

# ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO DE UN SISTEMA MU-MIMO BASADO EN ALGORITMOS DE PRECODIFICACIÓN LINEAL ZF Y MMSE



**Cristian Camilo Muñoz Ordóñez**  
**María Lucía Vargas Vivas**

Director: Mag. Harold Armando Romo Romero

*Universidad del Cauca*

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

**Departamento de Telecomunicaciones**

**Grupo Nuevas Tecnologías en Telecomunicaciones**

**GNTT**

**Línea de Investigación en Redes Inalámbricas**

Popayán, Febrero de 2013

# ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO DE UN SISTEMA MU-MIMO BASADO EN ALGORITMOS DE PRECODIFICACIÓN LINEAL ZF Y MMSE



*Trabajo de Grado presentado como requisito para obtener el título de Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones*

**Cristian Camilo Muñoz Ordóñez**  
**María Lucía Vargas Vivas**

*Director: Mag. Harold Armando Romo Romero*

*Universidad del Cauca*

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

**Departamento de Telecomunicaciones**

**Grupo Nuevas Tecnologías en Telecomunicaciones**

**GNTT**

**Línea de Investigación en Redes Inalámbricas**

Popayán, Febrero de 2013

# ÍNDICE GENERAL

<b>RESUMEN</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
<b>1 GENERALIDADES DE SISTEMAS MIMO</b>	<b>5</b>
1.1 SISTEMAS MIMO	5
1.1.1 Sistema Única Entrada Única Salida (SISO)	5
1.1.2 Sistema Única Entrada Múltiples Salidas (SIMO)	6
1.1.3 Sistema Múltiples Entradas Única Salida (MISO)	7
1.1.4 Sistema Múltiples Entradas Múltiples Salidas (MIMO)	7
1.2 ESQUEMAS DE FUNCIONAMIENTO MIMO	8
1.2.1 Diversidad Espacial	8
1.2.2 Multiplexación Espacial	9
1.2.3 Precodificación	9
1.3 MIMO Multiusuario	9
1.3.1 Canal MU-MIMO en Enlace de Subida	10
1.3.2 Canal MU-MIMO en Enlace de Bajada	11
1.4 CANAL DE COMUNICACIÓN	12
1.4.1 Canal AWGN	12
1.4.2 Canal Rayleigh	13
1.5 MODULACIÓN	13
1.5.1 Modulación M-PSK	13
1.5.2 Modulación M-QAM	14
<b>2 PRECODIFICACIÓN LINEAL</b>	<b>15</b>
2.1 SISTEMA MU-MIMO CON PRECODIFICACIÓN LINEAL	15
2.2 PRECODIFICACIÓN ZF	18
2.2.1 Precodificación BD	21
2.3 PRECODIFICACIÓN MMSE	28
<b>3 METODOLOGÍA PARA SIMULACIÓN DE LA PRECODIFICACIÓN LINEAL ZF Y MMSE</b>	<b>31</b>
3.1 METODOLOGÍA PARA SIMULACIÓN DE SISTEMAS DE TELECOMUNICACIONES	31
3.2 FASES DE SIMULACIÓN	31
3.2.1 Fase 1. Definición del Sistema	31

3.2.2	Fase 2. Análisis del Sistema . . . . .	32
3.2.3	Fase 3. Formulación del Modelo . . . . .	34
3.2.4	Fase 4. Selección del Lenguaje . . . . .	39
3.2.5	Fase 5. Codificación del Modelo . . . . .	40
3.2.6	Fase 6. Validación . . . . .	40
3.2.7	Fase 7. Experimentación . . . . .	40
<b>4</b>	<b>VALIDACIÓN DE RESULTADOS</b>	<b>41</b>
4.1	VALIDACIÓN DE RESULTADOS PARA LA PRECODIFICACIÓN ZF . . . . .	41
4.1.1	Validación de Resultados para la Precodificación ZF Generalizada BD . . . . .	43
4.2	VALIDACIÓN DE RESULTADOS PARA LA PRECODIFICACIÓN MM- SE . . . . .	45
<b>5</b>	<b>ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO DEL SISTEMA MU-MIMO CON PRECODIFICACIÓN LINEAL</b>	<b>49</b>
5.1	DESEMPEÑO DEL SISTEMA MU-MIMO CON PRECODIFICACIÓN ZF . . . . .	49
5.1.1	Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodificación ZF Generaliza- da BD . . . . .	49
5.1.2	Comparación del Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodifica- ción ZF y BD . . . . .	53
5.2	DESEMPEÑO DEL SISTEMA MU-MIMO CON PRECODIFICACIÓN MMSE . . . . .	53
5.3	COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DEL SISTEMA MU-MIMO CON PRECODIFICACIÓN ZF Y MMSE . . . . .	54
5.4	COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS SISTEMAS MU-MIMO CON Y SIN PRECODIFICACIÓN LINEAL . . . . .	59
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS</b>	<b>61</b>
6.1	CONCLUSIONES . . . . .	61
6.2	TRABAJOS FUTUROS . . . . .	62
	<b>ANEXO A</b>	<b>67</b>
	<b>ANEXO B</b>	<b>73</b>
	<b>ANEXO C</b>	<b>77</b>
	<b>ANEXO D</b>	<b>83</b>

# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1	Entidades Dinámicas. . . . .	33
Tabla 3.2	Entidades Estáticas. . . . .	34
Tabla 4.1	Comparación de Resultados de BER para la Precodificación ZF. . . . .	41
Tabla 4.2	Comparación de Resultados de SNR para la Precodificación ZF. . . . .	43
Tabla 4.3	Comparación de Resultados de BER para la Precodificación BD. . . . .	43
Tabla 4.4	Comparación de Resultados de SNR para la Precodificación BD. . . . .	45
Tabla 4.5	Comparación de Resultados de BER para la Precodificación MMSE. . . . .	45
Tabla 4.6	Comparación de Resultados de SNR para la Precodificación MMSE. . . . .	47
Tabla 5.1	Comparación de la BER para los Sistemas $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$ y $\{2, 2\} \times 4$ con Precodificación BD para 4QAM, 8PSK y 16QAM. . . . .	52
Tabla 5.2	Comparación de la BER para las Técnicas de Precodificación ZF y BD para 4QAM, 8PSK y 16QAM. . . . .	53
Tabla 5.3	Comparación de la BER para las Técnicas de Precodificación ZF, BD y MMSE para 4QAM, 8PSK y 16QAM. . . . .	57
Tabla 5.4	Comparación de la $E_b/N_0$ para las Técnicas de Precodificación ZF, BD y MMSE. . . . .	58



# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Sistema SISO. . . . .	6
Figura 1.2	Sistema SIMO. . . . .	6
Figura 1.3	Sistema MISO. . . . .	7
Figura 1.4	Sistema MIMO. . . . .	8
Figura 1.5	Diversidad Espacial. . . . .	9
Figura 1.6	Multiplexación Espacial. . . . .	9
Figura 1.7	Esquema MIMO Multiusuario. . . . .	10
Figura 1.8	Esquema MU-MIMO en Enlace de Subida. . . . .	11
Figura 1.9	Esquema MU-MIMO en Enlace de Bajada. . . . .	12
Figura 1.10	Comparación de Desempeño de las Modulaciones 4QAM, 8PSK y 16QAM en un Canal AWGN. . . . .	14
Figura 2.1	Sistema MU-MIMO en Enlace de Bajada con Precodificación. . . . .	16
Figura 2.2	Esquema de Precodificación ZF. . . . .	19
Figura 2.3	Canal de Transmisión para el Usuario Uno en un Sistema $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$ . . . . .	20
Figura 2.4	Canal de Transmisión de un Sistema $\{2, 2\} \times 4$ . . . . .	25
Figura 3.1	Metodología para la Creación y Desarrollo de una Simulación [Astaiza, et al.(2004)]. . . . .	32
Figura 3.2	Diagrama en Bloques del Sistema MU-MIMO en Enlace de Bajada con Precodificación. . . . .	34
Figura 3.3	Diagrama de Flujo del Algoritmo de Precodificación ZF. . . . .	36
Figura 3.4	Diagrama de Flujo del Control Automático de Ganancia en Recepción. . . . .	37
Figura 3.5	Diagrama de Flujo del Algoritmo de Precodificación BD. . . . .	37
Figura 3.6	Diagrama de Flujo del Algoritmo de Precodificación MMSE. . . . .	38
Figura 4.1	Validación del Desempeño de la Precodificación ZF. . . . .	42
Figura 4.2	Validación del Desempeño de la Precodificación BD. . . . .	44
Figura 4.3	Validación del Desempeño de la Precodificación MMSE. . . . .	46
Figura 5.1	Desempeño del Sistema con Precodificación ZF. . . . .	50
Figura 5.2	Desempeño del Sistema con Precodificación BD. . . . .	50
Figura 5.3	Desempeño de los Sistemas MU-MIMO $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$ y $\{2, 2\} \times 4$ con Precodificación BD. . . . .	51
Figura 5.4	Comparación del Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodificación MMSE para 4QAM, 8PSK y 16QAM. . . . .	54
Figura 5.5	Comparación del Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodificación ZF, BD y MMSE para 4QAM. . . . .	55

Figura 5.6	Comparación del Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodificación ZF, BD y MMSE para 8PSK. . . . .	55
Figura 5.7	Comparación del Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodificación ZF, BD y MMSE para 16QAM. . . . .	56
Figura 5.8	Diagrama de Constelación de Símbolos Transmitidos y Recibidos en el Sistema MU-MIMO sin Precodificación ZF. . . . .	59
Figura 5.9	Diagrama de Constelación de Símbolos Transmitidos y Recibidos en el Sistema MU-MIMO con Precodificación ZF. . . . .	60

## LISTA DE ACRÓNIMOS

<b>AGC</b>	<i>Automatic Gain Control</i> , Control Automático de Ganancia.
<b>AWGN</b>	<i>Additive White Gaussian Noise</i> , Ruido Gaussiano Blanco Aditivo.
<b>BD</b>	<i>Block Diagonalization</i> , Diagonalización en Bloques.
<b>BER</b>	<i>Bit Error Rate</i> , Tasa de Error de Bit.
<b>CDD</b>	<i>Cyclic Delay Diversity</i> , Diversidad de Retardo Cíclico.
<b>CI</b>	<i>Channel Inversion</i> , Inversión de Canal.
<b>CSI</b>	<i>Channel State Information</i> , Información de Estado de Canal.
<b>DPC</b>	<i>Dirty Paper Coding</i> , Codificación en Papel Sucio.
<b>MIMO</b>	<i>Multiple Input Multiple Output</i> , Múltiples Entradas Múltiples Salidas.
<b>MISO</b>	<i>Multiple Input Single Output</i> , Múltiples Entradas Única Salida.
<b>MUI</b>	<i>Multi-User Interference</i> , Interferencia Multiusuario.
<b>MU-MIMO</b>	<i>Multi-User MIMO</i> , MIMO Multiusuario.
<b>MMSE</b>	<i>Minimum Mean Square Error</i> , Error Cuadrático Medio Mínimo.
<b>PSK</b>	<i>Phase Shift Keying</i> , Modulación por Desplazamiento de Fase.
<b>PU-SMMSE</b>	<i>Per User Successive MMSE</i> , MMSE Sucesivo por Usuario.
<b>QAM</b>	<i>Quadrature Amplitude Modulation</i> , Modulación de Amplitud en Cuadratura.
<b>SD</b>	<i>Spatial Diversity</i> , Diversidad Espacial.
<b>SFBC</b>	<i>Spatial Frequency Block Coding</i> , Codificación por Bloques Espacio Frecuencial.
<b>SIMO</b>	<i>Single Input Multiple Output</i> , Única Entrada Múltiples Salidas.
<b>SISO</b>	<i>Single Input Single Output</i> , Única Entrada Única Salida.
<b>SM</b>	<i>Spatial Multiplexing</i> , Multiplexación Espacial.
<b>SMMSE</b>	<i>Successive MMSE</i> , MMSE Sucesivo.
<b>SNR</b>	<i>Signal to Noise Ratio</i> , Relación Potencia de Señal a Potencia de Ruido.
<b>SU-MIMO</b>	<i>Single User-MIMO</i> , MIMO Único Usuario.
<b>STBC</b>	<i>Space Time Block Coding</i> , Codificación por Bloques Espacio Temporal.
<b>STC</b>	<i>Space Time Codes</i> , Códigos Espacio Temporales.
<b>STTC</b>	<i>Space Time Trellis Code</i> , Códigos de Trellis Espacio Temporales.
<b>SU</b>	<i>Single User</i> , Usuario Único.
<b>SVD</b>	<i>Singular Value Decomposition</i> , Descomposición en Valores Singulares.
<b>THP</b>	<i>Tomlinson Harashima Precoding</i> , Precodificación de Tomlinson Harashima.
<b>ZF</b>	<i>Zero Forcing</i> , Forzado a Cero.



## RESUMEN

Los sistemas de comunicación actuales enfrentan el reto de proveer velocidades de transmisión de datos cada vez mayores. Los sistemas de Múltiples Entradas Múltiples Salidas (MIMO, *Multiple Input Multiple Output*) ofrecen una mejora significativa en la velocidad de transmisión de datos. Sin embargo, los sistemas MIMO Multiusuario (MU-MIMO, *Multi-User MIMO*) introducen múltiples interferencias, debido a que la señal transmitida a un usuario en particular, será recibida también por todos los que están operando bajo la misma banda de frecuencia. La precodificación es un proceso que se lleva a cabo en transmisión y se encarga de mitigar la interferencia multiusuario, mediante la explotación de la información de estado del canal en el transmisor. Las técnicas de precodificación pueden ser clasificadas de acuerdo a su linealidad, como técnicas de precodificación lineal y no lineal. Dentro de las técnicas lineales se encuentran: Forzado a Cero (ZF, *Zero Forcing*) y Error Cuadrático Medio Mínimo (MMSE, *Minimum Mean Square Error*), las cuales serán abordadas para analizar su desempeño en este trabajo de grado. Y dentro de las técnicas no lineales están: la Precodificación Tomlinson Harashima (THP, *Tomlinson Harashima Precoding*) y la Codificación en Papel Sucio (DPC, *Dirty Paper Coding*).



## INTRODUCCIÓN

Con la llegada de la Internet, los servicios de datos de banda ancha han acelerado la evolución del sector de comunicaciones inalámbricas. Desde el inicio de las comunicaciones móviles, el tamaño y el consumo de energía en los receptores móviles son temas de continua investigación. La reducción de consumo de energía en los receptores puede ser mejorada por la diversidad de las comunicaciones, la cual implica proporcionar al receptor múltiples copias de la señal de información, con lo cual el receptor puede combinar las señales recibidas para reducir la Tasa de Error de Bit (BER, *Bit Error Rate*) [Kirtan(2004)]. Estos sistemas de diversidad pueden ser implementados mediante los sistemas MIMO.

En los últimos años, los sistemas MIMO prometen mejoras en cuanto a desempeño y eficiencia espectral dentro de los sistemas de comunicaciones inalámbricas. Una importante configuración de los sistemas MIMO son los sistemas MU-MIMO, que buscan explotar la ortogonalidad o el desacople espacial entre los flujos de datos transmitidos desde una estación base a cada uno de los diferentes equipos receptores que comparten una misma banda de frecuencia [Comes, et al.(2010)]. Los sistemas MIMO Único Usuario (SU-MIMO, *Single User-MIMO*) aumentan la capacidad del enlace, mientras que los sistemas MU-MIMO incrementan la capacidad de la celda.

A pesar de las bondades de los sistemas MIMO, en un sistema MU-MIMO, la presencia de múltiples usuarios genera interferencia multiusuario, la cual es conocida como uno de los obstáculos para alcanzar los niveles de eficiencia espectral y/o desempeño prometidos por las técnicas de múltiples antenas. La interferencia multiusuario incrementa el consumo de energía de las comunicaciones inalámbricas, debido a la introducción de errores en los bits detectados en el receptor, por lo tanto, reducir la complejidad y mantener la tasa de error baja, aumenta el tiempo de funcionamiento de los equipos receptores [Kirtan(2004)].

El problema de la interferencia multiusuario conlleva a plantear soluciones que mitiguen dicha interferencia; una forma de hacerlo es a través de técnicas de precodificación, las cuales al ser implementadas en el lado del transmisor, trasladan parte de la funcionalidad de procesamiento de señal del receptor al transmisor, permitiendo una cancelación anticipada de la interferencia liberando de trabajo al receptor. En este trabajo de grado se analizan e implementan las técnicas de precodificación lineal ZF y MMSE, evaluando y analizando mediante simulación, el desempeño a nivel de enlace de bajada de un sistema MU-MIMO basado en las técnicas de precodificación. Las técnicas de precodificación lineal seleccionadas para el trabajo de grado son ZF y MMSE, las cuales han sido escogidas por ser ampliamente conocidas.

## ESTRUCTURA DEL TRABAJO DE GRADO

Este documento está organizado en cinco capítulos:

En el capítulo 1 se describen las generalidades de los sistemas MIMO, los canales de comunicación y los esquemas de modulación.

En el capítulo 2 se introduce el modelo del sistema y se analizan los algoritmos de precodificación lineal ZF y MMSE.

En el capítulo 3 se presenta la metodología utilizada para la simulación del sistema MU-MIMO en enlace de bajada con los algoritmos de precodificación lineal ya mencionados.

En el capítulo 4 se desarrolla la validación de los resultados de simulación obtenidos en este trabajo de grado, mediante la comparación con los resultados de investigaciones previas sobre técnicas de precodificación lineal ZF y MMSE.

En el capítulo 5 se presentan los resultados de las simulaciones y el análisis del desempeño del sistema MU-MIMO en enlace de bajada.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo de grado y posibles trabajos futuros a desarrollar en esta área.

# Capítulo 1

## GENERALIDADES DE SISTEMAS MIMO

Los sistemas de comunicaciones inalámbricos tienen como objetivo ofrecer nuevos y mejores servicios a bajo costo. La demanda de altas velocidades de transmisión de información representa un desafío para estos sistemas, cuyos recursos de potencia y ancho de banda son limitados, lo que lleva a explotar la capacidad del canal y una forma de hacerlo es mediante el uso de múltiples antenas en transmisión y en recepción, emergiendo los denominados sistemas MIMO [Windpassinger, et al.(2004), Goldsmith, et al.(2003)].

La expectativa de alcanzar mayor eficiencia espectral con los sistemas MIMO, da lugar a múltiples investigaciones con el propósito de caracterizar los aspectos teóricos y prácticos relacionados con los sistemas MIMO para ampliar éstos conceptos a sistemas multiusuario. Los sistemas MIMO son estructuras de transmisión y recepción que hacen uso de diversas antenas, acompañados de técnicas de procesamiento de señales. La mejora en eficiencia espectral asociada a los canales MIMO, se obtiene al aprovechar los múltiples trayectos que proporcionan caminos de transmisión paralelos desacoplados entre el transmisor y el receptor [Comes, et al.(2010)]. Teniendo en cuenta la alternativa de mejoramiento, tanto en capacidad como en eficiencia espectral, que ofrecen los sistemas MIMO, en este capítulo se proporciona una visión general sobre ellos.

### 1.1. SISTEMAS MIMO

Los sistemas de comunicaciones inalámbricos, de acuerdo al número de antenas disponibles en el transmisor y en el receptor, pueden ser clasificados en cuatro sistemas [Paulraj, et al.(2003)], los cuales se explican a continuación.

#### 1.1.1. Sistema Única Entrada Única Salida (SISO)

El sistema de Única Entrada Única Salida (SISO, *Single Input Single Output*) está conformado por una única antena en transmisión y en recepción, como se muestra en la Figura 1.1. Se define  $h_{i,j}$  como la respuesta impulsiva del canal, entre la  $j$ -ésima antena del transmisor y la  $i$ -ésima antena del receptor. En el caso SISO la componente  $h_{1,1}$  conforma el canal de comunicación  $\mathbf{H}$ .

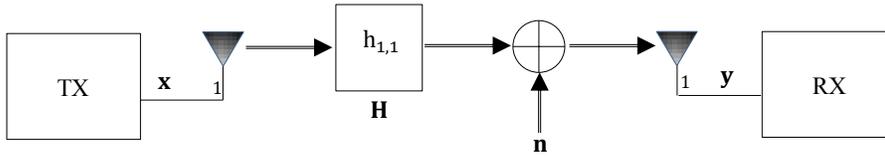


Figura 1.1: Sistema SISO.

Siendo  $\mathbf{x}$  la señal transmitida y  $\mathbf{n}$  el ruido presente en el canal, la señal recibida está dada por la ecuación 1.1.

$$\mathbf{y} = h_{1,1}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1.1)$$

### 1.1.2. Sistema Única Entrada Múltiples Salidas (SIMO)

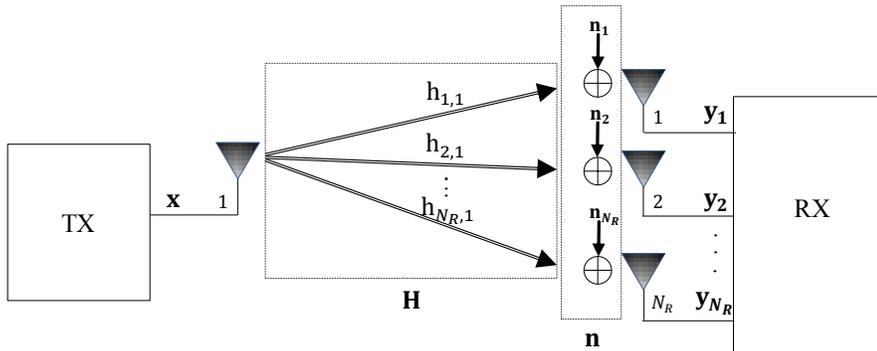


Figura 1.2: Sistema SIMO.

Un sistema de Única Entrada Múltiples Salidas (SIMO, *Single Input Multiple Output*) cuenta con  $N_R$  antenas en recepción y una antena en transmisión, como se muestra en la Figura 1.2. Estos sistemas permiten implementar diversidad espacial en recepción y explotar la propagación multitrayecto, suministrando al receptor varias copias de la señal original. El canal SIMO puede ser descompuesto en  $N_R$  canales SISO, y está representado por un vector de  $N_R \times 1$ , que está dado por la ecuación 1.2.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{1,1} \\ h_{2,1} \\ \vdots \\ h_{N_R,1} \end{bmatrix}^T \quad (1.2)$$

Siendo  $\mathbf{x}$  la señal transmitida, la señal recibida por la antena  $i$ -ésima del receptor está dada por la ecuación 1.3.

$$\mathbf{y}_i = h_{i1}\mathbf{x} + \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_R \quad (1.3)$$

La señal recibida  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N_R \times 1}$  está dada por la ecuación 1.4.

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{N_R}]^T \quad (1.4)$$

Y el vector de ruido está dado por la ecuación 1.5.

$$\mathbf{n} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_{N_R}]^T \in \mathbb{C}^{N_R \times 1} \quad (1.5)$$

### 1.1.3. Sistema Múltiples Entradas Única Salida (MISO)

La diversidad espacial puede también implementarse en transmisión, originando los sistemas de Múltiples Entradas Única Salida (MISO, *Single Input Multiple Output*), los cuales cuentan con  $N_T$  antenas transmisoras y una antena receptora, como se muestra en la Figura 1.3.

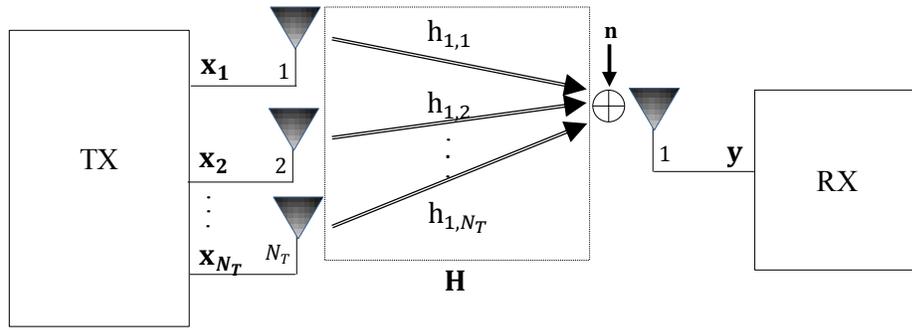


Figura 1.3: Sistema MISO.

De forma análoga al sistema SIMO, el canal MISO comprende  $N_T$  enlaces SISO. El canal MISO está conformado por un vector  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{1 \times N_T}$  dado por la ecuación 1.6.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{1,1}, \mathbf{h}_{1,2}, \dots, \mathbf{h}_{1,N_T} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Sea  $\mathbf{x}_j$  la señal transmitida por la  $j$ -ésima antena transmisora y  $\mathbf{y}$  la señal en el receptor, la relación de entrada y salida para el canal MISO está dada por la ecuación 1.7.

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{N_T} h_{1,j} \mathbf{x}_j + \mathbf{n} \quad (1.7)$$

Donde  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N_T}]^T$ .

### 1.1.4. Sistema Múltiples Entradas Múltiples Salidas (MIMO)

Un sistema MIMO cuenta con  $N_T$  antenas en transmisión y  $N_R$  antenas en recepción, como se muestra en la Figura 1.4. En el canal MIMO cada antena recibe no sólo la componente transmitida a esta, sino también las componentes transmitidas a las otras antenas. La información a transmitir es dividida en flujos de datos independientes [Rohde & Schwarz,(2009)]. El canal MIMO está dado por la matriz  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_R \times N_T}$ , dada por la ecuación 1.8.

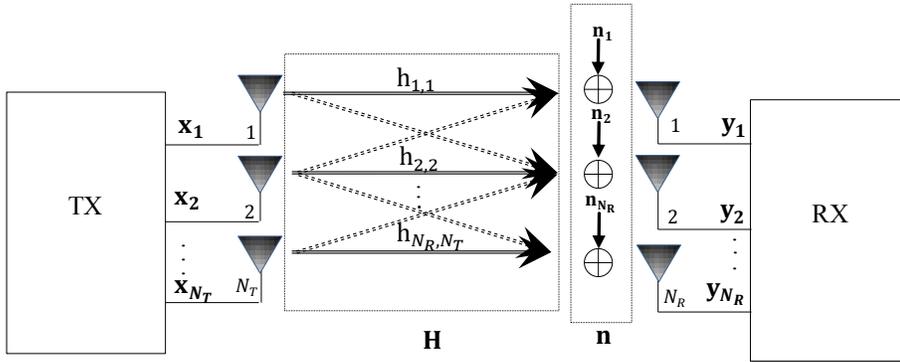


Figura 1.4: Sistema MIMO.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,N_T} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,N_T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_R,1} & h_{N_R,2} & \dots & h_{N_R,N_T} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

El vector  $[h_{1,j}, h_{2,j}, \dots, h_{N_R,j}]^T$  es el canal entre la  $j$ -ésima antena transmisora y el arreglo de antenas receptoras. Dado que la señal  $\mathbf{x}_j$  es transmitida por la  $j$ -ésima antena transmisora, la señal recibida por la  $i$ -ésima antena del receptor, está dada por la ecuación 1.9.

$$\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^{N_T} h_{i,j} \mathbf{x}_j + \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_R \quad (1.9)$$

En general, la relación de entrada y salida para el canal MIMO puede ser expresada en la notación matricial dada por la ecuación 1.10.

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1.10)$$

Donde  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N_T}]^T \in \mathbb{C}^{N_T \times 1}$  representa los datos transmitidos,  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{N_R}]^T \in \mathbb{C}^{N_R \times 1}$  la señal recibida y  $\mathbf{n} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_{N_R}]^T \in \mathbb{C}^{N_R \times 1}$  el ruido presente en el canal.

## 1.2. ESQUEMAS DE FUNCIONAMIENTO MIMO

Los sistemas MIMO pueden ser clasificados en tres esquemas de funcionamiento: diversidad espacial, multiplexación espacial y precodificación, los cuales se describen brevemente a continuación.

### 1.2.1. Diversidad Espacial

Este esquema se apoya en la transmisión de la misma información por múltiples antenas, como se muestra en la Figura 1.5. El objetivo de la diversidad espacial es hacer la transmisión más robusta [Rohde & Schwarz, (2009)].

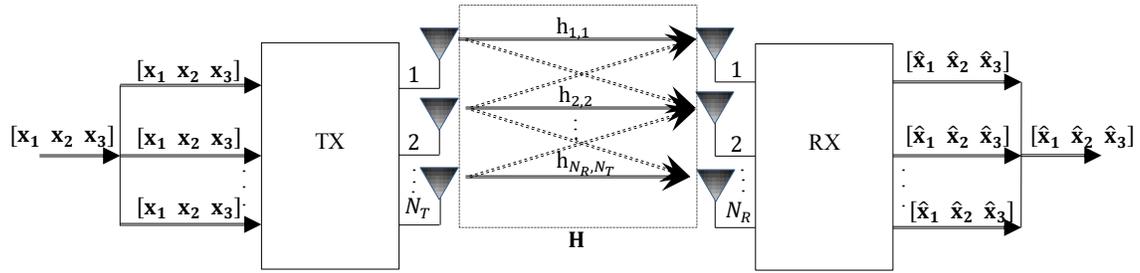


Figura 1.5: Diversidad Espacial.

### 1.2.2. Multiplexación Espacial

La multiplexación espacial es una técnica usada para incrementar significativamente la velocidad de transmisión de datos o la capacidad del canal. Multiplexación espacial significa transmitir diferentes flujos de datos simultáneamente en la misma frecuencia a través de múltiples antenas en transmisión y recepción. En contraste a la diversidad espacial, no se transmite información redundante [Rohde & Schwarz,(2010)]. El esquema de multiplexación espacial se muestra en la Figura 1.6.

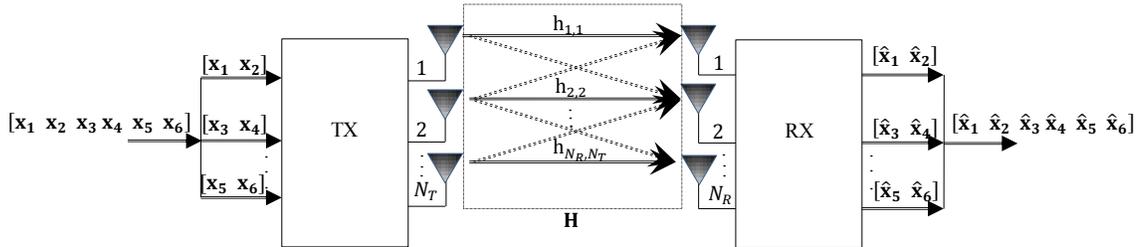


Figura 1.6: Multiplexación Espacial.

La multiplexación espacial incrementa la velocidad de transmisión a un único usuario, o la capacidad del sistema en el caso de multiples usuarios [Rohde & Schwarz,(2010)].

### 1.2.3. Precodificación

En la precodificación las señales son pre-procesadas en transmisión, con el fin de ser transmitidas a través de canales paralelos [Kirtan(2004)], maximizando así la Relación de Potencia de Señal a Potencia de Ruido (SNR, *Signal to Noise Ratio*) recibida [Holma and Toskala(2009)]; sin embargo, la precodificación es posible si el transmisor tiene un conocimiento previo del estado del canal.

## 1.3. MIMO Multiusuario

Una extensión de los sistemas MIMO son los sistemas MU-MIMO. A diferencia de los sistemas MIMO punto a punto o SU-MIMO, los cuales buscan mejorar las prestaciones del

enlace entre el transmisor y los equipos receptores, los sistemas MU-MIMO permiten compartir la misma banda de frecuencia entre múltiples usuarios y con ello explotar una posible ortogonalidad entre los flujos de datos transmitidos [Comes, et al.(2010)].

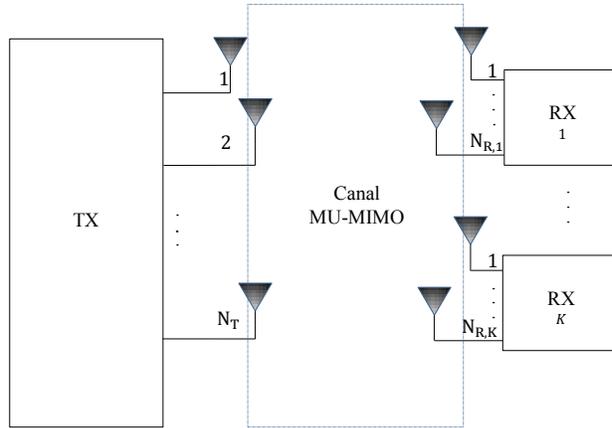


Figura 1.7: Esquema MIMO Multiusuario.

La Figura 1.7 muestra un esquema típico de comunicaciones MU-MIMO, con presencia de  $K$  equipos receptores, donde el  $i$ -ésimo equipo receptor ( $i = 1, 2, \dots, K$ ) tiene  $N_{R,i}$  antenas y el transmisor  $N_T$  antenas. Si todos los equipos receptores tienen el mismo número de antenas ( $N_{R,i}$ ), el total de antenas del conjunto de equipos receptores es igual a  $N_R = KN_{R,i}$ .

Como los equipos receptores forman un conjunto virtual de  $KN_{R,i}$  antenas de comunicación, la configuración para el enlace descendente se denota  $KN_{R,i} \times N_T$  y para el enlace ascendente  $N_T \times KN_{R,i}$ .

En el enlace ascendente, las múltiples antenas de los equipos receptores pueden transmitir simultáneamente sus flujos de datos al transmisor (muchos a uno), y en el enlace descendente, el transmisor puede transmitir a los múltiples equipos receptores (uno a muchos).

### 1.3.1. Canal MU-MIMO en Enlace de Subida

Para el enlace de subida de sistemas MU-MIMO se implementa en el transmisor un detector multiusuario que separa las contribuciones de los  $K$  equipos receptores. En la Figura 1.8 se muestra el esquema de un sistema MU-MIMO en enlace de subida. Sea el número de antenas del transmisor  $N_T = N_R$ , la señal en el transmisor se representa por un vector  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{N_T}]^T$  dado por la ecuación 1.11.

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N_T} \mathbf{h}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{n} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1.11)$$

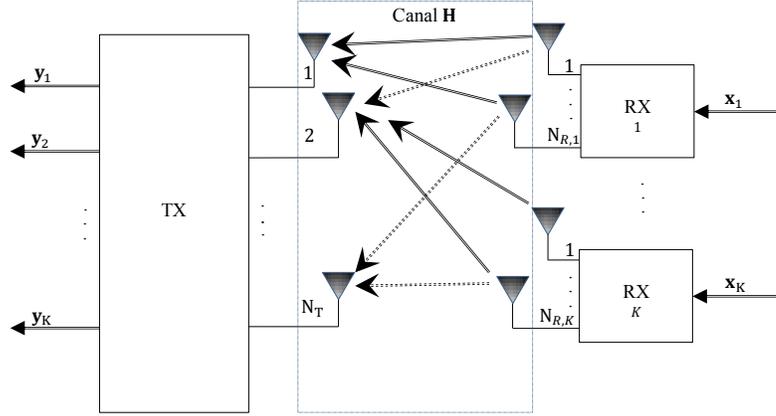


Figura 1.8: Esquema MU-MIMO en Enlace de Subida.

Donde

- $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_K]^T$  es la matriz de canal y cada  $h_i$  corresponde al subcanal del  $i$ -ésimo usuario.
- $\mathbf{h}_i = [\mathbf{h}_{i,1}, \mathbf{h}_{i,2}, \dots, \mathbf{h}_{i,N_T}]^T$  es el vector cuyas componentes son las  $N_T$  respuestas impulsivas del canal entre el  $i$ -ésimo usuario y las  $N_T$  antenas del transmisor.
- $\mathbf{x}_i = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_K]^T$  es el vector de datos transmitidos por los  $K$  usuarios.
- $\mathbf{n}$  es el vector de ruido del canal.

Como todos los flujos de datos de los  $K$  usuarios independientes están disponibles en el transmisor, el sistema MU-MIMO  $N_T \times \{N_{R,1}, N_{R,2}, \dots, N_{R,K}\}$  es equivalente a un sistema SU-MIMO  $N_T \times KN_{R,i}$  [Cho, et al.(2010)].

### 1.3.2. Canal MU-MIMO en Enlace de Bajada

La Figura 1.9 muestra el esquema de un sistema MU-MIMO en enlace de bajada.

Suponiendo que el número de antenas en el transmisor es igual al total de antenas receptoras, es decir  $N_T = N_R$ , la señal recibida está dada por la ecuación 1.12.

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1.12)$$

Donde  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_R \times N_T}$ ,  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N_T}]^T \in \mathbb{C}^{N_T \times 1}$ ,  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_K]^T \in \mathbb{C}^{N_R \times 1}$  y  $\mathbf{n} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_K]^T \in \mathbb{C}^{N_R \times 1}$ . Cada símbolo  $\mathbf{y}_i$  corresponde a la información del  $i$ -ésimo usuario.

Con el objetivo de eliminar la interferencia causada por las señales dirigidas al resto de usuarios, se utilizan en transmisión técnicas de precodificación.

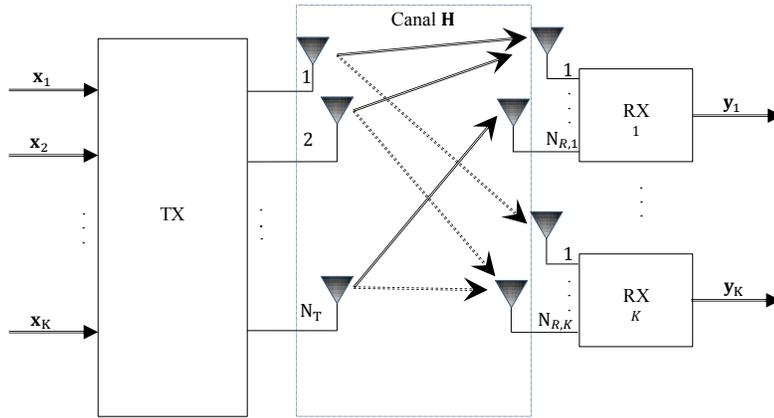


Figura 1.9: Esquema MU-MIMO en Enlace de Bajada.

Las técnicas de precodificación se encargan de mitigar la Interferencia Multiusuario (MUI, *Multi-User Interference*) y se basan en la explotación de la Información de Estado de Canal (CSI, *Channel State Information*) en el transmisor, permitiendo a los usuarios compartir el mismo canal. Es esencial el conocimiento previo de la CSI en transmisión, ya que permite el procesamiento conjunto de las señales de todos los usuarios, mejorando significativamente el desempeño del sistema. Las técnicas de precodificación pueden ser clasificadas como: técnicas de precodificación lineal y no lineal. Dentro de las técnicas lineales se encuentran: Forzado a Cero (ZF, *Zero Forcing*) y Error Cuadrático Medio Mínimo (MMSE, *Minimum Mean Square Error*); y dentro de las técnicas no lineales se encuentran: la Precodificación Tomlinson-Harashima (THP, *Tomlinson-Harashima Precoding*) y la Codificación en Papel Sucio (DPC, *Dirty Paper Coding*).

En este trabajo de grado se seleccionaron las técnicas de precodificación lineal por ser las más opcionadas a implementarse en sistemas reales, debido a su bajo costo computacional, es decir, con una menor cantidad y complejidad de operaciones matemáticas, y por ende menor retardo de procesamiento de señal [Haardt, et al.(2005), Min and Seong.(2007)].

## 1.4. CANAL DE COMUNICACIÓN

Dentro de los modelos de canales de comunicación se encuentran los canales de Ruido Gaussiano Blanco Aditivo (AWGN, *Additive White Gaussian Noise*) y Rayleigh, los cuales se explican brevemente a continuación.

### 1.4.1. Canal AWGN

Este modelo de canal degrada la señal transmitida adicionándole a esta ruido gaussiano blanco. Por lo tanto la señal recibida está dada por la ecuación 1.13 [Proakis and Salehi(2008)].

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1.13)$$

Donde  $\mathbf{x}$  es la señal transmitida y  $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(0, N_0B)$  el ruido gaussiano complejo simétricamente circular de media cero y varianza  $N_0B$ , donde  $N_0$  es la densidad espectral de potencia de ruido térmico y  $B$  el ancho de banda de la señal de información.

### 1.4.2. Canal Rayleigh

En este modelo de canal, la señal se propaga a través de caminos diferentes, denominados trayectorias múltiples, generados por reflexión múltiple, difracción y/o dispersión de la señal transmitida en estructuras cercanas a los receptores. La suma de las señales de diferentes trayectos múltiples puede dar lugar a la interferencia constructiva o destructiva de la señal recibida, lo que resulta en una variación en la intensidad de la señal. Este cambio en la intensidad de la señal se denomina desvanecimiento. Este tipo de canal es modelado por una distribución Rayleigh. La señal recibida está dada por la ecuación 1.14 [Rodrigues(2012)].

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1.14)$$

Donde  $\mathbf{n}$  es el ruido AWGN,  $\mathbf{y}$  es la señal recibida que depende de los datos transmitidos  $\mathbf{x}$  y de la respuesta del canal  $\mathbf{h}$ .

## 1.5. MODULACIÓN

El propósito principal de la modulación en un sistema de comunicaciones es generar una señal modulada adecuada a las características del canal de transmisión [Carlson, et al.(2002)]. Los esquemas seleccionados en este trabajo de grado se explican a continuación.

### 1.5.1. Modulación M-PSK

En la modulación por Desplazamiento de Fase (PSK, *Phase Shift Keying*) la fase portadora toma uno de  $M$  valores posibles, a saber,  $\theta_i = 2(i-1)\pi/M$ , donde  $i = 1, 2, \dots, M$ . Por lo tanto, durante cada intervalo de transmisión de duración  $T$ , se envía una de las  $M$  señales posibles dada por la ecuación 1.15 [Haykin(2002)].

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(i-1)\right), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad 0 < t \leq T \quad (1.15)$$

Donde  $M = 2^n$  es el orden de modulación,  $n$  es el número de bits por símbolo,  $E$  la energía de la señal por símbolo,  $T$  el periodo de símbolo y  $f_c$  la frecuencia de la portadora.

La probabilidad de error de bit para M-PSK en un canal de ruido AWGN está dada por la ecuación 1.16.

$$P_{b(AWGN, M-PSK)} = \frac{2}{\log_2 M} \operatorname{erfc}\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \sqrt{\log_2 M} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right), \quad \text{para } M \geq 4 \quad (1.16)$$

Donde  $E_b$  es la energía de bit.

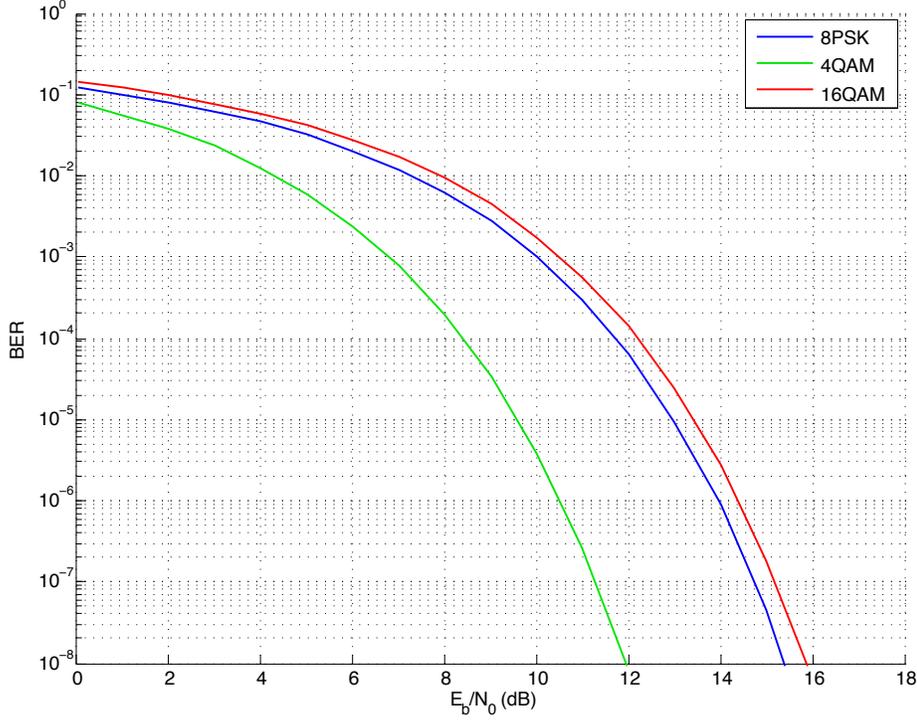


Figura 1.10: Comparación de Desempeño de las Modulaciones 4QAM, 8PSK y 16QAM en un Canal AWGN.

### 1.5.2. Modulación M-QAM

En el esquema de Modulación de Amplitud en Cuadratura (QAM, *Quadrature Amplitude Modulation*) la información digital está contenida tanto en la amplitud como en la fase de la señal modulada [Singal(2010)]. Una señal QAM M-aria está dada por la ecuación 1.17.

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{T}} a_i \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2E_0}{T}} b_i \sin(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.17)$$

Donde  $T$  es el periodo del símbolo,  $E_0$  es la energía de la señal con la amplitud mas baja,  $a_i$  y  $b_i$  son enteros, los cuales varían según el orden de modulación e  $i = 1, 2, \dots, M$  [Haykin(2002)].

La probabilidad de error de bit para M-QAM en un canal AWGN está dada por la ecuación 1.18.

$$P_{b(AWGN, M-QAM)} = \frac{2}{\log_2 M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\log_2 M \frac{E_b}{N_0} k} \right) \quad (1.18)$$

Donde  $k = \frac{3}{2(M-1)}$ , corresponde al factor normalizador de modulación M-QAM.

Las modulaciones escogidas para desarrollar este trabajo de grado son 4QAM, 8PSK y 16QAM, cuyas probabilidades de error de bit en un canal AWGN se muestran en la Figura 1.10.

# Capítulo 2

## PRECODIFICACIÓN LINEAL

Los beneficios del uso de los sistemas MIMO han sido bien establecidos, sin embargo, los sistemas MU-MIMO introducen múltiples interferencias, debido a que la señal transmitida por el transmisor a un usuario en particular, será recibida también por todos los que están operando bajo la misma banda de frecuencia. La precodificación es un proceso que se lleva a cabo en el transmisor, a partir de la información de estado de canal recibida por el transmisor de los equipos receptores, de manera que mitigue las múltiples interferencias, mejorando el desempeño del sistema.

Normalmente, los procedimientos para mitigar la interferencia multiusuario requerían retransmisiones de datos, ecualización en recepción, implicando todo esto mayor consumo de potencia y/o dispositivos más complejos. El tamaño y consumo de energía de los receptores móviles es un asunto de continua investigación. El esquema de precodificación en el lado transmisor funciona mejor que la ecualización en el lado receptor, lo que disminuye el consumo de energía aumentando el tiempo de operación de los equipos receptores [Kirtan(2004)].

Este capítulo presenta las técnicas de precodificación lineal ZF y MMSE.

- ZF es una técnica de precodificación lineal para sistemas MU-MIMO en enlace de bajada. La señal de cada usuario es pre-procesada en el transmisor, utilizando una matriz de precodificación que se encuentra en el espacio nulo de las matrices de canal de los demás usuarios. De este modo, la MUI es mitigada de manera eficiente.
- MMSE es una técnica de precodificación lineal, la cual minimiza la distancia cuadrática media entre los símbolos recibidos y transmitidos. Esta técnica utiliza la información de la varianza de ruido para optimizar la matriz de precodificación. MMSE incrementa el desempeño del sistema, especialmente, para equipos receptores con una antena.

La explicación detallada de las dos técnicas anteriores se presenta a continuación.

### 2.1. SISTEMA MU-MIMO CON PRECODIFICACIÓN LINEAL

La comprensión del sistema es importante para obtener una visión del impacto de la precodificación en su desempeño. En un sistema MU-MIMO en enlace de bajada, un transmisor transmite simultáneamente flujos de datos a un grupo de usuarios que pueden estar equipados con única o múltiples antenas, como se muestra en la Figura 2.1 [Min and Seong.(2007)].

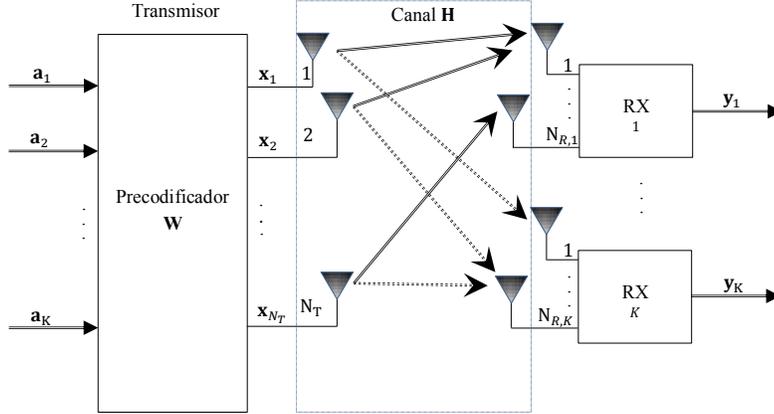


Figura 2.1: Sistema MU-MIMO en Enlace de Bajada con Precodificación.

El sistema MU-MIMO en enlace de bajada, cuenta en el transmisor con  $N_T$  antenas transmisoras y con  $K$  usuarios, donde el  $i$ -ésimo usuario ( $i = 1, \dots, K$ ) tiene  $N_{R,i}$  antenas de recepción, por lo tanto, el total de antenas receptoras  $N_R$  está dado por la ecuación 2.1.

$$N_R = \sum_{i=1}^K N_{R,i} \quad (2.1)$$

Un sistema MU-MISO puede ser considerado MU-MIMO en el caso que el sistema haga uso de técnicas como Codificación por Bloques Espacio Frecuencial (SFBC, *Space Frequency Block Coding*), Diversidad de Retardo Cíclico (CDD, *Cyclic Delay Diversity*), Diversidad de Transmisión por Conmutación de Frecuencias (FSTD, *Frequency Shift Transmit Diversity*), etc. [3G Americas,(2009)]. Es de aclarar que en este trabajo de grado, el cual realiza un estudio sobre las técnicas precodificación lineal ZF y MMSE, la notación  $\{N_{R,1}, \dots, N_{R,K}\} \times N_T$ , describe las dimensiones del sistema MU-MIMO con el que se está trabajando (contrario a escribir  $\{N_R \times N_T\}$ , la cual representa un sistema MIMO punto a punto). Por ejemplo, para un sistema con cuatro antenas en el transmisor y dos equipos receptores, cada uno con dos antenas receptoras, el sistema se denota de la forma  $\{2, 2\} \times 4$  y para el caso de cuatro equipos receptores, cada uno con única antena receptora, el sistema se denota como  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$ , denominado por simplicidad sistema MU-MIMO [Kaltenberger, et al.(2008), Min and Seong.(2007), Peel, et al.(2005), Spencer, et al.(2004)].

El modelo matemático del canal MIMO,  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_R \times N_T}$ , implica que la señal recibida  $\mathbf{y}$  está dada por la ecuación 2.2.

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (2.2)$$

Donde  $\mathbf{x}$  es el vector de señal a transmitir y  $\mathbf{n}$  representa el ruido AWGN.

El vector de datos en transmisión está dado por la ecuación 2.3.

$$\mathbf{a} = \left[ \mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots, \mathbf{a}_K^T \right]^T \in \mathbb{C}^{N_R \times 1} \quad (2.3)$$

Donde  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{C}^{N_R \times 1}$  es el vector de datos conformado por los símbolos modulados para el  $i$ -ésimo usuario.

El proceso de la precodificación lineal es modelado por la multiplicación del vector de datos  $\mathbf{a}$  y la matriz de precodificación  $\mathbf{W}$ , dado por la ecuación 2.4.

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}\mathbf{a} \quad (2.4)$$

Donde

$$\mathbf{W} = \left[ \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_K \right] \in \mathbb{C}^{N_T \times N_R} \quad (2.5)$$

$\mathbf{W}_i \in \mathbb{C}^{N_T \times N_{R,i}}$  corresponde a la matriz de precodificación del  $i$ -ésimo usuario. La potencia promedio  $P_{tr}$  del vector de transmisión  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_T}$  está dada por la ecuación 2.6.

$$E\{\|\mathbf{x}\|^2\} = \text{traza}(\mathbf{W}^H \mathbf{W}) = P_{tr} \quad (2.6)$$

Donde  $\mathbf{W}^H$  es la transpuesta conjugada de la matriz de precodificación  $\mathbf{W}$ . La matriz de canal del sistema MU-MIMO en enlace de bajada  $\mathbf{H}$ , compuesta por las matrices de canal de cada usuario, está dada por la ecuación 2.7 [Bandemer, et al.(2006)].

$$\mathbf{H} = \left[ \mathbf{H}_1^T, \mathbf{H}_2^T, \dots, \mathbf{H}_K^T \right]^T \in \mathbb{C}^{N_R \times N_T} \quad (2.7)$$

Donde  $\mathbf{H}_i \in \mathbb{C}^{N_{R,i} \times N_T}$  es la matriz de canal para el  $i$ -ésimo usuario.

El ruido presente en el canal MU-MIMO se asume como ruido gaussiano complejo de media cero y simétricamente circular  $\mathbf{n}_i \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad [Jie, et al.(2012)]. El vector de ruido está dado por la ecuación 2.8.

$$\mathbf{n} = \left[ \mathbf{n}_1^T, \mathbf{n}_2^T, \dots, \mathbf{n}_K^T \right]^T \in \mathbb{C}^{N_R} \quad (2.8)$$

Donde  $\mathbf{n}_i \in \mathbb{C}^{N_{R,i}}$  es el vector de ruido para el  $i$ -ésimo usuario [Bandemer, et al.(2006)]. El proceso de la precodificación requiere perfecto conocimiento de la CSI en el transmisor, para lograr una máxima capacidad [Kaltenberger, et al.(2008), Bandemer, et al.(2006)].

Cada matriz  $\mathbf{H}_i$  está asociada a una matriz de precodificación  $\mathbf{W}_i$ , la cual es utilizada en

el lado del transmisor para multiplicarse con los datos de un usuario específico. Por lo tanto, la señal recibida por el  $i$ -ésimo usuario está dada por la ecuación 2.9.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i &= \sum_{j=1}^K \mathbf{H}_i \mathbf{x}_j + \mathbf{n}_i \\ &= \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^K \mathbf{H}_i \mathbf{x}_j + \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

Reemplazando la ecuación 2.4 en 2.9, se llega finalmente a la ecuación 2.10.

$$\mathbf{y}_i = \underbrace{\mathbf{H}_i \mathbf{W}_i \mathbf{a}_i}_{\text{Señal Deseada}} + \underbrace{\sum_{j=1, j \neq i}^K \mathbf{H}_i \mathbf{W}_j \mathbf{a}_j}_{\text{Señal Interferente}} + \mathbf{n}_i \quad (2.10)$$

En este punto,  $\sum_{j=1, j \neq i}^K \mathbf{H}_i \mathbf{W}_j \mathbf{a}_j$  representa la MUI y  $\mathbf{n}_i$  el ruido AWGN. Ahora el objetivo es encontrar la forma adecuada de escoger  $\mathbf{W}_j$ , que permita eliminar dicha interferencia.

## 2.2. PRECODIFICACIÓN ZF

Dentro de las posibles soluciones que existen para mitigar el problema de la MUI, presente en sistemas donde los usuarios se comunican bajo la misma banda de frecuencia, se encuentra la precodificación ZF, conocida también como Inversión de Canal (CI, *Channel Inversion*) [Peel, et al.(2005), Kaltenberger, et al.(2008)]. ZF generalmente es utilizada para ambientes MISO, es decir, aquellos donde el transmisor cuenta con múltiples antenas y el equipo receptor con una antena [Barzola y Guailacela(2004)].

El trabajo de ZF es encontrar las matrices  $\mathbf{W}_j$  que cumplan con la condición dada por la ecuación 2.11 [Spencer, et al.(2004)].

$$\mathbf{H}_i \mathbf{W}_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad (2.11)$$

Cancelándose así las señales interferentes en el sistema.

ZF presenta mejor desempeño bajo la condición de  $N_{R,i} = 1$ , luego la matriz de canal  $\mathbf{H}_i$  es de dimensiones  $1 \times N_T$ .  $\mathbf{H}$  es una matriz de rango completo, es decir, que no existe una combinación lineal entre sus filas o columnas, dada en la ecuación 2.7.

La matriz de precodificación ZF está dada por la pseudoinversa de Moore-Penrose de  $\mathbf{H}$  denotada por  $\mathbf{H}^\dagger$ , dada por la ecuación 2.12 (para mayor información ver Anexo C).

$$\mathbf{W} = \mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^H)^{-1} = \left[ \mathbf{H}_1^\dagger, \mathbf{H}_2^\dagger, \dots, \mathbf{H}_K^\dagger \right] \quad (2.12)$$

Donde  $\mathbf{H}^\dagger \in \mathbb{C}^{N_T \times \sum_{i=1}^K N_{R,i}}$  y  $\mathbf{H}_i^\dagger \in \mathbb{C}^{N_T \times N_{R,i}}$ .

Para el caso de una matriz cuadrada de rango completo, la pseudoinversa es idéntica a su matriz inversa, por lo tanto la matriz de precodificación temporal está dada por la ecuación 2.13.

$$\mathbf{W} = \mathbf{H}^{-1} \quad (2.13)$$

El producto  $\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger$  está dado por la ecuación 2.14.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^T & \mathbf{H}_2^T & \dots & \mathbf{H}_K^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^\dagger & \mathbf{H}_2^\dagger & \dots & \mathbf{H}_K^\dagger \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^\dagger & \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2^\dagger & \dots & \mathbf{H}_1\mathbf{H}_K^\dagger \\ \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1^\dagger & \mathbf{H}_2\mathbf{H}_2^\dagger & \dots & \mathbf{H}_2\mathbf{H}_K^\dagger \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_K\mathbf{H}_1^\dagger & \mathbf{H}_K\mathbf{H}_2^\dagger & \dots & \mathbf{H}_K\mathbf{H}_K^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

La ecuación 2.14 satisface la ecuación 2.12, lo que significa que la  $i$ -ésima columna de la pseudoinversa de la matriz de canal  $\mathbf{H}_i^\dagger$ , es el espacio nulo de la matriz de canal de los demás usuarios [Huayu, et al.(2010)].

Un esquema del sistema MU-MIMO basado en la técnica ZF se muestra en la Figura 2.2.

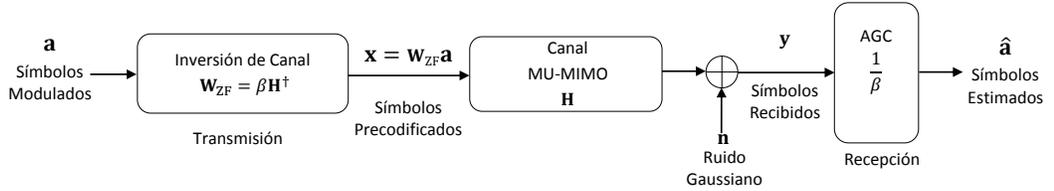


Figura 2.2: Esquema de Precodificación ZF.

En la Figura 2.2, el vector de los símbolos recibidos  $\mathbf{y}$  está dado por la ecuación 2.10, el cual, una vez mitigada la MUI resulta en la ecuación 2.15.

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{a} + \mathbf{n} \quad (2.15)$$

Posteriormente, con el fin de satisfacer la restricción total de potencia después de la precodificación, la matriz  $\mathbf{W}$  es multiplicada por  $\beta$ , producto dado por la ecuación 2.16.

$$\mathbf{W}_{ZF} = \beta\mathbf{H}^{-1} \quad (2.16)$$

Donde  $\beta$  es una constante, dada por la ecuación 2.17.

$$\beta = \sqrt{\frac{N_T}{\text{Tr}(\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{H}^{-1})^H)}} \quad (2.17)$$

Para compensar el efecto de la amplificación por el factor  $\beta$  en el transmisor, la señal debe ser dividida por  $\beta$  mediante un filtro de Control de Ganancia Automático (AGC, *Automatic Gain Control*) en el receptor. Donde al dividir por  $\beta$  se obtiene la estimación de la información original  $\hat{\mathbf{a}}$ , dada por la ecuación 2.18.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= \frac{1}{\beta}(\mathbf{H}\mathbf{W}_{ZF}\mathbf{a} + \mathbf{n}) \\ &= \frac{1}{\beta}(\mathbf{H}\beta\mathbf{H}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{a} + \frac{1}{\beta}\mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para evaluar el desempeño del enlace de bajada de un sistema MU-MIMO que hace uso de la técnica ZF, se ha seleccionado en este trabajo de grado un sistema MU-MIMO con un transmisor de cuatro antenas y cuatro equipos receptores cada uno con una única antena, como se muestra en Figura 2.3.

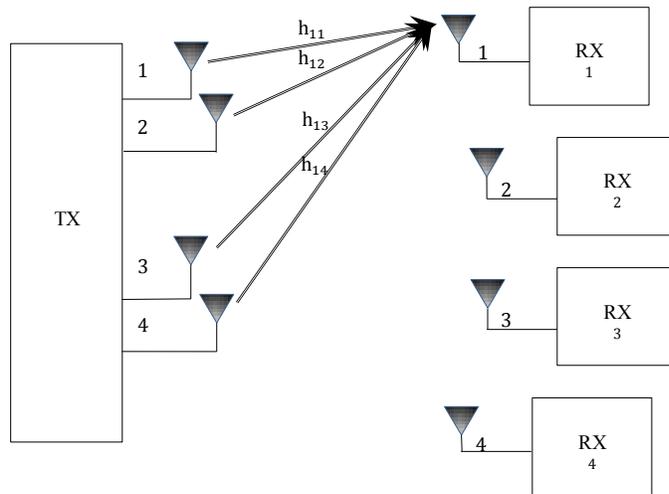


Figura 2.3: Canal de Transmisión para el Usuario Uno en un Sistema  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$ .

De acuerdo a la Figura 2.3, la matriz de canal  $\mathbf{H}$  correspondiente al sistema MU-MIMO con precodificación ZF está dado por la ecuación 2.19.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} & \mathbf{h}_{13} & \mathbf{h}_{14} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} & \mathbf{h}_{23} & \mathbf{h}_{24} \\ \mathbf{h}_{31} & \mathbf{h}_{32} & \mathbf{h}_{33} & \mathbf{h}_{34} \\ \mathbf{h}_{41} & \mathbf{h}_{42} & \mathbf{h}_{43} & \mathbf{h}_{44} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

El canal  $\mathbf{H}$  de la ecuación 2.19 está conformado por las matrices de canal de cada usuario presente en el sistema [Barzola y Guailacela(2004)].

### 2.2.1. Precodificación BD

La técnica de precodificación Diagonalización en Bloques (BD, *Block Diagonalization*), es una alternativa de precodificación lineal de baja complejidad para sistemas MU-MIMO en enlace de bajada. BD es una generalización de la técnica ZF y habitualmente se utiliza cuando el número de antenas por equipo receptor es mayor que uno,  $N_{R,i} > 1$ , porque si es igual a uno, BD sería equivalente a la técnica ZF y la matriz de precodificación se resumiría al cálculo de la pseudoinversa del canal. De manera similar a ZF, BD debe cumplir con la condición de cero interferencia dada por la ecuación 2.11 [Barzola y Guailacela(2004)].

El cálculo de la matriz de precodificación lineal BD de cada usuario y su filtro de recepción, pueden ser obtenidos por Descomposición en Valores Singulares (SVD, *Singular Value Decomposition*), mediante la cual, se obtiene una matriz de precodificación que puede eliminar la interferencia de los otros usuario [Jie, et al.(2012)].

La señal recibida por cada equipo receptor está dada por la ecuación 2.20.

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{W}_i \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^K \mathbf{H}_i \widetilde{\mathbf{W}}_i \widetilde{\mathbf{a}}_i + \mathbf{n}_i \quad (2.20)$$

Donde  $\widetilde{\mathbf{W}}_i$  es la matriz de precodificación conformada por todas las  $\mathbf{W}_{j \neq i}$  dadas por la ecuación 2.21 y  $\widetilde{\mathbf{a}}_i$ , dado por la ecuación 2.22, es el vector de símbolos modulados transmitido a todos los usuarios menos al  $i$ -ésimo usuario.

$$\widetilde{\mathbf{W}}_i = \left[ \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{W}_{i+1}, \dots, \mathbf{W}_K \right] \quad (2.21)$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_i = \left[ \mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_{i-1}^T, \mathbf{a}_{i+1}^T, \dots, \mathbf{a}_K^T \right]^T \quad (2.22)$$

Igualmente se define a  $\widetilde{\mathbf{H}}_i$  como el canal de interferencia agregada, observado por el  $i$ -ésimo usuario, o como matriz de canal reducida, dado por la ecuación 2.23.

$$\widetilde{\mathbf{H}}_i = \left[ \mathbf{H}_1^T \dots \mathbf{H}_{i-1}^T \mathbf{H}_{i+1}^T \dots \mathbf{H}_K^T \right]^T \in \mathbb{C}^{(N_R - N_{R,i}) \times N_T} \quad (2.23)$$

Dado que  $\mathbf{H}$  es una matriz de rango completo,  $\tilde{\mathbf{H}}_i$  también lo es, debido a que los canales de los diferentes usuarios siguen siendo independientes [Jie, et al.(2012), Barzola y Guailace-la(2004)].

La condición de cero interferencia obliga a que  $\mathbf{W}_i$  se encuentre en el espacio nulo<sup>1</sup> de  $\tilde{\mathbf{H}}_i$ , es decir, el producto de la matriz de precodificación del usuario  $i$ -ésimo, con la matriz de canal del resto de usuarios es cero; esto permite garantizar para todos los usuarios la condición de cero interferencia. Los datos pueden ser transmitidos al  $i$ -ésimo usuario, si el espacio nulo de  $\tilde{\mathbf{H}}_i$  tiene una dimensión mayor que cero. Lo anterior se cumple cuando el rango de la matriz de canal de interferencia, denotado por  $\tilde{L}_i = \text{rango}(\tilde{\mathbf{H}}_i)$ , es menor que el número de antenas en transmisión  $N_T$ . Así, para cualquier canal  $\mathbf{H}$ , la técnica BD es posible si  $N_T > \max\{\text{rango}(\tilde{\mathbf{H}}_1), \dots, \text{rango}(\tilde{\mathbf{H}}_K)\}$ . Suponiendo que lo anterior se cumple para todos los usuarios, entonces  $\tilde{L}_i = \text{rango}(\tilde{\mathbf{H}}_i) \leq N_T - N_{R,i}$ . La SVD (para mayor información ver Anexo C) para cada matriz de canal reducida, está dada por la ecuación 2.24.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}_i &= \tilde{\mathbf{U}}_i \tilde{\Sigma}_i \tilde{\mathbf{V}}_i^H \\ &= \tilde{\mathbf{U}}_i \tilde{\Sigma}_i \left[ \tilde{\mathbf{V}}_i^{(1)} \tilde{\mathbf{V}}_i^{(0)} \right]^H\end{aligned}\quad (2.24)$$

Donde  $\tilde{\Sigma}_i \in \mathbb{C}^{(N_R - N_{R,i}) \times N_T}$  es una matriz diagonal que contiene los valores singulares de  $\tilde{\mathbf{H}}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_i \in \mathbb{C}^{(N_R - N_{R,i}) \times (N_R - N_{R,i})}$  y  $\tilde{\mathbf{V}}_i \in \mathbb{C}^{N_T \times N_T}$  son matrices unitarias,<sup>2</sup> las cuales contienen los vectores singulares izquierdos y derechos de  $\tilde{\mathbf{H}}_i$ , respectivamente.

$\tilde{\mathbf{V}}_i^{(1)} \in \mathbb{C}^{N_T \times \tilde{L}_i}$  y  $\tilde{\mathbf{V}}_i^{(0)} \in \mathbb{C}^{N_T \times (N_T - \tilde{L}_i)}$  contienen los primeros  $\tilde{L}_i$  y los últimos  $N_T - \tilde{L}_i$  vectores singulares derechos, respectivamente. Mientras que  $\tilde{\mathbf{V}}_i^{(1)}$  representa los vectores singulares asociados a los valores singulares no nulos, las columnas de  $\tilde{\mathbf{V}}_i^{(0)}$  forman una base ortogonal en el espacio nulo de  $\tilde{\mathbf{H}}_i$ , por lo que sus columnas son candidatas para formar la matriz de precodificación  $\mathbf{W}_i$ , es decir,  $\mathbf{W}_i = \tilde{\mathbf{V}}_i^{(0)}$ . Consecuentemente, de la ecuación 2.11 la restricción de cero interferencia está dada por la ecuación 2.25 [Spencer, et al.(2004)].

$$\mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{V}}_j^{(0)} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (2.25)$$

Una vez obtenida la matriz de precodificación  $\mathbf{W}_i$  para cada usuario, se compone la matriz  $\mathbf{W}$ , dada por la ecuación 2.5.

El producto de la matriz de canal  $\mathbf{H}$  y la matriz de precodificación  $\mathbf{W}$ , resulta en una matriz de canal efectivo, dada por la ecuación 2.26.

<sup>1</sup>El espacio nulo de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  se define como  $N_A = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^m | A\vec{u} = \vec{0}\}$ , y  $v(A) = \dim(N_A)$  se denomina nulidad de A. El espacio nulo de una matriz también se conoce como núcleo.

<sup>2</sup>Una matriz  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es unitaria si satisface la condición  $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}_n$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad y  $\mathbf{U}^H$  es la transpuesta conjugada de  $\mathbf{U}$ .

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H}\mathbf{W}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_K \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1\mathbf{W}_1 & \mathbf{H}_1\mathbf{W}_2 & \dots & \mathbf{H}_1\mathbf{W}_K \\ \mathbf{H}_2\mathbf{W}_1 & \mathbf{H}_2\mathbf{W}_2 & \dots & \mathbf{H}_2\mathbf{W}_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_K\mathbf{W}_1 & \mathbf{H}_K\mathbf{W}_2 & \dots & \mathbf{H}_K\mathbf{W}_K \end{pmatrix} \tag{2.26} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1\mathbf{W}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2\mathbf{W}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H}_K\mathbf{W}_K \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cada componente  $\mathbf{H}_i\mathbf{W}_i$  adquiere las propiedades de un canal convencional SU-MIMO, por ser la proyección del canal  $\mathbf{H}_i$  en el espacio nulo de  $\tilde{\mathbf{H}}_i$ , donde el  $i$ -ésimo usuario puede recibir flujos paralelos de datos sin interferir en los demás [Barzola y Guailacela(2004), Jie, et al.(2012), Spencer, et al.(2004)]. La estructura de BD permite que la SVD sea determinada individualmente para cada usuario, es decir, para cada matriz bloque  $\mathbf{H}_i\tilde{\mathbf{V}}_i^{(0)}$ , en lugar de calcular una única gran SVD.

### Algoritmo Water-Filling

Con el fin de maximizar la capacidad alcanzable por BD, el algoritmo Water-Filling puede ser adicionalmente incorporado [Yu and Cioffi(2001), Yu, et al.(2004)]. La matriz de canal efectivo para cada usuario está dada por la ecuación 2.27.

$$\mathbf{H}_{eff,i} = \mathbf{H}_i\tilde{\mathbf{V}}_i^{(0)} \tag{2.27}$$

El rango de la matriz de canal efectivo para cada usuario  $\mathbf{H}_{eff,i}$  es  $\bar{L}_i$ . La SVD de  $\mathbf{H}_{eff,i}$  está dada por la ecuación 2.28 [Jie, et al.(2012)].

$$\mathbf{H}_{eff,i} = \mathbf{U}_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i^{(1)} & \mathbf{V}_i^{(0)} \end{bmatrix}^H \tag{2.28}$$

$\mathbf{V}_i^{(1)}$  corresponde a los  $\bar{L}_i$  vectores singulares derechos no nulos. El producto de  $\mathbf{V}_i^{(0)}$  y  $\mathbf{V}_i^{(1)}$

genera una base ortogonal de la matriz de canal efectivo de dimensión  $\bar{L}_i$ , y representa los vectores de transmisión que maximizan la velocidad de transmisión de datos para el  $i$ -ésimo usuario sin producir interferencia [Spencer, et al.(2004)].

La técnica de precodificación BD incluye pre y post-procesamiento, en transmisión y recepción, respectivamente. Su objetivo es realizar una estimación de la señal recibida de todos los usuarios. Para ello se define  $\mathbf{D}_{N_R \times N_R}$ , como la matriz de demodulación del sistema dada por la ecuación 2.29.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{D}_K \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Donde  $\mathbf{D}_i \in \mathbb{C}^{N_{R,i} \times N_{R,i}}$  es la matriz de demodulación para el  $i$ -ésimo usuario, dada por la ecuación 2.30.

$$\mathbf{D}_i = (\mathbf{H}_{eff,i} \mathbf{W}_i)^{-1} \quad (2.30)$$

En el lado de los equipos receptores, cada uno de los usuarios requiere de una matriz de demodulación  $\mathbf{D}_i$ , cuyo objetivo es recuperar los flujos de datos mediante el producto por la señal recibida, dada por la ecuación 2.31.

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{D} \left( \mathbf{H} \mathbf{W} \mathbf{a} + \mathbf{n} \right) \quad (2.31)$$

La ecuación 2.31 se puede expresar de forma matricial, dado por la ecuación 2.32.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{D}_K \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & \dots & \mathbf{W}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_K \end{bmatrix} \right). \quad (2.32)$$

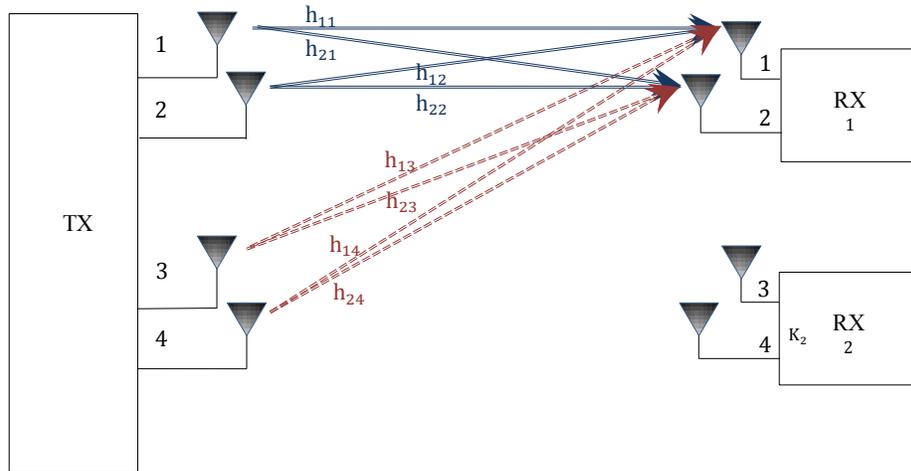
Por lo tanto, la señal recibida por el usuario  $i$ -ésimo está dada por la ecuación 2.33.

$$\hat{\mathbf{a}}_i = \mathbf{D}_i \left( \mathbf{H}_i \sum_{j=1}^K \mathbf{W}_j \mathbf{a}_j + \mathbf{n}_i \right), \quad i = 1 \dots K \quad (2.33)$$

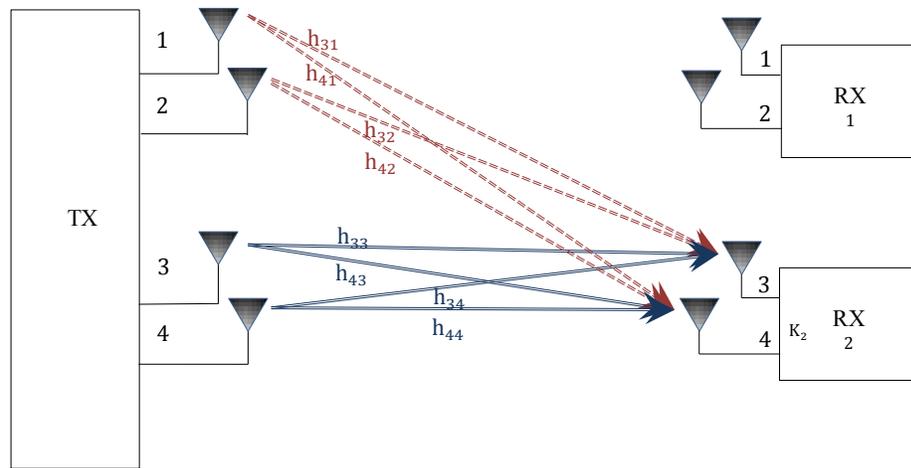
En este trabajo de grado, se seleccionó el sistema MU-MIMO en enlace de bajada  $\{2, 2\} \times 4$  para evaluar el desempeño de la técnica BD, como se aprecia en la Figura 2.4.

La matriz de canal correspondiente al usuario 1  $\mathbf{H}_1 \in \mathbb{C}^{N_{R,1} \times N_T}$ , que se muestra en la Figura 2.4(a), está dada por la ecuación 2.34.

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} & \mathbf{h}_{13} & \mathbf{h}_{14} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} & \mathbf{h}_{23} & \mathbf{h}_{24} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 4} \quad (2.34)$$



(a) Canal de Enlace de Bajada para el Usuario Uno.



(b) Canal de Enlace de Bajada para el Usuario Dos.

Figura 2.4: Canal de Transmisión de un Sistema  $\{2, 2\} \times 4$ .

De manera similar, la matriz de canal correspondiente al usuario 2  $\mathbf{H}_2 \in \mathbb{C}^{N_{R,1} \times N_T}$ , que se muestra en la Figura 2.4(b), está dada por la ecuación 2.35.

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{31} & \mathbf{h}_{32} & \mathbf{h}_{33} & \mathbf{h}_{34} \\ \mathbf{h}_{41} & \mathbf{h}_{42} & \mathbf{h}_{43} & \mathbf{h}_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 4} \quad (2.35)$$

Por lo tanto la matriz de canal resultante está dada por la ecuación 2.36.

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1^T \ \mathbf{H}_2^T]^T = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} & \mathbf{h}_{13} & \mathbf{h}_{14} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} & \mathbf{h}_{23} & \mathbf{h}_{24} \\ \mathbf{h}_{31} & \mathbf{h}_{32} & \mathbf{h}_{33} & \mathbf{h}_{34} \\ \mathbf{h}_{41} & \mathbf{h}_{42} & \mathbf{h}_{43} & \mathbf{h}_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4} \quad (2.36)$$

Organizando la matriz  $\mathbf{H}$  dada por la ecuación 2.37, se observa claramente las componentes de canal que le corresponden a cada usuario.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{13} & \mathbf{h}_{14} \\ \mathbf{h}_{23} & \mathbf{h}_{24} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{31} & \mathbf{h}_{32} \\ \mathbf{h}_{41} & \mathbf{h}_{42} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{33} & \mathbf{h}_{34} \\ \mathbf{h}_{43} & \mathbf{h}_{44} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4} \quad (2.37)$$

Cada componente de  $\mathbf{H}$ ,  $h_{i,j}$ , corresponde al canal entre la  $i$ -ésima antena receptora y la  $j$ -ésima antena transmisora. De esta manera, las columnas 1 y 2 de  $\mathbf{H}$  representan el canal entre las dos primeras antenas del transmisor y el primer equipo receptor, y las columnas 3 y 4 el canal entre las dos últimas antenas del transmisor y el segundo equipo receptor.

Se observa que el canal deseado para cada usuario está representado por las sub-matrices  $2 \times 2$  sobre la diagonal principal, dado por la ecuación 2.37. Las dos sub-matrices adicionales de  $2 \times 2$  de la diagonal secundaria representan la MUI a eliminar.

A continuación se muestra el proceso de la precodificación BD para un usuario. Para el segundo usuario el procedimiento es el mismo. Los canales de interferencia para los usuarios uno y dos están dados por las ecuaciones 2.38 y 2.39.

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = \mathbf{H}_2 \in \mathbb{C}^{2 \times 4} \quad (2.38)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_2 = \mathbf{H}_1 \in \mathbb{C}^{2 \times 4} \quad (2.39)$$

Así, calculando la SVD de  $\tilde{\mathbf{H}}_1$  se obtiene el espacio nulo de  $\mathbf{H}_2$ , que corresponde a la matriz de precodificación del primer usuario, y por lo tanto, cuando los flujos de datos del segundo usuario lleguen al primero, estos puedan ser debidamente eliminados por la matriz de precodificación. La descomposición SVD de  $\tilde{\mathbf{H}}_1$  está dada por la ecuación 2.40.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_1 &= \tilde{\mathbf{U}}_1 \tilde{\Sigma}_1 \tilde{\mathbf{V}}_1^H \\ &= \tilde{\mathbf{U}}_1 \tilde{\Sigma}_1 \left[ \tilde{\mathbf{V}}_1^{(1)} \tilde{\mathbf{V}}_1^{(0)} \right]^H \end{aligned} \quad (2.40)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{U}}_1 \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  son los vectores singulares izquierdos de  $\tilde{\mathbf{H}}_1 \in \mathbb{C}^{2 \times 4}$ , y  $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_1 \in \mathbb{C}^{2 \times 4}$  contiene los valores singulares diferentes de cero de  $\tilde{\mathbf{H}}_1$ . El rango de  $\tilde{\mathbf{H}}_1$  es  $\tilde{L}_1$ , donde  $\tilde{L}_1 = \min(N_{R,1}, N_T) = \min(2, 4) = 2$ . Los vectores candidatos a conformar la matriz de precodificación del usuario uno son los últimos  $(N_T - \tilde{L}_1) = (4 - 2) = 2$  vectores singulares derechos de  $\tilde{\mathbf{V}}_1 \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ , que corresponden a las columnas de la matriz  $\tilde{\mathbf{V}}_1^{(0)} \in \mathbb{C}^{N_T \times (N_T - \tilde{L}_1)}$  y al espacio nulo de  $\tilde{\mathbf{H}}_1$ .

Por lo tanto la matriz de precodificación del usuario uno está dada por la ecuación 2.41.

$$\mathbf{W}_1 = \tilde{\mathbf{V}}_1^{(0)} \in \mathbb{C}^{4 \times 2} \quad (2.41)$$

Luego el canal efectivo del usuario uno está dado por la ecuación 2.42.

$$\mathbf{H}_{eff,1} = \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1 \quad (2.42)$$

Reemplazando la ecuación 2.41 en 2.10, la señal recibida por el usuario uno está dada por la ecuación 2.43.

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{n}_1 \quad (2.43)$$

Gracias a que la técnica BD logra dividir el canal MU-MIMO en subcanales SU-MIMO, en recepción se puede implementar el detector ZF para estimar la información correspondiente a cada usuario. Se define  $\mathbf{D}_1$  como la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose de  $\mathbf{H}_{eff,1}$ , la cual es una matriz cuadrada y de rango completo, por lo que la matriz pseudoinversa resulta en la misma matriz inversa, dada por la ecuación 2.44.

$$\mathbf{D}_1 = H_{eff,1}^{-1} = (\mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1)^{-1} \quad (2.44)$$

El vector de símbolos estimados  $\hat{\mathbf{a}}_1$  se obtiene de multiplicar la señal recibida por la matriz de precodificación  $\mathbf{D}_1$ , dado por la ecuación 2.45.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_1 &= \mathbf{D}_1 \left( \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{n}_1 \right) \\ &= (\mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1)^{-1} \left( \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{n}_1 \right) \\ &= \mathbf{W}_1^{-1} \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{a}_1 + (\mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1)^{-1} \mathbf{n}_1 \\ &= \mathbf{a}_1 + (\mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1)^{-1} \mathbf{n}_1 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Donde se observa que los símbolos estimados en recepción corresponden a los símbolos originales contaminados por el ruido únicamente.

### 2.3. PRECODIFICACIÓN MMSE

La precodificación MMSE considera tanto la interferencia como el ruido, incrementando la SNR en cada equipo receptor, mediante la explotación del criterio de error cuadrático medio mínimo.

La técnica MMSE sufre una degradación del desempeño en enlace de bajada de un sistema MU-MIMO cuando intenta mitigar la interferencia entre dos antenas estrechamente espaciadas, como en el caso de un equipo receptor con más de una antena receptora, ya que intenta mitigar las interferencias entre las múltiples antenas receptoras en el mismo terminal, limitando el alcance de toda la diversidad de los canales MIMO [Min and Seong.(2007), Stankovic and Haardt(2004)], sin embargo, igual que para ZF, existen generalizaciones de MMSE, como MMSE Sucesivo (S-MMSE, *Successive MMSE*) o SMMSE por Usuario (PU-SMMSE, *Per User SMMSE*), las cuales permiten trabajar en sistemas con equipos receptores con más de una antena [Haardt, et al.(2005)]. El análisis y tratamiento matemático correspondiente a estas técnicas hacen parte de trabajos futuros, ya que van más allá del alcance de este trabajo de grado. El análisis de esta sección se basa en equipos receptores de una sola antena. El escenario considerado para MMSE, es similar al escogido en ZF  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$  [Min and Seong.(2007), Stankovic and Haardt(2004)].

La precodificación MMSE minimiza la distancia cuadrática media entre los símbolos transmitidos y recibidos [Muñoz(2011)]. La señal de error es la diferencia entre la señal transmitida y la señal recibida, dada por la ecuación 2.46.

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (2.46)$$

Donde  $\mathbf{x}$  es el vector de datos transmitidos y  $\hat{\mathbf{x}}$  el vector de datos estimados. El Error Cuadrático Medio (MSE, *Mean Square Error*) está dado por la ecuación 2.47.

$$\varepsilon = E \left[ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \right] \quad (2.47)$$

Donde  $E[\cdot]$  el valor esperado y  $\|\cdot\|_2$  es la norma euclídeana (para mayor información ver Anexo C). Para hallar la matriz de precodificación MMSE se debe encontrar el mínimo de potencia de la señal de error  $\mathbf{e}$ , que siguiendo el método MSE conduce a la aplicación de un filtro Wiener, dado por la ecuación 2.48 [Joham, et al.(2002)].

$$W_t = \arg_{\mathbf{W}} \min E \left[ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \right] = \arg_{\mathbf{W}} \min \text{traza}(\mathbf{R}_x) \quad (2.48)$$

Donde  $\mathbf{R}_x = E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^H]$  es la matriz de covarianza de los símbolos precodificados. El filtro Wiener minimiza el MSE y usa la potencia disponible en transmisión  $P_{m\acute{a}x}$ , dada por la ecuación 2.49.

$$E\{\|W\mathbf{a}\|^2\} \leq P_{m\acute{a}x} \quad (2.49)$$

La optimización de la matriz de precodificación  $\mathbf{W}_{MMSE}$  se logra mediante el Lagrangiano [Reddy and Rasmussen(2000)], dado por la ecuación 2.50.

$$\mathcal{L} = \varepsilon - \lambda (\text{traza}\{\mathbf{W}_t \mathbf{R}_a \mathbf{W}_t^H\} - P_{\text{máx}}) \quad (2.50)$$

Donde  $\lambda = \frac{1}{SNR}$  es el multiplicador lagrangiano,  $\mathbf{W}_t$  es la matriz de precodificación temporal MMSE y  $\mathbf{R}_a = E\{aa^H\}$  es la matriz de correlación de símbolos modulados.

Para obtener la matriz de precodificación MMSE se deriva la ecuación 2.50 con respecto a  $\mathbf{W}_t$ , e igualando a cero, la matriz de precodificación temporal MMSE está dada por la ecuación 2.51.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_t &= \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \lambda \mathbf{I})^{-1} \\ &= \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{1}{SNR} \mathbf{I})^{-1} \end{aligned} \quad (2.51)$$

La matriz final de precodificación MMSE, dada por la ecuación 2.52, es el resultado de multiplicar  $\mathbf{W}_t$  por una constante, calculada en la ecuación 2.17, donde se reemplaza  $\mathbf{H}^{-1}$  por  $\mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{1}{SNR} \mathbf{I})^{-1}$  [Cho, et al.(2010)].

$$\mathbf{W}_{MMSE} = \beta \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{1}{SNR} \mathbf{I})^{-1} \quad (2.52)$$

La técnica MMSE requiere calcular el parámetro  $\lambda$  así como minimizar el error cuadrático, lo que le permite alcanzar mejores resultados de desempeño en enlace de bajada que las técnicas ZF y BD.

En recepción se compensa el efecto de amplificación por el factor  $\beta$ , dividiendo por dicho factor como se realiza en recepción de ZF.



# Capítulo 3

## METODOLOGÍA PARA SIMULACIÓN DE LA PRECODIFICACIÓN LINEAL ZF Y MMSE

Este capítulo presenta la metodología de trabajo empleada para la simulación de la precodificación lineal ZF y MMSE en un sistema MU-MIMO en enlace de bajada. Se explican los módulos y diagramas en bloques, siguiendo la metodología planteada en la guía para simulación de sistemas de telecomunicaciones [Astaiza, et al.(2004)].

### 3.1. METODOLOGÍA PARA SIMULACIÓN DE SISTEMAS DE TELECOMUNICACIONES

Las fases de la metodología para simulación, de acuerdo con [Astaiza, et al.(2004)], se resumen en la Figura 3.1. Esta metodología al alcanzar la etapa de validación retorna a ciertas etapas anteriores para hacer revisión de lo formulado, como se muestra en la Figura 3.1.

### 3.2. FASES DE SIMULACIÓN

A continuación se describen las fases de la metodología mencionada anteriormente para la simulación de la precodificación lineal ZF y MMSE en un sistema MU-MIMO en enlace de bajada.

#### 3.2.1. Fase 1. Definición del Sistema

Un problema en los sistemas MU-MIMO en enlace de bajada es la MUI, la cual puede ser mitigada a través de pre-procesamiento de la información. Una manera eficiente es la precodificación, que consiste en una transformación (lineal o no lineal) de la señal a transmitir.

El objetivo de este trabajo de grado es analizar el desempeño en enlace de bajada del sistema MU-MIMO con algoritmos de precodificación lineal ZF y MMSE. Una generalización de ZF para equipos receptores con múltiples antenas es BD, la cual también se analiza en este trabajo. Los esquemas de modulación escogidos son 4QAM, 8PSK y 16QAM, sobre un canal MIMO AWGN de media cero y varianza  $\sigma^2$ . El desempeño se analiza con base en la BER en función de la relación energía de bit a densidad espectral de potencia ruido ( $E_b/N_o$ ), obtenida para cada esquema de modulación.

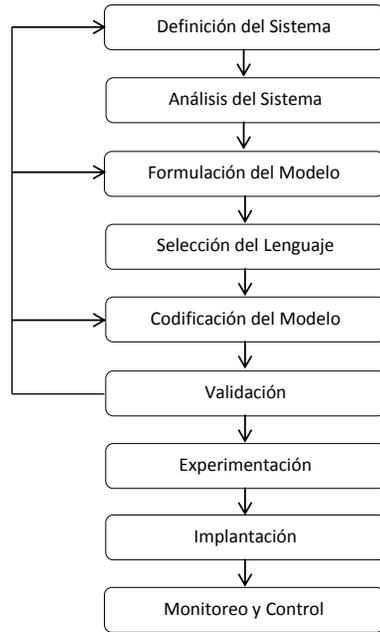


Figura 3.1: Metodología para la Creación y Desarrollo de una Simulación [Astaiza, et al.(2004)].

### 3.2.2. Fase 2. Análisis del Sistema

En esta fase se deben describir las interacciones lógicas entre las variables de decisión, de forma tal que se optimice la medida de efectividad en función de las variables no controlables [Astaiza, et al.(2004)]. El estado de un sistema hace referencia al conjunto de variables que definen al sistema en cualquier instante, dado por las variables siguientes.

Variables no controlables:

- $E_b/N_o$ .
- BER.
- Número de bits a transmitir.
- Número de bits por símbolo  $n^1$ .
- Matriz de canal MU-MIMO en enlace de bajada  $\mathbf{H}$ .

Las variables de decisión, que se nombran a continuación, interactúan en función de las variables no controlables listadas anteriormente, ya que los resultados de la simulación del sistema dependen de esta relación. Para evaluar el desempeño del sistema es necesario hacerlo para diferentes valores de  $E_b/N_o$ , cuyo valor afecta la BER en recepción, de tal forma que a mayor  $E_b/N_o$ , mejores son las condiciones de canal.

<sup>1</sup> $M = 2^n$  es el orden de modulación y  $n$  el número de bits por símbolo.

VARIABLES DE DECISIÓN:

- Esquema de modulación.
- Número de símbolos por trama.
- Número de tramas por paquetes.
- Número de paquetes a transmitir.
- Modelo de canal a través del cual se transmite la información.
- Técnica de precodificación lineal ZF o MMSE.
- Número de antenas transmisoras  $N_T$  y antenas receptoras  $N_R$ .
- Número de usuarios  $K$ .

Los esquemas de modulación adoptados son 8PSK, 4QAM y 16QAM. Se considera un canal MIMO AWGN, con componentes complejas independientes en una distribución gaussiana. De acuerdo al número de antenas, tanto en transmisión como en recepción, se definen las dimensiones de las matrices de canal de usuario. El número de antenas transmisoras influye en la potencia de ruido en cada antena receptora.

Actividad: es el conjunto de acciones que se necesitan para llevar a cabo una operación, la cual consiste en el proceso de la precodificación de los símbolos a transmitir, mediante técnicas de precodificación lineal ZF y MMSE. El cálculo de las matrices de precodificación depende del modelo del canal del sistema, de la matriz de canal y de las dimensiones de los canales de usuario.

Entidad: es cualquier objeto dentro del sistema, esta entidad puede ser estática o dinámica, en este último caso se denota como una transacción y su principal característica es su movimiento a través de las entidades estáticas del sistema. Las entidades contienen propiedades llamadas atributos que permiten crear diferencias entre ellas. Las entidades dinámicas se muestran en la Tabla 3.1.

ENTIDAD DINÁMICA	ATRIBUTOS
Modulación	· Esquema · Orden
Técnica de Precodificación	· ZF · MMSE

Tabla 3.1: Entidades Dinámicas.

Las entidades estáticas se muestran en la Tabla 3.2.

ENTIDAD ESTÁTICA	ATRIBUTOS
Canal de Comunicación	· Modelo de Canal · Dimensión
Paquete de Información	· Número de Tramas
Trama	· Número de Símbolos
Símbolo	· Número de bits

Tabla 3.2: Entidades Estáticas.

### 3.2.3. Fase 3. Formulación del Modelo

En esta fase se explica el algoritmo lógico que define y respalda las interacciones entre las variables. Aquí se describe el diagrama en bloques del sistema MU-MIMO en enlace de bajada precodificado, así como los diagramas de flujo de los algoritmos de precodificación ZF, BD y MMSE.

#### 3.2.3.1. Diagrama en Bloques del Sistema MU-MIMO en Enlace de Bajada Precodificado

El diagrama en bloques del sistema MU-MIMO en enlace de bajada precodificado se muestra en la Figura 3.2, el cual se describe a continuación.

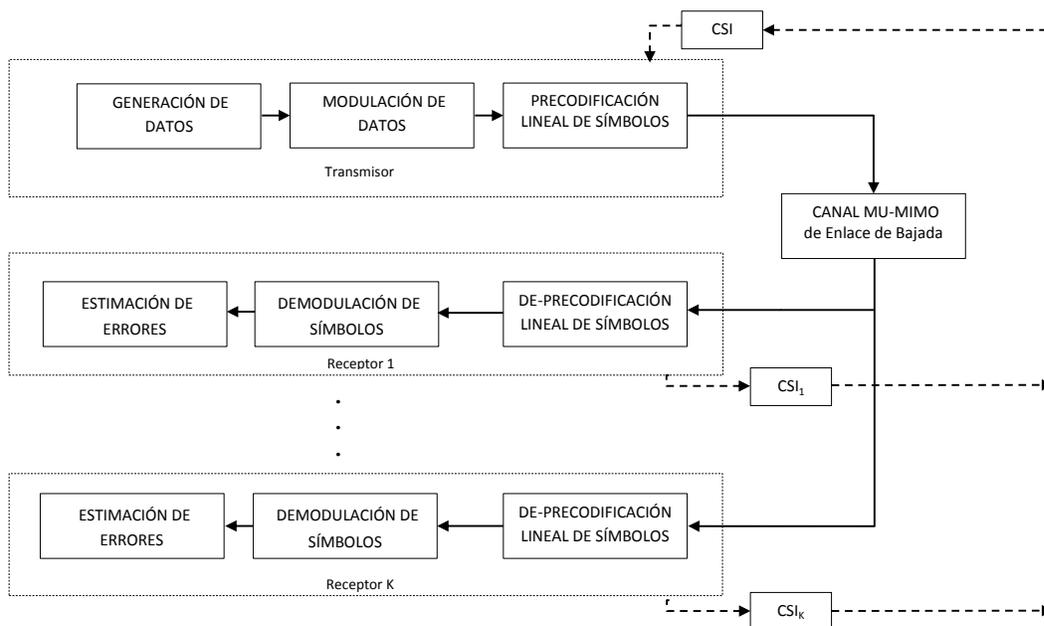


Figura 3.2: Diagrama en Bloques del Sistema MU-MIMO en Enlace de Bajada con Precodificación.

**Generación de datos:** genera las secuencias binarias que conforman el mensaje a transmitir, que agrupadas, según el esquema de modulación, se obtienen valores enteros que pueden variar entre 0 y  $M - 1$ .

**Modulación de datos:** genera los símbolos complejos, según el esquema de modulación, a partir de la secuencia entregada por el generador de datos. Los posibles esquemas de modulación son 4QAM, 8PSK y 16QAM.

**Precodificación lineal de símbolos:** con base en la CSI suministrada por cada uno de los equipos receptores al transmisor, se configura la matriz de precodificación de los símbolos recibidos del modulador. Esta matriz se configura de acuerdo a la técnica de precodificación ZF, MMSE o BD. En las dos primeras, la potencia de la señal a transmitir es restringida mediante un factor  $\beta$ .

**Canal MU-MIMO en enlace de bajada:** las dimensiones del canal dependen del número de antenas en transmisión y recepción. En este caso el canal MIMO es un canal  $4 \times 4$ , conformado por subcanales AWGN, ya sea para dos equipos receptores con dos antenas cada uno, o para cuatro equipos receptores con una antena cada uno.

**De-precodificación lineal de símbolos:** completa el proceso de precodificación. En el caso de ZF y MMSE, el de-precodificador divide la señal recibida por la constante  $\beta$ , para compensar la amplificación realizada en la precodificación, y en el caso de BD, la multiplicación por la matriz de de-precodificación compensa el efecto del canal efectivo<sup>2</sup>.

**Demodulación de símbolos:** realiza una estimación de los símbolos recibidos del de-precodificador, mediante el sistema de detección según el esquema de modulación, para su posterior conversión a secuencias de bits estimados.

**Estimación de errores:** se comparan las secuencias binarias transmitidas con las secuencias binarias recibidas, y de acuerdo al total de bits transmitidos, calcula la BER.

A continuación se describen los diagramas de flujo de los algoritmos de precodificación ZF, BD y MMSE.

### 3.2.3.2. Diagrama de Flujo del Algoritmo de Precodificación ZF

La técnica de precodificación ZF consiste en construir una matriz de precodificación  $\mathbf{W}_{ZF}$  a partir de la pseudoinversa de la matriz de canal  $\mathbf{H}^\dagger$ , la cual es amplificada por un factor  $\beta$ . La configuración del sistema para ZF es  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$ . La Figura 3.3 muestra el proceso del algoritmo de precodificación ZF, donde:

---

<sup>2</sup>El canal efectivo se define como el producto de la matriz de canal MIMO por la matriz de precodificación BD, es decir  $H_{eff} = \mathbf{H} \mathbf{W}_{BD}$ .

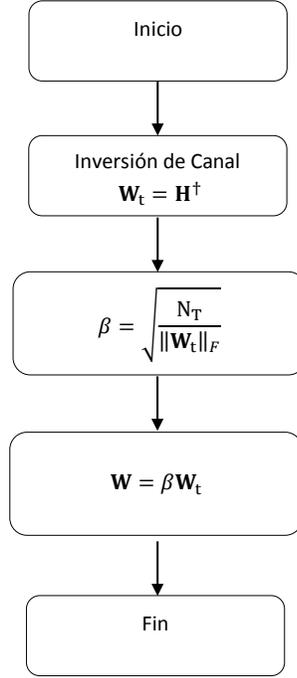


Figura 3.3: Diagrama de Flujo del Algoritmo de Precodificación ZF.

$\mathbf{H}$  → Matriz de canal MU-MIMO en enlace de bajada.

$\mathbf{H}^\dagger$  → Matriz pseudoinversa de Moore Penrose<sup>3</sup> de  $\mathbf{H}$ .

$\mathbf{W}_t$  → Matriz temporal de precodificación.

$\beta$  → Constante de restricción de potencia transmitida.

$N_T$  → Número de antenas transmisoras.

$\|\mathbf{W}_t\|_F^2$  → Norma de Frobenius<sup>4</sup> al cuadrado de  $\mathbf{W}_t$ .

$\mathbf{W}_{ZF}$  → Matriz final de precodificación ZF.

En recepción, se compensa la amplificación realizada en transmisión por el factor  $\beta$ , mediante un filtro AGC, como se indica en la Figura 3.4, donde:

$\mathbf{y}$  → Vector de símbolos recibidos.

$\hat{\mathbf{x}}$  → Vector de símbolos estimados.

<sup>3</sup>Cuando la matriz  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  es de rango completo, la pseudoinversa de Moore-Penrouse se define por:  $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}^{-1}$  si  $m = n$ ;  $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}^H(\mathbf{H}\mathbf{H}^H)^{-1}$  si  $m < n$ ;  $\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H$  si  $m > n$

<sup>4</sup>Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , entonces la *norma de Frobenius* de la matriz  $\mathbf{A}$  se define como  $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A})}$  Donde  $\text{Tr}(A)$  es la traza de  $\mathbf{A}$ .

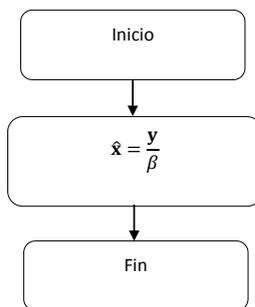


Figura 3.4: Diagrama de Flujo del Control Automático de Ganancia en Recepción.

### 3.2.3.3. Diagrama de Flujo del Algoritmo de Precodificación BD

Una de las generalizaciones de ZF, la técnica de precodificación BD, descompone el canal MU-MIMO en enlace de bajada en múltiples canales SU-MIMO ortogonales paralelos. La señal de cada usuario es pre-procesada en el transmisor mediante una matriz de precodificación  $\mathbf{W}_i$ , la cual está en el espacio nulo  $\tilde{\mathbf{V}}_i^{(0)}$  de las matrices de canal de los demás usuarios  $\tilde{\mathbf{H}}_i$ . La configuración del sistema para BD es  $\{2, 2\} \times 4$ . La Figura 3.5 muestra el proceso del algoritmo de precodificación BD, donde:

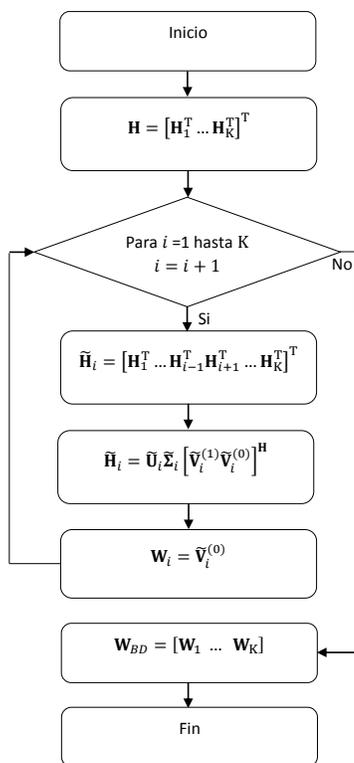


Figura 3.5: Diagrama de Flujo del Algoritmo de Precodificación BD.

$\mathbf{H}$  → Matriz de canal MU-MIMO en enlace de bajada.  
 $\mathbf{H}_i^T$  → Matriz transpuesta de subcanal del  $i$ -ésimo usuario.  
 $K$  → Número de usuarios con dos antenas.  
 $\tilde{\mathbf{H}}_i$  → Matriz de canal reducida del  $i$ -ésimo usuario.  
 $\tilde{\mathbf{H}}_i = \tilde{\mathbf{U}}_i \tilde{\Sigma}_i [\tilde{\mathbf{V}}_i^{(1)} \tilde{\mathbf{V}}_i^{(0)}] \rightarrow \text{SVD}^5$  de  $\tilde{\mathbf{H}}_i$ .  
 $\mathbf{W}_i$  → Matriz de precodificación del  $i$ -ésimo usuario.  
 $\mathbf{W}_{BD}$  → Matriz final de precodificación BD.

### 3.2.3.4. Diagrama de Flujo del Algoritmo de Precodificación MMSE

La técnica de precodificación MMSE construye la matriz de precodificación  $\mathbf{W}_{MMSE}$  mediante una matriz temporal  $\mathbf{W}_t$ , la cual tiene en cuenta la SNR, para obtener la matriz de precodificación MMSE.  $\mathbf{W}_t$  es amplificada por el factor  $\beta$ , el mismo factor empleado en la técnica de precodificación ZF. La configuración del sistema para MMSE es  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$ . La Figura 3.6 muestra el proceso del algoritmo de precodificación MMSE, donde:

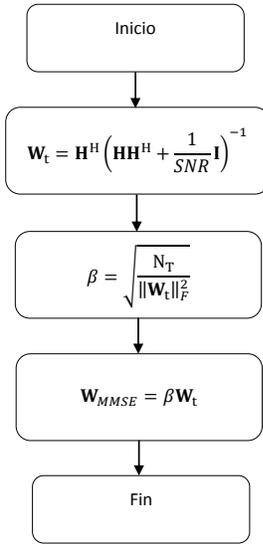


Figura 3.6: Diagrama de Flujo del Algoritmo de Precodificación MMSE.

$\mathbf{W}_t$  → Matriz temporal de precodificación.  
 $\mathbf{H}$  → Matriz de canal MU-MIMO en enlace de bajada.  
 $\mathbf{H}^H$  → Matriz transpuesta conjugada de  $\mathbf{H}$ .  
 $\mathbf{I}$  → Matriz identidad.  
 $\|\mathbf{W}_t\|_F^2$  → Norma cuadrada de Frobenius de  $\mathbf{W}_t$ .  
 $\mathbf{W}_{MMSE}$  → Matriz final de precodificación MMSE.

<sup>5</sup>La SVD de una matriz  $\tilde{\mathbf{H}}_i$  se expresa como  $\tilde{\mathbf{H}}_i = \tilde{\mathbf{U}}_i \tilde{\Sigma}_i \tilde{\mathbf{V}}_i^H = \tilde{\mathbf{U}}_i \tilde{\Sigma}_i [\tilde{\mathbf{V}}_i^{(1)} \tilde{\mathbf{V}}_i^{(0)}]^H$ , donde  $\tilde{\Sigma}_i$  contiene los valores singulares de  $\tilde{\mathbf{H}}_i$  y  $\tilde{\mathbf{U}}_i$  y  $\tilde{\mathbf{V}}_i$  son matrices unitarias, las cuales contienen los vectores singulares izquierdos y derechos de  $\tilde{\mathbf{H}}_i$ , respectivamente.  $\tilde{\mathbf{V}}_i^{(1)}$  contiene los vectores singulares derechos correspondientes a los valores singulares no nulos de  $\tilde{\Sigma}_i$  y  $\tilde{\mathbf{V}}_i^{(0)}$  a los valores singulares nulos.

En recepción, de forma similar a la técnica de precodificación ZF, se compensa la amplificación realizada en transmisión por el factor  $\beta$ , mediante un filtro AGC, como se muestra en la Figura 3.4.

### 3.2.4. Fase 4. Selección del Lenguaje

Existen varias alternativas que brindan la posibilidad de simular sistemas inalámbricos con canales MIMO, dentro de las cuales se encuentran:

- o **MATLAB 7.14 (R2012a)** MATLAB<sup>®</sup> es un software de simulación el cual integra distintas características en un solo programa, como análisis numéricos, cálculo de matrices, procesamiento de señales, generación de gráficas y la posibilidad de desarrollar interfaces gráficas que integren varias simulaciones, además de contar con su propio lenguaje de programación (Lenguaje M) y de estar disponible para las plataformas Windows<sup>®</sup>, UNIX y Apple Mac<sup>®</sup> OS X entre otras. MATLAB permite introducir ecuaciones matemáticas a los códigos de una manera más sencilla que en otras herramientas. Permite redactar y programar las ecuaciones tal y como están escritas en la literatura matemática, generando un lenguaje amigable y real de comunicación con el usuario.
- o **SCILAB 5.1** SCILAB es un software matemático, con un lenguaje de programación de alto nivel, que dispone de herramientas de cálculo numérico, programación y gráficos en un solo ambiente. Es similar a MATLAB y otros programas de cálculo numérico. Puede ser utilizado en una variedad de sistemas operativos tales como UNIX, Windows, Linux, etc. SCILAB presenta algunas ventajas tales como:
  - \* Disponibilidad de la última versión vía Internet.
  - \* El programa puede ser utilizado, copiado y distribuido en forma legal.
  - \* Los resultados obtenidos pueden ser divulgados sin restricción.
  - \* Se tiene acceso al código fuente.

Analizando las características, ventajas y desventajas de las alternativas de software consideradas, se optó por MATLAB como la mejor opción frente a las exigencias de este trabajo de grado, mencionando a continuación los aspectos que se tuvieron en cuenta para su selección.

- o MATLAB cuenta con un ambiente interactivo para la exploración iterativa, el diseño y solución de problemas.
- o La Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones de la Universidad del Cauca cuenta con licencia de MATLAB.
- o MATLAB es un lenguaje de alto nivel usado por millones de usuarios alrededor del mundo, tanto a nivel académico como industrial, lo que respalda su reputación y garantiza un adecuado desempeño de las simulaciones.

### 3.2.5. Fase 5. Codificación del Modelo

La codificación del modelo se basa en el lenguaje M de MATLAB, en el cual se integran las funciones necesarias para simular los algoritmos de precodificación, con sus respectivas características de modulación, número de símbolos a transmitir,  $E_b/N_o$ , número de antenas en el transmisor y en los equipos receptores, con el fin de calcular y graficar las curvas de la BER contra  $E_b/N_o$ .

El código sigue una estructura similar para todas las técnicas de precodificación, estableciendo las dimensiones del canal de acuerdo a la distribución de antenas en el sistema. La implementación de cada técnica de precodificación varía entre sí, pero todas llegan a obtener una matriz de precodificación, que multiplica los símbolos modulados antes de ser transmitidos por el canal MIMO.

### 3.2.6. Fase 6. Validación

Esta fase consiste en comparar los resultados obtenidos de las simulaciones de este trabajo de grado con los resultados del soporte bibliográfico. La comparación es realizada mediante tablas de datos y curvas de la BER en función de la SNR, dicha validación se realiza en el capítulo cuatro.

### 3.2.7. Fase 7. Experimentación

Los parámetros configurables evaluados en el desarrollo de los algoritmos son los esquemas de modulación y su respectivo orden, los cuales son seleccionados al inicio de la simulación, siendo los estudiados 4QAM, 8PSK y 16QAM. Se utilizan las técnicas de precodificación ZF y MMSE, siendo BD una generalización de ZF. Los sistemas implementados cuentan con un canal MU-MIMO en enlace de bajada  $4 \times 4$ .

Este trabajo de grado analiza el desempeño en enlace de bajada del sistema MU-MIMO con algoritmos de precodificación lineal ZF y MMSE, lo cual, de acuerdo a la metodología planteada en la guía para sistemas de telecomunicaciones [Astaiza, et al.(2004)], abarca las siete fases iniciales. Lo referente a la implementación de dichas técnicas en sistemas reales, así como su monitoreo y control, (fases 8 y 9), va más allá del alcance de este trabajo de grado y es parte de trabajos futuros.

# Capítulo 4

## VALIDACIÓN DE RESULTADOS

Los sistemas MIMO a nivel mundial se encuentran aún en una etapa de estudio. En este capítulo se realiza una validación de los resultados obtenidos en este trabajo de grado, mediante la comparación con los resultados de investigaciones previas sobre técnicas de precodificación lineal ZF, BD y MMSE. Las simulaciones se realizan para los sistemas MU-MIMO  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$ , para ZF y MMSE, y  $\{2, 2\} \times 4$ , para BD, en enlace de bajada con una modulación 4QAM.

Es de aclarar que, para una adecuada comparación de los resultados obtenidos en este trabajo de grado con respecto a los resultados del soporte bibliográfico, en este capítulo el desempeño de la precodificación en términos de la BER se realiza en función de la SNR, ya que así es como se muestra en el soporte bibliográfico.

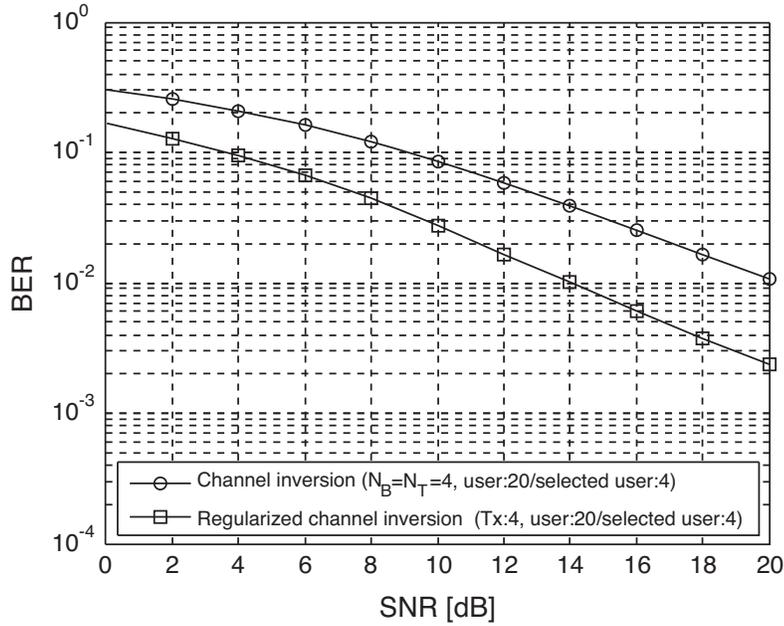
### 4.1. VALIDACIÓN DE RESULTADOS PARA LA PRECODIFICACIÓN ZF

Para la validación de los resultados de simulación del sistema MU-MIMO con precodificación ZF se realiza una comparación de las gráficas que se muestran en la Figura 4.1. Las curvas de la BER en función de la SNR se muestran en la Figura 4.1(a), bajo la leyenda “Channel inversion”, y en la Figura 4.1(b), obtenidas de [Cho, et al.(2010)] y en este trabajo de grado, respectivamente.

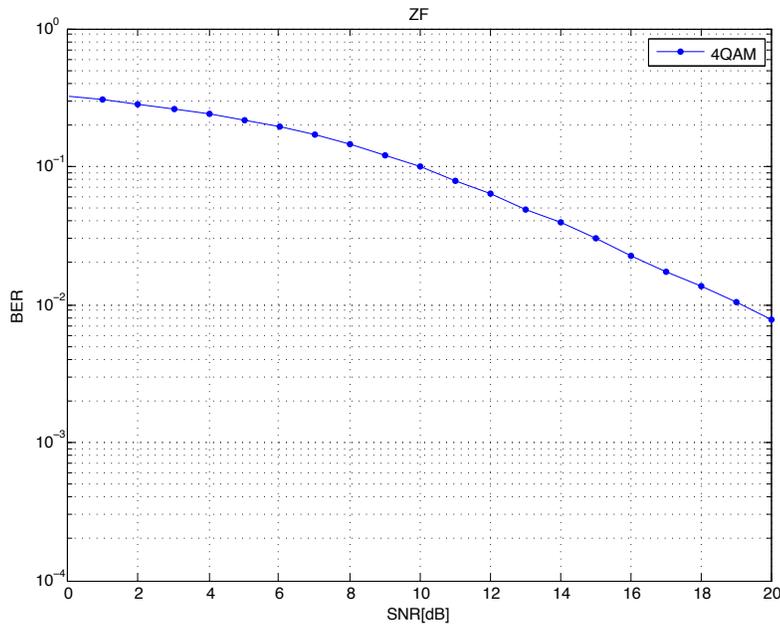
En la Tabla 4.1 se comparan los valores de la BER obtenidos de las curvas de las Figuras 4.1(a) y 4.1(b) para la técnica de precodificación ZF.

SNR	SIMULADA	BIBLIOGRÁFICA
2	$2.84 * 10^{-1}$	$1.96 * 10^{-1}$
10	$9.75 * 10^{-2}$	$6.67 * 10^{-2}$
18	$1.36 * 10^{-2}$	$1.01 * 10^{-2}$

Tabla 4.1: Comparación de Resultados de BER para la Precodificación ZF.



(a) Desempeño de la BER de dos Métodos de Inversion de Canal [Cho, et al.(2010)].



(b) Desempeño de la Precodificación ZF Obtenido en Este Trabajo de Grado.

Figura 4.1: Validación del Desempeño de la Precodificación ZF.

En la Tabla 4.2 se comparan los valores de la SNR obtenidos de las curvas de las Figuras 4.1(a) y 4.1(b) para la técnica de precodificación ZF.

BER	SNR SIMULADA	SNR BIBLIOGRÁFICA	DIFERENCIA
$10^{-1}$	10	9	1
$10^{-2}$	19.15	18.3	0.85

Tabla 4.2: Comparación de Resultados de SNR para la Precodificación ZF.

En las Tablas 4.1 y 4.2 se observa la pequeña diferencia entre los resultados de las simulaciones de este trabajo de grado y de investigaciones previas sobre la precodificación ZF, tanto para valores de BER como de SNR.

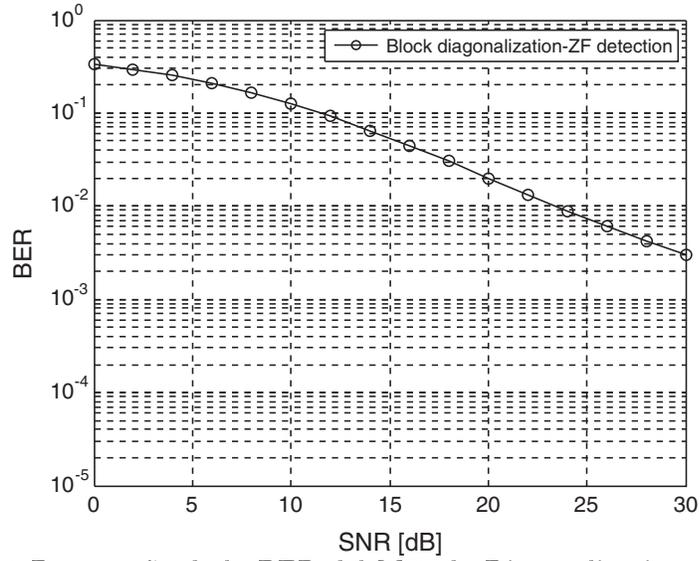
#### 4.1.1. Validación de Resultados para la Precodificación ZF Generalizada BD

La validación de los resultados de simulación del sistema MU-MIMO con precodificación BD se realiza mediante la comparación de las gráficas que se muestran en la Figura 4.2. En las Figuras 4.2(a) y 4.2(b) se muestran las curvas de la BER en función de la SNR para la técnica de precodificación BD con 4QAM, obtenidas de [Cho, et al.(2010)] y en este trabajo de grado, respectivamente.

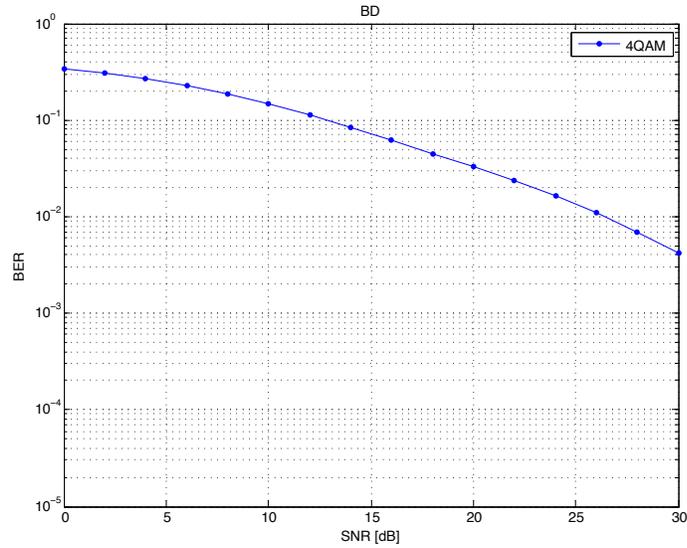
En la Tabla 4.3 se comparan los valores de la BER de las curvas de las Figuras 4.2(a) y 4.2(b) para la técnica de precodificación BD.

SNR	SIMULADA	BIBLIOGRÁFICA
2	$3.08 * 10^{-1}$	$1.96 * 10^{-1}$
10	$9.86 * 10^{-2}$	$6.67 * 10^{-2}$
18	$4.51 * 10^{-2}$	$1.01 * 10^{-2}$

Tabla 4.3: Comparación de Resultados de BER para la Precodificación BD.



(a) Desempeño de la BER del Método Diagonalización en Bloques [Cho, et al.(2010)].



(b) Desempeño de la BER con Precodificación BD Obtenido en Este Trabajo de Grado.

Figura 4.2: Validación del Desempeño de la Precodificación BD.

En la Tabla 4.4 se comparan los valores de la SNR obtenidos de las curvas de las Figuras 4.2(a) y 4.2(b) adquiridos mediante simulación en este trabajo de grado y en [Cho, et al.(2010)], para la técnica de precodificación BD.

BER	SNR SIMULADA	SNR BIBLIOGRÁFICA	DIFERENCIA
$10^{-1}$	12.84	14.6	1.76
$10^{-2}$	26.43	25	1.43

Tabla 4.4: Comparación de Resultados de SNR para la Precodificación BD.

En las Tablas 4.3 y 4.4 se observa la pequeña diferencia entre los resultados de las simulaciones de este trabajo de grado y de investigaciones previas sobre la precodificación BD, tanto para valores de BER como de SNR.

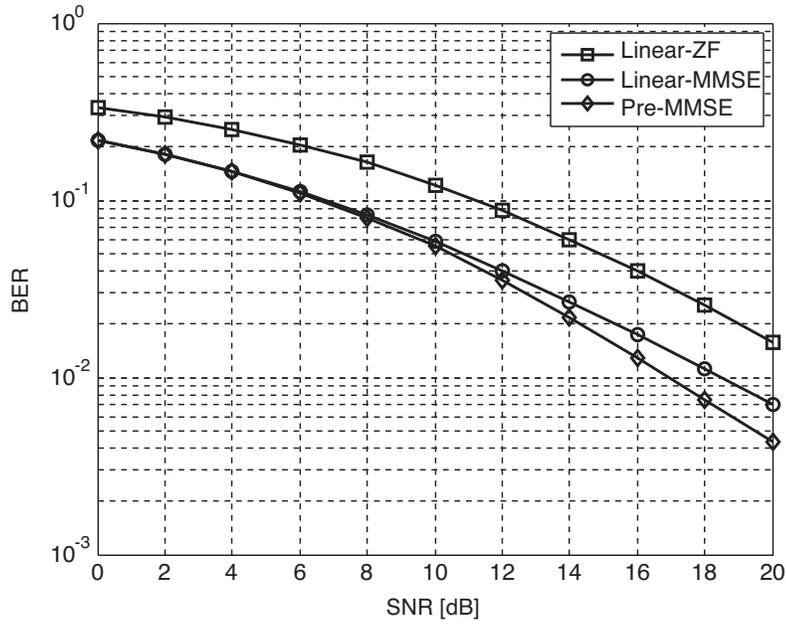
## 4.2. VALIDACIÓN DE RESULTADOS PARA LA PRECODIFICACIÓN MMSE

La validación de los resultados de la simulación del sistema MU-MIMO con precodificación MMSE se realiza mediante la comparación de las gráficas que se muestran en la Figura 4.3. En la Figura 4.3(a), bajo la leyenda “Pre-MMSE”, y en la Figura 4.3(b) se muestran las curvas de la BER en función de la SNR para la técnica de precodificación MMSE, obtenidas de [Cho, et al.(2010)] y en este trabajo de grado, respectivamente.

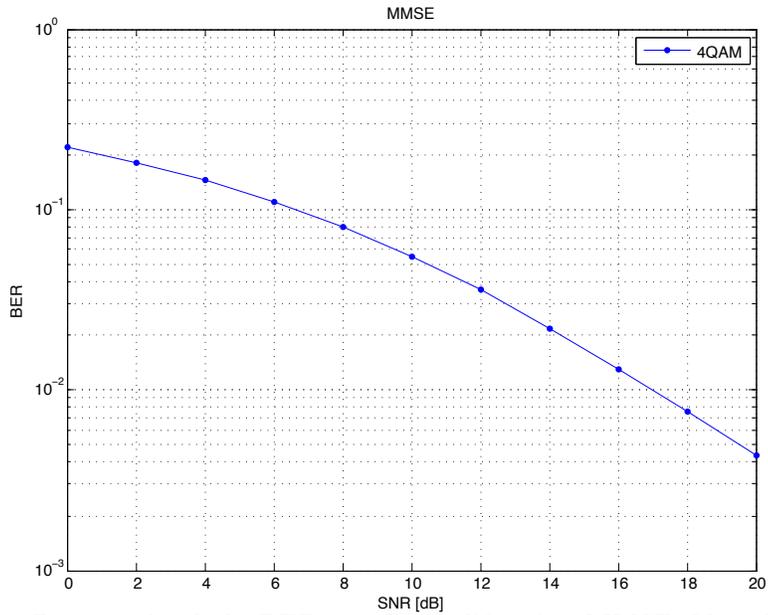
En la Tabla 4.5 se comparan los valores de la BER de las curvas de las Figuras 4.3(a) y 4.3(b) para la técnica de precodificación MMSE.

SNR	SIMULADA	BIBLIOGRÁFICA
2	$1.82 * 10^{-1}$	$1.8 * 10^{-1}$
10	$5.5 * 10^{-2}$	$5.42 * 10^{-2}$
18	$7.55 * 10^{-3}$	$7.45 * 10^{-3}$

Tabla 4.5: Comparación de Resultados de BER para la Precodificación MMSE.



(a) Comparación de Desempeño: Ecuación ZF/MMSE en el Lado Receptor vs. Ecuación Pre-MMSE [Cho, et al.(2010)].



(b) Desempeño de la BER con Precodificación MMSE Obtenido en Este Trabajo de Grado.

Figura 4.3: Validación del Desempeño de la Precodificación MMSE.

En la Tabla 4.6 se comparan los valores de la SNR de las curvas de las Figuras 4.3(a) y 4.3(b) para la técnica de precodificación MMSE.

BER	SNR SIMULADA	SNR BIBLIOGRÁFICA	DIFERENCIA
$10^{-1}$	6.68	6.65	0.03
$10^{-2}$	16.95	16.91	0.04
$10^{-3}$	25.1	24.9	0.2

Tabla 4.6: Comparación de Resultados de SNR para la Precodificación MMSE.

En las Tablas 4.5 y 4.6 se observa la pequeña diferencia entre los resultados de las simulaciones de este trabajo de grado y de investigaciones previas sobre la precodificación MMSE, tanto para valores de BER como de SNR.

Al comparar las curvas de las Figuras 4.1(b), 4.2(b) y 4.3(b), las cuales son producto de la simulación desarrollada en este trabajo de grado, con los curvas de las Figuras 4.1(a), 4.2(a) y 4.3(a), de [Cho, et al.(2010)], respectivamente, se observa que son similares, lo cual permite garantizar coherencia de los datos obtenidos mediante simulación en este trabajo de grado. Las diferencias se deben a variaciones en variables como el número de tramas por paquete y de paquetes a transmitir, así como en las funciones usadas para el proceso de la modulación.

Para el análisis del desempeño en enlace de bajada del sistema MU-MIMO con algoritmos de precodificación lineal ZF y MMSE, que se realiza en el capítulo cinco, se han graficado las curvas de la BER en función de la  $E_b/N_0$ , la cual, así como la SNR, también es un parámetro válido para analizar el desempeño de la precodificación. Los cambios que implica este parámetro, no inciden en el análisis del desempeño de la precodificación lineal.



# Capítulo 5

## ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO DEL SISTEMA MU-MIMO CON PRECODIFICACIÓN LINEAL

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados de la simulación del desempeño del sistema MU-MIMO con algoritmos de precodificación lineal ZF y MMSE en términos de la BER, para valores de  $E_b/N_0$ . Las modulaciones escogidas para el análisis son 4QAM, 8PSK y 16QAM. El canal de comunicaciones es un canal MU-MIMO en enlace de bajada  $4 \times 4$  AWGN.

Las técnicas de precodificación estudiadas son: ZF, una generalización de ella, BD, y MMSE. Se compara el desempeño de cada técnica de precodificación para las tres modulaciones. Posteriormente, se compara el desempeño de las tres técnicas de precodificación para cada esquema de modulación.

En este capítulo también se analiza un sistema MU-MIMO en enlace de bajada con y sin precodificación.

### 5.1. DESEMPEÑO DEL SISTEMA MU-MIMO CON PRECODIFICACIÓN ZF

La Figura 5.1 muestra el desempeño en enlace de bajada del sistema MU-MIMO  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$  con precodificación ZF para 4QAM, 8PSK y 16QAM en términos de la BER contra  $E_b/N_0$ .

El desempeño de la precodificación ZF es significativamente mejor para 4QAM, que para 8PSK y 16QAM, como se observa en las curvas de la Figura 5.1. Es lógico que así sea, teniendo en cuenta que 4QAM es una modulación de orden menor que las otras dos.

#### 5.1.1. Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodificación ZF Generalizada BD

En la Figura 5.2 se muestra el desempeño en enlace de bajada del sistema MU-MIMO  $\{2, 2\} \times 4$  con precodificación BD para 4QAM, 8PSK y 16QAM en términos de la BER contra  $E_b/N_0$ .

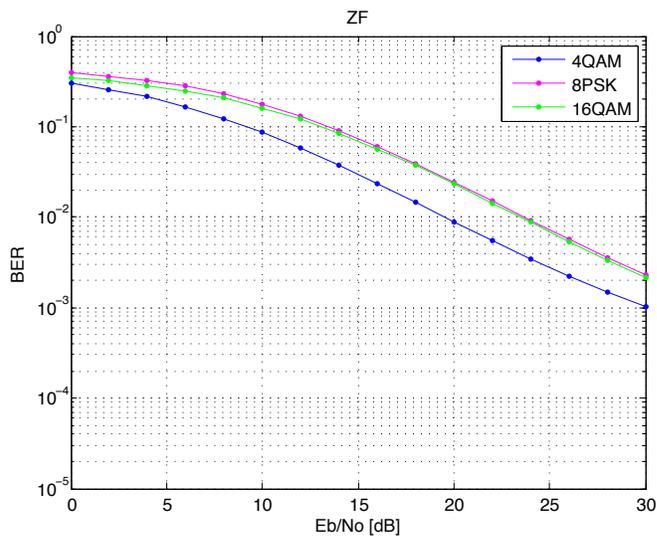


Figura 5.1: Desempeño del Sistema con Precodificación ZF.

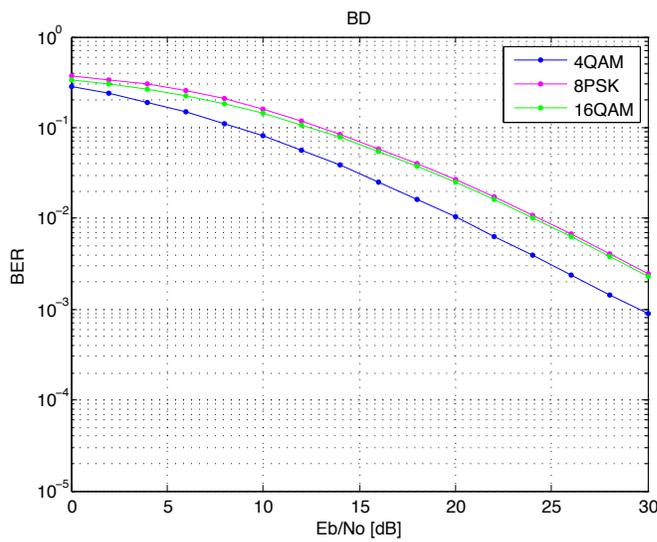


Figura 5.2: Desempeño del Sistema con Precodificación BD.

El desempeño en enlace de bajada del sistema MU-MIMO  $\{2, 2\} \times 4$  con precodificación BD tiene un comportamiento similar al presentado por el sistema con precodificación ZF.

En la Figura 5.3 se muestra el desempeño en enlace de bajada con la técnica de precodificación BD de los sistemas MU-MIMO  $\{2, 2\} \times 4$  y  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$ .

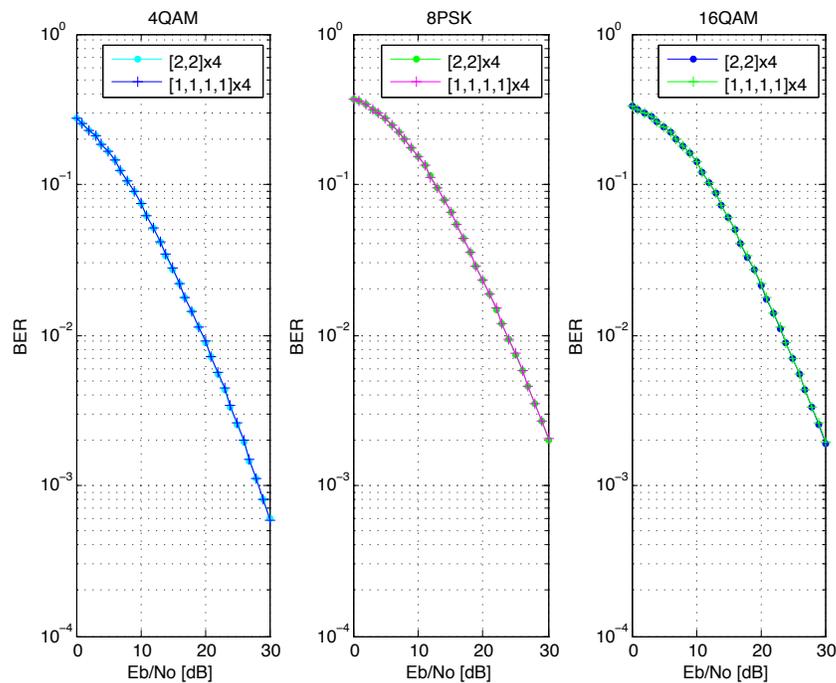


Figura 5.3: Desempeño de los Sistemas MU-MIMO  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$  y  $\{2, 2\} \times 4$  con Precodificación BD.

El desempeño en enlace de bajada con la técnica de precodificación BD de los sistemas MU-MIMO  $\{2, 2\} \times 4$  y  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$  es similar, como se muestra en la Figura 5.3. En la Tabla 5.1 se presentan valores de la BER para algunos valores de  $E_b/N_0$  obtenidos de la Figura 5.3.

BER de los Sistemas $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$ y $\{2, 2\} \times 4$ con Precodificación BD								
Configuración	Modulación	$\frac{E_b}{N_0}$ [dB]						
		0	5	10	15	20	25	30
$\{1, 1, 1, 1\} \times 4$	4QAM	$2.741 * 10^{-1}$	$1.65 * 10^{-1}$	$7.5 * 10^{-2}$	$2.75 * 10^{-2}$	$9.03 * 10^{-3}$	$2.58 * 10^{-3}$	$5.84 * 10^{-4}$
	8PSK	$3.71 * 10^{-1}$	$2.72 * 10^{-1}$	$1.53 * 10^{-1}$	$6.55 * 10^{-2}$	$2.32 * 10^{-2}$	$7.46 * 10^{-3}$	$2.03 * 10^{-3}$
	16QAM	$3.27 * 10^{-1}$	$2.42 * 10^{-1}$	$1.39 * 10^{-1}$	$6.08 * 10^{-2}$	$2.17 * 10^{-2}$	$7.04 * 10^{-3}$	$1.96 * 10^{-3}$
$\{2, 2\} \times 4$	4QAM	$2.74 * 10^{-1}$	$1.65 * 10^{-1}$	$7.52 * 10^{-2}$	$2.74 * 10^{-2}$	$8.98 * 10^{-3}$	$2.55 * 10^{-3}$	$5.95 * 10^{-4}$
	8PSK	$3.72 * 10^{-1}$	$2.72 * 10^{-1}$	$1.53 * 10^{-1}$	$6.59 * 10^{-2}$	$2.3 * 10^{-2}$	$7.35 * 10^{-3}$	$1.99 * 10^{-3}$
	16QAM	$3.28 * 10^{-1}$	$2.42 * 10^{-1}$	$1.4 * 10^{-1}$	$6.08 * 10^{-2}$	$2.15 * 10^{-2}$	$7.09 * 10^{-3}$	$1.91 * 10^{-3}$

Tabla 5.1: Comparación de la BER para los Sistemas  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$  y  $\{2, 2\} \times 4$  con Precodificación BD para 4QAM, 8PSK y 16QAM.

Los valores de la Tabla 5.1 confirman la similitud del desempeño en enlace de bajada de los sistemas MU-MIMO  $\{2, 2\} \times 4$  y  $\{1, 1, 1, 1\} \times 4$  con precodificación BD para todos los esquemas de modulación seleccionados.

### 5.1.2. Comparación del Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodificación ZF y BD

A simple vista, las curvas de desempeño en enlace de bajada del sistema MU-MIMO con precodificación ZF y BD, en las Figuras 5.1 y 5.2, son similares. Tanto BD como ZF trabajan bajo la condición de cero interferencia, lograda mediante la transmisión de señales sobre el espacio nulo de la matriz de canal de los demás usuarios activos. ZF es una técnica implementada para sistemas con equipos receptores con única antena y BD para equipos receptores con múltiples antenas; en este caso los equipos receptores del sistema con precodificación BD cuentan con dos antenas.

En la Tabla 5.2 se presentan valores de la BER para algunos valores de  $E_b/N_o$  para las técnicas de precodificación ZF y BD.

BER para Técnicas de Precodificación ZF y BD					
Modulación	Precodificación	$\frac{E_b}{N_o}$ [dB]	5	15	25
4QAM	ZF		$1.89 * 10^{-1}$	$3 * 10^{-2}$	$2.77 * 10^{-3}$
	BD		$1.70 * 10^{-1}$	$3.12 * 10^{-2}$	$3.03 * 10^{-3}$
8PSK	ZF		$3.02 * 10^{-1}$	$7.50 * 10^{-2}$	$7.19 * 10^{-3}$
	BD		$2.76 * 10^{-1}$	$7.10 * 10^{-2}$	$8.48 * 10^{-3}$
16QAM	ZF		$2.67 * 10^{-1}$	$7 * 10^{-2}$	$6.86 * 10^{-3}$
	BD		$2.46 * 10^{-1}$	$6.56 * 10^{-2}$	$8.02 * 10^{-3}$

Tabla 5.2: Comparación de la BER para las Técnicas de Precodificación ZF y BD para 4QAM, 8PSK y 16QAM.

Las técnicas de precodificación ZF y BD presentan un comportamiento similar para cualquiera de los esquemas de modulación implementados, ya que los datos de BER obtenidos son muy aproximados, tanto para valores bajos como altos de  $E_b/N_o$ , como se observa en la Tabla 5.2.

## 5.2. DESEMPEÑO DEL SISTEMA MU-MIMO CON PRECODIFICACIÓN MMSE

La Figura 5.4 muestra el desempeño en enlace de bajada del sistema con precodificación MMSE para los esquemas de modulación 4QAM, 8PSK y 16QAM.

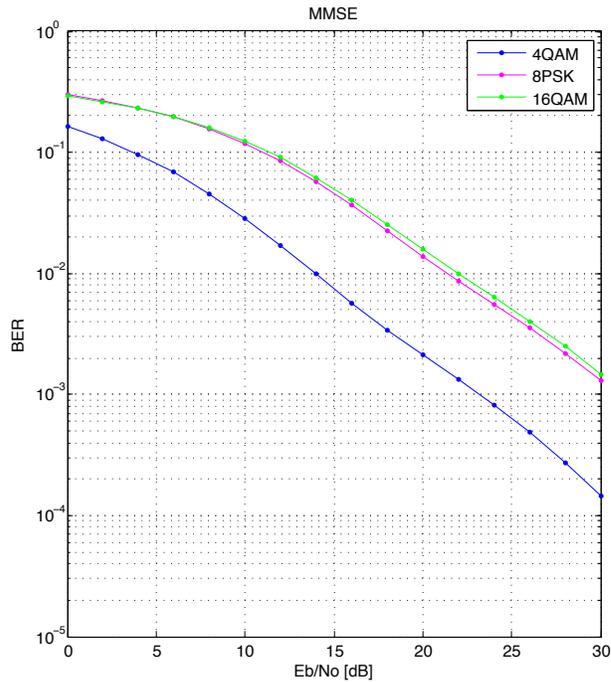


Figura 5.4: Comparación del Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodificación MMSE para 4QAM, 8PSK y 16QAM.

El desempeño en enlace de bajada del sistema con precodificación MMSE tiene una respuesta superior al de las técnicas ZF, como se muestra en la Figura 5.4, reflejado en la pronunciada caída de las curvas de BER, destacándose como la solución más eficaz, dentro de las técnicas lineales consideradas, para tratar el problema de la MUI.

### 5.3. COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DEL SISTEMA MU-MIMO CON PRECODIFICACIÓN ZF Y MMSE

A continuación se analiza el desempeño en enlace de bajada de los sistemas MU-MIMO con precodificación ZF y MMSE, bajo cada uno de los esquemas de modulación escogidos, como se muestra en las Figuras 5.5, 5.6 y 5.7.

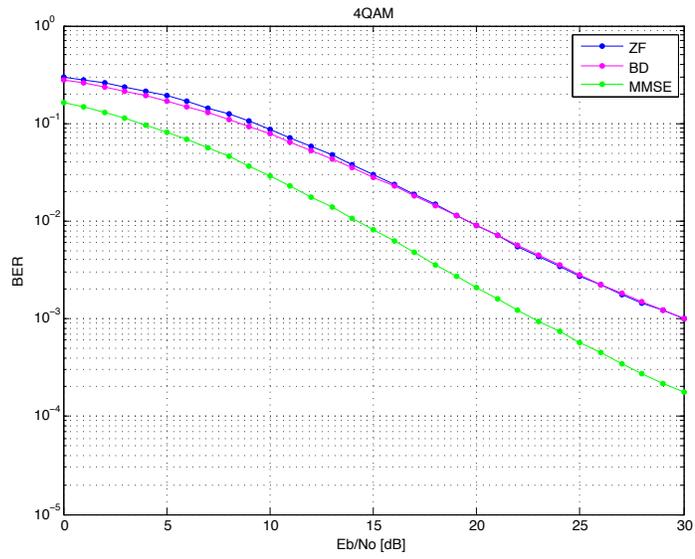


Figura 5.5: Comparación del Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodificación ZF, BD y MMSE para 4QAM.

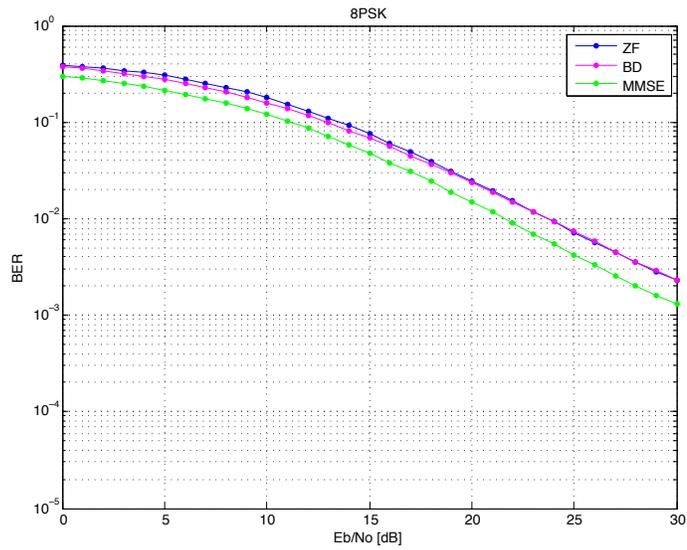


Figura 5.6: Comparación del Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodificación ZF, BD y MMSE para 8PSK.

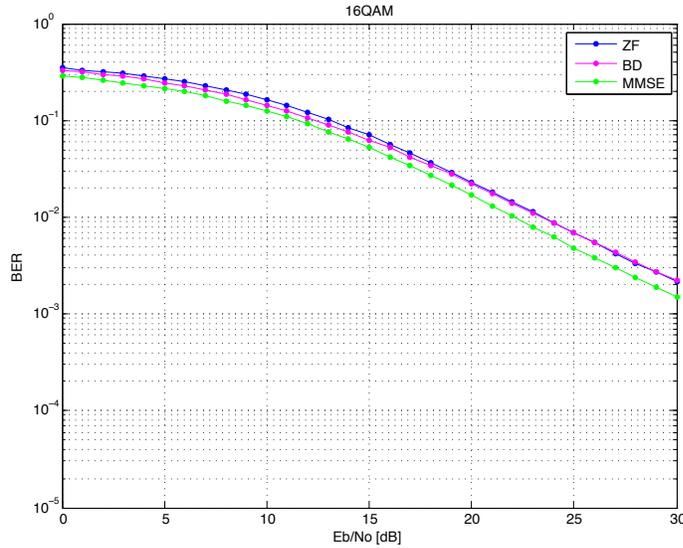


Figura 5.7: Comparación del Desempeño del Sistema MU-MIMO con Precodificación ZF, BD y MMSE para 16QAM.

Los valores de la BER obtenidos para diferentes valores de  $Eb/No$ , para los tres esquemas de modulación y las tres técnicas de precodificación, se despliegan en la Tabla 5.3. Los valores registrados en esta tabla son suministrados por las Figuras 5.5, 5.6 y 5.7.

Una vez más, se evidencia que la técnica de precodificación MMSE presenta un desempeño superior, en términos de la BER, al de las técnicas ZF. Por ejemplo en la Tabla 5.3, para la modulación 4QAM y una  $Eb/No$  de 30 dB, la BER del sistema con precodificación ZF es de  $1.01 * 10^{-3}$ , mientras que con MMSE es de  $1.44 * 10^{-4}$ . Este comportamiento se debe a que la técnica de precodificación MMSE tiene en cuenta no sólo la MUI, como lo hace ZF, sino también la potencia de ruido en el proceso de cálculo de la matriz de precodificación, superando así el desempeño de la técnica ZF.

En las Figuras 5.1 y 5.4, la distancia entre las curvas de 4QAM y 16QAM es mayor para MMSE que para ZF. En la Tabla 5.3 se observa que para la precodificación ZF con una  $Eb/No$  de 30 dB, el valor de la BER para la modulación 4QAM es  $1.01 * 10^{-3}$  y para 16QAM es  $2.17 * 10^{-3}$ , en cambio para la precodificación MMSE el valor de la BER para 4QAM es  $1.44 * 10^{-4}$  y para 16QAM es  $1.47 * 10^{-3}$ .

BER para Técnicas de Precodificación ZF, BD y MMSE									
Modulación	Precodificación	$\frac{E_b}{N_0}$ [dB]							
		0	5	10	15	20	25	30	
4QAM	ZF	$3 * 10^{-1}$	$1.89 * 10^{-1}$	$8.68 * 10^{-2}$	$3 * 10^{-2}$	$8.96 * 10^{-3}$	$2.77 * 10^{-3}$	$1.01 * 10^{-3}$	
	BD	$2.78 * 10^{-1}$	$1.70 * 10^{-1}$	$8.04 * 10^{-2}$	$3.12 * 10^{-2}$	$1.04 * 10^{-2}$	$3.03 * 10^{-3}$	$9.02 * 10^{-4}$	
	MMSE	$1.63 * 10^{-1}$	$8.18 * 10^{-2}$	$2.86 * 10^{-2}$	$7.53 * 10^{-3}$	$2.10 * 10^{-3}$	$6.41 * 10^{-4}$	$1.44 * 10^{-4}$	
8PSK	ZF	$3.93 * 10^{-1}$	$3.02 * 10^{-1}$	$1.78 * 10^{-1}$	$7.50 * 10^{-2}$	$2.45 * 10^{-2}$	$7.19 * 10^{-3}$	$2.26 * 10^{-3}$	
	BD	$3.74 * 10^{-1}$	$2.76 * 10^{-1}$	$1.59 * 10^{-1}$	$7.10 * 10^{-2}$	$2.64 * 10^{-2}$	$8.48 * 10^{-3}$	$2.43 * 10^{-3}$	
	MMSE	$3.01 * 10^{-1}$	$2.15 * 10^{-1}$	$1.19 * 10^{-1}$	$4.58 * 10^{-2}$	$1.39 * 10^{-2}$	$4.50 * 10^{-3}$	$1.30 * 10^{-3}$	
16QAM	ZF	$3.45 * 10^{-1}$	$2.67 * 10^{-1}$	$1.62 * 10^{-1}$	$7 * 10^{-2}$	$2.32 * 10^{-2}$	$6.86 * 10^{-3}$	$2.17 * 10^{-3}$	
	BD	$3.31 * 10^{-1}$	$2.46 * 10^{-1}$	$1.44 * 10^{-1}$	$6.56 * 10^{-2}$	$2.47 * 10^{-2}$	$8.02 * 10^{-3}$	$3.28 * 10^{-3}$	
	MMSE	$2.91 * 10^{-1}$	$2.13 * 10^{-1}$	$1.24 * 10^{-1}$	$5 * 10^{-2}$	$1.56 * 10^{-2}$	$5.03 * 10^{-3}$	$1.47 * 10^{-3}$	

Tabla 5.3: Comparación de la BER para las Técnicas de Precodificación ZF, BD y MMSE para 4QAM, 8PSK y 16QAM.

Es de anotar, la pequeña diferencia entre las curvas de 8PSK y 16QAM para todas las técnicas de precodificación. Por ejemplo, de la Tabla 5.3 para una  $E_b/N_o$  de 30 dB, la diferencia de valores de la BER para la precodificación ZF es  $9 * 10^{-5}$ , para BD es  $8.5 * 10^{-4}$  y para MMSE es  $1.7 * 10^{-4}$ .

A pesar de ser 8PSK una modulación de menor orden que 16QAM, esta última se desempeña de forma similar a 8PSK. El desempeño de 8PSK y 16QAM es similar para un sistema SISO, como se muestra en las Figuras A.3 y A.4 del Anexo A, cuyas gráficas han sido obtenidas mediante la herramienta BERTool de MATLAB, por lo que es entendible que para un sistema MIMO el desempeño de estos dos esquemas de modulación también sea semejante. La distancia entre los símbolos modulados es proporcional a la inmunidad de ellos frente al ruido AWGN del canal, por ello 8PSK es más débil que 16QAM, porque los esquemas QAM-M-arios se valen no solo de la fase, como los PSK-M-arios, sino también de la amplitud para distribuir los símbolos en el plano complejo.

Las técnicas de precodificación lineal ofrecen un mejor desempeño a menores órdenes de modulación, siendo en este trabajo de grado el esquema de modulación de menor orden 4QAM. Por ejemplo, en la Tabla 5.3 para una  $E_b/N_o$  de 30 dB y precodificación MMSE, el valor de BER para 4QAM es  $1.44 * 10^{-4}$ , en cambio para 8PSK y 16QAM son  $1.3 * 10^{-3}$  y  $1.47 * 10^{-3}$ , respectivamente.

A medida que se incrementa el orden de modulación, la diferencia entre el desempeño en enlace de bajada del sistema MU-MIMO con las técnicas de precodificación ZF y MMSE disminuye. Por ejemplo, de la Tabla 5.3 para un valor de  $E_b/N_o$  de 30 dB y modulación 4QAM, la BER de ZF es de  $1.01 * 10^{-3}$  y de MMSE es de  $1.44 * 10^{-4}$ , en cambio para la modulación 16QAM, la BER de ZF es de  $2.17 * 10^{-3}$  y de MMSE es de  $1.47 * 10^{-3}$ , siendo estos últimos valores más cercanos a los obtenidos con la modulación 4QAM.

La Tabla 5.4 muestra una comparación de valores de  $E_b/N_o$  requeridos para alcanzar los valores  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  y  $10^{-3}$  de la BER.

Relación $E_b/N_o$ para las Técnicas de Precodificación ZF, BD y MMSE				
Precodificación	Precodificación	$\frac{E_b}{N_o}$ [dB]		
		$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
ZF	4QAM	9	19.5	30
	8PSK	13.6	23.6	—
	16QAM	13	23.3	—
BD	4QAM	8.5	20	29.5
	8PSK	13	24	—
	16QAM	12.5	24	—
MMSE	4QAM	3.6	13.7	23.2
	8PSK	10.7	21	—
	16QAM	11.1	21.7	—

Tabla 5.4: Comparación de la  $E_b/N_o$  para las Técnicas de Precodificación ZF, BD y MMSE.

En la Tabla 5.4 se observa que para garantizar una BER de  $10^{-2}$ , en la modulación 4QAM, la técnica ZF requiere un valor de  $Eb/No$  de 5.8 dB adicionales con respecto a la técnica MMSE. Lo que significa que la técnica ZF requiere de un 26.3% más de  $Eb/No$  que MMSE para alcanzar una BER de  $10^{-2}$  con la modulación 4QAM.

#### 5.4. COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS SISTEMAS MU-MIMO CON Y SIN PRECODIFICACIÓN LINEAL

Un equipo receptor de un sistema MU-MIMO en enlace de bajada con precodificación lineal es capaz de detectar correctamente los símbolos transmitidos a él, gracias a la precodificación, que cumple su objetivo de mitigar la MUI. En cambio, en un sistema MU-MIMO en enlace de bajada que no hace uso de la precodificación los equipos receptores no pueden estimar de forma acertada los símbolos en recepción, porque no cuentan con un mecanismo que cancele la señal destinada a los demás usuarios; en estos últimos sistemas todos los equipos receptores reciben las señales de información destinada a ellos y a los demás, sin haber ninguna manera de distinguir los datos de un usuario o de otro.

Las Figuras 5.8 y 5.9 representan los diagramas de constelación de los símbolos transmitidos y recibidos en los sistemas sin y con precodificación ZF, respectivamente, bajo el esquema de modulación 4QAM y un valor de  $Eb/No$  de 15 dB.

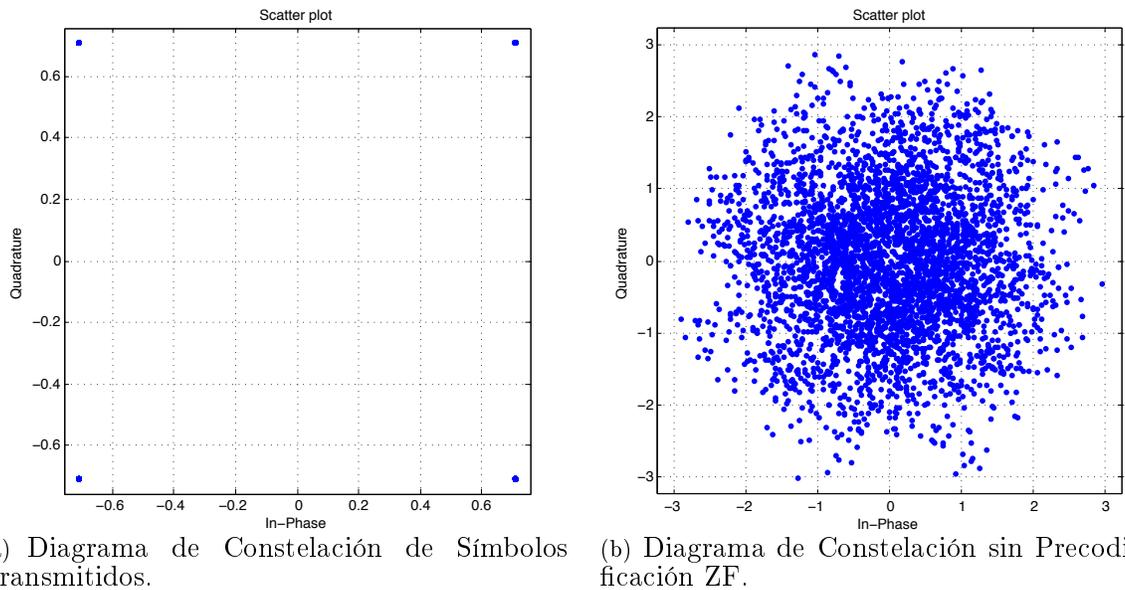
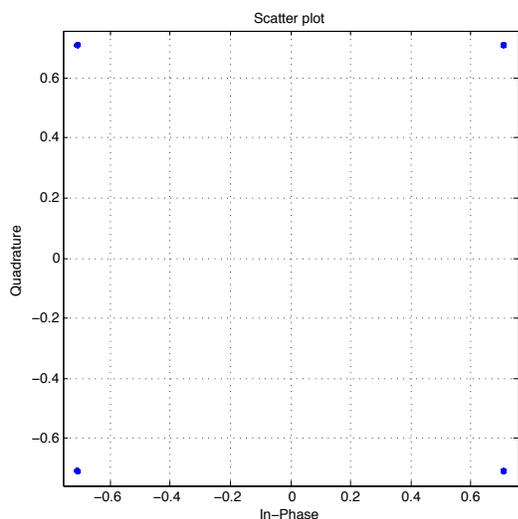
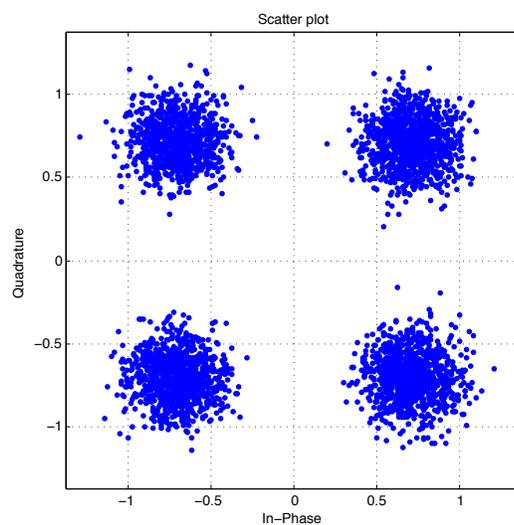


Figura 5.8: Diagrama de Constelación de Símbolos Transmitidos y Recibidos en el Sistema MU-MIMO sin Precodificación ZF.



(a) Diagrama de Constelación de Símbolos Transmitidos.



(b) Diagrama de Constelación con Precodificación ZF.

Figura 5.9: Diagrama de Constelación de Símbolos Transmitidos y Recibidos en el Sistema MU-MIMO con Precodificación ZF.

Los símbolos recibidos en un sistema sin precodificación sufren una notable degradación, como se muestra en la Figura 5.8(b), donde se observa una distorsión en amplitud y fase que imposibilita la correcta detección de la información original. En cambio los símbolos recibidos en un sistema con precodificación sí permiten una correcta estimación, como se muestra en la Figura 5.9(b), donde se observa que la precodificación permite reagrupar los símbolos dispersados por el canal MIMO mostrados en la Figura 5.8(b). Esto verifica la importancia de las técnicas de precodificación como solución para el problema de la MUI.

# Capítulo 6

## CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

### 6.1. CONCLUSIONES

- La adaptación de la metodología de simulación de sistemas de telecomunicaciones fue de gran ayuda en la planificación y diseño del modelo de simulación de un sistema MU-MIMO basado en algoritmos de precodificación lineal ZF y MMSE.
- Se logró verificar que la precodificación lineal opera siempre y cuando se disponga en el transmisor de la información de estado de canal, la cual es suministrada por los equipos receptores según la calidad de señal que reciban.
- Se observó que el desempeño en enlace de bajada de un sistema MU-MIMO con la técnica de precodificación lineal MMSE presenta un mejor desempeño que con la técnica de precodificación lineal ZF para cualquier valor de la SNR.
- El desempeño de un sistema MU-MIMO con la técnica de precodificación lineal ZF es muy similar al alcanzado por el sistema con precodificación lineal BD para equipos receptores con única antena. Esto se debe a que la técnica de precodificación BD es una generalización de la técnica de precodificación ZF para configuraciones de sistemas MU-MIMO, donde los receptores poseen más de una antena.
- Se comprobó que en un sistema MU-MIMO, para un valor de la relación  $E_b/N_0$  específica, la BER siempre será mayor para un esquema de modulación de mayor orden, como 16QAM, que para uno de menor orden como 4QAM; comportamiento que se observa también en un sistema SISO.
- La similitud de los resultados obtenidos en este trabajo de grado con los de investigaciones previas, permitió validar el modelo de simulación diseñado en este trabajo, para analizar el desempeño de las técnicas de precodificación lineal ZF y MMSE.

## 6.2. TRABAJOS FUTUROS

Para trabajos futuros se sugiere lo siguiente:

- Implementar las técnicas de precodificación lineal ZF y MMSE en enlace de bajada basado en un sistema MU-MIMO real, y realizar el monitoreo y control de dichos sistemas.
- Evaluar y analizar el desempeño en enlace de bajada basado en un sistema MU-MIMO con técnicas de precodificación lineal MMSE generalizadas, como S-MMSE y PU-SMMSE
- Analizar el desempeño en enlace de bajada basado en un sistema MU-MIMO con algoritmos de precodificación no lineales, como DPC o THP, los cuales a pesar de aumentar la complejidad del diseño, ofrecen un mejor desempeño.

# Bibliografía

- [3G Americas,(2009)] 3G Americas: “MIMO Transmission Schemes for LTE and HSPA Networks”, White Paper, Jun. 2009.
- [Astaiza, et al.(2004)] Astaiza E., Bermúdez H. y Muñoz P., “Simulación de Sistemas de Telecomunicaciones”, Documento Desarrollado por Docentes de la Universidad del Cauca como Guía para Simular Sistemas de Telecomunicaciones, 2004.
- [Bandemer, et al.(2006)] Bandemer, B., Haardt, M. and Visuri, S., “Linear MMSE Multi-User MIMO Downlink Precoding for Users with Multiple Antennas”, 2006 IEEE 17th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, pp 1-5, Sept. 2006.
- [Barzola y Guailacela(2004)] Barzola J. y Guailacela F., “Simulación de Sistemas MIMO Multi-usuario vía Procesamiento de Señales: Diagonalización de Bloques”, Tesis de Grado, Facultad de Ingeniería en Electricidad y Computación, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Guayaquil, Ecuador, Dic. 2010.
- [Caicedo y Medina(2008)] Caicedo P. y Medina G., “Análisis de Desempeño del Nivel Físico de un Sistema MIMO Punto a Punto”, Proyecto de grado, Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad del Cauca, 2008.
- [Carlson, et al.(2002)] Carlson B., Crilly P. and Rutledge J., *Communication Systems An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication*. 4th Edition McGraw-Hill, New York, 2002.
- [Cho, et al.(2010)] Cho Y., Kim J., Yang W. and Kang C., *MIMO-OFDM Wireless Communications with Matlab*. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2010.
- [Comes, et al.(2010)] Comes R., Álvarez F., Palacio F., Ferre R., Romero J. y Roig O., *LTE: Nuevas Tendencias en Comunicaciones Móviles*. Universitat Politècnica de Catalunya: Fundació Vodafone España, 2010.
- [García(2010)] García G., “Técnicas de Precodificación Lineal para Coordinación de Celdas en Sistemas MIMO”, Proyecto fin de carrera, Departamento de la Teoría de la Señal y Comunicaciones, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés, España, 2010.
- [Goldsmith, et al.(2003)] Goldsmith A., Jafar S., Jindal N. and Vishwanath S., “Capacity Limits of MIMO Channels”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol 21, Issue: 5, pp 684-702, June 2003.

- [Haardt, et al.(2005)] Haardt, M., Stankovic, Del Galdo, G., Vencel T. and Huber J., “Efficient Multi-User MIMO Downlink Precoding and Scheduling”, IEEE Transactions on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing, 2005 1st, pp 237-240, Dec. 2005.
- [Haykin(2002)] Haykin S., “Transmision de Datos Pasobanda”, en *Sistemas de Comunicación*, Limusa Wiley, 2002.
- [Holma and Toskala(2009)] Holma H. and Toskala A, “Introduction to OFDMA and SC-FDMA and to MIMO in LTE”, in *LTE for UMTS –OFDMA and SC-FDMA Based Radio Access*, John Wiley and Sons, Ltd, Finland, 2009, pp 80.
- [Huayu, et al.(2010)] Huayu Z., Rong Z., and Qin Z., “Low complexity MMSE Precoding and Decoding for Multiuser MIMO”, 2010 2nd International Conference on, vol 3 Future Computer and Communication (ICFCC), Inssue 4, pp V3-282-V3-285, May 2010.
- [Jie, et al.(2012)] Jie A., Yuanan L. and Fang L., “A Low Complexity Block Diagonalization Precoding Method for Multiuser MIMO Downlink”, Journal of Computational Information Systems, pp 5187–5194, Dec. 2012.
- [Joham, et al.(2002)] Joham M. Kusume K., Utschick W. and Nossek J., “Transmit Matched Filter and Transmit Wiener Filter for the Downlink of FDD DS-CDMA Systems”, The 13th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2002, vol 5, pp 2312-2316, Sept. 2002.
- [Kaltenberger, et al.(2008)] Kaltenberger F., Kountouris M., Cardoso L., Knopp R., and Gesbert D., “Capacity of Linear Multi-User MIMO Precoding Schemes with Measured Channel Data”, IEEE 9th Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications, 2008. SPAWC 2008, pp 580-584, July 2008.
- [Kirtan(2004)] Kirtan N. Modi, “Transmitter Precoding for Multi-Antenna Multi-User Communications”, Thesis of Master of Sience, College of Engineering and Mineral Resources, West Virginia University, Morgantown, WV, 2004.
- [Min and Seong.(2007)] Min L. and Seong K., “A Per-User Successive MMSE Precoding Technique in Multiuser MIMO Systems”, IEEE 65th Vehicular Technology Conference, pp 2374-2378, April 2007.
- [Muñoz(2011)] Muñoz A., “Comparativa de Técnicas de Precodificación ZF y MMSE en un Sistema Celular Coordinado”, Proyecto Fin de Carrera, Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés, España, 2011.
- [Muñoz y Muñoz(2012)] Muñoz C. y Muñoz T., “Análisis Comparativo del Desempeño de los Algoritmos FSD y QRD-M Empleados en la Detección de Señales en Sistemas MIMO”, Proyecto de Grado, Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad del Cauca, 2012.
- [Paulraj, et al.(2003)] Paulraj A., Nabar R. and Gore D., “ST Channel and Signal Models”, in *Introduction to Space-Time Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2003, pp 32-37.

- [Peel, et al.(2005)] Peel C., Hochwald B., and Swindlehurst A. “A Vector-Perturbation Technique for Near-Capacity Multiantenna Multiuser Communication-Part I: Channel Inversion and Regularization”, *IEEE Transactions on Communications*, vol 53, Issue 1, pp 195-202, Jan. 2005.
- [Plaza y Rey(2008)] Plaza C. y Rey E., “Análisis Comparativo entre un Sistema SISO y un Sistema MIMO”, Proyecto de grado, Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad del Cauca, 2008.
- [Proakis and Salehi(2008)] Proakis J. and Salehi M., “Optimum Receivers for the Additive White Gaussian Noise Channel”, in *Digital Communications*, McGraw-Hill, Jan. 2008.
- [Recomendación UIT-R P.1057(2007)] UIT-R (P.1057). Recomendación UIT-R P.1057 Union Internacional de Telecomunicaciones. Suiza, 2007\_6p.
- [Reddy and Rasmussen(2000)] Reddy J.N. and Rasmussen M.L., *Análisis Matemático Avanzado*. Limusa, Grupo Noriega Editores, Estados Unidos, 2010, pp 341.
- [Rodrigues(2012)] Rodrigues T., “Proposta de Esquemas ARQ Híbrido Usando Códigos Turbo para os Canais SISO e MIMO ”, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, Dezembro 2006.
- [Rohde & Schwarz,(2009)] Rohde & Schwarz, “Introduction to MIMO”, Application Note 1MZ142, Jul. 2009.
- [Rohde & Schwarz,(2010)] Rohde & Schwarz, “Guidelines for MIMO Test Setups-Part 1”, Application Note 1GP50, April. 2010.
- [Singal(2010)] Singal T., “Cellular System Design Trade-Offs”, in *Wireless Communications*, Tata McGraw-Hill Education, 2010.
- [Spencer, et al.(2004)] Spencer Q., Swindlehurst A. and Haardt M., “Zero Forcing Methods for Downlink Spatial Multiplexing in Multiuser MIMO Channels”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 2, pp. 261-271, Feb. 2004.
- [Stankovic and Haardt(2004)] Stankovic V. and Haardt M., “Multi-User MIMO Downlink Precoding for Users with Multiple Antennas”, in Proc. 12-th WWRP, Toronto, Canada, 2004.
- [Windpassinger, et al.(2004)] Windpassinger C., Fischer R., Vencel T. and Huber J., “Precoding in Multi-Antenna and Multi-User Communications”, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol 3, Issue 4, pp 1305-1316, July 2004.
- [Yu and Cioffi(2001)] Yu W. and Cioffi J.M., “On Constant Power Water-Filling”, *IEEE International Conference on Communications*, vol. 6, pp 1665-1669, June 2001.
- [Yu, et al.(2004)] Yu W, Rhee W., Boyd S. and Cioffi J.M., “Iterative Water-Filling for Gaussian Vector Multiple-Access Channels”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, pp 145-152, Jan. 2004.



## ANEXO A

### PROBABILIDAD DE ERROR

En las comunicaciones digitales se transmiten datos de naturaleza discreta. En orden para obtener una formula relativa a la tasa de error, en este trabajo se considera un sistema basado en la transmisión de señales polares Sin Retorno a Cero (NRZ, *Non Return to Zero*), para la cual los símbolos "1" y "0" son representados por pulsos rectangulares positivos y negativos de igual amplitud  $A$  y duración  $T_b$ , como se muestra en la Figura A.1.

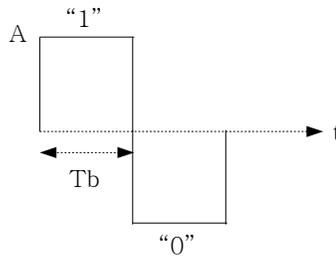


Figura A.1: Pulso binario

### Probabilidad de error en un canal AWGN

En todo sistema de transmisión de datos, el ruido está presente, y es importante considerar esta fuente de error de bit y su influencia en el desempeño del sistema.

### Probabilidad de error para M-PSK en un canal AWGN

En la modulación por Desplazamiento de Fase (PSK, *Phase Shift Keying*) la fase portadora toma uno de  $M$  valores posibles, a saber,  $\theta_i = 2(i-1)\pi/M$ , donde  $i = 1, 2, \dots, M$ . Por lo tanto, durante cada intervalo de transmisión de duración  $T$ , se envía una de las  $M$  señales posibles dada por la ecuación A-1.

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(i-1)\right), \quad 0 < t \leq T \quad (\text{A-1})$$

Donde  $M = 2^n$  es el orden de modulación,  $n$  el número de bits por símbolo,  $E$  la energía de la señal por símbolo,  $T$  el período de símbolo y  $f_c$  la frecuencia de la portadora. Para BPSK,

la función básica es  $\phi_1$ , dada por la ecuación A-2.

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) \quad (\text{A-2})$$

Y dependiendo del símbolo a transmitir, este puede tomar los valores  $S_1$  o  $S_2$ , dados por las ecuaciones A-3 y A-4, respectivamente.

$$S_1 = \sqrt{E_b} \phi_1 = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) \quad \text{para transmitir un "1"} \quad (\text{A-3})$$

$$S_2 = -\sqrt{E_b} \phi_1 = -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) \quad \text{para transmitir un "0"} \quad (\text{A-4})$$

La amplitud de cada símbolo BPSK, en el diagrama de constelación, es  $\pm\sqrt{2}A$ , como se muestra en la Figura A.2. De ahí, la energía de bit está dada por la ecuación A-5.

$$E_b = A^2 T_b \quad (\text{A-5})$$

Donde  $T_b$  es el período de bit, por lo que la amplitud del símbolo se puede expresar como  $\pm\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}$ . Teniendo esto en cuenta, la magnitud de los símbolos,  $S_1$  y  $S_2$ , está dada por la ecuación A-6.

$$|S_{1,2}| = \sqrt{2}A \quad (\text{A-6})$$

Para *BPSK*, las variables  $x_1$  y  $x_2$  son variables aleatorias con distribución normal dadas por

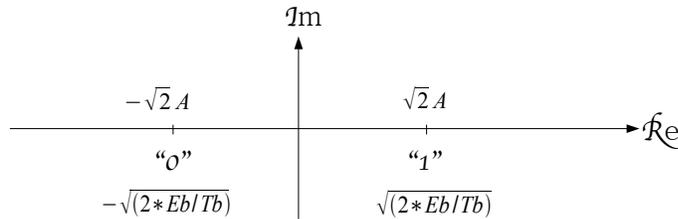


Figura A.2: Diagrama de constelación BPSK

las ecuaciones A-7 y A-8.

$$x_1 \sim \mathcal{CN}\left(\sqrt{E_b}, \frac{N_0}{2}\right) \quad (\text{A-7})$$

$$x_2 \sim \mathcal{CN}\left(-\sqrt{E_b}, \frac{N_0}{2}\right) \quad (\text{A-8})$$

La probabilidad de error para el símbolo transmitido "1", es la probabilidad condicional de que el receptor decida en favor del símbolo "0", cuando se transmitió un "1", denominada  $p_{01}$ . Análogamente, para el caso contrario, la probabilidad condicional es  $p_{10}$ , dada por la ecuación A-9.

$$p_{10} = \int_0^{\infty} f_{x_1}(x_1|0) dx_1 \quad (\text{A-9})$$

Donde  $f_{x_1}(x_1|0)$  es la *fdp* condicional de una distribución exponencial, de una variable aleatoria  $x_1$ , debido a que se transmitió el símbolo "0" dada por la ecuación A-10.

$$f_{x_1}(x_1|0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(x_1 + \sqrt{E_b})^2}{N_0}\right) \quad (\text{A-10})$$

Por lo tanto, la probabilidad condicional  $p_{10}$  está dada por la ecuación A-11.

$$p_{10} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x_1 + \sqrt{E_b})^2}{N_0}\right) dx_1 \quad (\text{A-11})$$

Sea  $z$  una variable definida por la ecuación A-12.

$$z = \frac{x_1 + \sqrt{E_b}}{\sqrt{N_0}} \quad (\text{A-12})$$

Y su derivada está dada por la ecuación A-13.

$$\sqrt{N_0} dz = dx_1 \quad (\text{A-13})$$

Cambiando la variable de integración  $x_1$  a  $z$ , de la ecuación A-11 se tiene la ecuación A-14.

$$p_{10} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}}^\infty \exp(-z^2) dz \quad (\text{A-14})$$

Lo que es igual a un medio de la función de error complementaria ( $erfc^1$ ), por lo tanto  $p_{10}$  está dada por la ecuación A-16.

$$p_{10} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (\text{A-16})$$

De la Figura A.2, por simetría con respecto al origen, la probabilidad de error para cada símbolo es la misma, luego las probabilidades condicionales  $p_{10}$  y  $p_{01}$  son iguales. Ya que la probabilidad de error se expresa como el promedio de las probabilidades de error para cada posible símbolo transmitido, la probabilidad de error de bit para BPSK en un canal AWGN está dada por la ecuación A-17.

$$P_{b(AWGN, BPSK)} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (\text{A-17})$$

La cual, es la misma probabilidad de error de bit para QPSK y 4QAM. La probabilidad de error de símbolo de BPSK es igual a su probabilidad de error de bit.

---

<sup>1</sup>La función error ( $erf$ ), o función error de Gauss, está definida por  $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ , y la función de error complementaria ( $erfc$ ), se define a partir de la función de error ( $erf$ ), como

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (\text{A-15})$$

La probabilidad de error de bit para M-PSK en un canal de ruido *AWGN* esta dada por la ecuación A-18.

$$P_{b(AWGN, M-PSK)} = \frac{2}{\log_2 M} \operatorname{erfc} \left( \sin \left( \frac{\pi}{M} \right) \sqrt{\log_2 M} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right), \quad \text{para } M \geq 4 \quad (\text{A-18})$$

Y la probabilidad de error de símbolo está dada por la ecuación A-19.

$$P_{s(AWGN, M-PSK)} = \operatorname{erfc} \left( \sin \left( \frac{\pi}{M} \right) \sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \right), \quad \text{para } M \geq 4 \quad (\text{A-19})$$

### Probabilidad de error para M-QAM en un canal AWGN

En el esquema de Modulación de Amplitud en Cuadratura (QAM, *Quadrature Amplitude Modulation*) la información digital está contenida tanto en la amplitud como en la fase de la señal modulada. Una señal QAM M-aria está dada por la ecuación A-20.

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{T}} a_i \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2E_0}{T}} b_i \sin(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{A-20})$$

Donde  $T$  es el periodo del símbolo,  $E_0$  es la energía de la señal con la amplitud mas baja,  $a_i$  y  $b_i$  son enteros, los cuales varían según el orden de modulación e  $i = 1, 2, \dots, M$ .

La probabilidad de error de bit para M-QAM en un canal AWGN está dada por la ecuación A-21.

$$P_{b(AWGN, M-QAM)} = \frac{2}{\log_2 M} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\log_2 M} \frac{E_b}{N_0} k \right) \quad (\text{A-21})$$

Y la probabilidad de error de símbolo está dada por la ecuación A-22.

$$P_{s(AWGN, M-QAM)} = 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_s}{N_0}} k \right) \quad (\text{A-22})$$

Donde  $k = \frac{3}{2(M-1)}$  es el factor normalizador de modulación para M-QAM.

Las modulaciones escogidas para desarrollar este trabajo de grado son 4QAM, 8PSK y 16QAM, cuyas probabilidades de error de bit en un canal AWGN se muestran en la Figura A.3.

### Probabilidad promedio de error en un canal Rayleigh

Por definición la probabilidad promedio de error en la transmisión de datos binarios por un canal de desvanecimiento Rayleigh está dada por la ecuación A-23.

$$\bar{P}_e(\text{Rayleigh}) = \int_0^\infty P_e(\gamma|\gamma = \gamma_s) f_\gamma(\gamma_s) d\gamma_s \quad (\text{A-23})$$

Donde  $P_e(\gamma|\gamma = \gamma_s)$  es la probabilidad de error en un canal AWGN, y  $f_\gamma(\gamma_s)$  la *fdp* de una distribución exponencial, con  $\lambda = \frac{1}{\gamma_0}$ , dada por la ecuación A-24.

$$f_\gamma(\gamma_s) = \frac{1}{\gamma_0} \exp\left(-\frac{\gamma_s}{\gamma_0}\right) \quad \text{siempre y cuando } \gamma_s > 0 \quad (\text{A-24})$$

Y  $\gamma_0$  es la relación de potencia de señal a ruido dada por la ecuación A-25.

$$\gamma_0 = \frac{S}{N} = n \frac{E_b}{N_0} \quad (\text{A-25})$$

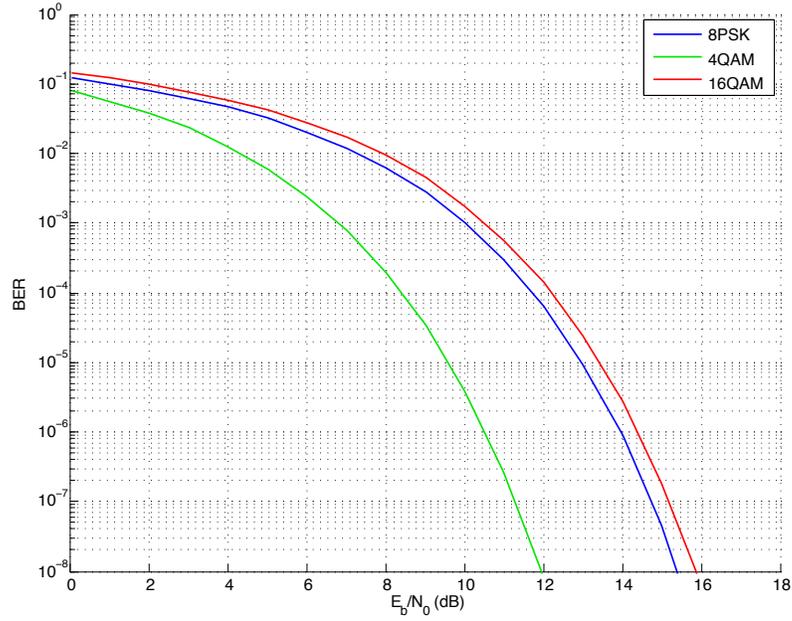


Figura A.3: Comparación del desempeño de las modulaciones 4QAM, 8PSK y 16QAM en un canal AWGN.

#### Probabilidad promedio de error para M-PSK en un canal Rayleigh

La probabilidad promedio de error de bit para M-PSK en un canal Rayleigh está dada por la ecuación A-26.

$$\bar{P}_{b(Rayleigh, M-PSK)} = \frac{2}{\log_2 M} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right) \log_2 M \left( \frac{E_b}{N_0} \right)}}} \right) \quad (\text{A-26})$$

#### Probabilidad promedio de error para M-QAM en un canal Rayleigh

La probabilidad promedio de error de bit para M-QAM en un canal Rayleigh está dada por la ecuación A-27.

$$\bar{P}_{b(Rayleigh, M-QAM)} = \frac{2}{\log_2 M} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\frac{3 \log_2 M}{2(M-1)} \left( \frac{E_b}{N_0} \right)}}} \right) \quad (\text{A-27})$$

Las probabilidades de error de bit para 4QAM, 8PSK y 16QAM en un canal Rayleigh se muestran en la Figura A.4.

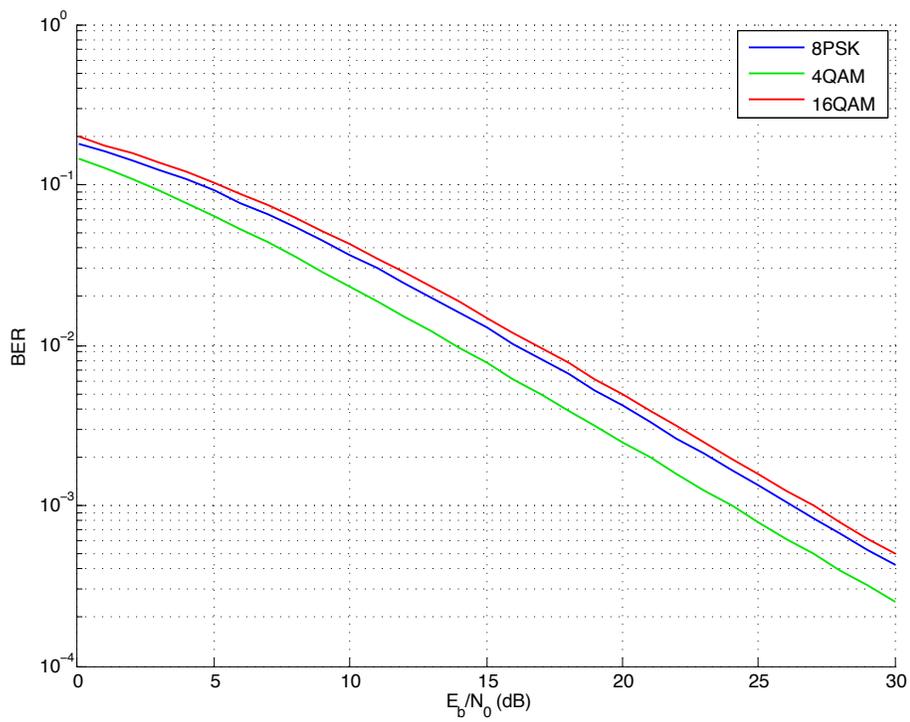


Figura A.4: Comparación del desempeño de las modulaciones 4QAM, 8PSK y 16QAM en un canal de desvanecimiento Rayleigh

## ANEXO B

### DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Una distribución de probabilidad es una distribución teórica que describe la variación de los valores de una variable aleatoria. Existen diferentes tipos de modelos que permiten describir el comportamiento de fenómenos estadísticos, los cuales se pueden clasificar en distribuciones discretas y continuas. En este trabajo de grado son de interés las siguientes distribuciones de probabilidad continuas:

- Distribución exponencial.
- Distribución normal o gaussiana.
- Distribución Rayleigh.

#### Distribución exponencial

La variable aleatoria  $T$  mide el tiempo ' $t$ ' que transcurre hasta que se presenta un suceso o el tiempo que transcurre entre dos sucesos. Su función de distribución acumulativa está dada por la ecuación B-1.

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\text{B-1})$$

Y su función de densidad de probabilidad ( $f_{dp}$ ), está dada por la ecuación B-2.

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\text{B-2})$$

La cual, para  $\lambda = 1$ , es como se muestra en la Figura B.1. Por propiedades, el valor esperado, media o esperanza  $E(T)$  y la varianza  $var(T)$  de una distribución exponencial están dados por las ecuaciones B-3 y B-4 respectivamente.

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{B-3})$$

$$var(T) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (\text{B-4})$$

#### Distribución normal o gaussiana

Este tipo de distribución se usa para modelar canales de comunicaciones con presencia de ruido, ya sea térmico, blanco o gaussiano blanco aditivo (AWGN). Su  $f_{dp}$  está dada por la ecuación B-5.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \quad (\text{B-5})$$

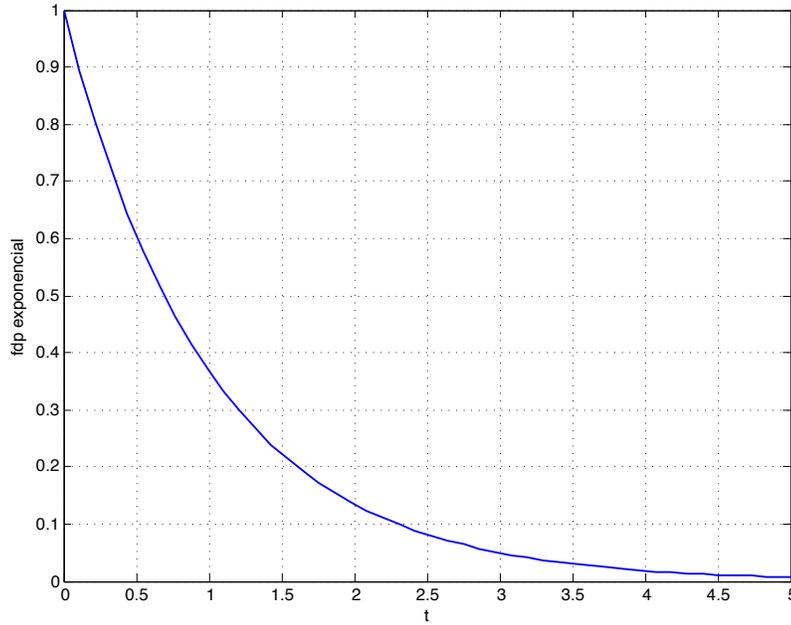


Figura B.1: Pdf exponencial

La cual, para  $\sigma = 1$  y  $\mu_x$ , es como se muestra en la Figura B.2. La media y la varianza están dadas por las ecuaciones B-6 y B-7 respectivamente.

$$E(X) = \mu_x \quad (\text{B-6})$$

$$\text{var}(X) = \sigma_x^2 \quad (\text{B-7})$$

Con el objetivo de normalizar una distribución gaussiana, esta se puede someter a un cambio de variable, para ello  $z$  está dada por la ecuación B-8.

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \quad (\text{B-8})$$

Cuya distribución normal corresponde a la denominada *distribución normal estándar*, dada por la ecuación B-9.

$$z \sim \mathcal{CN}(0, 1) \quad (\text{B-9})$$

Donde  $x$  es una variable aleatoria con distribución normal dada por la ecuación B-10.

$$x \sim \mathcal{CN}(\mu_x, \sigma_x^2) \quad (\text{B-10})$$

## Distribución Rayleigh

La distribución se aplica a una variable continua positiva no limitada. Su función de distribución está dada por la ecuación B-11.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{b}\right\} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases} \quad (\text{B-11})$$

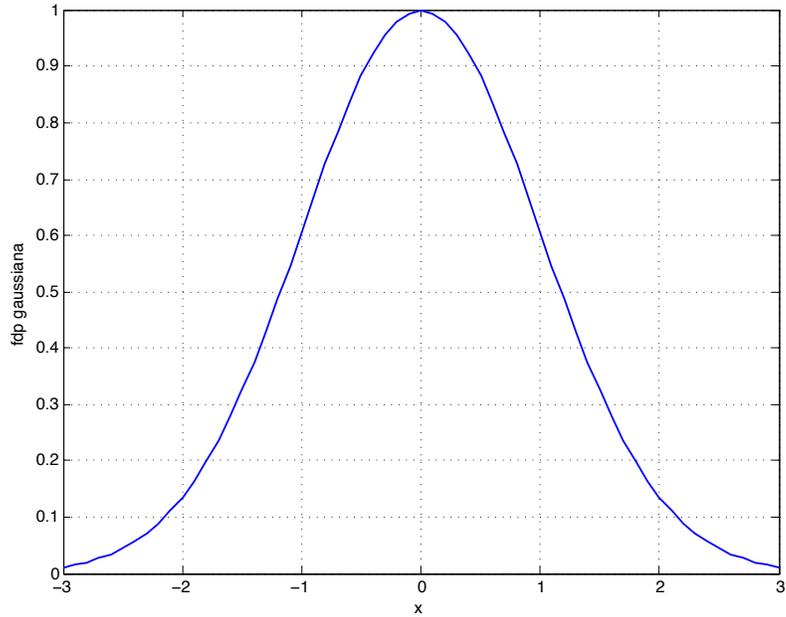


Figura B.2: Pdf gaussiana

Y su *fdp* está dada por la ecuación B-12.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{b}(x - a) \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{b} \right\} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases} \quad (\text{B-12})$$

La cual, para  $a = 0$  y  $b = 1$  es como se muestra en la Figura B.3. Por propiedades, la media y la varianza de una distribución Rayleigh están dadas por las ecuaciones B-13 y B-14 respectivamente.

$$E(X) = a + \frac{\sqrt{\pi b}}{2} \quad (\text{B-13})$$

$$\text{var}(X) = b \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{2} \sqrt{\pi b} a \quad (\text{B-14})$$

Para el caso particular tenemos que  $a = 0$  y  $b = 2\sigma_x^2$ , por lo tanto la media y la varianza están dadas por las ecuaciones B-15 y B-16 respectivamente.

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x \quad (\text{B-15})$$

$$\text{var}(X) = \frac{4 - \pi}{2} \sigma_x^2 \quad (\text{B-16})$$

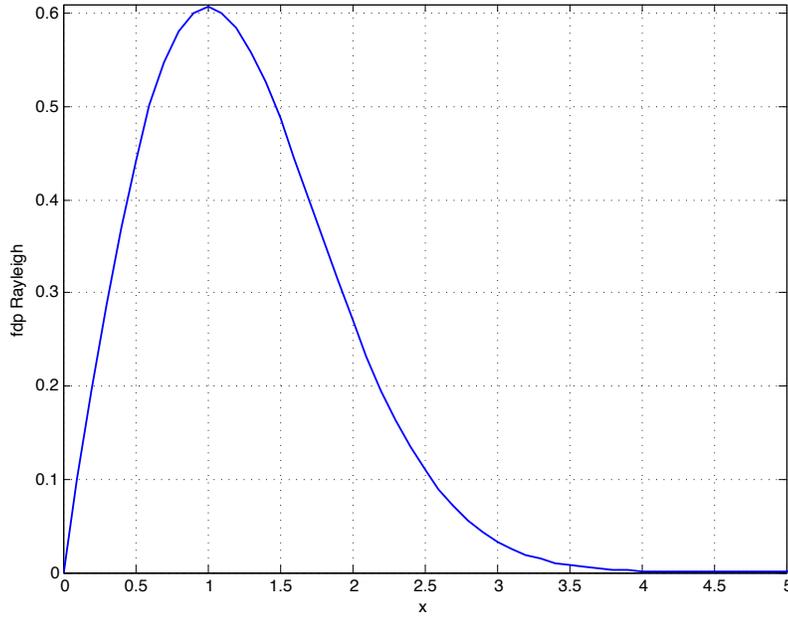


Figura B.3: Pdf Rayleigh

Y sus funciones de distribución acumulativa y de densidad de probabilidad dadas por las ecuaciones B-17 y B-18 respectivamente.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right\} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (\text{B-17})$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_x^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right\} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (\text{B-18})$$

La distribución de Rayleigh está ligada a la distribución gaussiana del modo siguiente. Dada una distribución gaussiana bidimensional con dos variables independientes  $x$  e  $y$  de media cero y con la misma desviación típica  $\sigma$ , la variable aleatoria está dada por la ecuación B-19.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{B-19})$$

La cual tiene una distribución de Rayleigh, y el valor más probable de  $r$  es igual a  $\sigma$ . Como  $r$  representa la longitud de un vector que une un punto de una distribución gaussiana bidimensional con el centro de esta distribución, se puede deducir que la distribución de Rayleigh representa la distribución de la longitud de un vector que sería la suma de un gran número de vectores de menor amplitud y cuyas fases tienen una distribución uniforme. En particular, la distribución de Rayleigh se produce en los fenómenos de dispersión.

## ANEXO C

### NORMAS DE VECTORES Y MATRICES

#### Norma euclidea de un vector

Sea  $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^n$ , con producto interno  $\langle, \rangle$ , su norma es un número real no negativo denotado por  $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_2$  y dado por la ecuación C-1.

$$\|\tilde{\mathbf{v}}\|_2 = \sqrt{\langle \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{v}}_i \tilde{\mathbf{v}}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{v}}_i^2} \quad (\text{C-1})$$

#### Norma de Frobenius de una Matriz

Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , entonces la *norma de Frobenius* de la matriz  $\mathbf{A}$  está dada por la ecuación C-2.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{F}} &= \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \sum_{i=1}^m \|a_{i,*}\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \|a_{*,j}\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})} \end{aligned} \quad (\text{C-2})$$

Es decir, la norma de Frobenius de una matriz  $\mathbf{A}$ , es igual a la raíz cuadrada de la traza del producto de la matriz conjugada transpuesta por la matriz  $\mathbf{A}$ .

## INVERSA GENERALIZADA DE MATRICES

### Seudoinversa de Moore-Penrose

El concepto de inversa generalizada, también llamada *seudoinversa*, tiene sus principios en la teoría de ecuaciones lineales simultáneas (sistemas de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas). Aquí se considera un caso de la inversa generalizada, la seudoinversa de Moore-Penrose.

Sea la solución de un conjunto de ecuaciones lineales dada por la ecuación C-3.

$$\mathbf{A}\vec{y} = \vec{b} \quad (\text{C-3})$$

Donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  con rango  $r \leq \min(m, n)$ ,  $\vec{y} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  y  $\vec{b} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ . Si  $m = n = r$ , el sistema dado por la ecuación C-3 tiene solución única dada por la ecuación C-4.

$$\vec{y} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} \quad (\text{C-4})$$

Sin embargo, cuando  $\mathbf{A}$  es una matriz rectangular o singular, una representación simple de una solución en términos de  $\mathbf{A}$  es más difícil.

La seudoinversa de Moore-Penrose muestra que hay una solución general, dada por la ecuación C-5.

$$\vec{y} = \mathbf{A}^\dagger \vec{b} \quad (\text{C-5})$$

La Matriz  $\mathbf{A}^\dagger$  es la seudoinversa de Moore-Penrouse y es la única matriz que satisface las ecuaciones C-6, C-7, C-8 y C-9:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (\text{C-6})$$

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger \quad (\text{C-7})$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \quad (\text{C-8})$$

$$(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} \quad (\text{C-9})$$

Cuando  $\mathbf{A}$  es de rango completo, la seudoinversa de Moore-Penrouse puede ser calculada directamente por las ecuaciones C-10, C-11 y C-12.

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1} \quad \text{Cuando } m = n \quad (\text{C-10})$$

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1} \quad \text{Cuando } m < n \quad (\text{C-11})$$

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H \quad \text{Cuando } m > n \quad (\text{C-12})$$

Sin embargo, cuando  $\mathbf{A}$  no es de rango completo, las formulas anteriores no pueden ser utilizadas. Para el caso más general, la seudoinversa se calcula de mejor manera utilizando *Descomposición en Valores Singulares*.

## DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES (SVD)

La Descomposición en Valores Singulares (SVD, *Singular Value Decomposition*) es una de las descomposiciones más importantes de una matriz. El *Teorema 1* permite una mejor comprensión de ésta.

**Teorema 1** Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  es una matriz de rango  $r$ , entonces existen números reales  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$  y bases ortonormales  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{C}^n$  y  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  de  $\mathbb{C}^m$ , tales que

$$\mathbf{A}v_i = \sigma_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{C-13})$$

$$\mathbf{A}v_i = 0, \quad i = r + 1, \dots, n \quad (\text{C-14})$$

$$\mathbf{A}^H u_i = \sigma_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{C-15})$$

$$\mathbf{A}^H u_i = 0, \quad i = r + 1, \dots, m \quad (\text{C-16})$$

Donde  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  son vectores propios de  $A^H A$ ,  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  son vectores propios de  $AA^H$  y  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$  son los valores propios no nulos de  $A^H A$  y  $AA^H$ .

Sean  $m, n$  enteros positivos,  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  una matriz de rango  $r$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  matrices cuyas columnas son los vectores  $v_i$  y  $u_i$ , respectivamente. De acuerdo con lo descrito en el *Teorema 1*, el producto de las matrices  $\mathbf{AV} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  se puede expresar en términos de sus columnas, dado por la ecuación C-17.

$$\begin{aligned} \mathbf{AV} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}v_1 & \mathbf{A}v_2 & \dots & \mathbf{A}v_r & \mathbf{A}v_{r+1} & \dots & \mathbf{A}v_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 u_1 & \sigma_2 u_2 & \dots & \sigma_r u_r & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C-17})$$

Con  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ . La matriz diagonal de valores singulares  $\mathbf{\Sigma}$  está dada por la ecuación C-18.

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad (\text{C-18})$$

Luego, la matriz  $\mathbf{AV}$  es el producto de las matrices  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{\Sigma}$ . Es decir,  $\mathbf{AV} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}$ . Siendo  $\mathbf{V}$  una matriz ortogonal, la matriz  $\mathbf{A}$  está dada por la ecuación C-19.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (\text{C-19})$$

Los elementos diagonales de la matriz  $\mathbf{\Sigma}(\sigma_i)$  se conocen como los valores singulares de  $\mathbf{A}$ , las columnas de  $\mathbf{U}$  son los vectores singulares izquierdos, las columnas de  $\mathbf{V}$  los vectores singulares derechos y la factorización dada por la ecuación C-19, es la denominada SVD de  $\mathbf{A}$ .

Se observa que la descomposición en valores singulares de una matriz  $\mathbf{A}$  siempre es posible. Además, se puede afirmar que cada matriz es diagonalizable si se usan las bases apropiadas para los espacios dominio e imagen de la transformación lineal que dicha matriz representa. Estos hechos se formalizan en el *Teorema 2*, el cual es una reformulación matricial del *Teorema 1*.

**Teorema 2** *Dada una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  de rango  $r$ , existen matrices ortogonales  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  y  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  dada por la ecuación C-20.*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (\text{C-20})$$

$\mathbf{\Sigma}$  es la matriz diagonal dada por la ecuación C-18, donde  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ . Las columnas de  $\mathbf{U}$  son los vectores propios de  $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$  y las de  $\mathbf{V}$  son los vectores propios de  $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ . Los  $r$  valores no nulos de la diagonal de  $\mathbf{\Sigma}$ , es decir los valores singulares de  $\mathbf{A}$ , son las raíces cuadradas positivas de los valores propios de  $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$  y  $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ .

En efecto, cuando  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$  y  $\mathbf{V}$  son calculadas, el rango de  $\mathbf{A}$  es igual al número de valores singulares no nulos. Asumiendo nuevamente que el rango de  $\mathbf{A}$  es  $r \triangleq \min(n, m)$ , las primeras  $r$  columnas de  $\mathbf{U}$  son una base ortonormal del espacio rango de  $\mathbf{A}$  y las últimas  $(n - r)$  columnas de  $\mathbf{V}$  son una base ortonormal del espacio nulo de  $\mathbf{A}$ .

En el caso de  $r=n$ , la SVD dada por la ecuación C-19 también se puede expresar como la ecuación C-21.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \\ &= \underbrace{[\mathbf{U}_r \quad \mathbf{U}_{m-r}]}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_r \\ \mathbf{0}_{m-r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{V}^H \\ &= \mathbf{U}_r \mathbf{\Sigma}_r \mathbf{V}^H \end{aligned} \quad (\text{C-21})$$

Donde  $\mathbf{U}_r \in \mathbb{C}^{m \times r}$  se compone de los  $r$  vectores singulares izquierdos, correspondientes a los máximos posibles valores singulares no nulos y  $\mathbf{\Sigma}_r \in \mathbb{C}^{r \times r}$  es ahora una matriz cuadrada. Dado que los  $r$  vectores singulares de  $\mathbf{U}_r$  son de longitud  $m$ , siempre existen  $(m - r)$  vectores singulares tal que  $[\mathbf{U}_r \quad \mathbf{U}_{m-r}]$  es una matriz unitaria.

En caso de que  $r = m$ , la SVD dada por la ecuación C-19 se puede expresar como la ecuación C-22.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{U} \underbrace{[\boldsymbol{\Sigma}_r \ \mathbf{0}_{n-r}]}_{\boldsymbol{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{V}_r^H \\ \mathbf{V}_{n-r}^H \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^H} \\ &= \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}_r \mathbf{V}_r^H \end{aligned} \tag{C-22}$$

Donde  $\mathbf{V}_r \in \mathbb{C}^{n \times r}$  se compone de  $r$  vectores singulares.



## ANEXO D

### ANCHO DE BANDA Y RUIDO

La desviación estándar de ruido AWGN  $\sigma_n$ , presente en cada subcanal del canal MU-MIMO en enlace de bajada, influye en el desempeño del sistema. Para encontrar una expresión matemática que modele la desviación estándar de ruido AWGN, son necesarios los siguientes conceptos básicos, que relacionan la potencia de la señal con la potencia de ruido.

*Número de bits por símbolo:* Cada esquema de modulación representa los símbolos mediante un determinado número de bits, de acuerdo al orden de modulación escogido. El número de bits por símbolo está dado por la ecuación D-1.

$$n = \log_2(M) \quad (\text{D-1})$$

Donde M corresponde al orden de modulación.

*Duración de bit y de símbolo:* El período de cada bit es  $T_b$ . Consecuentemente, el período de símbolo está dado por la ecuación D-2.

$$T_s = n \cdot T_b \quad (\text{D-2})$$

*Energía de símbolo:* Sea  $E_s$  la energía de símbolo y  $E_b$  la energía de bit, entonces la energía de símbolo está dada por la ecuación D-3.

$$E_s = E_b \cdot n \cdot R_c \quad (\text{D-3})$$

Donde  $R_c$  es la tasa de codificación, que en este trabajo de grado se ha asumido como 1, ya que el objetivo es estudiar el desempeño de la precodificación y no de la codificación.

*Energía de bit a densidad espectral de potencia de ruido:* Sea  $N_o$  la densidad espectral de potencia de ruido, entonces  $\frac{E_b}{N_o}$  representa la relación de energía de bit a densidad espectral de potencia de ruido.

*Energía de símbolo a densidad espectral de potencia de ruido:* La relación  $\frac{E_s}{N_o}$  representa la tasa de energía de símbolo a potencia de ruido.

*Ancho de banda de una señal:* De acuerdo a la transformada de Fourier el ancho de banda completo de la señal está dado por la ecuación D-4.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\tau} \\ &= \frac{1}{T_s} \end{aligned} \quad (\text{D-4})$$

Donde  $B$  es el ancho de banda en banda base y  $T_s$  es el periodo de símbolo.

Por definición

$$T_b = \frac{1}{R_b} \quad \text{y} \quad T_s = \frac{1}{R_s} \quad (\text{D-5})$$

Donde  $R_b$  es la velocidad de transmisión de bits y  $R_s$  es la velocidad de transmisión de símbolos. Entonces  $R_b$  está dada por la ecuación D-6.

$$\begin{aligned} R_b &= nR_s \\ &= n \frac{1}{T_s} \\ &= nB \end{aligned} \quad (\text{D-6})$$

Lo que significa que el ancho de banda es equivalente a la velocidad de transmisión de bits por la eficiencia espectral, dado por la ecuación D-7.

$$B = \frac{R_b}{n} \quad (\text{D-7})$$

En modulaciones M-arias la velocidad de transmisión  $R_b$  y el ancho de banda  $B$  se relacionan mediante la ecuación D-8.

$$B_{M-PSK} = B_{M-QAM} = \frac{R_b \cdot (1 + \alpha)}{\log_2(M)} \quad (\text{D-8})$$

Donde el factor de roll-off  $\alpha$  es el parámetro característico del filtro conformador de pulsos, que en este caso toma un valor de 0, lo cual confirma el resultado dado por la ecuación D-7.

*Relación de potencia señal a potencia de ruido:* Sea  $S$  la potencia de la señal de información y  $N$  la potencia de ruido, entonces la Relación de Potencia de Señal a Potencia de Ruido (SNR, *Signal to Noise Ratio*), está dada por la ecuación D-9.

$$\frac{S}{N} = \frac{Eb R_b}{N_o B} \quad (\text{D-9})$$

*Desviación estándar de ruido gaussiano:* El canal de ruido AWGN se ve afectado por  $\sigma$  asociada a la relación de energía de bit a densidad espectral de potencia de ruido establecida.  $\sigma$  corresponde a la desviación estándar de ruido AWGN, dada por la ecuación D-10.

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{N_o}{2}} \quad (\text{D-10})$$

Inicialmente el canal de ruido se define a partir de un canal de ruido blanco, caracterizado por una distribución normal estándar  $W \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ , de manera que para convertir dicho canal en un canal de ruido AWGN  $\sim \mathcal{CN}(0, \frac{N_0}{2})$ , es necesario realizar un cambio de variable dado por la ecuación D-11.

$$W = \frac{N - \mu_n}{\sigma_n} \quad (\text{D-11})$$

Donde  $\mu_n = 0$  es la media de ruido  $N$ , el cual está dado por la ecuación D-12.

$$N = \sigma_n W \quad (\text{D-12})$$

De la ecuación D-3, dividiendo por la potencia de ruido a ambos lados, la relación de energía de símbolo a densidad espectral de potencia de ruido está dada por la ecuación D-13.

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{E_b}{N_0} n R_c \quad (\text{D-13})$$

Donde  $R_c$  es la tasa de codificación. Normalizando  $E_s$  a 1, entonces la varianza está dada por la ecuación D-14.

$$\frac{N_0}{2} = \frac{1}{2 \frac{E_b}{N_0} n R_c} \quad (\text{D-14})$$

De la cual se obtiene la ecuación D-15

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{E_b}{N_0} n R_c}, \quad (\text{D-15})$$

La ecuación D-15 corresponde a la desviación estándar de ruido AWGN.