SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO

CHRISTIAN ESTEBAN CASTRO LÓPEZ
JOVANY ANDRÉS ARTEAGA MORENO
LUIS ANDRÉS RICAURTE URBANO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE BECAS PARA LA EXCELENCIA DOCENTE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL
VALLE DEL GUAMUEZ, JUNIO DE 2018

SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO

Trabajo para optar al título de
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN

CHRISTIAN ESTEBAN CASTRO LÓPEZ
JOVANY ANDRÉS ARTEAGA MORENO
LUIS ANDRÉS RICAURTE URBANO

Director
Mg. Santiago Peña

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE BECAS PARA LA EXCELENCIA DOCENTE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL
VALLE DEL GUAMUEZ, JUNIO DE 2018

DEDICATORIAS

Christian:

A mí esposa Diana y mis hijos Daniela y Cristhian, por su paciencia y su comprensión durante este proceso, pues las jornadas fueron extenuantes e hicieron que en muchas ocasiones me alejara de ustedes, pero sin su amor no lo hubiera logrado.

A mi madre Carmen Alicia por todos sus esfuerzos para que sea la persona que hoy soy, todos mis logros tanto académicos, como personales, te los debo a ti.

Andrés:

A quienes rodean mi existencia ¡gracias!, les digo que es simple lo que está sucediendo en este momento eterno, en este lugar de paso. Que camino de la mano con la felicidad… felicidad que llama a leer y recordar por siempre el inicio de éste asunto.

Jovani:

A Dios por darme la salud y bienestar para salir adelante, a mi familia: Araceli, Sebastián y Andrés Felipe, por su apoyo, paciencia y amor brindado durante estos años de estudio. A mi madre, hermanos y a mi tío Luis Arteaga, por sus palabras de aliento y buena energía que me enviaron durante todo este tiempo. Gracias!.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Dios por hacer que en nuestras vidas sucediera esta oportunidad de formación personal y profesional, para fortalecimiento de nuestra vocación como docentes.

También agradecemos al Ministerio de Educación Nacional por haber puesto en marcha el Programa “Becas para La Excelencia Docente” en el que muchos docentes encontramos la oportunidad para superarnos académicamente.

Igualmente, nuestro agradecimiento a la Universidad del Cauca, por ser la facilitadora para que este proceso de maestría llegara hasta nosotros en este lugar apartado de Colombia (Valle del Guamuez, Putumayo).

Finalmente agradecemos a todos y cada uno de los docentes que seminario tras seminario nos acompañaron en ese proceso de formación, brindando lo mejor de sí para fortalecer nuestros conocimientos. Fueron ellos quienes no ahorraron esfuerzos para llegar a cada sesión a pesar de las dificultades que el contexto en repetidas veces les presentó.

TABLA DE CONTENIDO

Lista de figuras

Lista de tablas

Lista de anexos

CAPÍTULO 1: PRESENTACIÓN

La propuesta de intervención pedagógica en el aula: “Situaciones Didácticas en la Enseñanza de las Razones Trigonométricas en Estudiantes de Grado Décimo”, se desarrolló en las Instituciones Educativas Rural La Concordia, Ciudad La Hormiga y La Libertad del municipio Valle del Guamuez, Putumayo. Estos establecimientos oficiales prestan el servicio de educación formal desde el grado cero (0) hasta el grado once (11) y atienden a estudiantes de ambos géneros con edades entre 5 y 19 años, quienes tienen diferentes niveles cognoscitivos, sociales y culturales.

La institución educativa Ciudad la Hormiga – IECH – tiene modalidad comercial, se encuentra ubicada en el casco urbano y, de acuerdo a cifras del Sistema Integrado de Matrícula (SIMAT), cuenta con una matrícula total para la secundaria de 862 estudiantes para el año 2017. La Institución Educativa La Libertad, se ubica en el barrio de su mismo nombre y tiene modalidad académica con énfasis agroforestal. Atiende a un total de 1023 estudiantes, 498 en primaria y 525 en secundaria. Sus estudiantes están clasificados en los estratos 0 y 1 del SISBEN[1] (Libertad, 2017). La Institución Educativa Rural La Concordia, se encuentra ubicada a 7 km aproximadamente al norte de la cabecera municipal del Valle del Guamuez, su modalidad es académica, atiende a 272 estudiantes y la comunidad educativa está conformada por familias clasificadas en los niveles cero y uno, según datos registrados en la oficina del SISBEN (Concordia, 2014). Cuenta con cuatro sedes rurales, que ofrecen educación pre-escolar y básica primaria en el formato multigrado, y una sede central, en donde se ofrece el servicio educativo en los niveles de pre-escolar y básica primaria en multigrado, y; secundaria y media en grados particulares.

La población de estudiantes de grado décimo, objeto de estudio de las tres instituciones educativas, está compuesta por mujeres y hombres con edades entre los 14 y 18 años, de los cuales, algunos trabajan en negocios familiares o almacenes – especialmente – durante los fines de semana para ayudarse en los gastos escolares y otros cuidan a sus hermanos menores mientras sus padres trabajan. En cuanto a la educación de los padres, se destaca que los niveles de educación predominante es el bachillerato completo para La IECH, el bachillerato incompleto

[1] El Sisbén es el Sistema de Identificación de Potenciales Beneficiarios de Programas Sociales que, a través de un puntaje, clasifica a la población de acuerdo con sus condiciones socioeconómicas (DNP, 2017).

para La IE La Libertad y para La IER La Concordia es igual el número de padres con estudios en básica primaria – completa e incompleta – al número de padres con estudios en bachillerato – completo e incompleto –. Además, hay que mencionar que es mínimo el número de padres de familia que ha culminado sus estudios superiores. Aunque el nivel de escolaridad de los padres de familia en las tres instituciones es diferente, se generaliza la falta de acompañamiento a los estudiantes en las labores escolares.

Los estudiantes se caracterizan porque realizan diversas actividades en su tiempo libre, practican deportes como el: futbol, microfútbol, básquet o ciclismo; además de ir de paseo al río, realizar oficios de la casa y ver televisión. A pesar de esto, se muestran más atraídos por los dispositivos tecnológicos, utilizando gran parte de su tiempo libre en el uso de redes sociales y artefactos como teléfonos celulares, computadores, tablets, entre otros. Para las tres instituciones educativas, se destaca que, aunque la mayoría de estudiantes tienen Smartphone, menos de la mitad tienen acceso a internet.

Al indagar por su proyecto de vida o sueños al terminar su formación escolar, menos de la mitad de los estudiantes tienen claramente definido los estudios superiores que quieren seguir o la profesión u oficio al que se van a dedicar, el resto responde que quieren terminar los estudios secundarios y desean ingresar a la universidad para sacar adelante a su familia, pero no mencionan qué carrera u oficio desean estudiar o desempeñar.

En cuanto al desempeño escolar de los estudiantes durante los dos primeros periodos académicos del 2017, en la IE La Libertad se observa que: 10 estudiantes muestran un desempeño en nivel bajo, 19 en nivel básico y 4 en nivel alto. Estos resultados son similares a los percibidos por el docente en el aula de clase en cuanto a la motivación, puesto que las matemáticas tienen buena aceptación, el 65% de los estudiantes se esfuerzan por aprender, mientras que el 35% no lo hacen. Para estos últimos, quizá las condiciones sociales en las que viven o el escaso acompañamiento de los padres en las tareas escolares, sea la causa del poco interés por aprender; lo que se ve reflejado en los bajos resultados y su falta de motivación hacia el estudio. En la IER La Concordia durante el mismo periodo de tiempo: 3 estudiantes demuestran un desempeño alto, 8 básico y 7 bajo, lo que confirma los resultados de la Prueba

Saber 9[2] de 2016 al igual que la percepción del docente, quien ha evidenciado que 11 de ellos manifiestan muy poco o ningún interés por el área de matemáticas. En la IECH: 6 obtuvieron un desempeño bajo, 19 desempeño básico y 4 alto. En esta Institución, el docente ha notado que la mayoría de estudiantes tienen una percepción de la asignatura matemática como el escenario rígido, que no permite errores y necesita de mucha ejercitación para poder aprenderla; esto se debe en parte a que, los profesores han institucionalizado el trabajo individual como única forma de aprendizaje de la disciplina. Mencionan que: "sería importante que la asignatura se abordara de forma diferente para enseñarse y que los contenidos deben ser significativos", en palabras de ellos, "que sirvan para algo".

Quizá la marcada orientación de la disciplina bajo el modelo pedagógico tradicional, que a través de la historia ha ido descontextualizando la matemática de prácticas cotidianas, conjuntamente con los métodos y técnicas rigurosas de esta ciencia, ha sido la causa de la apatía generalizada por esta área. Con respecto a esto la profesora Engler (s.f) afirma que:

> La mayoría de los estudiantes reniega de la matemática. ¿Nos preguntamos a qué se debe esta resistencia? Para muchos, el quehacer matemático está envuelto, aún hoy, de misterio. Los estudiantes la ven rígida e impenetrable, insensible y desprovista de humanidad. Muchas veces nuestras posibilidades de entablar un debate se ven limitadas porque los contenidos involucran entes abstractos y un lenguaje propio (p. 3).

Otro aspecto importante a resaltar de las tres Instituciones, son los bajos resultados obtenidos en matemáticas en cuanto al componente geométrico – métrico en la Prueba Saber 9, en los años 2015 y 2016, componente que corresponde al 35% de la prueba (MEN, 2016).

En los resultados obtenidos de la prueba, se evidenció qué en la competencia evaluada de comunicación, representación y modelación, en el criterio definido como la identificación de

[2] La Prueba Saber 9 es un test estandarizado de tipo censal para medir la calidad de la educación en Colombia (MEN a, 2015). Este examen lo prepara y aplica el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior – ICFES – por encargo del Ministerio de Educación Nacional – MEN – en el grado noveno de educación básica, contiene en su estructura una prueba para las áreas de ciencias naturales, lenguaje y matemáticas, y en su aplicación, a cada estudiante sólo le corresponde contestar preguntas de 2 áreas (MEN b, 2016). La prueba de matemáticas consta de 54 preguntas de selección múltiple con única respuesta, en ésta se evalúan las competencias básicas: razonamiento y argumentación; comunicación, representación y modelación; y, planteamiento y resolución de problemas. Cada una de esas competencias contiene los componentes: numérico – variacional, geométrico – métrico, y aleatorio, que son una reorganización de los pensamientos matemáticos descritos por el MEN (MEN b, 2016).

Los pensamientos matemáticos establecidos por el MEN son: numérico y sistemas numéricos, espacial y sistemas geométricos, métrico y sistema de medidas, aleatorio y sistema de datos, variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades, el porcentaje de estudiantes que no contestaron correctamente las preguntas está por encima del 43%, y en el criterio de usar sistemas de referencia para localizar o describir posición de objetos y figuras, fue superior al 31%.

En relación a la competencia de razonamiento y argumentación, se observó, que más del 47% no contestó correctamente en el criterio relacionado con hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencias y semejanza entre figuras bidimensionales. Además, se evidenció qué en el criterio de argumentar formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos, no lo hicieron más del 37%.

Referente a la competencia de planteamiento y resolución de problemas, se observó que, más del 14% no resuelven y formulan problemas usando modelos geométricos. En el criterio de resolución de problemas que requieren técnicas de estimación la cantidad de estudiantes que no lo hacen bien, fue superior al 50% (Ver resultados completos en el Anexo A). Resumiendo, los estudiantes de las 3 instituciones presentan dificultades en medición, la posición de objetos y figuras, congruencia y semejanza de figuras, propiedades y relaciones de figuras planas y resolución de problemas utilizando modelos geométricos o técnicas de estimación. Por lo anterior, es importante resignificar los conocimientos relacionados con el pensamiento espacial y los sistemas geométricos establecido por el Ministerio de Educación Nacional – MEN (MEN, 2006), mediante una estrategia que permita hacerlos más significativos para su vida diaria.

Las debilidades en el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, se confirmaron en los resultados de una prueba diagnóstica que se aplicó a los estudiantes de grado décimo de las tres instituciones. Esta prueba consta de diez (10) preguntas de selección múltiple con única respuesta, tomadas de cuadernillos de las pruebas saber de grado noveno; para evaluar conocimientos relacionados con temas del componente geométrico, como: ángulos (medición – clasificación), manejo de unidades de medida, triángulos (identificación – clasificación), semejanza – congruencia, razones y proporciones. Además, se formularon diez (10) preguntas abiertas con el propósito de atenuar la posible copia de las respuestas de opción múltiple y el diligenciamiento al azar del cuestionario. La prueba se diseñó para ser resuelta en aproximadamente una hora.

Se aplicó a 83 estudiantes y según los resultados, 37 estudiantes mostraron un desempeño bajo, 34 desempeño básico, 7 desempeño alto y tan solo 5 estudiantes mostraron un desempeño superior, lo que nos permite afirmar que la mayoría de estudiantes presentan dificultades en el pensamiento espacial y sistemas geométricos.

Lo anterior, evidencia la necesidad de fortalecer el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, con el propósito de mitigar las dificultades que manifiestan los estudiantes, al enfrentarse a problemas que implican el uso de la geometría. Con esta intención y en ese mismo sentido, se planteó el interrogante, ¿Cómo potenciar el pensamiento geométrico en estudiantes de grado décimo de las Instituciones Educativas Ciudad la Hormiga, La Concordia y La Libertad del municipio del Valle del Guamuez desde la enseñanza de razones trigonométricas mediante 'Situaciones Didácticas'?. Para responder esta pregunta, fue necesario abordar las razones trigonométricas desde la semejanza de triángulos y la resolución de situaciones problema, apoyados en la Teoría de Situaciones Didácticas – TSD – de Guy Brousseau[3].

Brousseau (2007) propone, un modelo que se basa en las interacciones implícitas entre tres actores en el proceso de enseñanza – aprendizaje: el estudiante quien aprende, un medio, el cual requiere de un conocimiento para ser controlado y el profesor como representante del saber. Este modelo se desarrolla en cuatro etapas: la primera, de acción, en la cual el estudiante se enfrenta a un problema, y la forma como lo asume se manifiesta a través de sus comportamientos o acciones; la segunda, de formulación, en la cual el sujeto busca estrategias de solución recibiendo del problema mensajes de aprobación o rechazo; en la tercera fase, de validación, el estudiante propone el intercambio de estrategias entre pares propiciando una discusión con argumentos, y en la última, de institucionalización, el docente interviene para asentar los conceptos matemáticos emergentes dentro de los establecidos por la comunidad matemática. Las primeras tres etapas se desarrollan sin acompañamiento directo del docente, quien interviene directamente sólo en la institucionalización.

Esta teoría se basa en las interacciones sujeto/medio – interacción del alumno con una problemática que ofrece resistencias y retroacciones que operan sobre los conocimientos

[3] Guy Brousseau (1933) comenzó su carrera profesional como maestro de escuela primaria. Se formó posteriormente como matemático y obtuvo el título de Doctor en Ciencias de la Universidad de Burdeos. Su contribución teórica esencial al campo de la Didáctica de las Matemática es la Teoría de Situaciones Didácticas (Sadovsky, 2005).

matemáticos puestos en juego – y alumno/docente – interacción implícita entre el alumno con la problemática matemática –, presentes en el proceso de construcción de conocimientos. Este conjunto de interacciones conforma un sistema y por tanto no se conciben de manera independiente unas de otras, este sistema es la 'situación didáctica' (Sadovsky, 2005). Se considera que este modelo de enseñanza fundamentado en interacciones didácticas, propicia ambientes que coadyuvan a la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos, dada la constante interacción – discusión – entre pares en el proceso de validación del conocimiento, en el cual aprenden a argumentar con razones para convencer a los demás y a ceder ante argumentos no por razones retóricas, de autoridad o intimidación. Lo que los prepara para la discusión y toma decisiones en el futuro.

Con el objetivo de potenciar el pensamiento geométrico de los estudiantes de grado décimo de las Instituciones Educativas mencionadas desde la enseñanza de razones trigonométricas mediante la Teoría de Brousseau, se formularon como objetivos específicos: determinar el nivel de conocimientos previos de los estudiantes para el aprendizaje de las razones trigonométricas, diseñar situaciones didácticas para la enseñanza de las razones trigonométricas y evaluar el desempeño de los estudiantes en las situaciones adidácticas.

En concordancia con los objetivos planteados, se diseñaron tres situaciones didácticas. Con la primera se retoma la noción de razón, en la segunda se pretende fortalecer los conceptos de la semejanza de triángulos y con la tercera se espera que a partir de las dos anteriores aparezca el concepto de razón trigonométrica. En este propósito, los medios – problemas – diseñados para la comprensión de las razones trigonométricas, parten de situaciones reales con la intención que sean comprensibles y significativos en un ambiente de heterogeneidad cognitiva; de acuerdo con Freudenthal (Citado por Bressan, 2005), la matemática debe ser pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola. Si la matemática surge como matematización[4] – organización – de la realidad, el aprendizaje matemático debe originarse también en esa realidad. Esto no sólo significa mantener a esta disciplina conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los alumnos. Es así, como hacer matemática – matematizar – es más importante

[4] Matematizar es organizar la realidad con medios didácticos, incluida la matemática misma.

que aprenderla como producto terminado; el énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de algoritmización, no en el álgebra sino en la actividad de algebrizar, no en las abstracciones sino en la acción de abstraer, no en la forma y la estructura sino en formalizar y estructurar. Desde esta perspectiva, la intervención potencia el pensamiento geométrico de los estudiantes de grado décimo, a través de la modelación de situaciones para representar la realidad de manera esquemática y hacerla más comprensible, esto les permite buscar distintos caminos de solución, estimar una situación aproximada o darse cuenta de una posible solución, a través de cálculos numéricos o algebraicos que permiten validar su respuesta.

La intervención pedagógica se enmarca dentro de la metodología denominada ingeniería didáctica, en la cual se aplican cuatro fases, en su orden: análisis preliminar; análisis a priori y diseño de situaciones didácticas; experimentación y análisis posteriori.

En el análisis preliminar se realizó una investigación sobre la historia de las razones trigonométricas y como se han enseñado a través del tiempo, llegando a la conclusión que el objeto matemático estudiado surge a partir de la semejanza de triángulos.

Dentro del análisis a priori, se estableció qué para el aprendizaje de las razones trigonométricas, los estudiantes deberían poseer dentro de sus conocimientos adquiridos en años anteriores, los conceptos de ángulo – medición y clasificación –; manejo de unidades de medida y proceso de medición; identificación y clasificación de triángulos; semejanza y congruencia de triángulos, y, razones y proporciones. Se realizó una prueba diagnóstica para determinar el nivel de apropiación de conocimientos previos que tenían los estudiantes, prueba con la cual se evidenció falencias en lo concerniente a semejanza y congruencia de triángulos, por lo cual estos conceptos se abordaron dentro del programa curricular del grado décimo.

En la fase de experimentación, la recolección de información durante las etapas de la Teoría de Situaciones Didácticas se realizó por medio de diferentes instrumentos: para las fases de acción y formulación se utilizó la observación participante en el desarrollo de las actividades propuestas a los equipos de trabajo, para la etapa de validación se propuso socializar la solución a los problemas entre equipos, proceso documentado por medio de videos. Finalmente, en la institucionalización, el docente a partir de la identificación de regularidades manifestadas por los equipos de trabajo frente a cada concepto, formalizó las ideas concebidas en cada situación dentro de los postulados establecidos por la comunidad matemática. Cabe agregar que, durante la etapa de experimentación, los medios – problemas – fueron reestructurados teniendo en cuenta las observaciones de funcionalidad en la implementación.

En el análisis a posteriori se ha evidenciado que la implementación de un nuevo modelo de enseñanza, en el cual los estudiantes se convierten en los principales actores, genera inicialmente un ambiente traumático, dado que tienen arraigado el conductismo en sus labores escolares. Razón por la cual, al enfrentarse a un problema sin el acompañamiento directo del docente, se muestran desconcertados, preocupados, a la espera de las indicaciones precisas por parte del docente para solucionar el problema. Al aceptar que el docente no participará en el proceso de solución, se genera un ambiente de discusión para descifrar – entender – el enunciado, y así iniciar con el proceso de búsqueda de estrategias de solución al problema.

Por otra parte, dada la metodología de trabajo en equipo mediante la asignación de roles, se evidencia que existe un líder nato, que se apersona y dirige las acciones a realizar por el equipo. De lo cual se puede concluir que el líder es pieza fundamental en la solución de los problemas y que los roles elegidos al azar no son funcionales, y por tanto los roles no se asignan si no que se asumen. Además, cuando el problema es abordado por un grupo de compañeros que lo miran desde diferentes perspectivas, las posibilidades de solución aumentan, caso contrario sucede cuando se trabaja individualmente. Asimismo, cuando el equipo no es capaz de proponer estrategias de solución, recurren a la ayuda de los demás miembros que componen el aula, lo que es evidencia del aprendizaje colaborativo.

Las observaciones de las situaciones implementadas, ratifican que las retroacciones del medio generan en los estudiantes periodos de alta actividad cuando creen haber encontrado el camino hacia la solución, pero a la vez dan muestra de la frustración que sienten cuando la estrategia propuesta no es exitosa, con lo cual los índices de actividad se reducen considerablemente. Además, se ha observado que el resolver una situación los llena de satisfacción colectiva manifestada mediante gestos y en ocasiones hasta con euforia.

El ejercicio de implementación de la intervención ha llevado a reflexionar acerca de la forma cómo se está enseñando y ha permitido comprobar que el conocimiento no es un objeto, no se puede transferir y se debe construir. En ese proceso de construcción de conocimiento es fundamental aprender a partir de la experiencia, aprender de otros y con otros, así como también aprender de los errores. Pues el error es un elemento importante en el aprendizaje, ya que cuando se manifiesta, se convierte en experiencia, lo que obliga a buscar nuevas alternativas de solución.

Ya se mencionó que para aprender se deben cometer errores, por lo tanto, para enseñar se requiere generar espacios que permitan a los estudiantes equivocarse, que los invite a aventurarse sin temor a errar, ambientes libres del miedo a fallar, principal inhibidor de la innovación y el aprendizaje. Una vez los estudiantes decidan arriesgarse en la búsqueda del conocimiento, es necesario captar su atención, hacer que se interesen por lo que se está enseñando, planteando situaciones que los cautive, que los haga pensar, que los incite a cuestionarse constantemente, que no les permita permanecer en estado de confort, que les plantee un constante desafío, que los invite a aprender constantemente.

Este documento consta de cuatro capítulos: los dos primeros capítulos señalan aspectos teóricos y los dos restantes detallan el desarrollo de la ingeniería didáctica.

En los capítulos 1 y 2 se desarrolla los aspectos teóricos de la investigación donde se presentan: el problema de investigación, que incluye los antecedentes, la definición, delimitación justificación del problema y los objetivos; como marco teórico resaltamos los aspectos más importantes de los objetos matemáticos, la Teoría de las Situaciones Didácticas, y como método de investigación presentamos las principales concepciones de la Ingeniería didáctica.

En el capítulo 3 se desarrolla aspectos metodológicos y resultados desde un acercamiento a formas de intervenir pedagógicamente la realidad de la escuela. Destacando la ingeniería didáctica para la sistematización de la implementación de la propuesta: qué emergió como resultados y aprendizajes en relación con la enseñanza de las razones trigonométricas.

El capítulo 4 aborda la síntesis de los principales aprendizajes relacionados con las razones trigonométricas, vinculados a una reflexión sobre cómo movilizó o transformó la experiencia del trabajo de grado y el proceso de formación en la Maestría en Educación Modalidad Profundización, comprende el cierre del documento con las conclusiones obtenidas en relación a los objetivos planteados.

CAPÍTULO 2: REFERENTE CONCEPTUAL

En este apartado se presentan los elementos teóricos y metodológicos en los que se fundamenta el desarrollo del trabajo, los cuales se dividen en tres grupos: la teoría de situaciones didácticas, los referentes de calidad y las definiciones matemáticas.

Aproximación a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)

Esta intervención pedagógica en el aula pretende que el estudiante de grado décimo pueda potenciar el pensamiento geométrico alejado de los métodos tradicionales y conductistas que han perdurado por mucho tiempo en la enseñanza de las matemáticas. En los libros de texto actuales aún es evidente el método tradicional, pues utilizan principalmente el proceso de ejercitación de algoritmos como método de aprendizaje; reduciendo los escenarios a la escritura en el cuaderno y limitando la capacidad de los estudiantes para expresar lo que realmente conocen de la disciplina y como organizan el mundo matemáticamente.

En la tarea de abandonar la enseñanza tradicional, para transitar hacia una más activa y, con el propósito de potenciar el pensamiento geométrico en el ámbito escolar, se toma como base la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau, la cual es un modelo de enseñanza que busca la génesis artificial de los conocimientos matemáticos, basado en las interacciones entre las componentes cognitiva, epistemológica y didáctica (ver figura 1).

Figura 1. Sistema didáctico

De acuerdo con Rotaeche (2008), se asume estos elementos de la siguiente manera:

> La componente cognitiva, representado por el alumno quien se encuentra inmerso dentro de este contexto, y quien requiere construir y hacer suyo el conocimiento en juego.

La componente epistemológica, el concepto o saber a enseñar que tiene su propia naturaleza y que se ha desarrollado o construido a lo largo de la historia.

La componente didáctica, representada por el profesor quien actúa como facilitador en la construcción que el alumno hace del conocimiento en juego.

A su vez, una situación didáctica es un escenario preparado intencionalmente para hacer adquirir al estudiante un saber determinado; es el sistema de interacciones que se da entre el alumno, un medio y el profesor, cuando el estudiante busca controlar la situación. En ese proceso, el conocimiento emerge como producto de la adaptación a ese contexto; se puede decir entonces que, el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta en nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje (Brousseau, 2007).

Con respecto al medio, cabe mencionar que es organizado y facilitado por el profesor para que el estudiante a partir de este construya su conocimiento. En otras palabras, es un dispositivo que comprende un material – desafío, problema, ficha, etc – y las reglas de interacción con ese dispositivo. Por lo anterior y de acuerdo con Brousseau (2007) es un subsistema autónomo antagonista del sujeto que se modifica según la interpretación y propias motivaciones del estudiante.

En este sentido, el medio debe cumplir con ciertas condiciones para provocar la construcción del conocimiento por parte del estudiante. Debe estar organizado de tal forma que el conocimiento al que se apunta sea necesario para la resolución, es decir, debe contener el carácter de necesidad de los conocimientos. Así mismo, cuando el alumno interactúe con el medio, este le debe ofrecer información sobre sus producciones, que le permita juzgar por sí mismo las consecuencias de sus acciones y relacionarlas con los resultados que obtiene. Igualmente, debe lograr que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje o de un problema, esto es instalarlo y mantenerlo en la tarea; para lo cual se requiere de la supervisión del profesor y de ser necesario su intervención en aras de mantener activo al estudiante, pero sin participar en asuntos directamente relacionados al saber en juego (Panizza, s.f).

Este estudio, parte de la necesidad de cualificar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática; pone en interacción al docente debido a que se requiere formular un escenario con intencionalidad didáctica (situación fundamental[5]) relacionado con las razones trigonométricas, en el cual la interrelación de los estudiantes con el conocimiento matemático que se ha puesto en juego sea imperante.

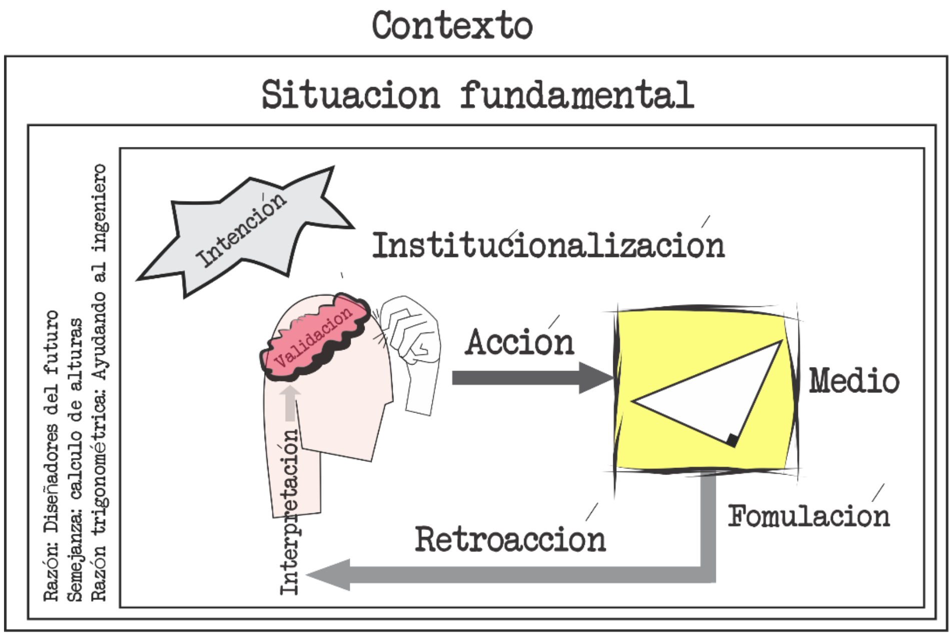


Figura 2. Situación fundamental para las razones trigonométricas

La figura 2. Representa la situación fundamental diseñada con el fin de que los estudiantes construyan el concepto de razón trigonométrica. En ésta, además de la intención didáctica, el medio y el proceso mental de interpretación; se identifican cuatro etapas – fases –, que se podrían llamar momentos de aprendizaje, por los cuales transita el estudiante durante la génesis del conocimiento. Las fases de acción, formulación y validación son propias de las situaciones – fases – a-didácticas, las cuales se describen a continuación.

Noción de situación a-didáctica

Brousseau (1986, citado por Panizza, s.f) define una situación a-didáctica como:

[5] Cada conocimiento matemático está asociado al menos a una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los demás. El conjunto de tales situaciones está estructurado y puede ser engendrado a partir de una pequeña cantidad de situaciones llamadas fundamentales, a través de un juego de variables (Brousseau, 2007).

> "…toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego."

La situación a-didáctica se encuentra inmersa de la situación didáctica, lo particular de esta es que supone la interacción del estudiante con una problemática de manera independiente y autónoma a la mediación del docente; es decir, enfrenta al alumno con un problema, sin que el maestro intervenga directamente en asuntos relacionados con el saber en juego. Atendiendo a estas condiciones, el medio debe provocar que el estudiante se movilice – actúe, hable, comunique, reflexione y evolucione – con los conocimientos que se quiere ver aparecer.

Tipologías de las situaciones didácticas

La teoría de Brousseua, plantea que las relaciones del estudiante con el medio se pueden clasificar en tres tipos de situaciones didácticas – que hemos denominado etapas o fases del aprendizaje –: son las situaciones de acción, formulación y validación.

Situación de acción

Durante esta, el estudiante interactúa individualmente con el medio, aplica sus conocimientos previos y desarrolla un determinado saber. En el momento en el que el estudiante asume el reto como propio, comienza a desencadenar una serie de toma de decisiones que lo llevarán a la elaboración de hipótesis y formulación de estrategias, que irá modificando a medida que interactúa con el medio y recibe de éste mensajes de aprobación o rechazo (retroalimentación). Este proceso mental lleva su tiempo hasta adoptar o rechazar intuitiva o racionalmente una estrategia anterior de acuerdo a la eficacia en la resolución del problema.

Situación de formulación

Se presenta en el proceso de comunicación entre los estudiantes, puesto que un alumno (emisor) debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (receptor) que debe comprenderlo y actuar en base al conocimiento que contiene (Panizza, s.f), en otras palabras, comunica a sus pares su estrategia, esa comunicación está sometida a dos sanciones, una inmediata por parte de sus compañeros y una mediática por parte del medio cuando la estrategia no funciona. En este momento algunos miembros del grupo de trabajo ya han establecido una posible estrategia óptima para la resolución de la situación en cuestión, lo que indica que ya han entrado en contacto con la situación; es un momento crucial para el grupo de trabajo porque es claro que se pone a prueba las capacidades comunicativas de cada miembro, porque no es suficiente que el estudiante conozca la solución al problema sino, que también sus compañeros la comprendan.

Situación de validación

En esta tercera fase, "dos alumnos (o grupo de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas" (Panizza, s.f, p. 11), el estudiante propone el intercambio de estrategias entre pares propiciando una discusión con argumentos; en esta se identifican claramente dos roles uno de proponente – quien trata de convencer, antes emisor – y otro de oponente – a quien se debe convencer, anteriormente llamado receptor –, destacando que este último somete a consideración la solución propuesta, para lo cual debe tener la capacidad de aceptarla, rechazarla, exigir pruebas o aportar otras afirmaciones. Como resultado de esa discusión surgen acuerdos, dentro de los cuales se manifiesta un proceso de corrección entre pares.

Cada grupo de estudiantes han formulado sus enunciados en demostraciones, se puede decir que han enunciado una teoría o teorías de las estrategias optimas en la solución de la situación, se evidencia que los proponentes intentan convencer a los miembros con argumentos, sin entrar en la imposición o la intimidación de sus demostraciones, claro está, que en el proceso se puede ceder o cambiar el punto de vista para conveniencia del grupo. Quien propone no solamente comunica, sino que está en la obligación de presentar una demostración para que los miembros del grupo construyan la verdad con la información que tienen en ese momento.

Situación de institucionalización

Cada grupo debe dar cuenta a sus compañeros de clase y al docente de lo que han hecho para verificar que sus creaciones están vinculados con el conocimiento en cuestión, es necesario por parte del docente asegurar y ratificar que los resultados de la enseñanza se cumplieron y que los estudiantes hayan convertido sus conocimientos en saberes que son el producto cultural de una institución que tiene por objetivo, identificar, analizar y organizar los conocimientos, a fin de facilitar su comunicación del contexto en el que se desarrolla la situación (Sadovsky, 2005).

Ahora, es momento en que cabe la posibilidad de hablar de estos saberes sin referirse al contexto en el que se producen, de reconocer otras posibles utilizaciones, de establecer el ámbito de validez, de realizar conexiones con otros conocimientos próximos, que no emergen de manera automática como producto de la interacción con la situación sino que requieren un trabajo de reflexión de las producciones con debates gestionados por el docente, pero que suponen siempre reconstrucciones personales de cada uno de los estudiantes (Sadovsky, 2005).

La institucionalización es un instante donde el estudiante puede revalidar, replantear y modificar de manera autónoma sus conocimientos; este momento es el proceso de interacción entre el docente y los estudiantes que constituyen un espacio social de producción de conocimientos que les da estatus científico.

Contrato didáctico

El contrato didáctico puede reconocerse como reglas del trabajo matemático, que son necesarias para que los estudiantes construyan una representación de la actividad matemática y que deben estar en la conciencia del docente y del alumno como reglas útiles para el trabajo en el aula. Al no establecer normas o condiciones se puede correr el riesgo de un desdibujamiento del objeto de enseñanza, porque las normas que los estudiantes elaboran son las que de alguna manera se suman a las producciones finales.

La relación docente y estudiantes, Brousseau (2007) lo modeliza a través de la noción de contrato didáctico, que sostiene una relación didáctica que puede estar influenciada por las interpretaciones que provienen del contexto social en el que se mueve el sujeto y aspectos ideológicos de la concepción del mundo, valores, creencias, etc., que condicionan el proceso de producción.

> De manera natural el docente va comunicando, a veces explícitamente, y muchas otras de manera implícita, a través de palabras y también de gestos, actitudes y silencios, aspectos vinculados al funcionamiento del asunto matemático que se está tratando en la clase y que no vincula necesariamente a un objeto matemático (Sadovsky, 2005).

Es claro que no todas las reglas que construyen los estudiantes en la práctica de las aulas tienen la misma fuerza epistémica, porque requiere de gran reflexión cuando se trata de interpretar lo que se espera del estudiante y este de la clase, pero que ambas partes han negociado para ligar la práctica del docente y las creaciones de los estudiantes con propósitos de los objetos matemáticos.

Referentes de calidad

Para la planificación de la enseñanza de la matemática en Colombia se debe atender a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y Los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional.

Relación del proyecto con los Lineamientos Curriculares

Los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) constituyen un punto de apoyo y de orientación frente a la elaboración del currículo escolar, permiten conocer la función de las áreas y los nuevos enfoques para comprenderlas y enseñarlas, con el fin de contribuir a la formación integral y a la construcción de identidad cultural nacional, regional y local. Posibilitan, además, generar procesos de reflexión, análisis crítico y ajustes progresivos al currículo por parte de la comunidad académica, que permitan fomentar en la escuela la investigación, la innovación y la mejor formación de los colombianos, generando un cambio profundo hacia las nuevas realidades por construir, ya que las condiciones de vida dependerán en gran medida del conocimiento, que evidencia el verdadero progreso humano.

Por otra parte, se propone que la educación matemática propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento y de reflexión lógica, que permitan darle sentido al mundo que los rodea. Es decir, explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla para actuar en y para ella. Por lo tanto, el aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de los conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse a situaciones nuevas, exponer opiniones y ser receptivo en las de los demás. De la misma forma, es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en el contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista.

Con el fin de organizar un currículo que sea integral en el quehacer matemático, dentro de los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998), se considera tres grandes aspectos que deben estar presentes en cualquier momento del acto educativo, los procesos generales, los conceptos básicos y el contexto. Los procesos generales, que están implícitos en el aprendizaje de las matemáticas son: el razonamiento; las resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Los conceptos básicos se relacionan con los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático con sistemas propios de las matemáticas, como son: el desarrollo del pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. De igual manera, el contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y dan sentido a las matemáticas que aprende; bien utilizado e intervenido por el docente, es generador de situaciones problemáticas que pueden desencadenar afectividad de los estudiantes y procesos de aprendizaje.

Cabe resaltar que, los pensamientos y los procesos básicos tienen carácter transistémico, es decir, una situación problemática no se puede restringir a un solo proceso de aprendizaje como el razonamiento, involucra otros procesos relacionados con la actividad matemática como es la modelación, comunicación entre otros. Además, si la situación involucra el pensamiento numérico y requiere de sistemas numéricos es necesario ampliar el campo de desarrollo de otros sistemas como los de medida, de datos, etc., en situaciones del contexto de la vida cotidiana, de las matemáticas o de otras ciencias.

La intervención pedagógica pretende potenciar el pensamiento geométrico, teniendo como referencia los lineamientos curriculares, los cuales proponen la geometría activa como alternativa de enseñanza, que trata de restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio. Este enfoque, parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo, al moverse, dibujar, construir, producir y, tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Esta conceptualización va acompañada de un principio de gestos y palabras del lenguaje ordinario, hasta que los conceptos estén construidos a un nivel estable para que los alumnos mismos puedan proponer y evaluar posibles definiciones y simbolismos formales.

En cuanto a los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado por el MEN (1998) como “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones mentales de objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (p. 37). Al principio, en el pensamiento espacial no son importantes las mediciones, ni los resultados numéricos de estas, sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y las relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio, a medida que se complejizan los sistemas de representación, se hace necesaria la metrización, ya que es necesario cuantificar que tan cerca o tan lejos está un objeto en el espacio, generando nuevas propiedades y relaciones entre objetos. De esta manera, la percepción geométrica se complejiza y las propiedades de los objetos comprometen no solo a las relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a sus relaciones entre ellas. De ahí que, el estudio de las propiedades espaciales que involucran la métrica, son las que se convertirán en los conocimientos formales de la geometría, y que permiten el desarrollo del pensamiento lógico y potencian y refinan el pensamiento espacial y el métrico. Por ello es importante relacionar la geometría con: el arte, la decoración, el diseño y la construcción, elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos o maquetas, entre otras situaciones, que enriquezcan y motiven el desarrollo del pensamiento espacial.

Con respecto a los procesos generales que se pretende potenciar con la intervención pedagógica, las situaciones didácticas enfatizan el proceso de modelación, y, por las características de estos, de alguna manera se estarían fortaleciendo transversalmente los demás procesos, permitiendo preparar ciudadanos matemáticamente competentes. El proceso de modelación, consiste en crear un modelo, que es un sistema figurativo mental, grafico o tridimensional que reproduce o representa la realidad de manera esquemática para hacerla más compresible. El modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre unas situaciones u objetos reales o imaginarios, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas o razonamientos y dar pistas para avanzar hacia las demostraciones.

Un buen modelo mental o grafico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución, decidir que variables y relaciones entre variables son importantes, establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar que tan razonable es la respuesta con respecto a las condiciones iniciales.

De manera semejante, el contexto físico y sociocultural juega un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas, porque permite construir sentido y significado a las actividades y contenidos matemáticos, estableciendo conexiones con la vida cotidiana de los estudiantes y sus familias, con las actividades de la institución educativa, con otras ciencias y con otros ámbitos de las mismas matemáticas. El contexto puede ser extraescolar –sociocultural, escolar - institucional e inmediato, este último, es el preparado por el docente en el espacio del aula, con la creación de situaciones referidas en las matemáticas, a otras áreas, a la vida escolar, al entorno sociocultural, a situaciones hipotéticas y fantásticas, a partir de las cuales los alumnos puedan pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimientos en forma significativa y comprensiva. Cuando se trabaja en el aula con situaciones problemas es necesario adaptarlas o tomarlas del contexto, con el fin de despertar el interés y permitir el acceso a las actividades con cierta familiaridad y comprensión previa, pero no puede olvidarse que este contexto extraescolar no se reduce al vecindario, al municipio, al departamento o a la región, sino que se extiende al país y a todo el planeta Tierra, y tal vez al universo entero, pues para muchos estudiantes el espacio, los planetas, el sistema solar, las estrellas, constelaciones y galaxias son tan cercanas a su interés y a sus afectos.

Es importante, mencionar los aportes de Bressan[6] (2016) quien sentó las bases teóricas de la Educación Matemática realista, en la que propone que los contextos realistas cumplen un papel esencial en el aprendizaje matemático de los alumnos, en tanto que:

- Son puntos de partida en el proceso de enseñanza y aprendizaje para producir matemática y dominios de aplicación de la misma.
- Bien elegidos, resultan de interés para los alumnos.
- Se constituyen en objetos de trabajo, tornando accesible el contenido matemático, y permiten que los estudiantes trabajen en diferentes niveles de conceptualización en base a sus posibilidades.

[6] Ana Bressan es cofundadora del Grupo Patagónico de la Didáctica de la Matemática (GPDM), el cual trabaja siguiendo las premisas de la Educación Matemática Realista de Freudenthal, con el propósito de mejorar las prácticas de enseñanza de la matemática en el aula y enfrentar con herramientas más eficaces los problemas de aprendizaje que ahí surgen.

- Promueven el uso del sentido común y movilizan los conocimientos informales de los alumnos y la creación de modelos.

Por ello, partir de contextos y situaciones problemáticas realistas representables, razonables e imaginables para los alumnos, son generadores actividad matematizadora. Pues la matemática surge históricamente como herramienta para matematizar situaciones del entorno natural y social, y su enseñanza debe basarse también en la organización de este tipo de situaciones.

Razones trigonométricas en los Estándares Básicos de Competencias en Matemática

Con el propósito de proyectar la educación como principal herramienta para alcanzar la equidad social, el MEN (2006) estableció los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas con la intención de fortalecer los procesos pedagógicos en las Instituciones Educativas, considerando que los estándares "constituyen uno de los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de vida de calidad esperado a su paso por el sistema educativo" (p. 9) y que "permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los y las estudiantes en el transcurrir de su vida escolar" (p. 12).

Estos estándares se han convertido en principios estratégicos de los planes de estudio de las Instituciones Educativas. Por tanto, esta intervención acoge como premisas las directrices del MEN (2006), que promueven superar las visiones tradicionales de aprendizaje pasivo y privilegiar procesos pedagógicos, permitiendo a los estudiantes construir el conocimiento, comprenderlo y utilizarlo efectivamente dentro y fuera de clase. Por consiguiente, se desarrollan las competencias matemáticas, científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas de los estudiantes mediante la generación de situaciones de aprendizaje significativas que promueven el trabajo en equipo – la cooperación entre estudiantes – y en donde la formulación de problemas, la búsqueda de respuestas, la valoración de los saberes previos, las preguntas constantes y el debate argumentado están presentes en medio de las interacciones de los estudiantes con sus compañeros, docente y materiales, lo que permite validar personal y colectivamente el saber matemático.

De los anteriores planteamientos se puede afirmar que desde la intervención se aporta a la formación de valores democráticos y al ejercicio de la ciudadanía crítica de los estudiantes, dado que se asume la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento, haciendo énfasis en los actos comunicativos, así como lo señala el MEN (2006).

A continuación, se detallan por conjunto de grados los estándares que hacen referencia implícitamente a la construcción del concepto de razón trigonométrica, discriminando al tipo de pensamiento al que pertenecen.

Tabla 1. Estándares identificados en la construcción del concepto de razón trigonométrica.

Grados	**Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos**	**Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas**
1° a 3°	Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).	Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y, en los eventos, su duración.
4° a 5°	Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características. Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.	Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
6° a 7°	Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.	Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud
8° a 9°	Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.	Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

	Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas	
10° a 11°	Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.	Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.

Nota. Estándares Básicos de Competencia de Matemáticas recuperados de MEN (2006).

Los Estándares expuestos en la tabla 1, direccionan la manera de construir el concepto de razón trigonométrica, esto se evidencia por la forma en que se especifican los procesos desde los primeros grados de escolaridad, los cuales incluyen aspectos de comparación, representación y uso de medidas. De acuerdo al objetivo de la intervención y a los razonamientos que se han venido realizando, se propusieron tres (3) situaciones, que orientan la construcción del concepto de razón trigonométrica desde la razón entre las longitudes de los lados de un triángulo, los ángulos y la semejanza de triángulos.

Definiciones Matemáticas

Esta sección contiene algunos conceptos que se consideran necesarios para la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas.

Noción de razón

A partir de la interpretación que hace Heath del V libro de Euclides, (Sánchez, 2013), propone que:

> Dadas M_1 y M_2 dos magnitudes, y a_1, b_1 cantidades de magnitud de cada magnitud, respectivamente, con b_1 la unidad de medida. La razón de a_1 a b_1 puede entenderse como una especie de cuantificación (quantuplicity) de a_1 con respecto a b_1, en otros términos, como relación parte todo: la cantidad de magnitud a_1 expresa cuántas veces está contenida en la cantidad de magnitud b_1 (p. 15).

Se entiende por razón entre dos cantidades de magnitudes a_1 y b_1, la relación de comparación que expresa el número de veces que está contenida a_1 en b_1 y se puede representar simbólicamente así: $a_1\ a\ b_1$; $a_1 : b_1$; $a_1 \rightarrow b_1$; $\frac{a_1}{b_1}$.

Por otra parte, Godino & Batanero (2004) hacen énfasis en que el término razón no siempre es sinónimo de fracción, especificando entre otras condiciones que: *(i)* una razón puede comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que una fracción compara cantidades de la misma magnitud, *(ii)* en las razones el segundo componente puede ser cero, *(iii)* las razones no son siempre números racionales, *(iv)* en el caso particular de que el segundo término de una razón sea 100, a dicha razón se le llama porcentaje (decir que una cantidad de magnitud A es el "35 por ciento", 35%, de otra B, equivale a decir que 100A = 35B). Aspectos importantes para tener en cuenta a la hora de trabajar este concepto, con el ánimo de no propiciar una confusión en los estudiantes.

En concordancia con Godino y Ruíz (2002), se entiende por razón entre dos segmentos a la razón numérica entre sus respectivas medidas usando una unidad determinada. Simbólicamente:

$$\frac{EF}{GH} = \frac{m_u(EF)}{m_u(GH)}, \qquad donde\ m_u(EF), m_u(GH)\ indica\ las\ medidas\ de\ ls\ segmentos\ EF, GH\ con\ la\ unidad\ u$$

En el caso de la figura 3, la medida de EF usando la unidad u es 7, y la del segmento GH es 4. Por tanto, la razón entre ambos segmentos es $\frac{7}{4}$, que será la medida racional de EF usando GH como unidad.

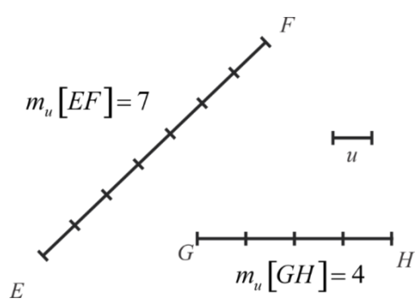


Figura 3. Medidas de segmentos.

Figura modificada de Godino y Ruíz (2002)

Noción de proporción

De acuerdo con Godino y Ruíz (2002), una proporción entre dos pares de números, es una igualdad entre dos fracciones, de tal forma que el producto cruzado de los numeradores y denominadores serán iguales entre sí. Una proporción permite escribir cuatro igualdades equivalentes entre dos fracciones, interpretadas como razones, como se muestra en la figura 4.

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} & \Longleftrightarrow & \dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d} & \Longleftrightarrow & \dfrac{d}{c}=\dfrac{b}{a} \end{array}$$

Figura 4. Proporción como cuatro fracciones equivalentes.

Figura por Godino y Ruíz (2002)

Lo anterior se puede afirmar dado que cualquier cambio en la disposición de los cuatro números que forman una proporción que no modifique los productos cruzados de los numeradores por los denominadores es una nueva igualdad de fracciones.

De acuerdo con lo expuesto acerca de la noción de razón y proporción, se dice que dos pares de segmentos son proporcionales si las razones que se establecen entre cada par son iguales.

Definición de triángulo

Al definir dos puntos sobre una recta y tomar un tercer punto que no esté contenido en ella y, uniendo los otros puntos con él, se pueden definir tres segmentos de recta. Los tres puntos no están alineados. Entonces, se puede decir: si en un plano se tienen tres puntos no alineados y estos se unen por medio de segmentos, la figura formada se llama triángulo. La unión del conjunto de puntos interiores y los del contorno representan una región triangular (Vásquez y Ramos, 1972, citado por Barroso, 2000).

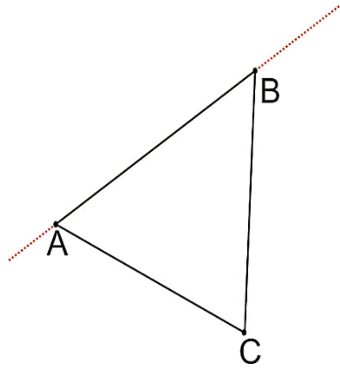


Figura 5. Triángulo ABC

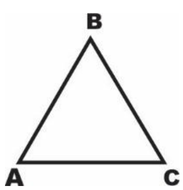
Clasificación de triángulos

Los triángulos se clasifican según sus lados y según sus ángulos. (Aguilar, Bravo, Gallegos, Cerón, & Reyes, 2010)

Por sus lados:

TRIANGULO EQUILÁTERO

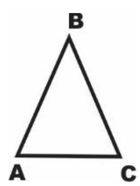
Sus lados son iguales



$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

TRIANGULO ISÓSCELES

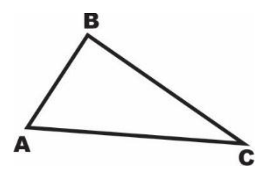
Tiene 2 lados iguales



$\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AC}$

TRIANGULO ESCALENO

Sus lados son diferentes



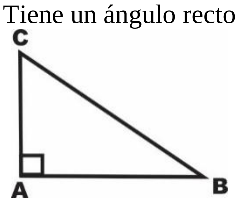
$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$

Figura 6. Clasificación de triángulos según la longitud de los lados

Por sus ángulos:

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

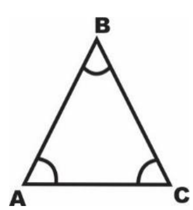
Tiene un ángulo recto



$\angle A = 90°$

TRIANGULO ACUTÁNGULO

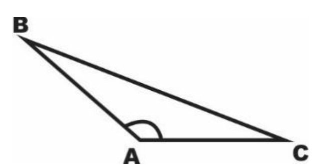
Sus tres ángulos son agudos.



$\angle A < 90°, \angle B < 90°, \angle C < 90°$

TRIANGULO OBTUSÁNGULO

Es el que tiene ángulo obtuso.



$\angle A > 90°$

Figura 7. Clasificación de triángulos según la medida de los ángulos

Triángulos congruentes

Los triángulos congruentes para Aguilar et al. (2010) son aquellos que tienen la misma forma y tamaño.

Si 2 triángulos son congruentes entonces:

a) Sus lados homólogos son iguales
b) Sus ángulos homólogos son iguales

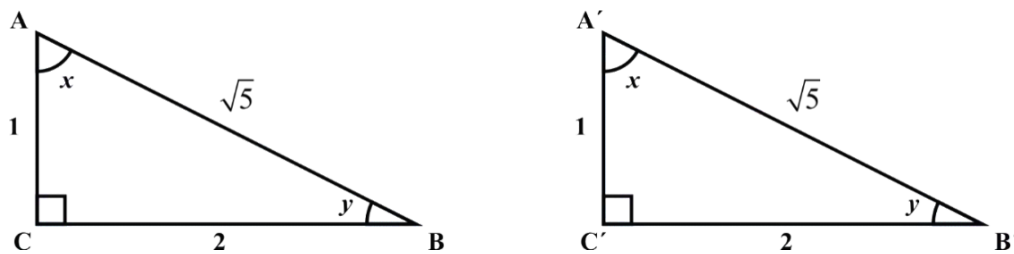


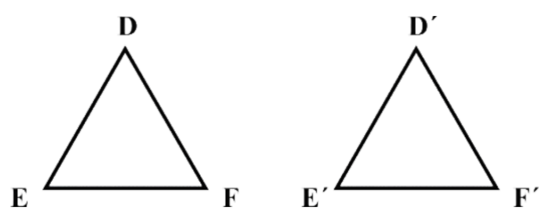
Figura 8. Triángulos congruentes

Los triángulos ABC y A´B´C´ son congruentes, porque tienen iguales tanto sus lados como sus ángulos, es decir, existe igualdad entre los 3 pares de lados y los 3 pares de ángulos.

Esto se representa $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ y se lee "el triángulo ABC es congruente con el triángulo A´B´C´".

Teoremas de congruencia

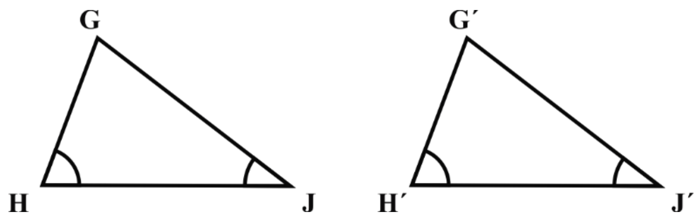
Teorema I (lado, lado, lado). Dos triángulos son congruentes si tienen la medida de sus lados iguales.



$\overline{DE} = \overline{D'E'}$, $\overline{EF} = \overline{E'F'}$ y $\overline{DF} = \overline{D'F'}$

Figura 9. Triángulos congruentes por sus lados

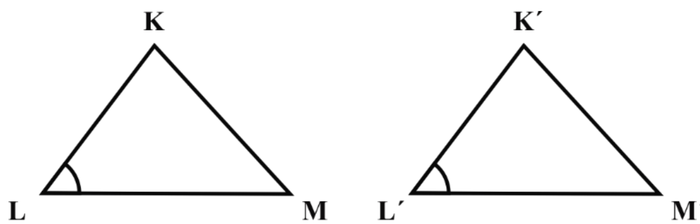
Teorema II (ángulo, lado, ángulo). Dos triángulos son congruentes si tienen las medidas de 2 ángulos y el lado adyacente a ellos respectivamente iguales.



$\angle H = \angle H'$, $\overline{HJ} = \overline{H'J'}$ y $\angle J = \angle J'$

Figura 10. Triángulos contrayentes por su ángulo, lado y ángulo

Teorema III (lado, ángulo, lado). Dos triángulos son congruentes si 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente iguales a sus homólogos del otro.

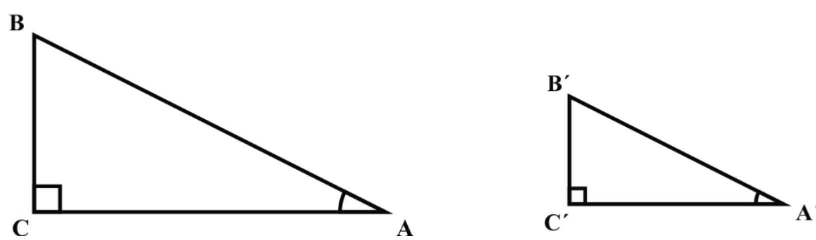


$\overline{KL} = \overline{K'L'}$, $\angle L = \angle L'$ y $\overline{LM} = \overline{L'M'}$

Figura 11. Triángulos congruentes por sus lado, ángulo y lado

Teoremas de semejanza

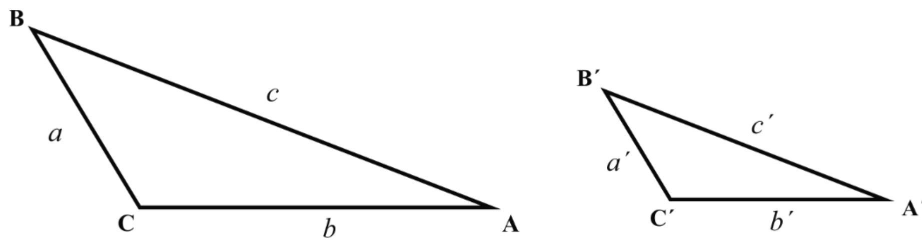
Teorema I. Dos triángulos son semejantes si tienen 2 ángulos homólogos.



Si $\angle C = \angle C'$ y $\angle A = \angle A'$ entonces, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Figura 12. Triángulos semejantes por ángulos homólogos

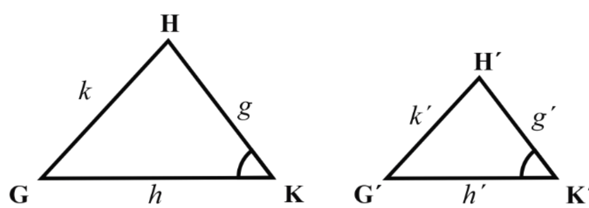
Teorema II. Dos triángulos son semejantes si sus 3 lados son proporcionales.



Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Figura 13. Triángulos semejantes por sus lados

Teorema III. Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que los forman son proporcionales.

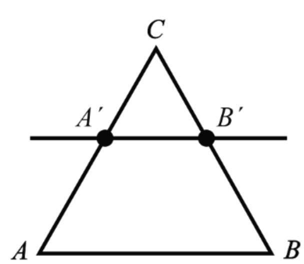


Si $\angle K = \angle K'$ y $\frac{g}{g'} = \frac{h}{h'}$ entonces $\Delta GHK \sim \Delta G'H'K'$

Figura 14. Triángulos semejantes por un ángulo y de lados proporcionales

Teorema de Thales

Cuando en un triángulo se traza una recta paralela a uno de los lados, el triángulo que se forma es semejante al primero.



Si $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Figura 15. Triángulos semejantes trazando una paralela a la base del triángulo.

Noción de razón trigonométrica

La noción de razón trigonométrica se refiere a la relación de comparación que puede establecerse entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, tomando como referencia uno de los ángulos agudos.

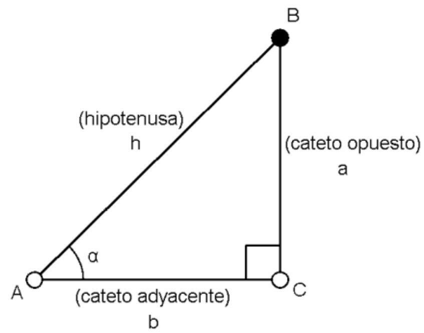


Figura 16. Definición de los lados del triángulo para el ángulo α.

La figura 16, es un triángulo rectángulo cualquiera y muestra cómo se definen sus lados para el ángulo α, entonces:

- La hipotenusa (h) es el lado opuesto al ángulo recto, o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.
- El cateto opuesto (a) es el lado opuesto (al otro lado) al ángulo de referencia indicado.
- El cateto adyacente (b) es el lado adyacente (contiguo) al ángulo de referencia indicado.

Todos los triángulos considerados se encuentran en el Plano Euclidiano, por lo tanto, la suma de sus ángulos internos es igual a π radianes o 180°. En consecuencia, en cualquier triángulo rectángulo los ángulos no rectos se encuentran entre 0° y 90°. La siguiente tabla presenta las definiciones de las razones trigonométricas para ángulos de este rango.

Tabla 2. Definición y expresión algebraica de razones trigonométricas

Nombre	Definición	Fórmula
Seno	El seno de un ángulo es la razón existente entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa.	$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{h}$

Coseno	El coseno de un ángulo es la razón existente entre la longitud del cateto adyacente y la longitud de la hipotenusa.	$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{h}$
Tangente	La tangente de un ángulo es la razón existente entre la longitud del cateto opuesto y la del adyacente.	$tan\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{b}$
Cotangente	La cotangente de un ángulo es la razón existente entre la longitud del cateto adyacente y la del opuesto	$cot\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$
Secante	La secante de un ángulo es la razón existente entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente.	$sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{h}{b}$
Cosecante	La cosecante de un ángulo es la razón existente entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto.	$csc\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{h}{a}$

Cabe agregar que a partir del valor de la razón seno, coseno y tangente se puede conocer el valor de la razón cosecante, secante y cotangente. Lo anterior por el hecho de que las tres últimas son las razones opuestas o recíprocas – respectivamente – de las tres primeras.

CAPÍTULO 3: REFERENTE METODOLÓGICO Y RESULTADOS

Este trabajo de grado se realizó utilizando como metodología de investigación la ingeniería didáctica. Este método se caracteriza por su esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, 1995). El nivel de desarrollo es una micro–ingeniería, dado que se va a estudiar de manera local los fenómenos de clase.

De acuerdo con Artigue (1995) esta metodología contempla cuatro (4) fases:

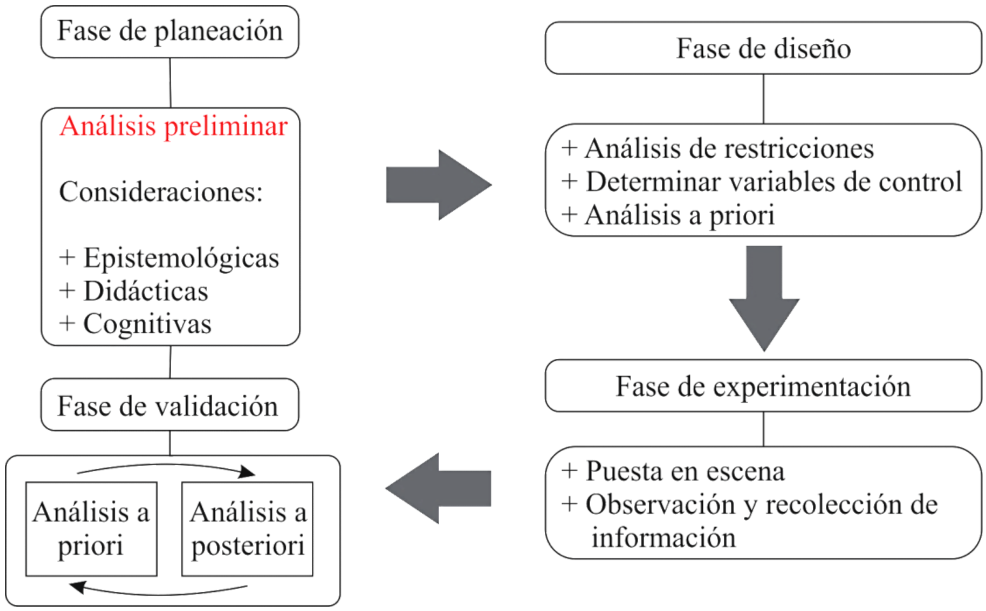


Figura 17. Fases de la ingeniería didáctica

La primera fase de planeación o análisis preliminar, consiste en una contextualización teórica, curricular y didáctica del profesor en un campo del saber. En esta etapa se consideran las tres (3) dimensiones: la epistemológica, indaga como se ha concebido el concepto de razón trigonométrica a través de la historia; la dimensión cognitiva, asociada a las características cognitivas de los estudiantes a quienes se pretende enseñar y en la didáctica se establece la TSD cómo modelo de enseñanza.

Es importante mencionar que para dotar de significado y tener éxito en la enseñanza del concepto de razones trigonométricas, se debe hacer a partir de la semejanza de triángulos, como lo afirma Montiel (2013):

> Tanto las dificultades como los desempeños positivos, producto de innovaciones didácticas, están fuertemente vinculados al uso de herramientas y nociones matemáticas relacionadas con las razones o las funciones trigonométricas, por ejemplo el uso de grados o radiantes para su argumento, de la semejanza y la proporcionalidad en el caso de las razones o de la variación para las funciones, su representación visual en el triángulo o en el plano cartesiano, entre otras (p. 22).

La segunda fase de diseño y análisis a priori, según Artigue (1995) comprende una parte descriptiva y otra predictiva, en la cual, se debe:

- Describir las selecciones del nivel local (relacionándolas con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- Analizar qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Prever los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

En esta fase entonces, además de realizarse el diseño de las situaciones didácticas, se plantean – hipótesis – las posibles estrategias que los estudiantes utilizarán para cumplir con las tareas planteadas (controlar el medio). Se explicitan supuestos que se generarán en la situación y los resultados que se desea producir.

La tercera fase de experimentación, es la puesta en escena de las situaciones didácticas. Por tanto, se debe describir lo ocurrido durante la ejecución de las diferentes actividades y el contrato didáctico. En tal sentido, durante esta etapa se realiza la recolección de datos mediante registros fílmicos, fotográficos y escritos, con los que se realiza el análisis a posteriori.

Cómo última fase se encuentra la de validación, en la cual se realiza un análisis a posteriori; para el que se retoman los datos recolectados en la experimentación – tanto las observaciones, como las producciones de los estudiantes – para contrastarlos con lo previsto en el análisis a priori. También se tienen en cuenta algunos hechos que no se contemplaron pero que pueden ser de utilidad para mejorar la situación didáctica fundamental.

Diseño y análisis a priori

En esta sección se describen las variables macro y micro didácticas[7] que se implementaron en la fase experimental; además, se detallan las situaciones didácticas diseñadas. Igualmente se identifican las variables implícitas en las actividades de enseñanza y se hace un análisis a priori, en el cual se describen los tipos de interacciones con el medio y los comportamientos esperados.

[7] Las variables macro didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería. Las variables micro didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o fase (Artigue, 1995).

Para la implementación de las situaciones didácticas, se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones como variables didácticas[8]:

- Conformar equipos de tres (3) y cuatro (4) estudiantes, los cuales se formaron libremente.
- Se trabajó principalmente dentro del aula de clase.
- La entrega del material con las situaciones didácticas se hizo al inicio de cada actividad, enfatizando en el trabajo en equipo.
- Al concluir la institucionalización, se propuso el desarrollo de una guía con el propósito de afianzar los conocimientos producidos por los estudiantes.

Por otra parte, para graduar la complejidad de las tareas geométricas y en cierto modo causar un cambio de estrategia de resolución en los estudiantes, se consideraron las siguientes variables micro didácticas:

Tabla 3. Variables micro didácticas de las situaciones didácticas.

Variable Didáctica	Descripción
Medio: información textual.	El medio contiene información precisa de las condiciones que debe cumplir la solución de cada problema. Las exigencias del medio son la garantía para que el estudiante utilice el saber en juego en los diferentes problemas.
Modelación	Hacer una representación gráfica de la realidad para comprender y solucionar los problemas.
El triángulo rectángulo como característica de las situaciones.	Cada uno de los problemas contiene o requiere la utilización de al menos la representación de un triángulo rectángulo en la solución.
Proceso de medición	Realizar mediciones de longitudes y ángulos en la solución de los problemas.
Concepto de razón	Formular razones entre longitudes de los lados de triángulos rectángulos como fracción y como porcentaje.
Aplicación de semejanza de triángulos	Aplicar la semejanza de triángulos para calcular distancias

[8] Para este tipo de proyectos no es posible hablar de variables macro didácticas ya que el tiempo de duración del trabajo en campo es muy corto y la población a examinar es mínima.

	inaccesibles.
Concepto de razón trigonométrica	Identificar y formular las razones seno, coseno y tangente para un ángulo en un triángulo rectángulo.
Aplicación de las razones trigonométricas	Aplicar las razones trigonométricas para calcular los lados de un triángulo rectángulo.

En lo que se refiere al diseño de la situación didáctica fundamental, esta se compone de cuatro (4) situaciones, que presentan problemas contextualizados, los cuales el estudiante enfrentará a partir de sus conocimientos previos. Tales situaciones abordan en forma secuencial el concepto de las razones trigonométricas, estas son: diseñadores del futuro, cálculo de alturas, ayudando al ingeniero y aplica tus conocimientos. Con la primera se hace un acercamiento al concepto de razón. La segunda busca afianzar el concepto de razón y ampliarlo hacia la semejanza de triángulos, aplicando el teorema de Thales. Con la tercera se pretende identificar y aplicar las tres (3) razones trigonométricas: seno, coseno y tangente a partir de un triángulo rectángulo y en la última se estimula la formulación de problemas.

Las tres primeras situaciones contienen dos problemas, el primero a ser solucionado por el equipo de trabajo y el segundo lo resuelven conjuntamente entre dos equipos, lo que induce a pasar progresivamente por situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.

En la tabla 4 aparece cada una de las situaciones trabajadas, el propósito, las variables micro didácticas implícitas y el tiempo estipulado para su desarrollo.

Tabla 4. Presentación general de la situación fundamental "Tres razones para medir distancias".

Actividades de aprendizaje – Situación	**Propósito**	**Variables micro didácticas**	**Tiempo**
Diseñadores del futuro	Reconocer el concepto de razón y su representación como fracción y porcentaje.	• Modelación • Triángulo rectángulo • Medición de longitudes • Concepto de razón	2 horas
Cálculo de alturas	Aplicar la semejanza de triángulos para calcular la	• Modelación • Triángulo rectángulo	2 horas

	longitud de un lado de un triángulo rectángulo.	• Medición de longitudes • Concepto de razón • Semejanza de triángulos	
Ayudando al ingeniero	Descubrir y aplicar las expresiones algebraicas de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en el cálculo de longitudes de lados de un triángulo rectángulo.	• Modelación • Triángulo rectángulo • Medición de ángulos • Concepto de razón • Concepto de razón trigonométrica • Aplicación de las razones trigonométricas	2 horas
Aplica tus conocimientos	Aplicar las razones trigonométricas para calcular distancias inaccesibles	• Modelación • Triángulo rectángulo • Medición de ángulos • Concepto de razón • Concepto de razón trigonométrica • Aplicación de las razones trigonométricas	1 semana

A continuación, se presentan el análisis a priori de las situaciones diseñadas.

Análisis a priori situación 1: "Diseñadores del futuro"

En la primera parte de esta situación se propone un problema que será resuelto por todos los equipos de trabajo. El cual se describe enseguida:

> Tiempo: 1 hora
>
> El taller de bicicletas LA HORMIGA, quiere lanzar al mercado un nuevo modelo. En su estrategia publicitaria obsequia una bicicleta a quienes resuelvan la situación formulada por el ingeniero de diseño, la cual es: ***"Proponer un marco de bicicleta, determinar sus medidas, y encontrar las 6 razones entre las longitudes de sus lados"***. La condición del ingeniero de diseño es:

“Utilizar un triángulo rectángulo”
En equipo proponer la(s) estrategia(s) para solucionar la situación.

Figura 18. Problema 1 - Situación diseñadores del futuro

Con el enunciado, se pretende que el estudiante utilice los conocimientos previos que tiene del concepto de razón y la definición de triángulo rectángulo, para actuar sobre el medio, en busca de solucionar el problema. La solución consiste en diseñar una bicicleta que integre un triángulo rectángulo en el marco, a partir del cual, deben formularse seis razones entre las longitudes de sus lados.

Las exigencias que requiere cumplir la solución del problema, cumplen las veces de retroacción del medio, de modo que envían un mensaje de aprobación/reprobación a las decisiones tomadas por el equipo. Puesto que se explicita que el triángulo debe ser rectángulo y que las razones deben ser seis.

La tabla 5 relaciona los tipos de interacción con el medio y los comportamientos de los estudiantes esperados.

Tabla 5. Tipos de interacciones con el medio y comportamientos esperados, primera parte situación “Diseñadores del futuro”

Tipo de interacción	Comportamientos esperados
Acción	Se espera que el estudiante lea el enunciado del problema e identifique en que consiste la solución del mismo.
Acción	Se espera que individualmente inicien a definir una propuesta del modelo, para lo cual, es necesario que identifiquen que es un marco de bicicleta. Si no es así, se espera que consulten/pregunten como es o en que consiste un marco de bicicleta.
Formulación	Se espera que compartan, comparen y verifiquen sus ideas. El diseño propuesto será el resultado de una idea inicial que se modificará con la aprobación de todos los integrantes
Formulación	Se espera que inicien a dibujar el modelo de la bicicleta. Proceso para el cual deben tener en cuenta la consigna: “utilizar un triángulo rectángulo” (retroacción

	del medio) y por tanto hacer uso de alguna herramienta que les garantice el trazo del ángulo recto.
Acción	Se espera que a continuación, nombren y midan los lados del triángulo rectángulo.
Acción	En este punto, el equipo debe recordar/aclarar la definición de razón o consultarla en su cuaderno.
Formulación	Se espera que formulen las razones entre las longitudes de los lados del triángulo rectángulo. Aquí, el medio envía como mensaje de retroacción que deben ser seis las razones propuestas; exigiendo al equipo a formular el mismo número de razones.

Para la segunda parte de la situación, se deben reunir dos equipos, primeramente, para comparar las soluciones propuestas con el propósito de validarlas. Seguidamente los dos equipos en conjunto enfrentarán otro problema, en el que además de demostrar el conocimiento producido hasta el momento, aparecerá una nueva forma de representación de las razones.

A continuación, se presenta esta parte de la situación.

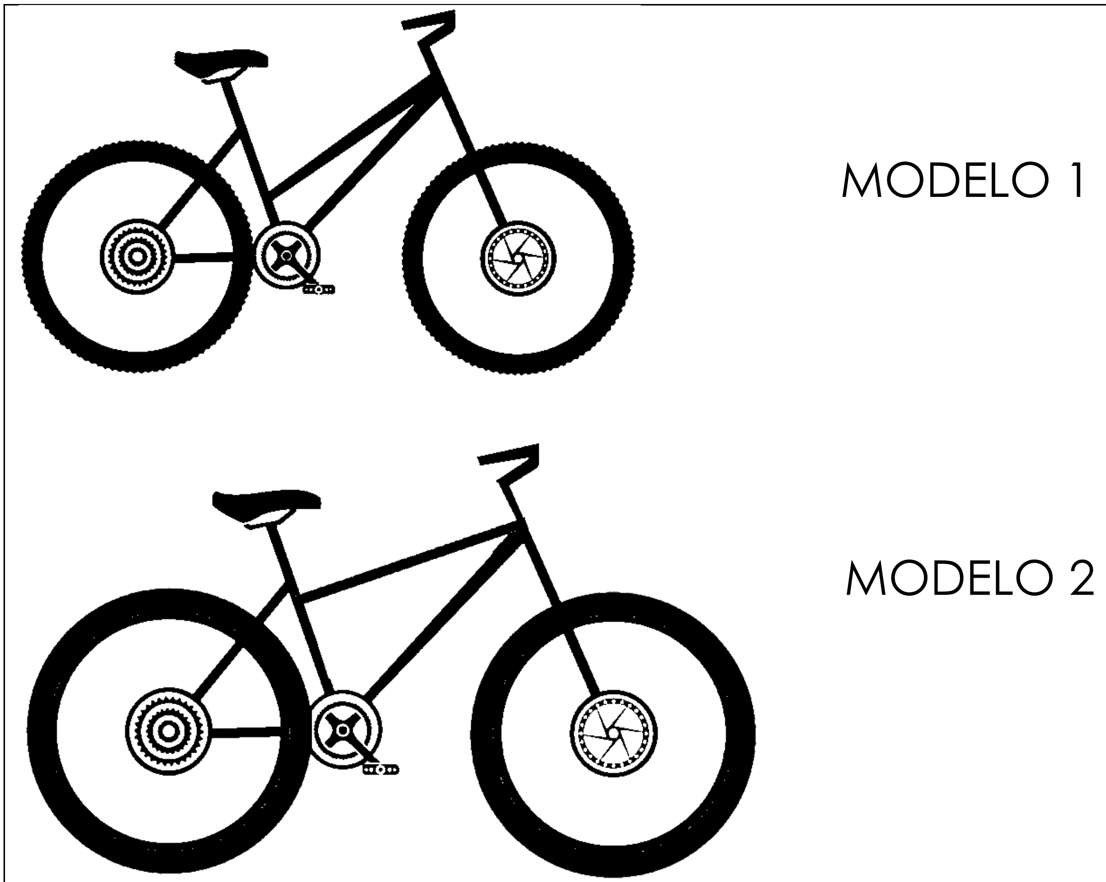
Socializar con otro equipo, la solución del problema y escribir los acuerdos de los dos equipos para solucionar el problema.

Con la participación de los dos equipos solucionar la siguiente situación.

Tiempo: 1 hora

El ingeniero de diseño les pide que encuentren la relación porcentual entre las medidas de los lados, en el modelo que cumple con las condiciones del concurso. El ingeniero de diseño menciona en voz alta:

“Deben ser 6”



Los equipos proponen la(s) estrategia(s) para solucionar la situación

Figura 19. Problema 2 – Situación diseñadores del futuro

En este nuevo problema, se utiliza como variable didáctica “relación porcentual entre las medidas de los lados”, con lo que se pretende que los estudiantes sean capaces de expresar el resultado de una razón como porcentaje. De igual manera, el enunciado contiene como mensaje de retroacción que deben ser seis las relaciones porcentuales, con lo que se espera que los estudiantes confirmen mentalmente que es posible plantear seis razones entre las longitudes de los lados de un triángulo.

En la tabla 6, se presentan los tipos de relaciones con el medio y los comportamientos que se esperan de los estudiantes.

Tabla 6. Tipos de interacciones con el medio y comportamientos esperados, segunda parte situación "Diseñadores del futuro"

Tipo de interacción	Comportamientos esperados
Validación	Se espera que los equipos comparen, verifiquen y mejoren las propuestas de solución. En cuanto al diseño de la bicicleta, se espera que se unifique la definición de triángulo rectángulo, generando procesos de corrección de ser el caso. En lo que se refiere a las razones, se espera que a pesar de tener valores diferentes, la noción de razón sea aclarada e interiorizada por los integrantes de los dos equipos.
Acción	Se espera que los estudiantes elijan trabajar con el segundo modelo propuesto, dado que, este cumple con la condición de integrar un triángulo rectángulo.
Acción	Seguidamente, se espera que midan las longitudes de los lados del triángulo rectángulo.
Formulación	Después de medir las longitudes de los lados del triángulo, se prevé que se dé una discusión acerca del significado de la frase "relación porcentual", de la cual, se espera concluyan que se trata de establecer las razones entre las longitudes de los lados, cuyos resultados se deben expresar como porcentaje.
Acción	El siguiente paso que se prevé, es que se planteen las seis posibles razones entre las medidas de los lados del triángulo rectángulo y obtengan los resultados.
Formulación	Una vez se hayan encontrado los resultados de las razones entre las longitudes de los lados, se espera que se presente una nueva discusión sobre el procedimiento para expresar números enteros o decimales como porcentaje, para concluir que una forma de hacerlo es multiplicar el número por 100 y agregarle el símbolo % al final.

Una dificultad que los estudiantes pueden tener en esta situación, es no reconocer que es un marco de bicicleta. Otra dificultad que puede presentarse es que los alumnos no reconozcan las características del triángulo rectángulo, por lo cual, la solución no cumplirá con las exigencias del enunciado.

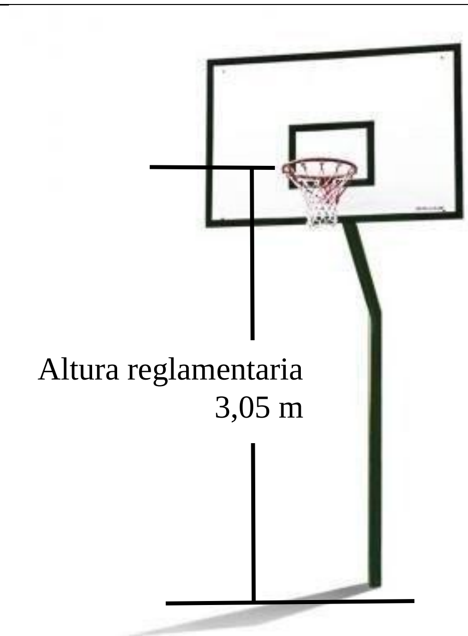
Por otra parte, la institucionalización permite al docente aclarar conceptos que intervienen en la solución de la situación, como es el caso de: ángulo recto, triángulo rectángulo y razón numérica.

En relación con esto último, será necesario explicar que un ángulo recto es el que tiene una medida de 90° y que un par de rectas que forman un ángulo recto, se conocen como rectas perpendiculares. El triángulo es la figura resultante de unir tres puntos no alineados; y la característica de un triángulo rectángulo es que tiene un ángulo recto. En cuanto a razón numérica entre dos cantidades – de la misma magnitud – se entiende como la relación de comparación que expresa el número de veces que está contenida una en la otra. De esta manera, se descontextualiza los conocimientos producidos por los estudiantes para asentarlos a los preceptos de la comunidad matemática.

Análisis a priori situación 2: "Cálculo de alturas"

Al igual que la situación 1, al inicio de esta se propone un problema a ser resuelto por el equipo de trabajo, y en la misma tónica, el estudiante deberá partir de los conocimientos previos que tiene sobre semejanza de triángulos y el teorema de Thales, para actuar sobre el medio y formular proposiciones que ayuden en la resolución del problema planteado.

Tiempo: 1 hora En clase de educación de educación física se deja como consulta averiguar la altura del aro de baloncesto según el reglamento FIBA (Federación Internacional de Baloncesto), Carlos encontró en internet que el aro debe estar a 3,05 metros del piso. El profesor de matemáticas en clase de trigonometría, les propone como reto, calcular sí el aro de la cancha del colegio se aproxima a la altura reglamentaria. **"No se puede medir la distancia directamente"**



En equipo proponer la(s) estrategia(s) para solucionar la situación.

Figura 20. Problema 1 – Situación cálculo de alturas

La solución del problema consiste en aplicar la semejanza de triángulos para calcular la altura a la que se encuentra el aro de la cancha de baloncesto en cada una de las instituciones. Esta situación se caracteriza porque brinda a los estudiantes la posibilidad de trabajar a partir de un espacio físico conocido por ellos, lo que la hace más llamativa y significativa.

La condición que no se puede medir directamente, es la variable didáctica en esta situación, pues con esta se pretende forzar el uso de la semejanza de triángulos como estrategia de solución.

Los tipos de relaciones con el medio y los comportamientos que se esperan de los estudiantes se presentan en la tabla 7.

Tabla 7. Tipos de interacciones con el medio y comportamientos esperados, primera parte situación "Cálculo de alturas"

Tipo de interacción	**Comportamientos esperados**
Acción	Se espera que el estudiante individualmente lea el enunciado del problema y comprenda la restricción de la solución.
Acción	Se espera una lluvia de ideas de estrategias para calcular la altura

	deseada; aquí es relevante la retroacción que hace el medio, pues no se puede medir directamente la altura solicitada. De no suceder esto, se espera que el equipo consulte métodos para calcular alturas, eligiendo la semejanza de triángulos, dado que es familiar para ellos.
Formulación	Se espera que los estudiantes definan la estrategia a utilizar como resultado de un consenso grupal. Lo más probable es que elijan aplicar el método del espejo o de la sombra, pues son los que más se trabajaron en clase, dentro de la semejanza de triángulos.
Formulación	Se espera que realicen una representación gráfica de la situación a resolver, utilizando herramientas (regla, escuadra, transportador) que garanticen la validez de la solución.
Acción	Indiferentemente del método elegido, se espera que inicien el proceso de medición de longitudes en la cancha.
Acción	Se espera que seleccionen la unidad de longitud para trabajar, realizando la(s) conversión(es) necesaria(s).
Formulación	Se espera que formulen la proporción entre longitudes, de acuerdo con el teorema de Thales y a la altura como valor desconocido le asignen una variable.
Acción	Se espera que encuentren el valor de la variable, lo que les permitirá hallar la altura solicitada. Aquí deben tener en cuenta la información que les proporciona el medio, pues el resultado debe ser aproximado a 3 metros.

Posteriormente, la solución del problema se socializa con otro equipo, de lo cual resultan procesos de comprobación y corrección de formulaciones. Luego, se asigna el siguiente problema para que lo resuelvan los dos equipos en conjunto.

Socializar con otro equipo, la solución del problema y escribir los acuerdos de los dos equipos para solucionar el problema. Con la participación de los dos equipos solucionar la siguiente situación.

Tiempo: 1 HORA El profesor de matemáticas de grado décimo propone como evaluación calcular la altura de un árbol grande del colegio sin medirlo directamente. ¿Cuánto mide el árbol? Los equipos proponen la(s) estrategia(s) para solucionar la situación

Figura 21. Problema 2 – Situación cálculo de alturas

La segunda parte de esta situación, pretende que se aplique el conocimiento generado por los dos equipos y en medio de un proceso de retroalimentación, se propicien las aclaraciones y correcciones pertinentes.

En la tabla 8 se muestran los tipos de relaciones con el medio y los comportamientos esperados de los estudiantes.

Tabla 8. Tipos de interacciones con el medio y comportamientos esperados, segunda parte situación "Cálculo de alturas"

Tipo de interacción	Comportamientos esperados
Validación	Se espera que comparen, verifiquen y corrijan la solución propuesta en el primer problema. Al comparar el valor de la altura calculada, se espera que estimen si el resultado obtenido se aproxima a la realidad. Si la conclusión, es que uno de los valores obtenidos es irreal, se espera que conjuntamente los equipos revisen paso a paso el procedimiento equivocado para corregir las fallas. Si los dos equipos obtuvieron resultados incoherentes con la realidad, difícilmente se dará la retroalimentación esperada.
Acción	Se espera que haya una discusión al elegir el árbol al cual calcular la altura, y que la elección sea consensuada.
Formulación – validación	Si los equipos utilizaron el mismo método en el primer problema, se espera que revaliden lo concluido en la socialización y no tengan dificultades. Si utilizaron métodos diferentes, se espera que haya una discusión sobre cual utilizar, sobreponiéndose el método que utilizó el equipo

	que argumentó mejor, es decir un equipo convencerá al otro de utilizar su método, reconociendo que existen diversos métodos para calcular alturas mediante la semejanza de triángulos.
Acción	Se espera que realicen las mediciones y conversión de unidades sin problemas.
Formulación	Se espera que planteen el teorema de Thales sin dificultades.
Acción	Se espera que encuentren la altura deseada sin inconvenientes.

En la institucionalización será necesario que el docente demuestre que la proporción entre longitudes de los lados de dos triángulos semejantes, se puede formular relacionándolos de varias maneras y que el resultado será el mismo.

Análisis a priori situación 3: “Ayudando al ingeniero”

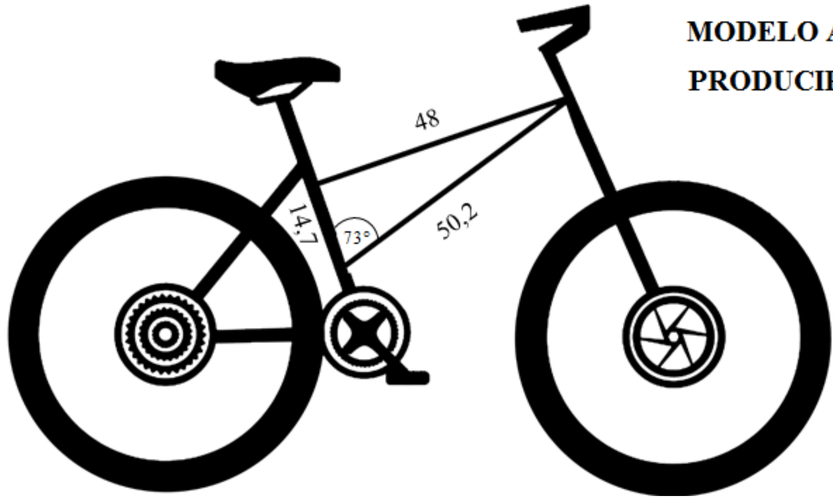
Esta situación es muy particular, puesto que el diseño se realizó en tres momentos. Inicialmente se propuso un problema, el cual se puso a prueba en una de las instituciones. Los resultados de esa experiencia permitieron deducir que era necesario reformularlo, a causa de que fue resuelto por una cantidad mínima de equipos y en un tiempo muy prolongado.

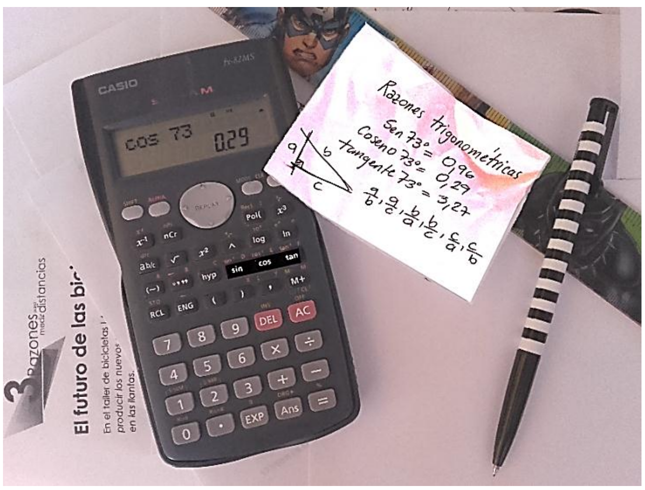
El segundo enunciado se experimentó en las otras dos instituciones, arrojando resultados similares al anterior, por lo cual, se decide hacer algunas modificaciones con el fin de hacerlo más accesible a los estudiantes, formulándose de la siguiente manera:

Ayudando al ingeniero

El taller de bicicletas LA HORMIGA va a iniciar la producción de su nuevo modelo, el ingeniero de diseño encargado de este proceso perdió los apuntes, lo único que encontró es una hoja con la siguiente información.

MODELO A PRODUCIR





El ingeniero de diseño contrata a tu equipo de trabajo para que le ayuden a recordar las expresiones algebraicas (fórmulas) de las razones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente.

¿Cuál es la fórmula de cada una de las razones trigonométricas?

En equipo proponer la(s) estrategia(s) para solucionar la situación.

Figura 22. Problema 1 – Situación ayudando al ingeniero

Se propone este problema para que sea resuelto por cada uno de los equipos de trabajo. La solución consiste en descubrir las expresiones algebraicas de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Para ello el estudiante debe hacer uso de los conocimientos que tiene de la noción de razón, así como, de la ubicación de los catetos opuesto y adyacente que previamente se tuvieron que abordar en clase.

Cómo retroacción el medio incluye los resultados de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, para un ángulo de 73°, información que es indispensable a la hora de cotejar resultados con el ánimo de resolver la situación.

La siguiente tabla, presenta los tipos de relaciones con el medio y los comportamientos que se esperan de los estudiantes.

Tabla 9. Tipos de interacciones con el medio y comportamientos esperados, primera parte situación "Ayudando al ingeniero"

Tipo de interacción	Comportamientos esperados
Formulación	Se espera que en equipo sea leído el enunciado del problema y que se identifique lo que se requiere como solución.
Acción	Se espera que se etiqueten los catetos opuesto y adyacente al ángulo indicado (73°), así como la hipotenusa del triángulo rectángulo.
Formulación	Seguidamente, se espera que se planteen las seis posibles razones entre las longitudes de los lados del triángulo rectángulo.
Acción	Una vez se hayan formulado las posibles razones, se espera que se calcule el valor numérico de cada razón propuesta.
Acción	Posteriormente, se espera que se cotejen cada valor numérico encontrado con los resultados de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente definidos en el problema. En este punto, el medio revela cuales son correspondientes a las razones indicadas.
Formulación	Después de haber relacionado los resultados definidos en el enunciado del problema con los valores obtenidos en las razones propuestas, se espera que se generalice mediante una expresión algebraica para cada razón trigonométrica.
Validación	A continuación, se espera que el equipo compruebe la validez de las expresiones algebraicas propuestas, efectuando el cálculo de la división de las longitudes de los lados correspondientes y comparando este resultado con el arrojado por la calculadora para cada una de las razones trigonométricas con un ángulo de 73°.

Una dificultad que los estudiantes pueden presentar en esta situación, es no ubicar correctamente el ángulo en las expresiones algebraicas propuestas. Otra situación que se puede presentar, es que la calculadora se encuentre configurada para trabajar en radianes o gradianes (grados centesimales), siendo imposible que obtengan los mismos resultados que ofrece el problema, dado que se formularon con el modo de grados sexagesimales.

El segundo problema de esta situación, exige que se aplique el conocimiento generado por los equipos, debido a que se propone hallar todas las medidas de dos triángulos rectángulos semejantes, para lo que se cuenta en cada uno de estos con una longitud y un ángulo.

Socializar con otro equipo, la solución del problema y escribir los acuerdos de los dos equipos para solucionar el problema.

Con la participación de los dos equipos solucionar la siguiente situación.

El futuro de las bicicletas.

En el taller de bicicletas LA HORMIGA, el ingeniero de diseño requiere para comenzar a producir los nuevos modelos de bicicletas, conocer todas las medidas de los triángulos en las llantas.

“El trabajo de los equipos es hallar las medidas utilizando las razones trigonométricas”

Los equipos proponen la(s) estrategia(s) para solucionar la situación

Figura 23. Problema 2 – Situación ayudando al ingeniero

En la tabla 10, se describen los tipos de relaciones con el medio y los comportamientos que se esperan de los estudiantes.

Tabla 10. Tipos de interacciones con el medio y comportamientos esperados, segunda parte situación "El futuro de las bicicletas"

Tipo de interacción	Comportamientos esperados
Validación	Se espera que comparen, verifiquen y corrijan las expresiones algebraicas propuestas por cada equipo en el problema anterior. En el caso de existir diferencias, el equipo que exhiba mejores argumentos convencerá al otro que su respuesta es la correcta.
Acción	Lo primero que se espera que hagan los estudiantes, es etiquetar los lados del triángulo de acuerdo al ángulo que se proporciona.
Formulación	De acuerdo a la información con la que se cuenta, se espera que se seleccione una razón trigonométrica pertinente para iniciar el proceso de solución. En el caso de la llanta trasera, se espera que utilicen la razón seno o tangente. Para la llanta delantera, se prevé que trabajen con la razón seno o coseno.
Formulación	Seguidamente, se espera que utilicen la razón pertinente para calcular la longitud del lado faltante.
Acción	Para determinar el valor del ángulo que hace falta, se espera que utilicen la propiedad de la suma de ángulos internos de un triángulo.

Una dificultad que pueden tener los estudiantes, es no tener la competencia para resolver las ecuaciones que resultan al reemplazar los valores en las expresiones algebraicas de las razones trigonométricas.

En vista de las posibles dificultades que pueden presentar los estudiantes en el desarrollo de los dos problemas, es tarea del docente monitorear constantemente la actividad de los equipos, para realizar los actos de devolución oportunos en cada caso.

Así mismo, durante la institucionalización, es necesario explicar que las razones trigonométricas incluyen un ángulo de referencia y que según este los catetos se nombrarán de una u otra manera. Otro aspecto a considerar es que, por tratarse de una relación de comparación entre las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo, el valor numérico resultante se puede expresar como porcentaje, así como se estudió en la situación 1.

Igualmente, no se puede pasar por alto, los diferentes modos en los que la calculadora trabaja los ángulos para el cálculo de las razones trigonométricas, los cuales son: grados sexagesimales (deg), grados centesimales (gra) y radianes (rad).

Por último, el docente se debe ocupar de las dudas acerca de cómo despejar cualquier término en las expresiones algebraicas de las razones trigonométricas.

Análisis a priori situación 4: "Aplica tus conocimientos"

Esta es la última situación, se aspira a que sea el escenario apropiado para que los estudiantes demuestren los conocimientos producidos en las anteriores tres situaciones. En esta oportunidad, los equipos tendrán que producir un video en el que se evidencie la aplicación de las razones trigonométricas, procurando la participación activa y significativa de todos los integrantes. Además, deberán construir una maqueta representativa de la localidad elegida para calcular una altura o distancia.

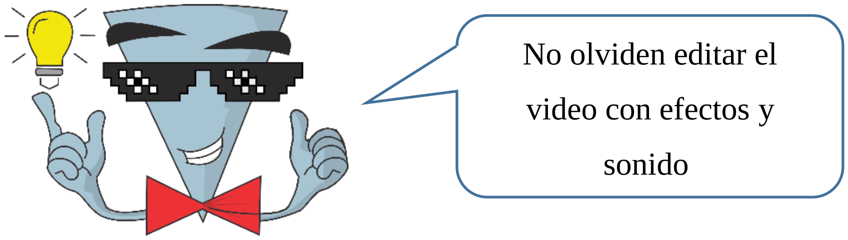
APLICA TUS CONOCIMIENTOS

Elegir un lugar, en el cual mediante la aplicación de las razones trigonométricas se pueda calcular una altura o distancia.

1. Elaborar un video que evidencie el plan de trabajo ejecutado con la participación de todos los integrantes del equipo. El video debe contener los siguientes apartados:

- Presentación de los integrantes del equipo.
- Descripción del lugar elegido y su ubicación geográfica (GOOGLE MAPS).
- Presentación del objetivo y el concepto matemático a utilizar.
- Presentación de los materiales y herramientas utilizados.
- Proceso de medición de distancias y ángulos.
- Explicación de las operaciones realizadas.
- Conclusiones del trabajo realizado.

Nota. La duración del video no puede exceder los 7 minutos.



2. Elaborar una maqueta que represente el lugar elegido para calcular la distancia; además que incluya la posición desde la cual se realizó el proceso de medición.

La maqueta debe estar construida a escala, es decir con medidas proporcionales.

Figura 24. Problema – Situación aplica tus conocimientos

Con esta situación se pretende estimular la formulación de problemas por parte de los estudiantes, dado que el equipo tiene libertad para elegir un lugar o una estructura para calcular una distancia aplicando las razones trigonométricas. Al desarrollar esta situación, los estudiantes manifestarán las competencias para solucionar un problema y desarrollar un proyecto en equipo, para el cual se debe definir un curso de acción con pasos específicos.

La tabla 11, describe los tipos de interacciones con el medio y los comportamientos que se esperan por parte de los estudiantes.

Tabla 11. Tipos de interacciones con el medio y comportamientos esperados, segunda parte situación "El futuro de las bicicletas"

Tipo de interacción	Comportamientos esperados
Formulación	Se espera que haya una discusión para elegir el lugar donde realizar la tarea asignada, resultando una elección consensuada.
Formulación	Se espera que definan las acciones a ejecutar para resolver la situación y que se asignen funciones o roles durante el desarrollo de la misma.
Acción	Se espera que decidan resolver/ensayar el proceso al menos una vez antes de producir el video.
Acción	Una vez ubicados en el lugar de trabajo, se espera que realicen el proceso de medición de longitudes y ángulos sin inconvenientes.
Formulación	Posteriormente al trabajo en campo, se espera que representen

	gráficamente la situación.
Acción	Se espera que etiqueten los catetos opuesto y adyacente, así como la hipotenusa del triángulo rectángulo. Además, que ubiquen los valores conocidos de la longitud del cateto y el ángulo de referencia.
Formulación	De acuerdo a la información con la que cuentan, se espera que utilicen la razón pertinente para calcular la longitud del lado faltante.
Acción	Se espera que encuentren el valor de la distancia requerida sin inconvenientes.
Acción	Se espera que se repita el proceso, esta vez grabando el video según las especificaciones definidas.
Acción	Para la construcción de la maqueta, se espera que en primera instancia elijan los materiales a utilizar.
Formulación	Se espera que decidan las medidas a utilizar para la construcción de los diferentes elementos a incluir en la maqueta. En este punto, el medio indica que se debe respetar las proporciones, por lo cual, se espera que en equipo haya una retroalimentación con el propósito de cumplir esta condición.
Acción	Se espera que construyan la maqueta sin inconvenientes.
Validación	En la sesión de socialización, se espera que todos los integrantes evidencien su participación y apropiación del trabajo realizado. Además, que argumenten los procesos matemáticos realizados en la solución de la situación.

Fase experimental: puesta en escena

En esta sección se hace una descripción general de la implementación de las situaciones didácticas, presentando resultados obtenidos en la intervención. Por consiguiente, durante esta etapa se realizó la recolección de la información para cada situación.

Es importante mencionar que cada una de las situaciones se diseñó para que los estudiantes las desarrollen en dos horas, adicionando una hora a cada situación para la socialización de las producciones y la institucionalización por parte del docente.

Los estudiantes se organizaron en grupos de cuatro (4) personas para asumir un rol dentro del grupo, utilizaron competencias comunicativas y el trabajo cooperativo, para entrar en contacto con las situaciones y proponer soluciones a los problemas propuestos.

Las herramientas metodológicas empleadas para la recolección de evidencias fueron:

Recolección de registros escritos, que busca evidenciar en cada equipo de trabajo las estrategias para solucionar la situación, y el acuerdo al que se llegó después de socializar con otro equipo la solución del problema. Además, sirvieron para recolectar información sobre la modelación de las situaciones, que involucran: Triángulos rectángulos, la medición de longitudes y de ángulos, concepto de semejanza, razón y razón trigonométrica con su respectiva aplicación.

Por otra parte, se utilizaron registros audiovisuales, que fueron realizados durante las sesiones de implementación, para identificar el trabajo cooperativo, la construcción colectiva del conocimiento, a partir del lenguaje matemático y la argumentación.

Las entrevistas fueron no estructuradas, y realizadas al final de cada situación, que pretendían validar la situación, teniendo en cuenta las impresiones de los estudiantes en cada uno de los momentos.

Al finalizar las primeras tres (3) situaciones, se propuso una situación a-didáctica, cuyo propósito era evaluar los conocimientos adquiridos, evidenciando las competencias del pensamiento espacial y sistemas geométricos establecidos por el MEN. En la última, los estudiantes debían aplicar las tres (3) razones trigonométricas en el cálculo de distancias inaccesibles, para ello, presentaron un registro audiovisual explicando las acciones que realizaron para el cálculo de las distancias y una maqueta proporcional del sitio elegido por ellos. Además, este trabajo se socializó en una sesión plenaria para afianzar los conceptos del proceso realizado.

Teniendo en cuenta la información recolectada en la experiencia, se presentan los resultados obtenidos en cada situación.

Resultados y análisis situación: “Diseñadores del futuro”

Con respecto al primer problema propuesto en esta situación, aunque hubo diferencia en el tiempo que tardaron los equipos en resolverlo, lo desarrollaron en el tiempo previsto en el análisis a priori, aproximadamente 50 minutos.

Los alumnos iniciaron la actividad leyendo el enunciado del problema. Inmediatamente el grupo IEL_01, comienza a realizar bosquejos de una propuesta de solución.

Figura 25. Bosquejos realizados por el grupo IEL_01

Otros equipos, no se atreven a proponer un modelo, hacen bosquejos y utilizan internet o salen al parqueadero para ver modelos de bicicletas que les puedan servir, eligiendo un modelo según sus gustos para guiarse.

Figura 26. Grupo IERC_03 consultando en internet

Al final, todos los equipos proponen un modelo de bicicleta. El 44% propusieron modelos de bicicletas no funcionales, es decir, que no servirían en la realidad como bicicletas. Sin embargo, cumplen con las condiciones del enunciado del problema. De aquí, se puede decir que la totalidad de los grupos realizó el proceso de modelación, tal como se esperaba en el análisis a priori.

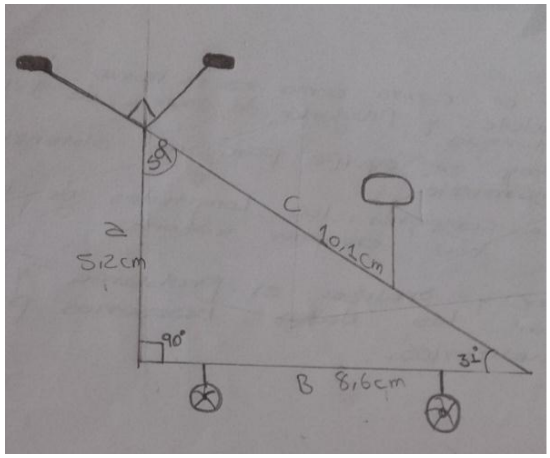


Figura 27. Modelo de bicicleta propuesto por el grupo IEL_05

Este modelo de bicicleta se considera que no es funcional, porque muy difícilmente permitiría desplazarse.

Por otra parte, El 59% miden y asignan las medidas. El 32% de equipos nombran solamente los lados del triángulo con una letra. El 9% nombran y miden los lados del triángulo.

Algunos equipos asignaron medidas arbitrarias a los lados, no estimaron la proporción al cuerpo humano, otros no tuvieron en cuenta la proporcionalidad de los catetos y la hipotenusa; como es el caso del grupo IERC_02.

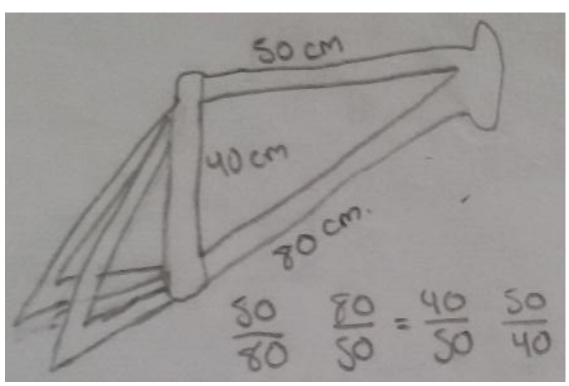


Figura 28. Medidas del diseño asignadas por el grupo IERC_02

El 80% de los equipos revisan sus apuntes para asegurarse que están bien formuladas las razones. El 20% consultan por internet o se aseguran consultando a los integrantes de otros grupos.

Figura 29. Consulta bibliográfica o grupal de razones numéricas

Al formular las razones el 59% de los grupos utilizaron las medidas asignadas a los lados. El 32% utilizaron letras para formular las razones. El 9% formularon las razones con letras y números. Además, es importante mencionar que el 18% igualan las seis razones. Queda claro que los alumnos manejan el concepto de razón numérica.

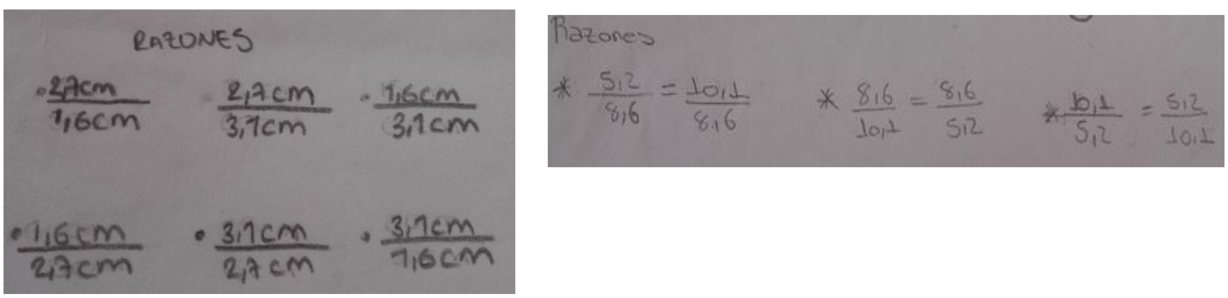


Figura 30. Formulación de razones con números

Resultados y análisis situación: "Cálculo de alturas"

La implementación de esta situación fue un poco dificultosa, con motivo de que en primera instancia se diseñaron una serie de actividades, en las cuales se guiaba al estudiante en la forma como iba a adquirir el conocimiento. Esto se hizo, pensando en que lo que se estaba formulando generaba una situación didáctica, lo que es factible. La discusión se sostuvo a razón de que se estaba actuando bajo el modelo pedagógico tradicional, pues, si bien, el docente no interactuaba directamente con los estudiantes en procura del conocimiento en juego, estaba presente en la guía, al proporcionar orientaciones muy precisas, lo que coartaba el proceso de génesis de conocimiento propio del estudiante.

En las tres instituciones, se aplicó la guía diseñada inicialmente, los equipos la desarrollaron y terminaron las sesiones de esa semana. Durante la evaluación grupal de la actividad y después de un análisis e interpretación de los referentes teóricos, se concluyó que era necesario repetir la actividad, con la modificación de que los equipos debían enfrentar el problema de calcular la altura solicitada en la guía, antes de realizar los demás ítems.

Se aplicó nuevamente la actividad, y para el ítem que solicitaba estrategias para el cálculo de la altura del aro de la cancha de baloncesto, un alto porcentaje de los equipos, propuso el mismo procedimiento realizado en la sesión anterior, durante la primera aplicación de la situación didáctica, como se observa en las siguientes figuras.

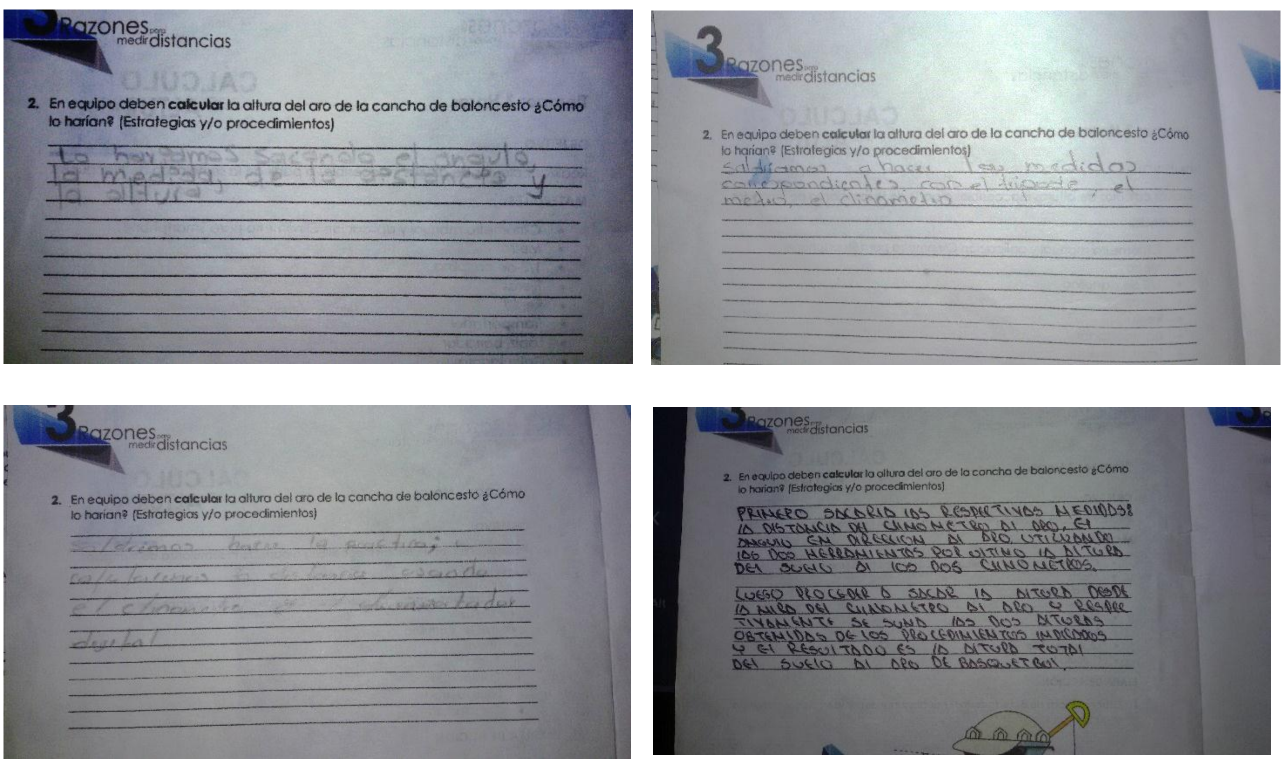


Figura 31. Estrategias propuestas para el cálculo de alturas

Lo anterior, evidencia que los estudiantes fueron sesgados por el método para calcular la altura del aro de la cancha de baloncesto, aplicando la semejanza de triángulos, propuesto en la actividad desarrollada en la sesión anterior. La etapa de institucionalización, permitió corregir tal inclinación y proponer otros métodos, destacándose el de la sombra y del espejo.

Por lo anteriormente expuesto, la recolección de información para esta situación, se realizó a partir del desarrollo de las actividades propuestas en la guía, hechos que se describen a continuación:

El 100% de los grupos consultaron su cuaderno, el 40% a sus compañeros y el internet, en los temas de semejanza, teorema de Pitágoras y teorema de Thales.

La totalidad de los equipos propusieron el método de Thales, que fue orientado en un cuadernillo de actividades.

Se observó que el 20% de los equipos tienen deficiencias en el uso de las herramientas de medición – regla, metro y clinómetro –. Además, algunos equipos ubican en un punto que no coincide con la línea de referencia del aro de la cancha de baloncesto.

Figura 32. Proceso de medición – situación cálculo de alturas

La figura 34, muestra a los equipos IEL_04 y IERC_01 realizando el proceso de medición, este último grupo, mide la longitud hasta un punto que no corresponde con la intersección entre el suelo y la perpendicular al piso que pasa por el punto de referencia del aro, evidenciando que no tienen el modelo mental del triángulo rectángulo necesario para calcular la altura solicitada.

En cuanto a la modelación, los equipos utilizan la representación gráfica de la situación que está propuesta en la guía, por tanto, únicamente se remiten a completar los datos que faltan en la misma, registrando los valores en una sola unidad de medida. De lo anterior, se evidencia los equipos realizaron el proceso de conversión de unidades, como ejemplo se presenta el producto del grupo IERC_06.

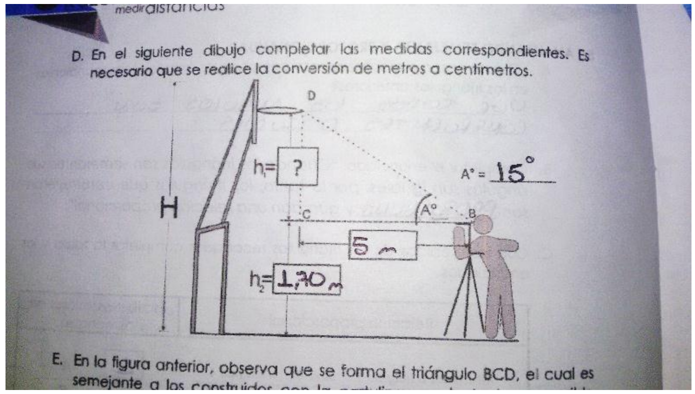


Figura 33. Medidas obtenidas por el grupo IERC_06

Para resolver este ítem el 100% de los equipos se guiaron del cuadernillo, reemplazando los valores obtenidos en el proceso de medición, tanto de los triángulos construidos con cartulina, como del triángulo formado entre los puntos de observación, de referencia en aro y el del suelo, y, asignando una variable al valor desconocido.

El 20% de los equipos reemplazaron erróneamente los valores o ubicaron otros que no correspondían con los obtenidos en el proceso de medición, por lo cual no formularon correctamente la proporción. Quizá esto sucedió porque no reconocen cuál es la base y la altura del triángulo rectángulo en este caso.

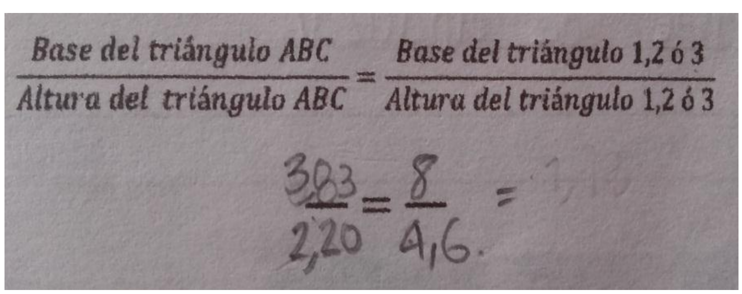
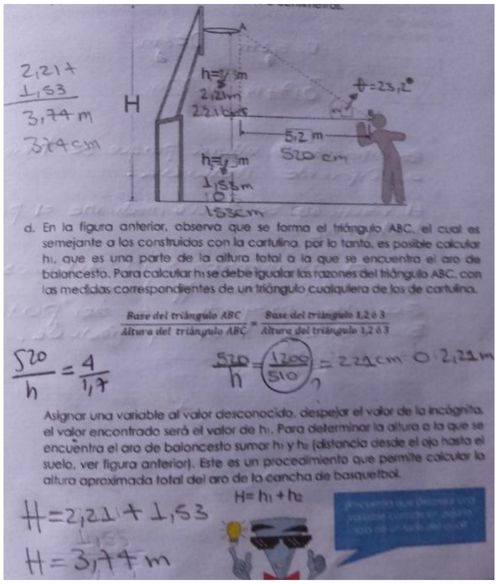


Figura 34. Proporción formulada por el grupo IEL_04

En cuanto al cálculo final de la altura solicitada, el 90% obtuvieron valores correspondientes a los datos obtenidos en el proceso de medición, lo que significa que no presentan problemas para despejar el valor desconocido de la proporción y sumarlo con la altura del ojo al suelo.



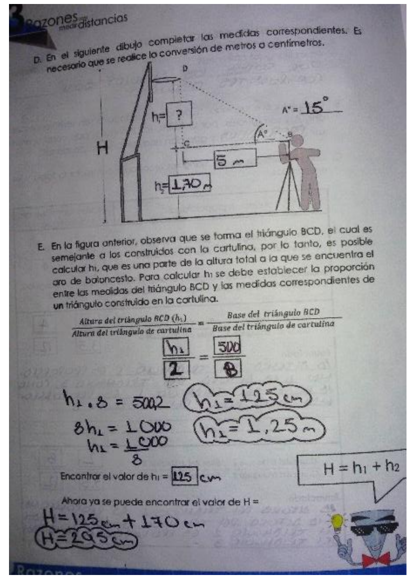


Figura 35. Soluciones propuestas por los equipos IEL_02 y IERC_03

La figura 35, presenta las soluciones propuestas por dos equipos. En la planteada por el grupo IEL_02, se manifiesta la dificultad al formular la proporción entre los valores de las longitudes de los triángulos semejantes, lo que conlleva a que el valor final obtenido no sea correcto. La segunda, exhibe la solución formulada por el grupo IERC_03, en la cual se evidencia el dominio tanto en la formulación de la proporción, como en la conversión de unidades.

Resultados y análisis situación: "Ayudando al ingeniero"

Lo particular de esta situación es que tuvo 3 modificaciones y adquirió tres momentos diferentes para la validarla. En la primera situación que se planteó, el medio les ofreció muy poca información haciendo que los estudiantes utilizaran mucho tiempo (más de una hora) para entenderla, y al final, ninguno de los grupos estuvo en la capacidad de solucionarla.

En la segunda modificación; se dejaba que los estudiantes midan las líneas y los ángulos del marco de la bicicleta, y como las líneas del gráfico eran gruesas, se pudo observar que los sujetos manejan muy bien las herramientas de medición (regla y transportador), pero escogían puntos de partida y referencia diferentes, lo que en el momento de la validación, todos los grupos tenían diferentes medidas y diferentes resultados de la calculadora; ésta información variaba por décimas y números enteros en algunos casos, entre el medio y los resultados que obtuvieron los otros grupos, lo que los desconcertó mucho.

Así, qué en la situación final, decidimos consignar las medidas en el gráfico para que al final los resultados concuerden con los resultados requeridos por la situación. Ésta situación se aplicó a otro grupo diferente al de estudio y los resultados de la implementación se describen a continuación.

Los estudiantes ya conocen la dinámica del desarrollo de cada situación y desde el inicio de clases se reúnen en los grupos de trabajo para comenzar a analizar la información que les proporciona el medio "ayudando al ingeniero"; todos los grupos comienzan leyendo la situación y al debatir el contenido de ésta, en el grupo IECH_04, la estudiante S67 menciona que el propósito del problema requiere la enunciación de las fórmulas de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, a partir del triángulo rectángulo que forma el marco de la bicicleta, a lo cual el grupo se está de acuerdo.

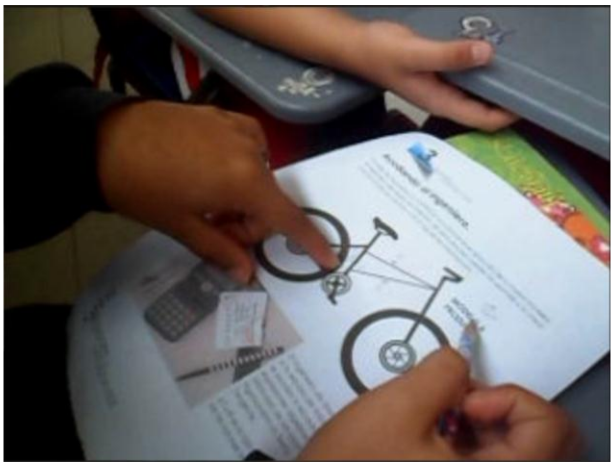


Figura 36. Grupo IECH_04 lectura e identificación del propósito de la situación.

Ya conociendo el fin de la situación los integrantes de los grupos comienzan a utilizar las herramientas de medición (transportador, regla) y herramientas tecnológicas (aplicación calculadora científica para celular) requeridas para la modelación y la formulación de las posibles soluciones; el grupo IECH_03 comienza a utilizar la calculadora sin establecer una estrategia escrita, al preguntarle porque no comenzaban a escribir, el sujeto S53 menciona que el grupo como primera estrategia intentar organizar las razones en la mente y hacer las operaciones para comparar los resultados con los datos del medio, el grupo IECH_03 se vale del ensayo y error antes de comenzar a formular las posibles soluciones.

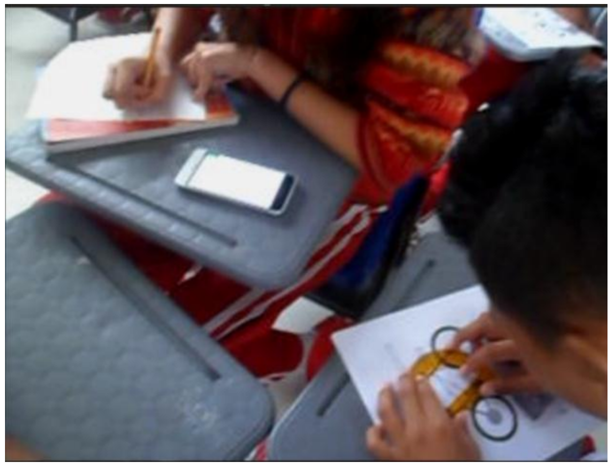


Figura 37. Grupo IECH_01 utilizando la aplicación de calculadora en celular y transportador

Se nota con frecuencia en todos los grupos que el cuaderno sigue siendo el primer instrumento de consulta en el momento de requerir información puntual con respecto a la semejanza de triángulos, el concepto de razón y de triangulo rectángulo; también se puede observar que algunos grupos no descartan la consulta a través de internet en sus equipos celulares. Otro rasgo del momento en la búsqueda de información, es qué, en situaciones anteriores los grupos buscaban información entre pares; en ésta, el grupo ya se vale de sus propios mecanismos de consulta.

Una vez entienden lo que deben hacer, se evidencia que existe consistencia en la estrategia que utilizan los grupos, donde a través de un consenso definen el propósito o los requerimientos de la situación, y dentro del proceso de formular estrategias, el 100% de los grupos modelan un triángulo rectángulo nombrando los catetos y la hipotenusa de acuerdo al ángulo de referencia indicado (73°) con las especificaciones del problema y los datos correspondientes a cada uno de ellos. Con el mismo porcentaje formulan las 6 razones trigonométricas a partir del ángulo de referencia y utilizando la calculadora encuentran el valor numérico a la correspondiente razón.

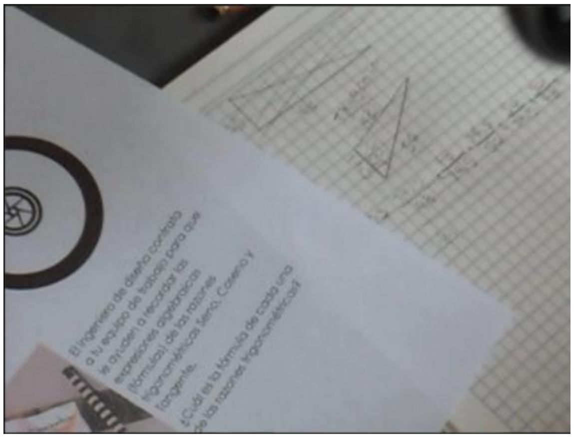


Figura 38. Grupo IECH_05 modelando la situación y formulando las razones.

Ya ha pasado los 60 minutos establecidos para la situación y el 64% de los estudiantes de las tres instituciones han identificaron la expresión algebraica para cada razón trigonométrica y enunciaron las fórmulas para la razón seno, coseno y tangente, al cotejar los resultados de las razones con los obtenidos en calculadora. Se les nota un semblante de felicidad y satisfacción por haber solucionado la situación.

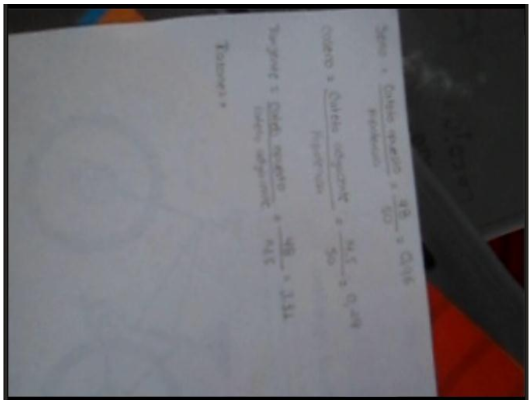


Figura 39. Formulas propuestas por el grupo IECH_03 de las razones trigonométricas

Después de comparar sus producciones con otros grupos el 64% validaron las expresiones algebraicas propuestas y pudieron definir ya con claridad que la razón seno es la comparación del cateto opuesto con la hipotenusa, qué la razón coseno es la comparación del cateto adyacente con la hipotenusa, y qué la razón tangente es la comparación entre cateto opuesto con cateto adyacente. Así mismo, el resto de grupos que son el 36% pudieron entender que solo les faltó comparar los resultados de la calculadora con los datos del medio porque las razones ya las tenían formuladas, este ejercicio de validación les permitió comprender cómo funcionaban las razones trigonométricas al compartir lo que habían hecho con el resto de grupos.

Figura 40. Validación de las producciones grupo IECH_02 y el grupo IECH_05

Resultados y análisis situación: “Aplica tus conocimientos”

El desarrollo de esta actividad se hizo en horario extra-clase, para lo cual, se les estipulo un tiempo de una semana, para que los equipos realicen toda la actividad.

Al indagar por el proceso de elaboración, se evidenció que el 100% de los equipos, aportaron ideas en la escogencia del lugar, en la medición, en lo cálculos y en la modelación de la situación que se propuso como actividad. Como lo afirma el S35 “Todos pudimos aportar las ideas y llegar a realizar un buen trabajo”, S36 “No tuvimos discusiones y mutuamente nos ayudamos entre todos”, S37 “cada uno aportó con lo que podíamos Y pues. Todos llegamos a una conclusión para poder llegar a elaborar la maqueta y así aportar en las razones trigonométricas (mira los cálculos hechos en el tablero).

Es importante destacar que, en la presentación del video, se muestra el rol que cada estudiante realiza en el grupo, y es fácil identificar al líder, pues, fue escogido libremente por el equipo, es quien mejor maneja los conceptos y los procesos realizados.

El 100% de los equipos utilizaron correctamente el metro ó decámetro, para medir distancias, y el clinómetro digital para medir los ángulos.

Figura 41. Utilización de herramientas de medición IEL-02.

El 100 % de los equipos demostraron habilidades para modelar la estructura a medir, elaboraron correctamente el triángulo rectángulo, e identificaron el ángulo de inclinación, y las medidas realizadas, para la solución de la situación.

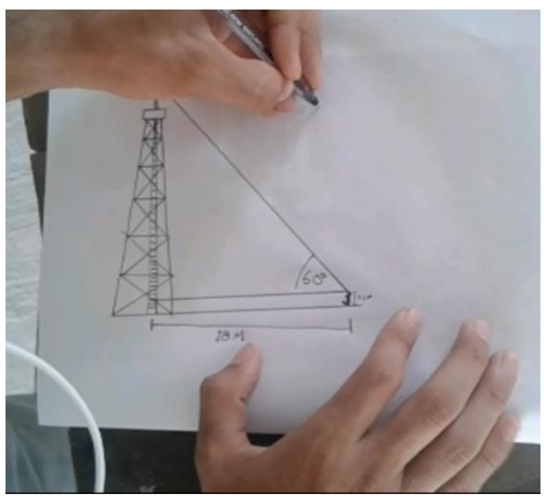


Figura 42. Modelación de la situación IEL-01

En las operaciones matemáticas, se evidenció que el 86% de los estudiantes utilizaron correctamente las razones trigonométricas para hallar alturas inaccesibles, dentro de este porcentaje el 9% restante utilizo Pitágoras y el 5% semejanza de triángulos.

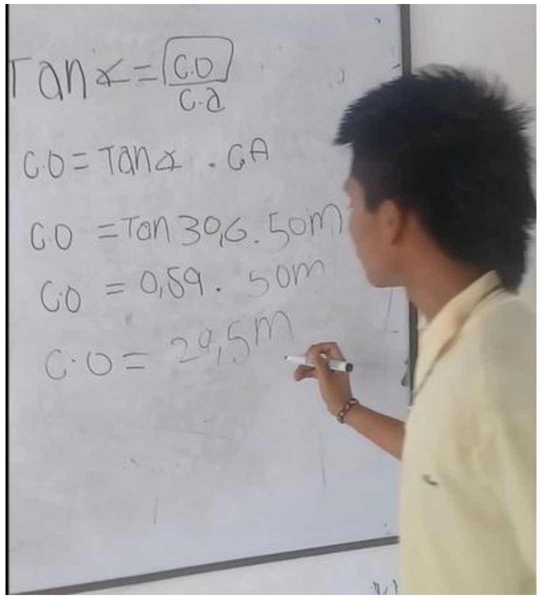


Figura 43. Cálculo de la distancia por razones trigonométricas IEL_08

El 82% elabora las maquetas conservando la proporción en las medidas y tan solo el 18%, construyeron sus modelos sin tener en cuenta la proporción.

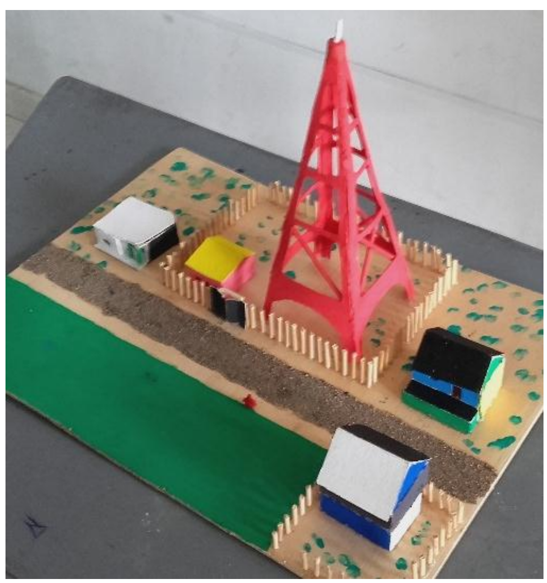


Figura 44. Modelación de la situación IEL_01.

El 100% de los estudiantes argumento matemáticamente el proceso que se llevó a cabo en la actividad, hablaron sobre la medición, modelación y operaciones matemáticas. También se observó el proceso de apropiación en cada una de las actividades que realizaron en equipo para realizar la situación propuesta, sin embargo, en cada grupo existen estudiantes que se apropiaron mejor del conocimiento que otros. Se evidencia que los estudiantes que mostraron un desempeño bajo en la prueba diagnóstica, se les dificultó comprender mejor las situaciones y los cálculos, pero al final, lograron comunicarse matemáticamente.

Figura 45. Socialización de las producciones IEL_02

Análisis a posteriori

En esta última fase de la ingeniería didáctica se hace una comparación entre la fase a priori y a posteriori de las situaciones didácticas, comparando los comportamientos esperados con los que sucedieron en la etapa de experiencia.

Análisis a posteriori situación: "Diseñadores del futuro"

Se esperaba que los estudiantes entren en acción al leer el enunciado y formular individualmente un modelo del marco de la bicicleta. En la experiencia se observó que los estudiantes leen el problema en equipo y empiezan a bosquejar modelos de bicicleta, partiendo de un triángulo rectángulo, otros buscan información en el parqueadero para ver modelos de bicicleta o investigan por internet.

Es importante resaltar que el 100% de los equipos proponen un modelo de bicicleta que contiene un triángulo rectángulo, sin embargo, hubo un 44% que propuso modelos no convencionales ni funcionales, se enfatizaron en la condición dada, sin importarles mucho su función real, de aquí, se puede inferir que la incorrecta lectura e interpretación de los problemas, en este caso de las condiciones, hacen que los estudiantes se alejen de una respuesta óptima a la situación.

Por lo tanto, es importante reconocer los intereses, hobbies y el contexto inmediato de los estudiantes, con el fin de formular situaciones que llamen la atención y puedan ser fuente de reto matemático, pues, no todo lo que se supone los estudiantes deberían conocer, es realmente conocido. Como lo proponen los Estándares del MEN (2006):

> El contexto inmediato de aprendizaje preparado por el docente en el espacio del aula, con la creación de situaciones referidas a las matemáticas, a otras áreas, a la vida escolar y al mismo entorno sociocultural, etc., o a situaciones hipotéticas y aun fantásticas, a partir de las cuales los alumnos puedan pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimiento en forma significativa y comprensiva. (p.70).

Se esperaba que en equipo compartan, comparen y verifiquen sus ideas. El diseño final sería un consenso de todos los integrantes. Se observó que los estudiantes concertaron ideas con su equipo de trabajo, pero a la vez, buscaron validar sus diseños con otros equipos, se pudo evidenciar que la comunicación es frecuente, permite que equipos adelantados asesoren equipos que no logran entender la situación, también, se observa que lo hacen para confirmar datos o para confirmar respuestas encontradas. Además, los equipos donde la comunicación es más fluida, hubo liderazgo y sinergia en la solución rápida de las situaciones.

A continuación, los equipos debían nombrar y medir los lados del triángulo rectángulo, sin embargo, el 68 % miden o asignan las medidas, el 32 % restante utiliza letras para nombrar los lados. Luego, los estudiantes debían aclarar el concepto de razón, para ello el 80% consultó el cuaderno y el 20% utilizó el internet.

Posteriormente se esperaba que formulen las 6 razones trigonométricas, teniendo en cuenta la retroacción de la situación, el 82% formula correctamente las razones teniendo en cuenta las medidas o letras, y solo el 18% formula las razones, pero las igualan como si fuesen proporciones, queda claro que los alumnos manejan el concepto de razón numérica.

En la fase de socialización se evidencia que los equipos defienden su trabajo, los cambios que realizan son mínimos, a menos que la socialización se haga con los que son considerados mejores estudiantes, pues estos, convencen fácilmente al grupo rival, el cual no argumenta, se somete fácilmente al discurso de sus compañeros. Esto se puede evidenciar en el siguiente suceso, el estudiante S30 del equipo IEL_5, después, de explicar cómo sacaron las razones, exclama: "*Ustedes como la sacaron… que son más inteligentes*", S20 del equipo IEL_04 contesta: "*nosotros solo comparamos los lados. Uno con otro y se lo hacía en forma invertida. Ósea, el cateto 1, con el cateto 2, la hipotenusa con el cateto 1*". Seguidamente cuando se va a poner de acuerdo cual es la bicicleta que van a dejar con las razones, llegan fácilmente a un acuerdo y gana el equipo de IEL_04

Análisis a posteriori Situación "Calculo de alturas"

Se esperaba que los estudiantes comprendan el enunciado y la restricción, luego que por medio de lluvia de ideas generen estrategias para calcular alturas, y que se ayuden consultando métodos mediante la semejanza de triángulos. Se evidencio que el 60 % de los grupos consultaron su cuaderno, el 40% a sus compañeros y en el internet, en los temas de semejanza, teorema de Pitágoras y teorema de Thales, La totalidad de los equipos propusieron el método de Thales, que fue orientado en un cuadernillo de actividades.

Los estudiantes debían realizar las mediciones en la cancha. A lo cual se pudo observar que el 20% de los equipos tienen deficiencias en el uso de las herramientas de medición –metro o decámetro y clinómetro –. Además, algunos equipos ubican en un punto que no coincide con la línea de referencia del aro de la cancha de baloncesto. Se puede inferir que faltó práctica en el manejo del clinómetro y del metro o decámetro. En cuanto a este tipo de errores Brosseau (1976, citado en Baeza, Gallo, Godoy, Zavala y Zuñiga, 2015, p. 34) afirma:

> Un error es un concepto equivocado, producto de las combinaciones de los conocimientos previos que poseen los alumnos, es decir, "el error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado".

La modelación de la situación fue guiada, y los estudiantes completaron los valores pedidos en el cuadernillo, haciendo conversión de unidades. En la elaboración de triángulos semejantes en cartulina todos los grupos lo hicieron correctamente, esto muestra que conocen las características de un triángulo rectángulo y la forma como elaborarlo con herramientas como la regla, transportador.

Se esperaba que formulen la proporción entre longitudes, de acuerdo con el teorema de Thales y a la altura como valor desconocido le asignen una variable, que posteriormente seria despejada para encontrar el resultado. El 20% de los equipos reemplazaron erróneamente los valores o ubicaron otros que no correspondían con los obtenidos en el proceso de medición, por lo cual no formularon correctamente la proporción. Quizá esto sucedió porque no reconocen cuál es la base y la altura del triángulo rectángulo en este caso. En cuanto al cálculo de la altura solicitada, el 90% obtuvieron valores correspondientes a los datos obtenidos en el proceso de medición, lo que significa que no presentan problemas para despejar el valor desconocido de la proporción.

En cuanto a la solución del problema del cálculo de la altura del árbol, se esperaba que, si utilizaban el mismo método que en el primer problema, revaliden lo concluido en la socialización y no tengan dificultades. Sucedió que todos los equipos lo resolvieron basados en un problema semejante dado en la cartilla, que utilizaba la sombra y el cual lo habían resuelto exitosamente el 100% de los equipos. Para ello modelaron correctamente la situación, utilizando el triángulo rectángulo e indicando las medidas que tomaron para hacer sus cálculos.

Análisis a posteriori Situación "Ayudando al ingeniero"

Se esperaba que en equipo comprendieran el problema, identificaran los catetos y la hipotenusa al ángulo dado, y posteriormente plantearan las seis razones entre las longitudes de los lados del triángulo rectángulo. El 100% de los equipos identificaron correctamente el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa, en el triángulo rectángulo dado, además, formularon bien, las seis razones entre los lados del triángulo.

Es importante mencionar que, en el desarrollo de esta situación, se evidencia que el conductismo está arraigado muy fuerte en la enseñanza de las matemáticas, la dificultad para entender los enunciados es evidente en algunos grupos y buscan que el docente les interprete lo que deben hacer. Por lo tanto, cambiar del conductismo al constructivismo de manera rápida causa un impacto importante, en el desempeño del estudiante a la hora de abordar los problemas. El conductismo arraigado se convierte en un obstáculo, cómo lo postula Brosseau: "Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento. El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto que encuentra con frecuencia. Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas" (1983, como se citó en Baeza … et al, 2015, p. 35).

Se esperaba que se calcule el valor numérico de cada razón propuesta y se coteje cada valor numérico con los resultados de las razones trigonométricas definidos en el problema, y seguidamente se generalice mediante una expresión algebraica para cada razón trigonométrica. Se comprobó que el 100% de los estudiantes encuentran el valor numérico de cada razón propuesta y el 64% de los estudiantes formularon la expresión algebraica de la razón seno, coseno y tangente.

La validación de las expresiones algebraicas se debía realizar efectuando la división de las longitudes de los lados correspondientes y compararlo con el valor obtenido por la calculadora para cada una de las razones trigonométricas. El 64% validaron las expresiones algebraicas propuestas.

Análisis a posteriori Situación "Aplica tus conocimientos"

Se esperaba que haya una discusión con el fin de elegir el lugar donde realizar la tarea asignada, y que se definan roles y acciones a ejecutar. También que realicen correctamente el proceso de medición de longitudes y ángulos y que representen gráficamente la situación.

Al indagar por el proceso de elaboración, se evidenció que el 100% de los equipos, aportaron ideas en la escogencia del lugar, en la medición, en lo cálculos y en la modelación de la situación. Se pudo constatar que se definieron roles y acciones a realizar, es fácil identificar el líder, teniendo en cuenta la apropiación del conocimiento.

Es evidente la importancia de un buen líder, que proponga ideas y que las realice, el equipo que cuenta con este personaje realiza la actividad de forma eficiente. También es importante la comunicación dentro del grupo, para llegar a concertar ideas y procedimientos realizados. Como lo proponen los estándares del MEN (2006, p. 54):

> La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones,

sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales.

En cuanto a la modelación, se esperaba que identifiquen los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo y ubiquen los valores conocidos del cateto y el ángulo, luego, utilicen la razón pertinente para calcular la longitud del lado faltante y así encuentren la distancia requerida. Se comprobó que el 100 % de los equipos, tienen habilidad para modelar la estructura a medir, elaboraron el triángulo rectángulo y ubicaron las medidas correctamente y el 86% identificaron el ángulo de inclinación. El 86% de los equipos utilizaron correctamente las razones trigonométricas en el cálculo de distancias, el 14% utilizo Pitágoras y semejanza de triángulos.

Se esperaba que el video cumpla con las especificaciones definidas y que en la maqueta elijan correctamente los materiales a utilizar y que cada elemento realizado guarde las proporciones. Se evidenció que el video cumplía con las condiciones dadas y que 82% elaboró las maquetas conservando la proporción en las medidas y tan solo el 18%, construyeron sus modelos sin tener en cuenta la proporción.

En la socialización de la actividad, se esperaba que todos los integrantes evidencien su participación y apropiación del trabajo realizado. Además, que argumenten los procesos matemáticos realizados en la solución de la situación. El 100% argumento matemáticamente el proceso de modelación de la situación y de los cálculos matemáticos realizados, sin embargo, en cada grupo existen estudiantes que se apropiaron mejor del conocimiento que otros. Se evidencia que los estudiantes que mostraron un desempeño bajo en la prueba diagnóstica, se les dificultó comprender mejor las situaciones y los cálculos, pero al final, lograron comunicarse matemáticamente.

> Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas (MEN, 2006, p.54).

Análisis de las fases según Guy Brosseau

Etapa de acción

Brousseau (2007) afirma que: “para un sujeto "actuar" consiste en elegir directamente los estados del medio antagonista en función de sus propias motivaciones. Si el medio reacciona con cierta regularidad, el sujeto puede llegar a relacionar algunas informaciones con sus decisiones (retroalimentación), a anticipar sus reacciones y a tenerlo en cuenta en sus propias acciones futuras” (p. 24).

Se esperaba que los estudiantes al entrar en contacto con el problema de bicicletas de la primera guía “Diseñadores del futuro” se sintieran en un medio ya conocido por todos y que se pudiera manipular de manera abstracta. De ahí, que se pudo evidenciar que el problema permitió que todos los integrantes del grupo tengan la posibilidad de interactuar para proponer diferentes tácticas y muchas de las manifestaciones observables eran producto de la interacción con el medio.

Figura 46. Interacción con el medio “Diseñadores del futuro”

Se esperaba que los grupos de trabajo participaran activamente en la búsqueda de una estrategia optima y la mejor posición del teodolito en la solución de la situación, con la certeza que podrán medir el ángulo de inclinación de manera correcta ya sea utilizando la herramienta manual o la aplicación para celular. Para la situación “cálculo de alturas”, el teodolito permitió desde el momento de su construcción la participación de todo el grupo; por otra parte, en el momento de medir el ángulo de inclinación con el clinómetro manual y la aplicación para celular todos estaban pendientes para asegurarse que la medición del ángulo era el correcto todos querían que esta medición sea precisa y que quien manipulaba el instrumento de medición lo estuviera haciendo bien.

Figura 47. Interacción con el medio "Cálculo de alturas"

Al proponer un ejercicio con arte conceptual de un modelo de bicicleta futurista se esperaba que la parte visual fuera el gancho para cautivar la atención de los estudiantes y comenzaran a analizar el problema propuesto por el medio. Pero, para la situación tercera "Ayudando al ingeniero" el problema había perdido interés, ya se había trabajado con dos problemas de bicicleta y a los estudiantes no les parecía interesante, solo la mitad de los integrantes de los grupos evidencian estar interesados en el desarrollo de éste, algunos manifestaban que daba pereza tratar el mismo tema, y los resultados del desarrollo de la guía no arrojo los suficientes datos para determinar el grado de aceptación del medio en los estudiantes.

Figura 48. Interacción con el medio "Ayudando al ingeniero"

Etapa de formulación

> Para Guy Brousseau (2007): la formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). El *medio* que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información (p. 25).

Diseñadores del futuro**.** Se esperaba que los estudiantes estén en la capacidad de modelar el marco de la bicicleta utilizando un triángulo rectángulo que se construye con la utilización de la regla para los lados y el transportador para determinar el ángulo de 90°, además, tienen que expresar como fracción las 6 razones utilizando las letras con las que nombraron los lados del triángulo, por otra parte, deben formular las 6 razones de manera numérica, y al final, expresarlas como un enunciado que utilizara un porcentaje de comparación entre los dos lados. Al momento de desarrollarse la situación fueron pocos estudiantes que expresaron las razones de las tres (3) diferentes formas que solicitaba el medio, algunos solo las expresaron con letras, otros solamente con números, otros con letras y números y solo algunos grupos la expresaron de manera requerida, la bicicleta se construyó comenzando con un triángulo rectángulo al que se le fue agregando sus partes, manubrio, llantas, pedales, etc.

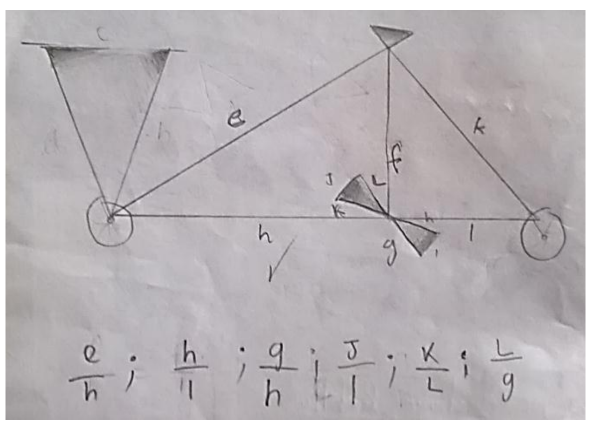


Figura 49. Formulación de la situación "Diseñadores del futuro"

Calculo de alturas**.** Se espera que los estudiantes utilicen el teorema de Thales, formulen las proporciones con los lados correspondientes y encuentren el valor de la altura del aro de baloncesto. Casi todos utilizaron la sombra de la cancha y el teodolito para calcular la altura del aro de la cancha de baloncesto. Para el segundo problema algunos utilizaron el teorema de Pitágoras para encontrar la distancia.

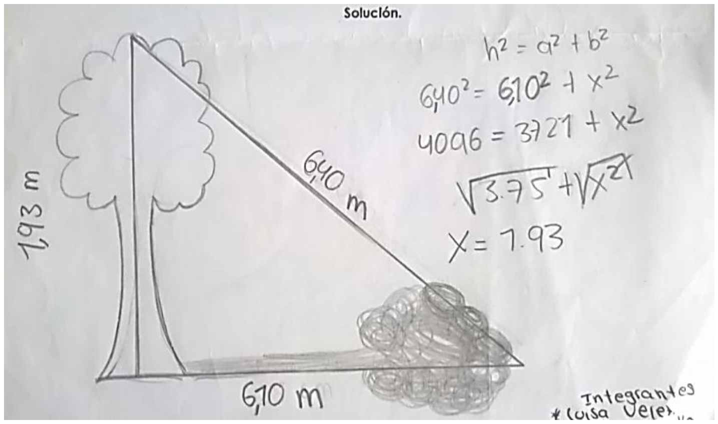


Figura 50. Formulación situación "Calculo de alturas"

Ayudando al ingeniero. Se espera que los estudiantes expresen como fracción las razones utilizando las medidas de los lados del triángulo rectángulo que están en los radios de las llantas de la bicicleta; realicen la operación y comparen los resultados con las funciones seno de 73°, coseno 73° y tangente de 73°, para determinar a quién corresponde cada valor de las operaciones en la calculadora. De esta forma, pueden establecer que el seno del ángulo es el resultado de dividir el valor de los lados opuesto sobre hipotenusa, el coseno del ángulo es el valor de dividir el lado adyacente sobre la hipotenusa, y el tangente del ángulo es el resultado de dividir el lado opuesto sobre el adyacente. Aquí por haber perdido interés el problema desde el principio, les tomo algo más de tiempo, que el estipulado al inicio de la guía, solo unos pocos grupos dedujeron las fórmulas de las razones trigonométricas, quien después de haber expresado tener la solución a la situación, llegaron los demás grupos a solicitar copia de lo que hicieron. ´

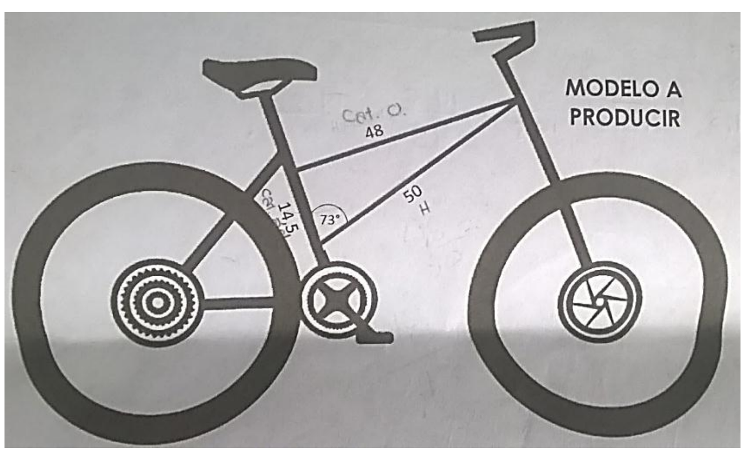


Figura 51. Nombrar catetos

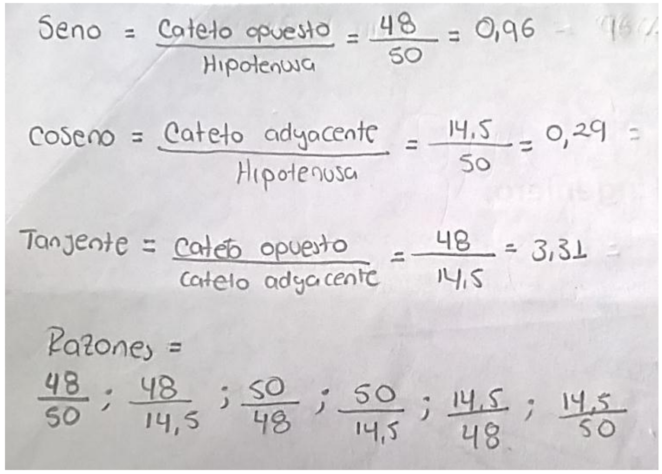


Figura 52. Formulación de las formulas de las razones trigonométicas

Etapa de validación

En los planteamientos de Brousseau (2007):

> El emisor ya no es un informante, sino un proponente, y el receptor, un oponente. Se supone que poseen las mismas informaciones necesarias para tratar una cuestión. Cooperan en la búsqueda de la verdad, es decir, en vincular de forma segura un conocimiento a un campo de saberes ya establecidos, pero se enfrentan cuando hay dudas. Se ocupan juntos de las relaciones formuladas entre un medio y un conocimiento relativo a ese medio. Cada uno puede tomar posición con respecto a un enunciado y, si hay desacuerdo, pedir una demostración o exigir que el otro aplique sus declaraciones en la acción con el medio (p. 26).

Para cada uno de las situaciones se diseñó un problema para ser resuelto entre dos equipos, esperando que los integrantes de los grupos dialoguen, encuentren similitudes entre sus estrategias y sus aciertos, puedan modificar conocimientos bajo argumentos matemáticos y al final puedan vincular de forma segura su conocimiento a un saber. En ésta etapa de las situaciones didácticas se evidenció como los estudiantes se comunicaban matemáticamente y defendían bajo argumentos sólidos sus creaciones, existía una discusión y aclaración de conceptos entre pares, para el mejor entendimiento del problema y de su solución.

Etapa de institucionalización

Al final es necesario la etapa de institucionalización, para Sadovsky (2005) cada grupo debe dar cuenta a sus compañeros de clase y al docente de lo que han hecho para verificar que sus creaciones están vinculados con el conocimiento en cuestión, es necesario por parte del docente asegurar y ratificar que los resultados de la enseñanza se cumplieron y que los estudiantes hayan convertido sus conocimientos en saberes que son el producto cultural de una institución que tiene por objetivo, identificar, analizar y organizar los conocimientos a fin de facilitar su comunicación del contexto en el que se desarrolla la situación. Las situaciones clásicas de enseñanza son escenarios de institucionalización sin que el docente sea responsable de la creación de sentido: se dice lo que se quiere que el alumno sepa, se le explica y se verifica si lo aprendió.

Esperando entonces, que después de una serie de etapas que el grupo de estudiantes ya ha pasado en la toma de decisiones para socializar sus producciones, el grupo expositor describa y defienda si es el caso, la solución del problema con argumentos y lenguaje matemático. Se pudo dar cuenta que en el momento de la socialización que cada grupo ya había elaborado un discurso con argumentos y lenguaje matemático apoyado también en gráficas y expresiones algebraicas.

Etapa A-didáctica

El alumno sabe que el problema fue elegido para hacer que adquiera un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin tener presentes razones didácticas. No sólo puede, sino que también debe, porque no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada *situación a-didáctica.* Se espera que el grupo esté en la capacidad de presentar una maqueta con medidas proporcionales y utilizando alguna de las razones trigonométricas para encontrar el valor de la distancia desconocida. Al parecer en el momento de la socialización de las producciones de los grupos de estudiantes, la aproximación al concepto de razón trigonométrica le causa dificultad, algunos estudiantes decidieron encontrar la distancia por el teorema de Pitágoras.

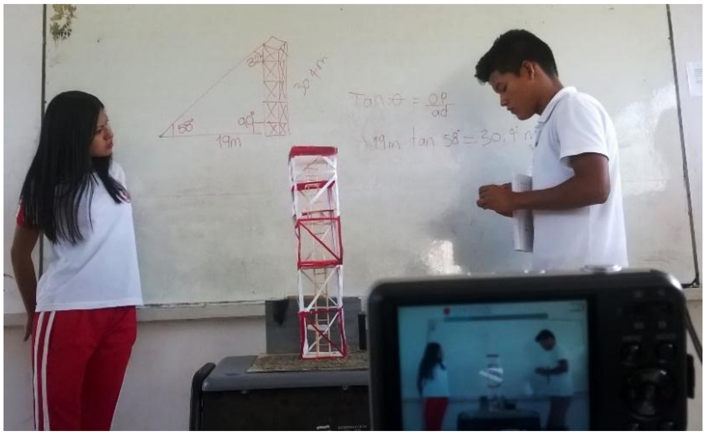


Figura 53. Solución de la situación por razones trigonométricas

Figura 54. Maqueta construida proporcionalmente de la situación adidáctica

De los 6 grupos, 5 utilizaron las razones trigonométricas y uno utilizo la semejanza, de los 5 hubo un grupo que tenía la calculadora configurada en radianes, aunque las expresiones y los procedimientos estaban bien, midieron bien las longitudes, en el video hubo dos estudiantes que no participaron de los videos, y presentaron excusas con un trabajo individual que no tenía los procesos correctos. A todos los grupos se les hizo la recomendación que se respete la proporcionalidad de las estructuras en la maqueta.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Conclusiones

Los resultados obtenidos de la intervención en el aula, permiten concluir que la teoría de situaciones didácticas como modelo de enseñanza, se constituye como una herramienta eficaz a la hora de potenciar el pensamiento geométrico de los estudiantes, en vista que son ellos quienes construyen su conocimiento, a partir de los diferentes tipos de interacciones con el medio, el cual se diseñó para que sea resuelto basado en sus conocimientos previos.

En cuanto al medio, es necesario que cumpla las siguientes características: estar diseñado en relación con el contexto de tal forma que genere en el estudiante el deseo de resolverlo, permitir movilizar conocimientos existentes y relacionarlos con las nuevas ideas, ofrecer la suficiente información para mantener en el estudiante la disposición a aprender, y brindar al sujeto la posibilidad de evaluar la eficacia de las decisiones tomadas, esto es la retroacción del medio.

Las situaciones didácticas diseñadas fomentaron el trabajo cooperativo, considerando que el ser humano es social por naturaleza, y, por tanto, el aprendizaje es una experiencia social, lo que se evidenció cuando los estudiantes a través del intercambio y la validación de aserciones, junto con la mediación del profesor, construyeron su propio conocimiento en relación a las razones trigonométricas, desarrollando, además, la actitud crítica y la capacidad de toma de decisiones.

Al concebir las razones trigonométricas, no como objeto de enseñanza sino como objeto de aprendizaje, se evidenció que el conocimiento no es un objeto que se pueda trasferir, y, por tanto, se debe construir. En ese proceso fue fundamental que los estudiantes aprendan a partir de la experiencia, aprendan de otros y con otros, así como también aprendan de los errores. Pues el error es un elemento importante en el aprendizaje, ya que cuando se manifiesta, se convierte en experiencia, lo que obliga a buscar nuevas alternativas de solución.

Durante la fase de diseño de las situaciones didácticas, fue difícil abandonar el escenario de enseñanza tradicionalista, pues en primera instancia se propusieron una serie de actividades, en las cuales, se creía, no había intervención del docente, pero cada ítem, contenía una serie de instrucciones que guiaban a los estudiantes en la forma de adquirir el conocimiento. Al reconsiderar esta situación, se modificó el medio, ajustándose a un aprendizaje significativo, basado en la teoría de Brousseau.

Reflexiones

Ante la noticia, que en el Valle del Guamuez se iba a ofrecer una maestría dentro del programa Becas para la Excelencia Docente del Ministerio de Educación Nacional, no quisimos perder esta oportunidad e hicimos hasta lo imposible por formar parte del selecto grupo de maestrantes. En un inicio, fue difícil creer que un proyecto de estas dimensiones había llegado a nuestro municipio, pues esta zona del país se ha caracterizado por ser un territorio olvidado por el gobierno en cuanto al desarrollo social. Cuando nos confirmaron que estábamos dentro de los 66 docentes seleccionados, empezaron a crecer las expectativas de la maestría, las cuales han sido ampliamente superadas durante el proceso de formación y más aún con la implementación de esta propuesta de intervención.

Al evaluar la evolución que hemos sufrido en el transcurso de este proceso, cuesta un poco de trabajo aceptar la clase de maestros que éramos, pues nuestras prácticas pedagógicas habían sido indirectamente adquiridas o heredadas a través de nuestra propia formación, que no es precisamente como docentes. En cuanto al diseño y la planificación de actividades, únicamente se consideraban aspectos puntuales a los planes de estudios, por lo cual y sin lugar a dudas, hoy las consideramos débiles en su fundamento didáctico. Gracias a la reflexión constante, a la que nos hemos sometido durante esta etapa acerca de nuestras prácticas y acciones, así como del conocimiento que hemos adquirido, ahora tenemos una visión más compleja de los elementos de tipo didáctico con los que trabajamos, dotándonos de nuevas herramientas conceptuales y metodológicas que nos permiten mejorar nuestra labor como docentes.

Por otra parte, el desarrollo de este trabajo de grado, nos ha llevado a cambiar nuestra concepción del estudiante, debido a que lo integramos al proceso educativo como un agente activo, el cual debe producir su propio conocimiento. Esto exigió de nosotros una constante creatividad, había que diseñar un escenario de aprendizaje que los invite a aprender, que los motive a participar dinámicamente en este proceso, puesto que, si no participan, no se motivan, y si no se motivan, no aprenden. Lo anterior significa, que es necesario conocer de cierto modo a los estudiantes; si se distingue cuáles son sus intereses, que es lo que los mueve, se cuenta con una oportunidad inmejorable para diseñar situaciones de aprendizaje que los invite a asumir un papel protagonista en la construcción del conocimiento.

De otro lado, ha sido muy satisfactorio escuchar las reacciones de los estudiantes a la propuesta de intervención, cuando relatan que, aunque fue difícil que el profesor no les pudiera ayudar en la solución de los problemas, fue muy importante la colaboración entre equipos para cumplir con los objetivos. Esto nos ha permitido corroborar la trascendencia que tiene el fomentar el trabajo en equipos colaborativos.

Estas experiencias nos dejan como principal aprendizaje que es indispensable dentro de nuestro rol como docentes cuestionarnos constantemente: qué, a quién, para qué y cómo enseñamos.

REFERENCIAS

Aguilar, Bravo, Gallegos, Cerón, & Reyes. (2010). *Geometría, trigonometría y geometría analítica.* México: Pearson Educación de México, S.A.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En *Ingeniería didáctica en educación matemática* (págs. 33-59). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barroso, C. R. (2000). El proceso de definir en matemáticas. Un caso: el triángulo. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigacion y experiencias didácticas, 18*(2), 285-295. Obtenido de http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/21672/21506.

Bressan, A. (2005). Los principios de la educación matemática realista. En P. Sadovsky, *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (págs. 69-98). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Concordia, I. L. (2014). Proyecto Educativo Institucional. La Hormiga.

DNP. (03/10/2017 de Octubre de 2017). *Departamento Nacional de Planeación*. Obtenido de Sisbén Colombia: https://www.sisben.gov.co/sisben/Paginas/Que-es.aspx

Engler, A. (s.f). La tarea del docente matemática: algunas reflexiones para compartir. *Sociedad argentina de educación matemática*.

Godino, J. D., & Batanero, C. (2004). Proporcionalidad para maestros. En F. d. Departamento de Didáctica de la Matemática, *Matemáticas para maestros.* Granada, España: GAMI, S.L. doi:84-933517-2-5

Godino, J. D., & Ruiz, F. (2002). *Geometría y su Didáctica para Maestros.* Granada, España: Reprodigital. doi:84-932510-1-1

Libertad, I. L. (2017). Proyecto Educativo Institucional. Valle del Guamuez, Colombia.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Santa Fe de Bogotá D.C.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* (Primera ed.). (M. d. Nacional, Ed.) Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

MEN. (2009). Decreto 1290.

MEN. (Agosto de 2016). Prueba Saber 9 Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal. Bogotá D.C. doi:978-958-11-0693-6

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico.* México D.F: Subsecretaría de Educación Pública. doi:978-607-9362-02-7

Panizza, M. (s.f). II Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas.

Rotaeche, R. (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria.* México D.F. Obtenido de buscar_la_url

Sadovsky, P. (2005). La Teoriá de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En H. Alagia, A. Bressan, & P. Sadovsky, *Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática* (pág. 34). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En S. Patricia, *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (págs. 13-68). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sánchez, O. E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría de antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *16*(1), 65-97. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33526417005

ANEXOS

Anexo A. Resultados históricos pruebas saber 9 del componente geométrico

Competencia	Criterio de Evaluación	Instituciones Educativas					
		Ciudad La Hormiga		La Libertad		La Concordia	
		2015	2016	2015	2016	2015	2016
COMUNICACIÓN, REPRESENTACIÓN Y MODELACIÓN	Representa y reconoce objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.	63%	37%	62%	7%	NE	5%
	Usa sistemas de referencia para localizar o describir posición de objetos y figuras.	36%	65%	31%	48%	48%	70%
	Reconoce y aplica transformaciones de figuras planas.	NE	NE	NE	NE	NE	NE
	Identifica relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades	78%	69%	43%	68%	93%	73%

	de la misma magnitud.						
	Diferencia magnitudes de un objeto y relaciona las dimensiones de este con la determinación de las magnitudes.	NE	54%	NE	NE	NE	NE
RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN	Argumenta formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.	39%	54%	37%	54%	48%	58%
	Hace conjeturas y verifica propiedades de congruencias y semejanza entre figuras bidimensionales.	45%	70%	47%	57%	50%	47%
	Generaliza procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y el volumen de	NE	67%	NE	65%	NE	29%

	algunos sólidos.						
	Analiza la validez o invalidez de usar procedimientos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.	NE	43%	NE	21%	NE	41%
	Predice y compara los resultados de aplicar transformaciones rígidas (rotación, traslación y reflexión) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y artísticas.	NE	NE	NE	NE	NE	58%
PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	Resuelve problemas de medición utilizando de manera pertinente instrumentos y unidades de	NE	48%	NE	NE	NE	NE

medida.						
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	18%	39%	17%	39%	14%	58%
Establece y utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficies y volúmenes.	75%	70%	60%	NE	100%	NE
Resuelve y formula problemas que requieran técnicas de estimación.	53%	50%	57%	48%	79%	58%

Anexo B. Guía de ejercitación "Calculo de alturas"

EJERCITACIÓN

OBJETIVO. Diseñar estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grado de precisión específicos.

PROPÓSITO: al finalizar la situación "*cálculo de alturas*", el grupo de estudiantes de grado 10° diseñaran estrategias para el cálculo de alturas inaccesibles, usando la semejanza de triángulos en situaciones del contexto matemático, para potenciar el pensamiento geométrico.

MATERIALES:

- Clinómetro manual y aplicación Clinómetro para Smartphone.
- Metro
- 1/8 de cartulina
- Tijeras
- Regla
- Transportador
- Lápiz, borrador
- Calculadora.

1. **MEDICIÓN DE ÁNGULOS DE ELEVACIÓN**
   Con la ayuda del clinómetro el equipo de trabajo va a salir a la cancha del colegio, a medir el ángulo de elevación que se forma entre el observador y el aro de baloncesto, luego, se procederá a registrar los datos en una tabla.

   A. El observador que tiene el clinómetro, se ubicará a una distancia ***X*** frente al aro de la cancha de baloncesto.

      Con el visor del clinómetro, se enfocará el punto A del aro de baloncesto (ver figura 1). Utiliza el clinómetro manual y la aplicación Clinómetro para Smartphone en la medición del ángulo de elevación.

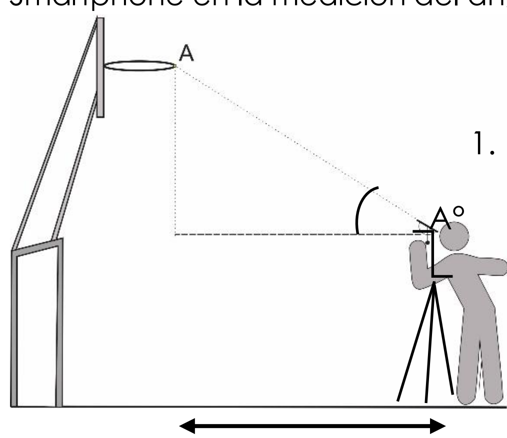


Figura 1.

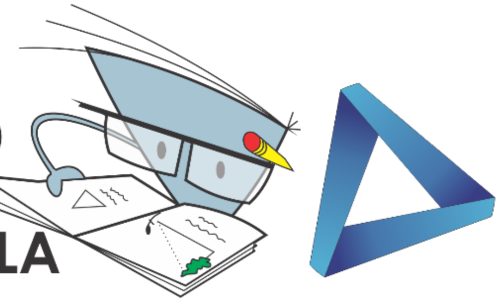
A°: Ángulo de elevación

Distancia ***X***

   B. Registrar los datos en la siguiente tabla.

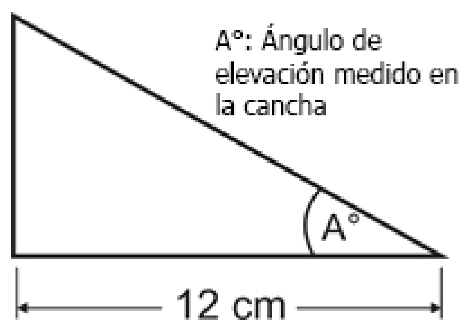
HERRAMIENTA	Distancia ***X*** : _______ m
	Medida del ángulo (°)
Clinómetro Manual	
Clinómetro Digital	

TRABAJO EN EL AULA

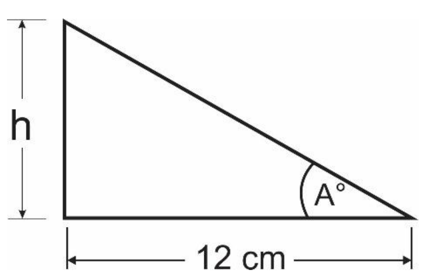


2. CONSTRUYENDO UN MODELO GEOMÉTRICO

A. Con el ángulo de elevación medido en el punto anterior, construir en cartulina tres triángulos rectángulos, uno de base b = 4 cm; otro de base b = 8 cm y un tercero de base b = 12 cm, como se muestra en la siguiente figura. *Los ángulos correspondientes pintarlos del mismo color.*



B. Con una regla realizar la medición de h y completar la siguiente tabla.



TRIANGULO	BASE	ALTURA
1	4 cm	
2	8 cm	
3	12 cm	

C. Recortar y pegar las figuras resultantes con sus medidas respectivas.

3. ANALIZANDO SEMEJANZA Y PROPORCIONALIDAD.

A. ¿Qué se observa al sobreponer y comparar los ángulos correspondientes en los triángulos anteriores?

____

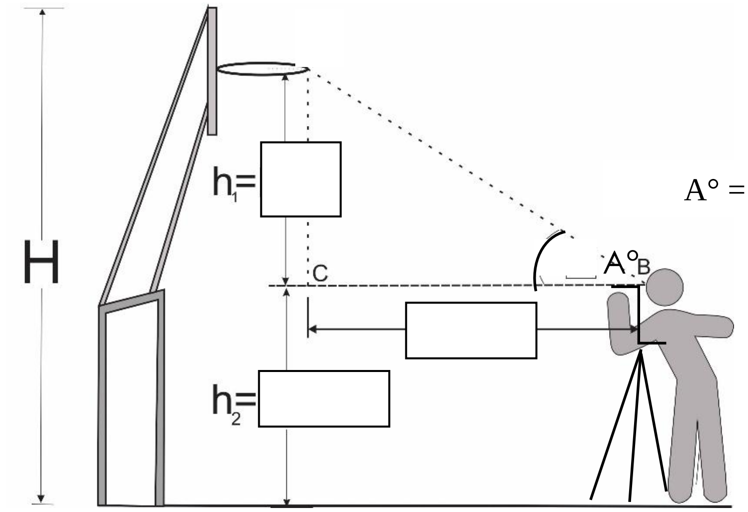
____

B. Completar el enunciado. "*Cuando los triángulos son semejantes sus ángulos son iguales, por lo tanto, los triángulos que construyeron son ________________ y guardan una relación proporcional*".

C. Con las medidas de los triángulos recortados completar la tabla y los enunciados

Relación proporcional	Escribe los valores de los triángulos
$\frac{Altura\ del\ triángulo\ 1}{Altura\ del\ triángulo\ 2} = \frac{Base\ del\ triángulo\ 1}{Base\ del\ triángulo\ 2}$ ***Enunciado:*** *La altura del triángulo 1 es proporcional a la altura del triángulo 2, como la base del triángulo 1 es proporcional a la base del triángulo 2.*	$\frac{\square}{\square} = \frac{4}{8}$
$\frac{Altura\ del\ triángulo\ 1}{Altura\ del\ triángulo\ 3} = \frac{Base\ del\ triángulo\ 1}{Base\ del\ triángulo\ 3}$ ***Enunciado:*** ____ ____ ____ ____ ____ ____	$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
$\frac{Altura\ del\ triángulo\ 2}{Altura\ del\ triángulo\ 3} = \frac{Base\ del\ triángulo\ 2}{Base\ del\ triángulo\ 3}$ **Enunciado:**	$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

D. En el siguiente dibujo completar las medidas correspondientes. Es necesario que se realice la conversión de metros a centímetros.



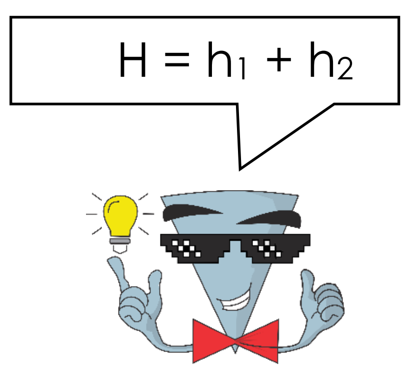
E. En la figura anterior, observa que se forma el triángulo BCD, el cual es semejante a los construidos con la cartulina, por lo tanto, es posible calcular h_1, que es una parte de la altura total a la que se encuentra el aro de baloncesto. Para calcular h_1 se debe establecer la proporción entre las medidas del triángulo BCD y las medidas correspondientes de **un** triángulo construido en la cartulina.

$$\frac{Altura\ del\ triángulo\ BCD\ (h_1)}{Altura\ del\ triángulo\ de\ cartulina} = \frac{Base\ del\ triángulo\ BCD}{Base\ del\ triángulo\ de\ cartulina}$$

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

Encontrar el valor de h_1 = $\boxed{}$

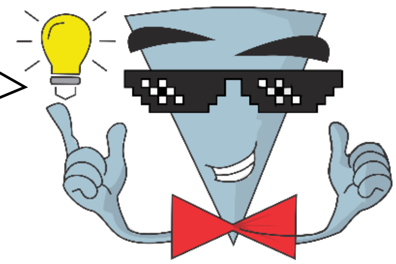
Ahora ya se puede encontrar el valor de H =



4. OBSERVANDO REGULARIDADES ENTRE EQUIPOS.

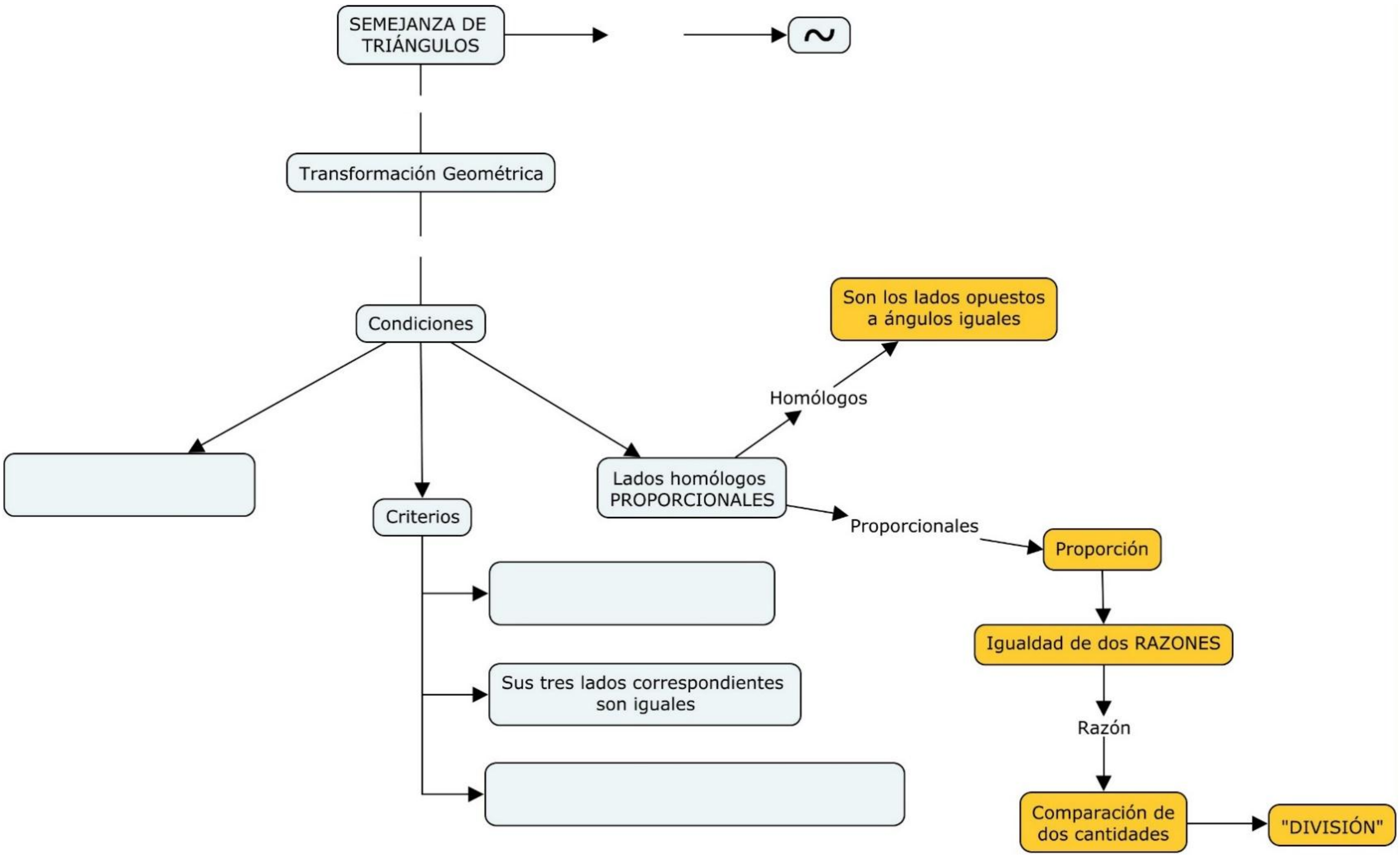
Los triángulos semejantes tienen la misma forma, aunque no necesariamente el mismo tamaño.

La semejanza de triángulos se aplica en escalas, cálculo de



A. Explicar cómo se aplicó la semejanza de triángulos para calcular la altura del aro. Tener en cuenta el proceso realizado.

5. Completar el mapa conceptual con las definiciones de semejanza de triángulos y conectores que aparecen en la parte inferior.



- Ángulos correspondientes CONGRUENTES
- Es una
- Requiere
- Símbolo
- Tienen dos ángulos respectivamente congruentes
- Tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales

¿Por qué la semejanza de triángulos es un método práctico en el cálculo de alturas?

Anexo C. Guía de ejercitación concepto de razón trigonométrica

EJERCITACIÓN

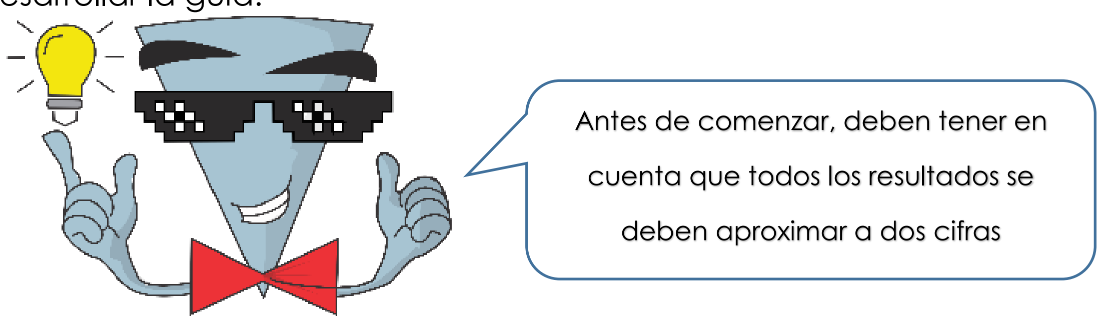
OBJETIVO. Utilizar procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas *(Juicio u opinión formada a partir de indicios o datos incompletos)* en la solución de problemas geométricos. Reconociendo las relaciones existentes entre los lados del triángulo rectángulo a partir de la definición de razón trigonométrica.

PROPÓSITO: al finalizar la situación, el grupo de estudiantes de grado 10° modela situaciones de cálculo de distancias para reconocer y aplicar la razón trigonométrica en la justificación geométricamente de su respuesta.

RECURSOS:

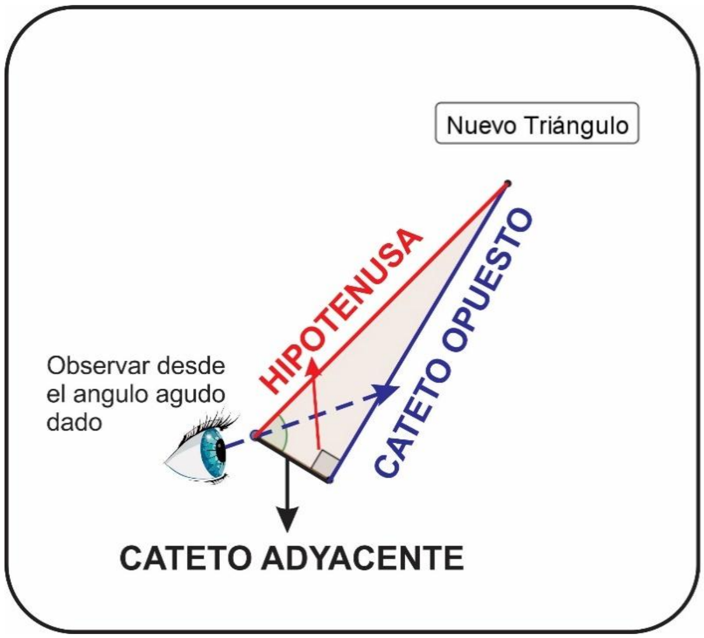
- Software Geogebra
- Calculadora científica
- Manos libres
- Regla - Escuadra
- Compás
- Transportador
- Recursos interactivos Geogebra (Simulador 1 – Simulador 2 – Simulador 3)
- Videos "Cómo despejar una incógnita en la razón Seno", "Institucionalización – Razón Seno" y ""Ejemplo de aplicación"

Al iniciar la sesión, el docente hace entrega de los archivos necesarios para desarrollar la guía.



Con el recurso interactivo No 1. (Triángulo aleatorio) entregado por el docente, realizar el siguiente procedimiento:

6. Dibujar tres triángulos rectángulos e identificar en cada uno de ellos el cateto opuesto (CO), cateto adyacente (CA) y la hipotenusa (H) para el ángulo indicado. Para identificar estos elementos se debe tener en cuenta la siguiente recomendación.

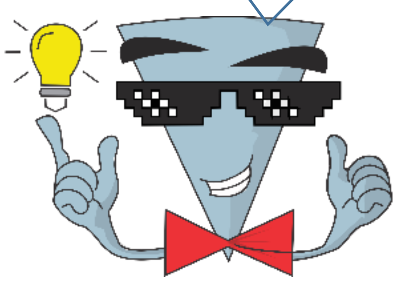


Triángulo 1

Triángulo 2

Para generar un nuevo triángulo se debe hacer clic en el botón

Nuevo Triángulo

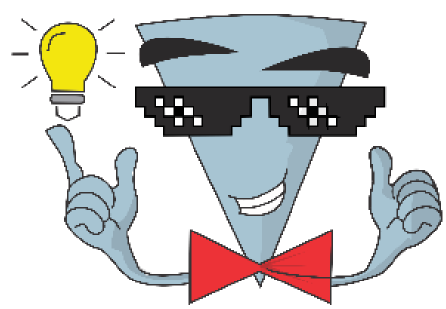


Triángulo 3

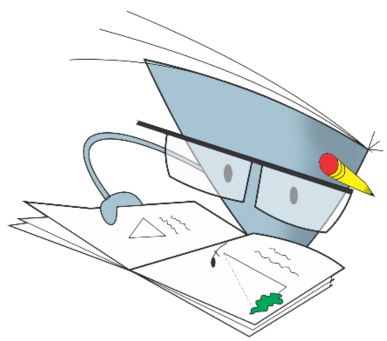
Ahora para continuar es necesario trabajar con el recurso interactivo No 2. (Variar ángulo).

7. Comparar el cateto opuesto con la hipotenusa para los diferentes valores del ángulo α (15°, 30°, 45°, 60°, 70°) en los triángulos rectángulos ΔABC y ΔADE. Aproximar los resultados a dos cifras decimales y registrarlos en la tabla. Tener en cuenta las convenciones Cateto Opuesto **(CO)** e hipotenusa **(H)**.

Para cambiar el valor del ángulo α, utiliza el



Medida del ángulo $(\boldsymbol{\alpha})$	ΔABC	ΔADE
15°	$\frac{CO}{H}=\frac{CB}{AC}=\frac{\ }{\ }=$	$\frac{CO}{H}=\frac{DE}{AE}=\frac{\ }{\ }=$
30°	$\frac{CO}{H}=\frac{CB}{AC}=\frac{\ }{\ }=$	$\frac{CO}{H}=\frac{DE}{AE}=\frac{\ }{\ }=$
45°	$\frac{CO}{H}=\frac{CB}{AC}=\frac{\ }{\ }=$	$\frac{CO}{H}=\frac{DE}{AE}=\frac{\ }{\ }=$
60°	$\frac{CO}{H}=\frac{CB}{AC}=\frac{\ }{\ }=$	$\frac{CO}{H}=\frac{DE}{AE}=\frac{\ }{\ }=$
75°	$\frac{CO}{H}=\frac{CB}{AC}=\frac{\ }{\ }=$	$\frac{CO}{H}=\frac{DE}{AE}=\frac{\ }{\ }=$



8. Registrar y comparar los resultados obtenidos para cada ángulo según el triángulo correspondiente en la tabla anterior. Marcar con una X en la casilla según corresponda.

Medida del ángulo $(\boldsymbol{\alpha})$	ΔABC	ΔADE	Iguales	Diferentes
15°				
30°				
45°				
60°				
75°				

9. Utilizando la calculadora encontrar el valor del seno para los ángulos dados y completar la tabla.

Medida del ángulo (α)	Seno
15°	
30°	
45°	
60°	
75°	

10. En la siguiente tabla registrar los resultados obtenidos a partir de los triángulos y los de la calculadora

Medida del ángulo (α)	RESULTADOS	
	Triángulos	Calculadora
15°		
30°		
45°		
60°		
75°		

a. De la tabla anterior, ¿qué pueden decir del valor del seno y los valores obtenidos de los triángulos? ______________________________

b. Entonces, ¿el valor del seno se obtiene al comparar dos lados de un triángulo rectángulo?

Si No ¿Cuáles?
O O ______________________________

c. ¿Por qué se podría decir que el seno es una razón?

____

____

d. Al ordenar las siguientes frases, encontrarás una definición de la razón trigonométrica SENO.

Frase1. al ángulo y la hipotenusa del triángulo
Frase 2. de un ángulo α, es la razón entre la medida del cateto opuesto
Frase 3. En un triángulo rectángulo,
Frase 4. la razón trigonométrica seno

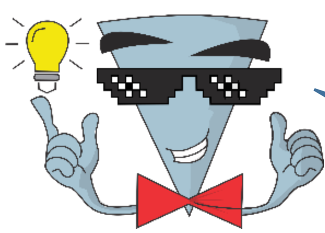
Escribe el párrafo resultante después de ordenar las frases:

____
___

____
___
____
___
____
___

e. Proponer una ecuación que permita encontrar el valor de la razón Seno para cualquier ángulo de un triángulo rectángulo.

$$\boxed{} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$



Tener en cuenta que la razón SENO se

A partir de este momento, utiliza el tercer simulador (Variar hipotenusa - ángulo) entregado por el docente al inicio de la sesión.

11. Registrar las medidas del cateto opuesto al ángulo α, modificando el valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo con el deslizador también denominado hipotenusa. Luego, encontrar el valor de la razón Seno para esas medidas.

En la calculadora encontrar el seno de 30° y registrarlo en la última columna.

Ángulo 30°			
Cateto Opuesto	Hipotenusa	Razón Seno $= \frac{co}{H}$	Seno 30° (Calculadora)
	10		
	20		
	30		
	40		
	50		
	60		
	70		
	80		
	90		
	100		

12. ¿Qué pueden concluir acerca de los resultados obtenidos en la tabla anterior, cuando el ángulo permanece constante y las medidas del cateto opuesto y la hipotenusa cambian?

___

___

___

13. ¿De qué depende el valor de la razón Seno? (Seleccionar una opción)

O Del Ángulo

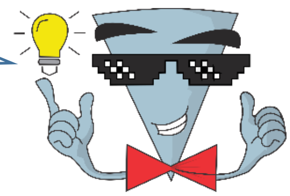
O De las medidas de los lados (C.O – H)

¿Por qué?

____

____

Recordar que un número decimal se puede escribir como porcentaje.



14. Escribir el valor de la razón Seno 30° en porcentaje: _________

15. Ordenar las siguientes frases en un párrafo:

Frase 1. en esta razón trigonométrica
Frase 2. en porcentaje 50%.
Frase 3. Esto significa que el cateto opuesto
Frase 4. equivale al 50% de la hipotenusa,
Frase 5. El valor de la razón seno 30° es 0,5;

Párrafo resultante:

____

____

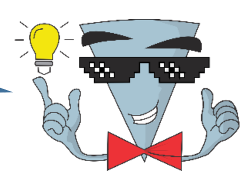
____

16. Comprobar el enunciado anterior en la siguiente tabla.

Seno 30°	Hipotenusa	Cateto Opuesto
0,5 = 50%	10	
	40	
	80	
	350	

Entonces!!!

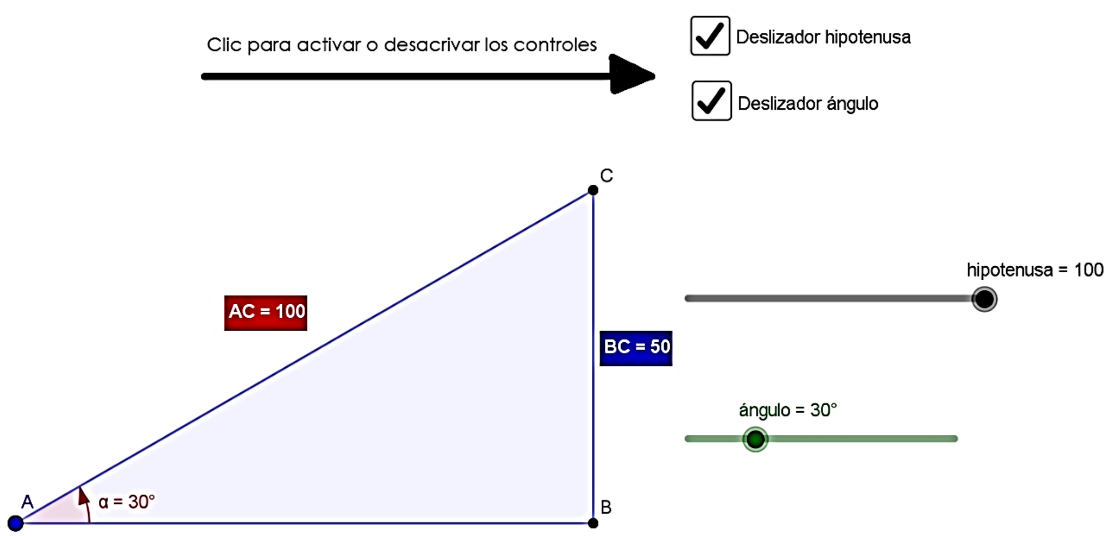
$$Seno\ \alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$$



17. Completar los valores del seno para los ángulos indicados con ayuda de la calculadora. Luego despejar el valor del cateto opuesto de la expresión matemática que representa la razón Seno, para ello observar el video explicativo ***"Cómo despejar una incógnita en la razón Seno".***

Ángulo (α)	Seno α	Cateto Opuesto	Hipotenusa
15			70
45			50
60			60
75			30
15			200
60			5000

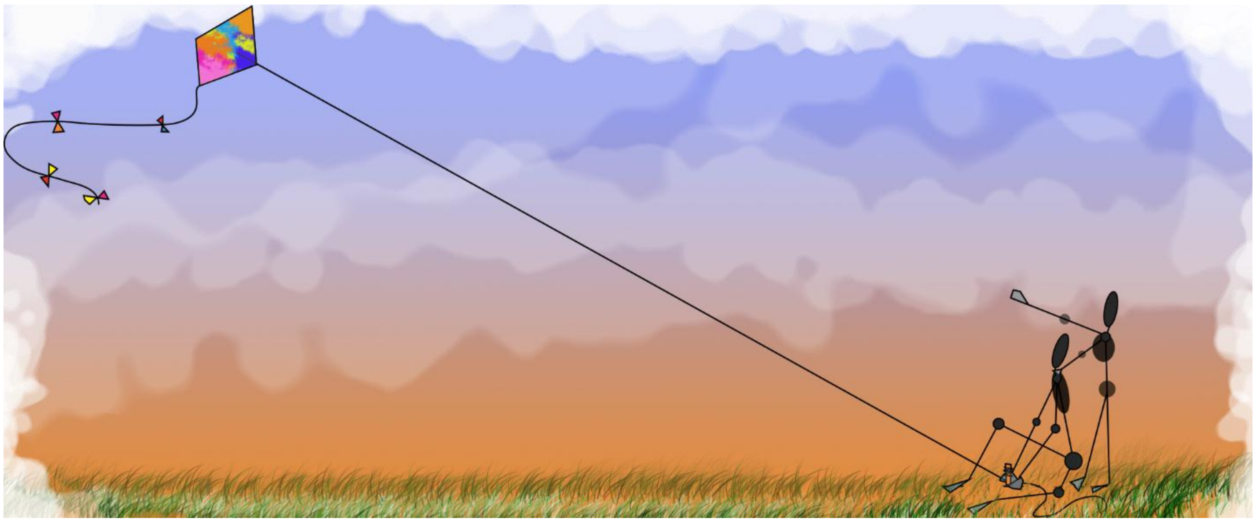
18. Comparar los valores del cateto opuesto obtenidos en la tabla anterior con los del triángulo en el simulador 2. Para modificar el valor del ángulo α, se debe habilitar el deslizador ángulo cómo se indica en la figura.



a. Por qué el seno es una razón y de que depende su valor. Escribir las conclusiones a las que llegaron.

Ejercicio

A partir del siguiente gráfico, formular y solucionar un problema que utilice la razón SENO.

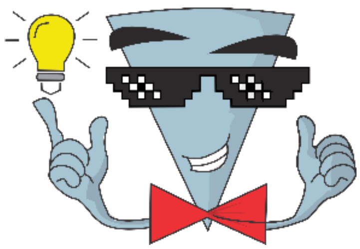


Enunciado

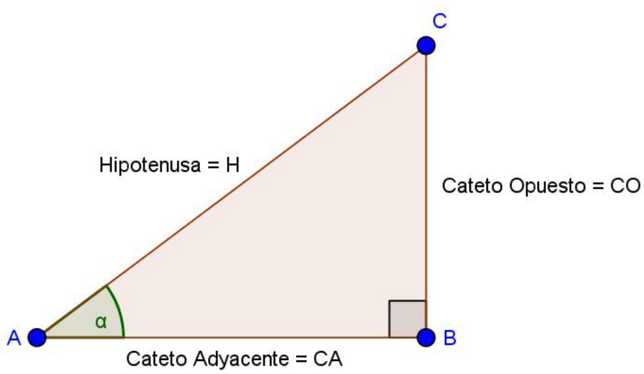
Reconocer y utilizar las razones trigonométricas en triángulos rectángulos.

RECURSOS:

- Calculadora científica
- Regla – Escuadra – Compás
- Cartulina
- Transportador
- Videos "Cómo despejar una incógnita en la razón Seno" y "Seis razones trigonométricas"

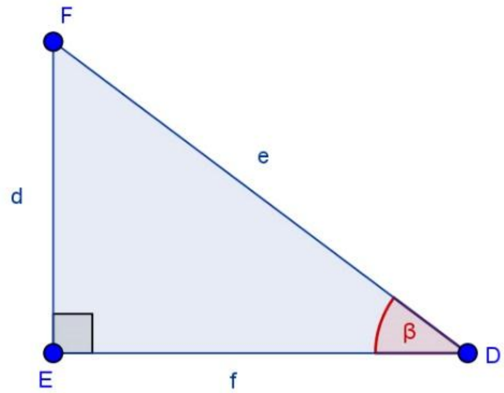


En la guía, se estableció que la razón trigonométrica Seno compara el Cateto Opuesto (CO) con respecto a la Hipotenusa (H) para un ángulo α en un



$$\boldsymbol{Seno\ \alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{CO}{H}}$$

1. Para los siguientes triángulos identificar el lado que corresponde a la hipotenusa, al cateto opuesto y al cateto adyacente para los ángulos indicados.

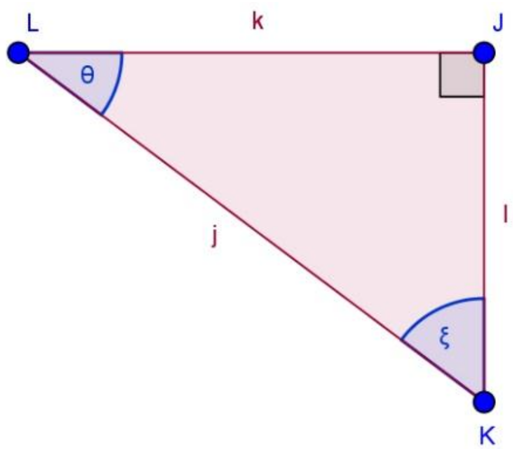


Ángulo β

Hipotenusa _____

Cateto Adyacente _____

Cateto Opuesto _____



Ángulo θ

Hipotenusa _____

Cateto Adyacente _____

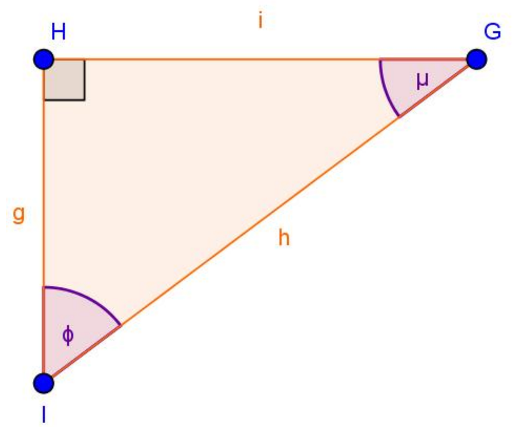
Cateto Opuesto _____

Ángulo ξ

Hipotenusa _____

Cateto Opuesto _____

Cateto Adyacente _____



Ángulo ϕ

Hipotenusa _____

Cateto Adyacente _____

Cateto Opuesto _____

Ángulo μ

Hipotenusa _____

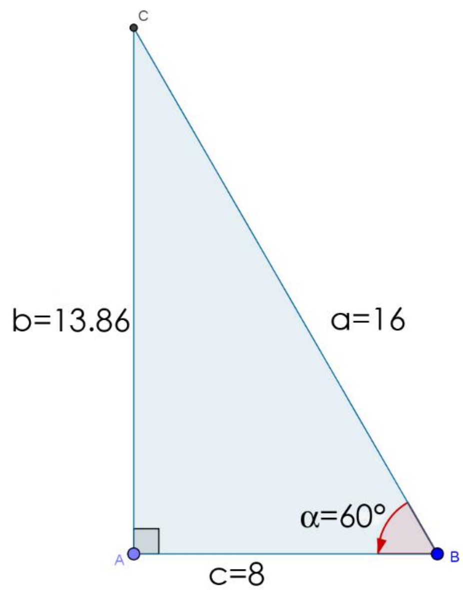
Cateto Opuesto _____

Cateto Adyacente ____

2. Plantear las razones (comparaciones) entre los lados de los triángulos, para los ángulos propuestos en el punto anterior.

Triángulo	Ángulo	Razón 1	Razón 2	Razón 3	Razón 4	Razón 5	Razón 6
DEF	β	—	—	—	—	—	—
JKL	θ	—	—	—	—	—	—
JKL	ξ	—	—	—	—	—	—
GHI	ϕ	—	—	—	—	—	—
GHI	μ	—	—	—	—	—	—

4. Para el triángulo ABC, escribir las 6 razones entre las medidas de los lados teniendo en cuenta el ángulo α = 60ª. Completar la tabla



Razón 1	Razón 2	Razón 3	Razón 4	Razón 5	Razón 6
—	—	—	—	—	—

5. Con la calculadora encontrar los valores de las razones seno, coseno y tangente para el ángulo α = 60°

$$Sen\ 60° =$$

$$Cos\ 60° =$$

$$Tan\ 60° =$$

6. Unir los elementos de cada columna con su correspondiente de las otras. Teniendo en cuenta el triángulo ABC propuesto en el punto 3 y los resultados obtenidos en el punto 4.

Razón (Lados a comparar)	Sustituyendo medidas de los lados	Resultado Calculadora	Nombre de la razón trigonométrica (abrev)
$\frac{CA}{H}$	$\frac{13,86}{8}$	0,87	$Tangente\ \alpha\ (Tan\ \alpha)$
$\frac{CO}{CA}$	$\frac{13,86}{16}$	0,50	$Seno\ \alpha\ (Sen\ \alpha)$
$\frac{CO}{H}$	$\frac{8}{16}$	1,73	$Coseno\ \alpha\ (Cos\ \alpha)$

7. Escribir una expresión matemática que permita calcular la razón trigonométrica Seno, Coseno y Tangente para cualquier ángulo. Tener en cuenta la primera y última columna del punto anterior

$$Sen\ \alpha = \frac{\quad}{\quad}$$

$$Cos\ \alpha = \frac{\quad}{\quad}$$

$$Tan\ \alpha = \frac{\quad}{\quad}$$

8. Construir en cartulina un triángulo rectángulo, donde un ángulo mida 60°. Pegar el triángulo aquí

a. Identificar y nombrar los elementos del triángulo (lados, vértices y ángulos internos).
b. Medir los ángulos y lados del triángulo.
c. Encontrar las razones trigonométricas Seno, Coseno, Tangente para el ángulo de 60°. Completar la tabla

Razón Trigonométrica	Lados que compara	Medidas de los lados (reemplazar)	Resultado
$Sen\ 60°$	$= \frac{\quad}{\quad}$	$= \frac{}{}$	$=$
$Cos\ 60°$	$= \frac{\quad}{\quad}$	$= \frac{}{}$	$=$
$Tan\ 60°$	$= \frac{\quad}{\quad}$	$= \frac{}{}$	$=$

d. Comparar los resultados de la tabla anterior con los registrados en el punto 4. A partir de lo observado se puede afirmar qué:

Para cualquier triángulo rectángulo, el resultado de las razones trigonométricas depende de las medidas de los lados.

¿Es correcta la afirmación? Argumentar la respuesta.

____

____

____

e. Completar los siguientes enunciados

- En un triángulo rectángulo, la razón trigonométrica Seno de un ángulo (α) compara ________________ con __________________. La expresión matemática que la define

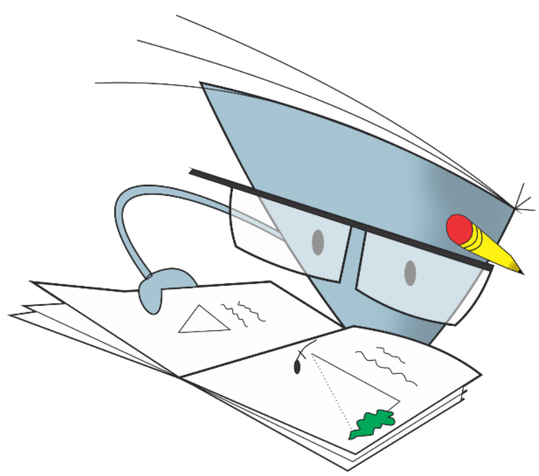
  es $\mathrm{Sen} \quad = \frac{\ }{\ }$

- En un triángulo rectángulo, la razón trigonométrica Coseno de un ángulo (α) compara ________________ con __________________. La expresión matemática que la define

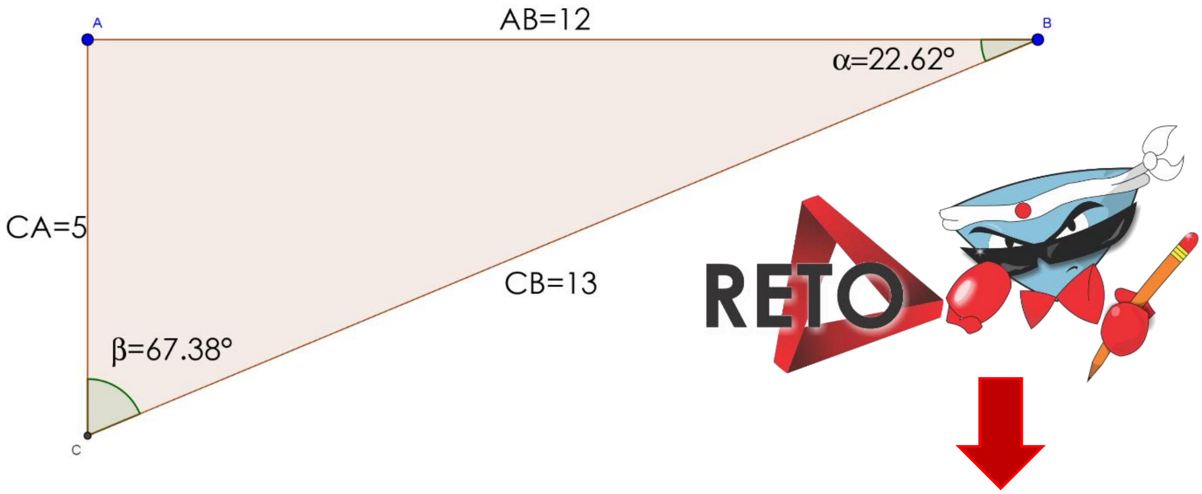
  es $\mathrm{Cos} \quad = \frac{\ }{\ }$

- En un triángulo rectángulo, la razón trigonométrica Tangente de un ángulo (α) compara ________________ con __________________. La expresión matemática que la define

  es $\mathrm{Tan} \quad = \frac{\ }{\ }$



9. El profesor de matemáticas de grado décimo, propone en un examen que a partir del siguiente triángulo se encuentren las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para los ángulos α y β.



Un estudiante presentó la siguiente solución:	En equipo evaluar la solución propuesta por el estudiante. En caso de encontrar errores corregirlos.
Para el ángulo α:	Correcciones del Grupo
$Sen\ 22{,}62° = \frac{12}{13} = 0{,}92$	
$Cos\ 22{,}62° = \frac{5}{13} = 0{,}38$	
$Tan\ 22{,}62° = \frac{5}{12} = 0{,}42$	
Para el ángulo β:	
$Sen\ 67{,}38° = \frac{13}{12} = 1{,}08$	
$Cos\ 67{,}38° = \frac{5}{13} = 0{,}38$	
$Tan\ 67{,}38° = \frac{5}{12} = 0{,}42$	

a. Justificar las correcciones propuestas por el equipo

____

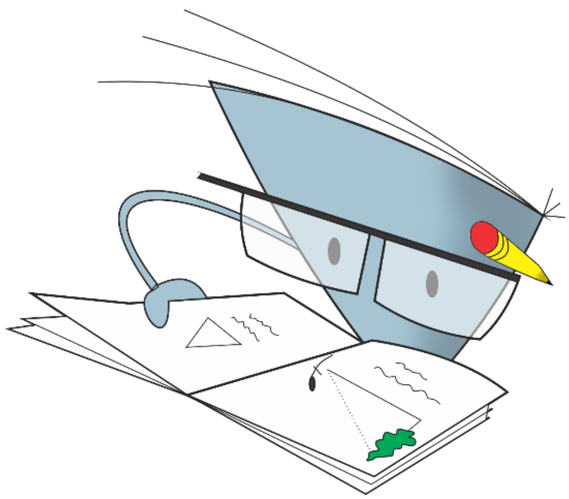
____

____

____

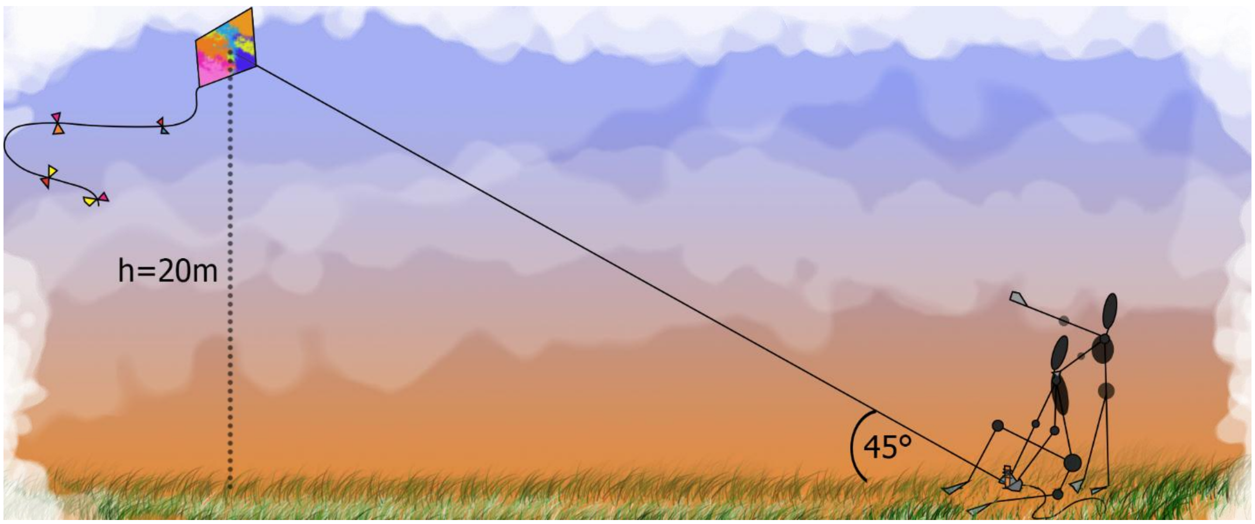
____

____



Ejercicio.

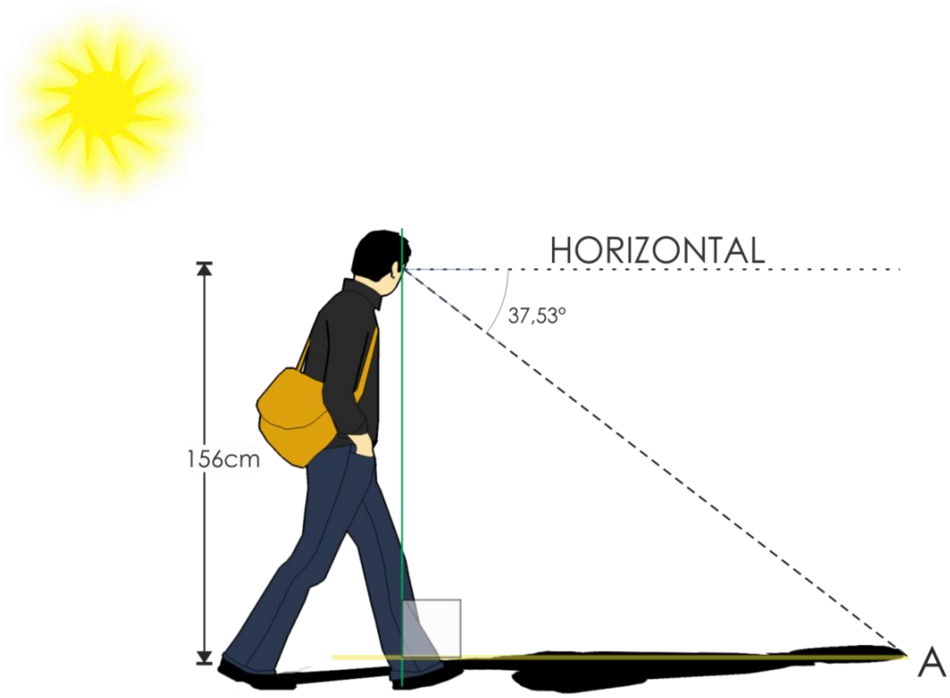
En el concurso de cometas de La Hormiga, una cometa se encuentra a 20 m de altura y el hilo forma un ángulo de 45° con el suelo, como muestra la figura. Según la información, ¿cuánto hilo se ha utilizado para elevarla?



Resolver en este espacio

10. Un estudiante se dirige a su colegio y se da cuenta que su sombra se forma en el piso. Utiliza la aplicación de su celular para medir el ángulo de inclinación que se forma entre la horizontal del ojo y el extremo de la sombra (punto A en la figura). Él sabe que su ojo está a una altura de 156 cm, calcular:

a. Cuánto mide la sombra
b. La distancia del ojo al punto A de la figura.



Resolver en este espacio