ANEXO A. Cálculo de la Probabilidad de Error en un Sistema Binario:

La señal a la entrada del muestreador del receptor está dada por:

$$y(t) = \tilde{s}(t) + n(t), \tag{A.1}$$

donde $\tilde{s}(t)$ es el equivalente banda base de la señal de información después de su paso por el canal y $n(t)$ es el ruido filtrado banda base.

La regla de decisión está dada por la ecuación (A.3), basada en las muestras de la señal en los instantes óptimos de muestreo de la ecuación (A.2), en ésta se asume que los símbolos son equiprobables e independientes.

$$y(kT) = \tilde{s}(kT) + n(kT), \tag{A.2}$$

$$d_k = \begin{cases} 1, & y(kT) > 0 \\ 0, & y(kT) < 0. \end{cases} \tag{A.3}$$

Para calcular la probabilidad de error se establecen los siguientes eventos:

E: Error de transmisión.

S_1: Enviar un uno (1).

S_0: Enviar un cero (0).

R_1: Recibir un uno (1).

R_0: Recibir un cero (0).

Así: *Un error ocurre cuando se envía un 1 y se recibe un 0, ó cuando se envía un 0 y se recibe un 1.*

$$\begin{aligned} E &= \left(S_1 \cap R_1^{\,C}\right) \cup \left(S_1^{\,C} \cap R_1\right) \\ P(E) &= Pe = P\left(\left(S_1 \cap R_1^{\,C}\right) \cup \left(S_1^{\,C} \cap R_1\right)\right) \\ Pe &= P\left(\left(S_1 \cap R_0\right) \cup \left(S_0 \cap R_1\right)\right) \\ Pe &= P(S_1)P(R_0|S_1) + P(S_0)P(R_1|S_0), \end{aligned}$$

$$Pe = \frac{1}{2}P(R_0|S_1) + \frac{1}{2}P(R_1|S_0), \tag{A.4}$$

Para determinar esta probabilidad de error, se deben calcular las probabilidades condicionales $P(R_0|S_1)$ y $P(R_1|S_0)$, las cuales se obtienen de la siguiente forma:

$$P(R_0|S_1) = P(d_k = 0 \mid \tilde{s}(kT) = A)$$
$$P(R_0|S_1) = P(y(kT) < 0 \mid \tilde{s}(kT) = A)$$
$$P(R_0|S_1) = P(\tilde{s}(kT) + n(kT) < 0 \mid \tilde{s}(kT) = A)$$
$$P(R_0|S_1) = P(A + n(kT) < 0),$$

donde $n(kT)$ tiene distribución gaussiana con media cero y varianza N_0B, y B es el ancho de banda equivalente del efecto combinado de los filtros pasa banda y pasa bajo. El término $A+n(kT)$ tiene distribución gaussiana con media A y varianza N_0B. De esta forma, la probabilidad condicional $P(R_0|S_1)$ viene dada por:

$$P(R_0|S_1) = P(A + n(kT) < 0) = \int_{-\infty}^{0} f_{A+n(kT)}(\lambda) d\lambda,$$

donde,

$$f_{A+n(kT)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_o B}} \cdot \exp\left[-\frac{(\lambda - A)^2}{2(N_o B)}\right], \text{ con } -\infty < \lambda < \infty,$$

es la función *densidad condicional de probabilidad* del evento: *recibir un 0 cuando se envió un 1*. Así, $P(R_0|S_1)$ viene dado por:

$$P(R_0|S_1) = P(A + n(kT) < 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_o B}} \cdot \int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{(\lambda - A)^2}{2(N_o B)}\right] d\lambda.$$

Con la sustitución:

$$v = -\frac{(\lambda - A)}{\sqrt{2N_o B}},$$
$$dv = \frac{d\lambda}{\sqrt{2N_o B}},$$

se tiene,

$$P(R_0|S_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{A}{\sqrt{2N_o B}}}^{\infty} \exp(-v^2) dv.$$

Teniendo en cuenta que la función complementaria de error es:

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} \exp(-u^2) du,$$

entonces,

$$P(R_0|S_1) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{2N_oB}}\right). \tag{A.5}$$

Así mismo, la probabilidad condicional $P(R_1|S_0)$ está dada por:

$$\begin{aligned}
P(R_1|S_0) &= P(d_k = 1 \mid \tilde{s}(kT) = -A) \\
P(R_1|S_0) &= P(y(kT) > 0 \mid \tilde{s}(kT) = -A) \\
P(R_1|S_0) &= P(\tilde{s}(kT) + n(kT) > 0 \mid \tilde{s}(kT) = -A) \\
P(R_1|S_0) &= P(-A + n(kT) > 0),
\end{aligned}$$

donde *-A+n*(*kT*) tiene distribución gaussiana con media *–A* y varianza N_0B, por tanto:

$$P(R_1|S_0) = P(-A + n(kT) > 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_oB}} \cdot \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(\lambda + A)^2}{2(N_oB)}\right] d\lambda.$$

Haciendo la sustitución:

$$w = \frac{\lambda + A}{\sqrt{2N_oB}},$$

$$dw = \frac{d\lambda}{\sqrt{2N_oB}},$$

se tiene,

$$P(R_1|S_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{A}{\sqrt{2N_oB}}}^{\infty} \exp(-w^2) dw,$$

lo cual conduce a:

$$P(R_0|S_1) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{2N_oB}}\right). \tag{A.6}$$

Por lo tanto, al sustituir los resultados de (A1.5) y (A1.6) en la ecuación (A1.4) se tiene:

$$Pe = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{2N_oB}}\right). \tag{A.7}$$