

# CONTROL NO LINEAL DE UN ROBOT MANIPULADOR

ELENA MUÑOZ ESPAÑA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES  
GRUPO EN AUTOMÁTICA INDUSTRIAL  
LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: CONTROL Y ROBÓTICA  
POPAYÁN, 2009



# **Control no Lineal de un Robot Manipulador**

Elena Muñoz España

Monografía presentada como requisito parcial para optar al título de  
Magíster en Electrónica y Telecomunicaciones

Director:  
Dr. Carlos Alberto Gaviria López

Universidad del Cauca  
Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones  
Grupo en Automática Industrial  
Línea de Investigación: Control y Robótica  
Popayán, 2009



A la memoria de mi padre y al  
amor y vida de mi madre



## **Agradecimientos**

A mi tutor Carlos Alberto Gaviria López por su extraordinaria ayuda, aliento y amistad durante todo el desarrollo del trabajo.

A mis amigos Juan Fernando y Cris por todo lo compartido en esta etapa de nuestras vidas.

A mis profesores Carlos Gaviria, Andrés Vivas y Carlos Rengifo de quienes aprendí mucho durante los cursos de la maestría.

A la fuerza infinita que habita en mí ser, la cual me guía y acompaña mis días.





## Resumen

El tema de trabajo de esta tesis es el desarrollo de esquemas de control no lineal para el seguimiento de trayectorias de robots manipuladores, enfocándose en particular sobre el control por modos deslizantes.

En el presente trabajo se comprueba el desempeño de la técnica de control por modos deslizantes terminal, encontrando que su respuesta ante incertidumbres y disturbios externos es muy buena. Esta técnica de control, al igual que las demás técnicas de control de robots manipuladores, requieren de la medición de las posiciones y velocidades articulares. Por lo anterior en el presente trabajo se considero como tema de investigación el desarrollo de un observador por modos deslizantes terminal utilizando el esquema de control por realimentación dinámica de la salida, que permitiese mantener las ventajas de esta técnica y que adicionalmente no requiera de las mediciones de velocidad.

Con el fin de ilustrar estos conceptos se aplican al caso concreto del control de un robot manipulador plano de dos grados de libertad, los resultados de las simulaciones prueban el desempeño del sistema sujeto a disturbios e incertidumbres en el modelado.

**Palabras Clave:** Control no lineal, Control por modos deslizantes, Observadores, Robot Manipulador



# Tabla de Contenido

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2. ANTECEDENTES</b>	<b>5</b>
2.1 Control no lineal de robots manipuladores	5
2.2 Observadores en robótica	7
<b>3. MODELADO DE UN ROBOT MANIPULADOR</b>	<b>11</b>
3.1 Descripción y modelado de un robot manipulador	11
3.2 Modelo dinámico del manipulador plano de dos grados de libertad	15
3.3 Resumen	18
<b>4. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES</b>	<b>19</b>
4.1 Introducción	19
4.2 Superficie de deslizamiento y condición de deslizamiento	21
4.3 Diseño del control por modos deslizantes	24
4.4 Control por modos deslizantes de un robot manipulador	27
4.5 Resumen	37
<b>5. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES TERMINAL</b>	<b>39</b>
5.1 Atractores terminales	39

5.2	Concepto de modos deslizantes terminal	41
5.3	Diseño del control por modos deslizantes terminal	44
5.4	Variantes del control por modos deslizantes terminal	48
5.5	Control por modos deslizantes terminal de un robot manipulador	50
5.6	Resumen	58
<b>6.</b>	<b>REALIMENTACIÓN DINÁMICA DE LA SALIDA UTILIZANDO MODOS DESLIZANTES TERMINAL</b>	<b>61</b>
6.1	Introducción	61
6.2	Estabilización de sistemas no lineales por realimentación de salida	65
6.3	Regulación por realimentación dinámica de la salida de un robot manipulador	69
6.4	Comparación de resultados	82
6.5	Resumen	84
<b>7.</b>	<b>CONCLUSIONES Y FUTUROS TRABAJOS</b>	<b>85</b>
	<b>REFERENCIAS</b>	<b>87</b>
	<b>ANEXO 1.</b> Control PID multivariable de un robot manipulador	95
	<b>ANEXO 2.</b> Control por par calculado de un robot manipulador	109

## Lista de Figuras

Figura 3.1	Manipulador plano de dos grados de libertad.....	16
Figura 3.2	Trayectorias deseadas .....	17
Figura 3.3	Disturbio aplicado al par .....	18
Figura 4.1	Señal de control de estructura variable.....	20
Figura 4.2	a) Superficie de deslizamiento. b) Efecto del <i>chattering</i> sobre la superficie de deslizamiento $S=0$ . .....	20
Figura 4.3	Tiempo de alcanzabilidad finito y convergencia exponencial del error. ....	23
Figura 4.4	a) Capa de frontera. b) Interpolación de la señal de control en la capa de frontera.....	26
Figura 4.5	Cálculo del error de régimen permanente .....	26
Figura 4.6	Control equivalente.....	30
Figura 4.7	Implementación en <i>Simulink</i> del control por modos deslizantes .....	31
Figura 4.8	Control por modos deslizantes .....	32
Figura 4.9	Control discontinuo .....	33
Figura 4.10	Control por modos deslizantes con capa de frontera .....	34
Figura 4.11	Control por modos deslizantes con capa de frontera e incertidumbres en las masas del modelo. ....	35
Figura 4.12	Control por modos deslizantes con capa de frontera y simulación de la manipulación de un objeto. ....	35

Figura 4.13	Control por modos deslizantes con capa de frontera y disturbios externos .....	36
Figura 5.1	a) Convergencia exponencial del atractor regular. b) Convergencia en tiempo finito del atractor terminal.....	41
Figura 5.2	Comparación superficie de deslizamiento convencional y terminal.....	42
Figura 5.3	Tiempo de alcanzabilidad y convergencia del error en tiempo finito.....	43
Figura 5.4	Tiempo de alcanzabilidad de la superficie de deslizamiento .....	50
Figura 5.5	Comparación de las leyes de alcanzabilidad.....	50
Figura 5.6	Control por modos deslizantes terminal.....	55
Figura 5.7	Control por modos deslizantes terminal con incertidumbres en las masas.....	56
Figura 5.8	Control por modos deslizantes terminal, simulación de la tarea de manipulación de un objeto.....	57
Figura 5.9	Control por modos deslizantes terminal con disturbios externos .....	58
Figura 6.1	Diagrama de la estimación del estado mediante un observador .....	63
Figura 6.2	Control por realimentación dinámica de la salida con $P=[-4,-4]$ .....	76
Figura 6.3	Control por realimentación dinámica de la salida con $P=[-8,-8]$ .....	77
Figura 6.4	Control por realimentación dinámica de la salida.....	79
Figura 6.5	Control por realimentación dinámica de la salida con incertidumbres en las masas del modelo.....	80
Figura 6.6	Control por realimentación dinámica de la salida simulando la manipulación de un objeto.....	81
Figura 6.7	Control por realimentación dinámica de la salida con disturbios externos .....	82

# Nomenclatura

Transpuesta de la matriz o vector  $\mathbf{M}$ .

Matriz  $\mathbf{M}$  definida positiva.

Norma Euclidiana de la matriz  $\mathbf{M}$ .

Matriz identidad de dimensión apropiada.

El conjunto de los números reales.

El mínimo autovalor de la matriz  $\mathbf{M}$ .

El máximo autovalor de la matriz  $\mathbf{M}$ .

Matriz diagonal con  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  como los elementos diagonales





# 1. Introducción

El control de seguimiento de trayectorias de manipuladores industriales ha sido considerado un reto desde hace varias décadas, ya que el modelo dinámico de un robot manipulador es representado por sistemas de ecuaciones no lineales y fuertemente acopladas. Adicionalmente, en el problema del control de un manipulador se puede enfrentar a incertidumbres en los parámetros inerciales del manipulador que dependen de la carga útil la cual a menudo es desconocida y variable, la fricción y otros parámetros dinámicos en el manipulador que pueden ser inciertos debido a su dificultad para ser modelados y medidos con precisión. Como respuesta a estos inconvenientes se han desarrollado diferentes estrategias de control, entre ellas, el control por modos deslizantes el cual es uno de los enfoques más importantes para el tratamiento de sistemas con incertidumbres y disturbios externos limitados.

El control por modos deslizantes consiste en llevar al sistema a vivir en una superficie sobre el espacio de estado, denominada superficie de deslizamiento, y una vez en ella mantenerlo allí ante posibles perturbaciones externas. Así la dinámica del sistema en lazo cerrado está determinada sólo por la superficie de deslizamiento. El diseño del control por modos deslizante garantiza que el estado del sistema alcanza la superficie de deslizamiento en un tiempo finito, y que la convergencia del estado del sistema al punto de equilibrio es asintótica. A fin de tener en cuenta las incertidumbres, el control también consta de una parte discontinua, lo anterior genera el efecto indeseable conocido como *chattering*, el cual puede ser suavizado utilizando una capa de frontera, es decir, reemplazando la función discontinua por la función saturación, con la cual se logra reducir el efecto del *chattering* pero genera un error finito de régimen permanente (Slotine & Li, 1991).

Una variante del control por modos deslizantes es el control por modos deslizantes terminal, propuesto por (Venkataraman & Gulati, 1991), (Man, Paplinski, & Wu, 1994) y (Wu, Yu, & Man, 1998), en el cual al introducir un término no lineal en la definición de la superficie de deslizamiento, la convergencia del error en el modo de deslizamiento se alcanza en un tiempo finito y menor que con la técnica convencional del control por modos deslizantes. Esta técnica retiene las ventajas de robustez ante incertidumbres y disturbios de la técnica convencional, siendo su principal ventaja la convergencia en el modo de deslizamiento a cero en un tiempo finito (terminal).

En el presente trabajo se comprueba el desempeño de la técnica de control por modos deslizantes terminal sobre un robot manipulador plano de dos grados de libertad, encontrando que su respuesta ante incertidumbres y disturbios externos es muy buena. Esta técnica de control, al igual que las demás técnicas de control de robots manipuladores, requieren de la medición de las posiciones y velocidades articulares. Por lo anterior se considero como tema de investigación el desarrollo de un observador por modos deslizantes terminal que permitiese mantener las ventajas de esta técnica y que adicionalmente no requiera de las mediciones de velocidad.

El trabajo desarrollado utiliza el esquema de control por modos deslizantes para diseñar un observador por realimentación dinámica de la salida, que permita obtener las características de desempeño del control por modos deslizantes terminal sin requerir la medición de las velocidades articulares. El enfoque empleado consiste en la reconstrucción asintótica de una ley de control estabilizante por realimentación del estado. En primer lugar, se diseña una ley de control robusta por realimentación del estado (de información completa) y, luego, se sintetiza una ley de control dinámica (con observación de los estados), la cual recupera asintóticamente la ley de control de información completa. Una característica importante es que el mecanismo de estabilización no depende de la construcción de una función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado.

Con el fin de ilustrar estos conceptos se aplican al caso concreto del control de un robot manipulador plano de dos grados de libertad, los resultados de las simulaciones prueban el desempeño del sistema sujeto a disturbios e incertidumbres en el modelado.

El trabajo está organizado en siete capítulos y un anexo complementario. En el primer capítulo se presenta un resumen del trabajo desarrollado y la organización del presente documento.

En el segundo capítulo se realiza una revisión del estado actual de las técnicas de control dentro de las que se enmarcan las aportaciones del trabajo realizado.

En el tercer capítulo, se presentan los fundamentos teóricos del modelado de un robot manipulador y se describe el modelo dinámico de un robot manipulador plano de dos grados de libertad, el cual es utilizado como sistema base para la prueba de los algoritmos tratados en los capítulos siguientes.

En el capítulo cuatro, se exponen los conceptos teóricos del control por modos deslizantes, el diseño y los resultados de simulación aplicados al robot manipulador de dos grados de libertad

en condiciones de incertidumbres en el modelo y disturbios externos. El presente documento se refiere a esta técnica como el control por modos deslizantes convencional.

El quinto capítulo, está dedicado al tema del control por modos deslizantes terminal, se exponen sus conceptos teóricos y el diseño aplicado al caso de un robot de dos grados de libertad, se prueba el sistema en condiciones de disturbios e incertidumbres en el modelo y se compara con la técnica de modos deslizantes convencional presentada en el capítulo tres.

El capítulo seis aborda el problema del diseño de un observador utilizando la técnica de realimentación dinámica de la salida utilizando una ley de control por modos deslizantes terminal y se realiza una comparación de la técnica desarrollada con las técnicas de control por par calculado, PID, control por modos deslizantes convencional y terminal.

El capítulo siete, contiene una exposición de las conclusiones y futuros trabajos que se pueden abordar sobre temas relacionados con el desarrollo presentado.

Finalmente se incluyen todas las referencias del presente trabajo.

En el anexo, se describe el diseño de los controladores por par calculado y un esquema de control multivariable tipo PID, estos controles son utilizados como referencia con el fin de comparar los resultados obtenidos del diseño del observador utilizando modos deslizantes terminal.



## **2. Antecedentes**

El tema de trabajo de esta tesis es el desarrollo de esquemas de control no lineal para el seguimiento de trayectorias de robots manipuladores, enfocándose en particular sobre el control por modos deslizantes. Se ha desarrollado un observador utilizando modos deslizantes terminal, empleando el enfoque de realimentación dinámica de la salida.

En éste capítulo se presenta una revisión del estado actual de las técnicas de control dentro de las que se enmarcan las aportaciones del trabajo realizado.

### **2.1 Control no lineal de robots manipuladores**

El primer paso en el diseño de un sistema de control es obtener una descripción matemática (usualmente un conjunto de ecuaciones diferenciales) del sistema físico a ser controlado. Muchas veces, debido a la complejidad del sistema, a parámetros desconocidos del mismo, o debido a que el sistema está sometido a perturbaciones externas difíciles de cuantificar, el modelo matemático lleva implícito una serie de suposiciones, simplificaciones y limitaciones que conllevan a que el mismo contenga errores en el modelado y dinámicas no modeladas (Slotine & Li, 1991). Por ello, continuamente se desarrollan nuevos métodos y leyes de control, que sean capaces de absorber esas imprecisiones.

El control de seguimiento de trayectorias de manipuladores industriales ha sido un reto desde hace varias décadas (Canudas, Siciliano, & Bastin, 1996), (Lewis, Abdallah, & Dawson, 1993) y (Samson, Le Borgne, & Espinau, 1991), ya que el modelo dinámico de un robot manipulador es representado por sistemas de ecuaciones no lineales fuertemente acopladas, esto complica la tarea del control, sobre todo, con consignas a altas velocidades o aceleraciones. Adicionalmente, en el problema del control de un manipulador se puede enfrentar a incertidumbres en los parámetros inerciales del manipulador que dependen de la carga útil la cual a menudo es desconocida y variable, la fricción y otros parámetros dinámicos en el manipulador que pueden

ser inciertos debido a su dificultad para ser modelados y medidos con precisión (Lin & Brandt, 1998).

Las dinámicas no lineales presentes en un manipulador son un reto para el problema de control, por lo que se hace necesario explorar el potencial de trabajar con toda la dinámica presente en el manipulador con el fin de ofrecer las mejores respuestas en un esquema de producción industrial (Tsay & Huang, 1994).

Como respuesta a estos inconvenientes se han desarrollado diferentes estrategias de control que van desde esquemas lineales, basados en pasividad, control adaptativo y control por modos deslizantes. En (Sage, Mathelin, & Ostertag, 1999) se presenta un estudio de estas técnicas:

Los esquemas de control lineal usualmente utilizan dos enfoques, el primero consiste en usar un modelo lineal del manipulador de forma que las no linealidades resultantes de la dinámica del robot son tratadas como perturbaciones. En este enfoque a menudo las dinámicas no modeladas pueden desestabilizar el sistema y el diseño no presenta un desempeño robusto ante movimientos rápidos del robot.

El segundo enfoque lineal, utiliza linealización por realimentación. Este método consiste en linealizar un sistema por medio de una ecuación algebraica, la cual al realimentarla elimina las no linealidades. Este enfoque exige un conocimiento completo del modelo dinámico del proceso, pero dado que la naturaleza no lineal de las perturbaciones no es incluida en el proceso de diseño, si el sistema presenta incertidumbres en los parámetros o desconocimiento de algunas dinámicas del mismo, el desempeño del sistema se degrada.

El enfoque de pasividad explota la naturaleza pasiva del robot para el diseño del controlador. Este enfoque no intenta cancelar las no linealidades del robot y por consiguiente debería obtener buenos resultados ante parámetros inciertos. Algunos trabajos desarrollados son: (Ortega & Spong, 1989), (Takegaki & Arimoto, 1981) y (Paden & Panja, 1988).

Algunos esquemas adaptativos estiman en línea los parámetros del manipulador, así el controlador puede garantizar el seguimiento robusto de una trayectoria en presencia de parámetros inciertos, ruido en los sensores y disturbios de entrada. En (Leung, 1989) se presentan los resultados de aplicar un esquema de control por modos deslizantes adaptativo a un robot de dos grados de libertad, obteniéndose un buen desempeño en la respuesta ante la presencia de disturbios, variaciones en los parámetros y dinámicas no lineales.

Los controles adaptativo y robusto son capaces de trabajar con las incertidumbres. En (Morse, Kanellakopoulos, & Kokotov, 1991), (Kokotovic, Krstic, & Kanellakopoulos, 1995) y (Isidori,

1989) se diseña una ley de control adaptativa para estimar los parámetros desconocidos de la dinámica del sistema. En el control robusto, las incertidumbres son consideradas mediante algún tipo de conocimiento de la dinámica de la planta, tales como límites o funciones que limitan las incertidumbres ( (Qu, 1998), (Zhang & Ioannou, 1999)). La combinación de control adaptativo y robusto da como resultado la técnica de control adaptativa robusta ( (Praly, 1984), (Kreisselmeier & Anderson, 1986), (Hill, Wen, & Goodwin, 1988), (Iounnou, 1984), (Naik & Kumar, 1991)).

El control por modos deslizantes es una técnica eficiente para el control de plantas complejas de orden alto que incluyen dinámicas no lineales y que operan bajo condiciones inciertas. Esta técnica de control utiliza leyes no lineales de realimentación y no requiere de un conocimiento preciso del modelo dinámico. En los últimos años, varias aplicaciones han sido desarrolladas en el campo de control de robots manipuladores (Belhocine, Hamerlain, & Bouyoucef, 1997), (Cavallo A & Villani, 1997), y (Karandikar & Bandyopadhyay, 1997). De estas aplicaciones la principal conclusión es la naturaleza robusta que provee el control en modos deslizantes debido a que el sistema es insensible a interacciones, disturbios y variaciones de parámetros. El control por modos deslizantes es uno de los enfoques más importantes para el tratamiento de sistemas con incertidumbres y disturbios externos limitados.

Considerando que la utilización de técnicas de control no linealizantes tiene como ventaja permitir actuar directamente sobre las dinámicas no lineales predichas por el modelo, se abre la posibilidad de presentar diferentes alternativas para solucionar el problema de control, en particular se decidió trabajar sobre el método de control por modos deslizantes que ha sido utilizado en los últimos años aplicando diferentes variantes que permiten abordar el problema de robustez a variaciones de parámetros del robot o su carga, algunas referencias son: (Yu, Yu, Shirinzadeh, & Man, 2005), (Feng, Yu, & Man, 2002) (Yu & Man, 2002).

En el presente trabajo se comprobó el desempeño de la técnica de control por modos deslizantes convencional y terminal sobre un robot manipulador plano de dos grados de libertad, probando la convergencia del error en tiempo finito y encontrando que su respuesta ante incertidumbres y disturbios externos es muy buena.

## **2.2 Observadores en robótica**

El problema de control de robots manipuladores ha sido resuelto utilizando varios métodos clásicos, robustos, adaptativos, y se ha demostrado que cada estrategia de control garantiza la estabilidad del sistema y el seguimiento de la trayectoria logrando un error adecuado. Un

supuesto básico de todos estos métodos es que todo el estado del sistema está disponible para realimentación. En el caso de los manipuladores robóticos, la ley de control se basa en el conocimiento exacto de los vectores de posición y velocidad.

Los robots manipuladores son generalmente equipados con medidores de precisión de los desplazamientos articulares, tales como *encoders*, que poseen un bajo nivel de ruido en las mediciones de posición. La velocidad, según (Naihui, Zhaohui, Yongfu, & Bangchun, 2007) puede ser obtenida mediante los siguientes tres métodos:

- (1) Medición mediante tacómetros acoplados al eje del motor, presentando en muchos casos mediciones contaminadas por ruido. Otros fenómenos que disminuyen la calidad de las mediciones de velocidad son: las discontinuidades presentes en el campo magnético del estator a bajas velocidades, el rizado de los pares y otros fenómenos de alta frecuencia (Canudas de Wit & Slotine, 1991).
- (2) Obtener la velocidad mediante métodos de diferenciación numérica. En (Naihui, Zhaohui, Yongfu, & Bangchun, 2007) se concluye que éstos métodos en general funcionan bien en condiciones ideales, pero cuando la medición de posición posee ruido que no alcanza a ser filtrado el cálculo de la velocidad se ve afectado.
- (3) Estimación de la velocidad mediante observadores. Es técnica y económicamente interesante estudiar la posibilidad de estimar con precisión las mediciones de velocidad (Canudas y Slotine, 1991). Sin embargo, debido a la estructura no lineal y acoplada del modelo dinámico de los robots manipuladores, el problema de diseño de observadores es una tarea compleja.

A partir del desarrollo de la técnica de observación en los años 60 por (Luenberger, 1966), en la literatura han sido presentados varios enfoques para resolver el problema de diseño de observadores no lineales. La primera posibilidad consiste en la transformación de un problema no lineal en uno lineal mediante la técnica de linealización extendida (Baumann W.T & Rogh, 1986), técnica de pseudo-linealización (Nicosia, Tomei, & Tornambe, 1986,1989), (Tornamhe & Tomei, 1986) o por la técnica de linealización exacta (Krener & Respondek W, 1985). Una segunda posibilidad consiste en el diseño de un observador de las dinámicas no lineales. En este contexto, algunas técnicas se establecieron en la forma canónica observable (Bornard & Hammouri H, 1991); (Gauthier & Bornard, 1981); (Gauthier, Hammouri, & Othman, 1991). Todos estos métodos están disponibles para sistemas no lineales, sin incertidumbres o perturbaciones en sus ecuaciones dinámicas (para un estudio sobre los observadores no lineales (Khelfi M.F, Zasadzinski M, Benzine, & Belalem, 1998); (Misawa E.A & Hedrick, 1989); (Tsiniias, 1989); (Walcott, Corless, & Zak, 1987a).

El diseño de observadores que tengan en cuenta las incertidumbres del sistema ha sido de



interés para muchos investigadores (Canudas de wit, Aström, & Fixot, 1990), (Berghuis, 1993); (Dawson, Qu, & Carroll, 1992); (Misawa E.A & Hedrick, 1989); (Slotine, Hedrick, & Misawa, 1986); (Walcott B.L & Zak, 1987b).

(Walcott B.L & Zak, 1987b) presenta un observador de estructura variable para una clase de sistemas no lineales, propone una metodología de diseño para sistemas que sean completamente observables en su parte lineal y sus alinealidades o incertidumbres sean limitadas. Este observador es básicamente el observador convencional de Luenberger con un término de conmutación adicional que se utiliza para garantizar la robustez frente a errores de modelado e incertidumbres del sistema. Para enfrentar el problema asociado con la función de conmutación, el observador se modifica incluyendo una capa límite. Sin embargo, con esta modificación, la característica de estabilidad asintótica del error de observación se pierde, y sólo se obtiene un error de observación de régimen permanente uniforme. En (Dawson, Qu, & Carroll, 1992), se propone una extensión del observador de estructura variable, para garantizar la estabilidad exponencial global del error de observación del sistema.

Utilizando el enfoque de modos deslizantes (Slotine, Hedrick, & Misawa, 1986) proponen el llamado observador por modos deslizantes, este enfoque se basa en el concepto de superficies atractoras, que consiste en la definición de una hipersuperficie la cual es función de los errores de observación. Una vez las trayectorias del error han alcanzado esta hipersuperficie, una acción basada en la conmutación del error hace que el error de observación se deslice a cero. (Canudas de Wit & Slotine, 1991) propusieron el uso de un observador por modos deslizantes para robots manipuladores, en el cual algunas propiedades físicas de los robots son utilizadas para mostrar la convergencia exponencial del vector de errores de observación.

Más recientemente, arquitecturas que utilizan el concepto de observadores por modos deslizantes para sistemas con incertidumbres y disturbios limitados son propuestas, por ejemplo en, (Edwards & Spurgeon, 1998); (Abdessameud & Khelfi, 2006)

En este trabajo se trata con el problema de la estimación de la velocidad articular a través de un observador por modos deslizantes terminal basado en las mediciones de la posición. Ya que, el control por modos deslizantes terminal, al igual que las demás técnicas de control de robots manipuladores, requieren de la medición de las posiciones y velocidades articulares, se consideró como tema de investigación el desarrollo de un observador por modos deslizantes terminal que permitiese mantener las ventajas de esta técnica (principalmente la convergencia terminal) y que adicionalmente no requiera de las mediciones de velocidad.

Para el diseño del observador por modos deslizantes terminal, en primera instancia, se revisaron los diferentes enfoques basados en observadores por modos deslizantes de Canudas, Slotine,

Waltcott pero en todos los intentos desarrollados no fue posible probar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante una función de Lyapunov, debido a que en general el diseño de observadores no lineales es una tarea compleja y en particular en el caso de modos deslizantes terminal, en la definición de la superficie de deslizamiento precisamente el termino no lineal depende de las velocidades articulares y no se logró obtener una prueba de estabilidad independiente de éstos términos.

Utilizando el trabajo propuesto por (Karagiannis, Astolfi, & Ortega, 2003), donde se presenta y se resuelve el problema de estabilización por realimentación de salida de un sistema, en este trabajo se propone un esquema de diseño de un observador por modos deslizantes terminal, que permita obtener las características de desempeño del control por modos deslizantes terminal sin requerir de las mediciones de las velocidades articulares. El enfoque empleado consiste en la reconstrucción asintótica de una ley de control estabilizante por realimentación del estado, sin necesidad de utilizar una función de Lyapunov y mediante la aplicación del principio de separación. El principio de separación, establece que es posible resolver el problema de regulación propuesto, siempre que dos sub-problemas sean resueltos. El primer sub-problema se refiere a encontrar una ley de control de realimentación de estado robusta de información completa para el sistema. El segundo problema conduce al diseño de una ley de control dinámica estabilizante, por inyección de salida, la cual recupera asintóticamente la ley de control de información completa. Esto permite obtener un controlador dinámico de realimentación de salida y globalmente estabilizante (con estimación de los estados no medidos). Una característica importante es que el mecanismo de estabilización no depende de la construcción de una función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado (Karagiannis, Astolfi, & Ortega, 2003).

Con el fin de ilustrar estos conceptos se aplican al caso concreto del control de un robot manipulador plano de dos grados de libertad, los resultados de las simulaciones prueban el desempeño del sistema sujeto a disturbios e incertidumbres en el modelado.

### **3. Modelado de un robot manipulador**

Los manipuladores robóticos encuentran un campo de aplicación muy amplio en la industria de la manufactura, realizando tareas como ensamblaje de circuitos, soldadura de puntos, pintura, manipulación de partes, cortes de materiales y elaboración de piezas, entre otras. Su función principal es desarrollar tareas con precisión, confiabilidad, seguridad y rapidez.

Un manipulador es un sistema con una dinámica altamente no lineal, el cual está sujeto a disturbios e incertidumbres en el modelado. Su modelo dinámico es representado por sistemas de ecuaciones no lineales fuertemente acopladas (Khalil & Dombre, 2002). Teniendo en cuenta que las tareas que efectúan los manipuladores robotizados implican alta precisión, contar con nuevos algoritmos de control que mejoren el desempeño general de estos manipuladores resulta de gran interés investigativo dentro de la comunidad científica, (para referencias sobre trabajos realizados en control de manipuladores robóticos, revisar las secciones 2.1 y 2.2)

A continuación se describe el modelo matemático del robot manipulador utilizado para la prueba de los algoritmos de control desarrollados en el presente trabajo.

#### **3.1 Descripción y modelado de un robot manipulador**

Un robot manipulador está conformado por una serie de cuerpos o enlaces unidos por articulaciones. Las articulaciones conectan dos enlaces sucesivos, permitiendo un movimiento entre los dos cuerpos (Khalil & Dombre, 2002). Al movimiento que cada articulación puede realizar de manera independiente se le denomina grado de libertad y dicho movimiento puede ser de desplazamiento (articulaciones prismáticas) o de rotación (articulaciones rotóides). La combinación de distintos tipos de articulaciones define la configuración del robot, siendo las más típicas las configuraciones cartesiana, cilíndrica, esférica y antropomórfica.

El espacio en el cual se representa la localización de todos los enlaces del robot es llamado

espacio articular o espacio de configuración, se utilizan las variables articulares como las coordenadas de este espacio, su dimensión  $n$  es el número de articulaciones y corresponde al número de grados de libertad.

El trabajo que lleva a cabo un robot manipulador implica el posicionamiento de objetos con una respectiva orientación, para lo cual es necesario aplicar herramientas matemáticas que permitan determinar la orientación y desplazamiento del órgano terminal del robot en función de la base del mismo. Además, es necesario modelar toda la dinámica del robot teniendo en cuenta las masas, inercias y frotamientos, con el fin de simular y controlar el robot. Estas relaciones son expresadas por los modelos geométrico, cinemático y dinámico del robot (Khalil & Dombre, 2002), (Ollero, 2001).

El espacio en el cual se representa la localización (posición y orientación) del órgano terminal o efector final (pinza, herramienta, etc.) se denomina espacio de trabajo o espacio operacional, generalmente se utilizan coordenadas cartesianas para especificar la posición en  $x$  y  $y$  y varios métodos para especificar la orientación (ángulos de Euler, ángulos RPY, cuaterniones). Se denominará  $\mathbf{p}$  al vector que especifica la posición y orientación del efector final, siendo  $m$  el número de parámetros independientes requeridos para especificar la localización del efector final.

El modelo geométrico directo de la ecuación (3.1), representa la relación entre la localización del efector final  $\mathbf{p}$  con respecto a un sistema de coordenadas tomado como referencia, como función de las posiciones de las articulaciones  $\mathbf{q}$  y los parámetros geométricos de los elementos del robot.

(3.1)

El modelo geométrico inverso en la ecuación (3.2), relaciona la posición de cada una de las articulaciones del robot en función de los parámetros geométricos del efector final.

(3.2)

El modelo cinemático directo relaciona la velocidad del efector final  $\dot{\mathbf{p}}$  con las velocidades ( $\dot{q}_i$ ) de cada una de las articulaciones del manipulador, de acuerdo con la ecuación (3.3).

(3.3)

donde  $\mathbf{J}$  es la matriz jacobiana de  $\mathbf{p}$ .

El modelo cinemático inverso relaciona las velocidades de las articulaciones con la velocidad deseada del efector final , según la ecuación (3.4).

(3.4)

donde es la pseudoinversa de la matriz Jacobiana.

El modelo dinámico directo describe la aceleración de las articulaciones según la ecuación (3.5).

(3.5)

la aceleración de las articulaciones está en función de que es el vector del par aplicado a las articulaciones, el vector de posiciones, el vector de velocidades, el vector de aceleraciones y el vector de fuerzas y momentos ejercidos por el robot en el ambiente de trabajo.

El modelo dinámico inverso por su parte, es la relación entre los pares o fuerzas aplicadas a los motores y las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares. Esta relación se muestra en la ecuación (3.6).

(3.6)

El modelo dinámico inverso es utilizado para el diseño de las estrategias de control, permitiendo el cálculo de los pares que son requeridos aplicar a los actuadores para lograr el movimiento deseado. El modelo dinámico directo es utilizado para realizar la simulación del sistema con el propósito de verificar el desempeño del robot y los méritos de los esquemas de control utilizados.

Los métodos de obtención del modelo dinámico emplean formulaciones como la de Lagrange-Euler o la de Newton-Euler ( (Khalil & Dombre, 2002), (Ollero, 2001)). En la formulación de Lagrange-Euler se describe el comportamiento del sistema en términos del trabajo y la energía almacenada, permitiendo modelar el par que ejercen los cuerpos en las articulaciones debido al movimiento. Esta formulación conduce a la ecuación (3.7) que representa el comportamiento dinámico de un robot con  $n$  articulaciones.

(3.7)

donde, es la matriz de inercia del manipulador, esta matriz es simétrica y definida

positiva (Khalil & Dombre, 2002),  $\tau_c$  es el vector del fuerzas de coriolis y centrípeta,  $\tau_g$  es el vector de fuerzas gravitatorias y  $\tau_d$  es el vector de disturbios externos al manipulador, el cual se considera limitado  $\|\tau_d\| \leq \tau_{dmax}$ .

Asumiendo que en el modelo del robot manipulador existe incertidumbre debido a que los parámetros del robot y/o la carga no son conocidos con precisión, entonces se puede considerar,

$$\tau = \tau_n + \tau_u \quad (3.8)$$

donde  $\tau_n$  son los términos nominales o estimados a partir del modelo y  $\tau_u$  son las incertidumbres debidas a parámetros inerciales del manipulador que dependen de la carga útil, la cual a menudo es desconocida y variable, la fricción y otros parámetros dinámicos en el manipulador pueden ser inciertos debido a su dificultad para ser modelados y medidos con precisión.

Sustituyendo la ecuación (3.8) en la ecuación (3.7), la ecuación dinámica del manipulador puede ser escrita en la siguiente forma:

$$M\ddot{q} + \tau_n + \tau_u = \tau \quad (3.9)$$

con,

$$\tau_u = \tau - \tau_n \quad (3.10)$$

En ausencia de fricciones y disturbios, el modelo dinámico nominal del robot manipulador es dado por la ecuación (3.11).

$$M\ddot{q} = \tau \quad (3.11)$$

La compleja ecuación que describe el modelo dinámico de un robot manipulador, posee importantes propiedades físicas y matemáticas que lo convierten en una clase particular de sistema no lineal. Algunas de estas propiedades facilitan su análisis y son muy utilizadas para propósitos de diseño del controlador. A continuación se presentan las propiedades de los robots manipuladores, las cuales se usan comúnmente en la literatura. Referencias para las siguientes propiedades son: (Man & Yu, 1997); (Feng, Yu, & Man, 2001); (Chong, Yu, & Man, 1996); (Yu, Yu, Shirinzadeh, & Man, 2005).

**Propiedad 1:** La matriz de inercia es simétrica, limitada y definida positiva para todo  $\theta$ , así  $M(\theta) > 0$ , siendo  $\lambda$  un número real positivo y  $\lambda_{\min}$  existe.

**Propiedad 2:** La matriz  $C(\theta, \dot{\theta})$  es anti simétrica por lo tanto  $C(\theta, \dot{\theta}) + C(\theta, -\dot{\theta}) = 0$ .

**Propiedad 3:** El modelo dinámico puede ser parametrizado linealmente así,  $M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau$ , donde  $\tau$  es un vector dimensional que contiene los parámetros de inercia y  $G(\theta)$  es una matriz de denominada regresor, la cual contiene sólo funciones conocidas.

**Propiedad 4:** Los vectores  $\tau$  son limitados por funciones positivas según las siguientes expresiones,

donde  $\alpha_i$  son todos números positivos y no conocidos.

**Propiedad 5:** A partir de las propiedad 1 y 4, se puede verificar que el vector de incertidumbres está limitado por la siguiente expresión,

donde  $\beta_i$  son números reales positivos a parametrizar. Esta propiedad es muy útil para el diseño de leyes de control robusto y adaptativo para robots manipuladores.

## 3.2 Modelo dinámico del manipulador plano de dos grados de libertad

La Figura 3.1 muestra el modelo de un manipulador plano de dos grados de libertad, el cual está compuesto por dos articulaciones rotóides. Este modelo es utilizado por muchos autores, para el caso de controladores por modos deslizantes se pueden revisar las siguientes referencias (Man, Paplinski, & Wu, 1994), (Feng, Yu, & Man, 2001), (Feng, Yu, & Man, 2002), (Yu, et al, 2005).

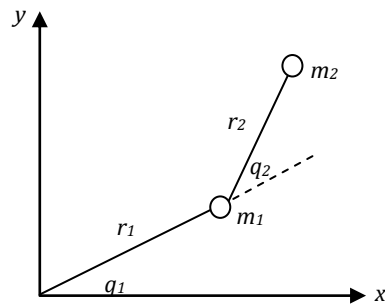


Figura 3.1 Manipulador plano de dos grados de libertad

Utilizando Lagrange se determina la siguiente ecuación del modelo dinámico del manipulador plano,

$$(3.12)$$

donde,

La ecuación (3.12) es de la misma forma general de la ecuación (3.7). Los valores de los parámetros del robot utilizados para todas las simulaciones son:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \text{ m}, \\ r_2 &= 0.8 \text{ m}, \\ m_1 &= 0.5 \text{ kg}, \\ m_2 &= 1.5 \text{ kg} \\ J_1 &= J_2 = 5 \text{ kg m}. \end{aligned}$$

En (Yu, et al, 2005), se considera para el robot el modelo de incertidumbres dado por la propiedad 5, los siguientes valores de los parámetros: . En (Man &



Yu, 1997) se realiza un control robusto adaptativo con modos deslizantes terminal para el modelo de robot manipulador considerado, donde se estiman los valores de los parámetros , obteniéndose valores finales muy similares a los mencionados. Para las simulaciones realizadas en los capítulos siguientes se consideran éstos valores indicados para el modelo de incertidumbres.

Para las simulaciones realizadas en los capítulos siguientes se consideran las señales de referencia dadas por la ecuación (3.13), las cuales se ilustran en la Figura 3.2.

(3.13)

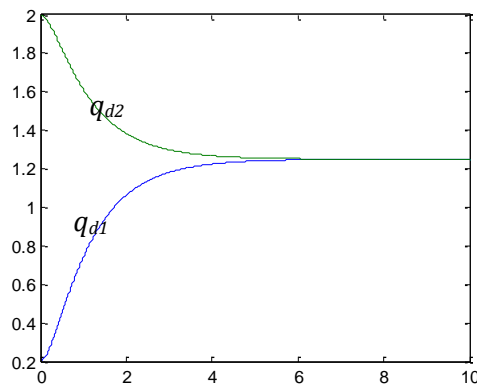


Figura 3.2 Trayectorias deseadas

Los valores iniciales para las posiciones y velocidades de las articulaciones son:

, el robot parte del reposo y al derivar el perfil de posición de la Figura 3.2, se obtienen las trayectorias de velocidad. Las trayectorias seleccionadas permiten una generación de movimiento en el espacio articular de manera suave, lo cual es importante ya que a partir de ellas se derivan las referencias de velocidad y aceleración por lo cual en general, no son aconsejables trayectorias que presenten discontinuidades.

Para una trayectoria específica, se define el error de posición como . El objetivo del control es diseñar una ley de control realimentada tal que la salida del manipulador siga la trayectoria deseada , haciendo cero el error de posición.

Para probar la robustez del control que se diseñe se utilizarán las siguientes condiciones que incluyen incertidumbres paramétricas y disturbios externos:

- i) Cambios en los valores reales de las masas de las articulaciones, respecto de los

- valores nominales. Por ejemplo:  $m_1 = 0.4 \text{ kg}$ , y  $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ .
- ii) Simular la tarea de manipular un objeto, por ejemplo de 0.5 Kg, esto implica en incrementar la masa de la articulación dos en el valor del peso del objeto a partir de un tiempo  $t$ .
  - iii) Considerar disturbios externos. Por ejemplo,

(3.14)

donde el segundo término de la ecuación (3.14) representa el efecto de mediciones con ruido de alta frecuencia. La señal de disturbio es limitada por  $\pm 3$ , en la siguiente figura se ilustra el disturbio aplicado,

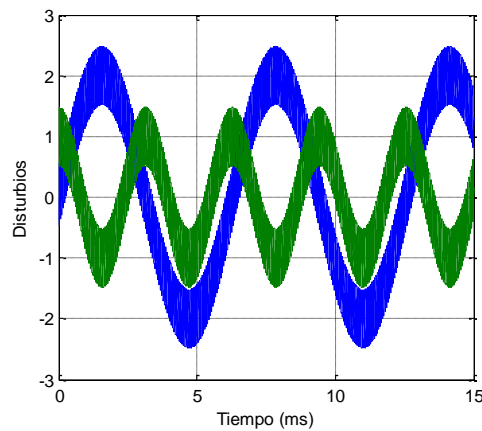


Figura 3.3 Distúrbio aplicado al par

### 3.3 Resumen

En este capítulo, se ha considerado el modelo matemático general de un robot manipulador rígido, el cual es un sistema no lineal y fuertemente acoplado. En particular se presentó el modelo de un robot manipulador de dos grados de libertad, los valores de sus parámetros, incertidumbres, trayectoria deseada y disturbios que serán empleados como caso de referencia para las simulaciones de los capítulos siguientes.

El modelo dinámico del robot se expresa mediante una parte conocida (nominal) y una parte desconocida, modelada por una función que depende de las posiciones y velocidades medidas. Esta descripción es muy útil para evaluación y diseño de controladores robustos donde se requiere que la incertidumbre del sistema sea limitada, y será utilizada en capítulos posteriores.

## 4. Control por Modos Deslizantes

Este capítulo presenta las ideas principales del control por modos deslizantes, basadas en (Slotine & Li, 1991), (Edwards & Spurgeon, 1998) y (Perruquetti & Barbot, 2002). Estos conceptos se aplican al caso concreto del control de un robot manipulador de dos grados de libertad, cuyo modelo dinámico fue considerado en la sección 3.2, presentando el diseño del controlador y los resultados de las simulaciones del sistema sujeto a disturbios e incertidumbres en el modelado.

### 4.1 Introducción

El control por modos deslizantes (*Sliding Mode Control, SMC*) es un tipo particular de control por estructura variable (*Variable Structure Control, VSC*). Los sistemas *VSC* se caracterizan por poseer dos o más leyes de control y por lo tanto, este tipo de control basa su existencia en un cambio discontinuo de la estructura del sistema dinámico. Un *VSC* puede ser entendido como una combinación de subsistemas, donde cada uno tiene una ley de control fija, la cual es válida en determinada región de comportamiento del sistema. Las primeras leyes de *VSC* se obtuvieron en la Unión Soviética a finales de los años 50, gran cantidad de publicaciones se han desarrollado en esta área a partir de los trabajos pioneros de (Emilianov, 1967) y (Utkin, 1977).

El control por modos deslizantes consiste en llevar al sistema a vivir en una superficie sobre el espacio de estado, denominada superficie de deslizamiento, y una vez en ella mantenerlo allí ante posibles perturbaciones externas. Así la dinámica del sistema en lazo cerrado está determinada sólo por la superficie de deslizamiento. La característica más sobresaliente de esta técnica de control es su robustez a las incertidumbres y a los disturbios del sistema una vez se está en el modo de deslizamiento.

Considérese una señal de control de estructura variable, como se indica en la Figura 4.1, y un estado de dimensión 2.

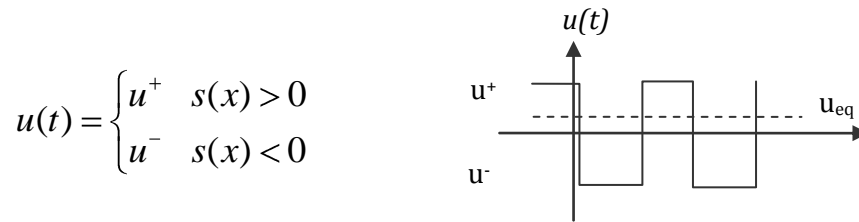
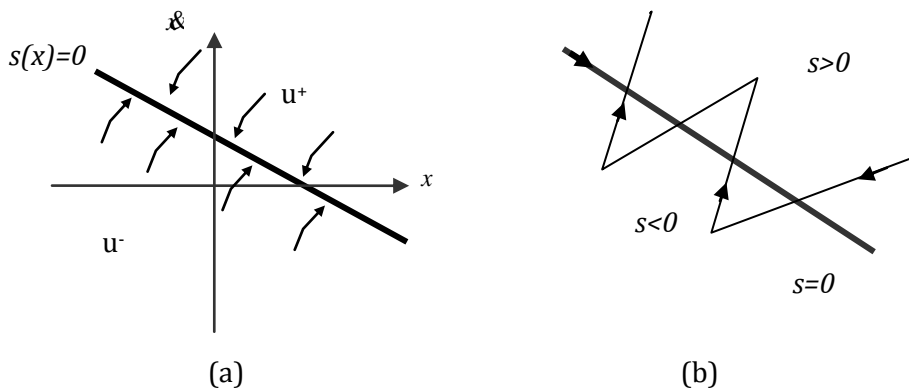


Figura 4.1 Señal de control de estructura variable

La aplicación de la señal de control conmutando a alta frecuencia, consigue llevar el estado del sistema a una superficie  $s = 0$ , denominada superficie de deslizamiento (en el caso del espacio de dimensión dos, una superficie corresponde a una línea recta sobre el plano, como se ilustra en la Figura 4.2a) y una vez en ella mantenerlo (deslizar sobre la superficie) ante posibles perturbaciones externas. Dicha superficie de deslizamiento debe ser definida por el diseñador con el objeto de que el estado cumpla las especificaciones deseadas. Así, si las trayectorias del sistema se encuentran por encima de la región de deslizamiento, el control conmuta a  $u(t) = u^+$  con lo que la dinámica del sistema cambia y debe llevar las trayectorias hacia  $s=0$ , igualmente, si las trayectorias están por debajo de la región de deslizamiento, el control conmuta a  $u(t) = u^-$ , a fin de llevar las trayectorias hacia  $s=0$ .

Figura 4.2 a) Superficie de deslizamiento. b) Efecto del *chattering* sobre la superficie de deslizamiento  $s=0$ .

Para mantener el régimen de deslizamiento ideal, la señal de control debe ser capaz de conmutar con una frecuencia infinita entre valores positivos a negativos de  $S$ , esto produce un efecto indeseado denominado "*chattering*" (Figura 4.2b), tal que las trayectorias, en lugar de deslizar, oscilan alrededor de la superficie de deslizamiento. La presencia del *chattering* puede excitar dinámicas no modeladas, reducir la exactitud del control, introducir grandes pérdidas por calor

en circuitos eléctricos de potencia, aparte de los problemas físicos en los dispositivos mecánicos. Es necesario por lo tanto “suavizar” la señal de control discontinua para lograr un compromiso entre la señal tolerada por los elementos físicos reales y la precisión requerida. Varios enfoques se han propuesto para reducir el efecto del *chattering*, entre ellos el más conocido es la aplicación de la función saturación para el control de la ganancia cuando el sistema se encuentra cerca de la región de deslizamiento (ver sección 4.3).

La metodología de diseño de un controlador por modos deslizantes, implica primero establecer la dinámica de la superficie de deslizamiento y segundo, verificar la estabilidad y la existencia del modo deslizante; existen múltiples propuestas para determinar la superficie de deslizamiento, en general puede ser cualquier función del estado tal que el error de regulación o seguimiento se haga cero en régimen permanente. Luego se diseña una ley de control que garantice la existencia de un régimen de deslizamiento. Una vez que el sistema es atrapado en la superficie, la dinámica en lazo cerrado puede ser independiente de los efectos debidos a errores en el modelado y a perturbaciones externas, de esta manera se logra una excelente robustez.

## 4.2 Superficie de deslizamiento y condición de deslizamiento

Considere el siguiente sistema SISO no lineal,

(4.1)

donde  $u$  es la señal de control,  $y$  es la salida de interés,  $x$  es el vector de estados y  $d$  es el disturbio externo, el cual está limitado por  $D$ , siendo  $D$  un conjunto compacto. Se asume que la función  $f(x)$  no es conocida de forma exacta pero es estimada como  $\hat{f}(x)$  y su incertidumbre está limitada, es decir  $\|f(x) - \hat{f}(x)\| \leq \delta$ .

El objetivo del control es determinar una señal de control  $u$  tal que el estado  $x$  del sistema en lazo cerrado siga al estado deseado  $x_d$ . en presencia de incertidumbres del modelo y disturbios, el error de seguimiento se define como  $e = x - x_d$ .

Usualmente la superficie de deslizamiento se define como combinaciones lineales de las variables de estado o formas más complejas, de forma que el error de seguimiento se haga cero en régimen permanente. La superficie propuesta en (Slotine & Li, 1991) tiene la siguiente forma general:

$$- \quad (4.2)$$

donde  $\alpha$  es una constante positiva. Si  $n=2$ ,  $\sigma$ , la superficie se compone de la suma ponderada de los errores de posición y de velocidad. Si  $n=3$ ,  $\sigma$ , se obtiene una combinación de los errores de aceleración, velocidad y posición.

Dada la condición inicial  $x(0)$ , el problema de seguimiento  $y(t)$  es equivalente a mantener el estado del sistema en la superficie de deslizamiento  $\sigma=0$  para todo  $t$ . Sin embargo, si el estado está fuera de la superficie de deslizamiento, para llevarlo a ella se escoge  $u$  de forma que se garantice que el estado converja hacia la superficie de deslizamiento desde cualquier punto en el espacio de estados. Según la Figura 4.2b, la condición de deslizamiento puede expresarse como:

$$(4.3)$$

La anterior expresión es equivalente a,

$$(4.4)$$

La expresión (4.4), se conoce como condición de deslizamiento, ésta condición no es suficiente para garantizar un tiempo de convergencia finito a la superficie. La condición de existencia del modo de deslizamiento también puede ser interpretada utilizando la teoría de Lyapunov. Considerando la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$- \quad (4.5)$$

la condición para la existencia del un modo deslizante en  $\sigma=0$  esta dada por,

$$(4.6)$$

Para el cumplimiento de la anterior desigualdad existen diferentes formas conocidas como leyes de alcanzabilidad (Hung, Gao, & Hung, 1993), la más común es,

$$-- \quad (4.7)$$

donde  $\eta$  es una constante positiva y  $V$  clasifica como una función de Lyapunov, tal que  $V$  se comporta como un atractor para las trayectorias. La condición de deslizamiento dada por (4.7) garantiza que si  $V$  la superficie se alcance en un tiempo finito (ver Figura 4.3), integrando 4.7 entre  $t=0$  y  $t=t_r$  se obtiene

$$\dots \tag{4.8}$$

La condición en (4.7) lleva a que la velocidad de alcanzabilidad de la superficie, esté relacionada con,

$$\dots \tag{4.9}$$

Un valor grande de  $\eta$ , incrementa la velocidad en la fase de alcanzabilidad de la superficie, pero introduce una amplificación del *chattering* en la fase de deslizamiento, inversamente, un valor pequeño de  $\eta$  disminuye la velocidad de alcanzabilidad pero reduce el efecto del *chattering*.

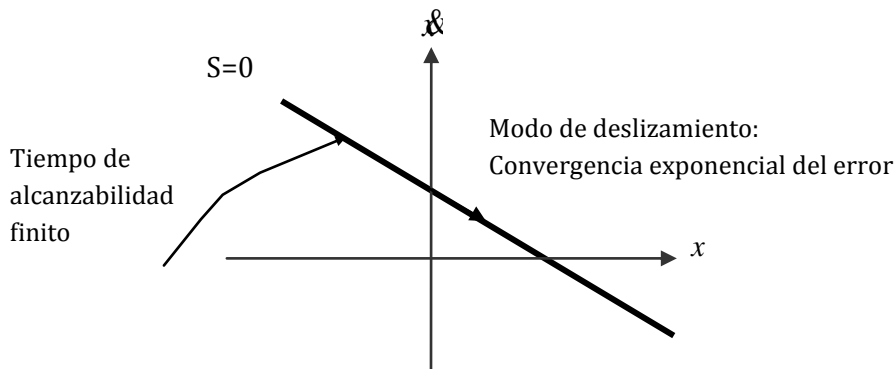


Figura 4.3 Tiempo de alcanzabilidad finito y convergencia exponencial del error.

Considerando el caso de  $n=2$  en la ecuación (4.2), la superficie de deslizamiento sería  $S = \dot{x} + \eta x$ . En esta última ecuación, cuando  $S=0$ , se verifica que la dinámica del error converge exponencialmente a cero según,

$$\dots \tag{4.10}$$

Una característica del control por modos deslizantes es que si se cumple la condición de alcanzabilidad, se garantiza que el estado del sistema alcanza la superficie de deslizamiento en un tiempo finito ( ), y que la convergencia del estado del sistema al punto de equilibrio es asintótica, debido a que las superficies de deslizamiento comúnmente se seleccionan para que presenten convergencia exponencial cuando el tiempo tiende al infinito. Con el fin de mejorar este tiempo de convergencia se ha propuesto en la literatura la técnica conocida como control

por modos deslizantes terminal, la cual se presentará en el siguiente capítulo.

### 4.3 Diseño del control por modos deslizantes

Para el diseño del control por modos deslizantes, en primer lugar se debe definir una superficie de deslizamiento y posteriormente seleccionar una ley de control de lazo cerrado  $u(t)$  de forma que se satisfaga la condición de deslizamiento dada por (4.7).

A partir de (4.1), considere el siguiente sistema de segundo orden,

(4.11)

A fin de obtener un seguimiento de la referencia  $y_d(t)$ , se define la superficie de deslizamiento para el caso de  $n=2$ , es decir,  $s = \dot{x}_1 + \lambda x_1 - y_d$  por lo tanto,

(4.12)

Considerando que  $\dot{s} = \ddot{x}_1 + \lambda \dot{x}_1 - \dot{y}_d$  y reemplazando 4.11 en 4.12 se obtiene,

(4.13)

La mejor aproximación de la ley de control continua, o control equivalente ( ) que debería aplicarse al sistema para alcanzar  $s=0$  sería,

(4.14)

donde  $u_{eq}$  es el control promedio que hace que  $\dot{s}=0$  en ausencia de disturbios ( $d(t)=0$ ) e incertidumbres ( ) en el modelo. Dicho en otros términos,  $u_{eq}$  es el control promedio que mantiene a las trayectorias del sistema sobre la superficie de deslizamiento (Figura 4.1).

Con el fin de que se satisfaga la condición de deslizamiento en presencia de incertidumbres, se agrega un término discontinuo a  $u_{eq}$  a través de la superficie de deslizamiento, el cual garantiza convergencia en un tiempo finito a la superficie,



(4.15)

donde  $k$ , es una constante positiva cuya magnitud depende de las incertidumbres y disturbios del sistema. Así, considerando las ecuaciones (4.13) a (4.15) en la condición de deslizamiento,

$$-- \quad (4.16)$$

Eligiendo  $\gamma$  se cumple la condición de deslizamiento (4.7), entonces,

(4.17)

Debido a que las incertidumbre en el modelo están limitadas por  $\Delta$ , siempre se cumple que  $\gamma > \Delta$  y debido a que el disturbio se considera limitado por  $F$  se cumple que  $\gamma > F$ , así se puede garantizar la condición de deslizamiento en presencia de incertidumbres en el modelo y disturbios limitados. Además, es de notar, que al incrementar la incertidumbre  $F$  es necesario aumentar  $k$ .

La principal desventaja de esta técnica es el drástico cambio de la señal de control cerca de la superficie de deslizamiento, lo cual conduce al fenómeno conocido como *chattering*. Así, entre mayor sea  $k$  mayor será el efecto del *chattering*, por lo cual se procura asignar un valor pequeño a  $k$  pero que aún siga cumpliendo con la condición de  $\gamma > F$ . Una forma de "suavizar", es establecer una delgada capa de frontera  $B(t)$  alrededor de la superficie de deslizamiento, tal que,

(4.18)

donde  $\varphi$  es el "espesor" de la capa de frontera. La Figura 4.4a, ilustra el caso para  $n=2$ .

Fuera del campo de acción de  $B(t)$  se escoge que la ley de control satisfaga el cumplimiento de existencia del régimen deslizamiento, ecuación (4.7), lo cual garantiza que la capa límite también se comporte como un atractor. Es decir, todas las trayectorias que empiezan dentro de  $B(t=0)$  permanecen dentro de  $B(t)$  para todo  $t > 0$ , y dentro de  $B(t)$  se interpola la señal de control reemplazando en la expresión de  $u(t)$  el termino  $sign(s)$  por la función saturación (ecuación 4.19), lo cual se ilustra en la Figura 4.4b.

(4.19)

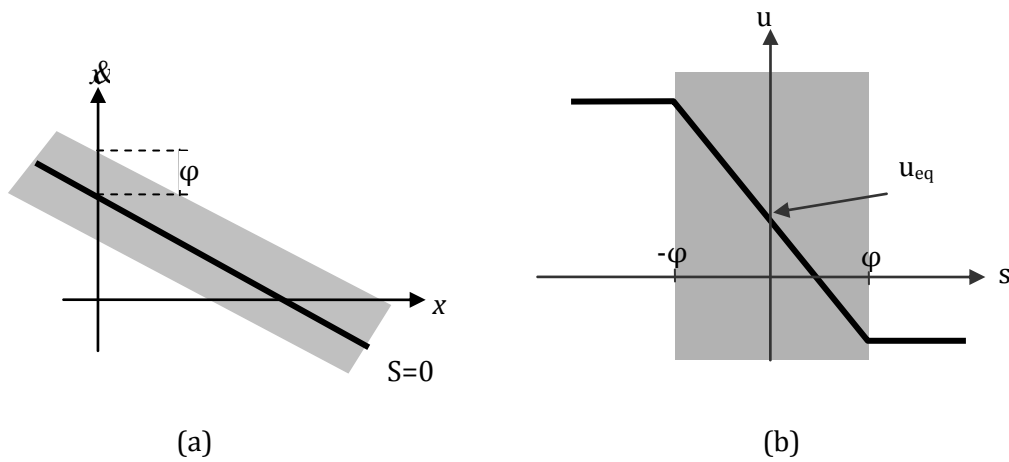


Figura 4.4 a) Capa de frontera. b) Interpolación de la señal de control en la capa de frontera.

Debido a la existencia de la capa de frontera, se logra reducir el efecto del *chattering* pero existirá un error finito de régimen permanente como se verifica a continuación.

En la Figura 4.5 se representa a  $\frac{1}{s}$  como una función de transferencia de primer orden, en la cual  $p = d/dt$  es el operador de Laplace,

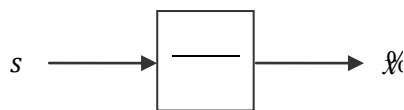


Figura 4.5 Cálculo del error de régimen permanente

El error de seguimiento  $\xi$ , se obtiene como la convolución del sistema de primer orden y la variable  $s$ . Así,

$$\xi = \int_0^t s(\tau) d\tau \tag{4.20}$$

Dada la existencia de la capa de frontera se tiene que  $\xi = \int_{-\phi}^{\phi} s(\tau) d\tau$  por lo tanto 4.20 se transforma en,

$$\xi = \int_{-\phi}^{\phi} s(\tau) d\tau \tag{4.21}$$

Siguiendo el mismo razonamiento, en general para un sistema de orden  $n$ , se puede mostrar que el error de régimen permanente está en función del espesor de la capa de frontera según la ecuación siguiente,

$$\text{---} . \quad (4.22)$$

Se verifica por lo tanto la existencia de un error de régimen permanente que depende del espesor de la capa de frontera.

#### 4.4 Control por modos deslizantes de un robot manipulador

El modelo dinámico de un robot es:

$$(4.23)$$

Del capítulo anterior se conoce que los disturbios y las incertidumbres del robot están limitadas por  $\tau$  y  $\epsilon$ .

Para una trayectoria específica, se define el error de posición como  $e$ . El objetivo del control es diseñar una ley de control realimentada tal que la salida  $q$  del manipulador siga la trayectoria deseada  $q_d$ . Con el fin de obtener el seguimiento de la referencia la superficie de deslizamiento se define según la forma general dada por la ecuación 4.2 para  $n=2$ , como sigue,

$$, \quad (4.24)$$

donde  $\lambda$ , en el modo de deslizamiento, los parámetros determinan la velocidad de convergencia del error de seguimiento (ecuación 4.10). La Ecuación 4.24 define un vector de superficies de deslizamiento, una por cada articulación del robot manipulador. Derivando 4.24,

$$. \quad (4.25)$$

Remplazando  $\dot{s}$  en 4.25 se obtiene,

$$. \quad (4.26)$$

Despejando  $\ddot{q}$  de 4.23 y remplazándolo en 4.26,

$$(4.27)$$

Definiendo la ley de control como,

$$(4.28)$$

donde con  $k_i > 0$  y es el control nominal o equivalente que hace a en ausencia de incertidumbres y disturbios y es la parte no lineal que garantiza el deslizamiento en presencia de disturbios o incertidumbres y cuyo valor se justificará adelante. Por lo tanto se requiere que,

$$(4.29)$$

Para probar la estabilidad del sistema se selecciona la siguiente función cuadrática de Lyapunov.

$$- \quad (4.30)$$

Derivando 4.30,

$$- \quad (4.31)$$

Reemplazando 4.27 en 4.31,

$$\cdot \quad (4.32)$$

Considerando que y reemplazando 4.29 en 4.32,

$$(4.33)$$

Reemplazando ,

$$\cdot \quad (4.34)$$

En el caso de múltiples entradas la condición de alcanzabilidad de la ecuación (4.7), según (Slotine & Li, 1991) se puede especificar de forma análoga como sigue,

$$\text{---} \quad . \quad (4.35)$$

Seleccionando , para cumplir con la condición de alcanzabilidad y teniendo en cuenta que las incertidumbres y disturbios están limitados, se puede seleccionar los componentes  $k_i$  de  $K$  como,

$$(4.36)$$

Con la cual se satisface,

Con (4.36) se satisface la condición de alcanzabilidad, la cual garantiza que la superficie se alcanza en tiempo finito, con la definición del control equivalente se garantiza que una vez en ella las trayectorias permanecen en la superficie y con la selección de la superficie de deslizamiento se garantiza que el error tiende exponencialmente a cero.

Para mostrar esto último, notando que en el modo de deslizamiento se tiene que , puede definirse la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$\text{---} \quad (4.37)$$

Derivando la anterior expresión y reemplazando la condición de deslizamiento

$$(4.38)$$

La expresión anterior conduce a que siendo estable el sistema en la condición de deslizamiento y por lo tanto el error converge a cero.

Para lograr la disminución del *chattering*, la conmutación de la ganancia  $K$  debe ser suavizada mediante una interpolación, por lo cual una opción es reemplazar la función  $sign(s)$  por la función saturación.

La ley de control por modos deslizantes diseñada se aplica al robot manipulador plano de dos grados de libertad, cuyo modelo dinámico, trayectoria deseada y valores de los diferentes parámetros se presentaron en la sección 3.2, la simulación del sistema se implementó en el ambiente *Matlab/Simulink*®, a continuación se presentan los resultados de las diferentes pruebas de desarrolladas.

En primer lugar, se prueba el sistema en ausencia de incertidumbres y de disturbios al aplicarle el control equivalente, el cual es el control promedio que hace que, es decir, es el control que mantiene a las trayectorias del sistema sobre la superficie de deslizamiento. Para corroborarlo, se coloca al sistema en la condición inicial y se define como trayectoria deseada, de esta forma se parte de la condición y mediante la simulación se verifica que el control aplicado lo mantiene en la superficie de deslizamiento. En la Figura 4.6 se observa como el sistema se mantiene en la condición de deslizamiento partiendo del sistema en equilibrio.

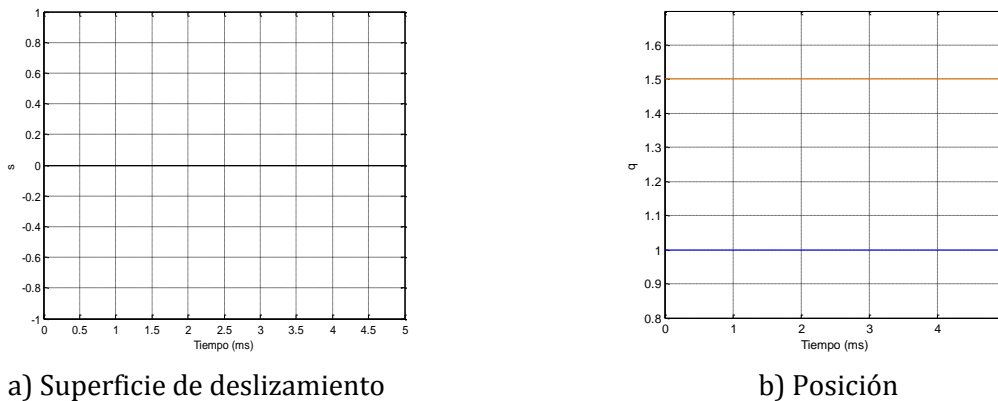


Figura 4.6 Control equivalente

A fin de ilustrar el desempeño del controlador se aplican las trayectorias en el espacio articular del robot dadas por la expresión (3.13) y se consideran los valores iniciales de las posiciones y velocidades especificados en la sección 3.2. La Figura 4.7 muestra el esquema de control por modos deslizantes aplicado al robot manipulador plano de dos grados de libertad.

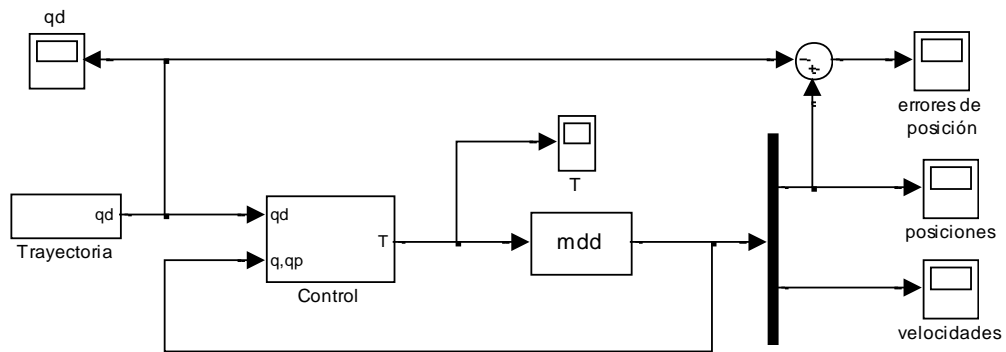
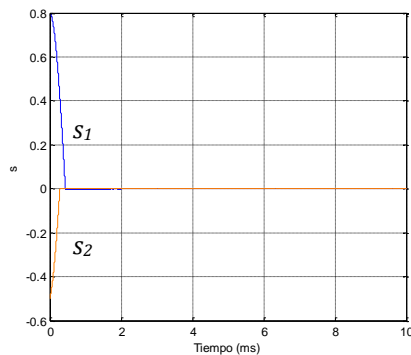


Figura 4.7 Implementación en *Simulink* del control por modos deslizantes

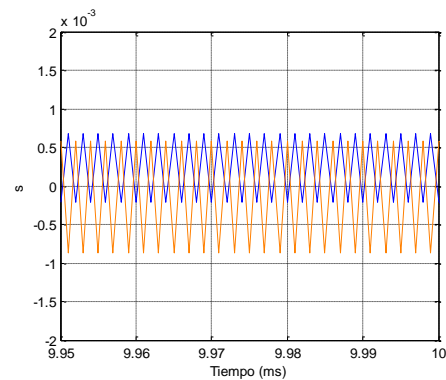
Se aplica la ley de control calculada previamente la cual relaciona a continuación,

donde con y con

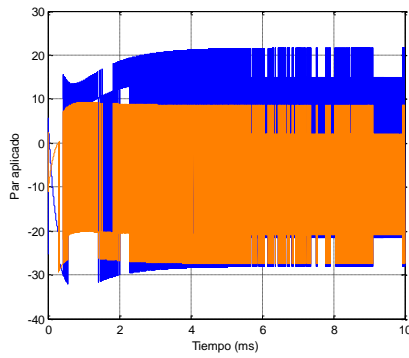
En la Figura 4.8 se muestran los resultados de la simulación, de la gráfica a) se aprecia que los tiempos de alcanzabilidad a la superficie de deslizamiento son de 0.43sg y 0.28 sg para cada variable, en b) se observa la conmutación alrededor de  $s=0$  debido al termino discontinuo del control. En c) se observa la presencia del *chattering* en la señal de control, en d) el control equivalente, el cual es continuo, en e) el error de seguimiento de la posición y en f) una ampliación de la gráfica del error donde se aprecia el decaimiento exponencial del error.



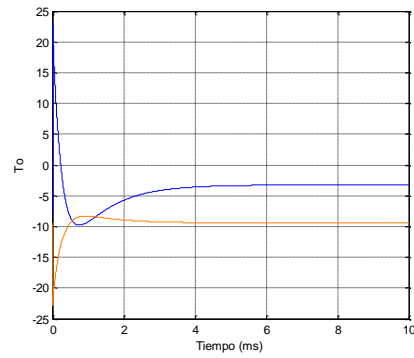
a) Superficie de deslizamiento



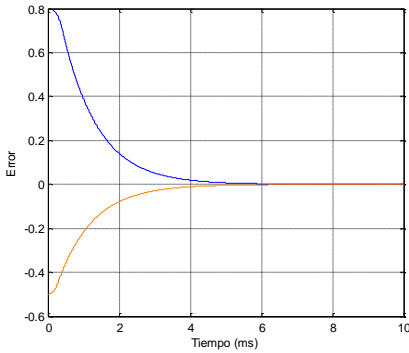
b) Detalle superficie de deslizamiento



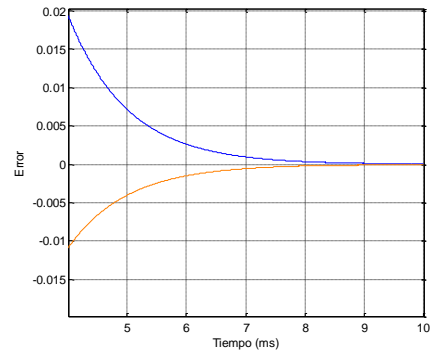
c) Par aplicado



d) Control equivalente



e) Error de seguimiento



f) Convergencia exponencial del error

Figura 4.8 Control por modos deslizantes

Para que se satisfaga la condición de deslizamiento en presencia de incertidumbres, en la ley de control se agregó el término discontinuo siguiente,

El término que acompaña a la función signo, es el responsable de la magnitud del *chattering* de la señal de control de la Figura 4.8c) y del tiempo de alcanzabilidad a la superficie de deslizamiento. En la Figura 4.9a) se presentan los valores que toma , en b) los valores de los componentes de la matriz de inercia y en c) el control .



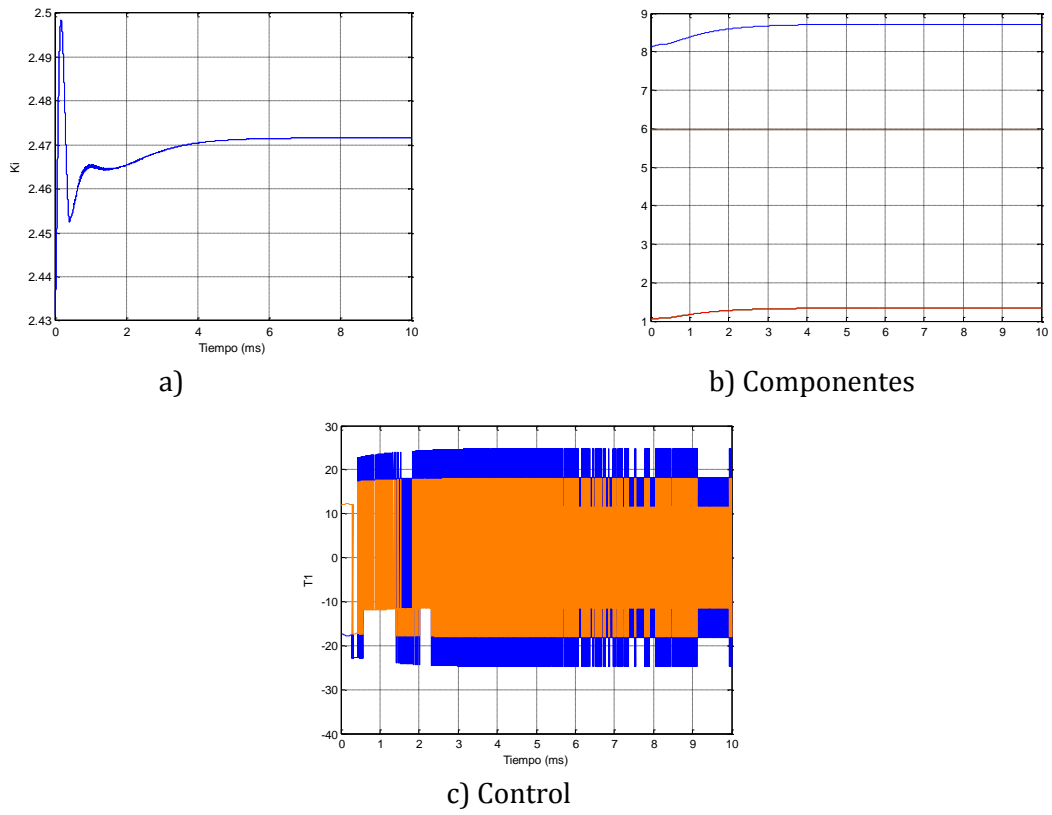
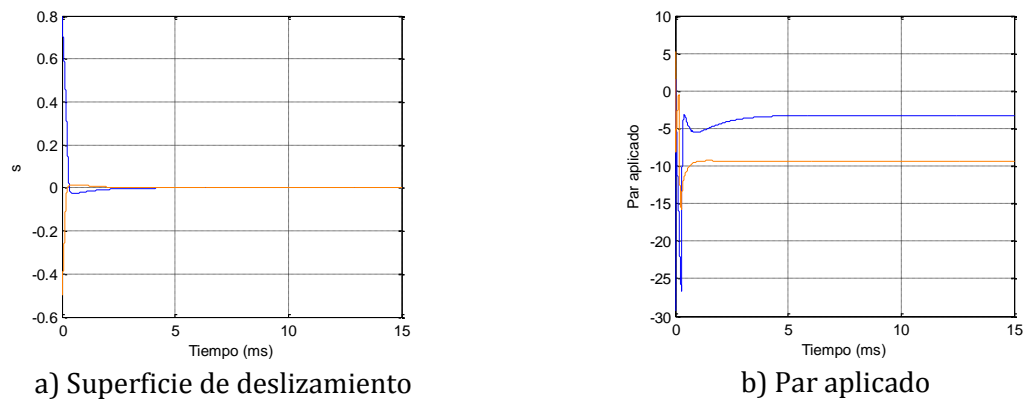


Figura 4.9 Control discontinuo

Como se comentó en la sección 4.3, una forma de “suavizar” la señal de control es establecer una delgada capa de frontera alrededor de la superficie de deslizamiento, lo cual implica reemplazar la función signo por la función saturación. Siendo ahora  $\sigma$  y seleccionando  $\delta$ , los resultados de la simulación se ilustran en la Figura 4.10. Se aprecia la eliminación del *chattering* en la señal de control y la presencia de un pequeño error de régimen permanente  $\sigma$  y  $\tau$ .



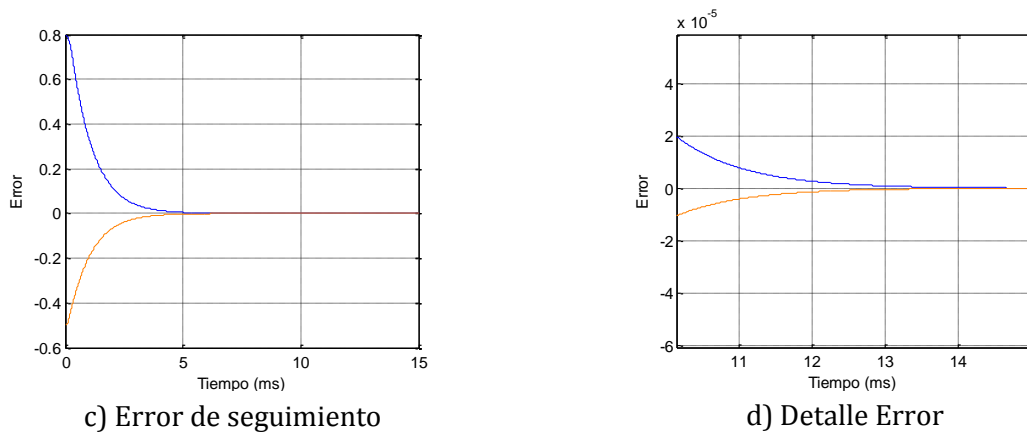
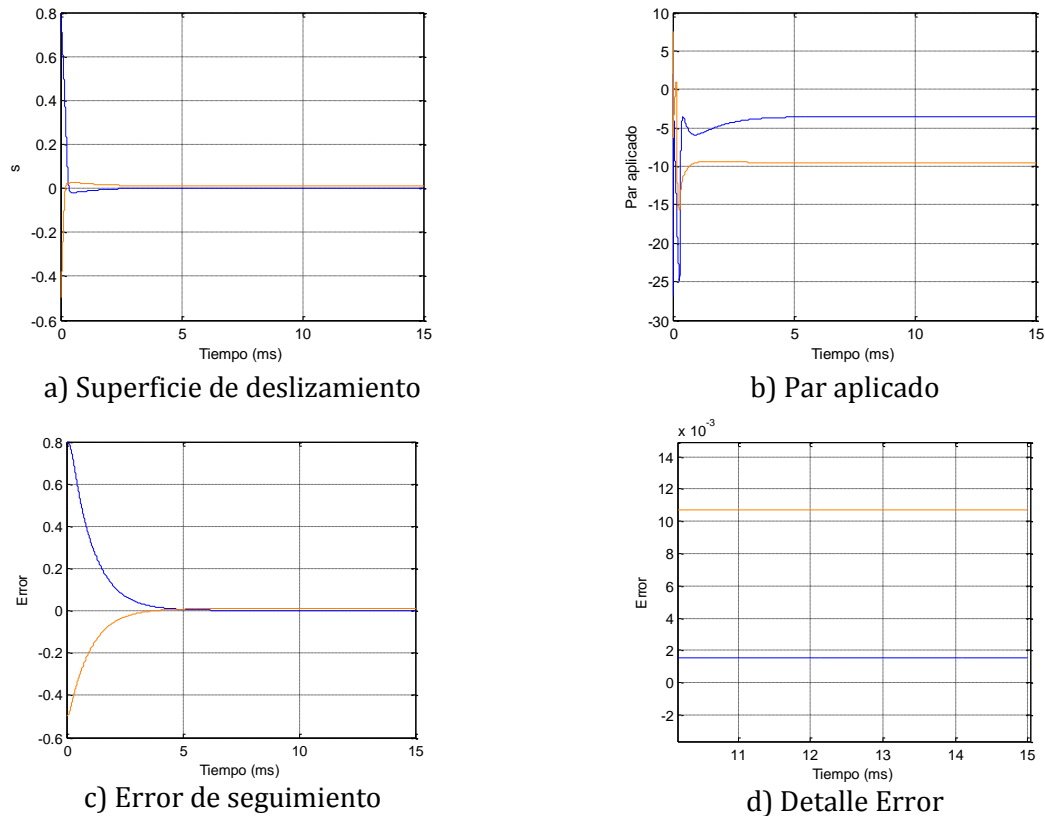
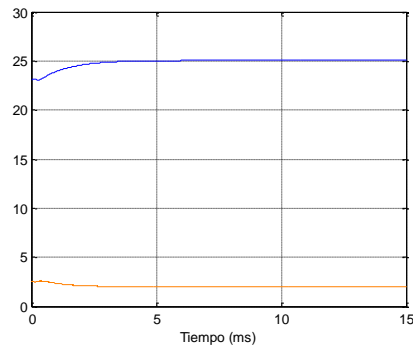


Figura 4.10 Control por modos deslizantes con capa de frontera

Considerando un cambio en los valores de las masas de las articulaciones utilizadas para el cálculo de ley de control, por los siguientes valores nominales:  $m_1 = 0.4 \text{ kg}$ , y  $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ , se obtuvo el resultado mostrado en la Figura 4.11. Se aprecia que el sistema es capaz de responder con un error de régimen permanente de  $\dots$  y  $\dots$ . En e) se verifica que la norma de las incertidumbres del modelo (Ecuación 3.10) está limitada y que son absorbidas por  $\dots$ , verificándose la robustez el sistema ante la presencia de incertidumbres en el modelo.

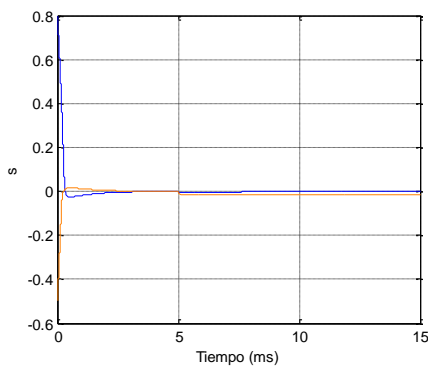




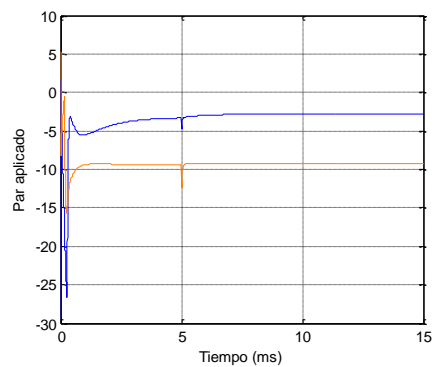
e) Incertidumbre

Figura 4.11 Control por modos deslizantes con capa de frontera e incertidumbres en las masas del modelo.

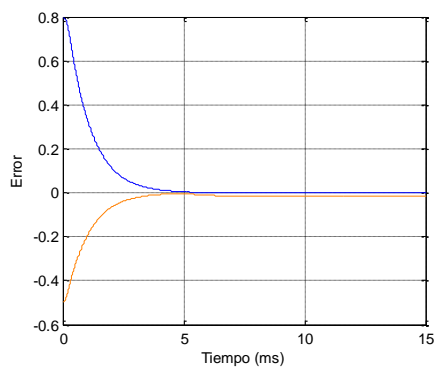
En la Figura 4.12 se realiza la simulación de la tarea de manipular un objeto de 0.5 Kg de masa a partir de  $t=5sg$ , se aprecia que se produce un cambio en el momento de tomar el objeto, se logra un error de régimen permanente de  $y$  .



a) Superficie de deslizamiento



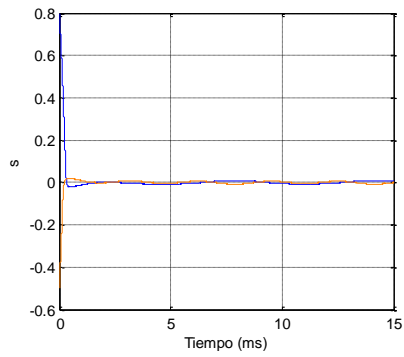
b) Par aplicado



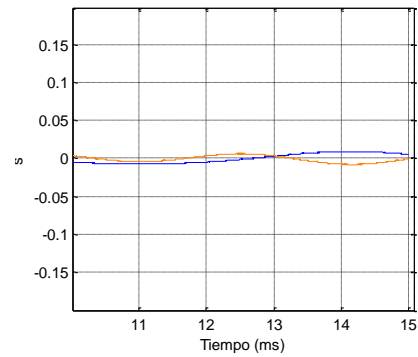
c) Error de seguimiento

Figura 4.12 Control por modos deslizantes con capa de frontera y simulación de la manipulación de un objeto.

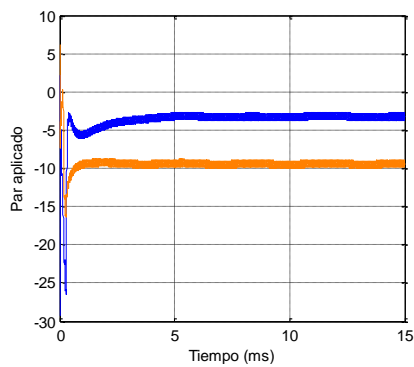
Considerando la siguiente señal de disturbio se prueba el sistema,



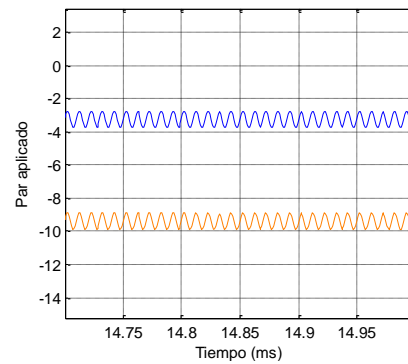
a) Superficie de deslizamiento



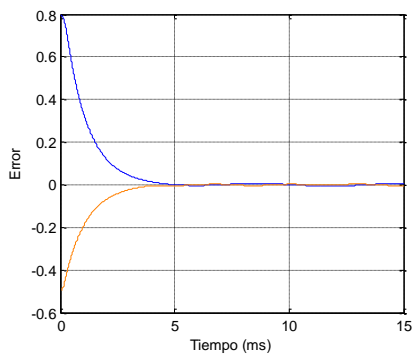
b) Detalle superficie de deslizamiento



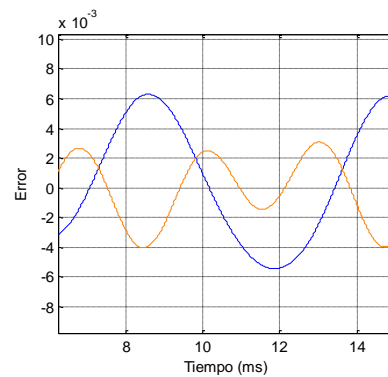
c) Par aplicado



d) Detalle par aplicado



e) Error de seguimiento



f) Detalle Error

Figura 4.13 Control por modos deslizantes con capa de frontera y disturbios externos

En la Figura 4.13, se aprecia que el sistema es capaz de responder con un error de régimen permanente pequeño, teniendo en cuenta que la señal de disturbio está limitada por  $\epsilon$  y éste valor está incluido en la definición de  $K$  se verifica la robustez del sistema ante la presencia de disturbios externos.

En las simulaciones realizadas se ha verificado en primer lugar las propiedades y características del control por modos deslizantes y su robustez ante la presencia de incertidumbres en el modelo y disturbios externos.

## 4.5 Resumen

El control por modos deslizantes consiste en llevar al sistema a vivir en una superficie sobre el espacio de estado, denominada superficie de deslizamiento, y una vez en ella mantenerlo allí ante posibles perturbaciones externas. Así la dinámica del sistema en lazo cerrado está determinada sólo por la superficie de deslizamiento. La característica más sobresaliente de esta técnica de control es su robustez a las incertidumbres y a los disturbios del sistema una vez se está en el modo de deslizamiento.

El control se diseña para que cumpla la condición de alcanzabilidad y así garantizar un tiempo de alcanzabilidad finito a la superficie de deslizamiento, una vez en ella, la parte nominal del control que se diseña para que  $\dot{s} = 0$ , el cual permita que las dinámicas del sistema permanezcan en la superficie de deslizamiento. A fin de tener en cuenta las incertidumbres, el control también consta de una parte discontinua, la cual garantiza que en presencia de incertidumbres las dinámicas conmutan alrededor de la superficie de deslizamiento, lo anterior genera el efecto indeseable conocido como *chattering*, el cual puede ser suavizado utilizando una capa de frontera, es decir, reemplazando la función discontinua por la función saturación. Debido a la existencia de la capa de frontera, se logra reducir el efecto del *chattering* pero existirá un error finito de régimen permanente.

En el control por modos deslizantes, si se cumple la condición de alcanzabilidad, se garantiza que el estado del sistema alcanza la superficie de deslizamiento en un tiempo finito ( $t_r$ ), y que la convergencia del estado del sistema al punto de equilibrio es asintótica, debido a que las superficies de deslizamiento comúnmente se seleccionan para que la dinámica presente convergencia exponencial cuando el tiempo tiende al infinito.



## 5. Control por Modos Deslizantes Terminal

El Control por Modos Deslizantes Terminal (*Terminal Sliding Mode Control, TSMC*) fue propuesto por (Venkataraman & Gulati, 1991), (Man, Paplinski, & Wu, 1994) y (Wu, Yu, & Man, 1998), es una variante del control por modos deslizantes, en la cual al introducir un término no lineal en la definición de la superficie de deslizamiento, la convergencia del error en el modo de deslizamiento se alcanza en un tiempo finito y menor que con la técnica convencional del control por modos deslizantes introducida en el capítulo anterior.

En las secciones 5.1 a 5.3 se presentan las ideas básicas del *TSMC* y en la sección 5.4 se aplican al caso concreto del control de un robot manipulador de dos grados de libertad, se considera el diseño del controlador y los resultados de las simulaciones del sistema sujeto a disturbios e incertidumbres en el modelado.

### 5.1 Atractores terminales

La idea utilizada en el control por modos deslizantes terminal proviene del concepto de atractor terminal presentado originalmente por (Zak, 1988) para mejorar las características de desempeño de las redes neuronales de memoria asociativa.

La existencia de los atractores terminales, Zak la estableció mediante el siguiente argumento: Para el sistema dinámico disipativo siguiente,

(5.1)

los  $N$  puntos de equilibrio son definidos como las soluciones constantes para  $\dot{x} = 0$ . Si las partes reales de los autovalores de la matriz Jacobiana en cada punto de equilibrio son todos negativos, es decir  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ , entonces todos los puntos de equilibrio son asintóticamente estables localmente. Tales puntos son llamados atractores

regulares. Si se satisface la condición de Lipschitz, es decir  $\frac{1}{k} > 1$ , se garantiza la existencia de una única solución para cada punto inicial del plano de fase y teóricamente el tiempo de aproximación de los atractores es siempre infinito.

En contraste, la definición de un atractor terminal esta basada en la violación de la condición de Lipschitz, como resultado de esta violación, un punto de equilibrio es una solución singular y se aproxima en un tiempo finito.

El atractor terminal propuesto por Zak es de la forma,

$$\dot{x} = -kx \quad (5.2)$$

Por lo tanto derivando (5.2),

$$\frac{dx}{x} = -k dt \quad (5.3)$$

De (5.3) se observa que si  $k > 1$ , cuando  $x = 0$  y  $t = 0$  es conocido como un atractor regular. En contraste, si  $k < 1$ , entonces cuando  $x = 0$  y  $t = 0$  es conocido como un atractor terminal, término utilizado describir su rápida convergencia a un punto de atracción.

A fin de aclarar la necesidad de la definición de  $k$  como fracción con denominador impar, se considera el siguiente ejemplo: Sea  $k=1/3$ , por lo tanto  $k-1= -2/3$  y  $\frac{1}{k-1} = -3/2$ , tendrá solución real para todo  $x$ . Por lo tanto la definición dada garantiza que la solución de la ecuación (5.3) este en el dominio real.

El sistema dado por (5.2) tiene un punto de equilibrio en  $x = 0$ , reorganizando términos en (5.3) e integrando ambos lados de la ecuación en el intervalo  $[t_0, t]$ , donde  $t_0$  es el tiempo inicial, es el estado del sistema en  $t_0$  y  $t$  es el tiempo en el cual el sistema alcanza el equilibrio,

$$x(t) = x(t_0) e^{-k(t-t_0)} \quad (5.4)$$

La ecuación (5.4) implica que se alcanza el punto de equilibrio en un tiempo finito. En la Figura 5.1 se grafica el tiempo  $t$  versus la condición inicial  $x(t_0)$  para el atractor regular ( $k>1$ ) y para el



atractor terminal ( $k < 1$ ), se observa que para los atractores regulares el tiempo de convergencia tiende al infinito, teóricamente nunca llega a la solución. En el caso de los atractores terminales, decae a en el tiempo, el cual es finito.

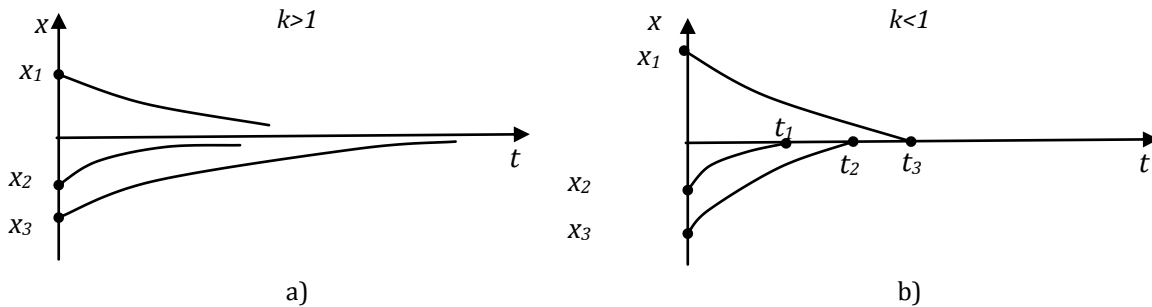


Figura 5.1 a) Convergencia exponencial del atractor regular. b) Convergencia en tiempo finito del atractor terminal.

## 5.2 Concepto de modos deslizantes terminal

Recientemente, (Venkataraman & Gulati, 1991) (Man, Paplinski, & Wu, 1994) y (Tang, 1998), aplicaron el concepto de atractores terminales y propusieron una nueva forma de la superficie de deslizamiento, que permite lograr un tiempo de convergencia finito en el modo de deslizamiento. En general, el modo de deslizamiento terminal ha sido definido por la siguiente ecuación no lineal,

$$(5.5)$$

donde es el error de seguimiento, ,  $q$  y  $p$  son números enteros impares y positivos tal que y . Se observa que en la ecuación (5.5) con  $q/p = 1$ , se obtiene la misma superficie que en el caso de modo deslizante convencional de la ecuación (4.24).

En la Figura 5.2a) considerando se comparan la dinámica del error con las dos superficies de deslizamiento, se observa la convergencia exponencial para el caso de modos deslizantes convencional representada por la línea punteada, comparada con un tiempo de convergencia finito aproximadamente de  $2sg$  para la superficie de deslizamiento terminal con (curva azul). La curva verde, se obtuvo con , una variación de la relación afecta el tiempo terminal. En la curva roja con , se verifica que un

incremento en  $\alpha$  implica una disminución del tiempo terminal, como se mostrará adelante en la ecuación (5.7).

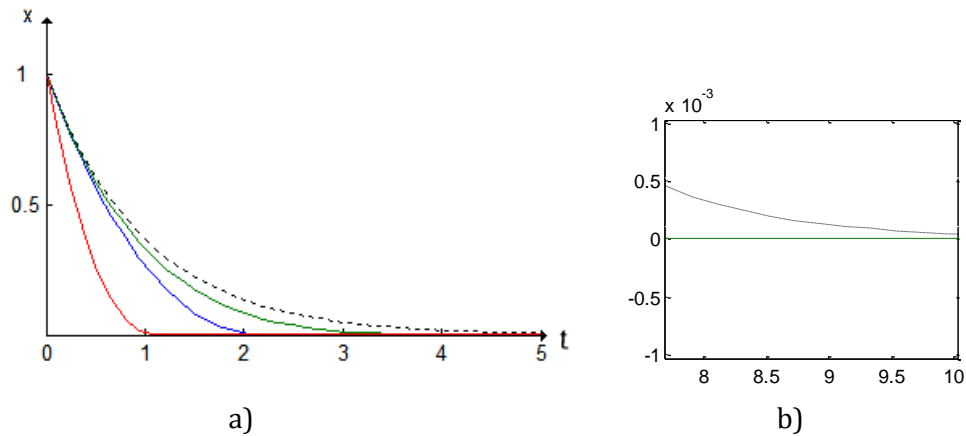


Figura 5.2 Comparación superficie de deslizamiento convencional y terminal

El modo de deslizamiento ( ), puede ser alcanzado si se cumple la condición de deslizamiento, referida en el capítulo anterior en la ecuación (4.7). La condición de deslizamiento garantiza que la superficie se alcanza en un tiempo finito , ya que la condición de alcanzabilidad considerada es la misma que el caso de modos deslizantes convencional, el tiempo en el cual se alcanza la superficie es el mismo (ecuación 4.8). Por lo tanto los dos modos alcanzan la superficie en el mismo tiempo finito, pero en la fase de deslizamiento el modo convencional converge exponencialmente y el modo terminal lo hace en un tiempo finito.

En el modo de deslizamiento la dinámica del sistema se determina mediante la siguiente ecuación diferencial no lineal,

$$\dot{e} = -\alpha e^{\beta}, \quad (5.6)$$

donde  $e$  es un atractor terminal. Para una condición inicial  $e(0)$  siendo  $t_0$  el tiempo en el cual se alcanza la superficie de deslizamiento y  $t_f$  el tiempo cuando el error converge a cero, es decir,  $e(t_f) = 0$ , se calcula  $t_f$  a partir de (5.6), reorganizando términos e integrando se obtiene,

—

Se verifica que la dinámica del error converge en un tiempo finito dado por

$$\text{---} \quad (5.7)$$

La ecuación (5.7) implica que se alcanza en un tiempo finito (terminal) (ver Figura 5.3).

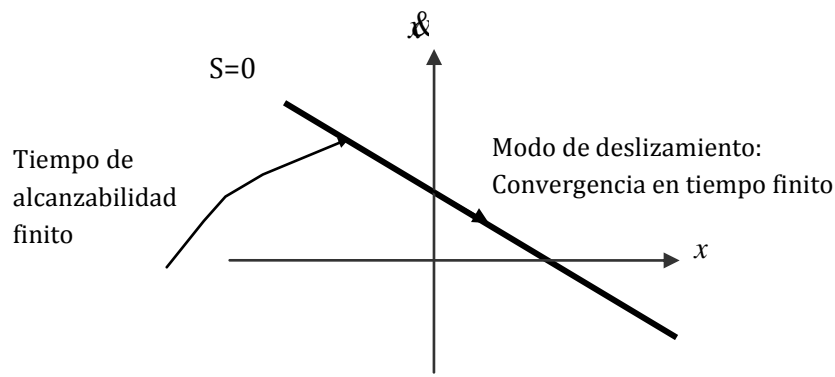


Figura 5.3 Tiempo de alcanzabilidad y convergencia del error en tiempo finito

Resolviendo la ecuación (5.6), se comprueba que la dinámica del error en régimen de deslizamiento está dada por,

$$\text{---} \quad (5.8)$$

La ecuación (5.8) muestra que existirá un error de régimen permanente. En la Figura 5.2 se graficó para valores seleccionados de , lo cual permite verificar que el modos deslizante terminal presenta un tiempo de convergencia del error menor que el modos deslizantes convencional, adicionalmente mediante el detalle de la simulación mostrada en 5.2b) se verifica que el modos deslizante terminal obtiene un mejor desempeño (menor error) que su equivalente lineal que converge de modo exponencial.

### 5.3 Diseño del control por modos deslizantes terminal

El principio básico de diseño del control por modos deslizantes terminal sigue un procedimiento similar de diseño que el utilizado en la sección 4.3 y será presentado a partir del siguiente sistema dinámico de segundo orden con incertidumbres,

(5.9)

A fin de obtener un seguimiento de la referencia  $r(t)$ , se define la superficie de deslizamiento dada por 5.5, por lo tanto derivando 5.5,

$$\dot{s} = -\lambda s \quad (5.10)$$

Considerando que  $\dot{x} = Ax + B\dot{u}$  y reemplazando 5.9 en 5.10 se obtiene,

$$-\lambda s = A s + B \dot{u} \quad (5.11)$$

El control promedio o equivalente hace que  $\dot{s} = -\lambda s$  en ausencia de incertidumbres ( $d(t)=0$ ) en el modelo y de disturbios externos ( $d(t)=0$ ). Así,

$$-\lambda s = A s + B u \quad (5.12)$$

Para lograr cumplir la condición de deslizamiento en presencia de incertidumbres, se agrega un término discontinuo al control promedio, así se define  $u = u_{eq} + u_{dis}$  con  $k$  como una constante positiva cuya magnitud depende de las incertidumbres y disturbios del sistema. Así,

$$-\lambda s = A s + B (u_{eq} + u_{dis}) \quad (5.13)$$

Se elige  $u_{dis} = -k \text{sgn}(s)$ , para cumplir la condición de deslizamiento 4.7, entonces,

(5.14)

Debido a que las incertidumbre en el modelo están limitadas, , siempre se cumple que y debido a que el disturbio se considera limitado por se cumple que , permitiendo que se pueda garantizar la condición de deslizamiento en presencia de incertidumbres en el modelo y disturbios limitados.

Entonces, la ley de control por modos deslizantes diseñada es la siguiente,

$$u = - \quad (5.15)$$

La señal de control anterior, asegura que el modo de deslizamiento terminal ocurre. Se debe notar de la ecuación (5.14) que si , el sistema alcanza el modo de deslizamiento en un tiempo finito e igual al caso de modos deslizantes convencional. Pero el tiempo de convergencia del error en el caso del control por modos deslizantes terminal es finito, mientras que en el modo convencional converge asintóticamente a cero.

En la ley de control por modos deslizantes terminal definida por (5.15), se presentan los siguientes inconvenientes:

- i) De la definición de  $s$  dada por la ecuación (5.5) se puede observar que cuando el término no es real (dado que  $q$  y  $p$  son impares).
- ii) El término puede causar una singularidad si cuando , (recordar que por definición , es decir y por lo tanto ). Sin embargo, cuando , se obtiene que y por lo tanto,

si se garantiza que la selección de o , la situación ii) no ocurre en el modo de deslizamiento. Por lo tanto el problema de singularidad sólo puede ocurrir en la fase de alcanzabilidad.

En general, el *CMDT* definido no puede garantizar la ausencia de singularidades, adicionalmente según (Feng, Yu, & Man, 2002) aún en la fase de deslizamiento también podría llegar a presentarse esta situación debida a errores computacionales o factores inciertos, los estados del sistema no pueden garantizar que siempre permanezcan en el modo de deslizamiento especialmente cerca del punto de equilibrio donde y .

Por lo anterior (Feng, Yu, & Man, 2002) y (Yu, Yu, Shirinzadeh, & Man, 2005), han propuesto otras formas de definición de la superficie de deslizamiento para solucionar los inconvenientes expuestos.

Así en (Feng, Yu, & Man, 2002), se plantea la siguiente forma de superficie que se conoce como modo deslizante terminal no singular,

$$(5.16)$$

donde  $\lambda$  y  $\lambda_1$  . La cual es equivalente a la forma original de modos deslizantes terminal con  $\lambda$  y  $\lambda_1$  . Se puede verificar, que cuando  $\lambda > 0$  ,

$$\frac{ds}{dt} = -\lambda s - \lambda_1 s^2 \quad (5.17)$$

La ecuación (5.17) muestra que (5.16) es equivalente a (5.5) en el modo deslizante.

Utilizando (5.16), la derivada de  $s$  expresada por (5.18) no tiene términos fraccionales negativos dado que  $\lambda > 0$  ,

$$(5.18)$$

Siguiendo el procedimiento de diseño se obtiene el control promedio hace que  $u$  en ausencia de incertidumbres (  $d=0$  ) en el modelo y de disturbios externos ( $d(t)=0$ ). Así,

$$(5.19)$$

Diseñando para cumplir la condición de deslizamiento se obtiene la si siguiente ley de control, conocida como modos deslizantes terminal no singular,

$$(5.20)$$

Debido a que  $\lambda > 0$  en esta ley de control el término  $s^{\lambda}$  es no singular tanto en la fase

de alcanzabilidad como en la fase de deslizamiento, recordar que en la fase de deslizamiento las superficies dadas por las ecuaciones (5.5) y (5.16) son equivalentes. Sin embargo, se tiene que  $s$  y por lo tanto 5.20 pueden ser no reales si  $\dots$ .

Para garantizar que  $\dots$ , en (Yu, Yu, Shirinzadeh, & Man, 2005) parten del modo de deslizamiento no singular y proponen la siguiente forma de modo de deslizamiento terminal.

$$\dots \tag{5.21}$$

donde  $\dots$  y  $\dots$  y la inclusión del valor absoluto garantiza que el error de seguimiento siempre será real.

Se puede verificar que la derivada de  $s$  es continua y diferenciable, expresando (5.21) como,

$$\dots \tag{5.22}$$

La expresión (5.22) es continua cuando  $\dots$  o  $\dots$  y sigue siendo continua para  $\dots$  debido a que las derivadas parciales para este caso son,

$$\begin{matrix} \text{-----} & \text{-----} \\ \text{-----} & \text{-----} \end{matrix} \tag{5.23}$$

Así la primera derivada de  $s$  está dada por,

$$\dots \tag{5.24}$$

Siguiendo el procedimiento de diseño se obtiene el control promedio hace que  $\dots$  en ausencia de incertidumbres ( $\dots$ ) en el modelo y de disturbios externos ( $d(t)=0$ ). Así,

$$\dots \tag{5.25}$$

Diseñando para cumplir la condición de deslizamiento se obtiene la siguiente ley de control,

(5.26)

Debido a que en esta ley de control el término es no singular y siempre es real.

## 5.4 Variantes del control por modos deslizantes terminal

Adicional a la tradicional ley de alcanzabilidad discontinua, existen diversas formas de definir las leyes de alcanzabilidad, entre ellas la conocida como ley de alcanzabilidad exponencial (Hung, Gao, & Hung, 1993) que se define como sigue,

(5.27)

Con esta ley, el sistema desde el estado inicial  $s(0)$  alcanza el modo de deslizamiento en el tiempo finito dado por,

— —————

De la ecuación anterior, se aprecia que incrementando y reduciendo, se logra disminuir el tiempo de alcanzabilidad y al mismo tiempo al elegir un menor, se puede atenuar el efecto del *chattering* ya que según 5.27 con menor se atenúa el término (Yu, Guo, Ma, & Du, 2006).

Estas dos leyes de alcanzabilidad mencionadas conducen a un diseño del control por modos deslizantes discontinuo y como resultado de ello el *chattering* ocurrirá en la fase deslizamiento. Un método convencional de tratamiento es la inclusión de la capa de frontera, como se mencionó en la sección 4.3 del capítulo anterior, la cual reemplaza la función signo por la función saturación, así se alcanza la capa de frontera en un tiempo finito.

En (Yu, Yu, Shirinzadeh, & Man, 2005), se propone una ley de alcanzabilidad continua denominada *fast terminal sliding (FTSM)*, la cual se define como sigue:



$$(5.28)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas y  $\gamma > 0$ . Esta ley de alcanzabilidad reemplaza el término discontinuo  $\text{sign}(s)$  por el término continuo y no lineal  $\frac{s}{|s| + \beta}$  que también reduce el *chattering*.

Para probar que (5.28) puede ser considerada como ley de alcanzabilidad, considere la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$V = \frac{1}{2} s^2, \quad (5.29)$$

y su derivada,

$$\dot{V} = s \dot{s}. \quad (5.30)$$

Reemplazando (5.28) en (5.30),

$$(5.31)$$

Reemplazando  $\dot{s}$  en 5.31,

$$(5.32)$$

Ya que  $\alpha$  y  $\beta$  son números positivos se tiene que  $\dot{V} < 0$ .

Con esta ley, el sistema desde el estado inicial  $x(0)$  alcanza el modo de deslizamiento en el tiempo finito  $t_r$  dado por,

$$t_r = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{2\alpha |s(0)|}{\beta} + 1 \right) \quad (5.33)$$

En la Figura 5.4 se ilustra los tiempos de alcanzabilidad logrados por la tradicional ley de alcanzabilidad  $t_{tr}$  dado por la Ecuación (4.8) y por la ley FTSM dado por 5.33. Los valores considerados para la simulación son  $\alpha = 100$ ,  $\beta = 0.1$ , se aprecia que  $t_{tr} = 1.76$  sg para la ley de alcanzabilidad tradicional, mientras que para la ley FTSM es 1.76 sg.

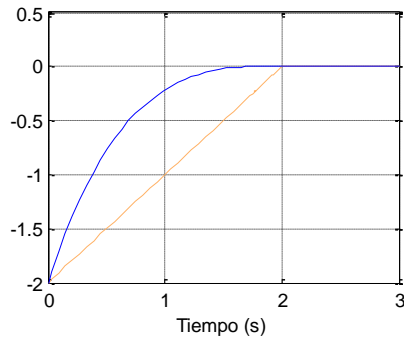


Figura 5.4 Tiempo de alcanzabilidad de la superficie de deslizamiento

En la Figura 5.3 se presenta una comparación de las distintas leyes de alcanzabilidad utilizadas en el diseño del control por modos deslizantes, en línea punteada se presenta la ley de alcanzabilidad discontinua, en línea de puntos la función saturación y en línea continua la ley de alcanzabilidad FTSM, es de notar que las dos últimas son leyes continuas y que permiten solucionar el problema del *chattering*.

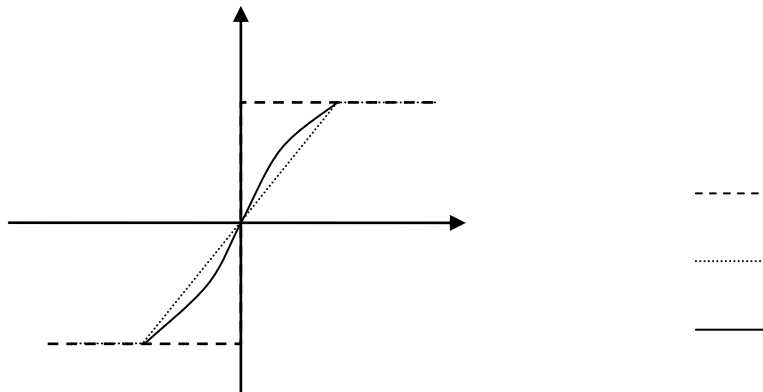


Figura 5.5 Comparación de las leyes de alcanzabilidad

## 5.5 Control por modos deslizantes terminal de un robot manipulador

Considere el siguiente modelo dinámico de un robot manipulador con incertidumbres y disturbios limitados como se definió en la sección 3.2,

$$, \tag{5.34}$$

con  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$ .

El error de posición se define como  $\mathbf{e} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ . El objetivo del control es diseñar una ley de control realimentada tal que la salida  $\mathbf{q}$  del manipulador siga la trayectoria deseada  $\mathbf{q}_d$ . El procedimiento de diseño que se sigue es similar al desarrollado para modos deslizantes convencional, y se usará el diseño expresado mediante las ecuaciones (5.21) y (5.24)-(5.26). Con el fin de extender el diseño del caso SISO al caso MIMO de un robot manipulador, se introduce la siguiente notación,

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \quad (5.35)$$

Incluyendo la notación dada por (5.35) en (5.21), la superficie de deslizamiento se define como sigue,

$$\mathbf{s} = \mathbf{e} + \lambda \mathbf{e} \quad (5.36)$$

donde  $\lambda$  es una matriz diagonal positiva,  $\mathbf{e}$  es el error de posición y  $\mathbf{q}$  es la posición actual.

Derivando (5.36),

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{e}} + \lambda \dot{\mathbf{e}} \quad (5.37)$$

Considerando en (5.37)  $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}$  y despejando  $\dot{\mathbf{q}}$  de (5.34),

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{K} \mathbf{s} \quad (5.38)$$

Para el diseño, en primer lugar se ha definido la superficie de deslizamiento dada por (5.36) y para el análisis de estabilidad que se realiza más adelante, se considera la condición de alcanzabilidad tipo *fast terminal sliding* (FTSM) dada por,

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{K} \mathbf{s} \quad (5.39)$$

donde  $\mathbf{K}$  es una matriz diagonal positiva,  $\mathbf{s}$  es la superficie de deslizamiento y  $\dot{\mathbf{s}}$  es su derivada.

Definiendo la ley de control como,

(5.40)

donde  $u_0$  es el control nominal o equivalente que hace a  $\dot{s} = 0$  en ausencia de incertidumbres y disturbios y  $u_1$  es el control que permitirá que se cumpla la condición de deslizamiento en presencia de incertidumbres, el cual se justifica más adelante a partir del enfoque de Lyapunov. Por lo tanto igualando a cero (5.38) y con  $\dot{s} = 0$  y  $\ddot{s} = 0$ , se obtiene,

(5.41)

Considerando una parte del término de la izquierda de (5.41),

Ahora, teniendo en cuenta que en general  $\ddot{s} = 0$ , por lo tanto considerando que  $\dot{s} = 0$  y siendo  $\ddot{s} = 0$ , el término de la izquierda de (5.41) es equivalente a,

Considerando la equivalencia anterior y calculando  $u_1$  de (5.38) para  $\dot{s} = 0$ , se obtiene el control equivalente siguiente,

(5.42)

Para probar la estabilidad del sistema se selecciona la siguiente función cuadrática de Lyapunov.

$$- \quad (5.43)$$

Derivando (5.43) con respecto al tiempo y reemplazando (5.38), con  $\dot{x}$  dado por (5.40),

$$(5.44)$$

Simplificando términos,

$$(5.45)$$

Analizando (5.45) para los dos casos siguientes,

i) En ausencia de incertidumbres, es decir con  $\Delta = 0$  y  $\dot{x} = 0$ , se obtiene,

Siendo equivalente a,

$$(5.46)$$

donde,

y

$\Lambda$  y  $\Gamma$  son matrices diagonales definidas positivas si  $\lambda_i > 0$ , así en 5.46 se mantiene la forma de la ley de alcanzabilidad (5.39) y por lo tanto se garantiza la estabilidad en un tiempo finito.

ii) Para  $\Delta \neq 0$  y  $\dot{x} = 0$ , la ecuación (5.45) se reduce a,

.

La expresión anterior se puede hacer equivalente a las siguientes dos formas:

$$(5.47)$$

(5.48)

De la ecuación (5.47), si se mantiene la matriz  $P$  definida positiva, la estructura de la ecuación (5.46) se mantiene por lo tanto se garantiza la estabilidad en un tiempo finito.

De otro lado, de la ecuación (5.48), siguiendo un análisis similar, se requiere mantener la matriz  $Q$  definida positiva para garantizar la estabilidad en tiempo finito.

Por lo tanto, teniendo en cuenta las condiciones de limitación del disturbio e incertidumbres en (5.34), si se selecciona  $\alpha$  con  $\alpha > 0$  para garantizar la condición de definición negativa de la derivada de la ecuación de Lyapunov tanto en (5.27) como en (5.28) y por lo tanto, la estabilidad en tiempo finito.

El control por modos deslizante terminal con ley de alcanzabilidad tipo FTSM aplicado al caso de un robot manipulador plano de dos grados de libertad, cuyo modelo dinámico, trayectoria deseada y valores de los diferentes parámetros se presentaron en la sección 3.2, se implementó en el ambiente *Matlab/Simulink*®. La ley de control calculada previamente se relaciona a continuación,

donde  $\alpha$  con  $\alpha > 0$ ,  $\beta$  con  $\beta > 0$ ,  $d=2.5$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ .

A fin de ilustrar el desempeño del controlador se aplican las trayectorias en el espacio articular del robot dadas por la expresión (3.13) y se consideran los valores iniciales especificados en la sección 3.2. A continuación se presentan los resultados de las diferentes pruebas realizadas.

En la Figura 5.6 se muestran los resultados de la simulación aplicando la ley de control enunciada. De la gráfica a) se aprecia que los tiempos de alcanzabilidad a la superficie de deslizamiento son de 0.4sg y 0.36 sg para cada variable, en b) se observa que las dinámicas de sistema llegan a  $s=0$  en un tiempo finito, notar que la escala de la gráfica esta en  $10^{-9}$ . En c) se

observa que la señal de control es continua y libre de *chattering*, en d) el control equivalente aplicado, en e) el error de seguimiento de la posición, el cual converge a cero y en f) una ampliación de la gráfica del error donde se aprecia que la magnitud del error es prácticamente cero, notar que

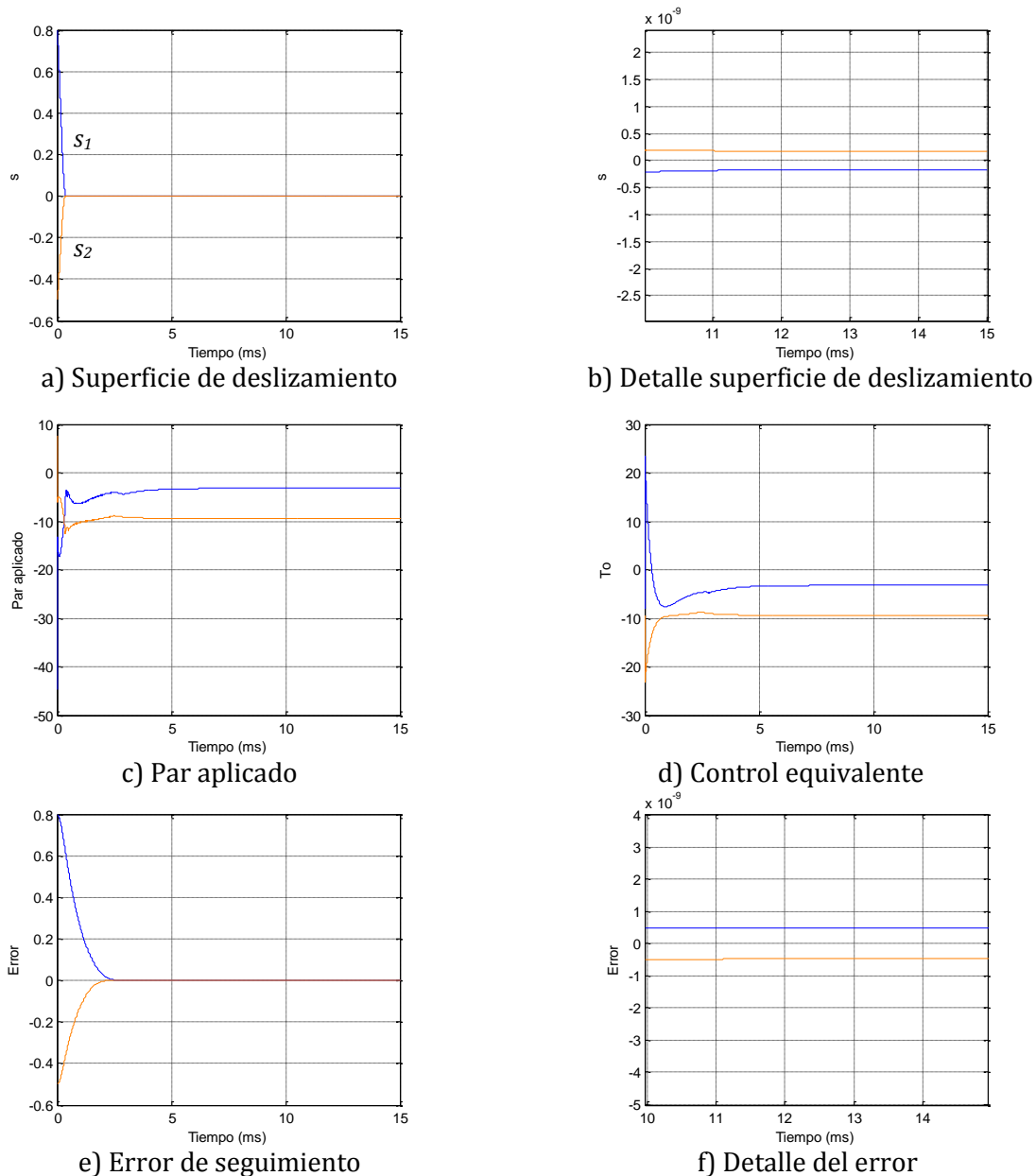


Figura 5.6 Control por modos deslizantes terminal

Considerando un cambio en los valores estimados de las masas de las articulaciones, por los siguientes valores nominales:  $m_1 = 0.4 \text{ kg}$ , y  $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ , se obtiene el resultado mostrado en la Figura 5.7. Se aprecia que el sistema es capaz de responder con un error de régimen permanente de  $y$ . En e) se verifica que la norma de las incertidumbres del

modelo (Ecuación (3.10)) está limitada y que son absorbidas por , verificándose la robustez el sistema ante la presencia de incertidumbres en el modelo y un mejor comportamiento que el modos deslizantes convencional.

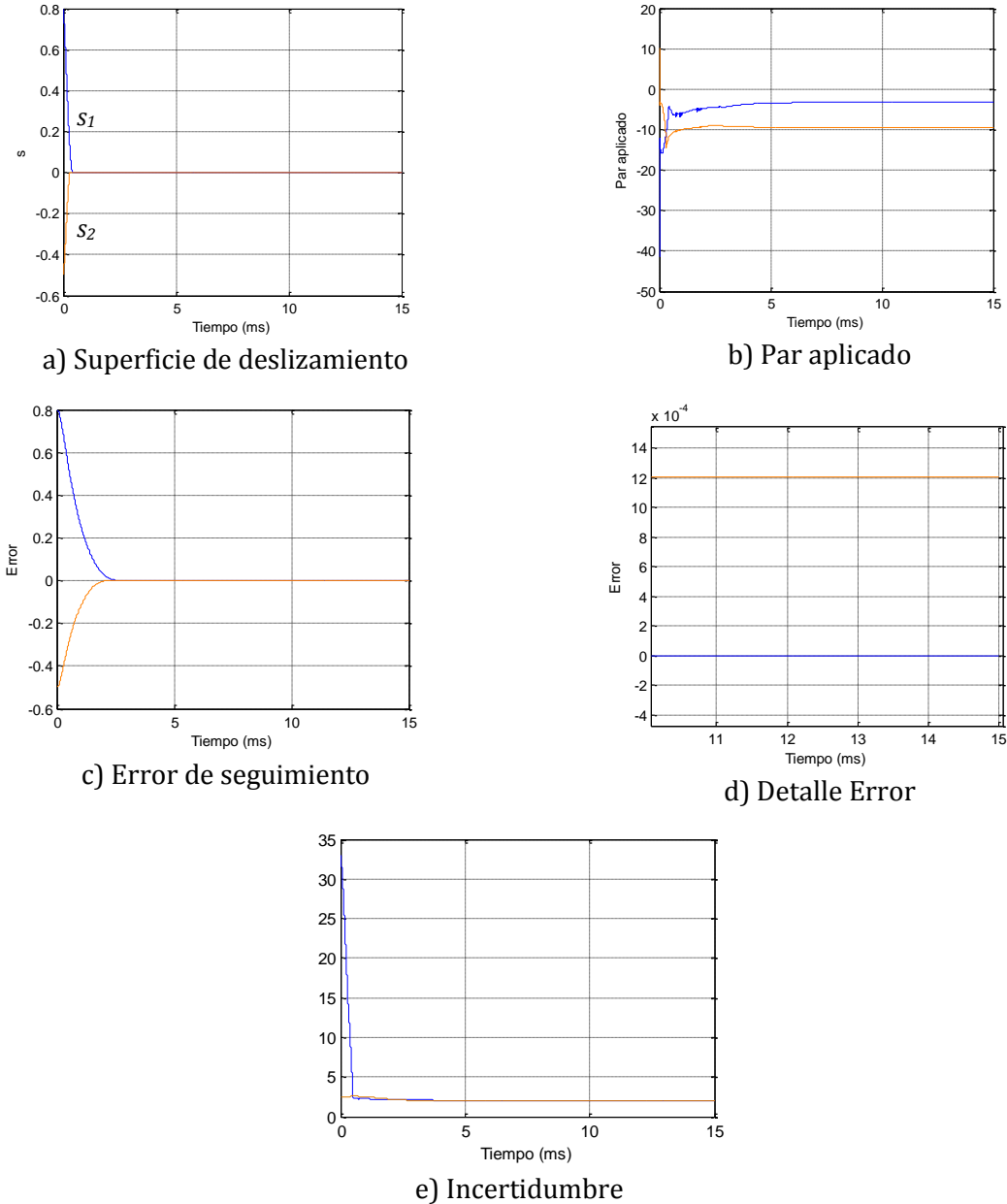


Figura 5.7 Control por modos deslizantes terminal con incertidumbres en las masas

En la Figura 5.8 se realiza la simulación de la tarea de manipular un objeto de 1 Kg de masa a partir de  $t=5$ sg, se aprecia que se produce un cambio en el momento de tomar el objeto, se logra un error de régimen permanente de  $12 \times 10^{-4}$  y  $0$  el cual es menor que el logrado con la técnica de modos deslizantes convencional.



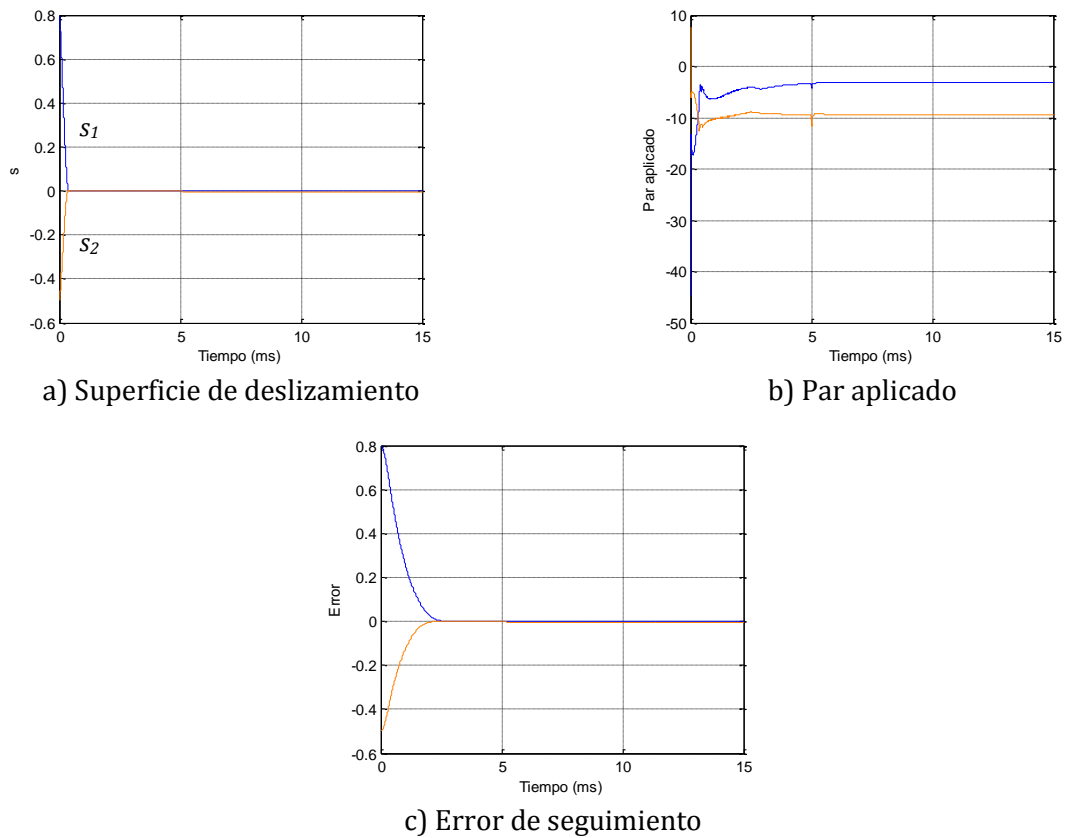
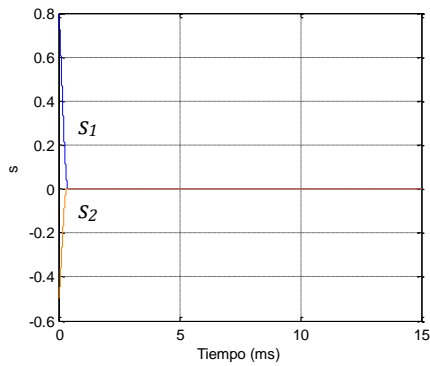


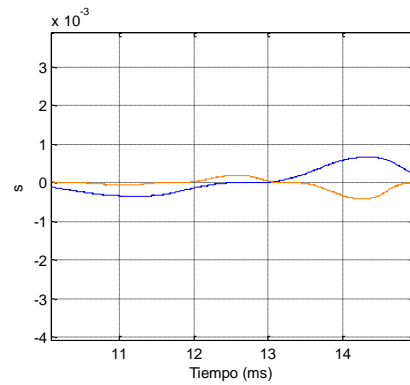
Figura 5.8 Control por modos deslizantes terminal, simulación de la tarea de manipulación de un objeto.

Considerando la siguiente señal de disturbio se prueba el sistema,

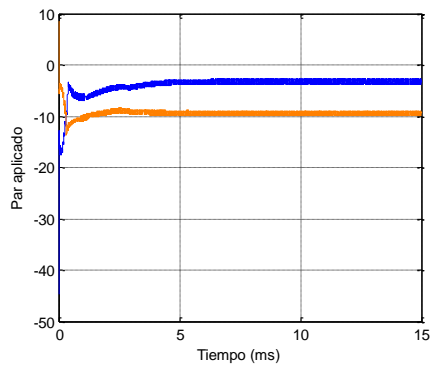
La señal de disturbio está limitada por  $d$ , este valor está incluido en la definición de  $\sigma$ . En la Figura 5.9, se aprecia que el sistema es capaz de responder con un error de régimen permanente de  $\epsilon$  el cual es más pequeño que en el caso del control por modos deslizantes convencional, verificándose la robustez del sistema ante la presencia de disturbios externos.



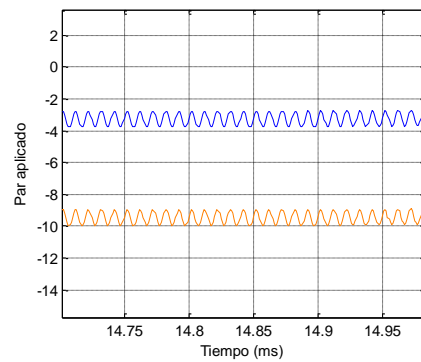
a) Superficie de deslizamiento



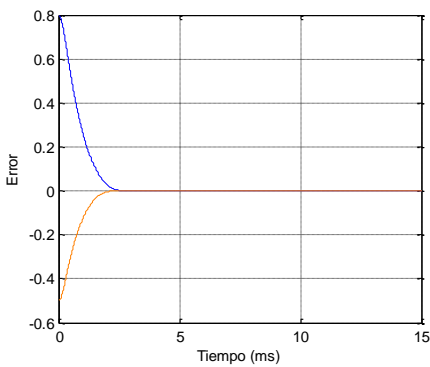
b) Detalle superficie de deslizamiento



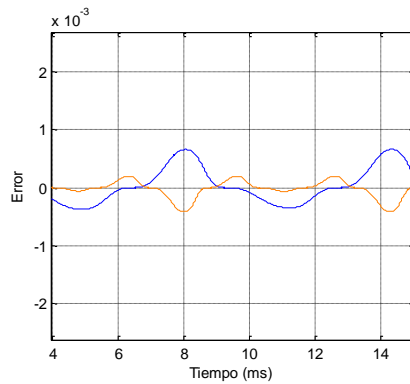
c) Par aplicado



d) Detalle par aplicado



e) Error de seguimiento



f) Detalle Error

Figura 5.9 Control por modos deslizantes terminal con disturbios externos

## 5.6 Resumen

El control por modos deslizantes terminal está basado en las propiedades de los atractores terminales, los cuales llevan a una clase de ecuación diferencial con tiempo finito de

convergencia a cero. Se define una superficie de deslizamiento que incluye un término no lineal, lo cual permite que la convergencia del error en el modo de deslizamiento se realice en un tiempo finito y no en forma asintótica como el caso del modo deslizante convencional.

Con el diseño presentado para el caso del robot manipulador de dos grados de libertad, se utilizó la combinación de una ley de alcanzabilidad continua y un modo de deslizamiento terminal. El control obtenido resulta continuo, libre de *chattering* y con convergencia en tiempo finito, las pruebas realizadas muestran el buen desempeño de este control en cuanto a su robustez y capacidad para atenuar disturbios externos respecto al control por modos deslizantes tratado en el capítulo cuatro.



## 6. Realimentación Dinámica de la Salida Utilizando Modos Deslizantes Terminal

### 6.1 Introducción

En un sistema de control realimentado (en inglés, *feedback control*), uno de los propósitos de la realimentación es reducir el efecto de los disturbios externos y las incertidumbres en el sistema (es decir, el desfase entre el modelo nominal y la planta real). Un modelo matemático es sólo una aproximación de la planta o sistema físico por lo cual es necesario que el diseño del controlador sea "robusto" a estas perturbaciones y disturbios.

Considere el siguiente sistema no lineal,

(6.1)

donde  $x$  es el estado,  $x_0$  es la condición inicial,  $u$  es el control,  $d$  es el disturbio y  $y$  es el vector de salida. Cuando  $n=1$ , se tiene un sistema SISO (*single input single output*); se habla de un sistema multivariable o MIMO (*multiple input multiple output*) si  $m > 1$  (múltiples entradas) o  $p > 1$  (múltiples salidas).

Para el sistema 6.1, si todo el estado  $x$  es medido y puede ser realimentado, el control se denomina por realimentación de estado (en inglés, *state feedback control*), por el contrario, si sólo la salida  $y$  es medida, el control se refiere como realimentación de la salida (en inglés, *output feedback control*), el cual posiblemente pero no necesariamente está basado en un observador de estado.

Existen dos principales esquemas de control por realimentación de la salida: Realimentación estática de la salida (en inglés, *static output feedback control*) y realimentación dinámica de la salida (en inglés, *dynamic output feedback control*).

El esquema de control por realimentación estática de la salida, se caracteriza porque no utiliza observadores para estimar las variables de estado no medibles, en este caso el control es de la forma  $u = -Kx + r$ . Si  $x$  se reemplaza por  $y$ , el control es de la forma  $u = -Ky + r$  y se conoce como control estático por realimentación de estado (en inglés, *static state feedback control*). El esquema de control por realimentación estática de la salida (*static output feedback control*) se clasifica en dos grandes clases: Realimentación directa de la salida (en inglés, *direct output feedback control*) y en compensador dinámico (en inglés, *dynamic compensator*). En el esquema de control por realimentación directa de la salida, la ley de control viene dada por una función lineal o no lineal de la salida del sistema controlado. Éste método sólo puede aplicarse a sistemas muy limitados, tales como sistemas lineales e invariantes en el tiempo con dinámicas conocidas. En el esquema de compensador dinámico, la ganancia de realimentación de la salida se calcula sobre la base de un sistema aumentado y los polos deseados del sistema en lazo cerrado.

En el esquema de control por realimentación dinámica de la salida (*dynamic output feedback control*), las variables de estado no medibles se estiman mediante un sistema dinámico auxiliar denominado observador. La salida del sistema, así como la estimación de las variables de estado se utilizan para diseñar la ley de control. Un esquema de control por realimentación dinámica de la salida de orden  $r$ , es un sistema no lineal descrito por la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$(6.2)$$

donde  $\hat{x}$  es el observador y  $r$  es la señal de referencia.

Cuando en 6.2  $x$  se reemplaza por  $\hat{x}$  se refiere como control dinámico por realimentación del estado (en inglés, *dynamic state feedback control*). El control se debe diseñar de forma que resuelva el problema de seguimiento de la referencia para el siguiente sistema de lazo cerrado,

$$(6.3)$$

En la Figura 6.1 se presenta el diagrama en bloques de la estimación del estado. Se aprecia que el observador utiliza la variable medida  $y$  del proceso y la entrada de control  $u$  para estimar el estado actual del proceso, el cual es denotado por  $\hat{x}$ .

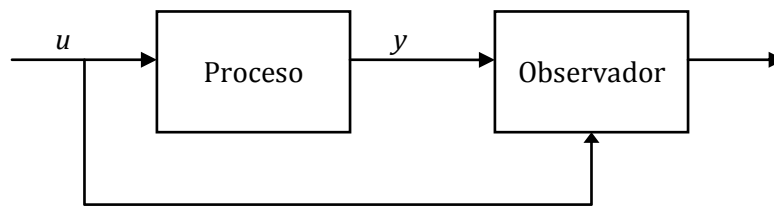


Figura 6.1 Diagrama de la estimación del estado mediante un observador

El problema de diseño de una ley de control que haga al sistema asintóticamente, local o globalmente, estable para el caso particular en el cual no hay disturbios, la señal de referencia es cero y sólo  $y$  está disponible, se conoce como *output feedback stabilization*. La ecuación 6.4 representa una ley de control de estabilización global por realimentación de la salida tal que es un punto de equilibrio global asintóticamente estable para el sistema en lazo cerrado.

(6.4)

El problema de control de sistemas no lineales por realimentación de la salida, debido a su importancia ha recibido y sigue recibiendo, una atención considerable en la literatura ya que existen muchas aplicaciones prácticas donde no es posible obtener la medición de todas las variables de estado. Los primeros trabajos sobre control por observador basado en realimentación de la salida para sistemas lineales e invariantes en el tiempo se pueden encontrar en (Kalman, 1961); (Luenberger, 1964, 1966). Después de estos trabajos iniciales, una gran cantidad de trabajos se han llevado a cabo utilizando la técnica de diseño mediante observadores utilizando control adaptativo, control robusto y realimentación de la salida tanto para sistemas lineales como no lineales.

Los controles adaptativo y robusto son capaces de trabajar con las incertidumbres. En (Morse, Kanellakopoulos, & Kokotov, 1991), (Kokotovic, Krstic, & Kanellakopoulos, 1995) y (Isidori, 1989) se diseña una ley de control adaptativa para estimar los parámetros desconocidos de la dinámica del sistema. En el control robusto, las incertidumbres son consideradas mediante algún tipo de conocimiento de la dinámica de la planta, tales como límites o funciones que limitan las incertidumbres (Qu, 1998), (Zhang & Ioannou, 1999)). La combinación de control adaptativo y robusto da como resultado la técnica de control adaptativa robusta (Praly, 1984), (Kreisselmeier & Anderson, 1986), (Hill, Wen, & Goodwin, 1988), (Ioannou, 1984), (Naik & Kumar, 1991)). Como ejemplos de trabajos acerca del tema, para resolver el problema de seguimiento de la salida para determinadas clases de sistemas se utilizan esquemas de estructura variable en (Bondaref, Kostylev, & Utkin, 1985), (Diong & Medanic, 1992),

(Emelyanov, Korovin, Nersisyan, & Nis, 1992), (Oh & Khalil, 1997), y esquemas de control adaptivo robusto se utilizan en (Jain & Khorrami, 1995), (Kanellakopoulos, Kokotovic, & Morse, 1991), (Marino & Tomei, 1997).

El problema de control por realimentación de la salida para los sistemas no lineales es mucho más difícil de resolver que la estabilización mediante la realimentación de todo el estado. El problema de diseño de un observador de estado para sistemas no lineales continúa siendo un reto de investigación, por ello a menudo es necesario examinar clases especiales de los sistemas no lineales para resolver el problema de diseño de observadores como también el problema de control por realimentación de la salida (Zhu, 2004).

Un enfoque sistemático para el desarrollo de observadores de sistemas no lineales se encuentra en (Krener & Isidori, 1983), donde se utiliza una transformación de coordenadas para transformar el sistema original no lineal en un sistema lineal. En (Bestle & Zeitz, 1983), (Krener & Respondek W, 1985) y (Walcott, Corless, & Zak, 1987a) también se utilizan transformaciones para obtener formas canónicas lineales que se pueden utilizar para el diseño de observadores. Un estudio comparativo de cuatro técnicas que aparecieron en la década de 1980 para observar el estado de sistemas no lineales se encuentra en (Walcott, Corless, & Zak, 1987a). En (Kazantzis & Kravaris, 1998), se presenta un enfoque para diseño de un observador no lineal, se deriva un conjunto general de condiciones necesarias y suficientes mediante el uso del teorema auxiliar de Lyapunov.

El control por realimentación de la salida para sistemas no lineales ha sido ampliamente estudiado en la literatura reciente (Praly & Arcak, 2002), (Atassi & Khalil, 1999); (Atassi & Khalil, 2001), muchas aplicaciones prácticas requieren de la estimación de los estados y los parámetros que pueden ser utilizados en el diseño de un algoritmo de control; los estados no medidos y los parámetros estimados por lo general se basan en el conocimiento del sistema, tal como el modelo, y las mediciones disponibles. El diseño de un observador estable y que al mismo tiempo estime los estados y parámetros desconocidos para sistemas no lineales es todavía un problema abierto. Esto ha llevado a un fuerte y continuo interés en los últimos años en el desarrollo de observadores estables adaptativos. Los primeros trabajos en observadores estables adaptativos para sistemas lineales e invariantes en el tiempo puede encontrarse en (LÄuders & Narendra, 1974) y (Kreisselmeier, 1977). Resultados en control adaptativo de sistemas lineales y no lineales puede encontrarse en (Narendra & Annaswamy, 1989), (Kokotovic, Krstic, & Kanellakopoulos, 1995), (Marino & Tomei, 1995) y (Karagiannis, Astolfi, & Ortega, 2003). En (Druzhinina, Nikiforov, & Fradkov, 1996), se presenta un resumen de los métodos de control por realimentación de la salida adaptativos para sistemas no lineales. (Nikiforov & Fradkov, 1994) contiene una extensa bibliografía de estudio modelo de referencia basado en el control adaptativo de sistemas lineales.



(Karagiannis, Astolfi, & Ortega, 2003) desarrollaron una novedosa técnica de diseño para resolver el problema de estabilización por realimentación de salida, esta técnica se basa en ideas tomadas de la teoría de regulación de sistemas no lineales y de las nociones de inmersión e invarianza (Karagiannis, Astolfi, & Ortega, 2003). El enfoque empleado consiste en la reconstrucción asintótica de una ley de control estabilizante por realimentación del estado, sin necesidad de utilizar una función de Lyapunov. El enfoque empleado consiste en la aplicación de un principio de separación, el cual establece que es posible resolver el problema de regulación propuesto, siempre que dos sub-problemas sean resueltos. El primer sub-problema se refiere a encontrar una ley de control de realimentación de estado robusta de información completa. El segundo problema conduce al diseño de una ley de control dinámica estabilizante, por inyección de la salida. Esto permite obtener un controlador dinámico de realimentación de salida y globalmente estabilizante (con estimación de los estados no medidos). Una característica importante es que el mecanismo de estabilización no depende de la construcción de una función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado.

La sección 6.2 presenta la metodología propuesta en (Karagiannis, Astolfi, & Ortega, 2003) para resolver el problema de estabilización de salida de una clase de sistemas no lineales, en la sección 6.3 se aplica esta metodología para resolver el problema de diseño de un observador por modos deslizantes para robots manipuladores y se incluyen los resultados de simulación para el caso del robot manipulador plano de dos grados de libertad, en 6.4 se resume los resultados obtenidos por las técnicas de modos deslizantes convencional y terminal y los controles PID y CTC tratados en el anexo, finalmente en 6.5 un resumen de las ideas tratadas en el capítulo.

## **6.2 Estabilización de sistemas no lineales por realimentación de salida**

El problema de la estabilización asintótica por medio de realimentación de la salida en sistemas no lineales ha sido ampliamente estudiado en los últimos años. A partir de los resultados presentados por (Teel & Praly, 1994), varios intentos se han hecho para construir algoritmos de realimentación de salida para clases de sistemas no lineales. En particular, la clase de sistemas que son lineales en los estados no medidos ha recibido una atención especial por (Marino & Tomei, 1995), (Battilotti, 1996,1997) y (Freeman & Kokotovic, 1996a,1996b). En (Marino & Tomei, 1995) se estudian los llamados sistemas paramétricos de realimentación de la salida y se propone una clase de leyes de control estabilizantes. En (Battilotti 1996,1997), se propone un método de estabilización dinámica por realimentación de la salida sobre la base de la solución de los dos sub-problemas: un problema de realimentación de estado y un problema de inyección de la salida. Las soluciones de esos subproblemas se combinan para construir la estabilización por

realimentación de la salida. Cabe señalar que los resultados en (Battilotti 1996,1997), no son aplicables en la presencia de parámetros desconocidos y se basan firmemente en el uso de funciones de Lyapunov cuadráticas de los estados no medidos. En (Freeman & Kokotovic, 1996b), véase también (Freeman & Kokotovic, 1996a, cap 7), se estudia una clase especial de sistema y se construye un observador exponencial.

El problema de estabilización por medio de realimentación de la salida para una clase de sistemas no lineales se resuelve en (Karagiannis, Astolfi, & Ortega, 2003). El método que proponen se basa en la reconstrucción asintótica de una ley de control estabilizante la cual no requiere de una dinámica cero estable, ni de la construcción de una función de Lyapunov para la estabilidad del sistema en lazo cerrado, y trata de forma unificada el problema de determinar parámetros desconocidos y estados no medidos.

A continuación se incluye la metodología propuesta por (Karagiannis, Astolfi, & Ortega, 2003), a fin de garantizar una mayor claridad sobre el esquema aplicado en este trabajo. Considere una clase de sistemas descrito por ecuaciones de la forma,

$$(6.5)$$

siendo el estado  $x$ , el estado no medido, y la salida medida y  $u$  la entrada de control. Se asume que sólo la salida  $y$  está disponible para realimentación. Conjuntamente con el sistema 6.5, se considera una salida de desempeño definida como,

$$(6.6)$$

para alguna aplicación  $h(\cdot)$ . Se tiene el siguiente problema de regulación: considere el sistema (6.5) y la variable de desempeño definida en (6.6), se requiere encontrar una ley de control por realimentación dinámica de salida, descrita por ecuaciones de la forma,

$$(6.7)$$

tal que todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado (6.5)-(6.7) sean acotadas y, además,

$$(6.8)$$

Se hace notar que en general  $\|x\| \rightarrow 0$ , no implica que  $\|y\| \rightarrow 0$  y  $\|u\| \rightarrow 0$ . La variable de desempeño  $\|e\|$  ha

sido introducida porque, en general, no es posible regular el estado completo a cero (o para un punto de equilibrio deseado). Esto permite tratar, adicionalmente, el caso de control adaptativo, cuando contiene parámetros desconocidos.

El problema de la regulación de salida del sistema (6.5) puede ser resuelto por aplicación de la siguiente proposición, formulada en (Karagiannis, Astolfi, & Ortega, 2003).

**Proposición 6.1.** *Considere un sistema descrito por ecuaciones de la forma (6.5) y una variable de desempeño definida como en (6.6). Suponga que las siguientes hipótesis se satisfacen,*

(A1) *Existe una ley de control de información completa,*

(6.9)

*tal que todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado (6.2)-(6.9) sean acotadas y tal que la condición (6.6) se satisfaga. Además, el sistema (6.5) con es globalmente estable de entrada acotada y estado acotado, con respecto a la entrada  $d(t)$ .*

(A2) *Existe una aplicación tal que el sistema*

—

(6.10)

*es uniforme y globalmente estable para cualquier par ; y adicionalmente,  $z(t)$  es tal que, para cualquier par fijo,*

(6.11)

*Entonces existe una ley de control dinámica de realimentación de salida descrita por ecuaciones de la forma (6.7), que resuelve el problema de regulación por realimentación de salida.*

La proposición 6.1 determina que es posible resolver el problema de regulación mediante realimentación de la salida siempre que dos sub-problemas sean resueltos. El primer sub-problema se refiere a encontrar una ley de control de realimentación de estado robusta de información completa (hipótesis A1). El segundo problema conduce al diseño de una ley de control dinámica estabilizante, por inyección de la salida (hipótesis A2). Esto permite obtener un

controlador dinámico de realimentación de salida y globalmente estabilizante (con estimación de los estados no medidos). Una característica importante es que el mecanismo de estabilización no depende de la construcción de una función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado.

En razón de que la prueba de esta proposición permite diseñar la ley de control por realimentación de salida, se reproduce a continuación.

**Prueba.** Considere un sistema como en (6.5) y el controlador dinámico por regulación de salida siguiente,

$$(6.12)$$

donde  $\tilde{x}$  está definida como en la ecuación (6.9),  $M$  es una matriz invertible,  $\tilde{A}$  es la aplicación considerada en la hipótesis (A2) y  $w$  es una nueva señal de control. Sea la variable de error,

$$(6.13)$$

notar que el sistema en lazo cerrado (6.5)-(6.12) puede ser escrito en coordenadas  $x, y$  y  $z$ , luego de derivar la ecuación (6.13), como,

$$(6.14)$$

Notar que de (6.13) se tiene que  $\tilde{x}$  por lo tanto  $\tilde{z}$  depende de términos medidos o estimados y por lo tanto en (6.14) todos los términos de la ecuación  $\dot{z}$  pueden ser medidos con excepción de los términos  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$ . En razón de la invertibilidad de la matriz  $M$  es posible seleccionar una ley  $w$  como,

$$(6.15)$$

produciendo la siguiente dinámica en lazo cerrado,

(6.16)

Por la suposición (A2), la variable  $z$  permanece acotada para todo  $t$ , de tal manera que la ecuación (6.11) se satisface; además, por la suposición (A1),  $y$  y  $\dot{y}$  están acotadas para todo  $t$  y por lo tanto la condición (6.8) se cumple, con lo cual se concluye la prueba.  $\square$

Observar que  $z$  puede verse como una entrada acotada que perturba al sistema (6.5) controlado por la ley (6.9), pero que, en virtud de la suposición (A2), el estado  $x$  es estable. Además, la suposición (A2) puede ser reemplazada por una condición más estricta que garantice,

(6.17)

para todo  $y$  y  $u$ . Bajo estas condiciones,  $\hat{x}$  puede usarse para construir una estimación asintótica de los estados no medidos  $x$ , obteniéndose el controlador dinámico de realimentación de salida,

(6.18)

La suposición (A2) significa que es posible reconstruir asintóticamente la ley de control de información completa  $u$  (6.9), a partir de la ley de control dinámica (6.18). Notar que el estado no medido  $x$  en la ley de control de información completa es reemplazado en la ley de control por realimentación de la salida (6.18) por el término  $\hat{x}$ .

### 6.3 Regulación por realimentación dinámica de la salida de un robot manipulador

En esta sección se aplica la metodología descrita en 6.2 para resolver el problema control de seguimiento de trayectorias de un robot manipulador con incertidumbres paramétricas

limitadas. Se utiliza la técnica de realimentación dinámica de la salida para el diseño de un observador que estime las velocidades articulares, siendo necesario para el control sólo la medición de las posiciones articulares. El enfoque empleado consiste en la reconstrucción asintótica de una ley de control estabilizante por realimentación del estado, sin necesidad de utilizar una función de Lyapunov. En primer lugar, se diseña una ley de control robusta por realimentación del estado (de información completa) y luego, se sintetiza una ley de control dinámica (con observación de los estados), la cual recupera asintóticamente la ley de control de información completa. El desempeño del método propuesto se prueba mediante simulación en un robot manipulador de dos grados de libertad.

El modelo dinámico de un robot manipulador es representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales y fuertemente acopladas, que tienen la siguiente forma general (ver ecuación (3.9)),

$$(6.19)$$

donde  $\mathbf{q}$  es el vector de posición de las articulaciones,  $\mathbf{u}$  es el vector del par aplicado a las articulaciones,  $\mathbf{M}$  es la matriz de inercia del manipulador, esta matriz es simétrica y definida positiva,  $\mathbf{c}$  es el vector de fuerzas de coriolis y centrífuga,  $\mathbf{g}$  es el vector de fuerzas gravitatorias y  $\mathbf{d}$  es el vector de disturbios externos al manipulador, el cual se considera limitado, y  $\mathbf{e}$  es el vector de incertidumbres, las cuales están limitadas por

El vector  $\mathbf{e}$  tiene elementos  $e_i$  donde las matrices  $\mathbf{M}_i$  son simétricas y compuestas de elementos limitados (Canudas de Wit & Slotine, 1991).

$$(6.20)$$

Sea  $\hat{\mathbf{q}}$  el estimado de  $\mathbf{q}$ . El vector  $\mathbf{e}$  utilizando expansión en series de Taylor alrededor de  $\hat{\mathbf{q}}$  puede ser expresado como,

—

— —

La expresión anterior es equivalente a,

$$(6.21)$$

con

, —

—

— —

En (6.21) el término incluye el término de primer orden que acompaña a la velocidad estimada y los términos de orden superior.

Considerando el modelo del robot manipulador incluyendo la expresión (6.21) es,

$$(6.22)$$

donde el termino se ha incluido en , y se considerará como un disturbio limitado por las incertidumbres del modelo.

Ahora el modelo del robot en (6.22) se puede expresar en la forma general de la ecuación (6.5) así,

$$(6.23)$$

donde es el vector de las variables no medidas, el cual ha de ser estimado por el observador y corresponde a las velocidades articulares, mientras que es la salida que puede medirse y corresponde a las posiciones articulares, siendo  $I$  la matriz identidad de  $n \times n$ .

El sistema (6.23) es equivalente a,

$$(6.24)$$

con , , y . Se comprueba que el modelo del robot manipulador corresponde al tipo de sistema indicado por (6.5) y por lo cual se puede aplicar la técnica de diseño de un observador siguiendo el procedimiento dado por (Karagiannis, Astolfi, & Ortega, 2003).

El primer paso de diseño por realimentación dinámica de la salida, implica la construcción de una ley de control robusta de información completa para el sistema. El modelo dinámico del robot se considera el siguiente,

$$(6.25)$$

siendo .

Siguiendo el procedimiento de diseño de control por modos deslizantes terminal con ley de alcanzabilidad tipo FTSM presentado en la sección 5.5, se obtiene,

$$(6.26)$$

donde con , , , con y .

La ley de control (6.26) es una ley de información completa de la forma , ya que depende de las posiciones y velocidades articulares. En el diseño de la ley se comprobó la estabilidad del sistema para el seguimiento de una trayectoria deseada mediante la función de Lyapunov (5.43), por lo tanto dada cualquier el sistema es estable y las trayectorias del



sistema en lazo cerrado son limitadas y se obtienen en un tiempo finito, por lo tanto si se define  $\epsilon$  se cumple que  $\|e(t)\| < \epsilon$ , dando así cumplimiento a la condición requerida por la hipótesis (A1) de la sección anterior.

Bajo estas condiciones y siguiendo la prueba de la Proposición 6.1, se debe diseñar un controlador por realimentación dinámica de la salida de la forma,

$$(6.27)$$

donde  $\mathbf{w}$  se define como en la hipótesis (A1),  $\mathbf{v}$  se define de acuerdo a la hipótesis (A2), y  $\mathbf{w}$  es la nueva señal de control,

Sea la variable de error de observación  $\mathbf{z}$ . El sistema en lazo cerrado queda descrito como,

Por la suposición (A2), la variable  $\mathbf{z}$  permanece acotada para todo  $t$ , de tal manera que la condición de convergencia (6.11) se satisface; si para este propósito se selecciona que,

$$(6.28)$$

tenga todos sus autovalores negativos. Para garantizar esta condición el diseño de  $\mathbf{K}$  se realiza mediante asignación de polos y  $\mathbf{L}$  se selecciona definida positiva.

Con el fin de garantizar estabilidad asintótica de la dinámica del error, los autovalores de  $\mathbf{X}$  deben ubicarse en el semiplano izquierdo del plano complejo, de esta manera se satisfacen las condiciones de las ecuaciones (6.11) y (6.17). La ubicación de los polos deseados permite especificar la velocidad de convergencia del observador en la reconstrucción asintótica de la ley de control. Así, es posible diseñar un observador tal que su dinámica sea más rápida que la del

controlador.

Además, por la hipótesis (A1),  $y$  y  $\dot{y}$  están acotadas para todo  $t$  y por lo tanto la condición (6.8) se cumple. Según la prueba de la proposición 6.1, puede usarse para construir una estimación asintótica de los estados no medidos, obteniéndose el controlador dinámico de realimentación de salida al reemplazar, en la ley de control de información completa, el vector por el correspondiente vector.

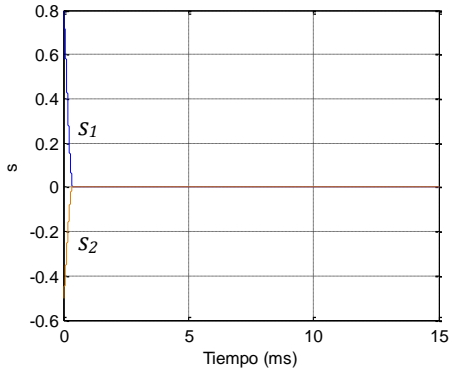
La ley de realimentación dinámica de la salida dada por la ecuación (6.27) con  $w$  dado por la ecuación (6.29) con según la ley de modos deslizantes terminal en la ecuación (6.26), permite el desarrollo de un observador para las velocidades articulares mediante la reconstrucción asintótica de la ley de control de información completa. Así se logra un observador de estado con las ventajas de precisión y robustez características de una ley de control por modos deslizantes terminal. Con el propósito de evaluar el desempeño del controlador dinámico por realimentación de la salida utilizando modos deslizantes terminal se utiliza el modelo dinámico del robot manipulador plano de dos grados de libertad considerado en la sección 3.2. Para este caso esta dada por,

Aplicando el proceso de linealización alrededor de y considerando se obtiene de forma equivalente la matriz,

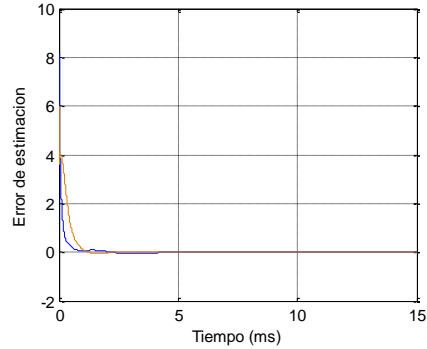
para el caso del manipulador plano de dos grados de libertad se tiene que,

Aplicando las trayectorias en el espacio articular del robot dadas por la expresión 3.13 y considerando los valores iniciales especificados en la sección 3.2, a continuación se presentan los resultados de las diferentes pruebas realizadas, los valores de los parámetros utilizados para la simulación son: , con

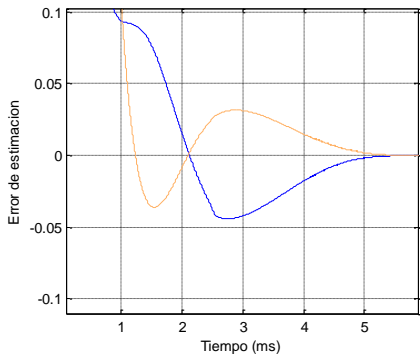
,  $d=2.5$ , , , . Para satisfacer la condición de convergencia (6.11), se utiliza la siguiente sintaxis en *Matlab* , siendo y  $P$  la ubicación deseada de los polos. Las Figuras 6.2 y 6.3 muestran el desempeño del controlador, en la tarea de regular las posiciones articulares del robot manipulador de dos grados de libertad. Se presenta a continuación la respuesta para dos valores deseados de ubicación de los polos.



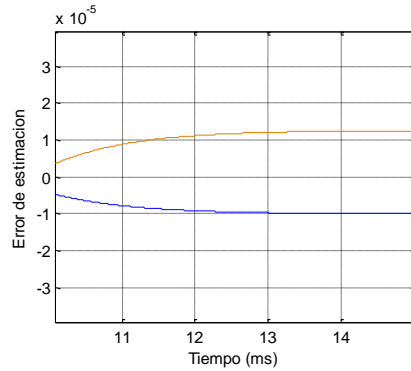
a) Superficie de deslizamiento



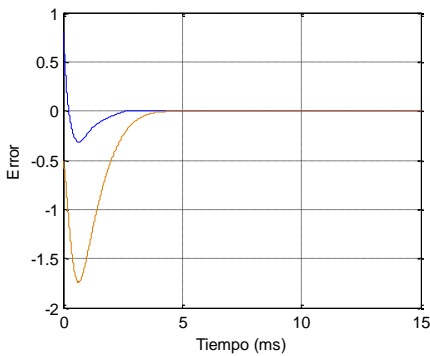
b) Error de estimación de las velocidades



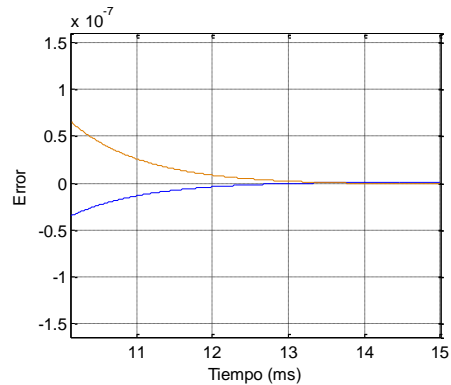
c) Detalle error de estimación de las velocidades



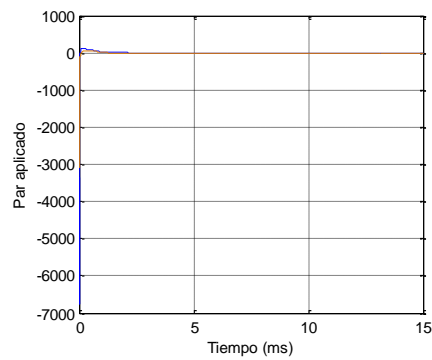
d) Detalle error de estimación de las velocidades



e) Error de seguimiento

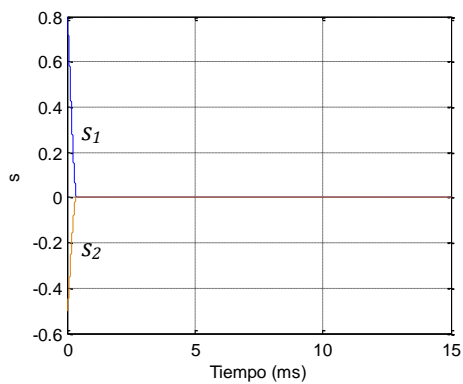


f) Detalle error de seguimiento

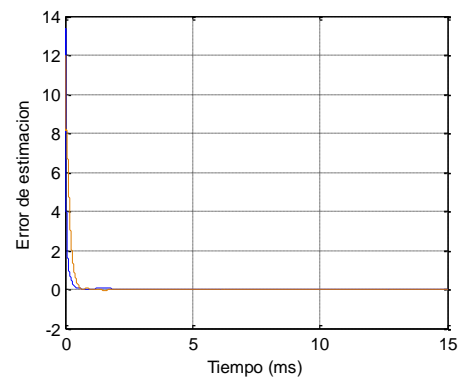


g) Par aplicado

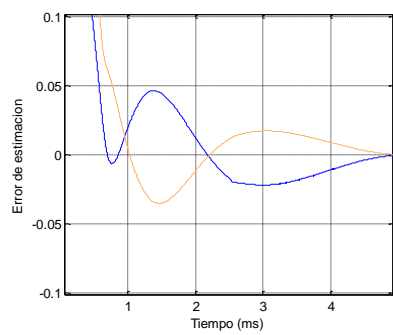
Figura 6.2 Control por realimentación dinámica de la salida con  $P=[-4,-4]$



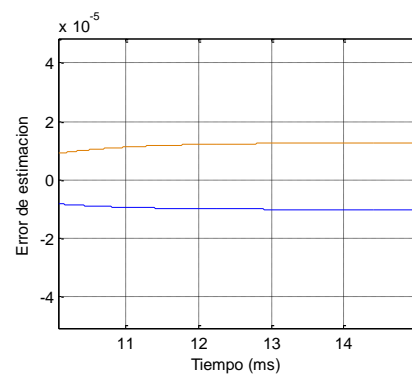
a) Superficie de deslizamiento



b) Error de estimación de las velocidades



c) Detalle error de estimación de las velocidades



d) Detalle error de estimación de las velocidades

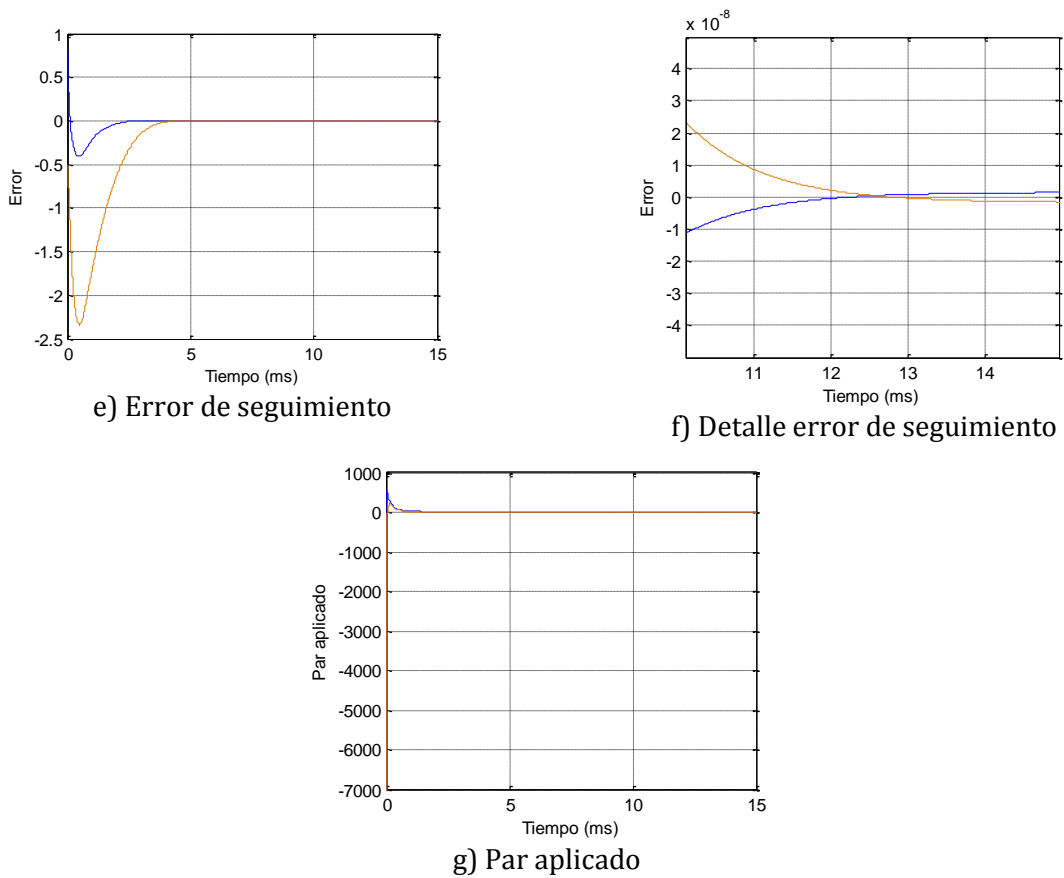


Figura 6.3 Control por realimentación dinámica de la salida con  $P=[-8,-8]$

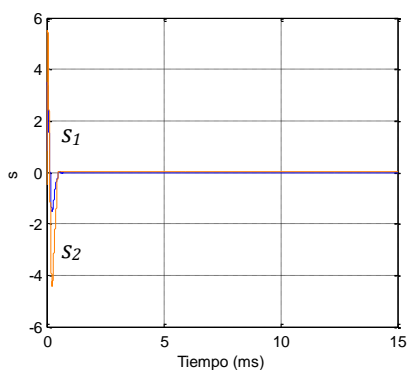
De las Figuras 6.2a) y 6.3a) se aprecia que los tiempos de alcanzabilidad de la superficie de deslizamiento son de 0.75sg y 0.7sg para cada variable en ambos casos, las dinámicas del sistema llegan a  $s=0$  en un tiempo finito, en 6.2b) y 6.3b) se presenta el error de estimación de las velocidades articulares, de 6.2c) se puede apreciar que el tiempo de convergencia a una banda del 5% del error de estimación de las velocidades es aproximadamente de 1.5sg y de 0.8 sg en 6.3c), logrando aproximadamente en ambos casos un error de estimación de la velocidad angular a partir del observador de estado menor a  $\epsilon$ , como puede apreciarse en la ampliación realizada en 6.2d) y 6.3d). Los valores estimados convergen asintóticamente a los valores reales no medidos, presentando una convergencia exponencial en el error de estimación, lo cual está en correspondencia con las condiciones de estabilidad garantizadas a partir de la matriz  $X$  de (6.28). Se puede apreciar que existe una relación entre el tiempo de convergencia del error de estimación de la variable observada y la ubicación deseada de los polos de  $X$ , que determinan el tiempo de la reconstrucción asintótica de la ley de control de información completa y por lo tanto de estimación de la variable observada, notar que una vez la dinámica de  $\hat{s}$  decae a cero por la condición (A2) se recupera la ley de información completa  $u = -Kx$  y se determina el estado no medido. En e) y f) de 6.2 y 6.3 se aprecia que la magnitud del error de seguimiento de las posiciones articulares es prácticamente cero, notar que la escala indica  $10^{-8}$ . En 6.2g)

y 6.3g) se observa que la señal de control es continua y libre de *chattering*.

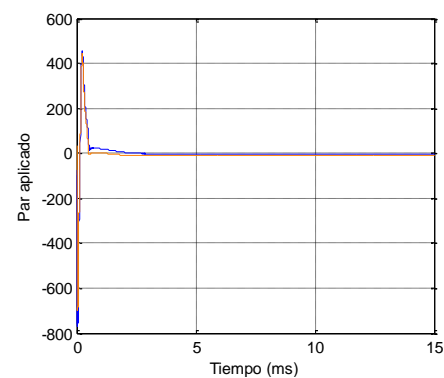
La prueba realizada permite comprobar que el sistema diseñado obtiene un comportamiento similar al control por modos deslizantes terminal, pero en este caso no se requiere de la medición de las velocidades articulares. La diferencia central se presenta en el excesivo par inicial que se exige al sistema, el cual se hace mayor en la medida que el tiempo de convergencia diseñado mediante la ubicación de polos deseados de  $X$  sea menor. Esta parte será objeto de estudio posterior, donde se propondrá el diseño de un control adaptativo para mejorar esta situación presentada en el diseño actual del observador.

Finalmente, a fin de lograr un menor par inicial, se considera una ubicación de polos deseados de  $X$  que varíe de acuerdo a una función exponencial, siendo con

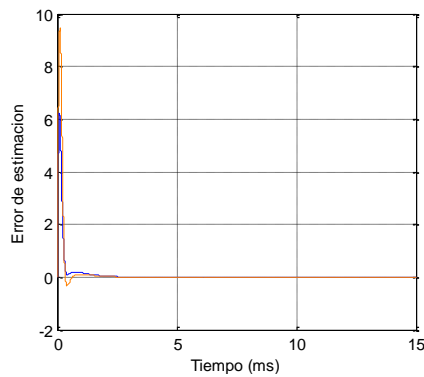
, lo cual igualmente garantiza que se cumpla la condición (A2) y adicionalmente permite una respuesta con un par inicial menor que en los dos casos considerados anteriormente. En la Figura 6.4 se muestra el desempeño del controlador, en la tarea de regular las posiciones articulares del robot manipulador de dos grados de libertad. En la gráfica a) se aprecia que los tiempos de alcanzabilidad de la superficie de deslizamiento son de 0.75sg y 0.7sg para cada variable, las dinámicas del sistema llegan a  $s=0$  en un tiempo finito, en b) se observa que la señal de control es continua y libre de *chattering*, en c) y d) se aprecia que el error de estimación de la velocidad angular obtenido a partir del observador de estados es menor a , como puede apreciarse en d), los valores estimados convergen asintóticamente a los valores reales no medidos, En e) y f) se aprecia que el error el error de seguimiento de la posición, el cual presenta una magnitud prácticamente cero, notar que la escala indica .



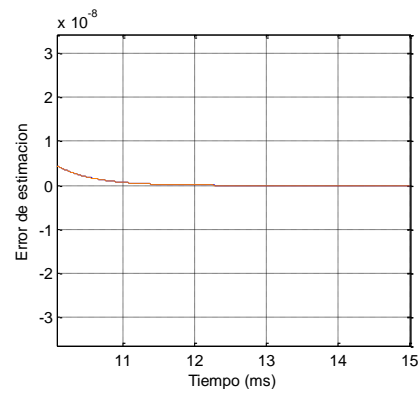
a) Superficie de deslizamiento



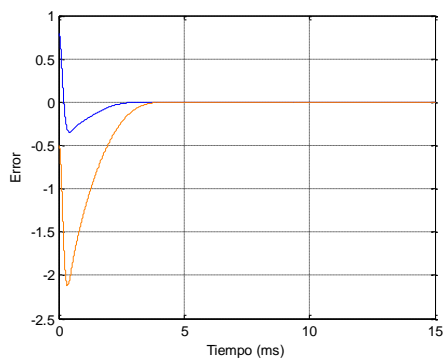
b) Par aplicado



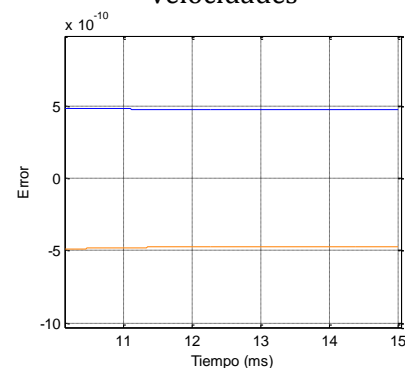
c) Error de estimación de las velocidades



d) Detalle error de estimación de las velocidades



e) Error de seguimiento



f) Detalle error de seguimiento

Figura 6.4 Control por realimentación dinámica de la salida

Considerando un cambio en los valores estimados de las masas de las articulaciones, por los siguientes valores nominales:  $m_1 = 0.4 \text{ kg}$ , y  $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ , se obtiene el resultado mostrado en la Figura 6.5. Se aprecia que el sistema es capaz de responder con un error de régimen permanente de  $\pm 0.5$ , verificándose la robustez del sistema ante la presencia de incertidumbres en el modelo y un comportamiento similar que el modos deslizantes terminal.

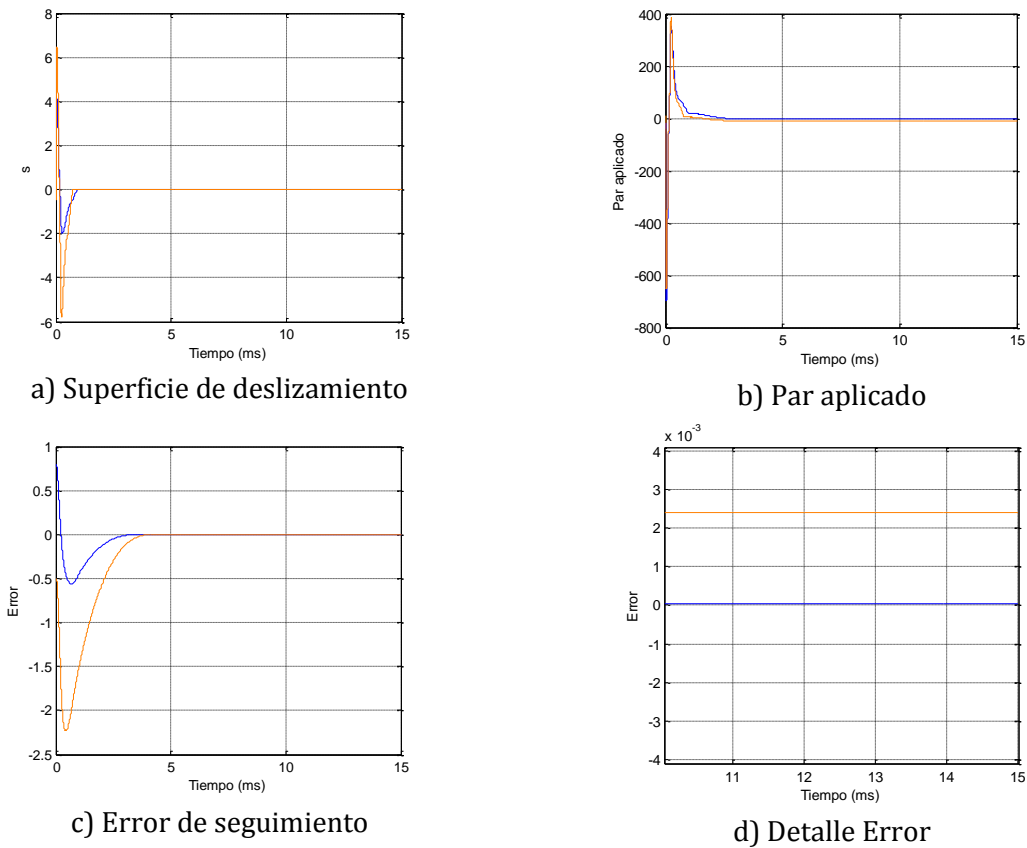
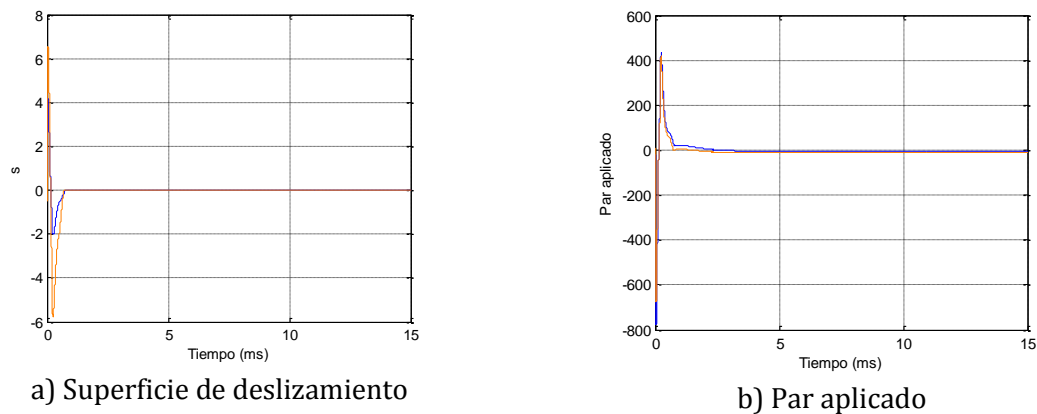
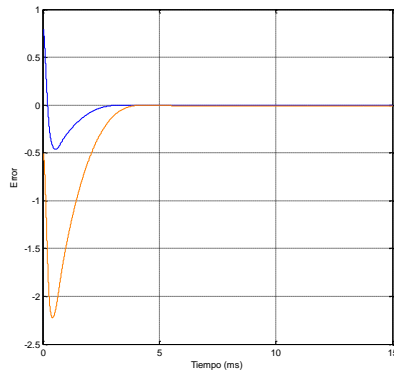


Figura 6.5 Control por realimentación dinámica de la salida con incertidumbres en las masas del modelo.

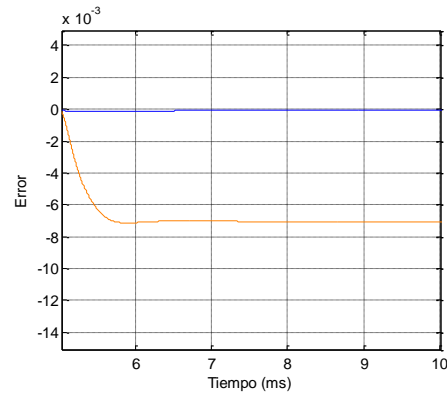
En la Figura 6.6 se realiza la simulación de la tarea de manipular un objeto de 1 Kg de masa a partir de  $t=5$ sg, se aprecia que se produce un cambio en el momento de tomar el objeto, se logra un error de régimen permanente de  $\approx 2.5 \times 10^{-3}$  y  $\approx 0$  el cual es similar que el logrado con la técnica de modos deslizantes terminal.







c) Error de seguimiento

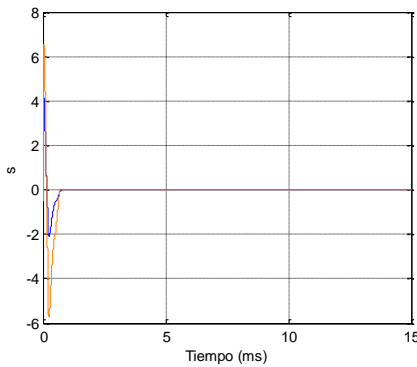


b) Detalle error de seguimiento

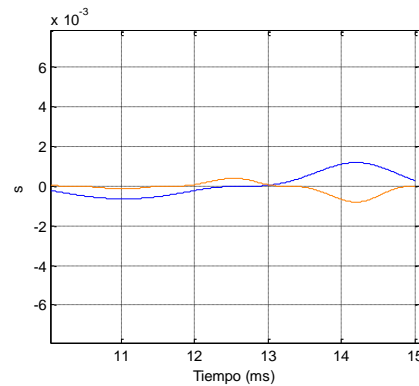
Figura 6.6 Control por realimentación dinámica de la salida simulando la manipulación de un objeto.

Considerando la siguiente señal de disturbio se prueba el sistema,

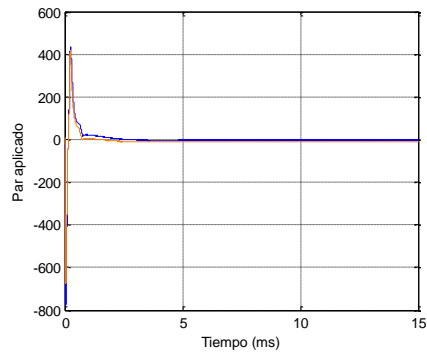
En la Figura 6.7, se aprecia que el sistema es capaz de responder con un error de régimen permanente pequeño, el cual es un poco mayor que el obtenido por modos deslizantes terminal, pero inferior al obtenido por modos deslizantes convencional, verificándose la robustez del sistema ante la presencia de disturbios externos.



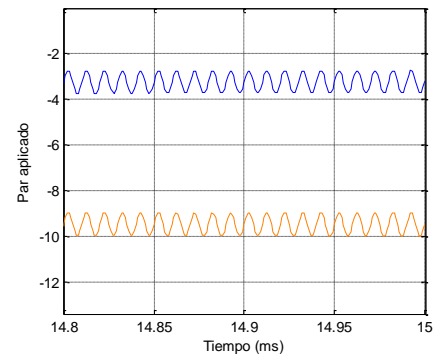
a) Superficie de deslizamiento



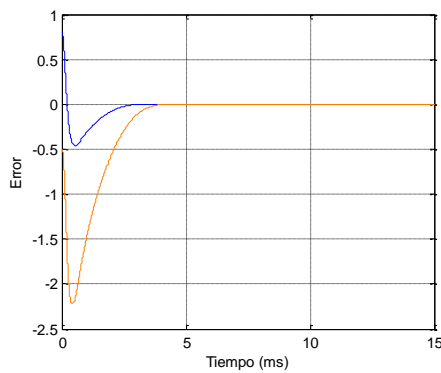
b) Detalle superficie de deslizamiento



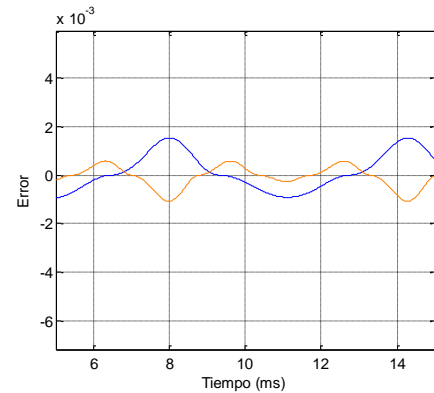
c) Par aplicado



d) Detalle par aplicado



e) Error de seguimiento



f) Detalle Error

Figura 6.7 Control por realimentación dinámica de la salida con disturbios externos

## 6.4 Comparación de resultados

En la Tabla 6.1 se resumen los resultados obtenidos en las pruebas de simulación realizadas para los controles: modos deslizantes (SMC) con capa de frontera, modos deslizantes terminal (TSMC) con ley de alcanzabilidad FTSM, observador TSMC, control PID multivariable y control por par calculado (CTC). Los casos de simulación considerados son los siguientes:

- Desempeño de la ley de control.
- Considerando incertidumbre en el modelo, representada por un cambio en los valores estimados de las masas de las articulaciones:  $m_1 = 0.4 \text{ kg}$ , y  $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ ,
- Simulación de la tarea de manipular un objeto de 1 Kg de masa a partir de  $t=5\text{sg}$ .
- Considerando la señal de disturbio en el par

Tabla 6.1 Desempeño de los controladores SMC, TSMC, Observador TSMC, PID multivariable y CTC

	<b>Desempeño del controlador</b>	<b>Incertidumbre en las masas</b>	<b>Manipular un objeto</b>	<b>Disturbio en el par aplicado</b>
<b>SMC</b>				
<b>TSMC</b>				
<b>Observador TSMC</b>				
<b>PID Multiv</b>				
<b>CTC</b>				

De la Tabla 6.1 se aprecia el buen comportamiento que presenta el esquema de observador por modos deslizantes terminal basado en realimentación dinámica de la salida. Es de anotar que si se compara el esquema TSMC con SMC se observa que frente a la respuesta del error de seguimiento de trayectorias el control por modos deslizantes terminal debido a su posibilidad de convergencia del error en tiempo finito logra un error de régimen permanente inferior al control por modos deslizantes convencional. La técnica propuesta para solucionar el problema de diseño de un observador por modos deslizantes permite que se mantengan las características de este tipo de control y que adicionalmente no se requiera de la medición de la velocidad para la implementación del control.

Es de anotar que el esquema PID multivariable también ofrece una muy buena respuesta ante las diferentes pruebas realizadas, mientras que el control CTC por su propia naturaleza su respuesta es ideal para el caso de ausencia de incertidumbres y perturbaciones, situación bastante alejada de la realidad a la cual está inmersa cualquier sistema dinámico.

## **6.5 Resumen**

En el capítulo se resolvió el problema de regulación por realimentación dinámica de la salida, correspondiente al seguimiento de una trayectoria de posición angular para un robot manipulador de dos grados de libertad. La metodología de diseño utilizada está basada en la aplicación de un principio de separación equivalente a resolver, primero, el problema de sintetizar una ley de control de información completa, que en este caso correspondió a la ley de control por modos deslizantes terminal con ley de alcanzabilidad FTSM; luego, como segundo paso, se sintetiza una ley de control por realimentación dinámica de la salida, la cual recupera asintóticamente las propiedades estabilizantes de la ley control de información completa. Se realizaron simulaciones que demostraron el buen desempeño del robot manipulador regulado por la ley de control por realimentación dinámica de la salida, se analizó su comportamiento ante errores de modelado y disturbios externos. El diseño realizado permite obtener un observador de estado para las velocidades articulares utilizando el control por modos deslizantes terminal.

## 7. Conclusiones y Futuros Trabajos

El desarrollo de esta tesis consideró como tema de trabajo el control de seguimiento de trayectorias de manipuladores industriales, utilizando esquemas de control no lineal, enfocándose en particular sobre el control por modos deslizantes dada su reconocida naturaleza robusta ante incertidumbres y disturbios limitados. Siendo el modelo dinámico de un robot manipulador un sistema de ecuaciones no lineales y fuertemente acopladas, que conlleva incertidumbres en los parámetros inerciales y otros parámetros dinámicos en el manipulador que pueden ser inciertos debido a su dificultad para ser modelados y medidos con precisión, el control por modos deslizantes es una estrategia que permite obtener un buen desempeño en esos casos.

El desarrollo del trabajo realizado parte de un estudio detallado del control por modos deslizantes, verificando su naturaleza robusta ante incertidumbres y analizando su característica de inclusión de un término discontinuo en la ley de control, el cual precisamente permite hacer al sistema insensible a disturbios e incertidumbres limitadas, pero al mismo tiempo es el responsable del indeseable fenómeno de oscilación a alta frecuencia conocido como *chattering*. La definición de la superficie de deslizamiento garantiza una convergencia exponencial del error cuando el tiempo tiende al infinito. La primera dificultad es resuelta usualmente mediante el remplazo de la función discontinua por una función saturación, la cual permite obtener una ley de control continua y libre del *chattering*, pero que al mismo tiempo introduce un error de régimen permanente.

Una opción que permite solucionar los inconvenientes de la técnica de modos deslizantes, es la conocida técnica de control por modos deslizantes terminal. En ésta última, se incluye un término no lineal suave en la definición de la superficie de deslizamiento, permitiendo que la convergencia del error en el modo de deslizamiento se alcance en un tiempo finito y menor que con la técnica convencional del control por modos deslizantes. El tiempo de convergencia finito redundante en lograr un error de régimen permanente menor y al mismo tiempo una disminución del *chattering*. Sobre esta técnica se han desarrollado variantes que permiten obtener una ley de control continua sin el uso de una función saturación, así implementando una ley de alcanzabilidad tipo FTSM se logra un control continuo, con convergencia del error en tiempo finito, menor error de régimen permanente y con características robustas frente a disturbios e

incertidumbres limitadas.

En el presente documento se estudiaron y verificaron las características de la técnica de control por modos deslizantes terminal. Por su excelente respuesta se consideró como tema de investigación el desarrollo de un observador por modos deslizantes terminal que permitiese mantener las ventajas de esta técnica y que adicionalmente no requiera de las mediciones de velocidad, siendo éste el principal aporte de la tesis.

Para el diseño del observador por modos deslizantes terminal se revisaron los diferentes enfoques basados en observadores por modos deslizantes pero en todos los intentos desarrollados no fue posible probar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante una función de Lyapunov, debido a que en general el diseño de observadores no lineales es una tarea compleja y en particular en el caso de modos deslizantes terminal, en la definición de la superficie de deslizamiento precisamente el término no lineal depende de las velocidades articulares y no se logró obtener una prueba de estabilidad independiente de éstos términos.

Finalmente, se encontró que la técnica de control por realimentación dinámica de la salida permitía obtener un observador por modos deslizantes terminal, con las características de desempeño del control por modos deslizantes terminal sin requerir la medición de las velocidades articulares. El enfoque empleado consiste en la reconstrucción asintótica de una ley de control estabilizante por realimentación del estado. En primer lugar, se diseña una ley de control robusta por realimentación del estado (de información completa) y, luego, se sintetiza una ley de control dinámica (con observación de los estados), la cual recupera asintóticamente la ley de control de información completa. Una característica importante es que el mecanismo de estabilización no depende de la construcción de una función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado.

Con el fin de ilustrar todos los conceptos expuestos, cada ley de control ha sido aplicada al caso concreto del control de un robot manipulador plano de dos grados de libertad, los resultados de las simulaciones prueban el buen desempeño del sistema desarrollado sujeto a disturbios e incertidumbres en el modelado.

Una posible extensión de estos resultados del trabajo desarrollado corresponde a utilizar el enfoque de síntesis de controladores adaptativos por realimentación de salida, para permitir que las ganancias de la ley de modos deslizantes se adapten automáticamente a la incertidumbre del sistema y posiblemente reduciendo el par requerido. Adicionalmente, se planea extender el problema desarrollado al caso de robots con mayor número de grados de libertad y realizar su implementación en un robot manipulador real.

## Referencias

Abdessameud, A., & Khelifi, M. (2006). A variable structure observer for the control of robot manipulators. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci*, 16 (2), 189–196.

Atassi, A. N., & Khalil, H. K. (2001). A separation principle for the control of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46, 742-746.

Atassi, A. N., & Khalil, H. K. (1999). A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, 1672-1687.

Battilotti, S. (1997). A note on reduced order dynamic output feedback stabilizing controllers. *Systems Control Letters*, 30, 71–81.

Battilotti, S. (1996). Global output regulation and disturbance attenuation with global stability via measurement feedback for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41, 315–327.

Baumann W.T, W., & Rogh, W. (1986). Feedback control of nonlinear systems by extended linearization. *IEEE Transaction on Automatic and. Control*, Ac-31 (1), 40–46.

Belhocine, M., Hamerlain, M., & Bouyoucef, K. (1997). Robot control using a sliding mode. *IEEE/ISIC*. Istanbul, Turkey.

Berghuis, H. (1993). Model Based Control: From Theory to Practice. *Ph.D. thesis, University of Twente, the Netherlands*.

Bestle, D., & Zeitz, M. (1983). Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. *International Journal of Control*, 38 (2), 419-431.

Bondaref, A., Kostylev, N., & Utkin, V. (1985). Sliding modes in systems with asymptotic observer. *Automation and Remote Control*, 46, 679-684.

Bornard, G., & Hammouri H, H. (1991). A high-gain observer for a class of uniformly observable systems. *Proc. 30-th Conf. Decision and Control*, 1494–1496. Brighton, England.

Canudas de Wit, C., & Slotine, J. (1991). Sliding Observers for Robot Manipulators. *Automatica*, 27 (5), 859-864.

Canudas de wit, C., Aström, K., & Fixot, N. (1990). Computed torque control via a nonlinear observer. *Int. J. Adap. Contr. Signal Process*, 4, 443–452.

Canudas, C., Siciliano, B., & Bastin, G. (1996). Theory of robot control. Springer Verlag.

Cavallo A, A., & Villani, L. (1997). Sliding manifold approach to the control of rigid robots: experimental results. *Elsevier Science* .

Chong, S., Yu, X., & Man, Z. (1996). A robust adaptive sliding mode controller for robotic manipulators. 31-35.

Dawson, D., Qu, Z., & Carroll, J. (1992). On the observation and output feedback problems for nonlinear uncertain dynamic systems. *System Control Letters* , 18 , 217-222.

Diong, B., & Medanic, J. (1992). Dynamic output feedback variable structure control for system stabilization. *International Journal of Control* , 56 , 607-30.

Druzhinina, M., Nikiforov, V., & Fradkov, A. (1996). Adaptive output control methods for nonlinear objects. *Automation and Remote Control* , 57 (2) , 153-176.

Edwards, C., & Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control. Theory and applications*. London: Taylor & Francis Inc.

Emelyanov, S., Korovin, S., Nersisyan, A., & Nis, Y. (1992). Output feedback stabilization of uncertain plants. *International Journal of Control* , 55 , 61-81.

Emilianov, S. V. (1967). Variable structure control systems. Nauka, Moscow.

Feng, Y., Yu, X., & Man, Z. (2001). Adaptive fast terminal sliding mode tracking control of robotic manipulator. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control* . Orlando Florida, USA.

Feng, Y., Yu, X., & Man, Z. (2002). Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Elsevier* , 38 , 2159-2167.

Freeman, R. A., & Kokotovic, P. (1996b). Tracking controllers for systems linear in the unmeasured states. *Automatica* , 32 , 735-746.

Freeman, R. A., & Kokotovic, P. V. (1996a). Robust nonlinear control design: State-space and Lyapunov techniques. Basel: BirkhXauser.

Gauthier, J., & Bornard, G. (1981). Observability of any  $u(t)$  of a class of nonlinear system. *IEEE Transaction on Automatic and Control* , AC-26 (4) , 922-926.

Gauthier, J., Hammouri, H., & Othman, S. (1991). A simple observer for nonlinear system: Applications to bioreactors. *IEEE Transaction on Automatic and Control* , 37 (6) , 875- 880.

Hill, D. J., Wen, C., & Goodwin, G. C. (1988). Stability analysis of decentralized robust adaptive control. *Systems & Control Letters* , 11 , 277-284.

Hung, J., Gao, W., & Hung, J. (1993). Variable structure control: a survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* , 40 , 2-22.

Iounnou, P. A. (1984). Robust adaptive control. *American Control Conference* . San Diego, CA.



- Isidori, A. (1989). *Nonlinear Control Systems*. New York: Springer-Verlag.
- Jain, S., & Khorrami, F. (June de 1995). Robust adaptive control of a class of nonlinear systems: State and output feedback. *Proceedings of the American Control*, 3, 1580-1584.
- Kalman, R. E. (1961). New methods and results in linear prediction and estimation theory. *RIAS Rep*, 61 (1), 99-119.
- Kanellakopoulos, P., Kokotovic, V., & Morse, A. S. (1991). Adaptive output-feedback control of systems with output nonlinearities. *Foundation of Adaptive Control*, 4. Berlin: Springer.
- Karagiannis, D., Astolfi, A., & Ortega, R. (2003). Two results for adaptive output feedback stabilization of nonlinear systems. *Automatica*, 39, 857-866.
- Karandikar, D., & Bandyopadhyay, B. (1997). Sliding Mode Control of Single Link Flexible Manipulator. *IEEE On Automatic Control*, 22, 212-22.
- Kazantzis, N., & Kravaris, C. (1998). Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem. *Systems and Control Letters*, 34, 241-247.
- Khalil, W., & Dombre, E. (2002). *Modeling identification and control of robots*. London: Kogan Page Science.
- Khelfi M.F, M., Zasadzinski M, M., Benzine, A., & Belalem, G. (1998). Nonlinear observation theory. *Proc. IEEE, SMC, IMACS Multiconf. Computational Engineering in Systems Applications CESA'98*, 260-265. Nabeul-Hammamet, Tunisia.
- Kokotovic, P. V., Krstic, M., & Kanellakopoulos, I. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Wiley.
- Kreisselmeier, G. (February de 1977). Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22, 2-8.
- Kreisselmeier, G., & Anderson, B. D. (1986). Robust model reference adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31, 127-133.
- Krener, A. J., & Isidori, A. (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems and Control Letters*, 3, 47-52.
- Krener, A. J., & Respondek W, W. (1985). Nonlinear observers with linearized error dynamics. *SIAM J. Contr. Optim*, 23 (2), 197-216.
- LÄuders, G., & Narendra, K. (December de 1974). Stable adaptive schemes for state estimation and identification of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19, 841-847.
- Leung, T. P. (December de 1989). Practical trajectory control of robot manipulator using adaptive slinding control scheme. *Procedings of the 28th Conference on Decision and Control*. Tampa, Florida.
- Lewis, F., Abdallah, C., & Dawson, D. (1993). *Control of robot manipulators*. Macmillan.

Lin, F., & Brandt, R. (february de 1998). An Optimal Control Approach to Robust Control of Robot Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* , 14 , No. 1.

Luenberger, D. G. (April de 1966). Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* , 11 , 190-197.

Luenberger, D. G. (April de 1964). Observing the state of a linear system. *IEEE Trans. Mil. Electron* , MIL-8 , 74-80.

Man, Z., & Yu, X. (1997). Adaptive terminal sliding mode tracking control for rigid robotic manipulators with uncertain dynamics. *40, Series C (3)* , 495-502.

Man, Z., & Yu, X. (1997). Adaptive terminal sliding mode tracking control for rigid robotic manipulators with uncertain dynamics. *JSME International Journal* , 40 (3) , Series C.

Man, Z., Paplinski, P., & Wu, H. (December de 1994). A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control* , 39 (12) , 2464-2469.

Marino, R., & Tomei, P. (December de 1997). Adaptive output feedback tracking for nonlinear systems with time-varying parameters. *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control* , 3 , 2483-2488. San Diego, California USA.

Marino, R., & Tomei, P. (1995). *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Misawa E.A, E., & Hedrick, J. (1989). Nonlinear observers—A State of the Art Survey. *Trans. ASME J. Dynamic. Systems* , 111 (3) , 344–352.

Misawa, E., & Hedrick, J. (1989). Nonlinear observers—A State of the Art Survey.

Morse, A. S., Kanellakopoulos, I., & Kokotov, P. V. (1991). Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* , 1241-1253.

Naihui, S., Zhaohui, R., Yongfu, W., & Bangchun, W. (26-31 de July de 2007). A comparison study of PD control of joint velocity in robot rrms. *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference* . Zhangjiajie, Hunan, China.

Naik, S. M., & Kumar, P. R. (1991). A robust adaptive controller for continuous-time systems. *Proceedings of American Control Conference* . Boston, MA.

Narendra, K. S., & Annaswamy, A. M. (1989). Stable Adaptive Control. *Englewood Cli@s* . New Jersey: Prentice Hall.

Nicosia, S., Tomei, P., & Tornambe, A. (1989). Approximate asymptotic observers for a class of nonlinear systems. *System Control Letters* , 12 , 43-51.

Nicosia, S., Tomei, P., & Tornambe, A. (1986). Feedback control of elastic robots by pseudo-linearization techniques. *25th Conf. on Decision and Control* , 397-402. Athens, Greece.

Nikiforov, V., & Fradkov, A. (1994). Adaptive control systems with augmented errors. *Automation and Remote Control*, 55 (9), 1239-1255.

Oh, S., & Khalil, H. K. (1997). Output feedback stabilization using variable structure control. *International Journal of Control*, 62, 831-848.

Ollero, A. (2001). *Robótica. Manipuladores y robots móviles*. Barcelona, España: Marcombo.

Ortega, R., & Spong, M. W. (1989). Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial. *Automatica*, 25, 877- 888.

Paden, B., & Panja, R. (1988). Globally asymptotically stable PD controller for robot manipulators: An input output approach. *International Journal of Control*, 57, 1697- 1712.

Perruquetti, W., & Barbot, J. P. (2002). *Sliding Mode Control in Engineering*. New York: Marcel Dekker Inc.

Praly, L. (December de 1984). Robust model reference adaptive controllers Part I: Stability analysis. *Proceedings of 23rd IEEE Conference on Decision and Control*.

Praly, L., & Arcak, M. (December de 2002). On certainty-equivalence design of nonlinear observer-based controllers. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 1485-1490. Las Vegas, Nevada, USA.

Qu, Z. (1998). *Robust Control of Nonlinear Uncertain Systems*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Sage, H., Mathelin, M., & Ostertag, E. (1999). Robust control of robot manipulators: a survey. *International Journal of Control*, 72, 6, 1498-1522.

Samson, C., Le Borgne, M., & Espinau, B. (1991). *Robot control*. Oxford University Press.

Slotine, J. J., & Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Slotine, J., Hedrick, J., & Misawa, E. (1986). On sliding observers for nonlinear systems. *Proc. American Control Conference*, 1794-1800. Seattle, USA.

Takegaki, M., & Arimoto. (1981). A new feedback method for dynamic control of manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 102, 119- 125.

Tang, Y. (1998). Terminal sliding mode control for rigid robots. *Automatica*, 34 (1), 51-56.

Teel, A. R., & Praly, L. (1994). Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback. *System Control Letters*, 22, 313-325.

Tornamhe, A., & Tomei, P. (1986). A new approach to observe and control a one link flexible robot arm. *Proc. 8th IASTED Int. Syrup. on Robotics and Artificial Intelligence*, 125-132. Toulouse.

Tsay, J., & Huang, J. (1994). Robust Nonlinear Control of robot Manipulators. *IEEE*, 2083-2088.

Tsinias, J. (1989). Observer design for non-linear systems. *System Control Letters*, 13, 135-142.

Utkin, V. (April de 1977). Variable Structure Systems with Sliding Modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22 (2) .

Venkataraman, S., & Gulati, S. (1991). On finite time mechanism terminal sliding modes.

Walcott B.L, B., & Zak, S. (1987b). State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. *IEEE Transaction on Automatic and Control*, AC-32 (2), 166-170.

Walcott, B., Corless, M., & Zak, S. (1987a). Comparative study of the nonlinear state-observation techniques. *International Journal Control*, 45 (6), 2109-2132.

Wu, X., Yu, X., & Man, Z. (1998). Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems. *Systems & Control Letters*, 34, 281-287.

Yu, S., Guo, G., Ma, Z., & Du, J. (2006). Global fast terminal sliding mode control for robotic manipulators. *Int. J. Modelling, Identification and Control*, 1 (1) . Inderscience Enterprises.

Yu, S., Yu, X., Shirinzadeh, B., & Man, Z. (2005). Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Elsevier*, 41, 1957-1964.

Yu, X., & Man, Z. (2002). Fast terminal sliding mode control design for nonlinear dynamical systems. *IEEE Transaction con circuits and systems - I: Fundamental theory and applications*, 49 (2), 261-264.

Zak, M. (1988). Terminal Attractors for Addressable Memory in Neural Networks. *Physics Letters*, 133, 218-222.

Zhang, Y., & Ioannou, P. A. (January de 1999). Robustness of nonlinear control systems with respect to unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, 119-124.

Zhu, Y. (2004). Adaptive output feedback control of nonlinear systems. *PhD Thesis, Oklahoma State University, Oklahoma, USA* .

## **Anexos**

1. Control PID multivariable de un robot manipulador
2. Control por par calculado de un robot manipulador



# 1. Control PID Multivariable de un robot Manipulador

## 1.1 Introducción

El diseño del control PID (Proporcional - Integral - Derivativo) multivariable para un robot manipulador de esta sección está basado en los trabajos de (Tarokh & Seraji, 1988) donde se utiliza el enfoque multivariable para solucionar el problema de control de un brazo manipulador. El esquema de control propuesto por (Tarokh & Seraji, 1988) está compuesto por dos controladores según la Figura 1.1, el controlador es tipo PD (Proporcional - Derivativo) conforma un lazo de realimentación interno y se diseña para lograr la estabilización del robot mediante la técnica de asignación de polos a partir del modelo linealizado del robot, y el control  $Q(s)$  es tipo PID, el cual es diseñado para lograr el desacople entrada-salida y el seguimiento de la trayectoria. Las ganancias de los controles PD y PID están asociadas directamente con el modelo linealizado del robot por las expresiones del lazo cerrado.

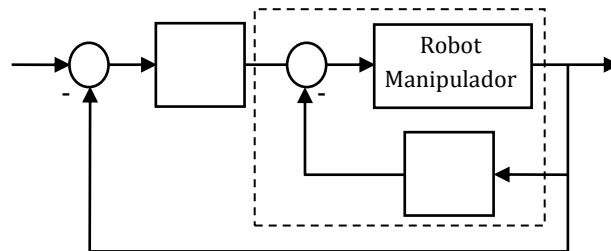


Figura 1.1 Configuración del sistema de control

En la sección 1.2 se presenta el esquema de linealización del modelo dinámico del robot manipulador, en la sección 1.3 se diseña el esquema de control PID multivariable y se presentan los resultados de la simulación ante condiciones de incertidumbre en el modelo y perturbaciones externas y en la sección 1.4 se hace un resumen de las ideas tratadas en el anexo.

## 1.2 Linealización del Modelo Dinámico

El modelo dinámico de un robot manipulador es representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales y fuertemente acopladas, que tienen la siguiente forma general,

(1.1)

donde  $\mathbf{q}$  es el vector de posición de las articulaciones,  $\mathbf{u}$  es el vector del par aplicado a las articulaciones,  $\mathbf{M}$  es la matriz de inercia del manipulador,  $\mathbf{C}$  es el vector de fuerzas de coriolis y centrípeta,  $\mathbf{g}$  es el vector de fuerzas gravitatorias.

El problema de control consiste en determinar el par  $\mathbf{u}$  que es necesario aplicar al robot para lograr que la salida del manipulador siga la trayectoria deseada  $\mathbf{q}_d$ , haciendo cero el error de seguimiento de la posición.

El esquema de control considerado está basado en la teoría de control lineal multivariable, por ello es necesario considerar el modelo linealizado de las dinámicas del robot. La ecuación (1.1) puede ser linealizada alrededor del punto de operación  $\mathbf{q}_0$ , que en el espacio articular corresponde a los vectores de posición, velocidad y aceleración angular (Seraji, 1986). El par requerido para producir esta condición está dado por,

(1.2)

Considerando pequeñas perturbaciones alrededor del punto de operación, se define,

(1.3)

Una pequeña variación en el par  $\mathbf{u}$ , produce a su vez una variación en los vectores de posiciones, velocidades y aceleraciones:  $\delta \mathbf{q}$ ,  $\delta \dot{\mathbf{q}}$  y  $\delta \ddot{\mathbf{q}}$ . Asumiendo que el cambio en  $\mathbf{M}$  es despreciable, es decir,  $\delta \mathbf{M} \approx 0$ , de la ecuación (1.1) se obtiene,

(1.4)



Expandiendo los vectores  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{g}$  alrededor del punto de operación utilizando series de Taylor se obtiene,

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Considerando que las variaciones de posición y velocidad son pequeñas pueden despreciarse los términos de orden superior en (1.5), por lo tanto la ecuación (1.4) puede escribirse como,

$$(1.6)$$

donde las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  están definidas por,

$$, \quad \dots \quad y \quad \dots \quad .$$

Considerando la condición de equilibrio inicial dada por (1.2), la ecuación (1.6) se reduce a,

$$(1.7)$$

La ecuación (1.7) define a un conjunto de ecuaciones lineales y acopladas que describen el comportamiento incremental de las dinámicas del robot para pequeñas variaciones en la vecindad del punto de operación.

Definiendo como variables de estado a  $\dots$  y  $\dots$ , la representación en espacio de estado del modelo linealizado del robot es,

$$(1.8)$$

La función de transferencia del modelo lineal del robot es de segundo orden y se obtiene tomando la transformada de Laplace de la ecuación (1.7) así,

$$(1.9)$$

donde es la matriz de  $n \times n$  de funciones de transferencia del sistema en lazo abierto (el modelo linealizado del robot manipulador).

### 1.3 Diseño del Control PID del Manipulador Plano

El esquema de control está constituido por dos controladores, uno tipo PD para estabilización del robot, el cual se diseña a partir del modelo lineal. El controlador PID asegura el desacople del modelo lineal y el seguimiento de la trayectoria deseada. Según el esquema de la Figura 1.1 el par que se aplica al robot manipulador esta dado por,

$$(1.10)$$

donde es el control PD y es el control PID. A continuación se presenta el diseño de cada componente de la ley de control 1.10.

#### 1.3.1 Diseño del control PD para estabilidad del robot

Considerando la siguiente ley de control PD,

$$(1.11)$$

donde y son las matrices de realimentación de las ganancias constantes de posición y velocidad.

La ecuación (1.10) es equivalente a,

$$(1.12)$$

Reemplazando (1.12) en (1.8), se obtiene la siguiente representación en espacio de estados del sistema interno en lazo cerrado.

$$\cdot \quad (1.13)$$

Organizando términos,

$$\cdot \quad (1.14)$$

La matriz de función de transferencia del sistema interno en lazo cerrado es,

$$(1.15)$$

El polinomio característico del sistema interno en lazo cerrado es,

$$(1.16)$$

Para estabilizar el robot y obtener una respuesta transitoria aceptable, las ganancias  $K_p$  y  $K_v$  se pueden seleccionar por asignación de los  $2n$  polos del sistema para una localización deseada en el semi-plano izquierdo del plano complejo. También, se puede realizar un diseño óptimo por realimentación de estado utilizando la técnica control óptimo cuadrático, conocida como LQR (en inglés, *Linear Quadratic Regulator*).

Considere el siguiente sistema,

$$(1.17)$$

Para el diseño de una ley de realimentación de estado óptima  $u = -Kx$  se puede utilizar el criterio de desempeño,

$$(1.18)$$

donde  $Q$  es no definida negativa y  $R$  es definida positiva. El control óptimo que minimiza  $J$  está dado por la ley lineal de realimentación de estado  $u = -Kx$  con  $K = R^{-1}B^T P$ , siendo  $P$  la única solución definida positiva de la matriz ecuación algebraica de Riccati,

(1.19)

En *matlab* el diseño se soluciona con la función:  $\text{pid}$ , siendo las matrices  $Q$  y  $R$  los parámetros de sintonía del problema. Por ejemplo, eligiendo  $Q = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$  y  $R = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$  con  $\text{pid}$  corresponde a hacer un equilibrio entre las energías de la salida de la planta y la entrada, así la función de costo (1.18) es,

(1.20)

Si se escoge  $\lambda$  pequeña, se obtiene convergencia más rápida pero señales de control  $u(t)$  grandes y si  $\lambda$  es grande, la respuesta es más lenta pero las señales de control más pequeñas.

### 1.3.2 Diseño del control PID para desacople y seguimiento de la referencia

En esta sección se diseña el control PID especificado en el esquema de la Figura 1.1, el sistema intermedio diseñado en el apartado anterior se coloca en cascada con el controlador PID denotado como  $C(s)$ . Se desea diseñar  $C(s)$  de forma que se obtenga una función de transferencia desacoplada, así,

$$C(s) = \frac{1}{G(s)}, \quad (1.21)$$

donde  $G(s)$  y  $H(s)$  son las constantes a determinar. Reemplazando (1.15) en (1.21),

$$C(s) = \frac{1}{G(s)} = \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s}} = \frac{s^4}{4}. \quad (1.22)$$

Reorganizando términos y definiendo  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$ ,

$$C(s) = \frac{K_p}{s} + K_i + K_d s. \quad (1.23)$$

La ecuación (1.23) define la expresión de un PID multivariable. De acuerdo a la Figura 1.1, se define la siguiente ley de control,

$$— \quad (1.24)$$

donde es el vector del error de seguimiento de las posiciones.

El término integral introduce una variable de estado adicional,

$$, \quad (1.25)$$

Incorporando (1.24) y (1.25) al modelo en espacio de estado dado por (1.14), se obtiene la representación siguiente que incluye los controladores para estabilización y para seguimiento de la trayectoria,

$$(1.26)$$

El polinomio característico del sistema es:

$$(1.27)$$

Sustituyendo , y , el polinomio característico se reduce a,

$$(1.28)$$

donde es el polinomio característico obtenido en el diseño anterior y es un polinomio de orden n,

$$(1.29)$$

Diseñando el controlador de acuerdo a (1.22), el sistema total de orden  $3n$ , preserva los  $2n$  polos diseñados por asignación de polos e introduce  $n$  polos adicionales, los cuales pueden ser asignados en cualquier ubicación deseada dado que  $K$  se definió positiva.

La selección de las matrices  $K$ ,  $L$  y  $F$  ha permitido lograr que,

$$- \quad (1.30)$$

Siendo  $T(s)$  la matriz de funciones de transferencia del sistema completo en lazo abierto, que relaciona la salida  $Y(s)$  y la señal de error  $E(s)$  según lo indicado en la Figura 1.1.

$$- \quad (1.31)$$

Así, la función de transferencia en lazo cerrado del sistema es,

$$(1.32)$$

Notar que la ecuación de estado del sistema en lazo cerrado dada por (1.26) es de orden  $3n$  y su polinomio característico dado por (1.27) también tiene  $3n$  polos. Sin embargo, la función de transferencia entrada-salida dada por (1.32) es de orden  $n$ . Esto es debido a la cancelación polo-cero en (1.31) como resultado de la forma que se seleccionaron  $K$ ,  $L$  y  $F$  en el controlador PID. Una de las razones por la cual se utilizó el control PD para estabilizar el sistema fue para garantizar que la cancelación polo-cero se realizará para polos estables.

Si se selecciona  $K$  en 1.32,

$$- \quad (1.33)$$

La ecuación (1.33) implica que el sistema en lazo cerrado es desacoplado en el sentido de cada señal de referencia  $R_i(s)$  afectará solamente su ángulo correspondiente  $\theta_i$ . Además, están relacionadas por una función de primer orden cuya constante de tiempo  $\tau_i$  es inversamente proporcional a  $K_i$ , por lo tanto al incrementar  $K_i$  se mejoran las características del seguimiento del sistema en lazo cerrado.

### 1.3.3 Resultados de la simulación del esquema PID multivariable

La ley de control del PID multivariable dada por (1.11) y (1.24) se aplica al robot manipulador plano de dos grados de libertad, cuyo modelo dinámico, trayectoria deseada y valores de los diferentes parámetros se presentaron en la sección 3.2 del documento principal. La simulación del sistema se implementó en el ambiente *Matlab/Simulink*®, en esta sección se presentan los resultados de las diferentes pruebas desarrolladas.

El diseño de los parámetros del control PD se realizó utilizando el comando *lqr* de *Matlab* con los siguientes parámetros de desempeño  $Q = \text{diag}([1,1,1,1])$  y  $R = \text{diag}([1,1,1,1])*1E-2$ , los cuales se seleccionaron teniendo en cuenta la relación entre tiempo de convergencia y señal de control  $u(t)$ . Para el control PID las constantes  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  se determinan a partir de la ecuación (1.23), se eligió  $K = \text{diag}([1,1,1,1])*1e2$  para obtener una buena respuesta en la condición de seguimiento de la referencia.

A fin de ilustrar el desempeño del controlador se aplican las trayectorias en el espacio articular del robot dadas por la expresión (3.13) del documento principal y se consideran los valores iniciales especificados en la sección 3.2 del mismo. La Figura 1.2 muestra el esquema de control PID multivariable aplicado al robot manipulador plano de dos grados de libertad.

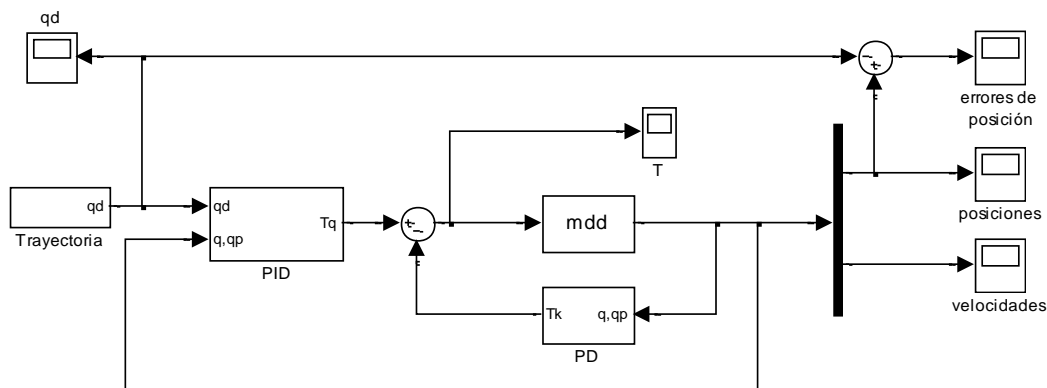


Figura 1.2 Implementación en *Simulink* del control PID multivariable

En la Figura 1.3 se muestran los resultados de la simulación, en a) se grafica el error de seguimiento de la trayectoria obtenido y en b) se detalla que el error de régimen permanente, el cual es  $e_{ss}$  y  $e_{ss}$ . En c) se grafica el par aplicado al robot y en d) se presenta una ampliación, se observa que el par sólo en la parte inicial es muy grande.

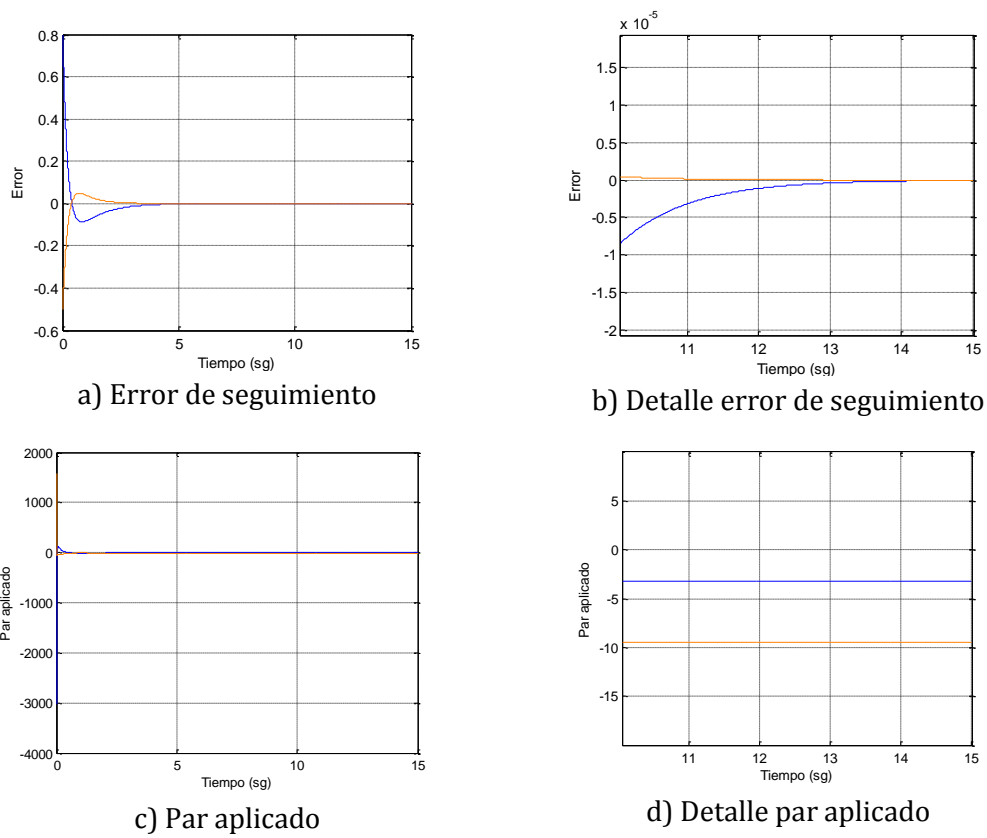
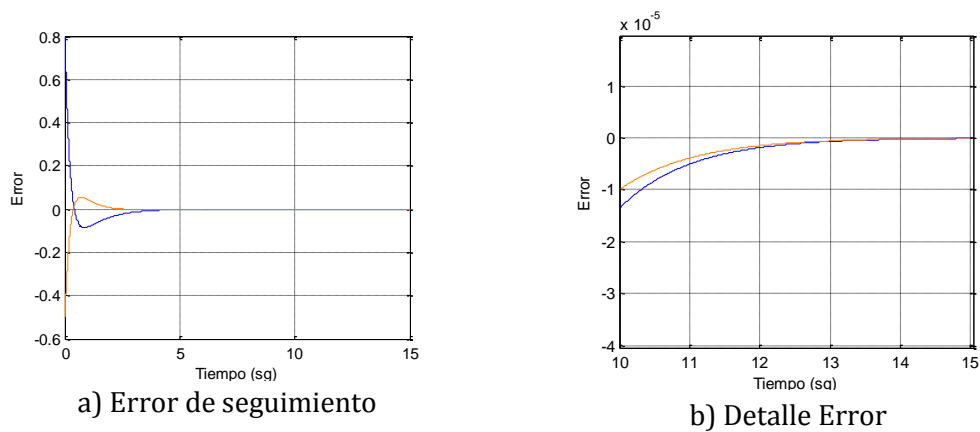


Figura 1.3 Control PID multivariable

Considerando un cambio en los valores de las masas de las articulaciones utilizadas para el cálculo de ley de control, por los siguientes valores nominales:  $m_1 = 0.4 \text{ kg}$ , y  $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ , se obtiene el resultado mostrado en la Figura 1.4. Se aprecia que el sistema es capaz de responder con un error de régimen permanente de  $10^{-5}$  y  $10^{-5}$ , verificándose el comportamiento del sistema ante la presencia de incertidumbres en el modelo.





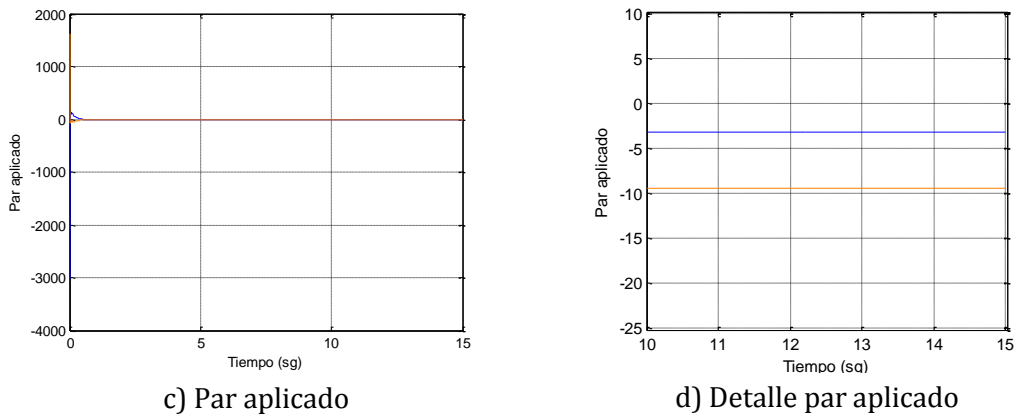


Figura 1.4 Control PID multivariable con incertidumbres en las masas del modelo.

En la Figura 1.5 se realiza la simulación de la tarea de manipular un objeto de 0.5 Kg de masa a partir de  $t=5\text{sg}$ , se aprecia que se produce un cambio en el momento de tomar el objeto en el par indicado en las gráficas c) y d), se logra un error de régimen permanente de  $\dots$  y  $\dots$ .

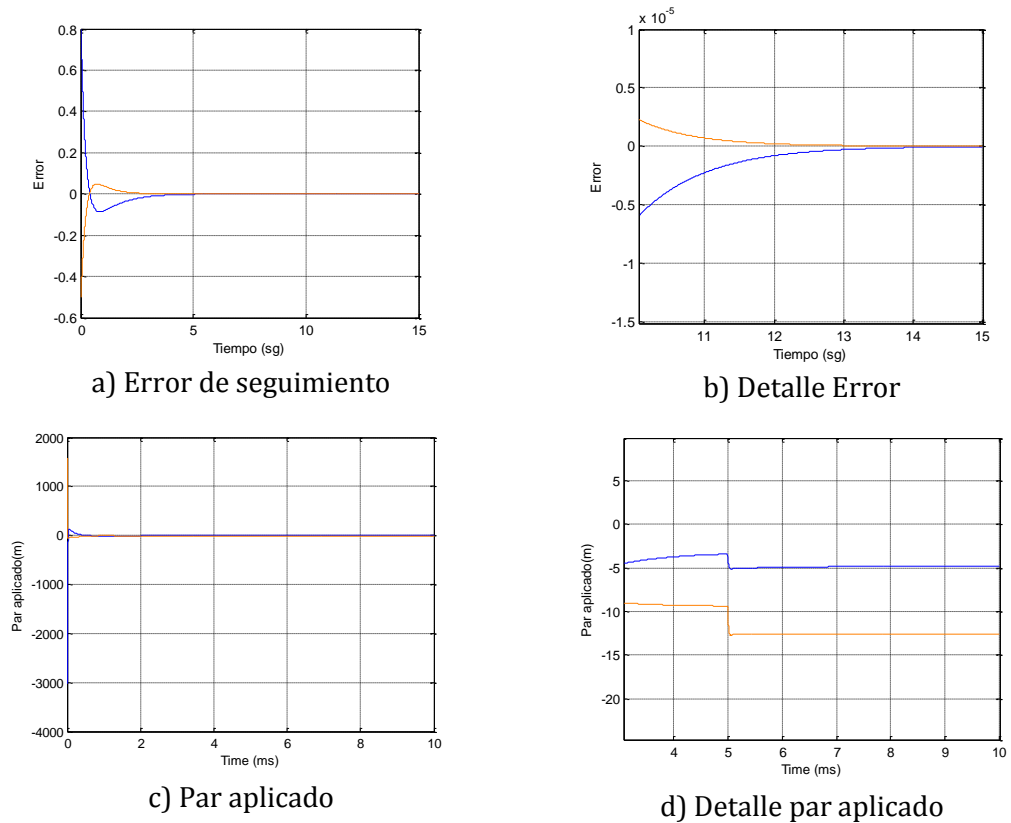


Figura 1.5 Control PID multivariable y simulación de la manipulación de un objeto.

Considerando la siguiente señal de disturbio se prueba el sistema,

En la Figura 1.6. Se aprecia que el sistema es capaz de responder con un error de régimen permanente pequeño de  $10^{-3}$ , verificándose el comportamiento del sistema ante la presencia de disturbios externos.

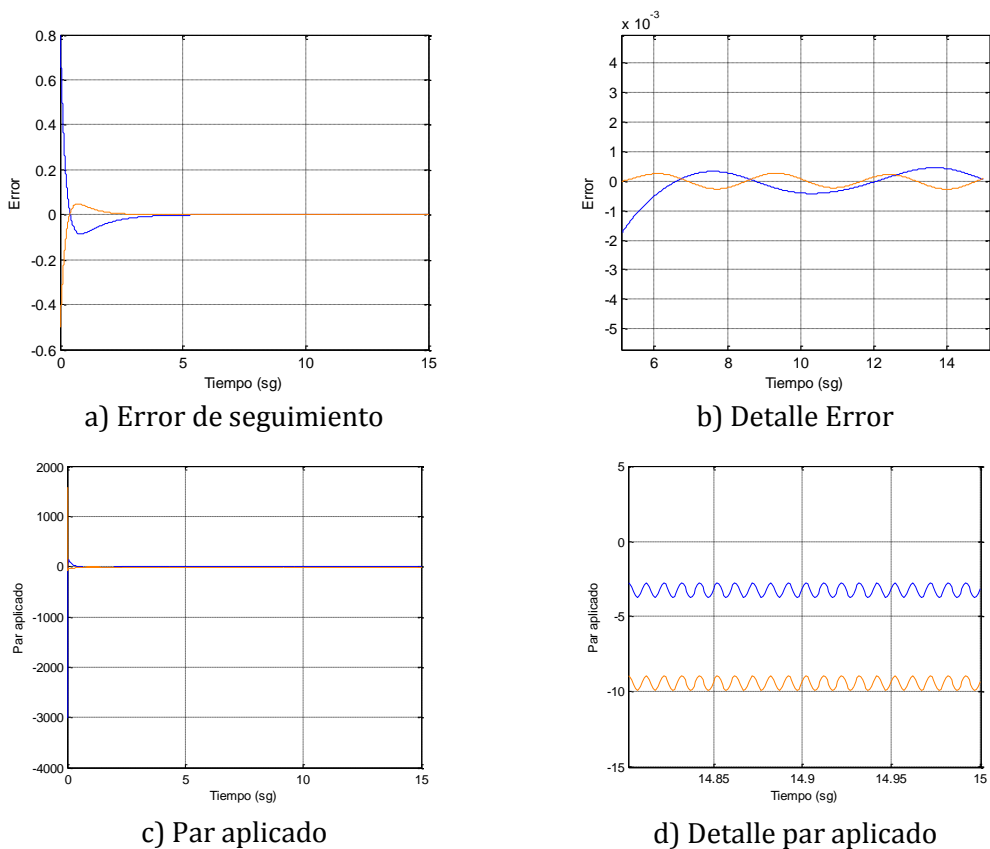


Figura 1.6 Control PID multivariable con disturbios externos

En las simulaciones realizadas se ha verificado el comportamiento del control PID multivariable ante incertidumbres y disturbios externos.

## **1.4 Resumen**

En el anexo se diseña un control PID multivariable aplicando esquema de control de (Tarokh & Seraji, 1988), este esquema incluye un lazo interno tipo PD que permite estabilizar el modelo linealizado del robot y un lazo realimentado tipo PID que logra el desacople entrada-salida y el seguimiento de la referencia. Esta técnica permite un buen desempeño a partir del conocimiento del modelo linealizado para un punto de operación del robot manipulador. El esquema se prueba utilizando el modelo de un robot manipulador de dos grados de libertad, las simulaciones incluyen los resultados ante condiciones de variación de los parámetros del modelo y disturbios externos. Se muestra que este esquema de control lineal presenta un muy buen comportamiento ante las pruebas realizadas.



## 2. Control por Par Calculado de un Robot Manipulador

El control por par calculado utiliza el enfoque de linealización por realimentación, también conocido en aplicaciones de robótica como control por desacoplamiento no lineal o simplemente control dinámico (Khalil & Dombre, 2002), (Sciavicco & Siciliano, 1996). Este tipo de control es después del PID el más popular en las aplicaciones robotizadas en la industria y constituye la base para controles más avanzados. La linealización por realimentación es un enfoque de diseño de sistemas de control no lineales, la idea central que plantea es transformar algebraicamente un sistema dinámico no lineal en uno lineal y desacoplado, para así poder aplicar las técnicas de control lineal.

En la sección 2.1 se presenta el esquema de diseño del control linealización por realimentación del robot manipulador, en la sección 2.2 se presentan los resultados de la simulación ante condiciones de incertidumbre en el modelo y perturbaciones externas y en la sección 2.3 se hace un resumen de las ideas tratadas en el anexo.

### 2.1 Linealización por realimentación

El modelo dinámico de un robot manipulador es representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales y fuertemente acopladas, que tienen la siguiente forma general,

(2.1)

donde  $\mathbf{q}$  es el vector de posición de las articulaciones,  $\mathbf{u}$  es el vector del par aplicado a las articulaciones,  $\mathbf{M}$  es la matriz de inercia del manipulador,  $\mathbf{c}$  es el vector de fuerzas de coriolis y centrífuga,  $\mathbf{g}$  es el vector de fuerzas gravitatorias.

La ecuación 2.1 también puede escribirse de manera simplificada así,

(2.2)

donde incluye las fuerzas de coriolis, centrífugas y gravitacionales.

En (Khalil & Dombre, 2002) se propone la siguiente linealización:

(2.3)

donde  $\mathbf{w}(t)$  representa un nuevo vector de control, siendo  $\hat{\mathbf{M}}$  y  $\hat{\mathbf{H}}$  las estimaciones respectivas de  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$  (Figura 2.1). Cuando el modelo dinámico es perfectamente conocido, se tiene que  $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}$  y  $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ .

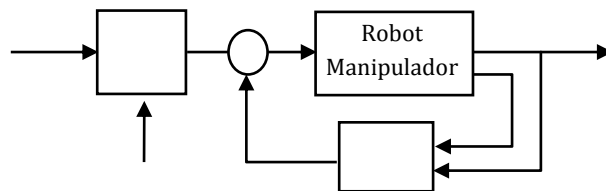


Figura 2.1 Sistema de linealización por realimentación

Reemplazando (2.3) en (2.2) y considerando el caso ideal de ausencia de disturbios y conocimiento perfecto del modelo, se obtiene que el problema se reduce al control de  $n$  sistemas lineales, desacoplados y de segundo orden (doble integrador),

(2.4)

En otras palabras, el componente  $\mathbf{w}_i$  influencia, con una relación de segundo orden, solo a la variable articular  $q_i$ , independientemente del movimiento de las respectivas articulaciones.

Esta técnica de desacoplamiento y compensación no lineal es muy atractiva desde el punto de vista del control, ya que la dinámica no lineal y con acoplamiento se reemplaza por un sistema lineal de segundo orden y sin acoplamiento. Pero la compensación puede no ser perfecta en presencia de incertidumbres en el modelo o debido a las aproximaciones realizadas en el cálculo en línea del modelo inverso.

Para el problema de seguimiento de una trayectoria, se asume que el movimiento se especifica por  $\mathbf{p}_d$  siendo la posición, velocidad y aceleración deseadas respectivamente, el control por par calculado en (Khalil & Dombre, 2002) y (Ollero, 2001) es calculado por la ley de control PD siguiente,

$$(2.5)$$

donde  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_v$  son matrices diagonales  $n \times n$  definidas positivas y representan las ganancias del controlador.

Si el modelo dinámico es perfectamente conocido, se deduce la siguiente ecuación en lazo cerrado del sistema, reemplazando (2.5) en (2.4), definiendo  $\mathbf{A}$  y reorganizando términos,

$$(2.6)$$

La ecuación (2.6) corresponde a un sistema lineal de segundo orden, siendo el denominador de la función de transferencia,

$$(2.7)$$

donde  $\zeta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  la frecuencia natural no amortiguada. Igualando coeficientes en (2.7) se tiene,

$$(2.8)$$

Por lo tanto seleccionando  $\zeta$  y  $\omega_n$  deseados se obtiene el diseño de las constantes del control PD.

## 2.2 Resultados de la Simulación del Control por Par Calculado

La ley de control por par calculado dada por (2.5) se aplica al robot manipulador plano de dos grados de libertad, cuyo modelo dinámico, trayectoria deseada y valores de los diferentes

parámetros se presentaron en la sección 3.2 del documento principal. La simulación del sistema se implementó en el ambiente *Matlab/Simulink*®, en esta sección se presentan los resultados de las diferentes pruebas de desarrolladas.

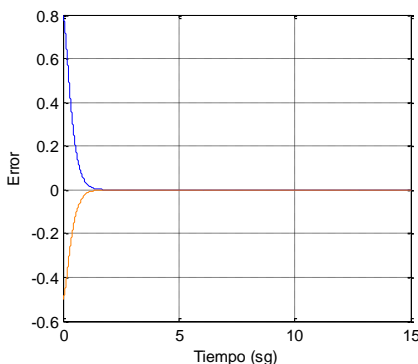
El diseño de los parámetros del controlador se realiza buscando una respuesta rápida y sin máximo sobreimpulso (Ollero, 2001), para lo cual se seleccionó y , aplicando (2.8) los parámetros del control son,

(2.9)

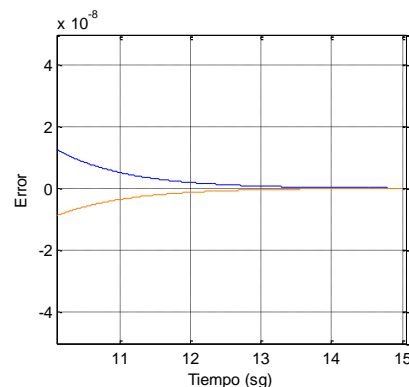
Por lo tanto se obtiene,

A fin de ilustrar el desempeño del controlador se aplican las siguientes trayectorias en el espacio articular del robot y con los siguientes valores iniciales para las posiciones y velocidades de las articulaciones . A continuación se presentan las pruebas realizadas sobre el esquema de control por par calculado aplicado al robot manipulador plano de dos grados de libertad.

En la Figura 2.2 se muestran los resultados de la simulación en ausencia de errores de modelado, en a) se grafica el error de seguimiento obtenido y en b) se detalla que el error en régimen permanente obtenido y . En c) y d) se grafica el par aplicado al robot. Se observa que con un conocimiento exacto del modelo, el control por par calculado obtiene un error prácticamente cero.



a) Error de seguimiento



b) Detalle error de seguimiento



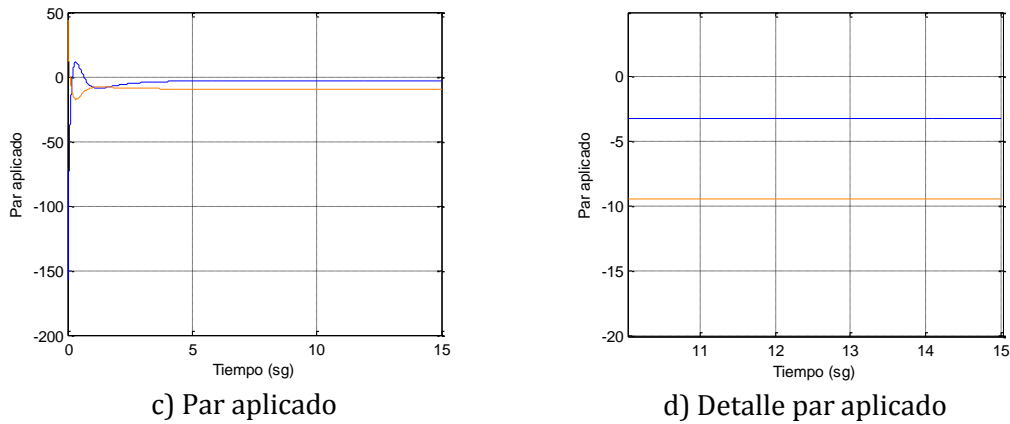


Figura 2.2 Control por par calculado sin errores de modelado

Considerando un cambio en los valores de las masas de las articulaciones utilizadas para el cálculo de ley de control, por los siguientes valores nominales:  $m_1 = 0.4 \text{ kg}$ , y  $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ , se obtiene el resultado mostrado en la Figura 2.3. Se aprecia que el sistema responde con un error de régimen permanente de  $\dots$  y  $\dots$ , verificándose que el control por par calculado ante incertidumbres en el modelo presenta un error de régimen permanente considerable.

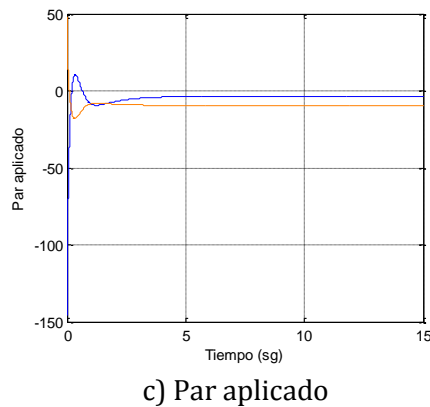
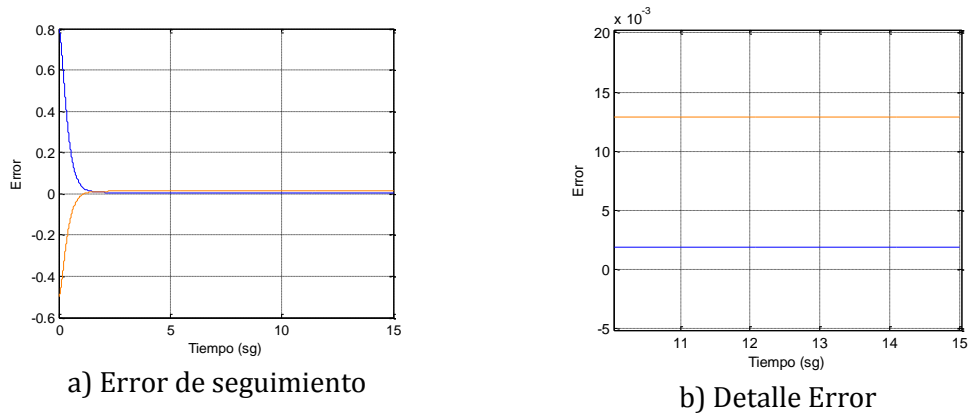


Figura 2.3 Control por par calculado con incertidumbres en las masas del modelo.

En la Figura 2.4 se realiza la simulación de la tarea de manipular un objeto de 0.5 Kg de masa a partir de  $t=5\text{sg}$ , se aprecia que se produce un cambio en el momento de tomar el objeto en el par indicado en la gráfica c), se logra un error de régimen permanente de  $\pm 0.02$  y

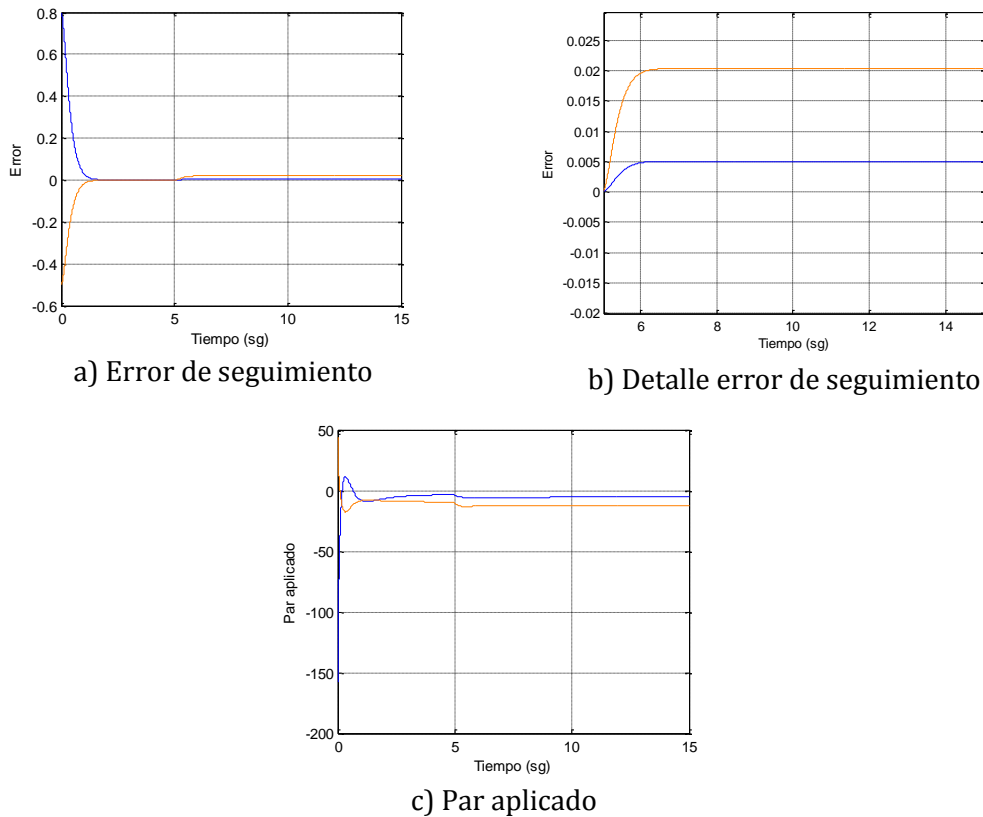


Figura 2.4 Control por par calculado y simulación de la manipulación de un objeto.

Ahora considerando la siguiente señal de disturbio se prueba el sistema,

En la Figura 2.5. Se aprecia que el sistema responde con un error de régimen permanente verificándose como se afecta el comportamiento del sistema ante la presencia de disturbios externos.

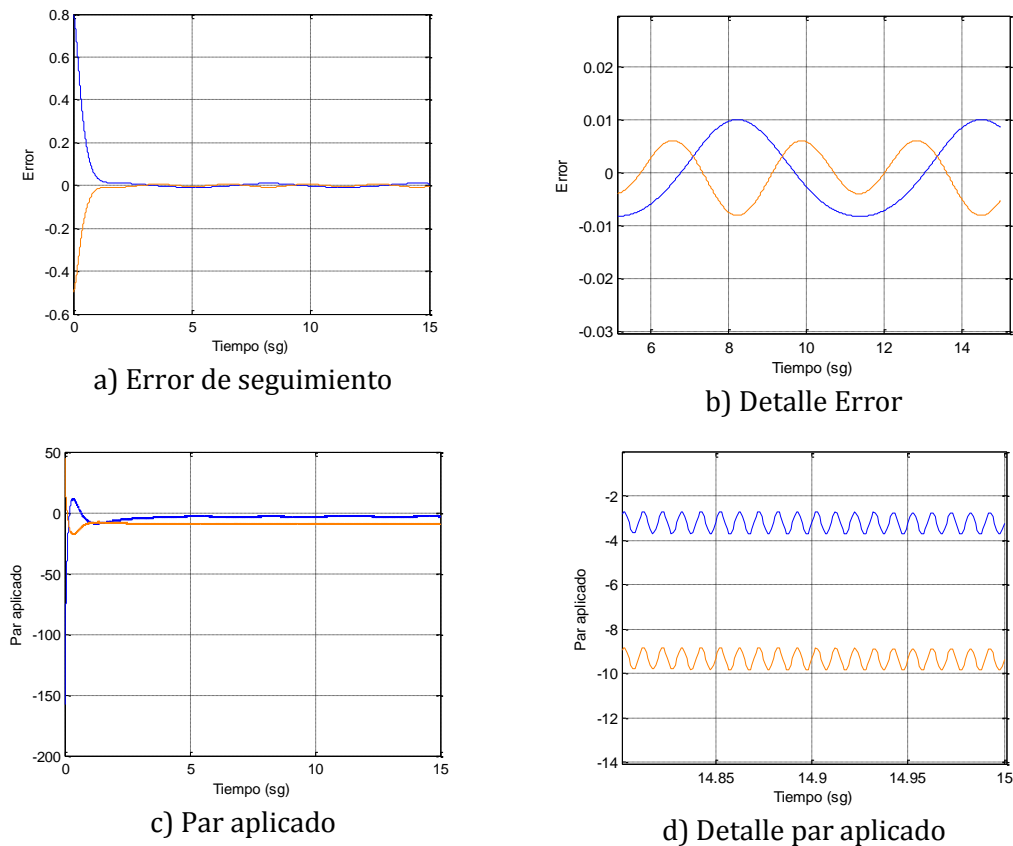


Figura 2.5 Control por par calculado con disturbios externos

En las simulaciones realizadas se ha verificado el comportamiento del control por par calculado ante incertidumbres y disturbios externos.

## 2.3 Resumen

En el anexo se ha presentado el diseño de un control por par calculado, el cual utiliza la técnica de linealización por realimentación, este esquema plantea la transformación algebraica de un sistema dinámico no lineal en uno lineal y desacoplado, para así poder aplicar las técnicas de control lineal. Esta técnica es conocida como la mejor solución teórica del problema de control de un robot en condiciones de conocimiento perfecto de las dinámicas del robot, pero debido a la complejidad del modelo matemático del robot manipulador, este caso es sólo el ideal. El esquema de control por par calculado ha sido probado utilizando el modelo de un robot manipulador de dos grados de libertad, las simulaciones incluyen los resultados ante condiciones de variación de los parámetros del modelo y disturbios externos.



## Referencias - Anexo

Khalil, W., & Dombre, E. (2002). *Modeling identification and control of robots*. London: Kogan Page Science.

Ollero, A. (2001). *Robótica. Manipuladores y robots móviles*. Barcelona, España: Marcombo.

Sciavicco, L., & Siciliano, B. (1996). *Modeling and control of robot manipulators*. New York: McGraw-Hill.

Seraji, H. (1986, April). Linear multivariable control of robot manipulators. *Robotics and Automation*, Vol. 3, 565 - 571.

Tarokh, M., & Seraji, H. (1988). A control scheme for trajectory tracking of robot manipulator. *Vol. 3*, 1192 - 1197.