia óptimamente en el rango de 2.4GHz a 2.5 GHz.
- En 2.4GHz están radiando muchos puntos Wi-Fi los cuales generan mucha interferencia en la antena del módulo receptor.

El parámetro que varía entre la antena del transmisor y la antena del receptor es la distancia, con el fin de disminuir el nivel de la potencia de la señal que llega al módulo receptor y por ende una mayor cantidad de bits errados, para así analizar como la codificación Golay extendida mejora o empeora la BER, en comparación al mismo sistema sin codificación.

Los diagramas de constelación tomados en recepción para las distancias de 30cm, 50cm y 80cm respectivamente se presentan en la figura 3.9, donde se observa como a medida que la distancia aumenta, los símbolos QPSK presentan mayor dispersión respecto a los puntos nominales de la constelación, esto debido que a mayor distancia, menor relación señal a ruido.

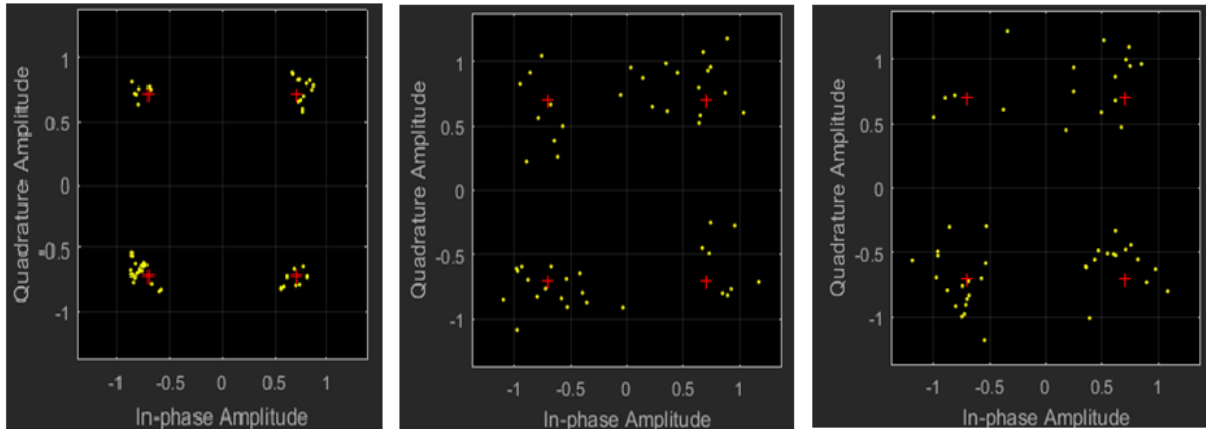


Figura 3.9. Diagramas de constelación con frecuencia portadora de 2.5Ghz a distancias de 30cm, 50cm y 80cm entre el transmisor y el receptor

En la figura 3.10 se muestra el espectro de la señal transmitida, la cual se ha codificado, modulado y filtrado. Esta señal tiene un ancho de banda teórico de 37.5KHz según la ecuación 1.6 y la tabla 3.2, lo cual se evidencia en la gráfica, donde se tiene un ancho de banda aproximado de 18.8KHz para cada banda lateral, es decir un ancho de banda de 37.6KHz que es similar al teórico.

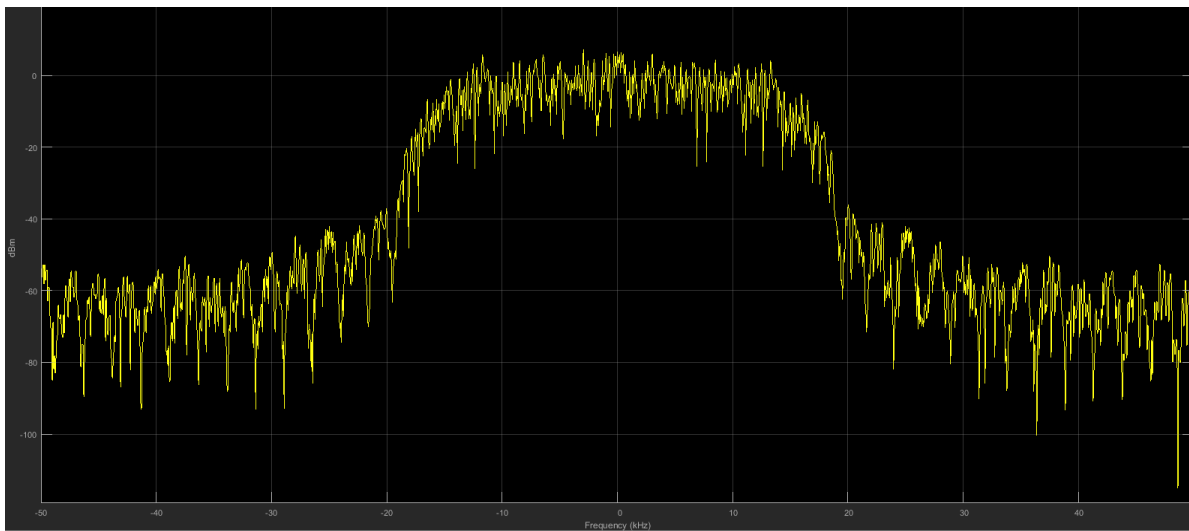


Figura 3.10. Espectro de la señal en transmisión.

En las figuras 3.11, 3.12 y 3.13 se muestran los espectros de la señal recibida. En estas tres gráficas se puede observar que a medida que la distancia aumenta, el nivel de ruido (espectro fuera de banda) tiende a igualar el nivel de la señal (espectro en la banda deseada).

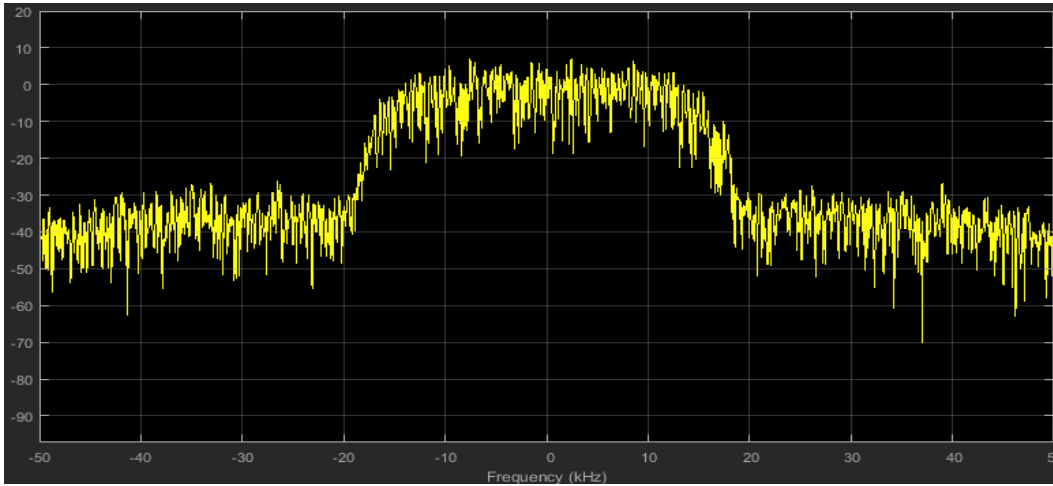


Figura 3.11. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 2.5GHz a 30cm de distancia entre el transmisor y el receptor.

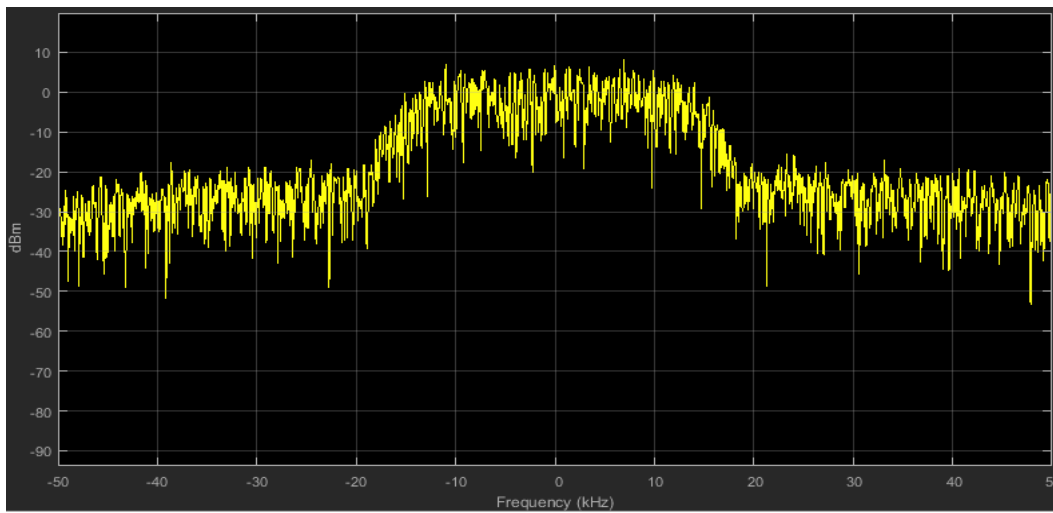


Figura 3.12. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 2.5GHz a 50cm de distancia entre el transmisor y el receptor.

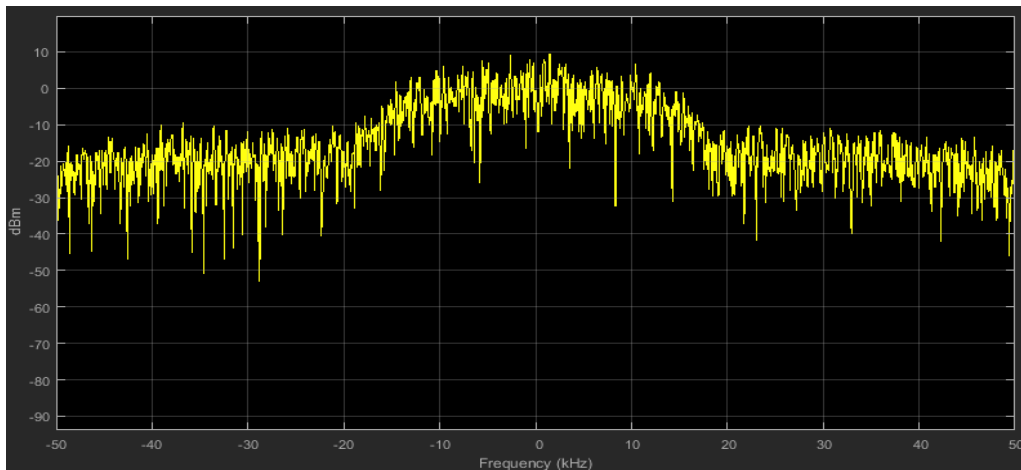


Figura 3.13. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 2.5GHz a 80cm de distancia entre el transmisor y el receptor.

En las figuras 3.14 y 3.15 se proceden a mostrar los diagramas del ojo de transmisión y recepción respectivamente.

En la figura 3.14 se aprecia como el periodo de cada símbolo tiene una duración de  $4 \times 10^{-5}$  segundos, es decir  $40 \mu\text{s}$ , y dado que la señal está modulada en QPSK donde un símbolo representa dos bits, el periodo de bit es  $20 \mu\text{s}$ .

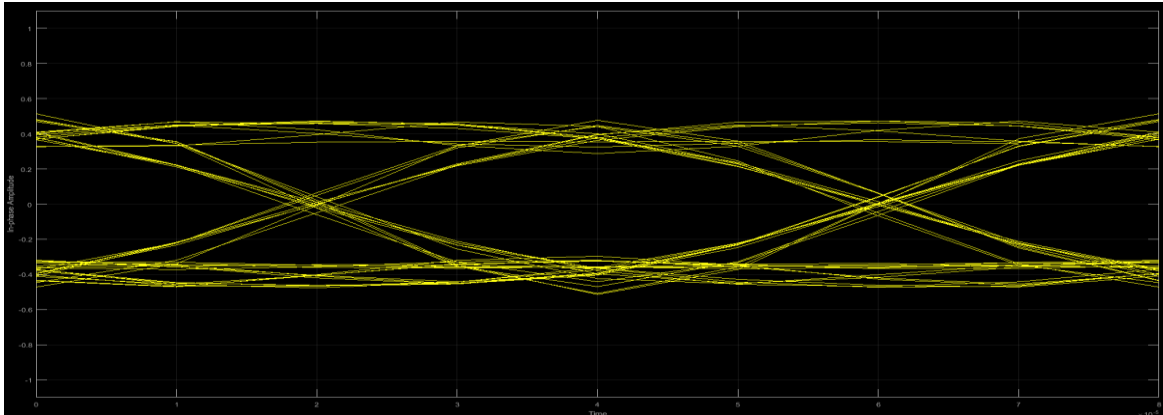


Figura 3.14. Diagrama del ojo en transmisión.

En la figura 3.15 se muestran los diagramas de ojo de las partes real e imaginaria de la señal en banda base recibida (previa a la decisión), los cuales permiten establecer que el instante óptimo de muestreo (instante de mayor apertura vertical) es prácticamente el mismo para las partes real e imaginaria de los símbolos de la constelación. Además, se puede notar cierta vulnerabilidad frente a errores de sincronismo, es decir, errores en la estimación de dicho instante de muestreo.

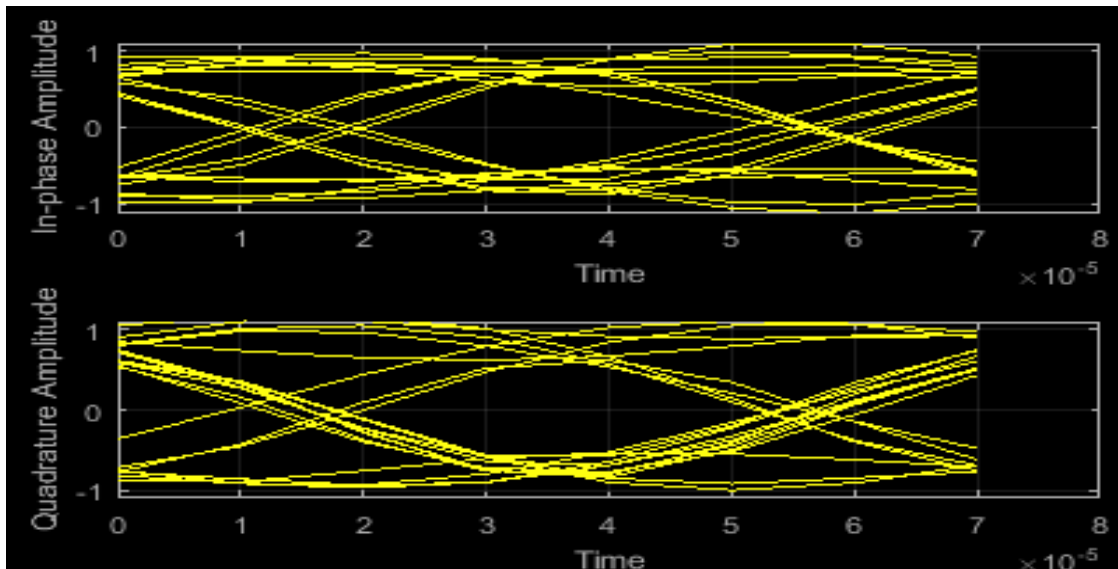


Figura 3.15. Diagrama del ojo en recepción con frecuencia portadora de 2.5GHz.

En la tabla 3.3 se presentan los resultados que se tienen para este caso de implementación, tanto para el sistema con codificación Golay extendida, como para el sistema sin codificación, para diferentes distancias entre transmisor y receptor.

En esta tabla se analiza cómo el desempeño del sistema de comunicaciones, en términos de BER, es mejor cuando el sistema implementa la codificación Golay extendida, respecto al sistema sin codificación.

Distancia (cm)	Bits errados sin codificación	Bits errados con codificación	Número total de bits recibidos	BER sin codificación	BER con codificación Golay
30	22	15	1.008.000	2.18E-5	1.49E-5
50	897	758	1.008.000	8.90E-4	7.52E-4
80	9.218	8.460	1.008.000	9.14E-2	8.39E-3

Tabla 3.3. Resultados sistema de comunicaciones con y sin codificación Golay con frecuencia portadora de 2.5GHz

Teniendo en cuenta que no es posible variar la relación  $E_b/N_o$  en un canal de comunicaciones real, en la figura 3.16 se presentan las curvas de desempeño BER contra distancia, para el sistema de comunicaciones con y sin codificación Golay extendida sobre el USRP® B210, donde se observa que el valor de BER aumenta a medida que la distancia entre el transmisor y el receptor también lo hace, presentando un comportamiento creciente, tanto para el sistema con codificación (curva azul) como sin codificación (curva verde).

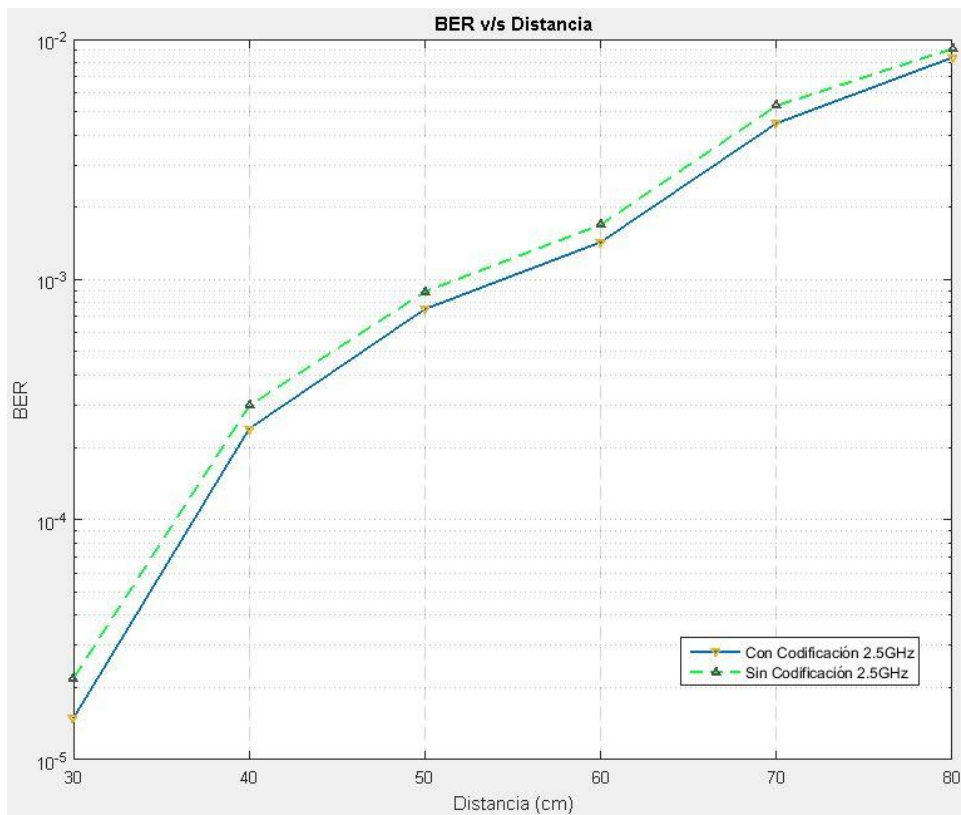


Figura 3.16. Curvas de desempeño BER vs distancia con frecuencia portadora de 2.5GHz

### 3.3.3. Segundo caso de implementación: Frecuencia portadora en 4.5GHz

El segundo caso de implementación, difiere del primero en la frecuencia portadora de la señal, la cual pasa de 2.5 GHz a 4.5GHz, esta frecuencia se escoge por dos razones principales:

- La frecuencia de 4.5GHz está dentro del rango de frecuencias que puede radiar la antena VERT2450 asegurando más del 90% de la potencia.
- Es necesario tener una frecuencia mayor a 2.5GHz, para así analizar como es el desempeño del sistema cuando la frecuencia pasa de 2.5GHz a casi el doble de la frecuencia.

De manera similar al primer caso de implementación se varía la distancia entre la antena del transmisor y la antena del receptor.

La figura 3.17 presenta los tres diagramas de constelación para las distancias de 30cm, 50cm y 80cm respectivamente, los cuales presentan un comportamiento más dispersivo en los símbolos que están llegando (puntos amarillos), respecto al caso de 2.5GHz, esto debido a que al aumentar la frecuencia de operación, la señal sufre más pérdidas.

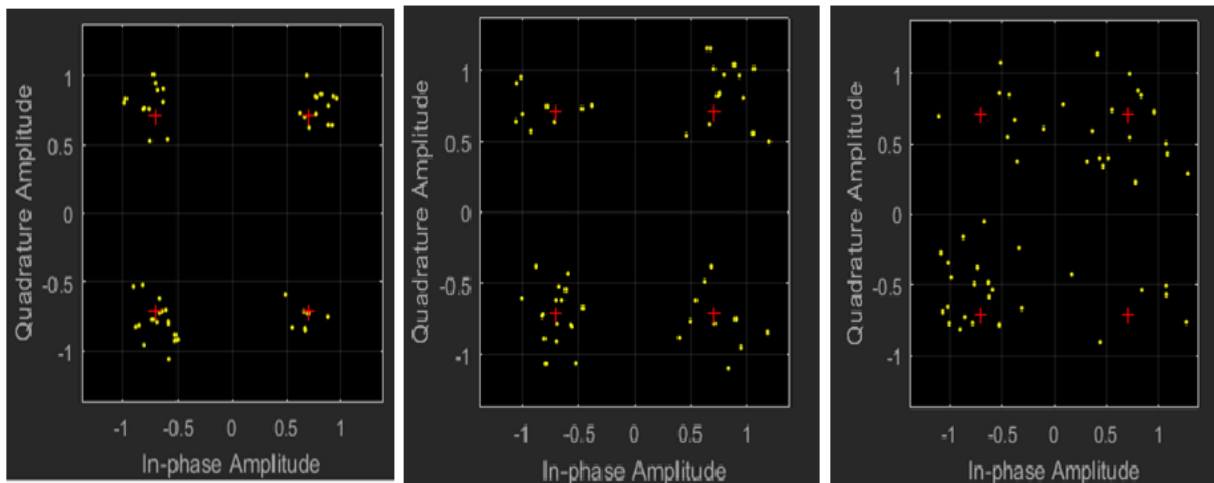


Figura 3.17 Diagramas de constelación con frecuencia portadora de 4.5GHz a distancias de 30cm, 50cm y 80cm entre el transmisor y receptor

En la figura 3.18 se presenta el espectro de la señal en transmisión, el cual de manera similar al primer caso, tiene un ancho de banda de 37.5KHz.

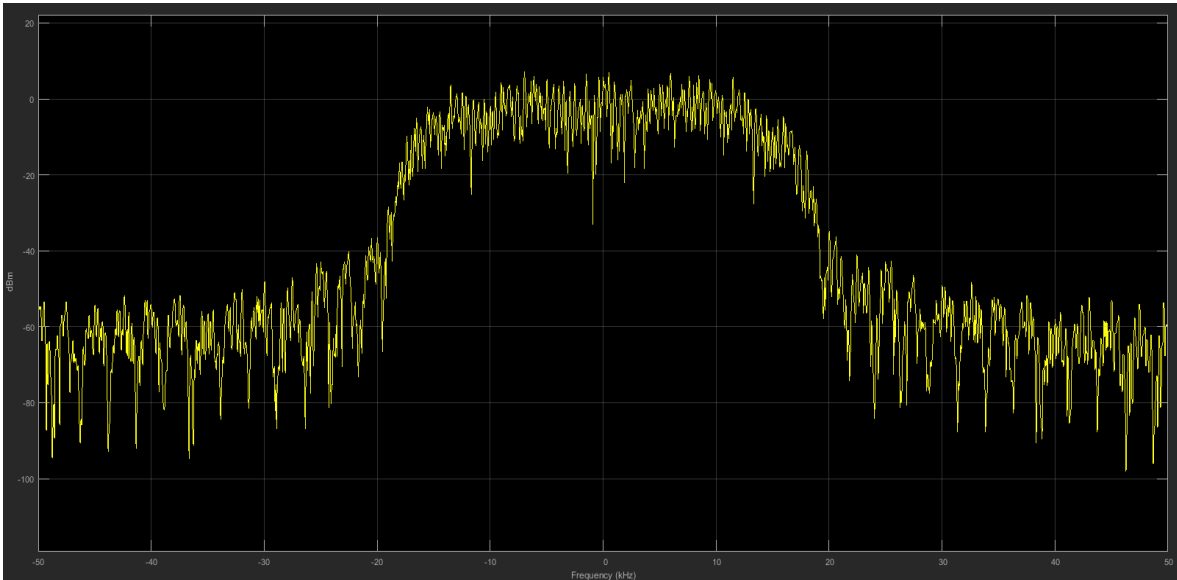


Figura 3.18. Espectro de la señal en transmisión.

En las figuras 3.19, 3.20 y 3.21 se muestra el espectro de la señal recibida a distancias de 30cm, 50cm, y 80cm respectivamente, donde se evidencia que la señal recibida en las tres diferentes distancias tiende a confundirse con el nivel de ruido a medida que aumenta la distancia. Se puede observar también mayor degradación del espectro de la señal útil en este último caso respecto al anterior (2.5 GHz).

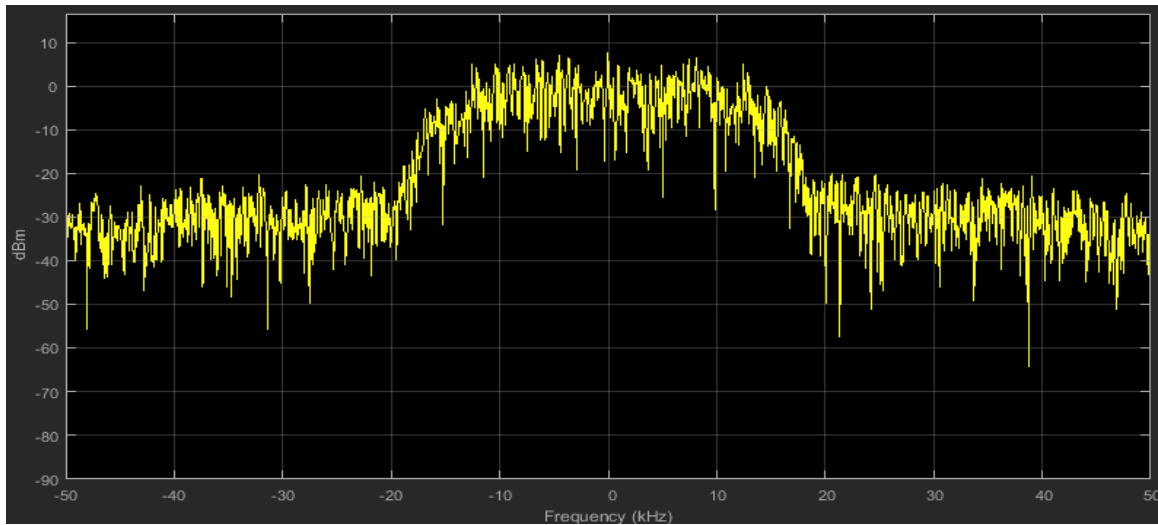


Figura 3.19. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 4.5GHz a 30cm de distancia entre el transmisor y el receptor

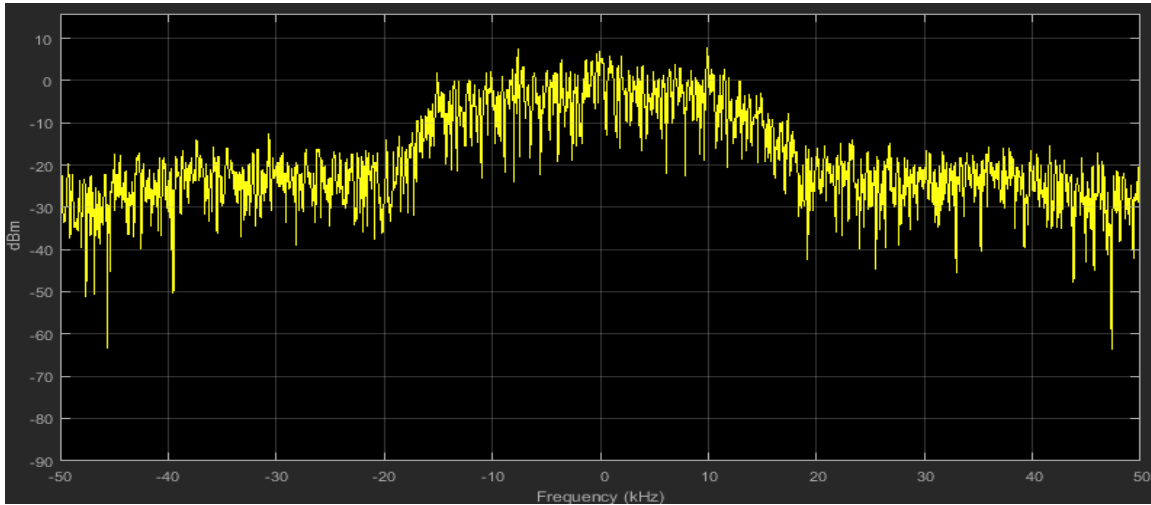


Figura 3.20. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 4.5GHz a 50cm de distancia entre el transmisor y el receptor

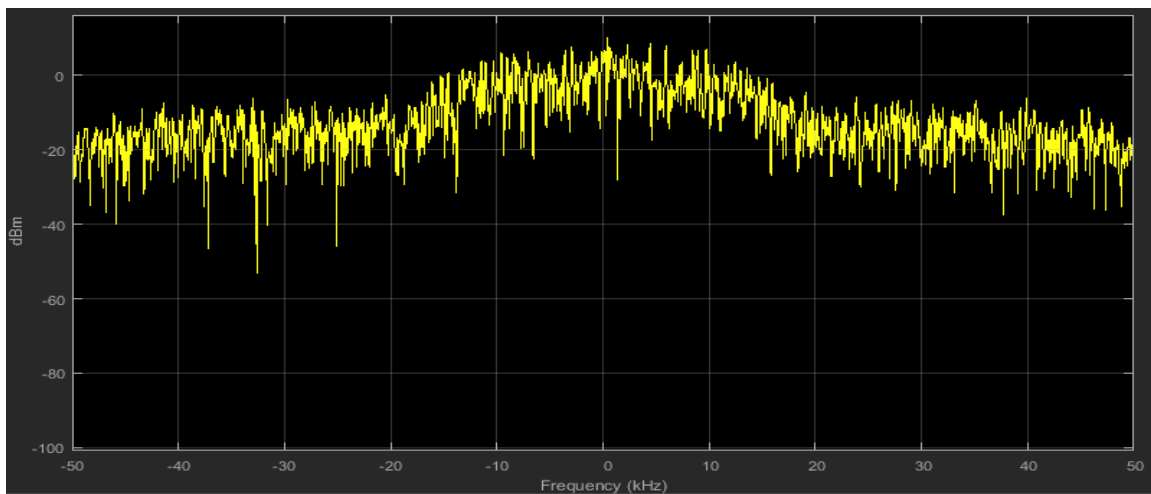


Figura 3.21. Espectro de la señal recibida con frecuencia portadora de 4.5GHz a 80cm de distancia entre el transmisor y el receptor

Teniendo en cuenta estos resultados, se puede afirmar que el hecho de aumentar la frecuencia de la señal portadora de 2.5GHz a 4.5GHz hace que la señal esté más afectada por el ruido del canal, es decir el espacio libre, de forma que si no se tiene un adecuado nivel en la potencia de transmisión y antenas con suficiente ganancia, la señal recibida se confundirá con ruido.

En el diagrama del ojo del receptor el cual se muestra en la figura 3.22, se puede apreciar una menor apertura tanto vertical como horizontalmente respecto al primer caso de implementación, aun así es posible determinar que el periodo de símbolo de  $40\mu\text{s}$ . Con una menor apertura vertical del diagrama de ojo en recepción se tiene que la potencia de la señal ha sufrido mayores pérdidas comparado con el primer caso y también con una menor apertura horizontal, lo que conduce a mayores dificultades en la recuperación del sincronismo, además se tiene un aumento en el Jitter.



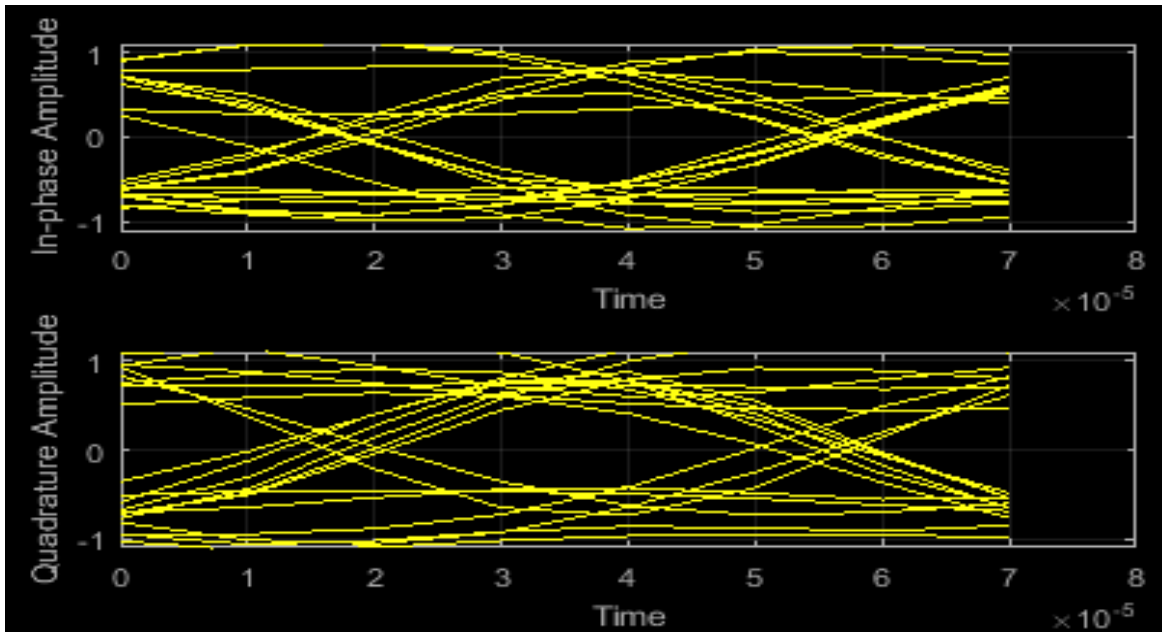


Figura 3.22. Diagrama del ojo en recepción con frecuencia portadora de 4.5GHz.

Con todo lo anterior el desempeño del sistema está un poco más comprometido, sin embargo la apertura del ojo es suficiente para identificar los símbolos transmitidos y poder hacer la recuperación adecuada del sincronismo.

Finalmente para este caso de implementación se presentan en la tabla 3.4 los resultados obtenidos de los bits errados para las tres diferentes distancias, donde es de resaltar que el número de bits errados siempre es menor en el sistema que implementa la codificación Golay extendida que en el sistema sin codificación de canal.

Distancia (cm)	Bits errados sin codificación	Bits errados con codificación	Número total de bits recibidos	BER sin codificación	BER con codificación Golay
30	130	107	1.008.000	1.29E-4	1.06E-4
50	1.196	1.037	1.008.000	1.19E-3	1.03E-3
80	12.617	11.175	1.008.000	1.25E-2	1.11E-2

Tabla 3.4. Resultados sistema de comunicaciones con y sin codificación Golay con frecuencia portadora de 4.5GHz

Comparando la BER obtenida en el sistema con codificación Golay extendida para cada distancia, se tiene que en el segundo caso, a 4.5GHz, la BER aumenta un 14% respecto al primer caso (2.5 GHz) en la distancia más corta (30cm) y un aumento del 11% para la distancia más larga (80cm), con lo cual se evidencia que la frecuencia de operación influye directamente en el desempeño del sistema.

Los resultados obtenidos indican que, de manera similar al caso anterior a 2.5GHz, el desempeño del sistema de comunicaciones en términos de BER, es mejor en el sistema de comunicaciones que implementa la codificación Golay extendida al sistema de comunicaciones que no implementa ningún tipo de codificación de canal, dado la capacidad de corrección de la codificación aplicada.

En la figura 3.23 se presentan las curvas de desempeño BER contra distancia, para el sistema de comunicaciones con codificación Golay extendida y sin codificación sobre el USRP® B210, a la frecuencia de 4.5 GHz, donde el valor de BER, al igual que en el caso anterior, aumenta con la distancia.

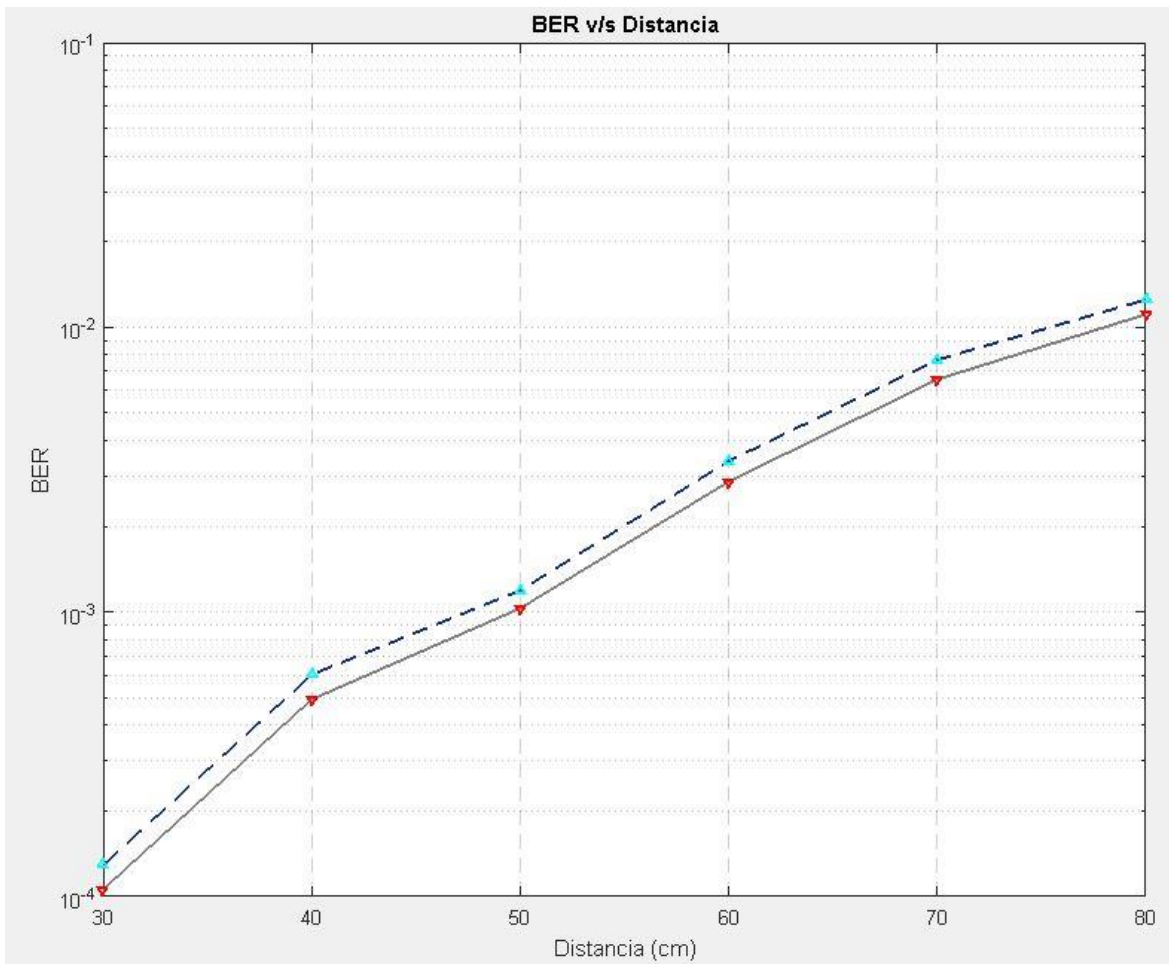


Figura 3.23. Curvas de desempeño BER vs distancia a 4.5GHz

Finalmente se condensan los resultados de la tabla 3.3 del primer caso de implementación con frecuencia portadora de 2.5GHz y la tabla 3.4 del segundo caso con frecuencia portadora de 4.5GHz en cuatro gráficas de BER contra distancia como lo muestra la figura 3.24.

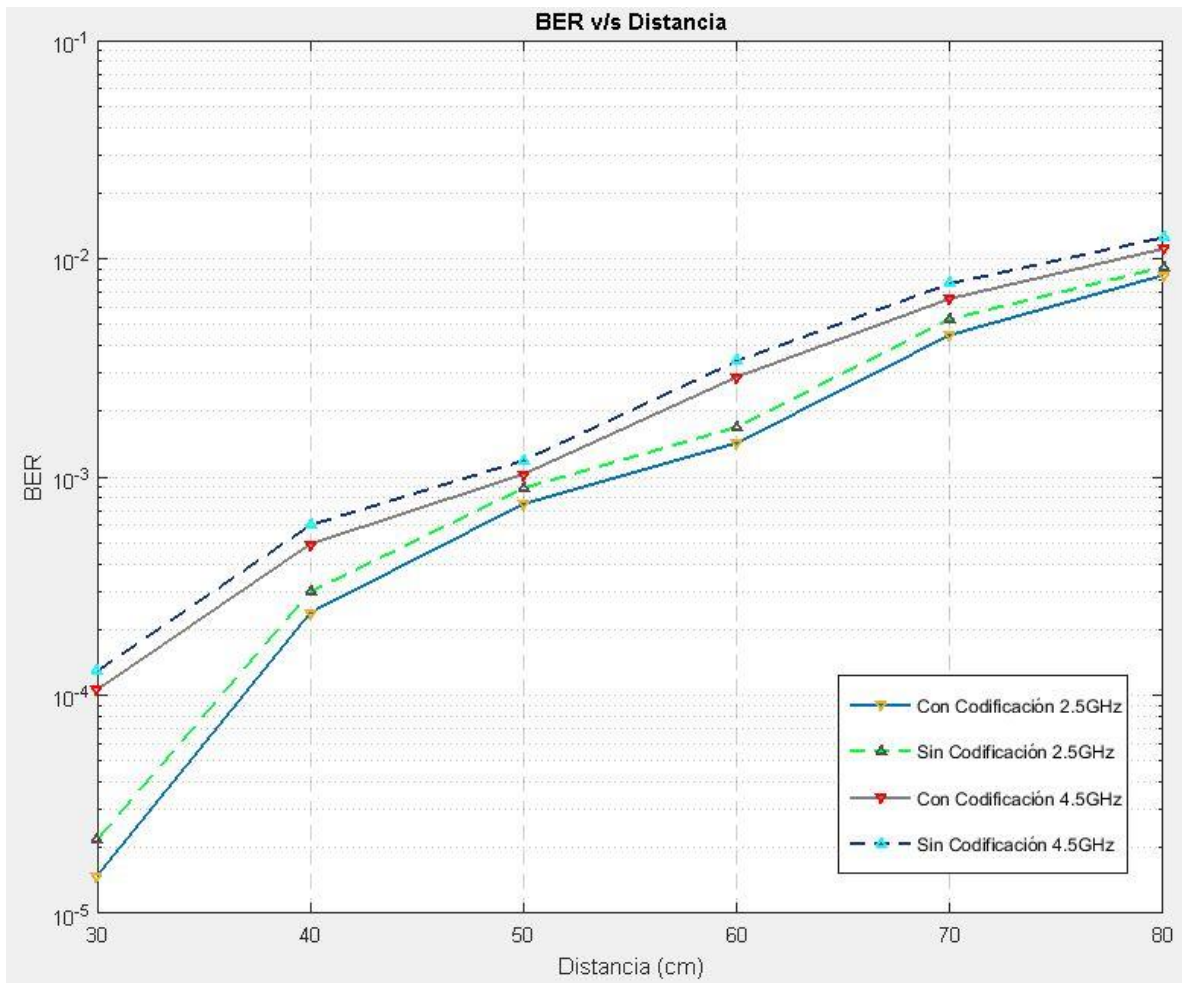


Figura 3.24. Gráficas de BER vs Distancia

Analizando las cuatro gráficas y comparándolas con las gráficas de BER vs  $E_b/N_0$  se observa:

1. La distancia actúa como el inverso de  $E_b/N_0$ , es decir a mayor distancia menor es la relación de energía de bit a ruido, lo cual tiene sentido ya que, a mayor distancia, menor es la potencia recibida, y por ende, menor la relación señal a ruido.
2. La BER obtenida en los dos casos de implementación en el sistema que implementa la codificación Golay extendida siempre es menor que la BER obtenida cuando no se tiene ningún tipo de codificación.
3. El número de errores obtenidos en el primer caso de implementación con frecuencia portadora de 2.5 GHz es menor al obtenido en el segundo caso de implementación con frecuencia portadora de 4.5GHz, tanto para el sistema con codificación Golay extendida como para el sistema que no tiene codificación. En ambos casos el sistema implementa una modulación QPSK, la cual es una de las más robustas frente al ruido.

# CAPÍTULO IV

## CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas durante el desarrollo del presente trabajo de grado y los trabajos futuros con respecto a la herramienta de simulación e implementación sobre hardware reconfigurable.

### 4.1. CONCLUSIONES

- ❖ Implementar un sistema de comunicaciones inalámbrico sobre hardware reconfigurable es un proceso que requiere la inclusión de etapas adicionales de importancia crítica que no son tenidas en cuenta a nivel de simulación. Entre dichas etapas se encuentran las antenas de transmisión y recepción, las etapas de traslación en frecuencia, los circuitos recuperadores de sincronismo, ecualizadores, etc.
- ❖ El sistema de comunicaciones con la codificación Golay extendida, en todos los casos de simulación e implementación, presenta una menor cantidad de bits errados que el sistema que no implementa ningún tipo de codificación de canal, con lo cual se aprecia el desempeño de la codificación Golay extendida, aunque esta mejora no representa una diferencia contundente.
- ❖ El desempeño del sistema no depende exclusivamente del correcto diseño de los procesos de codificación y decodificación Golay, ya que existen muchos otros factores que influyen en el funcionamiento del sistema y que se encuentran fuera del alcance de los propósitos de este trabajo de grado, tales como el comportamiento del canal, las etapas de recuperación de sincronismo, la configuración de los ecualizadores, el patrón de radiación de las antenas, entre otros.
- ❖ El canal a través del cual se llevó a cabo la transmisión no se puede catalogar como un canal AWGN puro, pues se presume la existencia de otras fuentes de degradación tales como interferencias y distorsiones provocadas por desajustes en los parámetros de los recuperadores de sincronismo y ecualizadores. Además no se tiene certeza de que el canal se comporte de manera estacionaria. En otras palabras, es imposible manipular el canal para convertirlo en AWGN.

- ❖ El sistema de comunicaciones digital sobre el USRP® B210 implementado, es un modelo de referencia práctico de un sistema de comunicaciones real que implemente procesos de codificación y modulación.

## 4.2. TRABAJOS FUTUROS

Finalmente con los resultados, conclusiones y experiencias obtenidas durante el desarrollo del presente trabajo de grado, a continuación se listan los posibles trabajos futuros, con base en el sistema de comunicaciones con codificación Golay extendida sobre hardware reconfigurable diseñado.

- ❖ Implementación de otros tipos de codificación de canal (con capacidad de corrección de errores) sobre el sistema de comunicaciones del presente trabajo de grado, para comparar el desempeño del nuevo sistema, con los resultados obtenidos en la presente monografía.
- ❖ Aplicar una técnica de modulación de un mayor orden a la modulación QPSK utilizada en el presente sistema de comunicaciones con codificación Golay extendida y realizar un análisis del desempeño del sistema en términos de BER.
- ❖ Modificar el sistema de comunicaciones con modulación QPSK y codificación Golay extendida sobre el USRP® B210 del presente trabajo, de forma que éste sea full-dúplex y analizar el comportamiento y desempeño del sistema.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] H. Kaaranen., "UMTS Networks: Architecture, Mobility and Services," 2nd ed. Wiley.
- [2] C. Pérez Vega., "Transmission de Television," Dept., Teleco., Santander Univ., Cantabria, España, 2014.
- [3] S. Sarangi.; S. Banerjee., "Efficient Hardware Implementation of Encoder and Decoder for Golay Code." *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, 2014.
- [4] C. Erazo.; W. Cruz., "Análisis del Desempeño de un Sistema de Comunicaciones con Modulación BPSK, QPSK, OQPSK y 8PSK Basado en Hardware Reconfigurable," Dept., Teleco., Cauca Univ., Popayán, Colombia, 2014.
- [5] P. Muszynski y H. Holma, «Introduction to WCDMA,» de *WCDMA FOR UMTS: Radio Access for Third Generation Mobile Communications*, Finlandia, Harri Holma and Antti Toskala, 2004, pp. 47-60.
- [6] A. Rodríguez y P. Fernando, "Comunicaciones Digitales", Pearson, 2007.
- [7] A. Chevalier y H. Soperéz, "Principios de la Modulación Digital", 2003.
- [8] J. P. Romero, O. Sallent y R. Agustí, «Gestión de Recursos Radio en el marco de los sistemas 3G,» de *Jornadas Telecom I+D*, Madrid, 2002.
- [9] M. J. E. Golay, "Notes on digital coding," Proc. IRE, vol. 37, p. 657, Jun. 1949.
- [10] Z. Li.; T. Braun., "Methodology for GPS Synchronization Evaluation with High Accuracy," Bern Univ., Bern, Switzerland, 2014.
- [11] D. Xie., "Simplified Algorithm and Hardware Implementation for the (24, 12, 8) Extended Golay Soft Decoder Up to 4 Errors," *International Arab Journal for Information Technology*, Vol. 11, No. 2, March 2014.
- [12] N. E. Straathof., "The extended Golay code," M. S. Thesis, Dept., Comp., Amsterdam Univ., Amsterdam, Netherlands, July 6, 2014.
- [13] W. Tomasi, "Sistemas de Comunicaciones Electrónicas", Prentice Hall, 2da Edicion, 1996.

- [14] D. Forney, «"Modulation and Coding for Linear Gaussian Channels",» IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, vol. 44, Octubre 1998.
- [15] S.O. Popescu, "Current Stage of Basic Modulations Implemented on the FPGA", University Politehnica Timisoara, 2010.
- [16] Michael Rice, "Digital Communications - A Discrete-Time Approach", Prentice Hall, April 2008.
- [17] R. Pressman, "Ingeniería del software, un enfoque práctico," Quinta edición. Edit. Mc Graw Hill, 2002.
- [18] V. Miramá et al., "Diseño e Implementación de un Prototipo de Comunicación de Datos Basado en Hardware Reconfigurable Fase 2," Dept., Teleco., Cauca Univ., Popayán, Colombia, 2014.
- [19] D. Lapedes, "McGraw-Hill Dictionary of Scientific and Technical Terms". Second Edition., New York: McGraw-Hill Book Co, 1978.
- [20] Alimohammad, A.; Fard, S.F., "FPGA-Based Bit Error Rate Performance Measurement of Wireless Systems," Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, IEEE Transactions on, vol.22, no.7, pp.1583,1592, July 2014.
- [21] Ettus Research, «USRP B210 (Board Only),» [En línea]. Available: <https://www.ettus.com/product/details/UB210-KIT>. [Último acceso: 1 de Octubre 2016].
- [22] Ettus Research, «USRP B200/B210 Bus Series,» [En línea]. Available: [https://www.ettus.com/content/files/b200-b210\\_spec\\_sheet.pdf](https://www.ettus.com/content/files/b200-b210_spec_sheet.pdf). [Último acceso: 1 de Octubre 2016].
- [23] Ettus Research, «USRP Hardware Driver and USRP Manual,» [En línea]. Available: [http://files.ettus.com/manual/md\\_fpga.html](http://files.ettus.com/manual/md_fpga.html). [Último acceso: 1 de Octubre 2016].
- [24] R. Escamilla, "Códigos para Detección y Corrección de Errores en Comunicaciones Digitales," Octubre 2004.

- [25] R. Podesta, «Introducción a la Teoría de Códigos Autocorrectores,» [En línea]. Available: [http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie\\_c/CMat35-3.pdf](http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_c/CMat35-3.pdf). [Último acceso: 1 de Octubre 2016].
- [26] C. Hackett, “An Efficient Algorithm for Soft-Decision Decoding of the (24, 12) Extended Golay Code,” USA, 2003.
- [27] I. Boyarinov, “High-speed decoding of extended Golay code,” Inst. for High-Performance Comput. Syst., Acad. of Sci., Moscow, Russia, 2002.
- [28] G. Fokin et al., “Designing the MIMO SDR-based LPD transceiver for long-range robot control applications,” Enero 2015.
- [29] S. Jimenez, et al., “MIMO-OFDM physical layer emulation using space-frequency coding based on a SDR platform,” Electronics and Telecommunications Department, Cicese Research Center, Ensenada B.C., México 2015.




# APÉNDICES

## APÉNDICE A. EJEMPLOS DE CODIFICACIÓN GOLAY EXTENDIDA

El código Golay extendido como se ha mencionado en capítulos anteriores, puede corregir hasta tres errores, los cuales pueden presentarse de la siguiente forma, hasta tres en el mensaje, hasta tres en la redundancia, hasta dos en el mensaje y uno en la redundancia, hasta dos en la redundancia y uno en el mensaje. Este tipo de codificación tiene la particularidad de detectar un máximo de cuatro errores, los cuales pueden estar en la redundancia y/o en el mensaje.

Se debe tener en cuenta, que en la estructura del mensaje codificado los primeros doce bits ( $c_1 \dots c_{12}$ ) corresponden a la redundancia y los últimos doce ( $c_{13} \dots c_{24}$ ) al mensaje, dado que la codificación Golay es sistemática<sup>21</sup>, como se muestra en la ecuación A.1.

$$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6 \ c_7 \ c_8 \ c_9 \ c_{10} \ c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \ c_{14} \ c_{15} \ c_{16} \ c_{17} \ c_{18} \ c_{19} \ c_{20} \ c_{21} \ c_{22} \ c_{23} \ c_{24}] \quad (\text{A.1})$$



A continuación se muestran algunos ejemplos de los principales errores que se pueden presentar en la información recibida ( $r$ ) por el módulo receptor. Por efectos prácticos sólo se codificará un mensaje ( $m$ ), el cual se utilizará como palabra código ( $c$ ) y a la cual de forma intencionada se distorsionará, para utilizarse como palabra recibida ( $r$ ) por el módulo receptor con sus respectivos errores en la redundancia y/o mensaje.

Los ejemplos se han dividido en seis casos de la siguiente forma:

- **CASO A. TRES ERRORES EN LA REDUNDANCIA**
- **CASO B. DOS ERRORES EN LA REDUNDANCIA Y UNO EN EL MENSAJE**
- **CASO C. TRES ERRORES EN EL MENSAJE**
- **CASO D. DOS ERRORES EN EL MENSAJE Y UNO EN LA REDUNDANCIA**
- **CASO E. CUATRO ERRORES**
- **CASO F. CINCO ERRORES**

### A.1. CASO A. TRES ERRORES EN LA REDUNDANCIA

Se envía el mensaje  $m = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , utilizando codificación de canal Golay extendida, para lo cual lo primero que debe realizarse es su respectiva codificación, como se muestra a continuación.

<sup>21</sup> En la codificación sistemática, el mensaje original aparece acompañado de la redundancia, al inicio o al final.

### A.1.1. Codificación Golay Extendida

Para realizar la codificación, se multiplica el vector mensaje ( $\mathbf{m}$ ), por la matriz generadora ( $\mathbf{G}$ ), como muestra la ecuación A.2.

$$\mathbf{c} = \mathbf{mG} \quad (\text{A.2})$$

Donde,

$$\mathbf{G}_{12 \times 24} = [\mathbf{P}_{12 \times 12} \vdots \mathbf{I}_{12 \times 12}] \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{c} = [110000000000] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cada  $i$ -ésimo elemento del mensaje se multiplica por cada  $i$ -ésimo elemento de la  $i$ -ésima columna de la matriz generadora ( $\mathbf{G}$ ), lo que es equivalente a multiplicar cada  $i$ -ésimo elemento del mensaje por cada elemento de la  $i$ -ésima fila correspondiente de la matriz generadora ( $\mathbf{G}$ ).

Luego se suman en módulo dos<sup>22</sup> los elementos de cada columna y el resultado es la palabra codificada ( $\mathbf{c}$ ), donde se puede observar que los doce primeros bits equivalen a la redundancia y los siguientes corresponden al mensaje, dado que la codificación es sistemática, como se observa en la ecuación A.4.

$$\mathbf{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{A.4})$$

Este es el mensaje que se envía a través del canal, el cual debido a las contaminaciones puede llegar con errores, aquí intencionalmente se introducen tres errores (resaltados), llegando al receptor la secuencia ruidosa que se muestra en la ecuación A.5.

$$\mathbf{r} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{A.5})$$

<sup>22</sup> La suma módulo dos de un par de bits es igual a uno sólo cuando los bits son diferentes.

### A.1.2. DECODIFICACIÓN GOLAY EXTENDIDA

El objetivo de la decodificación Golay extendida, es recuperar el mensaje ( $\mathbf{m}$ ) con la mayor fidelidad posible, para ellos se procede a encontrar la palabra decodificada estimada ( $\hat{\mathbf{c}}$ ), y aprovechar el hecho de que la codificación Golay extendida es sistemática, para tomar los últimos doce bits como el vector mensaje estimado ( $\hat{\mathbf{m}}$ ). La palabra código estimada ( $\hat{\mathbf{c}}$ ) se obtiene a partir de la suma entre la palabra recibida ( $\mathbf{r}$ ) y el patrón de error ( $\mathbf{e}$ ) como se observa en la ecuación A.6.

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{r} + \mathbf{e} \tag{A.6}$$

Para solucionar la ecuación anterior, se procede a calcular el patrón de error ( $\mathbf{e}$ , el cual se obtiene a partir del primer síndrome ( $\mathbf{s}_1$ ), y de ser necesario del segundo síndrome ( $\mathbf{s}_2$ ), el cual se obtiene a partir del primero, lo cual se ilustra a continuación.

### A.1.3. Cálculo del primer síndrome ( $\mathbf{s}_1$ )

Este se obtiene multiplicando la secuencia recibida  $\mathbf{r}$  por la matriz de verificación  $\mathbf{H}^T$  como se muestra en la ecuación A.7.

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}\mathbf{H}^T \tag{A.7}$$

$$\mathbf{s}_1 = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_1 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]$$

Se calcula el peso del primer síndrome ( $w_H(s_1)$ ), sumando la cantidad de unos que contiene este vector, como muestra la ecuación A.8.

$$W(s_1) = \sum_{i=1}^n s_i \quad (A.8)$$

$$w(s_1) = 3$$

Dado que el peso del síndrome uno es menor o igual a tres ( $w(s_1) \leq 3$ ), el patrón de error ( $e$ ) tiene la forma de la ecuación A.9.

$$e = [s_1 : 0] \quad (A.9)$$

$$e = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 : 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

De acuerdo a la ecuación A.6 la palabra decodificada queda como se muestra en la ecuación A.10.

$$\begin{aligned} r &= [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \\ e &= [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \\ \hat{c} &= [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \end{aligned} \quad (A.10)$$

Donde se observa claramente que la detección y corrección de errores (resaltados) ha tenido un excelente resultado, comprobando que se puede corregir los tres errores, cuando éstos están en la redundancia de la palabra. El mensaje estimado ( $\hat{m}$ ), tomando los últimos doce bits de la palabra decodificada estimada ( $\hat{c}$ ) queda como se muestra en la ecuación A.11.

$$\hat{m} = [1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \quad (A.11)$$

## A.2. CASO B. DOS ERRORES EN LA REDUNDANCIA Y UNO EN EL MENSAJE

El mensaje a codificar por practicidad es el mismo del ejemplo anterior ( $m = [1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$ ) y dado que ya se mostró el proceso de codificación, sólo se tomará el resultado, el cual se muestra en la ecuación A.12. Que será la secuencia a enviar.

$$c = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \quad (A.12)$$

Debido a las contaminaciones sufridas en el canal, se recibe la secuencia con errores, los cuales aparecen resaltados, como se muestra en la ecuación A.13.

$$r = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1] \quad (A.13)$$

### A.2.1. DECODIFICACIÓN GOLAY EXTENDIDA

Puesto que ya se conoce el proceso de decodificación, se procede a realizar el cálculo de los síndromes, como se muestra a continuación.

#### A.2.1.1. Cálculo del primer síndrome ( $s_1$ )

Este se obtiene multiplicando la secuencia recibida  $r$  por la matriz de verificación  $H^T$  como se mencionó en la ecuación A.7.

$$s_1 = [1000001101001100000000001] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Se calcula el peso del primer síndrome, como lo indica la ecuación A.8 y cuyo resultado se muestra en la ecuación A.14.

$$w(s_1) = 9 \tag{A.14}$$

Como el peso del primer síndrome no cumple la condición de ser menor o igual que tres, se procede a sumar a éste síndrome con la matriz de coeficientes  $P$ , como se muestra en la ecuación A.15

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula el peso de cada fila, cuyo resultado se muestra en la ecuación A.16.

$$w(\mathbf{s}_1 + \mathbf{P}) = [3 \ 5 \ 5 \ 4 \ 1 \ 4 \ 5 \ 4 \ 6 \ 5 \ 5 \ 2] \quad (\text{A.16})$$

Dado que en la fila doce (12) el peso es cumple la condición de ser menor o igual a dos  $W_H(\mathbf{s}_1 + \mathbf{P}_{12}) \leq 2$ , el vector error tiene la forma de la ecuación A.17.

$$\mathbf{e} = [\mathbf{s}_1 + \mathbf{P}_{12} : \mathbf{u}_{12}] \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{e} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

De acuerdo a la ecuación A.5 la palabra decodificada se muestra en la ecuación A.18.

$$\mathbf{r} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$\mathbf{e} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$\hat{\mathbf{c}} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{A.18})$$

Donde se observa que la detección y corrección de errores (resaltados) ha tenido un excelente resultado, comprobando que se puede corregir los tres errores, cuando están dos en la redundancia y en el mensaje. El mensaje estimado ( $\hat{\mathbf{m}}$ ), queda como se muestra en la ecuación A.19.

$$\hat{\mathbf{m}} = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{A.19})$$

### A.3. CASO C. TRES ERRORES EN EL MENSAJE

El mensaje a codificar es  $\mathbf{m} = [1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$  y su resultado se da en A.20. Que será la secuencia a enviar.

$$\mathbf{c} = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \quad (\text{A.20})$$

Debido a las contaminaciones sufridas en el canal, se recibe la secuencia con errores, los cuales aparecen resaltados, como se muestra en la ecuación A.21.

$$\mathbf{r} = [1\ 0\ 0\ \mathbf{0}\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \mathbf{0}\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \mathbf{1}] \quad (\text{A.21})$$

#### A.3.1. DECODIFICACIÓN GOLAY EXTENDIDA

Puesto que ya se conoce el proceso de decodificación, se procede a realizar el cálculo de los síndromes, como se muestra a continuación.

##### A.3.1.1. Cálculo del primer síndrome ( $s_1$ )

Este se obtiene multiplicando la secuencia recibida  $\mathbf{r}$  por la matriz de verificación  $\mathbf{H}^T$  como se mostró en la ecuación A.7.

$$\mathbf{s}_1 = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_1 = [1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

Se calcula el peso del primer síndrome, como lo indica la ecuación A.8 y cuyo resultado se muestra en la ecuación A.22.

$$w(\mathbf{s}_1) = 5 \quad (\text{A.22})$$

Como el peso del primer síndrome no cumple la condición de ser menor o igual que tres, se procede a sumar a éste síndrome con la matriz de coeficientes  $\mathbf{P}$ , como se muestra en la ecuación A.23.

$$\mathbf{S} + \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{S} + \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula el peso de cada fila, cuyo resultado se muestra en la ecuación A.24.

$$w(\mathbf{s} + \mathbf{P}) = [6 \ 6 \ 6 \ 8 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 8 \ 4 \ 8 \ 8] \quad (\text{A.24})$$

Dado que en ninguna fila el peso Hamming cumple la condición de ser menor o igual a dos  $W_H(\mathbf{s}_1 + \mathbf{P}_{12}) \leq 2$ , se procede a calcular el segundo síndrome ( $\mathbf{s}_2$ ) como se muestra a continuación.

### A.3.1.2. Cálculo del segundo síndrome ( $\mathbf{s}_2$ )

Este se obtiene multiplicando el primer síndrome ( $\mathbf{s}_1$ ) por la matriz de coeficientes ( $\mathbf{P}$ ) como se muestra en la ecuación A.25.

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 \mathbf{P} \quad (\text{A.25})$$



$$s_2 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_2 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Dado que el peso Hamming del síndrome es menor o igual a tres ( $w_H(s_2) \leq 3$ ) entonces el patrón de error (e) es como se muestra ecuación A.26.

$$e = [0 : s_2] \tag{A.26}$$

$$e = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 : 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

De acuerdo a la ecuación A.6 la palabra decodificada queda como se muestra en la ecuación A.27.

$$\begin{aligned} r &= [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ \mathbf{0 \ 0 \ 1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ e &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ \hat{c} &= [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned} \tag{A.27}$$

Donde se observa que la detección y corrección de errores (resaltados) ha tenido un excelente resultado, comprobando que se puede corregir los tres errores, cuando están dos en el mensaje. El mensaje estimado ( $\hat{m}$ ), queda como se muestra en la ecuación A.28

$$\hat{m} = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \tag{A.28}$$

#### A.4. CASO D. DOS ERRORES EN EL MENSAJE Y UNO EN LA REDUNDANCIA

El mensaje a codificar es  $m = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  y su resultado se da en en la ecuación A.29, la cual es la secuencia a enviar.

$$c = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \tag{A.29}$$

Debido a las contaminaciones sufridas en el canal, se recibe la secuencia con errores, los cuales aparecen resaltados, como se muestra en la ecuación A.30.

$$r = [1 \ 0 \ 0 \ \mathbf{0} \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ \mathbf{0} \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{1}] \tag{A.30}$$

### A.4.1. DECODIFICACIÓN GOLAY EXTENDIDA

Puesto que ya se conoce el proceso de decodificación, se procede a realizar el cálculo de los síndromes.

#### A.4.1.1. Cálculo del primer síndrome ( $s_1$ )

Este se obtiene multiplicando la secuencia recibida  $r$  por la matriz de verificación  $H^T$  como se mostró en la ecuación A.7.

$$s_1 = [100000110110100000010000] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Se calcula el peso del primer síndrome, como lo indica la ecuación A.8 y cuyo resultado se muestra en la ecuación A.31.

$$w(s_1) = 5 \tag{A.31}$$

Como el peso del primer síndrome no cumple la condición de ser menor o igual que tres, se procede sumar éste síndrome con la matriz de coeficientes  $P$ , como se muestra en la ecuación A.32.

$$\mathbf{S + P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{S + P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula el peso de cada fila, como se muestra en la ecuación A.33.

$$w(\mathbf{s + P}) = [8 \ 8 \ 6 \ 6 \ 4 \ 10 \ 6 \ 6 \ 6 \ 8 \ 4 \ 6] \quad (\text{A.33})$$

Dado que en ninguna fila el peso Hamming cumple la condición de ser menor o igual a dos  $W_H(\mathbf{s}_1 + \mathbf{P}_{12}) \leq 2$ , se procede a calcular el segundo síndrome ( $\mathbf{s}_2$ ) como se muestra a continuación.

#### A.4.1.2. Cálculo del segundo síndrome ( $\mathbf{s}_2$ )

Este se obtiene multiplicando el primer síndrome ( $\mathbf{s}_1$ ) por la matriz de coeficientes ( $\mathbf{P}$ ) como se muestra en la ecuación A.34.

$$s_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.34)$$

$$s_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Se calcula el peso del segundo síndrome ( $w_H(s_2)$ ), igual que en la ecuación (A.8) y cuyo resultado se muestra en la ecuación A.35.

$$w(s_2) = 7 \quad (A.35)$$

Como el peso del segundo síndrome no cumple la condición de ser menor o igual que tres, se procede a sumar éste síndrome con la matriz de coeficientes  $\mathbf{P}$ , como se muestra en la ecuación A.36.

$$s_2 + \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.36)$$

$$s_2 + \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula el peso de cada fila, como se muestra en la ecuación A.37.

$$w(\mathbf{s}_2 + \mathbf{P}) = [6 \ 4 \ 4 \ 2 \ 6 \ 8 \ 6 \ 8 \ 6 \ 5 \ 6 \ 5] \quad (\text{A.37})$$

Dado que en la fila cuatro (4) el peso Hamming ( $w_H(\mathbf{s}_2 + \mathbf{P}_4) \leq 2$ ) cumple la condición de ser menor o igual a dos, el patrón de error tiene la forma de la ecuación A.38.

$$\mathbf{e} = [\mathbf{u}_4 : \mathbf{s}_2 + \mathbf{P}_4] \quad (\text{A.38})$$

$$\mathbf{e} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

De acuerdo a la ecuación A.6 la palabra decodificada queda como se muestra en la ecuación A.39.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ \mathbf{e} &= [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ \hat{\mathbf{c}} &= [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Donde se observa que la detección y corrección de errores (resaltados) ha tenido un excelente resultado, comprobando que se puede corregir los tres errores, cuando están uno en la redundancia y dos en el mensaje. El mensaje estimado ( $\hat{\mathbf{m}}$ ), queda como se muestra en la ecuación A.40.

$$\hat{\mathbf{m}} = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{A.40})$$

## A.5. CASO E. CUATRO ERRORES

El mensaje a codificar es  $\mathbf{m} = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  y su codificación se da en A.41, que es la secuencia a enviar.

$$\mathbf{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{A.41})$$

Debido a las contaminaciones sufridas en el canal, se recibe la secuencia con errores, los cuales aparecen resaltados, como se muestra en la ecuación A.42.

$$\mathbf{r} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{A.42})$$

### A.5.1. DECODIFICACIÓN GOLAY EXTENDIDA

Puesto que ya se conoce el proceso de decodificación, se procede a realizar el cálculo de los síndromes, como se muestra a continuación.

### A.5.1.1. Cálculo del primer síndrome ( $s_1$ )

Se calcula el peso del primer síndrome, como lo indica la ecuación A.7 y cuyo resultado se muestra en la ecuación A.43.

$$s_1 = [100000010110100000010000] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.43)$$

$$s_1 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Se calcula el peso del primer síndrome, como muestra la ecuación A.44.

$$w(s_1) = 6 \quad (A.44)$$

Como el peso del primer síndrome no cumple la condición de ser menor o igual que tres, se procede a sumar a éste síndrome con la matriz de coeficientes  $P$ , como se muestra en la ecuación A.44.

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula el peso de cada fila, como se muestra en la ecuación A.45.

$$w(\mathbf{s}_1 + \mathbf{P}) = [7 \ 9 \ 5 \ 5 \ 5 \ 9 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7 \ 3 \ 5] \quad (\text{A.45})$$

Dado que en ninguna fila el peso Hamming cumple la condición de ser menor o igual a dos  $W_H(\mathbf{s}_1 + \mathbf{P}_{12}) \leq 2$ , se procede a calcular el segundo síndrome ( $\mathbf{s}_2$ ) como se muestra a continuación.

#### A.5.1.2. Cálculo del segundo síndrome ( $\mathbf{s}_2$ )

Este se obtiene multiplicando el primer síndrome ( $\mathbf{s}_1$ ) por la matriz de coeficientes ( $\mathbf{P}$ ) como se muestra en la ecuación A.46.





Dado que se hicieron los cálculos del primer y segundo síndrome y no se cumplieron ninguna de las condiciones, en este momento se concluye que hubo cuatro errores. Y se toma como mensaje estimado los doce últimos bits de la palabra recibida ( $\mathbf{r}$ ), ya que los errores tienen una probabilidad de ocurrencia (en este caso) de 0.5, pues pueden estar en la redundancia o en el mensaje o repartidos, por tanto el mensaje es estimado ( $\hat{\mathbf{m}}$ ) es como se muestra en la ecuación A.50, donde se puede apreciar que se recuperaron correctamente 10 de los doce bits enviados.

$$\hat{\mathbf{m}} = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{A.50})$$

## A.6. CASO F. CINCO ERRORES

El mensaje a codificar es  $\mathbf{m} = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  y su codificación se da en A.51, que es la secuencia a enviar.

$$\mathbf{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{A.51})$$

Debido a las contaminaciones sufridas en el canal, se recibe la secuencia con errores, los cuales aparecen resaltados, como se muestra en la ecuación A.52.

$$\mathbf{r} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{A.52})$$

### A.6.1. DECODIFICACIÓN GOLAY EXTENDIDA

Puesto que ya se conoce el proceso de decodificación, se procede a realizar el cálculo de los síndromes, como se muestra a continuación.

#### A.6.1.1. Cálculo del primer síndrome ( $s_1$ )

Se calcula el peso del primer síndrome, como lo indica la ecuación A.8 y cuyo resultado se muestra en la ecuación A.53.



$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula el peso de cada fila, como se muestra en la ecuación A.56.

$$w(\mathbf{s}_1 + \mathbf{P}) = [6 \ 6 \ 4 \ 8 \ 4 \ 4 \ 6 \ 6 \ 8 \ 2 \ 6 \ 6] \quad (\text{A.56})$$

Dado que en la fila diez (10) el peso cumple la condición de ser menor o igual a dos, el vector error tiene la forma de la ecuación A.57.

$$\mathbf{e} = [\mathbf{s}_1 + \mathbf{P}_{10} : \mathbf{u}_{10}] \quad (\text{A.57})$$

$$\mathbf{e} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

De acuerdo a la ecuación A.6 la palabra decodificada queda como se muestra en la ecuación A.58.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ \mathbf{e} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \\ \hat{\mathbf{c}} &= [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Donde se observa que el patrón de error no corrige los errores de la palabra recibida, y además adiciona errores, aunque la palabra decodificada si pertenece al alfabeto. El mensaje estimado ( $\hat{\mathbf{m}}$ ), queda como se muestra en la ecuación A.59

$$\hat{\mathbf{m}} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (\text{A.59})$$

## APÉNDICE B. DESCARGA E INSTALACIÓN DEL SDR Y EL UHD

Para utilizar los dispositivos USRP® B210 lo primero que se debe garantizar es su reconocimiento y correcto funcionamiento en el computador, para lo cual se indican los siguientes pasos:

1. Primero se descarga desde internet el paquete “USRP Radio” el cual contiene el SDR, para lo cual se escribe el comando “*targetinstaller*” en la consola de Matlab® como se ilustra en la figura B.1.

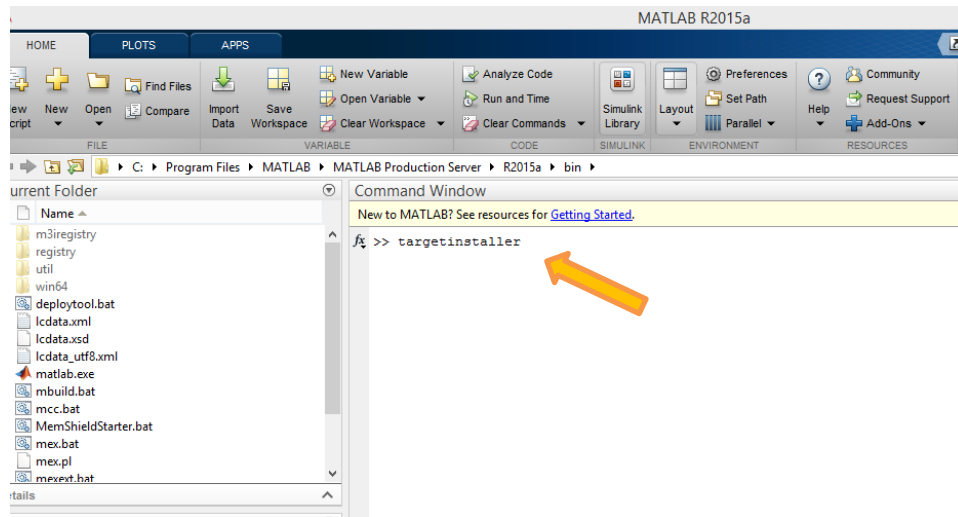


Figura B.1. Comando en la consola de Matlab® para descargar el SDR.

2. Luego de ejecutar el anterior comando se elige el paquete “USRP Radio”, se selecciona “Install” y se da clic en “Next” como se muestra en la figura B.2.

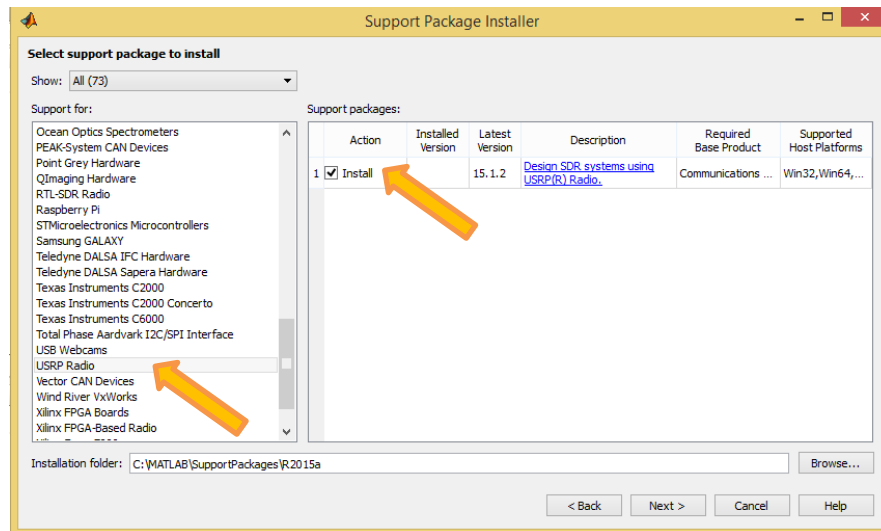


Figura B.2. Selección paquete USRP® Radio

3. Luego aparece la ventana que se muestra en la figura B.3. donde se da clic en “Log In”, lo cual indica que se tiene que tener una cuenta de MathWorks previamente establecida, aunque se tiene la posibilidad de crearla en ese momento.

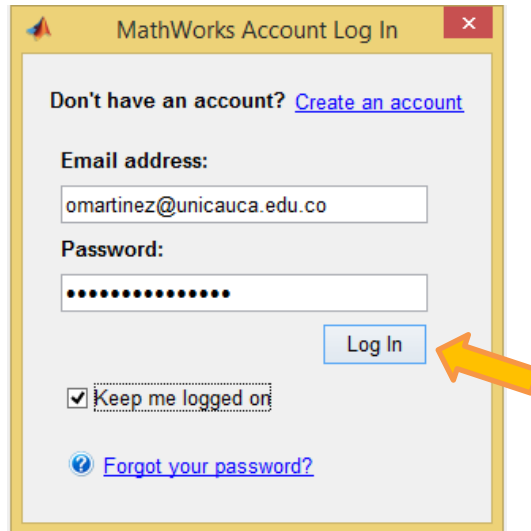


Figura B.3. Ingreso de la cuenta MathWorks para continuar con el proceso de instalación

4. Finalmente si el proceso de descarga e instalación fue satisfactorio se muestra la imagen de la figura B.4.

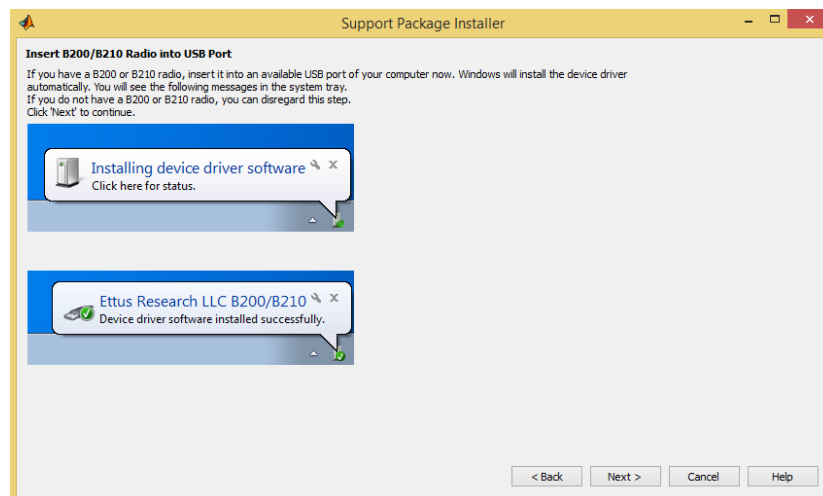


Figura B.4. Proceso exitoso de instalación del SDR.

Ahora se procede a descargar e instalar el UHD para poder establecer la comunicación entre el dispositivo USRP® B210 y el SDR.

5. Descargar de la página de Ettus Research™ [www.ettus.com/downloads](http://www.ettus.com/downloads) el UHD como se indica en la figura B.5.

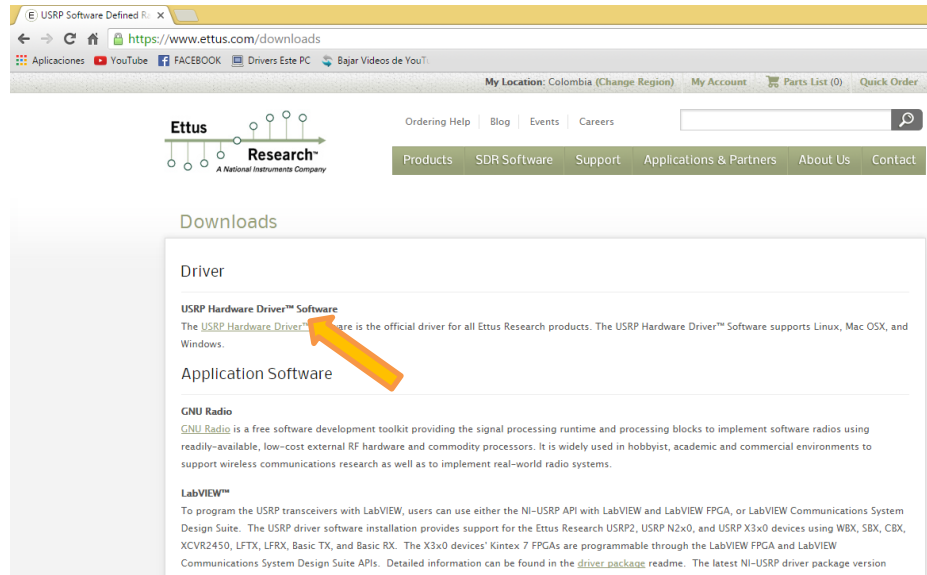


Figura B.5. Link de descarga del UHD desde la página de Ettus.

6. Finalmente actualizar el controlador en administrador de dispositivos desde la carpeta donde se guardó la descarga como se muestra en la figura B.6.

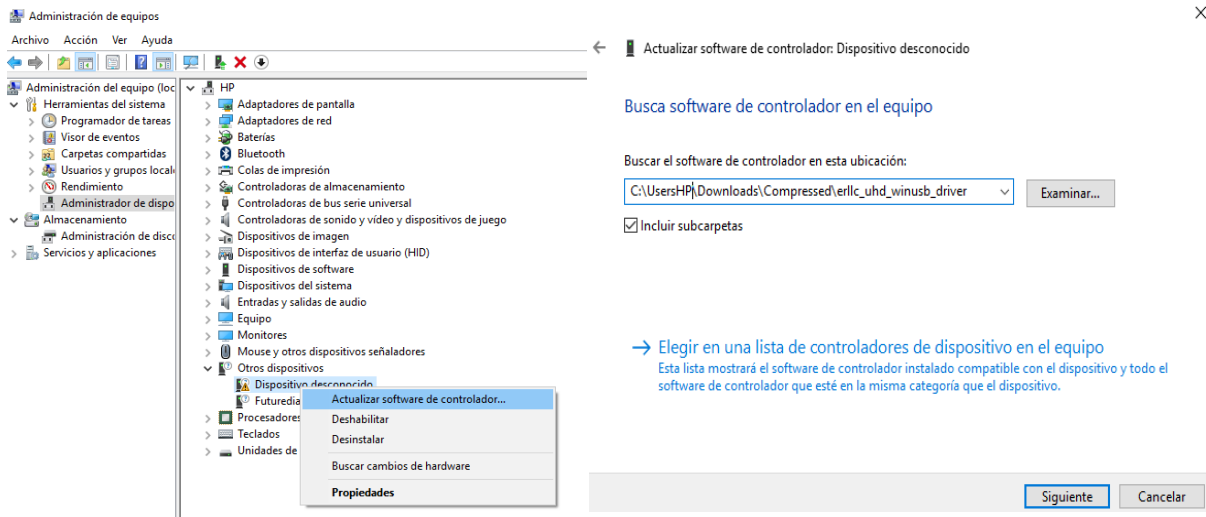


Figura B.6. Forma de actualizar el controlador UHD.

## APÉNDICE C. CALIBRACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE FRECUENCIA CON EL USRP® B210

Para determinar la frecuencia de desplazamiento entre dos dispositivos USRP® B210 se debe implementar en Simulink® dos modelos a seguir, uno en transmisión como se ilustra en la figura C.1 y otro en recepción como se muestra en la figura C.2.

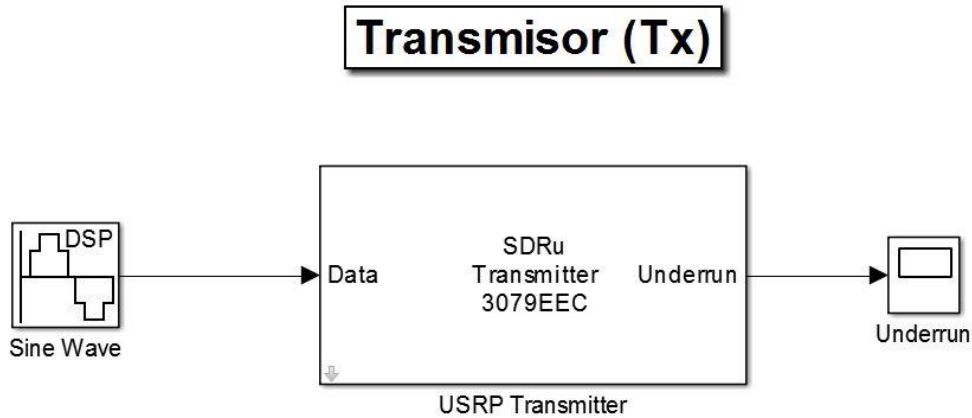


Figura C.1. Modelo en transmisión para calcular la frecuencia de calibración

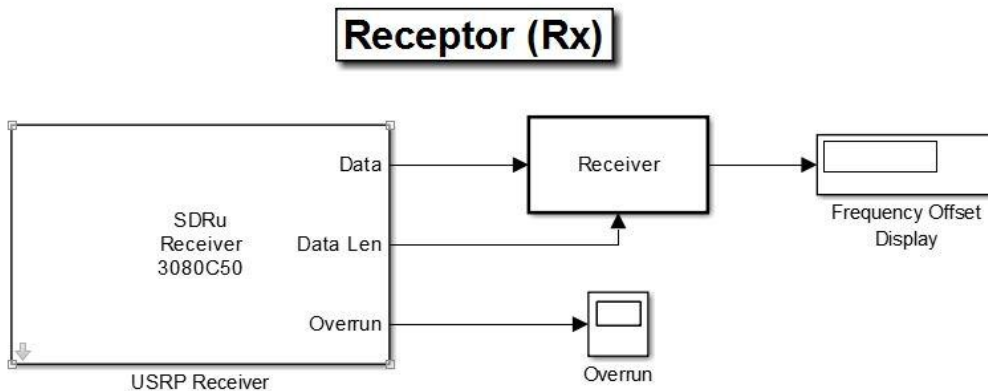


Figura C.2. Modelo en recepción para calcular la frecuencia de calibración

Estos modelos realizan el cálculo del desplazamiento de la frecuencia basada en la FFT en banda base compleja. El transmisor envía una onda sinusoidal de 100 Hz y el receptor recibe la señal, calcula el desplazamiento y lo muestra.

Para entender mejor este procedimiento es necesario acudir al subsistema del modelo receptor mostrado en la figura C.3.

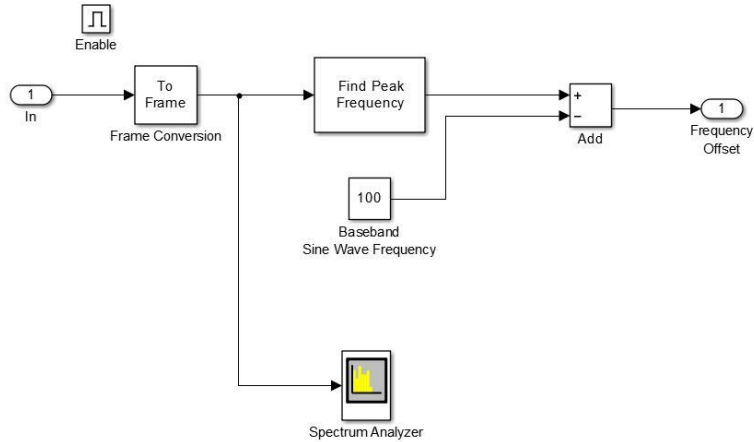


Figura C.3. Subsistema en el receptor para calcular el desplazamiento de la frecuencia

El bloque *“Find Peak Frequency”* utiliza una FFT para encontrar la frecuencia con la potencia máxima de la señal recibida, la cual es el desplazamiento de la frecuencia más 100Hz y el bloque *“Spectrum Analyzer”* calcula y muestra la densidad espectral de potencia de la señal recibida.

Luego de implementar los dos anteriores modelos se procede a iniciar primero el bloque de calibración del transmisor y luego se inicia el bloque de calibración del receptor teniendo en cuenta que la calibración se debe calcular con el mismo valor de la frecuencia central con la cual se va a trabajar el sistema en pasa banda.

Finalmente después de obtener el desplazamiento de la frecuencia se debe colocar dicho valor en el bloque de configuración en recepción del USRP® B210 *“LO offset (Hz)”* como se muestra en la figura C.4. Si la calibración se ha realizado correctamente el espectro mostrado por el bloque del analizador de espectro debe luego tener su máximo en 0 Hz.

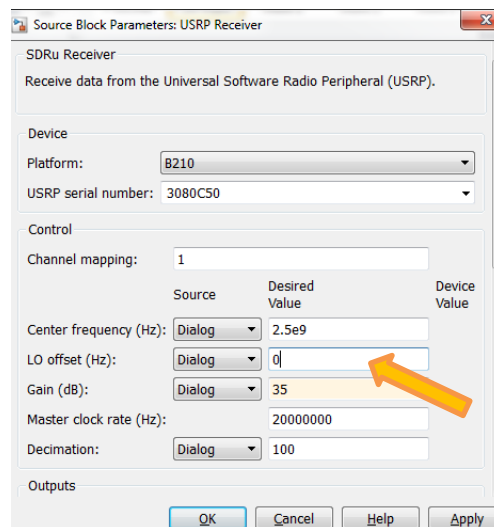


Figura C.4. Bloque de configuración en recepción del USRP® B210 donde debe ir el valor del desplazamiento de la frecuencia



## APÉNDICE D. ARCHIVOS DE MATLAB® PARA LA CODIFICACIÓN Y DECODIFICACIÓN EXTENDIDA

### D.1. CODIFICACIÓN

```
function codi=codificadorgolay(word)
a01=[1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1]; %
a02=[0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1]; %
a03=[0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1]; %
a04=[0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1]; %
a05=[1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1]; %
a06=[1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1]; % Matriz de coeficientes
a07=[1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1]; %
a08=[0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1]; %
a09=[1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1]; %
a10=[1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1]; %
a11=[0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1]; %
a12=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0]; %
Pi=[a01;a02;a03;a04;a05;a06;a07;a08;a09;a10;a11;a12];
Identidad=eye(12);
H=[Pi Identidad]; % Matriz generadora
fila=zeros(1,12);
codificada=zeros(24,1);
palabra=word;
for i=1:1:24
    for j=1:1:12
        fila(j)=palabra(j)*H(j,i);
    end
    FILA=fila(1);
    for k=2:1:12
        if FILA==1 && fila(k)==1
            FILA=0;
        else
            FILA=FILA+fila(k);
        end
    end
    codificada(i)=FILA;
end
codi=codificada;
```

### D.2. DECODIFICACIÓN

```
function decodificada=decodificadorgolay(r)
a01=[1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1]; %
a02=[0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1]; %
a03=[0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1]; %
a04=[0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1]; %
```

```

a05=[1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1]; %
a06=[1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1]; % Matriz de coeficientes
a07=[1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1]; %
a08=[0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1]; %
a09=[1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1]; %
a10=[1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1]; %
a11=[0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1]; %
a12=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0]; %
Pi=[a01;a02;a03;a04;a05;a06;a07;a08;a09;a10;a11;a12];
Identidad=eye(12);
VV=zeros(1,24); % Vector con el mensaje corregido
HT=(Identidad Pi)'; % Primer síndrome
fil=zeros(1,24);
síndrome=zeros(1,12);
for i=1:1:12

    for j=1:1:24
        fil(j)=r(j)*HT(j,i);
    end
    FIL=fil(1);
    for k=2:1:24
        if FIL==1 && fil(k)==1
            FIL=0;
        else
            FIL=FIL+fil(k);
        end
    end
    síndrome(1,i)=FIL;
end
ws=sum(síndrome(1,:));
if ws<=3 % Primera condición
    UU=zeros(1,12);
    ee=[síndrome UU];
    for i=1:1:24
        if r(i)==1 && ee(i)==1
            VV(i)=0;
        else
            VV(i)=r(i)+ee(i);
        end
    end
    deco=VV(13:24);
else
    s=zeros(12,12); % Peso de Hamming de s+PI
    error=0;
    for i=1:1:12
        for j=1:1:12
            s(i,j)=síndrome(j);
        end
    end
end

```

```

sPi=zeros(12,12);
for i=1:1:12
    for j=1:1:12
        if s(i,j)==1 && Pi(i,j)==1
            sPi(i,j)=0;
        else
            sPi(i,j)=s(i,j)+Pi(i,j);
        end
    end
end
ws=sum(sPi(i,:));
if ws<=2
    error=i;
end
end
if error>0 % Segunda condición
    UU=zeros(1,12);
    UU(error)=1;
    ee=[sPi(error,:) UU];
    for i=1:1:24
        if r(i)==1 && ee(i)==1
            VV(i)=0;
        else
            VV(i)=r(i)+ee(i);
        end
    end
    deco=VV(13:24);
else
    fi=zeros(1,12);
    sindrome2=zeros(1,12);
    for i=1:1:12
        for j=1:1:12
            fi(j)=sindrome(j)*Pi(j,i);
        end
    end
    FI=fi(1);
    for k=2:1:12
        if FI==1 && fi(k)==1
            FI=0;
        else
            FI=FI+fi(k);
        end
    end
    sindrome2(1,i)=FI;
end
ws=sum(sindrome2(1,:));
if ws<=3 % Tercera condición
    UU=zeros(1,12);
    ee=[UU sindrome2];
    for i=1:1:24
        if r(i)==1 && ee(i)==1

```

```

        VV(i)=0;
    else
        VV(i)=r(i)+ee(i);
    end
end
deco=VV(13:24);
else
    % Cálculo del segundo síndrome
    s=zeros(12,12);
    error=0;
    for i=1:1:12
        for j=1:1:12
            s(i,j)=sindrome2(j);
        end
    end
    sPPi=zeros(12,12);
    for i=1:1:12
        for j=1:1:12
            if s(i,j)==1 && Pi(i,j)==1
                sPPi(i,j)=0;
            else
                sPPi(i,j)=s(i,j)+Pi(i,j);
            end
        end
    end
    ws=sum(sPPi(i,:));

    if ws<=2
        error=i;
    end
end
if error>0 % Cuarta condición
    UU=zeros(1,12);
    UU(error)=1;
    ee=[UU sPPi(error,:)];
    for i=1:1:24
        if r(i)==1 && ee(i)==1
            VV(i)=0;
        else
            VV(i)=r(i)+ee(i);
        end
    end
    deco=VV(13:24);
else % Quinta condición
    deco=r(13:24)';
end
end
end
end
decodificada=deco';

```

## APÉNDICE E. ARCHIVOS DE COMPARACIÓN PARA ENCONTRAR EL NÚMERO DE BITS ERRADOS CON Y SIN CODIFICACIÓN

```
clc;
clear all;
a=load('numeroale.mat','numero'); % Aquí se carga el archivo enviado
b=a.numero;
b2=b(:,1);
c=length(b);

aa=load('R.mat','R'); % Se carga el archivo obtenido en la prueba
bb=aa.R;
b3=bb(2,:);
inicia=####;% Se coloca el valor donde inicia la trama ya sincronizada

con=0;
for i=0:1:c-1
    d=b(i+1);
    dd=b3(inicia+i);
    if d~=dd
        con=con+1;
        posi(con)=inicia+i;
        posi2(con)=i+1;
        voriginal(con)=d;
        vreceptor(con)=dd;
    end
end

if con==0
    bitsErrados=0
else
    for i=1:1:con
        vob=convertir(voriginal(i));
        vor=convertir(vreceptor(i));
        [cant,posi]=find(vob~=vor);
        numError(i)=length(cant);
    end
    bitsErrados=sum(numError)
end
```

## APÉNDICE F. TABLA GENERAL DE RESULTADOS OBTENIDOS PARA LOS DOS CASOS DE IMPLEMENTACIÓN

NÚMERO DE ERRORES EN RECEPCIÓN CON FRECUENCIA PORTADORA 2.5GHz												
Distancia (cm)	Pruebas No. 1		Pruebas No. 2		Pruebas No. 3		Pruebas No. 4		Pruebas No. 5		Promedio	
	Con Codificación	Sin Codificación	Con Codificación	Sin Codificación	Con Codificación	Sin Codificación	Con Codificación	Sin Codificación	Con Codificación	Sin Codificación	Con Codificación	Sin Codificación
<b>30</b>	15	18	6	10	12	21	15	22	28	39	15,2	22
<b>40</b>	227	287	128	175	208	263	396	475	249	297	241,6	299,4
<b>50</b>	801	955	821	969	763	913	652	776	757	872	758,8	897
<b>60</b>	1480	1725	1360	1598	1288	1587	1667	1908	1396	1697	1438,2	1703
<b>70</b>	4029	4817	5800	6691	4167	5034	4259	5075	4260	5066	4503	5336,6
<b>80</b>	8654	9078	8219	9117	8071	9018	9545	10121	7814	8753	8460,6	9217,4

NÚMERO DE ERRORES EN RECEPCIÓN CON FRECUENCIA PORTADORA 4.5GHz												
Distancia (cm)	Pruebas No. 1		Pruebas No. 2		Pruebas No. 3		Pruebas No. 4		Pruebas No. 5		Promedio	
	Con Codificación	Sin Codificación	Con Codificación	Sin Codificación	Con Codificación	Sin Codificación	Con Codificación	Sin Codificación	Con Codificación	Sin Codificación	Con Codificación	Sin Codificación
<b>30</b>	82	104	130	155	101	120	98	117	127	150	107,6	129,2
<b>40</b>	537	643	427	511	557	683	563	688	405	509	497,8	606,8
<b>50</b>	1188	1386	948	1053	883	1048	1009	1165	1160	1328	1037,6	1196
<b>60</b>	2825	3371	2535	2907	2788	3243	2788	3304	3548	4241	2896,8	3413,2
<b>70</b>	6248	7372	6340	7467	6664	7715	6214	7349	7593	8833	6611,8	7747,2
<b>80</b>	11819	13557	11601	12466	11571	12480	11220	13195	9667	11385	11175,6	12616,6