EL PROCESO DE MATEMATIZACIÓN QUE REALIZAN ESTUDIANTES DEL GRADO 9A DE LA ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYÁN, AÑO LECTIVO 2012, EN PROBLEMAS ALGEBRAICOS.

DIEGO FERNANDO PALADINEZ SALAZAR

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2014

EL PROCESO DE MATEMATIZACIÓN QUE REALIZAN ESTUDIANTES DEL GRADO 9A DE LA ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYÁN, AÑO LECTIVO 2012, EN PROBLEMAS ALGEBRAICOS

DIEGO FERNANDO PALADINEZ SALAZAR

Sistematización de la Práctica Pedagógica
Trabajo presentado como un requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director de la Práctica Pedagógica:
M. Sc. ÁNGEL HERNÁN ZÚÑIGA SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2014

Nota de Aceptación:

M. Sc. Yeny Leonor Rosero Rosero
Coordinadora Licenciatura en Matemáticas

M. Sc. Ángel Hernán Zúñiga Solarte
Director Práctica Pedagógica

M. Sc. Yeny Leonor Rosero Rosero
Evaluador

Popayán (30 , Abril , 2014) Fecha de socialización.

DEDICATORIA

A mi madre, que en su tiempo de vida me brindó su apoyo, cariño, me enseño valores y estuvo pendiente de mi educación. (Q.E.P.D).

A mi tío Luis Carlos Salazar Díaz, que fue como un padre, su amor a Dios gracias a su vocación sacerdotal, fue el legado que me permitió tener un equilibrio personal, centrado siempre en la unión familiar y el bien social. (Q.E.P.D).

AGRADECIMIENTOS

A Dios porque me rodeo de buenas personas, que influyeron en este proceso, además de la fortaleza propia que siempre surge del hecho de seguir las enseñanzas divinas.

A mi familia y amigos que siempre confiaron en mí, y dieron su apoyo incondicional.

Al profesor Ángel Hernán Zúñiga Solarte M.Sc., quien mantuvo su interés por orientar y dirigir mi trabajo de grado, por su confianza, colaboración y apoyo en la formación profesional a lo largo de este proceso. Su conocimiento en el ámbito de la Educación Matemática, es de los más destacados y prestigiosos en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cauca.

A la profesora Yeny Leonor Rosero Rosero M.Sc., quien en el inicio de esta práctica pedagógica, aporto su experiencia y excelente conocimiento al servicio de nuestra formación; esto fue un gran aporte en mi profesionalización.

Al profesor Gerardo Ruíz Bravo Esp. por su valiosa contribución en el desarrollo de mi práctica pedagógica en la institución educativa Escuela Normal Superior de Popayán, grado 9A año lectivo 2012.

A todas aquellas personas que confiaron en mí, me animaron y dedicaron su tiempo en escucharme y estar dispuestos a colaborarme en todo lo que estuviera a su alcance; y por supuesto a tí, Arely Molina.

CONTENIDO

LISTADO DE IMÁGENES

0. INTRODUCCIÓN

El proceso de la práctica pedagógica que realizamos, se hace de manera formativa, para enriquecer nuestra praxis educativa, en este sentido el saber pedagógico es de suma importancia para el desarrollo de una sociedad pensante, reflexiva y crítica, por lo que debemos como maestros del área de matemáticas, forjar una buena formación docente que permita que se desarrolle un pensamiento recontextualizado de ellas. La práctica debe ser un autodescubrimiento personal, el tomar conciencia por sí mismo, es decir, se trata del desarrollo de la personalidad determinadas por un contexto. El docente tiene que desarrollar su sabiduría con base en la experiencia y creatividad, para afrontar situaciones únicas, ambiguas, inciertas y conflictivas que configuran la vida en el aula.

La ideología de nuestro actuar se centra en descubrir problemáticas que surgen en el desarrollo de la actividad matemática de los alumnos; y a su vez éstas se convierten en nuestro objeto de estudio, en el cual queremos conocer sus elementos teóricos incidentes en dificultades de aprendizaje, para así cada vez impulsar el mejoramiento del accionar metodológico docente. Es el caso de la resolución de problemas, competencia algebraica que se enmarca en el ámbito interdisciplinario (contextos, lingüística, cognición) la cual es de importancia pues su aplicabilidad a la realidad y a otras disciplinas científicas es de gran uso, pues con ello se crean modelos matemáticos, los cuales se manipulan y dan resultados basados en una mirada retrospectiva hacia el problema inicial. Dentro de esta competencia se ha evidenciado que la fase de la matematización es una de las dificultades primordiales en el proceso de la modelación matemática. Es por eso de nuestro interés describir los elementos que influyen en dicha fase para poder comprender mejor los elementos conceptuales que permiten vislumbrar conocimiento sobre este tema, y así capacitarnos en pro de estrategias metodológicas que fomenten el aprendizaje significativo.

Este trabajo se encuentra dividido en cinco capítulos y presenta el acercamiento de la práctica pedagógica vista desde la perspectiva del estudiante Diego Fernando Paladines Salazar, en este sentido el primer capítulo describe el ambiente de la institución y posterior acercamiento a los alumnos del grado 9-A de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Popayán, año lectivo 2012; como segundo capítulo se muestra la planeación de la docencia directa en esta institución, en el tercer capítulo se enseña el objeto de estudio y los referentes conceptuales, con el fin de describir el proceso de matematizacion que realizan los estudiantes, en el cuarto capítulo se presenta los análisis de los distintos registros obtenidos en el aula de clase, siguiendo un trabajo de identificación de los elementos conceptuales del objeto de estudio, y por último en el capítulo quinto se muestran algunas conclusiones y recomendaciones.

1. CONCEPCIÓN DE LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA Y AMBIENTE INSTITUCIONAL

1.1 LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA

La práctica pedagógica es concebida como un espacio para mediar entre la teoría y la práctica educativa, "un laboratorio pedagógico", donde la combinación de los elementos produce una dialéctica entre el docente, alumno y el saber, entrando en el proceso donde el objetivo es el aprendizaje de los conocimientos prescriptos en el currículo, pero además se tiene que sumar a ese objetivo el aprendizaje y práctica de los valores, de los ideales y de los modelos formativos. Una práctica con estas características la podemos categorizar como, práctica pedagógica reflexiva en la cual podemos generar conocimiento a partir de procesos analíticos y sistemáticos que orientan nuestro trabajo académico. Además, es considerada como un momento del hecho pedagógico que permite al docente la comprensión de las acciones y problemas que se suscitan al interior del aula y que lo impulsan a la elaboración de acciones remédiales con el fin de superar las necesidades identificadas en el escenario institucional.

Por este motivo, se explicita el modelo adquirido para llevar a cabo esta práctica pedagógica, el cual está destinado a una *orientación formativa:* El modelo permitirá al profesor reflexionar y retroalimentarse sobre su acción en la docencia, y plantear acciones para la mejora de la misma (Zabalza, 1990).[1]

En efecto, cuando nos adentramos en el proceso de enseñanza debemos ratificar aquellos saberes pedagógicos y rectificar otros para posibilitar el desarrollo docente en el aula que dará marcha al análisis de las problemáticas educativas. En esta posición de actuar del docente se puede afirmar que la práctica pedagógica reflexiva es un momento inherente a su desempeño que le permite dar el sentido a la acción - observación - reflexión - planeación - acción de situaciones problemáticas contextualizadas. Por todo lo anterior la práctica interiorizada de esta manera, posibilita no solo la construcción de conocimientos desde las relaciones entre estudiantes, contexto social y docentes;

[1] Citado por: García-Cabrero Cabrero, B., Loredo, J. y Carranza, G. (2008). Análisis de la práctica educativa de los docentes: pensamiento, interacción y reflexión. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, Especial*.

sino la articulación entre la conciencia de la acción docente con su experiencia y el mejoramiento de su praxis a través de la interacción dialógica de los actores involucrados en el proceso.

En este orden de ideas se debe tener en cuenta una reflexión crítica sobre la práctica, pues es una exigencia que surge entre Teoría-Práctica sin la cual la teoría se puede convertir en palabrería y la práctica en activismo. (Freire, 2006)[2]

Freire destaca que entre los saberes indispensables, que debe poseer quien se está formando, desde el inicio de su experiencia formadora, es convencerse definitivamente de que enseñar no es *transferir conocimiento*, sino crear las posibilidades de su producción o de su construcción. En esta reflexión podemos ver que en el proceso de la práctica pedagógica hay un eje que guía el actuar del docente, en este caso: considerar que aunque docente y alumno son diferentes entre sí, *quien enseña aprende al enseñar y quien aprende enseña al aprender.*

Es en este sentido es como se adopta nuestra práctica: aprender al enseñar para fortalecer la praxis, en la cual se analiza una problemática que va a ser confrontada con la teoría relevante al caso; esto con la firme convicción de que el conocimiento adquirido de la intervención en el aula y de la reflexión resultante va a capacitar nuestra capacidad propositiva en el ámbito metodológico e investigativo, con el fin de perfeccionar más nuestra labor o actividad docente.

Para aclarar y tener una visión más amplia acerca de lo que significa la práctica pedagógica, me remito a varias definiciones, aunque existen numerosas, dependiendo del enfoque epistemológico con la que se aborde; tomo las siguientes aproximaciones:

"Una praxis social, objetiva e intencional en la que intervienen los significados, las percepciones y las acciones de los agentes implicados en el proceso: maestros, alumnos, autoridades educativas y padres de familia; así como los aspectos políticos-institucionales, administrativos y normativos, que según el proyecto educativo de cada país, delimitan las funciones del maestro" (Fierro, 1999)[3].

[2]Freire, P. (2006). Pedagogía de la Autonomia: Saberes necesarios para la práctica educativa. En P. Freire, *Pedagogía de la Autonomia: Saberes necesarios para la práctica educativa* (pág. 24). Mexico.D.F: Siglo XXI editores,S.A. de c.v.

[3]FIERRO, C., FORTOUL, B y ROSAS, L. Transformando la Práctica Docente. Una Propuesta Basada en la Investigación Acción. México: Paidós, 1999. Capítulos 1 y 2, pág. 21.

Este concepto es apropiado para resaltar al maestro y al alumno en su papel de sujetos que intervienen e interactúan en el proceso educativo, no solo como elementos o productos del mismo, sino, el docente resulta el artífice de todo ello. De esta concepción se desprende que la práctica docente contiene múltiples relaciones: La docencia implica la relación con la comunidad educativa, maestros y estudiantes se relacionan con un saber colectivo culturalmente organizado que la escuela propone para las generaciones nuevas a partir de una intervención planificada. La tarea del maestro se vincula estrechamente a todos los aspectos de la vida humana de la sociedad, aparte de desarrollarse en un tiempo y lugar determinado en el que entra en relación con los procesos económicos, políticos, sociales y culturales que conforman el contexto de su trabajo.

"Proceso consciente, deliberado, participativo implementando por un sistema educativo o una organización con el objeto de mejorar desempeños y resultados, estimular el desarrollo de la renovación en campos académicos, profesionales o laborales y formar el espíritu de compromiso de cada persona con la sociedad y particularmente para a la comunidad en la cual se desenvuelve" (Huberman 1988, citado en Moreno, E. 2002)[4].

"Práctica educativa como experiencia antropológica de cualquier cultura, aquella que se desprende de la propia institucionalización de la educación en el sistema escolar y dentro del marco en que se regula la educación" (Gimeno, citado por Diker y Terigi, 1997:120)[5].

Analizando de un modo más simple, podemos mencionar que, compromete a los sujetos, los que direccionan el proceso de enseñanza y aprendizaje, un espacio (escuela) y un saber (pedagogía). En este caso la práctica asume las diferentes relaciones que se dan en ese contexto, como los procedimientos, estrategias y acciones, estableciendo normatividad y jerarquías en el tiempo y espacio donde se realizan, encaminados según los objetivos a alcanzar, los temas a enseñar, las posiciones y disposiciones de los aprendices, acorde a la unidad didáctica, al currículo y a la filosofía institucional.

Cuando inicialmente nos referíamos a una dialéctica entre maestro y alumno, queremos destacar los roles que se dan en el quehacer pedagógico donde el maestro debe mediar y construir conocimiento

---

[4] Moreno, E. Concepciones de práctica pedagógica, Universidad Pedagógica Nacional.

[5] Ibíd.

matemático, interactuar en la formación de los alumnos, enseñar valores, destrezas generar "chispas" de motivación y construir espacios de aprendizaje y reflexión.

La concepción de ser maestro, es referida a quien motiva, dirige y controla el aprendizaje de manera que los alumnos sean los protagonistas activos del mismo; el rol del maestro cambia así, los nuevos modelos educativos (modelo constructivista por ejemplo) demandan que los docentes transformen su rol de expositores del conocimiento al de monitores del aprendizaje, y los estudiantes, de espectadores del proceso de enseñanza, al de integrantes participativos, propositivos y críticos en la construcción de su propio conocimiento. (Quesada, 2012)[6]

Desde el ámbito formativo práctico, un docente reflexivo se caracteriza por que reconoce la necesidad de comprender y transformar las ideas, las actitudes y las valoraciones de su proyección profesional en su cotidianidad, pero especialmente cuando se enfrenta a situaciones problémicas en el contexto escolar, especialmente en el aula. Un docente reflexivo es aquel que utiliza su conocimiento científico y su capacidad intelectual, para confrontar situaciones inciertas donde se elaboran y modifican rutinas, experimentan hipótesis de trabajo, se utilizan técnicas, instrumentos y materiales, y cómo recrean estrategias e inventan procedimientos, tareas y recursos.

De esta manera el docente debe ser el creador de un apropiado currículo con el fin de que su práctica pedagógica satisfaga las necesidades estudiantiles, y de esta manera tener una visión clara para la integración del currículo teniendo en cuenta los aspectos que permiten un todo armonioso. Según los lineamientos curriculares del MEN, estos aspectos están determinados de tal manera que fortalezcan el quehacer matemático:

- Procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- Conocimientos básicos que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.

[6] Quesada, A. El rol del profesor de matemáticas, monografía electrónica tipo blog.
Disponible en : http://inclusionenelauladiaria.blogspot.com/2012/05/el-rol-del-profesor-de-matematicas.html

Estos *procesos específicos* se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros.

Los sistemas son: sistemas numéricos, geométricos, de medida, de datos y algebraicos y analíticos.

- El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.

Para aprovechar el contexto como un recurso en el proceso de enseñanza se hace necesaria la intervención continua del maestro para modificar y enriquecer ese contexto con la intención de que los estudiantes aprendan. Estas intervenciones generan preguntas y situaciones interesantes que por estar relacionadas con su entorno son relevantes para el estudiante y le dan sentido a las matemáticas. Así es como del contexto amplio se generan situaciones problemáticas.

El currículo según Barrero, Floralba, Mejía, Blanca Susana, (2005)[7] supone convertir los conocimientos específicos de un área del saber y las experiencias con él, en procesos que puedan ser aprendidos por los alumnos, en acciones que responden a una directriz de un programa de formación y por ende a un conjunto de conocimientos que se asumen en una institución educativa. A la acción educativa corresponde articular los diversos componentes de los procesos educativos y los procesos de relación implicados exigen mostrar caminos, a partir de lo existente, esto supone reconocer que la práctica docente requiere del intercambio de sentidos, de diálogos y no de la simple transmisión de información; la práctica pedagógica establece unos objetivos de formación entendida ésta como el proceso mediante el cual se logra la aprehensión, la práctica de los valores morales, políticos, religiosos y de interacción social. El profesor inculca de manera intensa comportamientos, actividades y saberes en condiciones lógicas expresadas en sus prácticas pedagógicas, sin apelar exclusivamente a normas, reglas o códigos. Es por ello, que el docente es precisamente un producto del trabajo pedagógico socialmente determinado, de toda actividad

[7] Barrero Rivera, Floralba, Mejía Vélez, Blanca Susana, La Interpretación de la práctica pedagógica de una docente de matemáticas, 2005, página 90

educativa, difusa e institucional, que tiene por objeto hacer interiorizar modelos, significaciones y en general, las condiciones sociales existente para formar lo que se llama personalidad general y la trasformación de las estructuras cognitivas.

En este sentido mi intención en la práctica pedagógica es reflexionar sobre el proceso de matematización que realizan los alumnos, con el propósito de comprender los aspectos teóricos que influyen en esta competencia algebraica de importancia en la formación matemática integral de todo estudiante en educación media. Así, se pretende generar espacios en los cuales el conocimiento matemático sea construido por los aprendices a partir de situaciones problema que representen su entorno y cultura; y conjuntamente experimentar acerca del conocimiento pedagógico - algebraico que pueda desarrollar en los estudiantes.

1.2 AMBIENTE INSTITUCIONAL

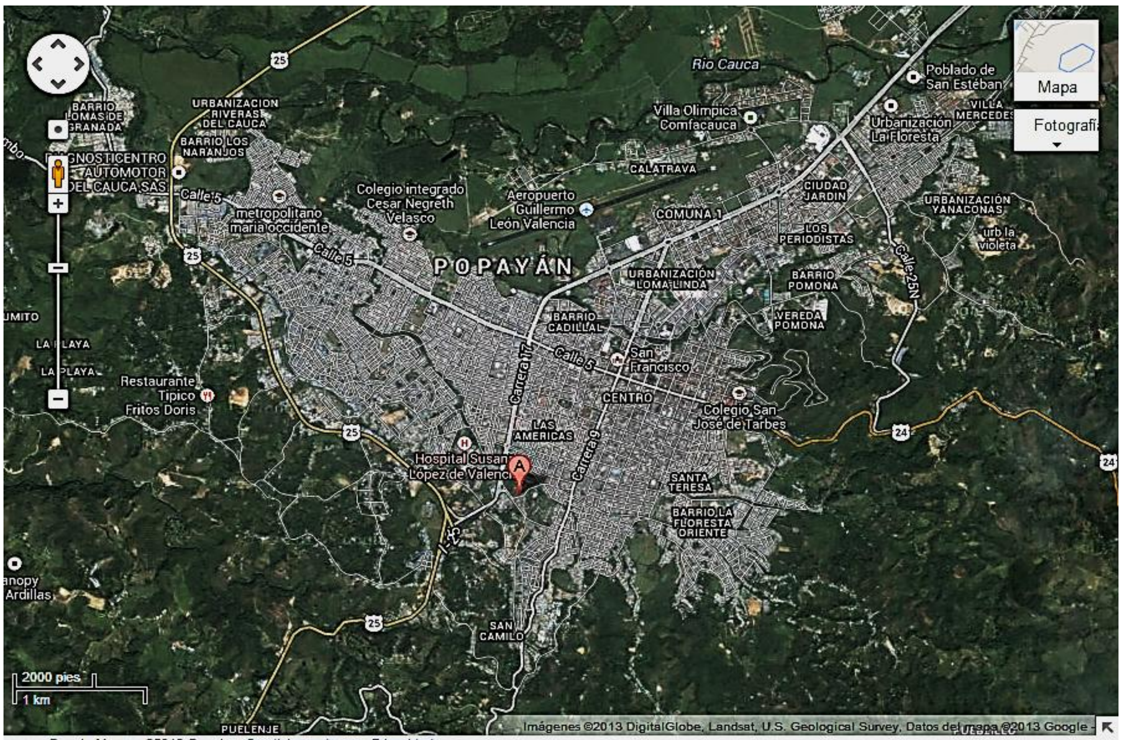
Adentramos al conocimiento institucional donde se realizó esta experiencia formativa y reflexiva, haremos una descripción sobre el énfasis educativo de ésta, como de su posición sociocultural.

La Escuela Normal Superior de Popayán (ENSP), se encuentra ubicada en la comuna 6 de la ciudad de Popayán (ver imagen 1 y 2), cuenta con una amplia zona verde destinada a espacios deportivos y lúdicos, los espacios de infraestructura de aulas en gran parte algo estrechos, para la cantidad de estudiantes que pertenecen a cada curso; estos espacios reducidos hacen que la práctica educativa se torne bastante desventajosa ya que los estudiantes al estar en contacto muy cercano por la estrechez, permiten la fácil distracción de sus compañeros.

Los grados de básica secundaria y media tienen un promedio de 35 estudiantes, son grupos heterogéneos, mixtos y con distintos niveles de aprendizaje, varios de ellos han cursado los grados anteriores en la institución, algunos vienen de otros instituciones educativas y aún de otras regiones del departamento y del país, son jóvenes con deseos de superación, la mayoría proviene de los barrios de la comuna 6.

La comuna seis está conformada por 29 barrios que son: El Pajonal, Santa Fe, La Ladera, San José de los Tejares , Primero De Mayo, Los Comuneros, Manuela Beltrán, El Boquerón, El Limonar, Loma De La Virgen, Sindical I y II etapa, Alfonso López, Caucanito, Gabriel García Márquez, Jorge Eliécer Gaitán, La paz Sur, La Gran Victoria, Santa fe de Bogotá, Los Naranjos sur, Villa Del Carmen, Nuevo Japón, Santa Mónica, Calicanto, Versalles, La Colina, Nueva Granada, Nuevo País, Veraneras.

Imagen 1. Ubicación geográfica de la ENSP



Tomada de Google Maps - GPS satelital online

La comuna 6 de Popayán, es una comuna de una alta densidad poblacional, cuyos estratos más comunes son el 1 y el 2, rodeada de unas condiciones de inseguridad, que caracterizan los barrios más circundantes de la región, alto conflicto social, condiciones de pobreza y desplazamiento forzado de ciudadanos.

Imagen 2. ENSP vista frontal hacia área administrativa

Imagen 3. ENSP vista a los bloques de aulas

La Escuela Normal Superior de Popayán es una institución educativa mixta, de carácter público, laico, dedicada fundamentalmente a la formación de maestros que además del conocimiento pedagógico, brinda a sus estudiantes una preparación que le permita el contacto con la ciencia y la tecnología, la cultura, el fortalecimiento de los valores y la participación en la vida pública.

Filosofía [8]

La Escuela Normal Superior de Popayán como Institución formadora de maestros fundamenta la formación integral en una educación centrada en la persona del estudiante, orientada a partir de la Pedagogía como enfoque y como objeto de conocimiento, pretendiendo formar un individuo participante, crítico, responsable, cuestionador de la realidad que lo circunda el investigador del Saber Pedagógico, Científico, Técnico y Artístico.

Misión

Tener un compromiso institucional se centra en la promoción integral de las personas, la formación y desarrollo de nuevos ciudadanos comprometidos con la región y el país, a través de la Docencia, la investigación y la Proyección a la Comunidad.

Promocionar Normalistas Superiores acreditados para ejercer la docencia en contextos multiculturales y lingüísticamente diferenciados, en los Niveles de Preescolar y Educación Básica Primaria.

Visión

Liderar procesos educativos en el departamento del Cauca, en los niveles de Preescolar y Básica Primaria, mediante el desarrollo de proyectos investigativos, los cuales contribuyan a mejorar la calidad educativa de los grupos sociales de su influencia, soñar mundos posibles y construir nuevas realidades.

En el desarrollo del conocimiento institucional y para efectos de nuestra labor docente, realizamos una lectura sobre el PEI, en lo referente al área de matemáticas, el cual presenta un plan de estudios, centrados de igual manera con una visión, misión y justificación:

[8] www.normalpopayan.edu.co

***Misión*[9]**

Propiciar una formación que le permita al estudiante valorar las matemáticas como ciencia, adquirir seguridad de sus capacidades, resolver problemas, aprender a comunicarse y a razonar experimentando variadas situaciones, relacionadas entre sí, que lo lleven a valorar la actividad matemática, desarrollando hábitos mentales, entendiendo el papel que cumplen las matemáticas en la proyección social y coadyuvar en el fortalecimiento de principios y valores.

Visión

Formación integral del sujeto mediante el fortalecimiento de su estructura mental, pensamiento lógico, crítico-analítico y capacidad de síntesis con el fin de tener una mejor comprensión del mundo que lo rodea y contribuir a la solución de las necesidades de su entorno.

Justificación

Si se parte de la concepción de la Educación Matemática como un sistema complejo y heterogéneo que incluye teoría, desarrollo y práctica relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la justificación del presente plan debe considerar la formación disciplinar, los aspectos pedagógicos-didácticos, la investigación desde la práctica pedagógica y la formación integral del estudiante como persona.

Las discusiones filosóficas sobre la naturaleza de las matemáticas han provocado cambios importantes en las consideraciones sobre lo que debe ser la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de tal manera que se ha propuesto una reconceptualización de la educación matemática que tenga en cuenta la conexión del conocimiento matemático con el origen y la historia de las matemáticas, la vida social del hombre y la práctica misma de las matemáticas.

El conocimiento matemático hoy es considerado en la escuela como una actividad social que debe tener en cuenta al estudiante, por lo tanto, como toda tarea social debe ofrecer respuestas a múltiples intereses que surgen constantemente en el mundo actual, con todo ello el trabajo del educador en matemáticas implica una gran responsabilidad, puesto que las matemáticas son una

[9] Escuela Normal Superior de Popayán, plan de estudios de matemáticas 2011. (Plan vigente para la fecha de nuestra práctica pedagógica)

herramienta intelectual poderosa, cuyo dominio proporciona ventajas intelectuales que permiten contribuir a interpretar y explicar la realidad de ese mundo.

En nuestro acercamiento a esta institución, podemos determinar, cómo se articula el que hacer docente institucionalizado en el ámbito académico. Podemos visualizar una estructura organizada en: Un marco político referente a la educación (ejemplo: Ley general de Educación, lineamientos curriculares, estándares básicos de competencias), seguidos del PEI, planes de estudios por áreas y proyectos pedagógicos de aula.

Para tal caso, citamos aspectos de la *metodología y evaluación*[10] de la ENSP, como componentes del plan de estudios en el área de matemáticas, en los cuales se plantean:

Metodología

Basada en el carácter de la ENSP, como institución formadora de maestros, siguiendo un modelo pedagógico: Activo – Comunicativo, guías de trabajo, diseño de módulos expresados en textos guías, esto permite conformar una herramienta para el trabajo de los bloques temáticos y de la evaluación. En presente y futuro se apoyara fundamentalmente en los elementos de aprendizajes dirigidos, facilitando que el estudiante participe mayoritaria y activamente en la construcción del conocimiento, permitiendo que pueda responsabilizarme como conductor del proceso. En tal sentido, la metodología tiene en cuenta los siguientes aspectos:

1. *Trabajo en casa*
2. *Trabajo en grupo*
3. *Trabajo individual*
4. *Evaluaciones de test:*

   Individuales con el carácter de taller individual, también con libro cerrado o abierto para evaluar globalmente el alcance de los logros y competencias previstos para los temas por bloques temáticos.
5. *Presentación de trabajos e informes*
6. *Articulación con el proyecto pedagógico de aula:*

[10] Ibíd., (pág…)

- Diseño y edición de guías y módulos.
- Elaboración de evaluaciones tipo icfes.
- Continuidad de proyectos colaborativos que se han venido desarrollando:

  Cuyo objetivo es el reconocimiento del contexto de la cuidad, su arquitectura, urbanismo, arte y comercio desde la óptica de las matemáticas, para desarrollar un trabajo interdisciplinario que incluya un proceso lecto-escritor sobre los edificios y lugares históricos de la ciudad y realizar una reflexión de su arquitectura con la formulación de problemas matemáticos que tenga en cuenta su estructura específica.
- Trabajo de recuperación y fortalecimiento de principios y valores.
- Cultura general de las matemáticas.

Evaluación

Según lo concebido en el plan de la institución, la evaluación es un proceso continuo que permite determinar en qué grado se ha producido integralmente modificaciones conceptuales y actitudinales en el estudiante en términos de los objetivos propuestos para el aprendizaje. El aprendizaje se consolida en el estudiante a través de los procesos de asimilación-acomodación, articulando el nuevo conocimiento con los ya posee, reajustando y reconstruyendo ambos conocimientos en este proceso de desequilibrio y equilibrio cognitivo.

Teniendo en cuenta nuestro interés temático e investigativo, ponemos en intersección nuestra idea de evaluación con la propuesta por la ENSP, ya que si nos cuestionamos sobre ¿Qué evaluar? Teniendo en cuenta unas intencionalidades definidas, con el propósito de contar con una idea clara del aprendizaje en relación con unos desempeños y unas competencias determinadas, entonces el proceso de nuestra práctica evalúa los contenidos y el desarrollo de competencias:

1. *Desde los contenidos, el proceso evaluativo, considera:*

a) ***Lo conceptual:*** que evidencie identificación y manejo con propiedad de conceptos.

b) ***Lo procesual****:* que evidencie la aplicación de conceptos en el contexto del saber disciplinar y en la resolución de problemas.
c) ***Lo actitudinal****:* que evidencie el desarrollo de actitudes positivas que contribuyan a fortalecer su aprendizaje.

2. Desde el desarrollo de competencias, el proceso evaluativo de la práctica, considera:

a) ***Competencia interpretativa****:* que evalúa la capacidad para comprender, inferir y deducir.
b) ***Competencia argumentativa****:* que evalúa la capacidad para explicar y razonar.
c) ***Competencia propositiva****:* que evalúa la capacidad para aplicar el saber en la solución de una situación concreta que se le proponga al estudiante.
d) ***Resolución de problemas:*** como situaciones no resueltas cuya solución evalúan la capacidad para interpretar la situación, capacidad para crear un plan y ejecutarlo, y, capacidad para determinar la pertinencia de la solución encontrada. Todo ello como un proceso global de pensamiento a partir del conocimiento científico de las matemáticas.

El plan de estudios en matemáticas de la ENSP, se propone objetivos generales y específicos por niveles; luego se da paso a los desempeños por cursos y finalmente la secuencia curricular que está conformada por bloques temáticos orientados a las competencias y los temas referidos a los objetos de enseñanza.

Para nuestra intervención nos interesaron los temas donde se desarrollan los procesos específicos y sistemas planteados por el MEN en sus lineamientos curriculares, y fueron expuestos anteriormente. Veamos la siguiente tabla, la cual muestra los bloques temáticos con sus respectivos temas, en los cuales vamos a estar ubicados en el primer bloque, para nuestra acción de práctica pedagógica.

Tabla 1. Primeros bloques temáticos del plan de estudios de matemáticas del grado 9°

N°	BLOQUE TEMATICO	TEMAS	N° HORAS
	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y	A. Conceptos básicos B. Sistemas de ecuaciones 2x2	

I	**SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALITICOS (SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS)**	C. Sistemas de ecuaciones 3x3 D. Resolución de problemas.	
II	**PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALITICOS (RADICALES)**	A. Conceptos básicos B. Reducción de radicales semejantes y reducción al mínimo común índice C. Operaciones entre radicales. Suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. D. Racionalización de denominadores radicales.	

Tomada del plan de estudios en matemáticas de la ENSP.

Como podemos ver, la institución en su plan de estudios, se fortalece en el ámbito pedagógico educativo, pues se parte del hecho que ahí se forman individuos para ejercer la docencia, para tal caso se ha conformado un grupo de Didáctica de las Matemáticas, compuesto por docentes especializados en el tema, quienes diseñan y ponen en marcha el documento mencionado.

A manera de reflexión, al estar inmersos en este ambiente institucionalizado, llegamos con la fuerza e intencionalidad de generar espacios de aprendizaje, donde nuestro interés fundamental se traduzca en fomentar el conocimiento matemático, buscando impactar al estudiante sobre la aplicabilidad de esta ciencia en nuestra cotidianidad. Pero la realidad se torna de una manera multidisciplinar donde influyen aspectos como los descritos por Vasco en su octógono, es en ese contexto donde debemos desenvolvernos, ver la necesidades sociales y personales es más que pensar en una institución y un rol docente - estudiante se debe generar un *vínculo familiar* donde nuestro profesionalismo se apersone de la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. Podría decir que dicho vínculo es básico en las condiciones del ejercicio de la docencia, si partimos de un quehacer pedagógico social, que construya conocimiento, este debe estar acorde con nuestro más íntimo deseo de ver el progreso personal de cada aprendiz, que a su vez conformarán el de una sociedad.

El ambiente institucional permite ver la planeación de un conjunto de propósitos, en pro del desarrollo integral de los alumnos; de esta manera se realizan en la ENSP, encuentros denominados de convivencia en el cual se recuerdan manuales para ésta, espacios para dialogo con los padres de familia, la responsabilidad personal y social. En síntesis se fomenta el desarrollo de las inteligencias interpersonales e intrapersonales.

El docente adopta compromisos con la institución de orden académico, curricular y su visión de compromiso social, pero las estrategias metodológicas individuales permiten cierta independencia para estructurar nuestro compromiso de transponer el saber sabio a saber enseñado, de tal manera que se den espacios para reflexionar sobre problemáticas que surjan en ese propósito educativo, y buscar así, cambios metodológicos que den soluciones a dichas problemáticas.

Es así como la práctica pedagógica se adentró al trabajo con los estudiantes del grado 9A de la ENSP, los temas matemáticos sistemas de ecuaciones 2x2, 3x3 y resolución de problemas. El profesor titular de matemáticas fue el Especialista en Educación Matemática Gerardo Ruíz Bravo, miembro del Grupo de Didáctica de las Matemáticas de la ENSP. En mi visita previa al inicio de la intervención directa en la institución se realizaron sesiones de observación en el aula de clase, se analizó la metodología seguida por el docente titular, el espacio académico (infraestructura, recursos tecnológicos), análisis de comportamientos en los estudiante (carencias y fortalezas), participación e interés, problemas conceptuales y complejos. Se optó por continuar una metodología similar a su estilo de trabajo: Sesiones de introducción de temas de enseñanza mediante resolución de problemas y trabajo en grupo, como también, en este proceso de observación me permitió la visualización y posterior diagnóstico del grupo de trabajo.

2. PLANEACIÓN Y METODOLOGÍA DE LA DOCENCIA DIRECTA EN EL AULA

Como estudiante del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca, los cuales tenemos una formación en ciencias matemáticas y educación matemática, que nos encamina a tener un perfil profesional que permite integrar los componentes pedagógicos y sociales en dicha ciencia, en pro de la comunidad en la cual nos desempeñamos; asumimos el compromiso en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas al igual que los problemas en educación que en esta área del saber se presentan, para así estar en condiciones de tomar decisiones que favorezcan a los estudiantes y promuevan sus competencias en matemáticas, cumpliendo con los propósitos de los estándares básicos de matemáticas y el fomento significativo de esta ciencia.

De esta manera las prácticas pedagógicas promueven un espacio en el cual nos aproximamos a la realidad profesional, a partir de un proceso de intervención y reflexión crítica de tal realidad, involucrando el análisis de un objeto de estudio a través de un objeto de enseñanza, y así propender por una capacidad de desarrollar y mantener una actitud de indagación que, enriquecida con las teorías y los modelos investigativos, permitan constantemente la reflexión disciplinada de la práctica educativa y el avance del conocimiento pedagógico y didáctico.

La planeación de nuestra práctica docente, inicia con un proceso de observación, en el grado 8° de la Escuela Normal Superior de Popayán, en el cual se acompañan las sesiones del docente titular, en aras de visualizar su metodología y el proceso de interacción del *sistema didáctico,* donde se pretende analizar posibles problemáticas en el ámbito de la Educación Matemática. Es en este curso, donde se analizó una situación educativa que presentaba conflicto a los estudiantes, relacionada con las competencias algebraicas previstas en los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas del MEN. Para tal caso se logró identificar que frecuentemente había dificultad en la comprensión de los enunciados en lenguaje natural, y traducción al lenguaje algebraico y viceversa, situación que fue de nuestro interés, pues es de gran importancia para el desarrollo de las competencias algebraicas. Esta problemática se constató ya que hicimos parte activa en el desarrollo de las actividades propuestas por el docente titular, actividades del tipo grupales donde se desarrollan talleres de libros de texto o talleres creados por él mismo con enunciados o problemas a resolver mediante métodos algebraicos, específicamente el uso de ecuaciones, los cuales implicaban una traducción del lenguaje vernáculo al algebraico.

En este continuo interés como docentes de matemáticas, podemos ver que los estudiantes de 8° grado de educación media en Colombia al introducirse en el mundo del álgebra, se enfrentan ante el sistema algebraico y su manejo simbólico, porque siempre que hacemos matemáticas, utilizamos algún tipo de representación, ya sea a través del lenguaje natural (oral o escrito) o mediante los símbolos y gráficos propios de las matemáticas. Las dificultades a las que se confrontan los alumnos en la resolución de problemas a través del empleo del lenguaje algebraico, se presentan al tener que leer o escribir en el sistema matemático de signos algebraicos, cuando han venido recibiendo constantemente una instrucción en otros Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) como el aritmético. De acuerdo a los estudios realizados por Filloy (1999): "*Cuando se le pide al alumno escribir con el uso de un SMS oraciones escritas en lenguaje natural, él requiere de atribuirle un significado a la frase dada antes de proceder a simbolizarla, aquí, si el estudiante muestra una inconsistencia en las diferentes interpretaciones de la frase, esto conllevara a una simbolización errónea de la misma."*[11]

Para centrarse en la modelación, es de mucha relevancia, la forma cómo los estudiantes traducen el enunciado del problema a la expresión algebraica que permite su solución, ya que según el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998): *los procesos de modelación tienen que ver con el nivel de lenguaje de los niños; a veces el lenguaje facilita o retarda la comprensión de la realidad.* Es decir el lenguaje es el puente que va a permitir modelar la realidad.

Es claro que, si el alumno no puede llevar a cabo esta traducción, no podrá llegar al modelo matemático que representa al problema, es decir, la traducción es una de las habilidades básicas en el proceso de contextualización.

Por la importancia que reviste esta etapa en la matemática en el contexto de las ciencias y en el entendimiento de la misma matemática, así como en la formación cultural del estudiante, nuestra

[11]Filloy, E. Aspectos teóricos del algebra educativa, citado por: Bonilla, Maricela. Del lenguaje natural al lenguaje simbólico: un estudio con alumnos de secundaria en la resolución de problemas verbales. 2009, Pág. 2.

intervención en el aula se centra en este elemento básico del bagaje matemático, como lo es *la matematización*, concepto que ampliaremos en el capítulo 3 destinado al marco teórico.

Teniendo en cuenta el espacio ofrecido por el docente titular, nuestra intervención en el aula se realizó en el curso posterior al 8°, es decir el 9° que mantiene la continuación de las competencias algebraicas, dicho curso mantenía en gran parte los mismos alumnos del grado anterior, salvo algunos estudiantes extras en calidad de repitentes y otros bastante "hiperactivos" que generaban un ambiente de indisciplina en el aula. Es de esta manera como se empieza a vislumbrar nuestra acción docente de forma tal que fuese acorde a la capacidad de mantener la atención e interés de los educandos; para ello se realiza un seguimiento previo a nuestro acoplamiento con el docente titular, para poder identificar los comportamientos de los estudiantes, sus falencias, gustos y modos de participación.

Así, partiendo con nuestra base, que es el objeto de enseñanza plasmado en plan de estudios del grado 9° de la ESNP[12] , y además lo diverso del grupo, se implementa una metodología basada en actividades donde se usan juegos, tecnología con software para realizar gráficas, talleres grupales donde cada alumno desempeñe un rol y *clases magistrales*[13]participativas (el estudiante es parte activa de la sesión, preguntas y salida de tablero), pues consideramos que ciertos temas necesariamente requerían de clases magistrales, pues nuestra intervención pedagógica se realiza en el cumplimiento uno de los desempeños y competencias planteadas en los estándares básicos de competencias matemáticas del MEN, donde se pretende que los alumnos: *Demuestren habilidades y destrezas en la resolución de sistemas de ecuaciones 2x2 y 3x3 y aplicación a la resolución de problemas*; y además por cumplimiento de los objetivos académicos diseñados por la institución en su plan de estudios.

En la implementación de las actividades apuntamos nuestro foco de atención a la argumentación explicativa que dan los estudiantes sobre sus respuestas cuando interpretan enunciados y problemas en lenguaje natural y su posterior representación algebraica. Para poder acotar nuestra mirada específica a un grupo de alumnos se escogen de un total de 36, 11 de ellos, conformando un grupo entre hombres y mujeres, de bajo y alto rendimiento académico, esto se decide pues se tiene

[12] Plan de Estudios de Matemáticas de la Escuela Normal Superior de Popayán, 2011.
[13] Entiéndase estas *clases magistrales(o método expositivo)*, como aquellas, en las cuales el docente transmite el conocimiento de manera conductista, se imparten técnicas y procedimientos para la resolución de sistemas de ecuaciones. Ej.: Método de Cramer.

conocimiento previo de sus actividades individuales, constatadas en el proceso de observación realizado con antelación, y de la asesoría sobre el desempeño de los alumnos que posee el docente titular.

Imagen 4. Grado 9° años lectivo 2012, aula con espacio reducido

Teniendo en cuenta el entorno estrecho del aula, donde los estudiantes están muy cerca el uno del otro, llevando a distraerse fácilmente; lo numeroso del grupo y la diversidad de pensamientos y comportamientos, es de nuestro interés iniciar con actividades que mantengan la atención centrada en cada sesión, de manera grupal donde cada uno de los participantes desempeñe un rol; con el propósito de hacer que se involucren en los temas tratados, esto con el fin de que si se presentan errores, el docente corregirá constantemente, para que ellos puedan aprender de éstos y así fortalecer al grupo en las debilidades técnicas o conceptuales de conocimientos previos o del objeto de enseñanza tratado.

Para nuestra intervención docente se elabora un plan de acción plasmado en una tabla denominada: Matriz de Planeación de Docencia (tabla 3) la cual se organiza de acuerdo al plan de estudios institucional, organizado con bloques temáticos que reúnen: las competencias a desarrollar y los temas que permitirán relacionar el objeto de enseñanza con el aspecto metodológico; además los recursos materiales a utilizar en nuestra práctica pedagógica. La metodología permitirá el desarrollo temático y la recolección de registros para nuestro objeto de estudio, que a su vez dará paso a la estructuración de los objetos de enseñanza.

Veamos nuevamente una parte de la organización del plan de estudios en matemáticas de la ENSP:

Tabla 2. Bloque temático donde se desarrolla la práctica

Periodo N°	**BLOQUE TEMATICO**	**TEMAS**
I	**Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos(sistemas de ecuaciones simultaneas)**	A. Conceptos básicos B. Sistemas de ecuaciones 2x2 C. Sistemas de ecuaciones 3x3 D. Resolución de problemas

Tomada del plan de estudios en matemáticas de la ENSP

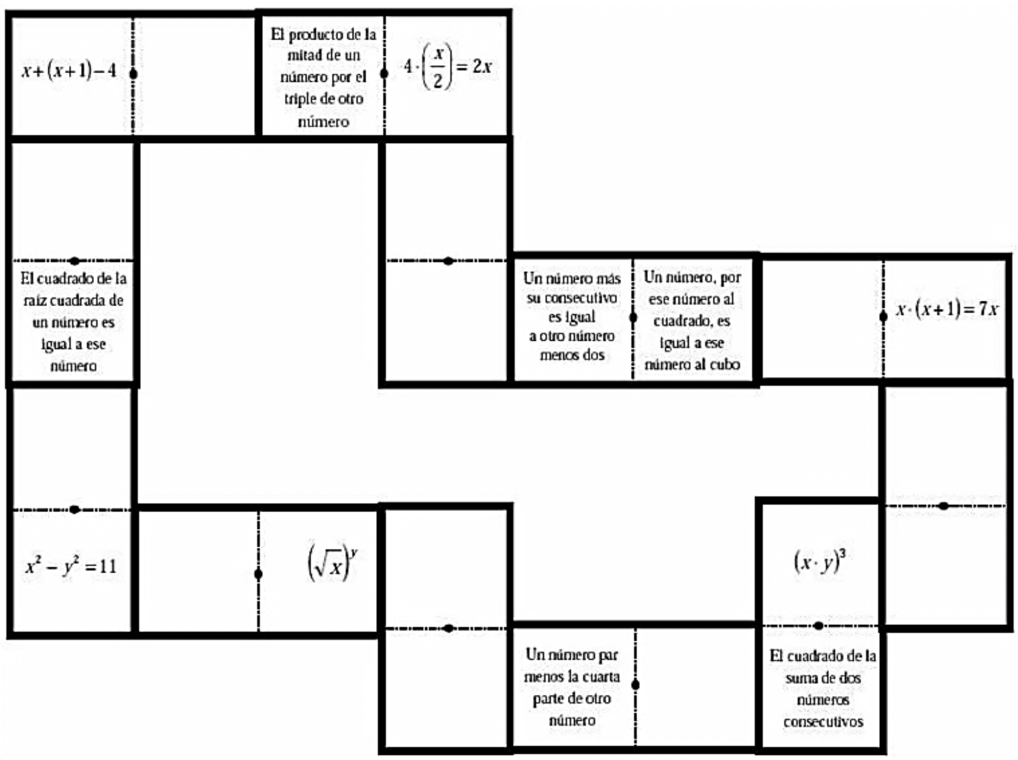
Nuestro trabajo docente se inicia con la intervención de aula a partir el tema B de la tabla 2, con lo que está previsto terminar en el tema D; pero dada nuestra necesidad metodológica de relacionar el trabajo propositivo y argumentativo de los estudiantes con respecto a la creación de un modelo matemático, lo cual hace parte de nuestro objeto de estudio; se hace uso de sesiones de introducción de temas de enseñanza mediante resolución de problemas, esto me va a permitir registrar, paso a paso la traducción de los enunciados o problemas planteados en aras de describir el proceso de la matematización que realizan los estudiantes.

Las actividades propuestas, se crean con el fin de mantener la motivación en los estudiantes, la participación y el interés en el desarrollo matemático. Dichas actividades se basan en los temas y subtemas que se derivan de los propuestos en el plan de estudios; así para abarcar los temas se construyen los siguientes talleres y actividades:

- Inicialmente un juego denominado ***dominó algebraico*** en el cual se presentan enunciados matemáticos en el lenguaje natural como algebraico, a manera de nivelación y de analizar la capacidad interpretativa que posee cada muestra; es decir cómo comprenden y representan una expresión verbal algebraicamente y viceversa. (Ver anexo 1)

Se considera que el análisis de los procesos de traducción en los dos sentidos pueden ser de utilidad para: (a) profundizar en la comprensión que poseen los estudiantes del lenguaje simbólico y ayudar en la exploración de estrategias de enseñanza en el aprendizaje del álgebra y (b) indagar sobre las dificultades que tienen para escribir simbólicamente aquello que pueden encontrar enunciado de forma verbal.

Imagen 5. Domino algebraico, etapa I, donde deben escribir la correspondiente representación algebraica o verbal



Fuente: Rodríguez, D. Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólica por estudiantes de secundaria. Departamento de didáctica de la matemática, Universidad de Granada, España, 2011.

- ***Cuatro talleres con resolución de problemas***, los cuales abarcaron los temas de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 (Métodos gráfico y algebraicos) y solución de sistemas de ecuaciones 3x3 método de los determinantes (o Cramer). Específicamente: La solución de sistemas 2x2 método gráfico (Taller 1 y 2: ver anexos 2 y 3) acompañado del software computacional Geogebra y diapositivas animadas en Power Point para mostrar las interpretaciones gráficas de dicho método; métodos algebraicos de sustitución, igualación y eliminación (Taller 3 y 4: ver anexos 4 y 5) y método de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones 3x3 (Taller 5: ver anexo 6). Estas sesiones se desarrollan de manera instructiva por parte del docente, en el cual el estudiante sigue las pautas, y otras de manera constructiva por parte de los alumnos. La resolución de problemas me debe permitir recoger información sobre las dificultades que se presentan en el proceso de la matematización, pues se deben identificar y organizar elementos conceptuales que intervengan en dicho proceso.

- ***Actividad juego ecuacartas:*** que consiste en agrupar 3 cartas correspondientes a un mismo problema, pero integrando diversos sistemas de representación: Lenguaje verbal, algebraico, y representación geométrica. Esto con el fin de analizar la capacidad de relación entre los 3 sistemas, para nuestro análisis, entre los lenguajes verbal y algebraico.

  Los estudiantes deben usar papel milimetrado para realizar la gráfica correspondiente al sistema de ecuaciones 2x2; y de esta manera constatar que la carta escogida en su representación geométrica, es la correcta.

  Para registrar elementos relacionados con la matematización se crean unas reglas de juego plasmadas en una guía la cual deben de responder paso a paso. Además se les facilita en otra guía pautas que servirán para justificar el porqué de la escogencia del sistema algebraico.(Guía 1 y 2: ver anexo 8)
- ***Actividad igualdad y equivalencia*:** Taller con la cual se pretende hacer un análisis de la apropiación de conceptos que intervienen en el objeto de estudio, esto con el propósito de buscar implicaciones y dificultades que surgen de erróneas conceptualizaciones.(Ver anexo 9)

La actividad pretende, entrenar a los alumnos, en la comprensión de la equivalencia que debe darse en la igualdad. El signo "=" (igual) indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo, primer miembro de la igualdad, y lo que se encuentra a la derecha de este signo, llamado el segundo miembro de la igualdad, son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo.

Se busca que ellos traten de realizar los siguientes aspectos:

- Que usen diferentes maneras para representar números naturales, para encontrar la relación entre igualdad de cantidades,
- Que identifiquen cuando los miembros de una igualdad son equivalentes,
- Que logren representar mediante un modelo grafico (balanza) dos expresiones equivalentes.
- Si logran identificar alguna acepción del concepto de variable en el desarrollo de la actividad.

En estas actividades se crearon espacios para la toma de registros, teniendo en cuenta los argumentos que cada muestra aporta al objeto de estudio, que es ***la matematización***.

En el desarrollo de este plan metodológico, se afrontaron dificultades de orden institucional que cortaban el flujo constante de intervención en el aula, pues dicha institución frecuentemente realiza actividades previstas en el PEI, entre ellas están: jornadas cívicas, concentración por cursos para recordar manuales de convivencia, reuniones de docentes con lo cual no citan a las actividades escolares, días recreativos(denominado "jean day"), donde los alumnos van con esta clase de ropa generalmente deportiva, para participar de bailes, comparsas, juegos, dinámicas grupales como yincanas , encuentros deportivos, artes, música, siembra de árboles, etc.

Este hecho implicó un bajo ritmo de las actividades, las cuales se hacían repetitivas, pues algunas previstas para dos sesiones juntas se interrumpían, lo que implicaba una continuación en varias sesiones de una misma actividad, cosa que no fue del agrado de los alumnos, para tal caso se rediseñan las actividades, que sean cortas y especificas a nuestro proceso de análisis.

En la praxis nos encontramos con una realidad distinta a la prevista, por esta razón siempre se debe tener un orden curricular bien definido(o diversos planes), siendo previsivos a eventualidades, que bloqueen la acción pedagógica.

Respecto a dificultades de aula que sesgaban nuestro interés pedagógico, se presentaba el caso donde algunos estudiantes considerados de bajo rendimiento académico no daban avances consecutivos, se quedaban perplejos, al no comprender lo que tenían que resolver o analizar, pues no atendían las instrucciones dadas por el docente practicante, esto sucedía con frecuencia en estudiantes repitentes que formaban grupos sociales de indisciplina, el reto era captar su atención, cosa que se fue logrando al introducir problemas en contextos evocados de la realidad, y el uso de tecnología , el computador, video beam, software geométrico, juegos con cartas y dominós algebraicos.

Respecto a las clases magistrales, fue de mucha utilidad la estrategia usada por el docente titular, en la cual se hacía de manera participativa con los alumnos, llevando a una tendencia de mantener su atención constante ante posibles preguntas y salidas de tablero, todo esto en una dinámica de trabajo participativo donde se respetan las opiniones, se aprenden de los errores y se da un espacio para las bromas sutiles.

PLAN DE PREPARACIÓN DE LA DOCENCIA
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYÁN
GRADO 9A
Primer Periodo 2012

Tabla 3 - Matriz de Planeación de Docencia.

Tema	Subtemas	Objetos de enseñanza	Metodología			Observaciones
			Actividades	**Tiempo**	**Recursos**	
Solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2	**Solución de sistemas de ecuaciones lineales: método gráfico**	a) Establecer una relación funcional de las variables y presentarlas de manera sintética en una gráfica. (b) Modelar algebraica y gráficamente situaciones con sistemas de ecuaciones lineales.	**Actividad 1:** Con base en una situación problema: • Relacionar las funciones lineales mediante un sistema de representación tabular, para luego propender con el análisis de los datos de la tabla a una representación algebraica con las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. • Conformado el modelo algebraico en un sistema de ecuaciones, plantear la solución grafica de los sistemas de	1 hora y 45 min	Taller 1 y 2 con problema planteado; Papel traslucido(o papel pergamino, la idea inicial eran acetatos), tijeras, marcadores de punta fina y tinta permanente, pegamento.	Actividad planteada de manera estructural, e integradora de las distintas formas de representación de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, con base en la resolución de problemas que conducen a este tipo de sistemas. **Papel translucido súper puestos**: Material para comprender y detectar la solución de un sistema de ecuaciones 2x2, mediante método gráfico. Se traza en dos hojas distintas (una cuadriculada otra en el papel pergamino); la gráfica de las rectas representadas en cada ecuación lineal y con base a un mismo eje de plano cartesiano, se superponen, esto indicara el punto de

			ecuaciones lineales 2x2.			intersección de las dos rectas, y a su vez la solución del sistema.
Tema	**Subtemas**	**Objetos de enseñanza**	**Metodología**			**Observaciones**
			Actividades	**Tiempo**	**Recursos**	
Solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2	**Solución de sistemas de ecuaciones lineales: método gráfico**	(a) Aplicar el método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales; (b) Comprender la solución grafica a través de la representación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales.	**Actividad 2:** Interpretación de la solución grafica de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Analizar la posición de las rectas, que representan cada una de las ecuaciones del sistema, para determinar la solución: 1. Si las rectas están paralelas y coinciden (**Infinitas soluciones, consistente)** 2. Si las rectas son paralelas y no coinciden **(no hay solución, inconsistente)** 3. Si las rectas, coinciden en un punto(**Única solución**)	1 hora y 45 min	Taller 1 y 2 con problemas planteados; Marcadores de colores y borrador; Uso de video beam, para presentación en Power Point; Computadora portátil; Software Geogebra.	Resolución de problema planteado en taller 1 usando visualización grafica con el software Geogebra; además Power Point se introduce con una presentación animada (Anexo en CD) (contiene ejercicios de taller 2) de la resolución de sistemas 2x2 mediante método gráfico, aquí se presentan las interpretaciones que se deben hace al observar el comportamiento de las rectas (paralelas y no paralelas), las cuales representan cada una, su respectiva ecuación lineal.

SESIONES COMPLEMENTA-RIAS RELACIONADAS CON EL OBJETO DE ESTUDIO.			**Actividad 3: Ecuacartas, espacio en el cual deben relacionar los diversos sistemas de representación: Lenguaje natural – lenguaje algebraico – lenguaje gráfico. Se forman grupos los cuales deben relacionar las 3 cartas correspondientes.**	1 hora y 45 min	Grupos de cartas con enunciados equivalentes en los 3 sistemas de representación descritos; Papel milimetrado	Generar un ambiente lúdico, diferente a los espacios tradicionales. Además con esto se genera una relación de equivalencia entre los tres sistemas de representación.
			Actividad 4: Igualdad y equivalencia, Taller con la cual se pretende hacer un análisis de la apropiación de conceptos que intervienen en el objeto de estudio, esto con el propósito de buscar implicaciones y dificultades que surgen de erróneas conceptualizaciones.	1 hora y 45 min	Taller con gráficos.	Se busca que ellos traten de construir los siguientes aspectos: - Que usen diferentes maneras para representar números naturales, para encontrar la relación entre igualdad de cantidades, - Que identifiquen cuando los miembros de una igualdad son equivalentes, - Que logren representar mediante un modelo grafico (balanza) dos expresiones equivalentes, - Si logran identificar alguna acepción del concepto de variable en el desarrollo de la actividad.

Tema	Subtemas	Objetos de enseñanza	Metodología			Observaciones
			Actividades	Tiempo	Recursos	
Solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2	**Solución de sistemas de ecuaciones lineales método de sustitución e igualación.**	1. Modelamiento de problemas en contexto evocado, transito lenguaje natural – lenguaje algebraico. 2. Aplicar el método de igualación para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.	**Actividad 5:** Planteamiento de una situación problema, en la cual su solución gráfica, no permita determinar con exactitud la solución del problema, con lo cual se deba recurrir a métodos algebraicos para su solución. Analizar cuando se resuelve un **sistema por método de igualación**, que al igualar las dos ecuaciones se presentan en los resultados dos casos especiales: **Caso 1:** Se obtiene la expresión a ≠ b. En este caso el sistema no tiene solución y se denomina **inconsistente.** **Caso 2:** Se obtiene la expresión a = a. Significa que el sistema tiene infinitas soluciones y es llamado **dependiente.**	1 hora y 45 min	. Taller 3 con situación problema y gráficos relacionados con la situación; Marcadores de colores y borrador.	Problema en contexto evocado, el cual requiere un análisis semántico más complejo, pues se deben interpretar datos implícitos en la situación planteada. La actividad pretende seguir paso a paso el proceso de matematización.

Tema	Subtemas	Objetos de enseñanza	Metodología			Observaciones
			Actividades	Tiempo	Recursos	
Solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2	Solución de sistemas de ecuaciones lineales método de eliminación.	1. Modelamiento de problemas en contexto cotidiano, transito lenguaje natural – lenguaje algebraico. 2. Aplicar el método de eliminación para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. 3. Establecer una equivalencia metódica entre los métodos de solución por igualación y eliminación, para obtener soluciones de los problemas.	**Actividad 6:** Usando la situación problema de la actividad anterior, u otra distinta, recurrir a un método algebraico equivalente para resolver el problema. Analizar cuando se resuelve **un sistema por método de eliminación**, que al transformar las dos ecuaciones en una sola se presentan dos casos especiales: **Caso 1:** Se obtiene la expresión 0 = constante (diferente de cero). En este caso el sistema no tiene solución y se denomina **inconsistente.** **Caso 2:** Se obtiene la expresión 0 = 0. Significa que el sistema tiene infinitas soluciones y es llamado **dependiente.**	1 hora y 45 min	Taller 4 con situación problema; Marcadores de colores y borrador.	Problema referido a juegos de video, contexto evocado, con el fin de captar la atención de los estudiantes. Analizar interpretación del enunciado y su representación algebraica.

Tema	Subtemas	Objetos de enseñanza	Metodología			Observaciones
			Actividades	Tiempo	Recursos	
Solución de sistemas de ecuaciones lineales 3x3.	**a) Matrices y determinan-tes,** **b) Regla de Sarrus.**	Introducción al concepto de matriz; Identificar una matriz en el sistema de ecuaciones lineales 3x3, hallar el determinante de una matriz cuadrada de orden 3.	**Actividad 7:** Reconocimiento de problemas que necesitan más de dos incógnitas para expresar, en lenguaje algebraico, las condiciones de la situación. En tales casos plantear tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que conforman un sistema 3x3.	1 hora y 45 min	Marcadores de colores, borrador. Apoyo de Taller 6: Situación que da inicio del concepto de matriz; Software para cálculo de determinantes; Texto Escolar	Actividad para afianzar *mecanismos*, técnicas, y conceptos repasando algoritmos de cálculo y verificando soluciones.
	c) Regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 3x3	Solucionar un sistema de ecuaciones lineales 3x3 mediante el método de Cramer.	**Actividad 8:** Con base al planteamiento algebraico de la situación problema anterior, introducir los conceptos de matriz cuadrada de orden 3 y determinante de la matriz, para calcular los valores del sistema de ecuaciones 3x3.	1 hora y 45 min	Taller 5: planteamiento de problemas para resolver a través de la regla de Cramer.	

3. OBJETO DE ESTUDIO Y MARCO TEÓRICO

3.1 OBJETO DE ESTUDIO

En el capítulo anterior, destacamos la relevancia del proceso de traducción de enunciados del lenguaje natural al algebraico, como parte de las competencias algebraicas indispensables en la formación matemática, en este sentido es de interés el *objeto de estudio* denominado: ***El proceso de matematización que realizan estudiantes del grado 9-A de la escuela normal superior de Popayán, año lectivo 2012, en problemas algebraicos***, como parte de nuestra práctica pedagógica formativa.

Lo anterior teniendo en cuenta, que si se considera una problemática educativa a analizar, en la cual podamos confrontar la teoría con la práctica educativa, tendremos un espacio enriquecedor de aprendizaje y reflexión sobre el fenómeno previsto, y en este sentido el problema se concibe como:

> "*La descripción de un objeto o de un fenómeno con el propósito de identificar, definir o analizar las características o propiedades de este objeto o fenómeno. Se pretende representar las características fundamentales y más relevantes de las cosas, fenómenos o personas, las cuales posibiliten la identificación posterior del objeto descrito".* (Cerda, 2004)[14]

En nuestro caso el fenómeno a describir y a analizar sus características es: *El proceso de matematización en relación a problemas algebraicos en contextos evocados y matemáticos.*

Para lograr adentrarnos en el ámbito teórico de este objeto de estudio, hacemos una reflexión sobre su relevancia.

El interés por conocer en profundidad el pensamiento de los estudiantes que se inician en el aprendizaje del álgebra ha llevado a que se realice este análisis; con el fin de estudiar las interrelaciones del lenguaje natural con el lenguaje algebraico. Lo anterior en razón que se hace

[14] Cerda G., H. Hacia la construcción de una línea de investigación. Seminario – taller. Bogotá, Editorial Universidad Cooperativa de Colombia, 2004. Pág. 38.

evidente la influencia que éste último aspecto, tiene en la construcción de la sintáxis algebraica y el uso que los alumnos hacen de ella en la resolución de problemas presentados en contexto evocado o matemático. En efecto, uno de los propósitos del estudio de las matemáticas es propiciar en los aprendices el desarrollo de nociones y conceptos que les sean útiles para comprender el entorno y les permita resolver problemas, es decir alcanzar las competencias matemáticas referentes al algebra que aportaran a su formación integral.

3.1.1 La matematización

Inicialmente veamos cómo se va a entender la matematizacion en este trabajo de práctica pedagógica. Partiendo de lo que se considera el proceso de la modelación matemática; veamos esto con el siguiente ejemplo tomado de PISA, 2006: [15]

…….. "Por motivos de salud se recomienda que, al realizar un esfuerzo, la práctica de un deporte, por ejemplo, no se exceda de una determinada frecuencia cardíaca. Durante muchos años, la relación entre la máxima frecuencia cardíaca recomendada y la edad del individuo se describió mediante la siguiente fórmula:

Máxima frecuencia cardíaca recomendada = 220 – edad

Las últimas investigaciones, sin embargo, indican que esta fórmula debe ser modificada ligeramente.

La nueva fórmula es la siguiente:

Máxima frecuencia cardíaca recomendada = 208 – (0,7 x edad)

Las preguntas de esta unidad giran en torno a la diferencia entre las dos fórmulas y el modo en que estas afectan al cálculo de la máxima frecuencia cardíaca recomendada.

[15] Organización para la cooperación y el desarrollo económico, OCDE. PISA, Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura, 2006. Pág. 76.

Este problema puede solucionarse siguiendo la estrategia que suelen emplear los matemáticos, que en este marco se denominará modelación. La modelación se puede caracterizar atendiendo a cinco aspectos esenciales:"

- Se inicia con el proceso matematizador o de matematización con un problema situado en la realidad. (Nuestro análisis se realiza en contextos evocados de la realidad)

  " Como deja claro el ejemplo, en este caso la realidad es la salud y la buena forma física. Una de las reglas básicas a la hora de hacer ejercicio es que se debe realizar con cuidado y sin forzarse, pues un esfuerzo excesivo puede causar problemas de salud. La pregunta nos alerta sobre este tema estableciendo un nexo entre la salud y la frecuencia cardíaca y mediante la mención a la existencia de una máxima frecuencia cardíaca recomendada"

- En el segundo paso, la persona que desea resolver el problema trata de identificar las matemáticas pertinentes al caso y reorganiza el problema según los conceptos matemáticos que han sido identificados.

  " está claro que el alumno tiene ante si dos fórmulas lingüísticas que deben ser comprendidas y que se pide que compare las dos fórmulas y trate de establecer cuál es su significado en términos matemáticos. Las formulas establecen una relación entre la máxima frecuencia cardiaca aconsejable y la edad de una persona."

- El tercer paso implica una progresiva abstracción de la realidad mediante una serie de procesos, como la elaboración de supuestos, la generalización y la formalización, mediante los cuales se destacan los rasgos matemáticos de la situación y se transforma el problema del mundo real en un problema matemático que reproduce de manera fiel la situación.

  " Existen diferentes modos de abstraer la realidad, estos es, de formular el problema en términos estrictamente matemáticos. Uno de ellos consiste en traducir las formulas lingüísticas a una expresión algebraica más formalizada, como: $y = 220 - x$ o $y = 208 - 0{,}7x$. Evidentemente, el alumno no debe olvidar que y representa la máxima frecuencia cardiaca, expresada en latidos por minuto, y que x representa la edad, expresada en años. Otra forma de acceder a un universo estrictamente matemático consistiría en dibujar directamente los gráficos resultantes representarían dos líneas rectas. Como los gráficos tienen pendientes distintas, las dos líneas se intersecarían."

  Estos tres pasos nos llevan desde el problema del mundo real al problema matemático.

- El cuarto paso consiste en resolver el problema matemático.
- Se confiere, o da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las posibles limitaciones de la solución.

En primer lugar la modelación, implica traducir el problema en contexto, a un sistema, de representación matemático. Este proceso incluye diversas acciones como:

- *Identificar los elementos matemáticos pertinentes al problema situado en la realidad.*
- *Representar el problema de una manera distinta; lo cual comporta, entre otras cosas, organizarlo de acuerdo con los conceptos matemáticos pertinentes y plantear los supuestos adecuados al caso.*
- *Comprender las relaciones existentes entre el lenguaje del problema y el lenguaje formal y simbólico que se necesita para comprenderlo en términos matemáticos.*
- *Encontrar regularidades, relaciones y patrones.*
- *Reconocer los aspectos que son isomórficos respecto de otros problemas conocidos.*
- *Traducir el problema a términos matemáticos, es decir, a un modelo matemático.(PISA, 2006)*[16]

Al proceso anterior lo denominaremos *matematización del problema*. Es decir traducir del lenguaje natural al matemático, hasta obtener un *modelo matemático* (entendemos dicho modelo: *Como la representación de un fenómeno real o un contexto evocado, basada en relaciones matemáticas*.)

En este sentido Luis Rico[17], afirma que hacer matemáticas implica más que la simple manipulación de símbolos matemáticos; implica *matematizar* (o sea, cuantificar, visualizar o coordinar) sistemas estructuralmente interesantes, implica utilizar un lenguaje especializado, símbolos esquemas, gráficos, modelos concretos u otros sistemas de representación para desarrollar descripciones matemáticas, o explicaciones, o construcciones que permitan plantear predicciones útiles acerca de tales sistemas.

---

[16] Ibíd. Págs. 99 – 100.
[17] Citado por: Lesh, R. La matematizacion: La necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. Universidad de Massachusetts – Dartmouth, Revista Enseñanza de las Ciencias, 15 ed. 1997. Pág. 378.

3.2 MARCO TEÓRICO

Para hacer un análisis descriptivo del proceso de matematización se consideran referentes teóricos históricos, lingüísticos, contextuales y pedagógicos; donde algunos de ellos resaltan la relevancia del análisis que se pretende realizar a nuestro objeto de estudio, tales como el histórico, la educación matemática realista, algebra escolar y el papel del lenguaje en la resolución de problemas; los demás referentes nos permiten hacer lectura de registros.

3.2.1 Algebra en sus inicios históricos

En cuanto al origen histórico del álgebra es importante observar que su aparición ha respondido a necesidades de generalización y a la imposibilidad de resolución de problemas con métodos conocidos. El álgebra clásica nace como generalización de la aritmética, para la resolución de ecuaciones y el estudio de las operaciones y sus propiedades. Es de destacar el carácter progresivo de la aparición de los métodos algebraicos en la historia de las matemáticas, distinguiendo tres grandes etapas:

- *"**Álgebra retórica:** en este caso se apela al lenguaje habitual o natural para los desarrollos teóricos. No aparece ningún tipo de simbolismo particular para designar los elementos con los cuales se opera. En este periodo ya se resolvían ecuaciones lineales y cuadráticas por métodos exclusivamente aritméticos, aún distantes del pensamiento algebraico posterior.*
- ***Álgebra sincopada:** Se distingue en varios momentos, uno inicial en el que se combina el lenguaje natural con alguna simbología especial, se introducen algunas abreviaturas y nombres para ciertos conceptos matemáticos y otro en el que se intenta un proceso de generalización de problemas con un uso mayor o menor de*

este incipiente simbolismo para la resolución de los mismos. Corresponde a una fase intermedia entre lo retórico y lo simbólico.

- ***Álgebra simbólica****: Los objetos se sustituyen por símbolos especiales y las operaciones se instauran según sus propiedades. Comienza con Vieta (1540 – 1603), su contribución más importante se realiza en el terreno de la simbolización algebraica, con la introducción de los signos literales para los coeficientes. Es la primera distinción manifestada en la historia del algebra entre los conceptos de parámetro (representado por vocales -a, e,…) e incógnita, representada por consonantes -m, p,… Su pensamiento, aún más cerca de los planteamientos geométricos antiguos que del álgebra moderna, demuestra un interés por la matemática distinto al de sus contemporáneos, más preocupados por los aspectos prácticos de la misma. Vieta puso las bases para que, después de él, Descartes (1596-1650) y Newton (1643-1727) aplicaran el álgebra a la geometría y viceversa, así los matemáticos comenzaron a usar las nuevas entidades simbólicas y a operar con ellas como si fuesen cantidades reales. "(Recalde, 2011)*[18]

Con este recorrido histórico se puede resaltar que a través de los tiempos, los seres humanos han intentado tecnificar de alguna manera, la forma de resolver problemas de la vida real, haciendo uso inicialmente de la retórica, luego pasando a una simbología especial no formal, y luego a un lenguaje formal, que contiene sintaxis y semántica, propia, como lo es el lenguaje algebraico actual. Esto nos permite reflexionar sobre la importancia que ha tenido este proceso durante muchos años, con lo cual la creación de dicho lenguaje ha facilitado el tratamiento y resolución de los problemas. Así que el aprendiz revive estas etapas cronológicas en un currículo preestablecido y diseñado, en el cual el docente es participe y dirige la apropiación de esta competencia, dando pautas para su desarrollo.

[18]Recalde, L. Lecturas sobre la historia de la matemática; Cuarta lectura: Las raíces históricas del álgebra: Diofanto y Al-Khowarizmi. Universidad del Valle. 2011. Pág. 1.

3.2.2 Algebra escolar

Según Palarea (1998)[19] El álgebra como materia escolar se introduce a finales del siglo XIX en los niveles de secundaria en los países europeos y americanos. Los cursos iníciales de álgebra cubrían temas como la simplificación de expresiones, el planteamiento y resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, la aplicación de estas técnicas a la resolución de problemas, y la práctica con razones, proporciones, potencias y raíces.

Actualmente los programas de estudio del álgebra incluyen temas como las propiedades de los números reales y complejos, el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado en una incógnita, la simplificación de expresiones polinómicas y racionales, la representación simbólica de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, junto con sus gráficas y el estudio de series y sucesiones.

La mayoría de los cursos de álgebra en diferentes países comienzan con los términos literales y su relación con referentes numéricos dentro del contexto, primero de expresiones algebraicas y luego de ecuaciones. Después de un período breve donde se efectúan sustituciones numéricas tanto en expresiones como en ecuaciones, se pasa a la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones por los métodos formales. Ocasionalmente algunos programas incluyen el trabajo con funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas en sus representaciones algebraicas, tabulares y gráficas; y se entremeten problemas de palabras, con los que se pretende hacer aplicaciones "de la vida real", para ser resueltas por medio de las técnicas recién aprendidas. Estos suelen ser los contenidos que aparecen en los libros de álgebra inicial (Kieran 1992)[20]

Los conocimientos sobre álgebra que un estudiante de secundaria debe tener se pueden enumerar en tres grandes partes así:

---

[19] Citado por: Puello, H.; Palmera, D.; Galezzo, T. Primeros pasos en el proceso de transición de la aritmética al álgebra. "La interpretación y resolución de problemas mediante procesos algebraicos". Universidad del Atlántico, Facultad de Ciencias de la Educación. Colombia, 2010.
[20]Citado por: Ibíd.

1. Expresar situaciones de la realidad mediante lenguaje algebraico.
2. Encontrarle a las expresiones algebraicas un posible significado en la realidad.
3. Pasar de una expresión algebraica a otra.

Tradicionalmente se ha hecho énfasis en el tercer punto mediante tareas relativas al desarrollo de operaciones con expresiones algebraicas. Actualmente se pretende dar mayor importancia a los aspectos relacionados con el paso del lenguaje común al lenguaje algebraico, referenciados en los puntos 1 y 2; es aquí donde el trabajo con la resolución de problemas cobra una especial importancia debido a su capacidad de relacionar el álgebra con el contexto del estudiante.

3.2.3 El contexto en la resolución de problemas matemáticos

La contextualización juega un papel importante en la construcción de conceptos y procedimientos matemáticos por los alumnos, su relevancia radica en dotarlos de un significado, de un sentido y por supuesto la motivación.

Según Martínez (2003)[21], distingue entre problemas escolares contextualizados y problemas reales, clasificándolos de la siguiente manera:

a) ***Contexto real****: referido a la práctica real de las matemáticas, al entorno sociocultural donde esta práctica tiene lugar.*

b) ***Contexto simulado****: que tiene su origen o fuente en el contexto real, es una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características (por ejemplo, cuando los estudiantes simulan situaciones de compra-venta en un rincón de la clase.)*

c) ***Contexto evocado:*** *refiere a las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, y que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho.* Es decir presentan una descripción escrita de una situación real. Son ejemplos de contextos

[21] Martínez, M. Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado, tesis doctoral no publicada, Barcelona, Universidad Autónoma de Barcelona, 2003. Pág. 109.

evocados el planteamiento de problemas con enunciado, con tablas de datos, gráficos o dibujos en el que se representa una situación de compra-venta, de navegación fluvial, los resultados de una competencia deportiva, etc.

Ejemplo contexto evocado: "Con la corriente a su favor una lancha navega a 100,5 km/h, y con la corriente en contra navega a 70,5 km/h. ¿Cuál es la velocidad de la corriente, y la de la lancha cuando el río está en calma?"

En el anterior escrito, se puede reconocer una situación problema que se puede considerar como un "caso particular" del objeto matemático: sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Por otra parte se encuentra:

d) contexto matemático: El cual tiene su centro en los objetos matemáticos no contextualizados, en nuestro análisis este tipo de contextos serán utilizados para identificar conocimientos previos, respecto a competencias matemáticas (por ejemplo en aritmética), en el caso de poder analizar en ellos palabras claves a tener en cuenta al momento de traducir frases del lenguaje natural al lenguaje algebraico y el uso de la variable; por ejemplo:

Imagen 4. Algunas palabras claves en la matematización

* **A continuación se presenta una lista de palabras "CLAVES" a tener en cuenta al momento de traducir frases del lenguaje común al algebraico.**

Palabras que indican adición	Palabras que indican sustracción	Palabras que indican multiplicación	Palabras que indican división
Mas	Menos	Por	Dividido
Excede	Diferencia	Producto	cociente
Mas que	Menos que	Multiplicado	La mitad
Aumentado en	Disminuido en	Del doble	La tercera parte
Total		El doble	
Suma		Dos veces	
		El triple	

Imagen Tomada de guía usada en clase.

Según los estudios de Font (2007): "*Los problemas contextualizados que normalmente se proponen a los estudiantes son de contexto evocado, es decir presentan una descripción escrita de una situación real. Con relación a la aplicación de este tipo de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, conviene hacer una distinción entre dos posibles maneras de abordar los temas de estudio."*

Una primera forma consiste en *proponer los problemas contextualizados a continuación de un proceso de instrucción* en el que se han enseñado los objetos matemáticos necesarios para la resolución del problema. En este caso, el objetivo es que sirvan, por una parte, como problemas de consolidación de los conocimientos matemáticos adquiridos y, por otra parte, para que los estudiantes vean las aplicaciones de las matemáticas al mundo real. A este tipo de problemas (Font y Ramos, 2006)[22] les llaman *problemas contextualizados evocados de aplicación* si son relativamente sencillos o *problemas contextualizados evocados de consolidación* cuando su

[22] Font, V. y Ramos, A.B. Contexto y contextualización en educación matemática. Una perspectiva ontosemiótica. Actas del V Congreso Iberoamericano (Pág. 10). Associaçao de Professores de Matemática de Portugal: Oporto, 2006.

resolución resulta más compleja. En ambos casos, se trata fundamentalmente de aplicar los conocimientos adquiridos previamente en el proceso de instrucción.

Una segunda forma consiste *en proponer los problemas contextualizados al inicio de un tema* con el objetivo de que sirvan para la construcción de los objetos matemáticos que se van a estudiar. En este caso, no se trata tanto de aplicar conocimientos matemáticos recién aprendidos, sino que el objetivo es presentar una situación del mundo real que el estudiante puede resolver con sus conocimientos previos (matemáticos y no matemáticos). A esta nueva categoría suele llamársele problemas de *contexto evocado introductorios* (Font y Ramos, 2006)[23], puesto que se proponen al inicio de un tema matemático. Su principal objetivo es facilitar la construcción, por parte de los estudiantes, de los conceptos matemáticos nuevos que se van estudiar en la unidad didáctica. A su vez, estos problemas pueden ser más o menos complejos en función de los procesos de modelización que se pretendan generar.

En dichos contextos, se presenta un espacio para la actividad matemática, en el cual se analizan las competencias matemáticas relacionadas con:

"Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos". (MEN, 2006)

3.2.4 El álgebra y la resolución de problemas, una perspectiva cognitiva

El álgebra es considerada como una herramienta para resolver problemas que emergen en contextos internos o externos a la matemática, la competencia algebraica se evalúa en esta dimensión a través de la capacidad de producir expresiones y relaciones algebraicas para traducir

[23] Ibíd.

un problema, e interpretarlo y luego movilizar los instrumentos algebraicos apropiados para su resolución. (María C Papini, 2003)[24]

Se concibe la resolución de problemas como una finalidad de la enseñanza de las matemáticas debido a que el conocimiento matemático conserva una relación vivencial con las necesidades humanas." Desde su aparición la matemática siempre ha estado presente en la historia de la humanidad y ha sido empleada para resolver problemas relacionados con la guerra, los avances tecnológicos, la medicina, y la matemática misma. En consecuencia no se puede relegar la resolución de problemas en el aprendizaje del álgebra a unas cuantas clases al final de una unidad didáctica sino que se debe desarrollar en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En las teorías basadas en el *procesamiento de la información*, Hernández y Socas (1994)[25], distinguen tres fases en la resolución de problemas: *Preparación, producción y enjuiciamiento*.

La *preparación* supone un análisis e interpretación de los datos disponibles inicialmente y de las restricciones. Además, una identificación del criterio de solución (Comprender y concebir un plan).

La fase de *producción* comprende un conjunto de operaciones diversas que están relacionadas con la recuperación, el almacenamiento, la exploración y transformación de información hasta alcanzar una solución (Ejecutar un plan).

Durante el *enjuiciamiento* se evalúa la solución generada, contrastada con el criterio de solución (Comprobar el resultado).

La resolución de problemas ha sido estudiada por diversos investigadores que desde una *perspectiva cognitiva* han encontrado que los resultados apoyan la noción de que la eficiencia en la resolución de problemas está relacionada con el conocimiento específico del área en cuestión

[24]Papini, M. Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, RELIME, Vol. 6, Nº. 1, 2003, págs. 41-72.

[25] Hernández, J., Socas, M. Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en sistemas de representación en Matemáticas. Revista SUMA, I seminario nacional sobre lenguaje y matemáticas, 1994. Pág. 84.

(Mayer, 1986; Stenberg, 1987)[26] En este sentido, estos autores coinciden en señalar que los tipos de conocimiento necesarios para resolver problemas incluyen:

- **Conocimiento lingüístico:** Es el conocimiento de la lengua en la que está redactado el problema a resolverse. Un ejemplo de este tipo de conocimiento es el reconocer las palabras, determinar cuáles son los nombres o sustantivos, significados de una frase de acuerdo a su sintaxis, o saber cuándo en una frase se está haciendo referencia al mismo objeto.
- **Conocimiento semántico:** Es el conocimiento de los hechos acerca del mundo tales como: 120 minutos son 2 horas, o que los ríos tienen corrientes que van río arriba y río abajo.

- **Conocimiento esquemático:** Es el conocimiento de los tipos de problemas, por ejemplo si es un problema de velocidad, densidad, tiempo, gravedad, etc.

- **Conocimiento operativo:** Es el conocimiento de cómo llevar a cabo la secuencia de operaciones, cómo el procedimiento de una operación o una multiplicación, conocimiento del o de los algoritmos necesarios para resolver el problema.

- **Conocimiento estratégico:** Es el conocimiento de las técnicas para saber cómo utilizar los diversos tipos de conocimiento disponible y de los procedimientos heurísticos para resolver un problema dado, por ejemplo, plantearse sub-objetivos.

Es decir para la resolución de problemas matemáticos, teniendo en cuenta como se procesa la información, se analizan los conocimientos necesarios, que intervienen en la resolución de los mismos. Podríamos considerar dos etapas, donde se explicitan los conocimientos necesarios:

---

[26] Mayer, R. E. Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona: Paidós, 1986;
Sternberg, R. J. Inteligencia humana, II. Cognición, personalidad e inteligencia. Buenos Aires: Paidós, 1987.

Tabla 4. Etapas de la resolución de problemas de acuerdo al procesamiento de la información

Etapa	Tipo de conocimiento
1) Traducción	Lingüístico Semántico Esquemático
2) Solución	Operativo Estratégico

Para nuestro estudio nos centraremos en la toma de registros relacionados con la primera etapa.

En detalle veamos lo que estos autores analizaron:

Mayer, (1986)[27] señala los siguientes pasos para resolver un problema:

"El primer estadio para resolver un problema es la comprensión del mismo. Ésta puede demostrarse cuando una persona logra traducir las palabras a una ecuación. Para esto, se necesita conocer algunas reglas del idioma y algunos hechos básicos acerca del mundo. En términos generales, la comprensión del problema exige una gran cantidad de conocimiento específico…

…la persona debe ser capaz de comprender y representarse el problema a través de la extracción de su estructura, la cual está representada por la ecuación, y ayuda al individuo a saber qué tiene que buscar. El conocimiento esquemático es el que permite a la persona saber cómo reunir las variables de manera coherente para obtener la solución del problema, e igualmente le permite reconocer si éste se puede o no resolver…

…Una vez que la persona comprende un problema, requiere de un conocimiento adicional para resolverlo. En esta etapa se trata de conocer los procedimientos y cálculos que se utilizan en las matemáticas para hacer cuentas y resolver ecuaciones. Los estudiantes pueden utilizar algoritmos ligeramente

[27] Citado por: Puello, H.; Palmera, D.; Galezzo, T. Primeros pasos en el proceso de transición de la aritmética al álgebra. "La interpretación y resolución de problemas mediante procesos algebraicos". Universidad del Atlántico, Facultad de Ciencias de la Educación. Colombia, 2010.

defectuosos. Un estudiante que utiliza un algoritmo con uno o más fallos puede llegar a veces a la respuesta correcta, y otras veces puede cometer uno o más errores…

…Un último tipo de conocimiento es el que se necesita para controlar el uso de esta clase de información: éste es el conocimiento estratégico. Una estrategia es una técnica general para resolver problemas que no garantiza encontrar la solución, pero constituye una guía para tratar de resolverlo"

Al respecto, también Kulm (1979)[28], realiza una clasificación de las variables que influyen en el proceso de la resolución de un problema:

- **Variables sintácticas**, que describen la estructura gramatical y la complejidad del enunciado del problema.
- **Variable de contenido y de contexto**, que engloban los aspectos semánticos, tanto matemáticos como no matemáticos.
- **Variables de la estructura**, que describen las características de la representación formal del problema y los procedimientos algorítmicos.
- **Variables de la conducta heurística**, que incluyen los procesos heurísticos que son aplicables al problema y las consecuencias de aplicarlos.

Godino y Font (2003) proponen una serie de heurísticas un poco más puntuales para la resolución de problemas verbales empleando el álgebra así:

"Una técnica potente para modelizar y resolver algebraicamente los problemas verbales es el uso de letras para expresar cantidades desconocidas; variables que pueden tomar un conjunto de valores posibles dentro de ciertos intervalos (funciones proposicionales con un determinado conjunto de validez). Uno de los objetivos más importantes de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente desde el comienzo de la enseñanza secundaria, es dominar dicha técnica."

[28] Citado por: Hernández, J., Socas, M. Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en sistemas de representación en Matemáticas. Revista SUMA, I seminario nacional sobre lenguaje y matemáticas, 1994. Pág. 84.

Aunque la modelación algebraica no es algorítmica (no existe una máquina que resuelva automáticamente los problemas verbales), sin embargo, se pueden dar los siguientes consejos o heurísticas que pueden ayudar en dicho proceso:

I. Determinar lo que se pide hallar en el enunciado e introducir una variable para representar la cantidad desconocida. Algunas palabras claves como, qué, cuántos, y encontrar, señalan la cantidad desconocida.

II. Buscar relaciones matemáticas entre las cantidades conocidas y desconocidas. Algunas palabras proporcionan claves lingüísticas de posibles igualdades y operaciones.

III. Escribir las relaciones mediante expresiones algebraicas.

IV. Tratar de escribir alguna cantidad de dos maneras distintas, lo que producirá una ecuación.

V. Resolver la ecuación o inecuación usando las técnicas formales disponibles.

VI. Traducir la solución matemática encontrada al lenguaje original del problema.

VII. Evaluar la solución ¿Has encontrado lo que se pedía? ¿Tiene sentido la respuesta? Por ejemplo, si el problema era encontrar el área de un rectángulo, la respuesta -4 sería absurda." (Godino y Font 2003)[29]

Por intermedio de estas heurísticas, se pretende desarrollar las competencias algebraicas, que se establecen en los estándares, y de igual manera son fuente para la toma de registros con los cuales se intenta describir y analizar el objeto de estudio.

---

[29] Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros, Juan D. Godino y Vicenç Font.2003.Pág. 792.

3.2.5 Los sistemas de representación en el álgebra.

La representación de un problema suele ser la etapa más crucial para la resolución, porqué es la base para entenderlo y crear un plan de solución. Cuando un estudiante se enfrenta a un problema puede valerse de diferentes tipos de representaciones directamente relacionadas con la forma como entiende la situación.

Fernández (1997)[30], define los sistemas de representación como un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto; y establece cinco sistemas de representación que utilizan los estudiantes para resolver problemas de álgebra elemental:

- ***Sistema de representación Ensayo – Error:*** Se considera como un sistema numérico, ya que se utiliza la notación numérica y símbolos aritméticos para establecer relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos. El uso de este sistema de representación requiere de tiempo y de una metódica organización en el trabajo de conjetura y prueba.
- ***Sistema de representación Parte – Todo:*** Se considera, también, como un sistema numérico. Las relaciones existentes en el problema se plantean mediante estrategias que relacionan los datos. Se consideran los datos desconocidos como parte del resultado de operar los datos conocidos, comparando el total con las partes.
- ***Sistema de representación Gráfico:*** Se dice que se está usando este sistema de representación cuando se usan códigos gráficos para resolver el problema, como son: representaciones físicas, geométricas o diagramas. Las relaciones entre los datos y las incógnitas del problema se establecen a partir del gráfico. Para resolver las operaciones se utilizan generalmente los sistemas numéricos, más específicamente el Parte – Todo, o relaciones de proporcionalidad.

[30] Citado por: Espinosa, M. Los Sistemas De Representación En La Solución De Problemas De Álgebra Elemental". Instituto Tecnológico de Minatitlán.

- ***Sistema de representación Gráfico – Simbólico:*** Este sistema de representación se puede considerar como una mezcla entre el Gráfico, descrito antes, y el Simbólico, ya que las relaciones entre los datos y las incógnitas se obtienen a partir del uso de un gráfico, con apoyo de una representación gráfica, pero mediante un lenguaje simbólico.
- ***Sistema de representación Simbólico:*** Se dice que se está usando el sistema de representación Simbólico cuando se utiliza el lenguaje algebraico puro. Se presenta cuando se utiliza un lenguaje exclusivamente abstracto, usualmente alfabético. Se identifican las incógnitas con letras o composición de ellas u otros símbolos, incluso gráficos, y se expresan las relaciones mediante ecuaciones. No se hace uso de objetos concretos para establecer las relaciones.

3.2.6 La variable y el signo igual en la resolución de problemas algebraicos

En la resolución de problemas mediante el empleo del álgebra intervienen dos elementos básicos que son: la noción de variable y el concepto del signo igual, los cuales hacen parte del lenguaje formal del algebra, como elementos para estructurar sintaxis; y de su correcta interpretación, depende la correcta creación de los modelos matemáticos.

Al primer respecto los trabajos de Collis (1975)[31] concluyen que los estudiantes de la escuela media están adquiriendo una noción incompleta de lo que es una variable. Las dificultades para lograr un manejo aceptable de la variable suelen tener su origen en el carácter multifacético de este concepto. Según Godino y Font (2003)[32] Existen cuatro usos principales de las variables en matemáticas:

[31] Citado por: Puello, H.; Palmera, D.; Galezzo, T. Primeros pasos en el proceso de transición de la aritmética al álgebra. "La interpretación y resolución de problemas mediante procesos algebraicos". Universidad del Atlántico, Facultad de Ciencias de la Educación. Colombia, 2010.

[32]Godino Juan D. Font, Vicentc. Razonamiento Algebraico y su didáctica para Maestros, 2003. Págs. 785 – 786.

- ***Las variables como incógnitas:*** Cuando se usan para representar números (u otros objetos) uno de cuyos valores posibles hace verdadera una expresión. La incógnita interviene como un objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido.
- ***Las variables como indeterminadas o expresión de patrones generales.*** Es el caso cuando la variable se usa en enunciados que son ciertos para todos los números.
- ***Las variables para expresar cantidades que varían conjuntamente***. La relación de dependencia entre variables ocurre cuando el cambio en una variable determina el cambio en la otra.
- ***Las variables como constantes o parámetros***. Es el caso de la letra a en la fórmula de la función de proporcionalidad $y = ax$. En un primer momento se ha de considerar que la letra a no varía y que sólo lo hacen de manera conjunta la x y la y. De esta manera se obtiene una función de proporcionalidad concreta. En este primer momento no hay diferencia entre tener $y = ax$ o $y = 2x$. En un segundo momento se ha de considerar que a puede variar y tomar cualquier valor, con lo que obtenemos la familia de todas las funciones de proporcionalidad.

En la resolución de problemas algebraicos el estudiante debe recurrir a una variable para representar la cantidad desconocida o incógnita; Godino y Font (2003)[33] proponen una manera razonable de hacer que los escolares comiencen a usar variables como incógnitas a partir de situaciones como las siguientes:

- *Leer el enunciado de un problema verbal, pero omitir la pregunta. La tarea consiste en escribir una ecuación que signifique lo mismo.*
  Por ejemplo, "Hay 3 cajas llenas de lápices y 5 lápices más. En total hay 41 lápices se puede escribir en la forma: ($3 \cdot \_ + 5 = 41$).
  La actividad se puede invertir dando una ecuación con una incógnita y pedir a los estudiantes que inventen una historia que se ajuste a la ecuación.

[33] Ibíd. Pág. 819.

Las dificultades que tienen los estudiantes en el uso de las variables en el contexto de la resolución de las ecuaciones provienen de las interpretaciones que hacen de la igualdad. Según Godino y Font (2003)[34] El signo " = " (igual) indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo, primer miembro de la igualdad, y lo que se encuentra a la derecha de este signo, llamado el segundo miembro de la igualdad, son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo.

Diversos estudios muestran que las interpretaciones que hacen los niños del signo = (igual) y de las ecuaciones pueden diferir de las que pretendemos en la enseñanza. Por ejemplo, los alumnos piensan que el uso principal del signo igual es separar el problema de la respuesta; la igualdad, $2+3=5$, se interpreta como "2 más 3 da como resultado 5", no como la equivalencia entre las expresiones "$2+3$" y "5".

Godino y Font[35] proponen actividades como las siguientes para facilitar la comprensión de la igualdad como equivalencia:

- *Encuentra diferentes maneras de expresar un número particular, por ejemplo* 10. *Dar algunos ejemplos:* $5+5$ *o* $14-4$. *Sugiere el uso de dos o más operaciones diferentes. "¿Cuántas maneras diferentes existen de expresar el* 8 *usando números menores que* 10 *y tres operaciones?"*
- *Si en una balanza de dos platillos ponemos objetos cuyos pesos tengan como medidas numéricas los resultados de las operaciones aritméticas:* $(3\cdot 4)+2$ *y* $2\cdot 7$, *respectivamente, la balanza quedaría en equilibrio. En cambio,* $3\cdot 9+5<6\cdot 8$, *la balanza se inclinará al lado en que se ponga el peso cuya medida sea* $(3\cdot 9)+5$. *¿Para qué valores de __ y Δestará la balanza en equilibrio si en un platillo ponemos pesos cuyas medidas responden a la expresión,* $3\cdot \_\_+\Delta$ *y en el otro a la expresión* $2\cdot\Delta-4$*?*

[34] Ibíd. Pág. 815.
[35] Ibíd. Pág. 821.

3.2.7 La educación matemática realista (EMR)

Uno de los conceptos básicos de la EMR es la idea de Freudenthal (1971) de las matemáticas como una actividad humana. Para él las matemáticas no eran el cuerpo de conocimientos matemáticos, sino la actividad de resolver problemas y buscar problemas y, en términos más generales, la actividad de organizar la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma, a lo que llamó matematización (Freudenthal, 1968). En términos muy claros, Freudenthal explicó de qué tratan las matemáticas: "No hay matemáticas sin matematización".[36]

Esta filosofía de la enseñanza matemática se fundamenta en un famoso paradigma de Hans Freudenthal, el cual equipara el aprendizaje matemático con la "reinvención dirigida" de la matemática, es decir, con la reinvención de la matemática por parte de los estudiantes bajo la guía de los adultos (maestros).

En (Freudenthal, 1991)[37] se manifiesta que esta "reinvención dirigida" se nutre de una variada colección de contextos que los maestros y los estudiantes inventan con el fin de "modelar" situaciones del aprendizaje. El empleo de tales modelos lleva eventualmente a la elevación de los niveles de pensamiento abstracto que caracteriza a la educación en general y a la educación matemática en particular.

Al proceso mediante el cual los estudiantes (con la ayuda de los maestros) logran hacer una "modelación" particular de un problema (es decir, logran plantear un problema matemático dado en algún contexto apropiado para su manejo) se le conoce como "matematización horizontal". Por otra parte, al proceso que lleva a la elevación del pensamiento matemático abstracto se le conoce en la EMR como "matematización vertical". La matematización vertical se hace visible cuando un estudiante explícitamente reemplaza su método de resolución, o su modo de describir por otro que es más sofisticado, mejor organizado, es decir, más matemático.

---

[36] HeuvelPanhuizen, M. El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje Primera parte; Correo del Maestro Núm. 160, septiembre 2009.
[37]Citado por: Pérez, I. Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica .Universidad Nacional de Colombia, Facultad de ciencias, Bogotá, 2012. Págs. 63 – 64.

La EMR no pretende ser una teoría general del aprendizaje (como lo es, por ejemplo, el constructivismo), sino una teoría global (o una “filosofía” según Freudenthal) que se concretiza en teorías locales de enseñanza de tópicos de la matemática y que se basa en las siguientes ideas centrales:

- Pensar la matemática como una actividad humana (a la que Freudenthal denomina matematización) y que, siendo así, debe existir una matemática para todos.
- Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinvención dirigida, en un ambiente de *heterogeneidad cognitiva.*[38]

Al hecho de aludir a Freudenthal, es para consolidar la afirmación de que el tema problemico que se intenta describir y analizar en este trabajo, es del interés de grandes autores que se interesan en el campo de la educación matemática.

3.2.8 El papel del lenguaje en la resolución de problemas contextualizados

El lenguaje no sólo permite la comunicación en el sentido estrecho de su acepción gramatical sino que está unido a la capacidad de abstracción, conceptualización y generalización, aspectos decisivos al enfrentar un problema e intentar su solución.

Emplear el álgebra en la resolución de problemas requiere, en primer lugar, traducir los problemas desde el contexto real o evocado al matemático. Esta primera fase se conoce como *matematización horizontal*[39] y suele convertirse en un problema para los estudiantes, porqué, al

[38]**Heterogeneidad cognitiva:** Esta expresión nos lleva a pensar que en el desarrollo de la comprensión matemática, se conjuga la capacidad de una persona en procesar la información a partir de la percepción, el conocimiento adquirido (experiencia) y características subjetivas que permiten valorar la información. En dicha conjugación intervienen procesos como: el aprendizaje, el razonamiento, atención, memoria, resolución de problemas, toma de decisiones y procesamiento del lenguaje.(Argumentación, con base en Wikipedia: concepto de cognición).

[39] En nuestro estudio solo la llamaremos matematizacion.

momento de enfrentarse a la situación problémica, se genera un conflicto en la transición del lenguaje cotidiano propio del estudiante, al algebraico propio de la ciencia matemática.

Según Freudenthal (1983)[40] La presencia y posibilidad de rectificación de los llamados errores de sintaxis algebraica, se explica por el hecho de que el álgebra simbólica es un lenguaje cuyo uso está restringido al aula, en contraste con el uso consuetudinario del lenguaje natural.

Para Freudenthal, la diferencia entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, radica en el hecho que los errores que a menudo se cometen en el lenguaje natural (conjugar un verbo irregular como si fuera regular o colocar un acento escrito sobre una letra equivocada), por lo general, no dan lugar a equívocos en la comunicación, porqué el contenido del mensaje no sufre mayores alteraciones. En cambio, en el lenguaje algebraico, el criterio del contenido o significado es fundamental; en cada expresión debe estar perfectamente claro lo que ella significa, lo cual se consigue solamente con estrictas reglas de puntuación, de propiedades, usos de paréntesis, etc.

En el estudio del lenguaje matemático y su relación con otros lenguajes, Laborde (1990)[41] concluye que: *Los aspectos cognitivo y lingüístico intervienen simultáneamente en la compresión y uso de los diferentes tipos de formulaciones: la semántica de una formulación es construida por el estudiante por medio de sus representaciones mentales y de los rasgos lingüísticos de la formulación.*

Esto sugiere que el lenguaje natural representa un papel fundamental en la comprensión y dominio del lenguaje matemático.

Puede concluirse, tras la revisión bibliográfica del tema, que para obtener resultados positivos en el trabajo con los problemas, no puede obviarse ni relegarse a segundo plano el lenguaje como elemento fundamental en la comunicación puesto que éste apoya y fortalece el desarrollo del pensamiento lógico y conceptual. Es recomendable en el trabajo con problemas, partir de

[40] Citado por: Puello, H.; Palmera, D.; Galezzo, T. Primeros pasos en el proceso de transición de la aritmética al álgebra. “La interpretación y resolución de problemas mediante procesos algebraicos”. Universidad del Atlántico, Facultad de Ciencias de la Educación. Colombia, 2010.
[41] Ibíd.

actividades orientadas a la construcción y apropiación del lenguaje algebraico por parte de los estudiantes como etapa introductoria al estudio del álgebra escolar.

4. ANÁLISIS DE REGISTROS

En este capítulo identificaremos los elementos conceptuales que se dan el proceso de matematización realizado por estudiantes del grado 9A de la Escuela Normal Superior de Popayán (ENSP) periodo lectivo 2012, en el cual se inicia la actividad docente en el unidad de plan de estudios que tiene como objeto de enseñanza los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3. Es aquí donde se proponen a los estudiantes problemas en contextos evocados y matemáticos, con el fin de realizar un seguimiento a dicho proceso, para tal caso se toman 11 muestras del grupo total de estudiantes, y se escoge un grupo heterogéneo entre hombres y mujeres, de alto y bajo rendimiento académico.

La recolección de la información se da en el desarrollo de las actividades propuestas en el plan metodológico, a través de fotos, videos donde los estudiantes argumentan sus estrategias en la creación de un modelo matemático que represente el enunciado, talleres, evaluaciones y el diario de campo donde se plasman reflexiones de cada actividad realizada. Lo anterior se focaliza especialmente a las muestras escogidas.

Para facilitar nuestra redacción analítica, cada muestra se codifica de la siguiente manera:

Mujeres con la letra **M** y hombre son la letra **H**, acompañada de un número que identifica a cada alumno, así: M1, M2, M3, M4, M5, H1, H2, H3, H4, H5, H6.

En ese mismo sentido se realiza una organización de los datos obtenidos, para crear un universo de análisis que en primera instancia se refleje en: *Categorías deductivas*, la cuales dan cuenta de la teoría y del objeto de estudio; *categorías inductivas*, que emergen de los datos, con base en el examen de patrones y recurrencias presentes en ellos. (Ver anexos 10 y 11)

En la actividad realizada previa a los temas del plan de estudios, denominada dominó algebraico, se tomaron registros en la primera etapa del juego, donde los estudiantes deben usar símbolos para traducir el lenguaje natural de los enunciados matemáticos.

La siguiente tabla muestra algunos hechos relacionados con la matematización respecto a la categoría deductiva relacionada con el *sistema de representación algebraico*, veamos:

Tabla 5. Errores observados en la transformación de representación verbal a simbólica. (Ver anexo 12)

Enunciado	Sujetos	Respuestas de los sujetos	Análisis de errores
"El producto de la mitad de un número por el triple de otro número"	H1,H5,M5	Expresan $\frac{x}{2} \cdot 3x$	Los sujetos no distinguen de manera correcta el uso de distintas variables /incógnitas en el enunciado.(E3)[42]
	M2,H4,H3	Expresan $\frac{x}{2} \cdot \ x^{3} = x$	Confunden el triple por el cubo y no identifican dos números distintos; Los sujetos no interpretan correctamente la estructura del enunciado.(E1)
"Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos"	H5,M2	Expresan respectivamente: - $x+1=x-2$ - $x+3=x-2$	(E3) No expresan correctamente el consecutivo de un número(E2)
	M1	Expresa: $x+1=x-y$	(E1)
"Un numero por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo"	M3	Expresa: $(x \cdot y)^2 = z^3$	(E3) (E1)
"El cuadrado de la suma de dos números consecutivos"	M2,H3	Expresan: $x+x=x^2$	(E2) (E1)
	H2	Expresa: $(2x+1)^2$	(E2)
	M5	Expresa: $x+1 \ + (x+2)$	(E1)
"Un número par menos la cuarta parte de otro número"	H3,H4	Expresan: $x-\frac{y}{4}$ No expresan un número par, solo un número cualquiera.	(E1)
	H1,H2,H5	Expresan: $2-\frac{x}{4}$ No exponen un número par cualquiera, sino que ponen el número 2.	Particularización de números o relaciones concretas de una expresión

[42] Los códigos E1, E2, E3: indican el mismo tipo de error identificado en los primeros análisis.

			general.
	M3	Expresa: $34x - \frac{x}{4}$	(E3) (E1)
"El cuadrado de la raíz cuadrada de un número, es igual a ese número."	H1	Expresa: $\overline{x}^{2} = x$	Ausencia de paréntesis que genera una expresión algebraica incorrecta.
	H2	Expresa: $\overline{x^2} = x$	(E1)

De las respuestas a los enunciados en contextos matemáticos, podemos inferir que los sujetos no distinguen de manera correcta el uso de distintas variables como incógnitas, no identifican palabras claves a tener en cuenta al momento de la traducción entre los lenguajes, es tal el caso de "el tripe" que indica multiplicación, no interpretan correctamente las estructuras de los enunciados, interpretación que se deriva del conocimiento específico del lenguaje matemático y de las estructuras sintácticas del lenguaje natural, esto se pudo evidenciar en el enunciado *"El cuadrado de la suma de dos números consecutivos"* donde las muestras H2, H3 Y M2 deben comprender el significado en lenguaje natural de la palabra *"consecutivo"* y su correspondiente formulación en el lenguaje algebraico, luego se deben construir relaciones entre los aspectos cognitivos y lingüísticos, porque la semántica de una formulación es construida por el estudiante por medio de sus representaciones mentales y de los rasgos lingüísticos de su formulación; además un adecuado uso del lenguaje algebraico (uso de paréntesis, concepto de variable, evitar el uso excesivo de la letra x para representar las variables[43]) mediante el reconocimiento de patrones numéricos (patrones generales), adecuadas interpretaciones de los símbolos, operaciones o relaciones que provienen de la aritmética (potencia, raíz,…) y la interpretación de estructuras propias de enunciados matemáticos referentes al algebra.

Basado en las perspectivas cognitivas sobre la resolución de problemas, se describirá el proceso de matematización realizado por las muestras, teniendo en cuenta los conocimientos necesarios y las variables implicadas en dicho proceso.

[43] "En otros casos se presenta un uso excesivo de la letra "x" para representar la variable, si al valor desconocido siempre lo denotamos con la letra "x" esto conlleva a la dificultad de traducir en lenguaje simbólico expresiones como: "un número más otro" o "la suma de dos números cualesquiera" limitando el carácter multifacético del concepto de variable. Este tipo de situaciones conllevan a pensar en la letra no como variable, sino como representante de un número, situación que genera confusión".(Gonzales, 2012)

Entre las actividades se encuentra el taller N° 3 en el cual se propone un problema en contexto evocado y algunas pautas para la resolución de problemas, estas son:

Para resolver problemas

1) Comprender el enunciado.

2) Elaborar un plan para solucionar el problema:

- *¿Cuáles son las incógnitas?*
- *¿Qué ecuaciones puedo construir haciendo intervenir las incógnitas?*
- *Traducir datos del problema al lenguaje algebraico.*

4) Resolver el sistema

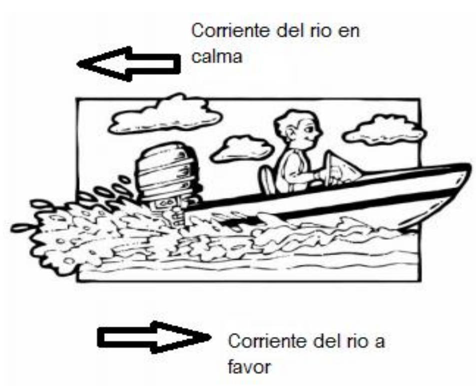
5) Comprobar las soluciones.

El problema propuesto tiene la categoría de contexto evocado introductorio, para desarrollar los temas matemáticos de resolución de sistemas de ecuaciones 2x2, métodos algebraicos. Veamos:

Con la corriente a su favor una lancha navega a 100,5 km/h, y con la corriente en contra navega a 70,5 km/h. ¿Cuál es la velocidad de la corriente, y la de la lancha cuando el río está en calma?

Para esta situación se presenta un gráfico a manera de explicar la semántica de la situación:

Imagen 5. Dibujo en taller 3



Para este análisis se tomaron lectura de registros del diario de campo, en el cual está detallada la manera como los estudiantes interpretan el problema a resolver, veamos:

El estudiante H1, responde ante la aclaración del docente, sobre leer bien, lo que se pregunta en el problema: "la velocidad de la corriente y la velocidad de la lancha cuando el río está en calma" Además se le pide dar nombres a lo que se desconoce; dice H1: "x velocidad de la corriente, e y velocidad de la lancha"[44]

Inicialmente los estudiantes deben leer y comprender el texto, *el estudiante M5, se basa en la estructura lineal del enunciado para intentar crear las ecuaciones. Interpreta incorrectamente, "Con la corriente a su favor una lancha navega a 100,5 km/h, y con la corriente en contra navega a 70,5 km/h. Esta lectura hace que infieran que el valor de la variable $y = 100.5$ y el valor de $x = 70{,}5$, luego restan e igualan a 30.5, lo que da como resultado: $y - x = 30{,}5$ (LT3, M5)*[45]

El hecho de intentar dar una respuesta a las preguntas, hace que le de valores numéricos a las variables y no tiene en cuenta la relación entre ellas.

De acuerdo al procesamiento de la información, seguidamente se tienen en cuenta los aspectos semánticos, tanto matemáticos, como no matemáticos, es decir los significados que encierran el contexto del problema.

- *El estudiante H1, no presenta una clara comprensión de la situación, ya que no logra darse cuenta que las velocidades se corresponden en ese contexto. (LT3, H1)*[46]

- *Los estudiantes M4 Y H6, no comprenden el significado: "velocidad de la lancha con la corriente a su favor y en contra", por ende la no relación entre las incógnitas y los interrogantes., pues solo se basan en los datos numéricos para intentar dar respuesta a las preguntas.(LT3, M4 Y H6)*[47]

En algunas ocasiones usan el sistema de representación gráfico – simbolico, intentando representar la situación propuesta, pero los significados implícitos del contexto (semántica) hacen que sus análisis, se desvíen a lo estrictamente gráfico, más no a la comprensión. Respecto al problema anterior:

Estudiante H1, se basa en un gráfico que el construye para plantear las ecuaciones, indicando con flechas la dirección de las velocidades, hacia la derecha velocidad a favor; y hacia la izquierda velocidad en contra. Pero finalmente, lo induzco a plantear el sistema de ecuaciones, pues no comprende la situación del problema, en sus significados implícitos. (LT3, H1).

[44] Fragmento de registro del diario de campo, el día 13 de agosto de 2012.
[45] (LT3, M5): Lectura de registro de actividad taller 3, muestra M5; ver anexo 10, actividad talleres, problema de la lancha.
[46] (LT3, H1): Lectura de registro de actividad taller 3, muestra H1, ver anexo 10, actividad talleres, problema de la lancha.
[47] (LT3, M4 Y H6): Lectura de registro de actividad taller 3, muestras M4 y H6, ver anexo 10, actividad talleres, problema de la lancha.

Del taller N°4, tomamos referencia del problema propuesto, el cual tiene categoría de problema en contexto evocado de aplicación ("sencillo"), pues el objetivo es que sirva de consolidación de los conocimientos matemáticos adquiridos previamente. Veamos:

Un fanático de los juegos de videos compró 5 CD's del juego Mario bros y 4 CD's del hombre araña en $ 3900 pesos. Posteriormente compró 4 CD's de Mario bros y 2 CD's del hombre araña en $ 2400 pesos. ¿Cómo harías para saber el precio de los CD's de cada juego?

Reconocimiento de las incógnitas estudiante M4[48]:

Imagen 6. Planteamiento de las ecuaciones, muestra M4

Imagen tomada de registro de video del diario de campo.

/ha escrito / $x = 5 + 4$ *, CD´s (Mario bros)*

$y = 4 + 2$ *, CD's (hombre araña)*

/señala la cantidad total de compra de cada CD, del juego correspondiente/

[48] Registro (video) del diario de campo, con fecha 23 de agosto del 2012.

Al ver que ella realiza este planteamiento, le pido que lea muy bien que le preguntan.

- *Docente: “están preguntando el precio da cada juego”.*

- *M4: “por eso te digo, se cogen los de Mario Bros, que son 5 primero y luego 4 y se sacan como una ecuación,…heee digo cómo x, ¿se puede?”*

- *Docente: “nos preguntan es el precio de los CD´s”*

- *M4: “ x vendría siendo igual a los CD´s de Mario Bros, ¿cierto?”*

- *Docente: “están preguntando es por el valor de cada uno”, ‘entonces x seria el valor en pesos de un CD de Mario bros. ¿Y entonces y? ‘¿eso es lo que te están preguntando, cierto?’*

- *M4: ‘ y es el valor en pesos del CD del hombre araña’*

Resultó ser un espacio conductista, ya que se estimula al estudiante a que reconozca las incógnitas y además que ecuaciones puede construir usando la relación entre ellas, lo cual le permite crear el modelo matemático. Es decir, no resultó el proceso de matematización completamente de la interpretación propia del estudiante.

Respecto al proceso de matematización, observamos que sustituye o asocia inicialmente palabras claves del enunciado (x = juego Mario bros y y = juego de hombre araña), a números secuencialmente de izquierda a derecha, lo cual hace referencia a la estructura sintáctica del enunciado. El alumno pasa directamente de este nivel oral o escrito a una ecuación, y utiliza para ellos, palabras claves, sin comprender la situación del problema.

También se logra registrar el aspecto semántico que influye en la traducción del problema, en el planteamiento de H6, observamos que logra relacionar el hecho de comprar 5 CD’s inicialmente de Mario bros y posteriormente 4, con las expresiones algebraicas $5x$ y $4x$, de igual manera lo hace con $4y$ y $2y$. Ósea se intenta representar en la ecuación la relación entre términos de una forma que hace evidente su comprensión de la situación y no como traducción literal desde el lenguaje natural, ya que él sabe que si x es el precio de los juegos de Mario bros, $5x$ representan el valor de los 5 juegos.

Del taller N° 5, se hace el análisis en un problema con categoría de problema en contexto evocado de consolidación, cuando su resolución resulta un poco más compleja. Los estudiantes deben crear 3 ecuaciones para generar un sistema de 3x3.

Un ganadero desea hacer negocios de compra-venta de animales con un vecino, pero tiene un problema ya que el vecino no le dice cuál es el precio de cada animal, solo le dice lo siguiente:

Si vendes dos vacas y cinco cabras para comprar 13 cerdos, te sobran $ 1000 pesos.

Si vendes seis cabras y ocho cerdos para comprar cinco vacas, tendrás una pérdida de $600.

Si vendes tres vacas y tres cerdos te alcanza exactamente para comprar nueve cabras.

¿Qué harías para decirle al ganadero cuáles son los precios de una vaca, de una cabra y de un cerdo?

La estudiante M4, explica la manera como planteó sus ecuaciones, usa su dedo índice de la mano derecha para realizar el proceso de lectura del problema a su vez que indica la terminología algebraica correspondiente con su otro dedo índice (lectura de registro taller 5; ver anexo 14)[49]:

Primera expresión algebraica matematizada: $2x + 5y = 13z + 1000$

M4: "si se venden dos vacas y cinco cabras entonces alcanzaría para comprar esto /señala la escritura de 13 cerdos/, entonces al vender esto, /señala el lado izquierdo de la expresión algebraicas que ha creado $2x + 5y = 13z + 1000$*/, esto sería igual, ósea igual vendría siendo comprar /señala con sus dedos la palabra comprar, y de igual manera el signo igual/ 13 cerdos más mil pesos, que es lo que sobra"*

Segunda expresión: $6y + 8z = 5x - 600$

M4: "si vende seis cabras, $6y$ *y ocho cerdos* $8z$ */señala las respectivas expresiones algebraicas/, eso te alcanzaría para comprar, ósea igual /señala el símbolo=/ a cinco vacas, /señala la expresión* $5x$*/ menos seiscientos pesos porque es perdida, ósea negativo.*

Tercera expresión: $3x + 3z = 9y$

M4: y acá pues si tiene tres vacas y tres cerdos, $3x$ *más* $3z$ */ señala su correspondiente expresión algebraica/ es igual, /señala las palabras con su dedo de izquierda a derecha: …te alcanza exactamente para…/ a nueve, /señala las palabras: …nueve cabras. /*

Se observa una traducción apoyada en la estructura sintáctica lineal, es decir el enunciado expresa literalmente los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos, para llegar al modelo matemático del problema. Para realizar la traducción, podemos decir que M4 reconoce la relación entre las variables y genera representaciones algebraicas correctas, apoyada en un lenguaje que es sencillo, sin relaciones implícitas.

En estos problemas se analiza que de acuerdo a como se procesa la información, el estudiante en primera instancia debe leer y comprender el problema, lo cual hace referencia a un procesamiento

[49] Registro en video del 6 de septiembre de 2012. (ver anexo 14)

verbal y sintáctico, para ello usa estrategias, ya sea guiándose en la comprensión literal de izquierda a derecha, apoyos gráficos, dándole significados al signo igual; de igual manera esto se conjuga con el conocimiento semántico de la situación planteada, es decir el contexto al que se hace referencia. Y también se presentan errores en este proceso, que pueden ser causa de intentar dar resultados numéricos apresuradamente, la no comprensión de la situación, debido a la semántica (enunciados que evocan relaciones y operaciones implícitas, las cuales se deben descifrar), pues los alumnos necesitan imaginar la situación del problema para poderlo resolver.

En ese mismo sentido se analizan los registros de la actividad ecuacartas. Aunque de una manera no constructiva propia del estudiante, es decir ellos no matematizan, la actividad presenta los enunciados de manera verbal y algebraica, con lo cual los estudiantes deben leer e interpretar, de tal forma que escojan la carta del enunciado en lenguaje algebraico, que sea correspondiente con su isomorfo en lenguaje verbal. De esta forma también se identifican relaciones que hacen los estudiantes entre los dos sistemas de representación y una manera de justificar su escogencia, es siguiendo la estructura de traducción lineal literal:

Problema: *"Lina tiene el triple de dinero que Julián y entre ambos tienen $ 2000 pesos, ¿Cuánto dinero tiene cada uno?*

El estudiante H2 comprende que hay una situación en la cual se presentan dos cantidades de dinero relacionadas, ya que siguiendo linealmente la escritura del problema escribe para justificar su escogencia de la carta, que*: "$y = 3x$, significa que Lina tiene el triple de dinero que Julián y además que sumadas dan como resultado 2000 mil pesos$x + y = 2000$."(LEC, H2)*[50]

En el siguiente enunciado, se pudo observar que no se produjo errores de acuerdo a la sintáctica**,** cuando los enunciados se presentan de una manera explícita. Veamos algunas respuestas:

"Dos números cuya suma es igual a 3 y su diferencia igual a 5" ¿Cuáles son esos números?

Los estudiantes al leer el enunciado verbal comprenden que se trabaja con dos números y dos operaciones, pues relacionan las ecuaciones con los enunciados fácilmente. (LEC, H1, M2, H5)[51]

Pero en el caso de situaciones presentadas de manera implícita, teniendo en cuenta la estructura jerárquica de las palabras, se presentan errores, veamos:

La diferencia de dos números es 18 y la tercera parte de su suma es igual a 6. ¿Cuáles son esos números?

El estudiante identifica el uso de dos operaciones suma y resta. Pero se confunde en la comprensión de: "la tercera parte de su suma es igual a 6", pues al justificar, la escogencia de la ecuación

[50] (LEC, H2): Lectura de registro de actividad ecuacartas, muestra H2.
[51] (LEC, H2): Lectura de registro de actividad ecuacartas, muestras H1, M2 Y H5.

$\frac{x+y}{3} = 6$ *, relata: "la suma de 2 números en el numerador, dividido con 3 da igual a la tercera parte de 18". (LEC, H1)*[52]

Así, el estudiante relaciona el enunciado propuesto en una carta, con las ecuaciones, aunque no reconoce la relación que abarca "*la tercera parte de su suma es igual a 6",* pues hay una jerarquía en la palabra "su", que hace referencia a las variables y "la tercera parte" que indica fracción. Su justificación no se ajusta a la comprensión del enunciado.

En varios casos, de la resolución de estos problemas, el signo "=", se utiliza más como un signo que implica un resultado, es decir a causa de algo se obtiene este resultado, de esta forma los estudiantes piensan que el uso principal del signo igual es separar el problema de la respuesta. Por ejemplo:

"Dos números cuya suma es igual a 3 y su diferencia igual a 5" ¿Cuáles son esos números?

Los estudiantes H1 y H5, conciben, la igualdad como un resultado de sumar $x + y$o restar $x - y$, pues así lo dejan ver en sus justificaciones de elección de las cartas correspondientes. (LEC, H1 Y H5)

"Lina tiene el triple de dinero que Julián y entre ambos tienen $ 2000 pesos, ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Respecto a la ecuación $x + y = 2000$, es visto el término del lado derecho como el resultado de sumar dos cantidades de dinero. Expresa: *"el total de lo que tienen ambos es de $ 2000 pesos." (LEC, H2)*

En muy pocas ocasiones se tiene en cuenta el significado del signo igual, como un símbolo algebraico que representa una situación de equilibrio.

Finalmente podemos hacer una descripción del proceso de matematización que realizan los estudiantes, en primera instancia el contexto influye porque si es de su interés o sugiere una situación que capte su atención, partirán de la lectura del enunciado con curiosidad y entusiasmo de conocer el significado de los términos en el lenguaje natural y su respectiva traducción algebraica, aquí ya se empiezan a detectar las primeras dificultades, ajenas o propias de la matemática, debidas a una falta de comprensión lectora. Generalmente se observó que los estudiantes, necesitan leer varias veces el problema, para lograr procesar la información que se obtiene de ellos, de esta manera analizamos que los aspectos cognitivos relacionados con los conocimientos para resolver problemas, tales como: Conocimiento lingüístico, semántico y esquemático son los que permiten matematizar o crear el modelo matemático requerido para solucionar el problema, esto debido a que

[52] (LEC, H1): Lectura de registro de actividad ecuacartas, muestra H1.

las variables sintácticas (sintaxis) que describen la estructura gramatical y la complejidad; como también las variables de contenido y de contexto las cuales engloban los aspectos semánticos, tanto matemáticos como no matemáticos; son las que permiten al estudiante construir representaciones mentales de los datos disponibles inicialmente ,estos pueden estar de una manera explícita o implícita, tales como: Algunas palabras claves para el reconocimiento de incógnitas " *qué, cuántos*" ; otras que indican operaciones como "*excede, diferencia, el triple, la tercera parte*" ; otras palabras o frases que indican relaciones entre las incógnitas *" con la corriente a su favor un lancha navega a 100,5 km/h";* términos o frases que aluden a definiciones o conceptos, tanto de las matemáticas como del mundo real, los cuales deben ser matematizados " *un número más su consecutivo", "perímetro", "velocidad", "gravedad" , etc.;* otros términos indican claves lingüísticas de posibles igualdades "*si vendes tres vacas y tres cerdos te alcanza para comprar nueve cabras"* (la palabra alcanza indica igualdad).

Para escribir las relaciones entre las incógnitas mediante expresiones algebraicas, los estudiantes deben comprender y representar el problema a través de la extracción de su estructura, la cual está representada por la ecuación o ecuaciones, y ayuda al individuo a saber qué tiene que buscar. El conocimiento esquemático es el que permite a la persona saber cómo reunir las variables de manera coherente para obtener la solución del problema, e igualmente le permite reconocer si éste se puede o no resolver. Para este proceso los alumnos recurren a sistemas de representación en el álgebra, los cuales le permiten crear un plan de solución, estos están relacionados directamente con la forma como entienden la situación. Dichos sistemas son un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto. Los sistemas que identificamos en el análisis de registros fueron: El gráfico – simbólico en la muestra H1[53] y el simbólico en la muestra M5[54].

El anterior proceso consecutivamente relatado es la forma en que se analiza la matematización en los estudiantes del grado 9A periodo lectivo 2012 de la Escuela Normal Superior de Popayán; el proceso siguiente respecto a la solución del modelo matemático, es donde se tienen en cuenta los conocimientos operativos y estratégicos: El primero relacionado con los procedimientos y cálculos que se utilizan en las matemáticas para hacer cuentas y resolver ecuaciones; el segundo aludiendo a las heurísticas que son aplicables al problema y la consecuencia de aplicarlas; por último se debe evaluar la solución, y reconocer si tiene sentido, por ejemplo si debo hallar el área de una figura plana, y obtengo la respuesta -8, seria absurda.

[53] (LT3, H1): Lectura de registro de actividad taller 3, muestra H1. Ver anexo 10, actividad talleres. Entre otras muestras.
[54] (LT3, M5): Lectura de registro de actividad taller 3, muestra M5. Ver anexo 10, actividad talleres. Entre otras muestras.

Todo el proceso, incluyendo la matematizacion inicial, la resolución del modelo creado y la evaluación de la respuesta obtenida, crea el amplio esquema de lo que es la modelación matemática.

5. CONCLUCIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

- Se identificaron elementos conceptuales que influyen en el proceso de matematización: inicialmente lo lingüístico y semántico (de la matemática y no matemática) y esquemático. Las variables sintácticas (sintaxis) que describen la estructura gramatical y la complejidad; como también las variables de contenido y de contexto las cuales engloban los aspectos semánticos, tanto matemáticos como no matemáticos; son las que permiten al estudiante construir representaciones mentales de los datos disponibles inicialmente, estos pueden estar de una manera explícita o implícita.

- El conocimiento esquemático es el que permite a la persona saber cómo reunir las variables de manera coherente para obtener la solución del problema, e igualmente le permite reconocer si éste se puede o no resolver. Para este proceso los alumnos recurren a sistemas de representación en el álgebra, los cuales le permiten crear un plan de solución, estos están relacionados directamente con la forma como entienden la situación. Dichos sistemas son un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto.

- Todo el proceso, incluyendo la matematizacion inicial, la resolución del modelo creado y la evaluación de la respuesta obtenida, crea el amplio esquema de lo que es la modelación matemática.

- El álgebra es un lenguaje, en el cual debe hacerse un trabajo en profundidad de la traducción (preferiblemente en los dos sentidos del natural al algebraico y viceversa).

- La traducción literal presupone el conocimiento del sistema de representación matemático y su consiguiente representación tanto en el lenguaje natural como en el algebraico.

- La traducción con evocaciones implícitas exige la comprensión de los conceptos involucrados.

- Para la resolución de problemas algebraicos esta primera etapa de la matematización es fundamental, porque de ahí depende como el alumno entiende y sabe plantear un modelo matemático del problema, para su posterior solución y evaluación de resultados a la respuesta inicial.

- Los aspectos cognitivos que influyen en el proceso de resolución de problemas, son un referente fuerte para los análisis de los temas relacionados con la lingüística.

- El grado 9° supone un manejo de lo que es el concepto de variable, pero aún se ven dificultades en su comprensión, de igual manera errores que se comenten, provenientes de la aritmética, como no interpretar bien el concepto de potencia o raíz.

- Entendiendo que la competencia algebraica no se puede valorar sólo con destrezas sino con el dominio del uso del lenguaje, consideramos que algunos de los errores cometidos por los alumnos era posible que no se produjeran si se les iniciaba en el álgebra de una manera distinta y utilizando materiales de apoyo.

- Las actividades lúdicas como el juego en efecto captan el interés de los alumnos y los mantienen centrados en lo académico

- Consideramos que, en ocasiones, al llegar a cierta etapa del aprendizaje, un gran número de alumnos tienen sentimientos contrarios a las matemáticas, más aún, si han tenido dificultades con ellas a lo largo de su etapa educativa, como sucede con los estudiantes con los que se ha trabajado en esta práctica.

- El uso de la tecnología, resulta de interés para los estudiantes, pues el uso del software Geogebra para la interpretación de las soluciones gráficas, fue muy llamativo y capto su interés. Esto se debe al carácter enactivo[55] que poseen los software de matemáticas, con estas herramientas se pueden manipular un gráfico virtual, crear dinamismo, un contacto visual que el estudiante en su abstracción se le puede dificultar. En nuestro caso, a través de Geogebra, se podían trasladar las rectas para identificar las soluciones de los sistemas de ecuaciones, sobreponer una recta sobre otra, marcar los puntos en el plano donde estas se intersectan, como ubicar parejas de puntos rápidamente en los gráficos del plano cartesiano, para constatar las soluciones obtenidas en papel.

[55] **Enactivo**: término usado por David Tall, para hacer referencia a la capacidad de manipulación interactiva que se puede realizar con los software de matemáticas, junto al hardware que permite dicha manipulación, por ejemplo el ratón de la computadora me permite en algunos programas geométricos, expandir o dilatar figuras geométricas en un plano cartesiano, propiedad que en abstracto imaginativo es más complejo de realizar o en dibujos planos.

5.2 RECOMENDACIONES

- Introducir los contenidos matemáticos a partir de situaciones contextualizadas relacionadas con el entorno social y académico de los estudiantes. Preferiblemente en contextos reales, para encontrarle a las expresiones algebraicas significados en la realidad.

- A los profesores de matemáticas: incluir desde los primeros grados de la educación básica, actividades en donde los estudiantes tengan que plantear expresiones aritméticas con el objetivo de iniciarlos en la preparación de entender expresiones algebraicas. Ya que el paso de la aritmética al álgebra supone un salto cualitativo, que para ser resuelto con éxito debería apoyarse en el conocimiento de las propiedades y relaciones que rigen el cálculo aritmético.

- Dedicarle el tiempo y los recursos didácticos necesarios al proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico y viceversa, puesto que esta es la etapa más crucial en el aprendizaje del álgebra.

- Atender las dificultades y los problemas más frecuentes que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, aplicando constantemente estrategias innovadoras que lo faciliten.

- Proporcionar y crear estrategias didácticas que desarrollen en los estudiantes una actitud positiva frente el aprendizaje de las matemáticas.

REFERENTES BIBLIOGRAFICOS

- BARRERO R., Floralba; MEJÍA, Blanca Susana, La Interpretación de la práctica pedagógica de una docente de matemáticas, 2005. Pág. 90.

- CERDA G., H. Hacia la construcción de una línea de investigación. Seminario – taller. Bogotá, Editorial Universidad Cooperativa de Colombia, 2004. Pág. 38.

- COLLIS, K. F. The development of formal reasoning. Newcastle. Australia: University of Newcastle, 1975.

- ESPINOSA, M. Los Sistemas De Representación En La Solución De Problemas De Álgebra Elemental. elisaesva@yahoo.es ; Instituto Tecnológico de Minatitlán. [citado 2 octubre 2013].Disponible en: <http://www.alammi.info/revista/numero2/pon_0009.pdf>

- FIERRO, C., FORTOUL, B y ROSAS, L. Transformando la Práctica Docente. Una Propuesta Basada en la Investigación Acción. México: Paidós, 1999. Capítulos 1 y 2.

- FILLOY, E. Aspectos teóricos del algebra educativa, citado por: Bonilla, Maricela. Del lenguaje natural al lenguaje simbólico: un estudio con alumnos de secundaria en la resolución de problemas verbales, 2009, Pág. 2.

- FONT, V. Revista la Gaceta de la RSME, Vol. 10.2: comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas, 2007. Págs. 427 – 442.

- FONT, V. y RAMOS, A.B. Contexto y contextualización en educación matemática. Una perspectiva ontosemiótica Actas del V Congreso Iberoamericano (Pág. 10). Associaçao de Professores de Matemática de Portugal: Oporto, 2006. [citado 8 octubre 2013], disponible en: http://webs.ono.com/vicencfont/FontRamos.pdf

- FREIRE, P. Pedagogía de la Autonomia: Saberes necesarios para la práctica educativa. Mexico.D.F: Siglo XXI editores,S.A. de c.v. 2006. Pág. 24.

- GARCÍA CABRERO, B., LOREDO, J. y CARRANZA, G. Análisis de la práctica educativa de los docentes: pensamiento, interacción y reflexión. Revista Electrónica de Investigación

Educativa, Especial, 2008.[Consultado el día 21 de abril del 2013],disponible en: http://redie.uabc.mx/NumEsp1/contenido-garcialoredocarranza.html

- GALICIA, S. Análisis sintáctico conducido por un diccionario de patrones de manejo sintáctico para lenguaje español. México, 2002. Disponible en: <http://www.ejournal.unam.mx/cys/vol06-02/CYS06206.pdf>

- GIMÉNEZ, J.; DIÉZ, P.; Civil, M. Educación matemática y exclusión. Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L. Barcelona, 2007. Pág. 29.

- GODINO Juan D.;FONT, Vicentc. Razonamiento Algebraico y su didáctica para Maestros, Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España , 2003. Disponible en: <http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf>

- GONZÁLES, E. Universidad Nacional de Colombia. Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la Variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas, 2012.

- HERNÁNDEZ, J., SOCAS, M. Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en sistemas de representación en Matemáticas. Revista SUMA, I seminario nacional sobre lenguaje y matemáticas, 1994. Pág. 84. [citado el 1 octubre 2013],Disponible en: <http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/082-090.pdf>

- HEUVELPANHUIZEN, M. El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje Primera parte; Correo del Maestro Núm. 160, septiembre 2009, [citado el 26 de febrero de 2014], disponible en: <http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2009/septiembre/incert160.htm>

- INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TECNICAS Y CERTIFICACIÓN (ICONTEC). Trabajos escritos: Presentación y referencias bibliográficas. Norma Técnica Colombiana (NTC) 1486, 5613 y 4490. Sexta actualización. Santafé de Bogotá D.C. 2008.

- LESH, R. La matematizacion: La necesidad “real” de la fluidez en las representaciones. Universidad de Massachusetts – Dartmouth, Revista Enseñanza de las Ciencias, 15 ed. 1997. Pág. 378.[citado 8 octubre 2013], disponible en:

<http: //www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/21507/93557.>

- MARTÍNEZ, M. Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado, tesis doctoral no publicada, Barcelona, Universidad Autónoma de Barcelona, 2003. Pág. 109.[Citado el 8 de octubre de 2013], disponible en: <http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4703/mms1de3.pdf;jsessionid=86C7B94619CD0773EBD87CE8FA207C28.tdx2?sequence=1>

- MAYER, R. E. Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona: Paidós, 1986; Sternberg, R. J. Inteligencia humana, II. Cognición, personalidad e inteligencia. Buenos Aires: Paidós, 1987.

- MEN, Ministerio de Educación nacional: Estándares Básicos en Competencias Matemáticas, 2006.

- MORENO, E. Concepciones de práctica pedagógica, Universidad Pedagógica Nacional [Citado 6 octubre 2013]. Disponible en internet < http://www.pedagogica.edu.co/storage/folios/articulos/fol16_11inve.pdf>

- ORGANIZACIÓN PARA LA COOPERACIÓN Y EL DESARROLLO ECONÓMICO (OCDE). PISA, Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura, 2006. Págs. 76, 77, 99 y 100.

- PAJARES BOX, R. Marcos teóricos de PISA. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas, 2003. Págs. 39 – 41.

- PAPINI, M. Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, RELIME, Vol. 6, Nº. 1, 2003, págs. 41-72. Disponible en : <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2092484>

- PÉREZ, I. Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica .Universidad Nacional de Colombia, Facultad de ciencias, Bogotá, 2012. Págs. 63 – 64.[citado 3 octubre 2013], disponible en: <http://www.bdigital.unal.edu.co/7098/1/01186609.2012.pdf>

- PUELLO, H.; PALMERA, D.; GALEZZO, T. Primeros pasos en el proceso de transición de la aritmética al álgebra. "La interpretación y resolución de problemas mediante procesos algebraicos". Universidad del Atlántico, Facultad de Ciencias de la Educación. Colombia, 2010.

- QUESADA, A. F. El rol del profesor de matemáticas. Madrid, España, 2012.

- RODRÍGUEZ, D. Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria. Departamento de didáctica de la matemática, Universidad de Granada, España, 2011. [citado el 12 de julio de 2012] Disponible en :
<http://funes.uniandes.edu.co/1751/1/RodriguezDomingoS_TFM_julio2011.pdf>

- RUÍZ, Gerardo., CERÓN, C., RODRÍGUEZ, I., ORDOÑEZ, C. Plan de Estudios de Matemáticas, Grupo de Didáctica de las Matemáticas, Escuela Normal Superior de Popayán, 2011.

- TALL, D. Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities and Realities, Mathematics Education Research Centre University of Warwick Coventry, CV4 7AL, UK. 1998.[citado el 27 de febrero de 2014], disponible en:
< http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1998c-icme-plenary.pdf>

ANEXOS

Anexo 1. Domino algebraico[56]

Traducimos expresiones del lenguaje natural al algebraico y viceversa.

Se prevé este contenido ya que según los estándares en matemáticas del MEN (2006), “el desarrollo del pensamiento variacional y la conceptualización de los sistemas algebraicos y analíticos, tienen como componente las representaciones verbales y simbólicas (referida a la sintaxis y semántica algebraica) como medios, que actúan de manera intermediaria en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo”. Es decir se debe trabajar en el manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.

Según (Domingo, 2011) “…*Consideramos que el análisis de los procesos de traducción en los dos sentidos pueden ser de utilidad para: (a) profundizar en la comprensión que poseen de los estudiantes del lenguaje simbólico y ayudar en la exploración de estrategias de enseñanza en el aprendizaje del álgebra y (b) indagar sobre las dificultades que tienen para escribir simbólicamente aquello que pueden encontrar enunciado de forma verbal”.*

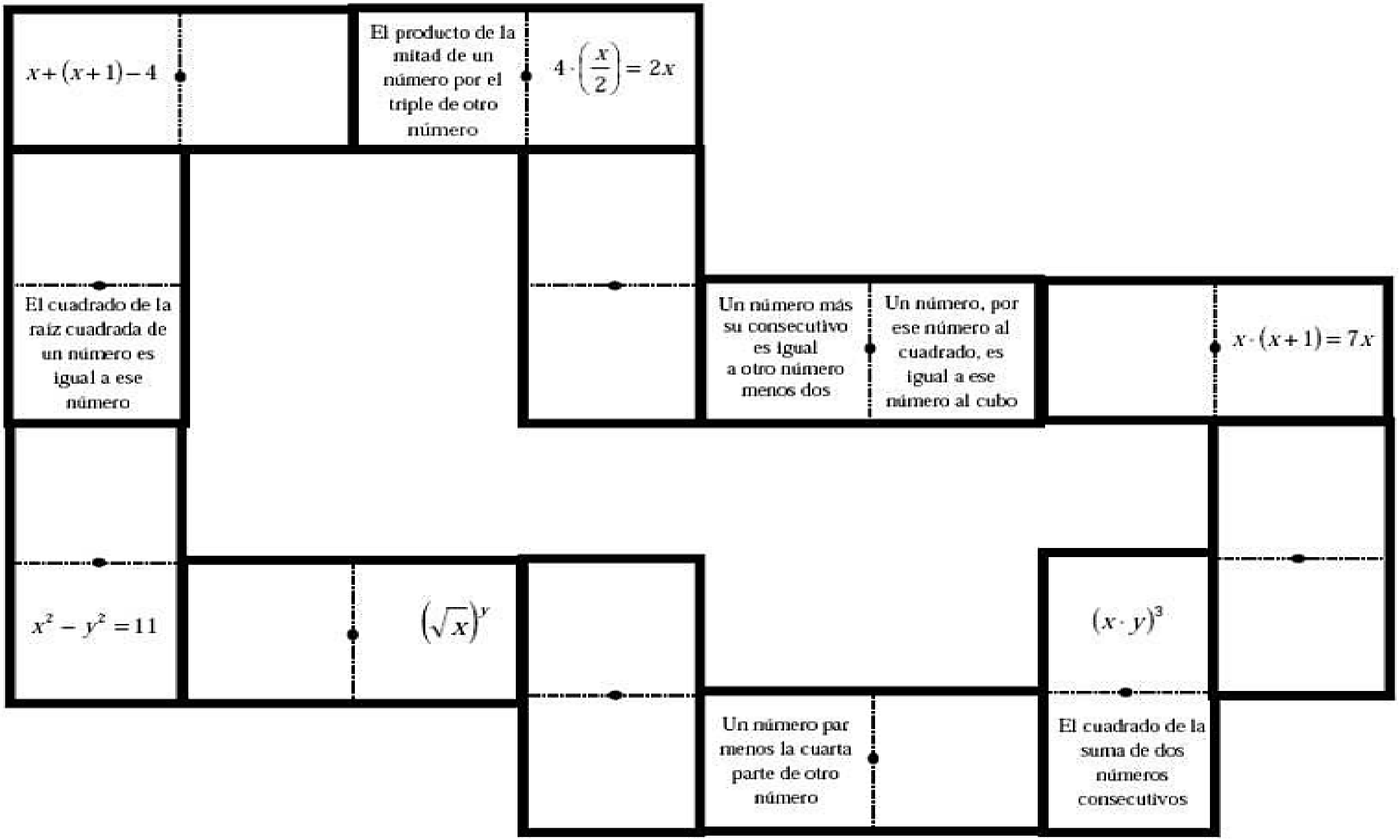
Para ello inicialmente se crea una actividad, basada en un juego denominado: *dominó algebraico,* como herramienta para este proceso de traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólica

El juego de realiza en dos fases:

Fase 1: Se presentan las fichas unidas simulando una partida de dominó jugada, para lo cual deben rellenar individualmente las partes de las fichas del juego, que posteriormente se usara en la segunda fase, denominada fichas simples.

[56] Juego creado en el trabajo: Rodríguez, D. Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria. Departamento de didáctica de la matemática, Universidad de Granada, España, 2011.

Imagen 7. Figura simulando una partida de dómino jugada



Fase 2: Construcción de las fichas del dominó, agrandadas y plastificadas, a las que se les añaden doce fichas más, llamadas fichas dobles, formadas por la expresión verbal y simbólica de los diferentes enunciados que aparecen en las fichas simples. Una vez logrado esto, realizar partidas entre grupos de 3 o 4 estudiantes, con el fin de conformar un torneo. En las siguientes imágenes se muestran las fichas simples, que deben construir los estudiantes y las fichas dobles añadidas

Imagen 8. Fichas simples

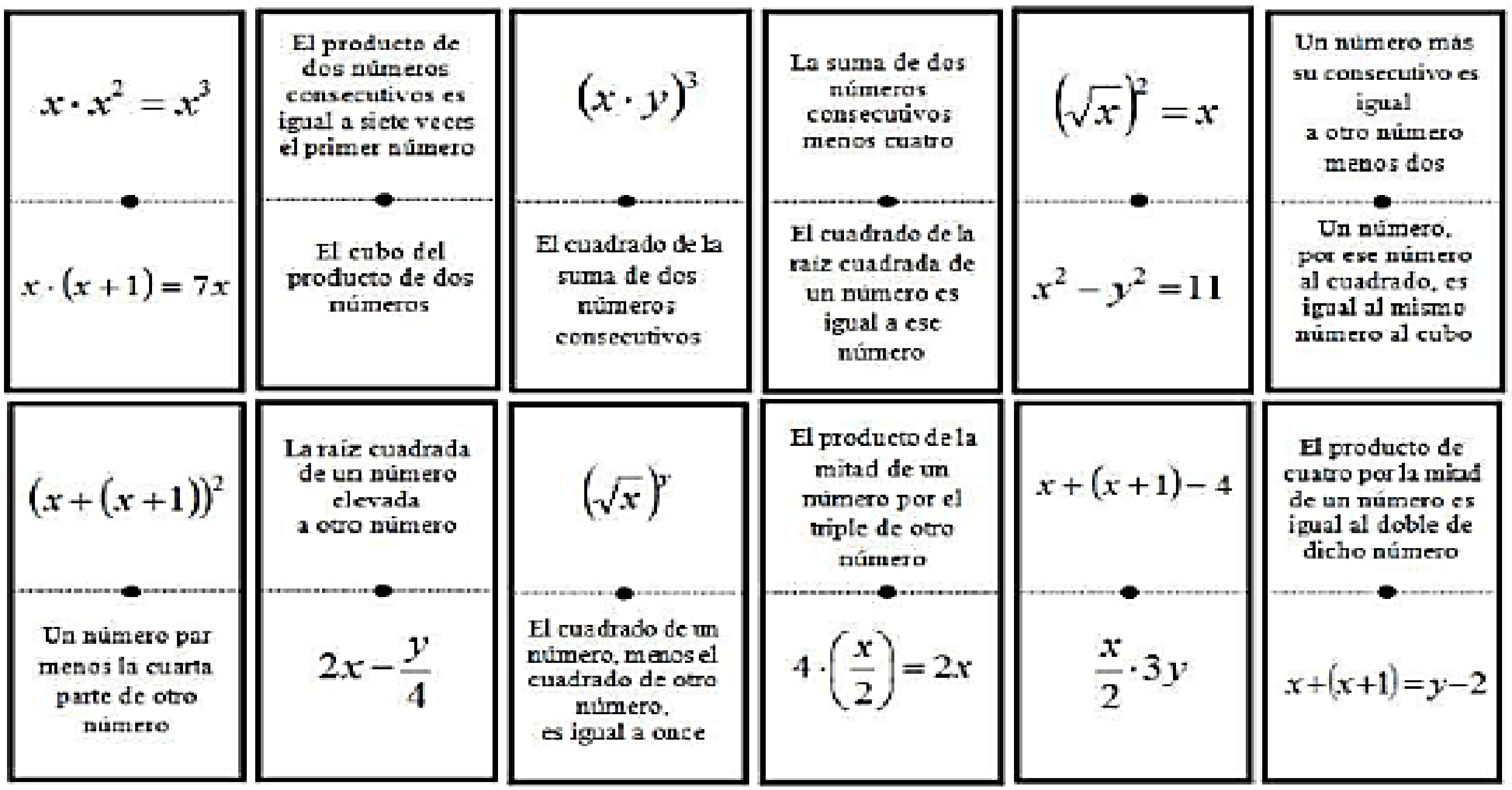
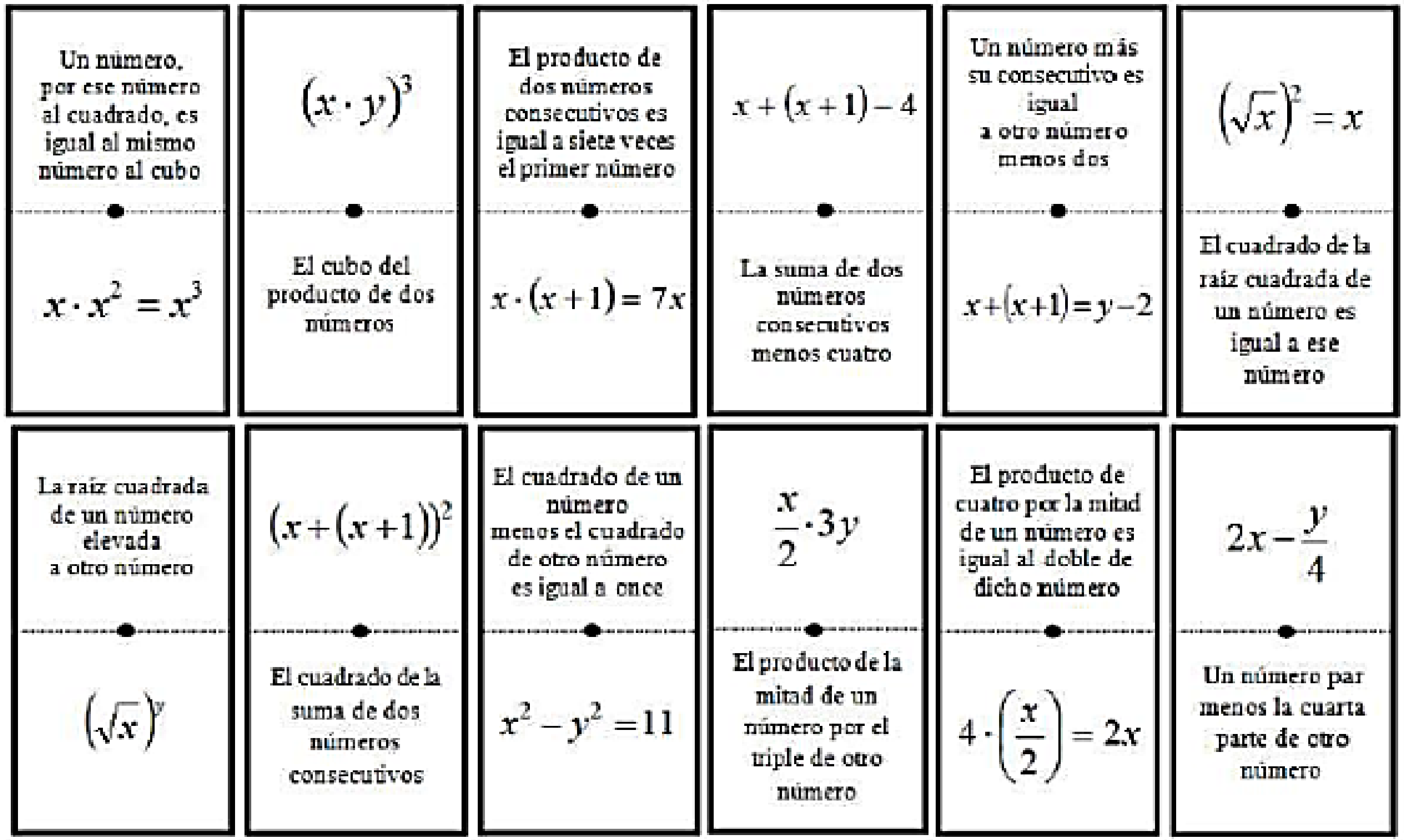


Imagen 9. Fichas dobles



Primera Fase (indicaciones): Completar el Dominó

Deben formar las fichas del juego(o el profesor previamente las puede llevar hechas). Esta fase se realiza de manera individual. Las explicaciones dadas a los sujetos fueron las siguientes:

- deben poner el nombre y apellidos en las hojas de block tamaño oficio que se les aporta, para que puedan ser identificados,
- deben realizar la tarea de manera individual, sin consultar ni a sus compañeros ni al profesor,
- deben rellenar las fichas de modo que se unan expresiones que significan lo mismo pero escritas de distinta manera, por ejemplo, una ficha puede tener un lado donde diga "$x + 2$" y otra ficha que se uniera a ella puede poner "un número más dos",
- no había piezas en blanco ni fichas dobles, como ocurre en un dominó tradicional, deben escribir las fichas mediante letras al utilizar el sistema de representación verbal. Es decir, si tenían que referirse a la cifra cinco que no usasen: "un número menos 5" sino la expresión "un número menos cinco",
- no podían hablar entre ellos durante esta parte del trabajo.

Segunda Fase: El Juego usando 24 fichas: 12 simples y 12 dobles

En la segunda fase se celebró un torneo con las fichas del dominó construidas en la primera fase. Una vez realizada una primera ronda en grupos de 3 o 4 estudiantes, se jugaron dos semifinales cada una con tres jugadores, de donde los dos jugadores con mayor puntuación fueron seleccionados para una cita final. En esta final, jugaron estos cuatro sujetos, entre los que se seleccionó un único ganador del torneo.

Para esta segunda fase se establecieron las siguientes reglas a seguir:

1. El número de jugadores debe ser de tres o cuatro personas, cada grupo tiene una muestra escogida.

2. Se reparten todas las fichas entre los jugadores, existiendo un total de veinticuatro fichas.

3. Se debe estar atento a las propias fichas y a los movimientos de los compañeros.

4. Se irán sumando puntos en las siguientes situaciones:

- un punto por cada ficha bien colocada si además se explica de manera justificada el porqué está correctamente situada
- dos puntos si corrige de manera correcta y justificada a algún compañero/a que coloque de manera errónea una ficha
- un punto al primer participante que se quede sin fichas en una partida

5. Ganará la persona que lleve más puntos en todas las partidas jugadas tras pasar treinta minutos de juego.

6. De cada treinta minutos jugados, sale un jugador ganador, que jugará en una semifinal. Los dos primeros de cada semifinal jugarán una gran final con el resto de ganadores de los otros grupos. Al final, habrá un único ganador entre todos los alumnos/as participantes que se llevará un premio.

Anexo 2: Taller 1, problema en contexto evocado introductorio, acompañado de recomendaciones para la resolución de problemas.

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYÁN

GRADO NOVENO A, PERIODO LECTIVO 2012.

Profesor: Diego Fernando Paladines

El siguiente taller se trabaja con base en una situación problema y se resolverá haciendo uso de los conocimientos algebraicos que tenemos.

Usaremos como herramienta la ecuación lineal en la resolución de la situación problema. En el uso de la herramienta obtendremos dos ecuaciones lineales, que al ser resueltas al mismo tiempo, me permite encontrar la solución al problema. Este tema de la matemática escolar se denomina sistema de ecuaciones lineales 2x2.

El siguiente problema establece un sistema de ecuaciones lineales 2x2, observa el procedimiento y contesta las preguntas:

PROBLEMA (ANIMAL-NÚMERO DE PATAS)

a) Juan cría en su finca solamente cuyes y gallinas. Un día, jugando, le dijo a su hijo:

“Contando todas las cabezas de mis animales obtengo 60 y contando todas sus patas obtengo 188. ¿Cuántos cuyes y cuántas gallinas tengo?”

Resolución:

Paso 1: Comprendiendo el problema.

¿Qué tenemos que hallar?

¿Según el problema, qué sabemos sobre los animales?

Paso 2: Elaborando un plan para solucionar el problema.

PLAN A: Estrategia: Tanteo y error organizados.

Se intenta hallar la solución dando valores al azar a la cantidad de cuyes y a partir de ellos obtener el número de gallinas. Para verificar si la respuesta es correcta se calcula el total de patas con esos valores. Se puede construir una tabla para que el trabajo sea más ordenado.

Número de cuyes	Número de gallinas	Número de patas
0	60	

Respuesta: ________________________________

PLAN B*:* Estrategia: Plantear ecuaciones.

¿Cuáles son las incógnitas del problema? Represente cada incógnita con un literal (se recomienda usar x, y o z).

Teniendo en cuenta la información suministrada por el problema ¿Qué ecuaciones puedo construir haciendo intervenir las incógnitas del problema?

¡¿Y cómo se resuelven al mismo tiempo dos ecuaciones?!

Paso 3: Resolvamos las ecuaciones al mismo tiempo

Resolviendo el sistema de ecuaciones por el **MÉTODO GRAFICO**.

Para este método se requiere hacer lo siguiente:

- Paso 1: Nombrar las ecuaciones, (Ejemplo: E1: $2x + y$), luego despejar la variable, "y" de cada ecuación.
- Ya una vez despejadas las variables "y" de las ecuaciones, creamos una tabla para cada ecuación. Le damos valores a "x".

- Ahora que ya tenemos las dos tablas, hay que graficar en el plano cartesiano cada ecuación que representa una recta.

- Haciendo uso de las hojas de papel semitransparente, poner una sobre otra haciendo coincidir los ejes y encontrar los valores de las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas.

Paso 4. Hacer la verificación

¿Cómo se comprueban las soluciones?

- Gráficamente: Las coordenadas del único punto que pertenece a ambas rectas, son la solución del sistema.

- Algebraica: Reemplazando los valores de las coordenadas del punto de intersección en cada una de las ecuaciones y comprobando que las satisfacen.

  ***Recuerda*:**

  - Una ecuación de primer grado o ecuación lineal con dos incógnitas se expresa como: $Ax + By + C = 0$, donde $A \neq 0, B \neq 0$ y además $A, B, C \in R$

  - Recordemos que un punto en el plano está dado por **P(x, y).**

Anexo 3: Taller 2, para la interpretación de la solución grafica de los sistemas de 2x2, se acompaña del Software Geogebra y diapositivas animadas en powerpoint.

Universidad del Cauca

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYÁN

GRADO NOVENO A, PERIODO LECTIVO 2012.

Profesor: Diego Fernando Paladines

Resolvamos gráficamente los sistemas de ecuaciones y comprobemos la solución.

Interpretación de la solución grafica de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

1. Los sistemas de ecuaciones lineales cuando tienen solución se dice que son **consistentes,** donde puede tener solución única o infinitas soluciones:

a) Un sistema que tiene solución única, se llama ***sistema consistente*** **con solución única** y se caracteriza en que las rectas que son gráficas de las ecuaciones que lo forman, se intersecan exactamente en un punto cuyas coordenadas corresponden a la solución del sistema.

Por ejemplo el sistema

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ x + 4y &= 8 \end{aligned}$$

tiene solución única. Resolvamos gráficamente en papel milimetrado.

b) Un sistema de ecuaciones lineales que tiene un número infinito de soluciones se llama ***sistema consistente con infinitas soluciones,*** y se caracteriza en que las gráficas de las ecuaciones que lo forman son la misma recta.

Por ejemplo el sistema

$$\begin{cases} x - \dfrac{y}{2} = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

tiene infinidad de soluciones. Resolvamos en papel milimetrado.

2. Un sistema que no tiene ninguna solución se llama ***sistema inconsistente,*** y se caracteriza en que las gráficas de las ecuaciones que lo forman son rectas paralelas y distintas entre sí.

Por ejemplo el sistema $\begin{cases} x - \dfrac{y}{2} = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ no tiene solución. Comprobemos gráficamente en papel milimetrado.

Anexo 4. Taller 3, Problema en contexto evocado

Universidad del Cauca

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYÁN

GRADO NOVENO A, PERIODO LECTIVO 2012.

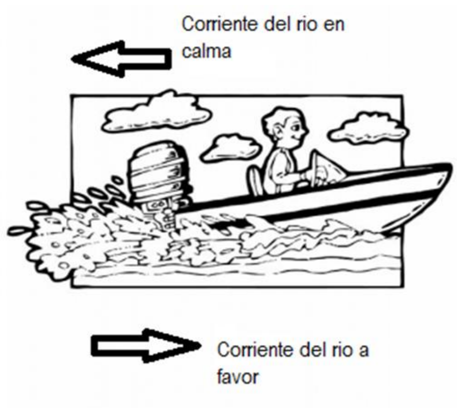
Profesor: Diego Fernando Paladines

Solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, método de igualación y sustitución.

Al resolver sistemas de ecuaciones**, el método gráfico no siempre garantiza la exactitud de los valores de las incógnitas en la pareja solución**; por ello es necesario recurrir a métodos que nos permitan operar más directamente con los coeficientes de las ecuaciones y garanticen la exactitud de los cálculos que llevan a la solución del sistema. Unos de estos métodos son de igualación y sustitución, que estudiaremos a continuación.

A. Situación problema.

Con la corriente a su favor una lancha navega a 100,5 km/h, y con la corriente en contra navega a 70,5 km/h. ¿Cuál es la velocidad de la corriente, y la de la lancha cuando el río está en calma?



Para resolver problemas

1) Comprender el enunciado.

2) Elaborar un plan para solucionar el problema:

- ¿Cuáles son las incógnitas?
- ¿Qué ecuaciones puedo construir haciendo intervenir las incógnitas?
- Traducir datos del problema al lenguaje algebraico.

4) **Resolver el sistema.**

5) Comprobar las soluciones.

¿Cómo se resuelve un sistema 2x2 de ecuaciones lineales, por el método de sustitución?

Método por sustitución

1. Se despeja una de las variables de cualquiera de las ecuaciones
2. La variable despejada en el paso 1, se sustituye en la otra ecuación por su correspondiente expresión, y se resuelve la ecuación que resulta
3. El valor de la variable obtenida en el paso 2, se sustituye en la ecuación obtenida en el paso 1.
4. Verificamos los valores encontrados para cada incógnita remplazándolos en cada ecuación.
    - Si al remplazar los valores llegamos a cantidades distintas$(a \neq b)$ a ambos lados de la ecuación, significa que el **sistema no tiene solución**.
    - Si al sustituir el valor de la variable, en el paso 2 obtengo el mismo valor a ambos lados $a = a$ de la ecuación, **el sistema tiene infinitas soluciones.**

Resolver los sistemas y explicar si tienen solución infinita o no tienen solución:

$$\begin{array}{cc} 3x + y = 8 & 5x + 2y = 8 \\ -3x - y = 5 & -2.5x - y = -4 \end{array}$$

Según los pasos anteriores, resolver el sistema de ecuaciones que resultó del problema.

Método por igualación

1. De cada ecuación se despeja la misma variable.
2. Se igualan las expresiones obtenidas
3. El valor de la variable obtenido del paso 2, se sustituye en una de las ecuaciones obtenida en el paso 1.
4. Analizar cuando se resuelve un **sistema por método de igualación**, que al igualar las dos ecuaciones se presentan en los resultados dos casos especiales:

   Caso 1: Se obtiene la expresión a ≠ b. En este caso el sistema no tiene solución y se denomina **inconsistente.**

   Caso 2: Se obtiene la expresión a = a. Significa que el sistema tiene infinitas soluciones y es llamado **consistente.**

Según lo anterior, resolver el sistema de ecuaciones que resulto del problema, y analizar los resultados obtenidos, con los del método por sustitución ¿son iguales o distintos?

Anexo 5: Taller 4, Problema en contexto evocado.

Universidad del Cauca

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYÁN

GRADO NOVENO A, PERIODO LECTIVO 2012.

Profesor: Diego Fernando Paladines

Solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2

Nombre: ____

Problema:

Un fanático de los juegos de videos compró 5 CD's del juego Mario bros y 4 CD's del hombre araña en $ 3900 pesos. Posteriormente compró 4 CD's de Mario bros y 2 CD's del hombre araña en $ 2400 pesos. ¿Cómo harías para saber el precio de los CD's de cada juego?

Para responder a la anterior pregunta debes tener en cuenta dos cosas:

1. Cuáles son las incógnitas del problema

2. Y qué relación existen entre ellas y los datos del problema.

Resolver el sistema de ecuaciones que resulta del problema, usando los 4 métodos vistos: grafico, sustitución, igualación y eliminación.

¿Qué analizas en las respuestas, al resolver el sistema por cada método?

Anexo 6: Taller 5, problema en contexto evocado complejo.

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYÁN

GRADO NOVENO A, PERIODO LECTIVO 2012.

Profesor: Diego Fernando Paladines

En muchas situaciones problema se necesitan más de dos incógnitas para expresar. En el lenguaje algebraico, las condiciones de la situación. En tales casos planteamos tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que conforman un sistema de 3x3.

Situación problema 1:

Un ganadero desea hacer negocios de compra-venta de animales con un vecino, pero tiene un problema ya que el vecino no le dice cuál es el precio de cada animal, solo le dice lo siguientes

Si vendes dos vacas y cinco cabras para comprar 13 cerdos, te sobran $ 1000 pesos.

Si vendes seis cabras y ocho cerdos para comprar cinco vacas, tendrás una pérdida de $600.

Si vendes tres vacas y tres cerdos te alcanza exactamente para comprar nueve cabras.

¿Qué harías para decirle al ganadero cuáles son los precios de una vaca, de una cabra y de un cerdo?

Situación problema 2:

Se han creado grupos de tres estudiantes del grado 9A, de los cuales deben usar sus nombres para la siguiente situación, en la que los espacios lineados o punteados hacen referencia al mismo nombre usado.

Entre _______________, ………………….. y ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,tienen $ 140 pesos. ____________ cuenta con el doble de pesos que,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,. También _______________ tiene $ 10 pesos más que…………………. ¿Cuánto dinero posee cada uno?

Representar algebraicamente las ecuaciones del problema.

¿Qué hacer para saber cuánto dinero tiene cada uno?

Anexo 7: Actividad ecuacartas

Se deben repartir estas cartas por grupo de 4 personas, posteriormente se les pide a los estudiantes, que deben asociarlas de tal manera que el sistema de representación algebraico y geométrico sea equivalente a la carta enumerada.

Para registrar la comprensión de la matematización se crean unas reglas de juego (guía 1) plasmadas en una guía la cual deben de responder paso a paso. Además se les facilita en otra guía con pautas (guía 2) que deben tener en cuenta para justificar el porqué de la escogencia del sistema algebraico.

Cartas para recortar:

CARTA 1

DOS NUMEROS CUYA SUMA ES IGUAL A 3

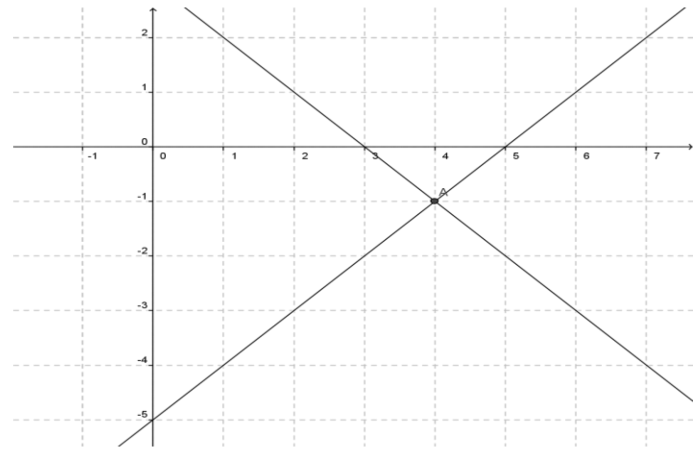
Y

SU DIFERENCIA IGUAL A 5

¿CUÁLES SON ESOS NUMEROS?

$$X + Y = 3$$

$$X - Y = 5$$



CARTA 2

LINA TIENE EL TRIPLE DE

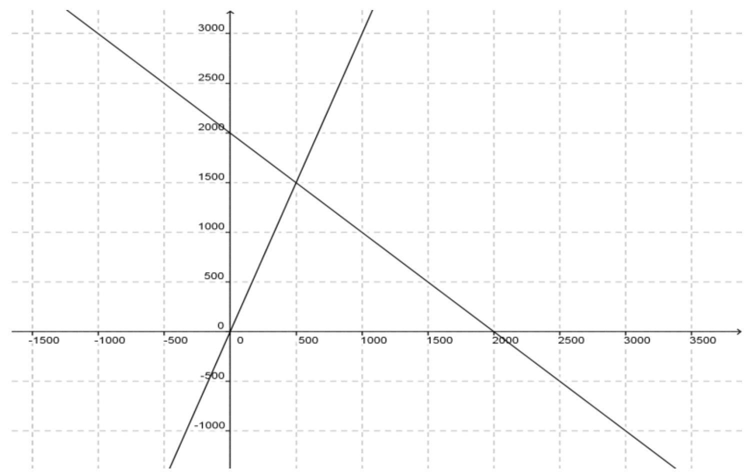
DINERO QUE JULIÁN Y

ENTRE AMBOS TIENEN $ 2000 PESOS,

¿CUÁNTO DINERO TIENE CADA UNO?

$$Y = 3X$$

$$X + Y = 2000$$



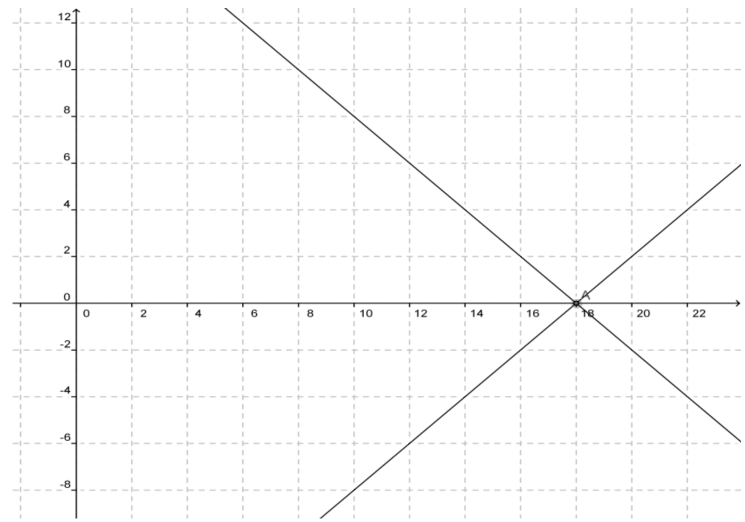
CARTA 3

LA DIFERENCIA DE DOS NUMEROS ES 18 Y LA TERCERA PARTE DE SU SUMA ES IGUAL A 6.

¿CUÁLES SON ESOS NUMEROS?

$$X - Y = 18$$

$$\frac{X+Y}{3} = 6$$



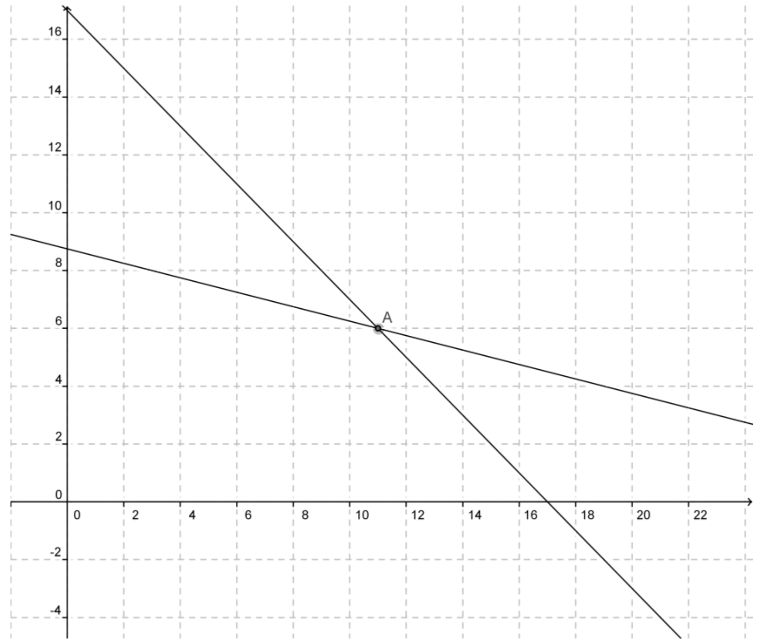
CARTA 4

WILLIAM GASTA $ 1700 PESOS EN LA COMPRA DE GOMITAS Y CHICLES, EN TOTAL SON 17 DULCES. LAS GOMITAS LE COSTARON $ 50 PESOS Y LOS CHICLES $ 200 PESOS.

¿CUÁNTOS DULCES DE CADA TIPO COMPRÓ?

$$X + Y = 17$$

$$50X + 200Y = 1700$$



Imágenes de los planos cartesianos hechos con software gratuito Geogebra.

Anexo 8: Guías 1 y 2 para tomar registros de aspecto relacionados con la matematizacion

Guía 1

JUEGO ECUACARTAS

Este juego consiste en asociar las tres cartas que corresponden al mismo problema, estas son: El enunciado en forma de palabras, su expresión algebraica o ecuaciones y su solución por el método gráfico.

Para ganar puntos debes cumplir las reglas

REGLAS DEL JUEGO:

1. Escribir en el siguiente espacio, qué tuviste en cuenta para asociar las ecuaciones con el enunciado escrito en palabras dado en las **cartas** que están enumeradas:

CARTA #_____

____

____

____

____

____

2. En las siguientes tablas, para cada ecuación del sistema analizado, encontrar dos puntos.

Ecuación N° 1: _______________

X	Y	(X,Y)

Ecuación N° 2: __________________

X	Y	(X,Y)

3. Graficar en el papel milimetrado cada una de las rectas que representan las ecuaciones del sistema analizado; y comparar con los gráficos dados.

4. Responder a la pregunta de cada problema en la carta, usando la solución gráfica del problema.

____

____

Guía 2.

Para recordar:

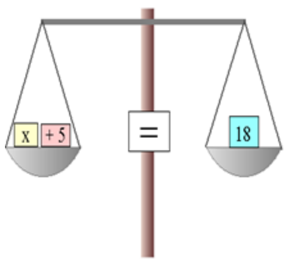
Para traducir fraces del lenguaje común al lenguaje algebraico, debemos seguir los siguientes pasos:

1) **Definir variables implicadas**
2) **Identificar las palabras claves**
3) **Identificar el tipo de operacion indicada**
4) **Escribir las expresiones algebraicas adecuadas.**

* A continuación se presenta una lista de palabras "CLAVES" a tener en cuenta al momento de traducir frases del lenguaje común al algebraico.

Palabras que indican adición	Palabras que indican sustracción	Palabras que indican multiplicación	Palabras que indican división
Mas	Menos	Por	Dividido
Excede	Diferencia	Producto	cociente
Mas que	Menos que	Multiplicado	La mitad
Aumentado en	Disminuido en	Del doble	La tercera parte
Total		El doble	
Suma		Dos veces	
		El triple	

Anexo 9: ***Actividad igualdad y equivalencia***con la cual se pretende hacer un análisis de la apropiación de conceptos que intervienen en el objeto de estudio, esto con el propósito de buscar implicaciones y dificultades que surgen de erróneas conceptualizaciones.



IGUALDAD Y EQUIVALENCIA

Estudiante____ Fecha____________

Objetivo: comprender el sentido de equivalencia en la igualdad

1. Encuentra diferentes maneras de expresar cada uno de los siguientes números usando como mínimo dos operaciones en cada caso; luego iguala las expresiones obtenidas.

Por ejemplo:

El número 10 se puede expresar como $(3\ x\ 2)\ +\ 4$; ó como $2\ +\ (16/2)$

Entonces $(3\ x\ 2)\ +\ 4 =\ 2\ +\ (16/2)$

Número	**Se puede expresar como**	**Se puede expresar como**	**Iguala las expresiones**
9			
13			
12			
8			
25			
36			
17			

2. Observa las siguientes expresiones. Cada una de ellas tiene un enunciado que involucra cantidades. En cada caso, diga si el enunciado es:

a) siempre verdadero

b) verdadero sólo en algunos casos

c) núnca verdadero

Justifique si respuesta

- 5+3=8 Es:______________________

  Porque:

____
____
____
____

- 2+14=16 Es:_____________________

  Porque:

  ____
  ____
  ____

- 3+y=5 Es: ___________________

  Porque:

  ____
  ____
  ____

- 3x = 2x+ 1 Es: ____________________

  Porque:

  ____
  ____
  ____

- 3x = 3x + x Es:____________________

Porque:

____
____
____

3. *Una balanza es un buen modelo visual para representar la equivalencia de cantidades*.[57] Las figuras siguientes representan dos platos de una balanza en equilibrio. En el de la izquierda hay latas de salchichas y en el de la derecha hay barras de hierro. Completa con base en los dibujos:

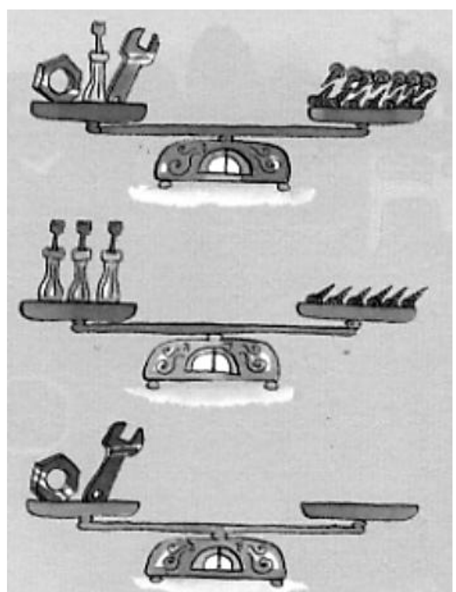
- 7 latas de salchicha tiene la misma masa que ________ barras de hierro

- ____ barra de hierro tienen la misma masa que una bola de hierro y _____ latas de salchicha.

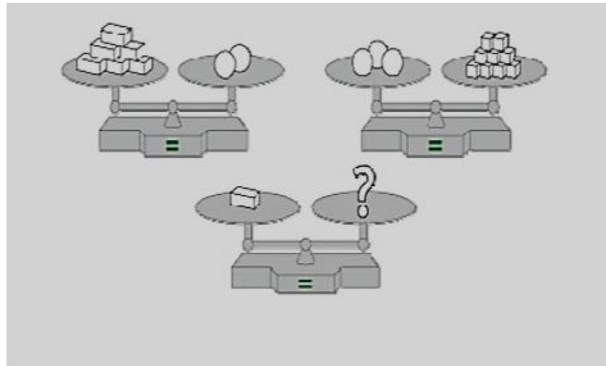
[57] Actividad basada en el documento: Godino Juan D. Font, Vicentc. Razonamiento Algebraico y su didáctica para Maestros, Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España , 2003.

- Una bola de hierro tiene la misma masa que_____________________

4. cuantos tornillos hay que poner en la tercera balanza para que quede equilibrada.



5. En la siguiente gráfica, dibuje la figura que equilibrara la tercera balanza, partiendo de que en las tres balanzas, las figuras iguales tienen el mismo peso.



6. Para cada expresión del problema dos, dibuje una balanza que la represente.

7. ¿Qué significado tiene el signo igual en todas las actividades anteriores?

Anexo 10: Matrices de categorías deductivas

Matriz Análisis de Registros

Diego Fernando Paladines Salazar

Licenciatura en Matemáticas

Práctica Pedagógica IV

Actividad: Ecuacartas

	CATEGORÍAS DEDUCTIVAS(Lectura de registros)				
Categoría contextual: Contexto o enunciado: - Matemático - Evocado	Categoría lingüística: Semántica o Sintaxis.	Categoría descriptiva e interpretativa:	Categoría conceptual: Concepto de igualdad, equivalencia y ecuación.	Categoría constructi-va	Categoría de sistema de representación algebraico: Variable como Incógnita, relación funcional y patrón general.

	Cód. CD1.	Cód. CD2.	Cód. CD3.	Cód. CD4.	Cód. CD5.	Cód. CD6.
	<u>**La carta 1**</u> presenta contexto matemático**:** ***" Dos números cuya suma es igual a 3 y su diferencia igual a 5"*** ***¿Cuáles son esos números?*** El contexto matemático, es claro para la todas de muestras, no hay significados implícitos de mayor análisis.	**H1, M2, H5:** Los estudiantes al leer el enunciado verbal comprenden que se trabaja con dos números y dos operaciones.	**H1**: Identifica al leer, que la suma de dos números es igual a 3, procede a revisar la carta que ha escogido encontrándose con la ecuación x + y = 3. Interpreta La diferencia, como la operación resta; de este modo, relaciona la ecuación, $x - y = 5$, con el enunciado en palabras, expresando: " ésta, es la diferencia entre dos números." **M2:** carta 1: *" nosotros escogimos la carta 1, porque dice que dos números cuya suma es igual a 3 y la ecuación esta* $x + y = 3$, *y su diferencia igual a 5, y la ecuación esta* $x - y = 5$*"* Interpreta	**H1, H5:** Conceptualmente, la igualdad es tenida en cuenta como un ***resultado*** de sumar x + y o restar $x - y$. **M2:** La igualdad también estenida en cuenta como el resultado de sumar $x + y$ o restar $x - y$.		**H1:** El estudiante reconoce las letras como un número. Es decir como unos **patrones generales.** En la relación que hace con la carta escogida, identifica a x e y como números, expresa: "como$\boldsymbol{x}$ es un número y$\boldsymbol{y}$ otro, al sumar estos dos números da como resultado 3, además $\boldsymbol{x}$menos otro número $\boldsymbol{y}$ da igual a 5. **M2:** Relaciona las ecuaciones $\boldsymbol{x + y = 3}$ $\boldsymbol{x - y = 5}$ con el enunciado de la carta número 1. Identifican a las letras x e y como 2 números, las variables como ***patrones generales***, ya que expresan: *" nosotras escogimos la carta 1, porque dice que dos números cuya suma*

			La diferencia, como la operación resta; de este modo, relaciona la ecuación, $x - y = 5$, Con el enunciado en palabras, expresando: “ésta, es la diferencia entre dos números.”			*es igual a 3 y la ecuación esta* $x + y = 3$*, y su diferencia igual a 5, y la ecuación esta* $x - y = 5$*”*
	<u>**Carta 2,**</u> Contexto evocado: **“Lina tiene el triple de dinero que Julián y entre ambos tienen $ 2000 pesos,** **¿Cuánto dinero tiene cada uno?** El contexto no presenta mayor contenido implícito, pero si se debe conocer o asociar expresiones como: el triple de una cantidad, con su respectiva simbolización algebraica, 3x.	**H2:** comprende que hay una situación en la cual se presentan dos cantidades de dinero relacionadas, ya que siguiendo linealmente la escritura del problema escribe que <u>$\boldsymbol{y = 3x}$, ***significa que Lina tiene el triple de dinero que Julián***</u> y además que sumadas dan como resultado 2000 mil pesos. **M4:** el estudiante reconoce que hay dos cantidades de dinero las cuales al unirse suman 2000 mil y además una es el triple de dinero de otra. Pues se justifica mostrando las ecuaciones $y = 3x$, $x + y = 2000$.	**H2**: interpreta el triple como $3x$, tres veces una cantidad. **M4:** Describe que hay un sinónimo entre las expresiones ***“entre ambos” y “ambos reúnen”,*** y lo interpreta como la operación suma de cantidades.	**H2:** Se observa que identifica **una equivalencia** entre las dos expresiones de la ecuación $y = 3x$, pues expresa que y es la cantidad de dinero que posee Lina y este es igual a el triple de dinero que posee Juan**.** Respecto a la ecuación $x + y = 2000$, es visto el término del lado derecho como el **resultado** de sumar dos cantidades de dinero. Expresa: “***el total de lo que tienen ambos es de $ 2000 pesos.”*** **M4**: la ecuación algebraica $x + y = 2000$ es tomada como **una equivalencia**, pues expresa que “$x + y$ es		**H2**: Reconoce las variables **como patrón general,** expresa: ***“*** *Lina tiene el triple de dinero de lo que tiene Julián y el total de lo que tienen ambos es de $2000 pesos,* $y = 3x$*”* *Además asocia la segunda parte del enunciado con la ecuación* $x + y = 2000$ Reconoce las letras como: el dinero de cada uno de los personajes. x= dinero que posee Julián, y= dinero que posee Lina. **M4:** La estudiante, no expresa explícitamente la relación de

		M3: comprende que hay dos cantidades de dinero relacionadas entre sí, con las que se obtendrán unos resultados específicos.	**M3**: interpreta el triple como $3x$, tres veces una cantidad. Además interpreta la reunión de los dos dineros , como la suma de los dineros individuales.	la cantidad de dinero que ambos reúnen.” **M3:** se observa que ***la expresión*** $\boldsymbol{y = 3x}$ ***representa una equivalencia*** de valores, pues la estudiante relata: “ que la ecuación representa que Lina tiene el triple de dinero que Julián” La ecuación $x + y = 2000$, es vista como un resultado de sumar $1500 + 500$		correspondencia entre las dos variables, como una relación funcional. **M3:** ***la variable como relación funcional***, es captada, ya que en la expresión “entre ambos tienen 2000 pesos” hace que el estudiante escriba la expresión: $x + y = 1500 + 500$, con lo cual le da valores a cada variable. Con lo cual el resultado de la suma representa lo que las dos personas reunieron.
	Carta 3, Contexto matemático: **La diferencia de dos números es 18 y la tercera parte de su suma es igual a 6. ¿Cuáles son esos números?** Información implícita en lo verbal, referido a las operaciones, llevan a confusión.	**H1: el** estudiante identifica el uso de dos operaciones suma y resta. Se confunde en la comprensión de : “ la tercera parte de su suma es igual a 6”, pues al justificar, la escogencia de la ecuación $\boldsymbol{\frac{x+y}{3} = 6}$ **,** relata : “ la suma de 2 números en el denominador, dividido con 3 da igual a la tercera parte de 18”	**H1:** Interpreta la expresión en lenguaje natural: ***tercera parte, como la división entre 3.*** Pues la asocia la ecuación $\boldsymbol{\frac{x+y}{3} = 6}$**,** indicando que hay una división de dos números entre 3. La escribe como: *“la suma de dos números en el denominador (se equivoca es numerador) dividida con 3 es igual a a la tercera parte de 18”.*	**H1:** Para el estudiante la ecuación $x - y = 18$ identificada en las cartas, la analizan como el ***resultado*** de restar x con y.		**H1: Asocia las ecuaciones** • $\boldsymbol{x - y = 18}$ • $\boldsymbol{\frac{x+y}{3} = 6}$ Con el enunciado en lenguaje natural, identificando a x e y como 2 números, ***patrones generales,*** él sabe que son números “expresa que la resta de dos números es igual a 18, y la división entre 3 de esos dos números es igual a la tercera parte de 18, ubicando el número 6 como el término a la derecha de la ecuación, analizada.

Matriz Análisis de registros

Diego Fernando Paladines Salazar

Licenciatura en Matemáticas

Práctica Pedagógica IV

Actividad: Talleres

CATEGORÍAS DEDUCTIVAS(Lectura de registros)					
Categoría contextual: **Contexto o enunciado:** - **Matemático** - **Evocado**	**Categoría lingüística:** **Semántica o Sintaxis.**	**Categoría descriptiva e interpretativa:**	**Categoría conceptual:** **Concepto de igualdad, equivalencia y ecuación.**	**Categoría constructiva.**	**Categoría de sistema de representación algébrico:** **Variable como Incógnita, relación funcional y patrón general.**
Cód. CD1.	**Cód. CD2.**	**Cód. CD3.**	**Cód. CD4.**	**Cód. CD5.**	**Cód. CD6.**

	Contexto evocado: **"Con la corriente a su favor una lancha navega a 100,5 km/h, y con la corriente en contra navega a 70,5 km/h. ¿Cuál es la velocidad de la corriente, y la de la lancha cuando el río está en calma?"** El contexto presenta datos de manera implícita lo cual dificulta el análisis semántico de la situación, y esto se traduce en confusiones para el planteamiento de las ecuaciones. Para tal caso deben comprender : **Con la corriente a favor la lancha navega más rápido y con la corriente en contra navega más lento.**	**H1**: No hay una clara comprensión de la situación, ya que no logra darse cuenta que las velocidades se corresponden en ese contexto. **M5**: Comprende la situación en la cual: con la corriente a favor la lancha navega más rápido, es decir la velocidad de la corriente le suma valor a la velocidad de la lancha. Identifica las incógnitas y genera una ecuación correspondiente a la situación dada.	**H1:** interpreta la diferencia de la velocidad mayor 100.5 con la velocidad menor 70.5, como el resultado que dará la velocidad de la corriente, cuando el rio está en calma. No relaciona las incógnitas con los datos del problema. **M4 Y H6:** No comprenden el significado: "*velocidad de la lancha con la corriente a su favor y en contra"*, por ende la **no** relación entre las incógnitas y los interrogantes., pues solo se basan en los datos numéricos para intentar dar respuesta a las preguntas.	**M4:** Intenta realizar una igualdad entre dos expresiones, una algebraica y una numérica: que ella plantea como $x + y$ ***debe ser igual a algo***, *a* algún valor numérico, e intenta hallarlo, operando los datos numéricos 100,5 y 70,5. Hace referencia a una ecuación, tomando como igualdad una expresión algebraica y una numérica. **M4 Y H6:** Al momento de leer el enunciado del problema, solo se centran en los valores numéricos que este ofrece. Con ellos buscan operar y llegar a resultados.	**H1**, se basa en un gráfico que el construye para plantear las ecuaciones, indicando con flechas la dirección de las velocidades, hacia la derecha velocidad a favor; y hacia la izquierda velocidad en contra. Pero finalmente, lo induzco a plantear el sistema de ecuaciones, pues no comprende la situación del problema, en sus significados implícitos. **M5**: plantea una de las ecuaciones del sistema, comprendiendo la situación descrita en el problema: **Con la corriente a su favor una lancha navega a**	**M5:** Identifica las **variables como incógnitas, tomando:** X = ***velocidad de la corriente*** Y =***velocidad de la lancha, cuando el rio está en calma.*** Además identifica las variables, como **un patrón general** y en relación funcional pues expresa: " es posible reemplazar en las ecuaciones las letras por cualquier número para encontrar la solución?" **H6**: intenta usar las letras como incógnitas, para plantear la ecuación, finalmente me doy cuenta por su manera de reflexión, que no logra relacionar bien el sentido semántico del enunciado, ya que además cree encontrar la respuesta a las incógnitas si a 100,5 se le resta 70,5

					100,5; $x + y = 100,5$**, en la ecuación identifica a la variable x como la velocidad de la corriente y la variable *y* como la velocidad de la lancha cuando el rio está en calma, además interpreta la ecuación como la velocidad de la lancha con la corriente a su favor.** **M5**: ***Se basa en la estructura lineal del enunciado para crear las ecuaciones.*** Interpreta incorrectamente, **"Con la corriente a su favor una lancha navega a 100,5 km/h, y con la corriente en contra navega a 70,5 km/h.** Esta lectura hace	

					que infieran que el valor de la variable $y = 100.5$ y el valor de $x = 70{,}5$, luego restan e igualan a 30, lo que da como resultado: $y - x = 30$. **H6:** intenta generar una ecuación sin comprender los datos del problema: "hay que restar ahí"?, expresa esto cuando el docente señala las incógnitas.	
	Contexto evocado: ***Un ganadero desea hacer negocios de compra-venta de animales con un vecino, pero tiene un problema ya que el vecino no le dice cuál es el precio de cada animal, solo le dice lo siguiente:*** ***Si vendes dos vacas y cinco cabras para comprar 13 cerdos, te sobran $ 1000 pesos.*** ***Si vendes seis cabras y ocho cerdos para comprar cinco***	Contexto con estructura lineal, que permite una interpretación de izquierda a derecha	Identifica la relación entre el valor de los animales y la cantidad de cada especie.	Concepto de igualdad, captado como una equivalencia, pues en las expresiones algebraicas, se comparan las situaciones: Primera expresión algebraica matematizada: $2x + 5y = 13z + 1000$ *M4: "si se venden dos vacas y cinco cabras entonces alcanzaría para comprar esto*		

	vacas, tendrás una pérdida de $600. ***Si vendes tres vacas y tres cerdos te alcanza exactamente para comprar nueve cabras.*** ***¿Qué harías para decirle al ganadero cuáles son los precios de una vaca, de una cabra y de un cerdo?***			*/señala la escritura de 13 cerdos/, entonces al vender esto, /señala el lado izquierdo de la expresión algebraicas que ha creado* $2x + 5y = 13z + 1000$*/, esto sería igual, ósea igual vendría siendo comprar /señala con sus dedos la palabra comprar, y de igual manera el signo igual/ 13 cerdos más mil pesos, que es lo que sobra”* Segunda expresión: $6y + 8z = 5x - 600$ *M4: “si vende seis cabras,* $6y$ *y ocho cerdos* $8z$ */señala las respectivas expresiones algebraicas/, eso te alcanzaría para comprar, ósea igual /señala el símbolo=/ a cinco vacas, /señala la expresión* $5x$*/ menos seiscientos pesos porque es perdida, ósea negativo.*		

Anexo11: Matriz de categorías inductivas

Organización de lectura de registros

Diego Fernando Paladines Salazar

Licenciatura en Matemáticas

Práctica Pedagógica IV

Categorías inductivas

	REGISTROS DE ACTIVIDADES	
CATEGORÍAS DEDUCTIVAS	**Lecturas de registros**	**Categorías inductivas**
CATEGORÍA SEMÁNTICA O SINTÁCTICA: **CD2**	➢ No hay una clara comprensión de la situación, ya que no logra darse cuenta que las velocidades se corresponden en ese contexto.(LT3) ➢ Los estudiantes al leer el enunciado verbal comprenden que se trabaja con dos números y dos operaciones.(LEC)	✓ Conocimiento semántico (CON – SEM) ✓ Conocimientos previos sobre el contexto (CON - TEX)

	➢ El estudiante, reconoce que hay dos cantidades de dinero las cuales al unirse suman 2000 mil y además una es el triple de dinero de otra. Pues se justifica mostrando las ecuaciones $y = 3x$, $x + y = 2000$.(LEC) ➢ Comprende que hay dos cantidades de dinero relacionadas entre sí, con las que se obtendrán unos resultados específicos.(LEC) ➢ El estudiante identifica el uso de dos operaciones suma y resta. Se confunde en la comprensión de : " la tercera parte de su suma es igual a 6", pues al justificar, la escogencia de la ecuación $\frac{x+y}{3} = \mathbf{6}$ **,** relata : " la suma de 2 números en el denominador, dividido con 3 da igual a la tercera parte de 18"(LEC) ➢ Comprende la situación en la cual: <u>*con la corriente a favor la lancha navega más rápido, es decir la velocidad de la corriente le suma valor a la velocidad de la lancha*</u>. Identifica las incógnitas y genera una ecuación correspondiente a la situación dada.(LT3) ➢ Comprende que hay una situación en la cual se presentan dos cantidades de dinero relacionadas, ya que siguiendo linealmente la escritura del problema	✓ Estructura sintáctica con significados: - explícitos (lineal) - implícitos (Estructura jerárquica de las palabras) (ESTRUC – SINT)

	escribe que ***<u>$y = 3x$, significa que Lina tiene el triple de dinero que Julián</u>*** y además que sumadas dan como resultado 2000 mil pesos. (LEC). ➢ Realiza un traducción literal de izquierda a derecha, basándose en la comprensión de las palabras y sus relaciones.(LT5)	
CATEGORÍA DESCRIPTIVA E INTERPRETATIVA **CD3**	➢ Identifica al leer, que la suma de dos números es igual a 3, procede a revisar la carta que ha escogido encontrándose con la ecuación $x + y = 3$. Interpreta La diferencia, como la operación resta; de este modo, relaciona la ecuación, $x - y = 5$, con el enunciado en palabras, expresando: "ésta, es la diferencia entre dos números."(LEC) ➢ Interpreta el triple como 3x, tres veces una cantidad.(LEC) ➢ Interpreta la expresión en lenguaje natural: ***tercera parte, como la división entre 3.*** Pues la asocia la ecuación $\frac{x+y}{3} = 6$, indicando que hay una división de dos números entre 3. La escribe como: *"la suma de dos números en el denominador (se equivoca es numerador) dividida con 3 es igual a a la tercera parte de 18".(LEC)*	✓ Palabras "claves" a tener en cuenta al momento de traducir frases del lenguaje común al algebraico. (PCLAVES)

	➢ No comprenden el significado: "*velocidad de la lancha con la corriente a su favor y en contra*", por ende la **no** relación entre las incógnitas y los interrogantes., pues solo se basan en los datos numéricos para intentar dar respuesta a las preguntas.(LT3)	✓ Análisis de contextos. (**El contexto en la resolución de problemas matemáticos)** (AN – CONT)
CATEGORÍA CONCEPTUAL : CONCEPTO DE IGUALDAD, EQUIVALENCIA Y ECUACIÓN. **CD4**	➢ Intenta realizar una igualdad entre dos expresiones, una algebraica y una numérica: que ella plantea como $x + y$ *debe ser igual a algo, a* algún valor numérico, e intenta hallarlo, operando los datos numéricos 100,5 y 70,5. Hace referencia a una ecuación, tomando como igualdad una expresión algebraica y una numérica.(LT3) ➢ Conceptualmente, la igualdad es tenida en cuenta como un ***resultado*** de sumar $x + y$ o restar $x - y$.(LEC) ➢ La igualdad también es tenida en cuenta como el resultado de sumar $x + y$ o restar $x - y$.(LEC) ➢ Se observa que identifica **una equivalencia** entre las dos expresiones de la ecuación $y = 3x$, pues les dice que y es la cantidad de dinero que posee Lina y este es igual a el triple de dinero que posee Juan**.** Respecto a la ecuación $x + y = 2000$, es visto el término del	✓ La igualdad y ecuación en la resolución de problemas algebraicos.(proceso de matematización) (IGUAL - ECUA) ✓ Equivalencia en el proceso de matematización. (EQUIV)

	lado derecho como el **resultado** de sumar dos cantidades de dinero. Expresa: "***el total de lo que tienen ambos es de $ 2000 pesos."(LEC)*** ➢ La ecuación algebraica $x + y = 2000$ es tomada como **una equivalencia**, pues expresa que "$x + y$ es la cantidad de dinero que ambos reúnen."(LEC) ➢ Se observa que ***la expresión $y = 3x$ representa una equivalencia*** de valores, pues la estudiante relata: " que la ecuación representa que Lina tiene el triple de dinero que Julián" La ecuación $x + y = 2000$, es vista como un resultado de sumar $1500 + 500$. (LT3)	
CATEGORÍA CONSTRUCTIVA **CD5**	➢ El estudiante **se basa en un gráfico** que el construye para plantear las ecuaciones, indicando con flechas la dirección de las velocidades, hacia la derecha velocidad a favor; y hacia la izquierda velocidad en contra. Pero finalmente, lo induzco a plantear el sistema de ecuaciones, pues no comprende la situación del problema, en sus significados implícitos.(LT3) ➢ Plantea una de las ecuaciones del sistema, comprendiendo la situación descrita en el problema: **Con la corriente a su favor una lancha navega a 100,5; $x + y = 100,5$, en la ecuación identifica a la**	✓ Apoyo gráfico (GRAFICO) ✓ Comprensión lingüística (C- LIN)

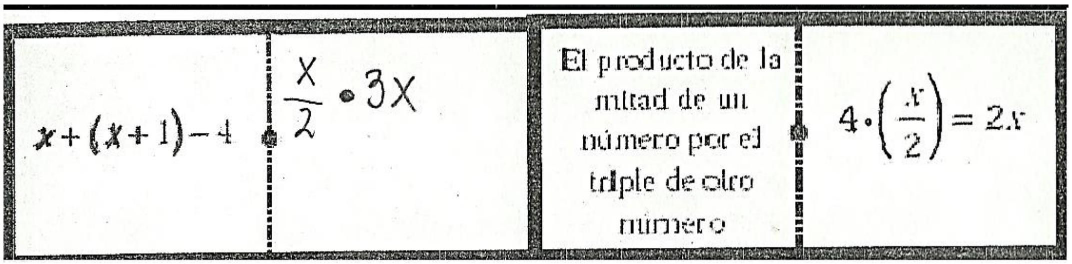
	variable x como la velocidad de la corriente y la variable $y$como la velocidad de la lancha cuando el rio está en calma, además interpreta la ecuación como la velocidad de la lancha con la corriente a su favor.(LT3) ➢ *Se basa en la **estructura lineal del enunciado** para crear las ecuaciones.* Interpreta incorrectamente, **“Con la corriente a su favor una lancha navega a 100,5 km/h, y con la corriente en contra navega a 70,5 km/h.** Esta lectura hace que infieran que el valor de la variable $y =$ 100.5 y el valor de $x =$ 70,5, luego restan e igualan a 30.5, lo que da como resultado: $y - x = 30{,}5$.(LT3) ➢ intenta generar una ecuación sin comprender los datos del problema: “¿hay que restar ahí?”, expresa esto, cuando el docente señala las incógnitas.(LT3)	✓ Apoyo intuitivo (INTU)
CATEGORÍA DE SISTEMA DE REPRESENTACIÓN ALGEBRAICO:	➢ El estudiante reconoce las letras como un número. Es decir como unos **patrones generales.** En la relación que hace con la carta escogida, identifica a x e y como	✓ Noción de variable (N – VAR)

VARIABLE COMO INCOGNITA, RELACIÓN FUNCIONAL PATRÓN GENERAL **CD6** **.**	números, expresa: "como $\boldsymbol{x}$ es un número y $\boldsymbol{y}$ otro, al sumar estos dos números da como resultado 3, además $\boldsymbol{x}$ menos otro número $\boldsymbol{y}$ da igual a 5. (LEC) ➢ Relaciona las ecuaciones $\boldsymbol{x + y = 3}$ $\boldsymbol{x - y = 5}$ con el enunciado de la carta número 1. Identifican a las letras x e y como 2 números, las variables como ***patrones generales***, ya que expresan: *" nosotras escogimos la carta 1, porque dice que dos números cuya suma es igual a 3 y la ecuación esta* $x + y = 3$*, y su diferencia igual a 5, y la ecuación esta* $x - y = 5$*"(LEC)* ➢ Reconoce las variables **como patrón general,** expresa: ***"*** *Lina tiene el triple de dinero de lo que tiene Julián y el total de lo que tienen ambos es de \$2000 pesos,* $y = 3x$*".* *Además asocia la segunda parte del enunciado con la ecuación* $x + y = 2000$*.* Reconoce las letras como: el dinero de cada uno de los personajes. x= dinero que posee Julián, y= dinero que posee Lina.(LEC) ➢ ***La variable como relación funcional***, es captada, ya que en la expresión "entre ambos tienen 2000 pesos" hace que el estudiante escriba la expresión: $x + y = 1500 + 500$, con lo cual le da	

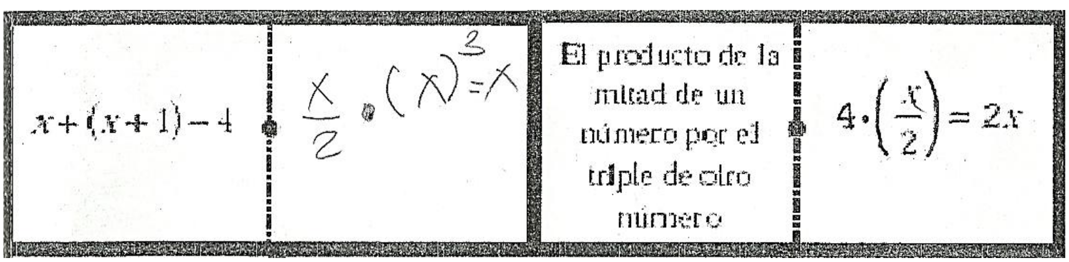
	valores a cada variable. Con lo cual el resultado de la suma representa lo que las dos personas reunieron.(LEC)	

Anexo 12: Escritura de las muestras en actividad domino algebraica, fase1.

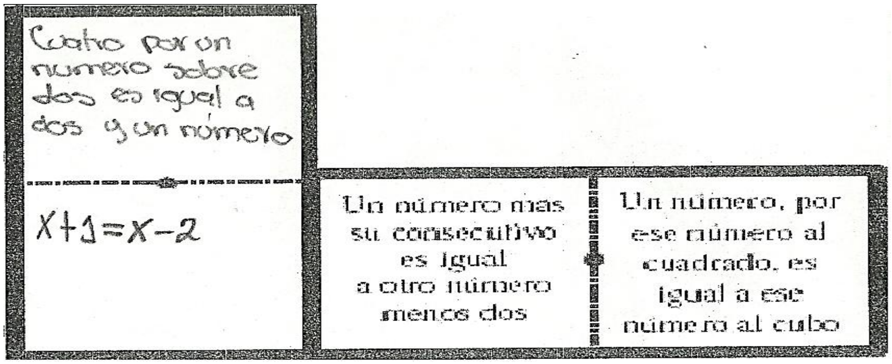
H1: El sujeto no distingue de manera correcta el uso de distintas variables /incógnitas en el enunciado.



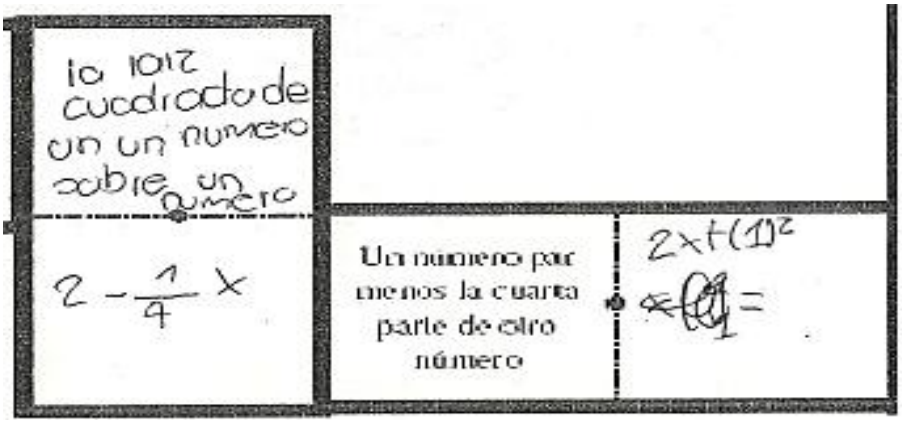
M2: Confunde el triple por el cubo y no identifica dos números distintos; El sujeto no interpretan correctamente la estructura del enunciado.



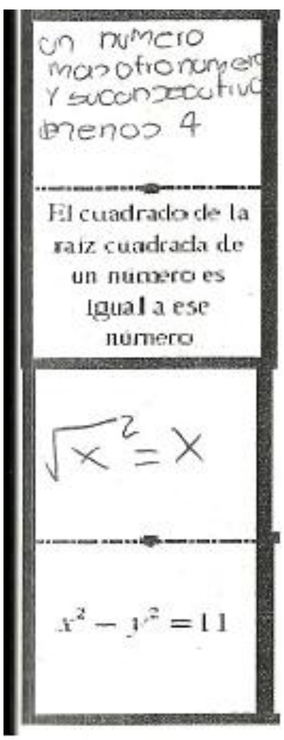
H5: No expresa correctamente el consecutivo de un número.



H1: Particulariza números o relaciones concretas de una expresión general.



H1: Ausencia de paréntesis



Anexo 13: Evidencias de actividad ecuacartas

Registro (LEC H1)

JUEGO ECUACARTAS H1

Este juego consiste en asociar las tres cartas que corresponden al mismo problema, estas son: El enunciado en forma de palabras, su expresión algebraica o ecuaciones y su solución por el método grafico.

Para ganar puntos debes cumplir las reglas

REGLAS DEL JUEGO:

1. Escribir en el siguiente espacio, qué tuviste en cuenta para asociar las ecuaciones con el enunciado escrito en palabras dado en las **CARTAS** que están enumeradas:

CARTA # 1

Por que XX es un numero y Y es otro numero al sumar estos 2 numeros da 3
X menos otro numero da igual a 5 esta la diferencia entre 2 numeros

$x+y=3$ E1
$x-y=5$ E2.

CARTA 1

DOS NUMEROS CUYA SUMA ES IGUAL A 3

Y

SU DIFERENCIA IGUAL A 5

¿CUÁLES SON ESOS NUMEROS?

2. En las siguientes tablas, para cada ecuación del sistema analizado, encontrar dos puntos.

Ecuación N° 1: $x+y=3$

X	Y	(X,Y)
4	-1	4,-1
3	0	3,0

$x+y=3$
$y=3-x$

Ecuación N° 2: $x-y=5$

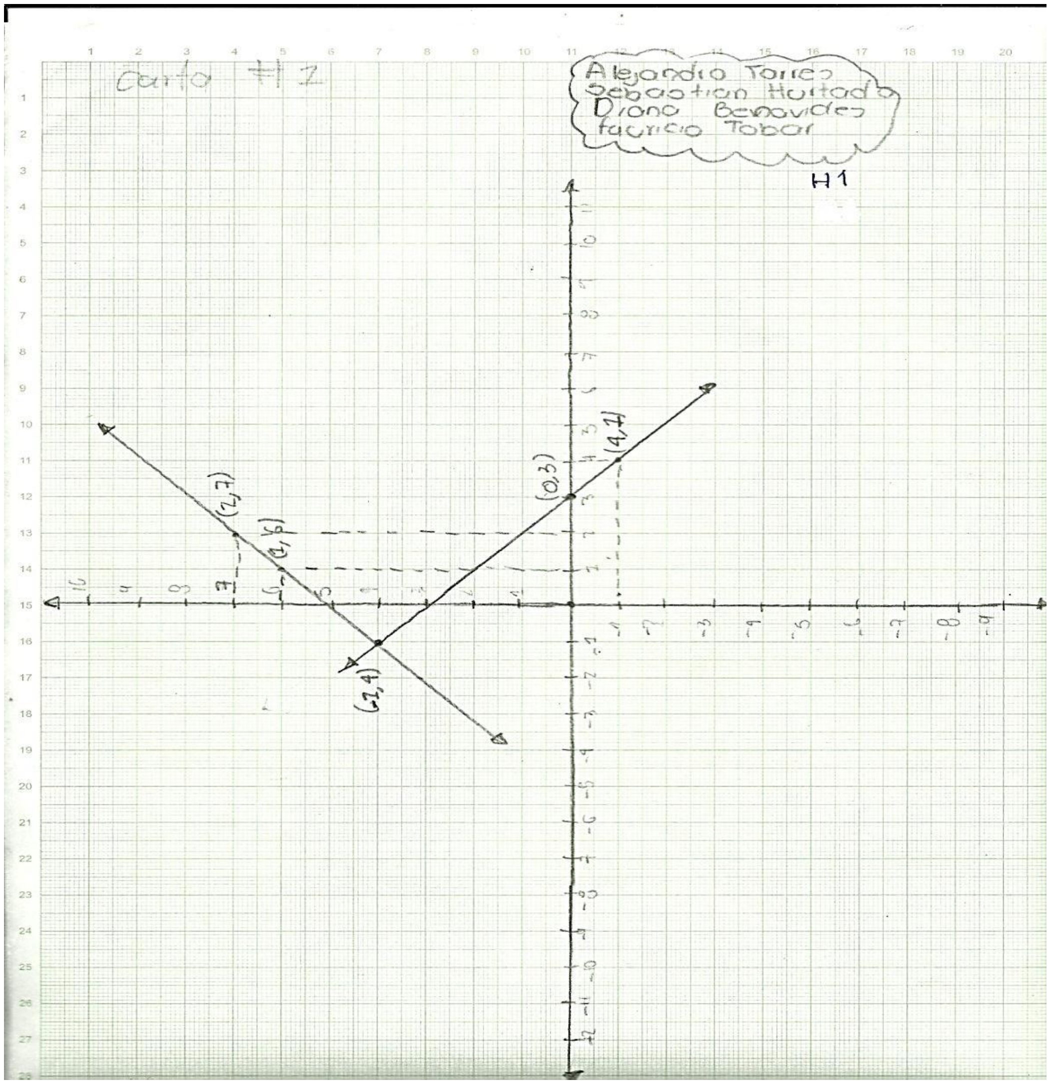
X	Y	(X,Y)
2	7	2,7
1	6	6,1

$x-y=5$
$y=5+x$

3. Graficar en el papel milimetrado cada una de las rectas que representan las ecuaciones del sistema analizado; y comparar con los gráficos dados.

4. Responder a la pregunta de cada problema en la carta, usando la solución grafica del problema.

Registro (LEC H1), gráfica de las ecuaciones



Registro (LEC M3)

JUEGO ECUACARTAS M3

Este juego consiste en asociar las tres cartas que corresponden al mismo problema, estas son: El enunciado en forma de palabras, su expresión algebraica o ecuaciones y su solución por el método grafico.

CARTA 2

LINA TIENE EL TRIPLE DE

DINERO QUE JULIÁN Y

ENTRE AMBOS TIENEN $ 2000 PESOS,

¿CUÁNTO DINERO TIENE CADA UNO?

Para ganar puntos debes cumplir las reglas

REGLAS DEL JUEGO:

1. Escribir en el siguiente espacio, qué tuviste en cuenta para asociar las ecuaciones con el enunciado escrito en palabras dado en las **CARTAS** que están enumeradas:

CARTA # 2

Se escogio la carta #2 con los ecuaciones $y=3x$; $x+y=2000$ porque Lina ~~ella~~ representa que tiene el triple de dinero más que de Julian esto nos da a entender que entre los dos reunen el total de 2000$ que es el resultado de ~~x+y~~ la suma de $x+y = 1500+500$.

2. En las siguientes tablas, para cada ecuación del sistema analizado, encontrar dos puntos.

Ecuación N° 1: $y=3x$

X	Y	(X,Y)
500	1500	(500, 1500)
1000	3000	(1000, 3000)

3+

Ecuación N° 2: $x+y=2000$

X	Y	(X,Y)
2000	0	(2000, 0)
500	1500	(500, 1500)

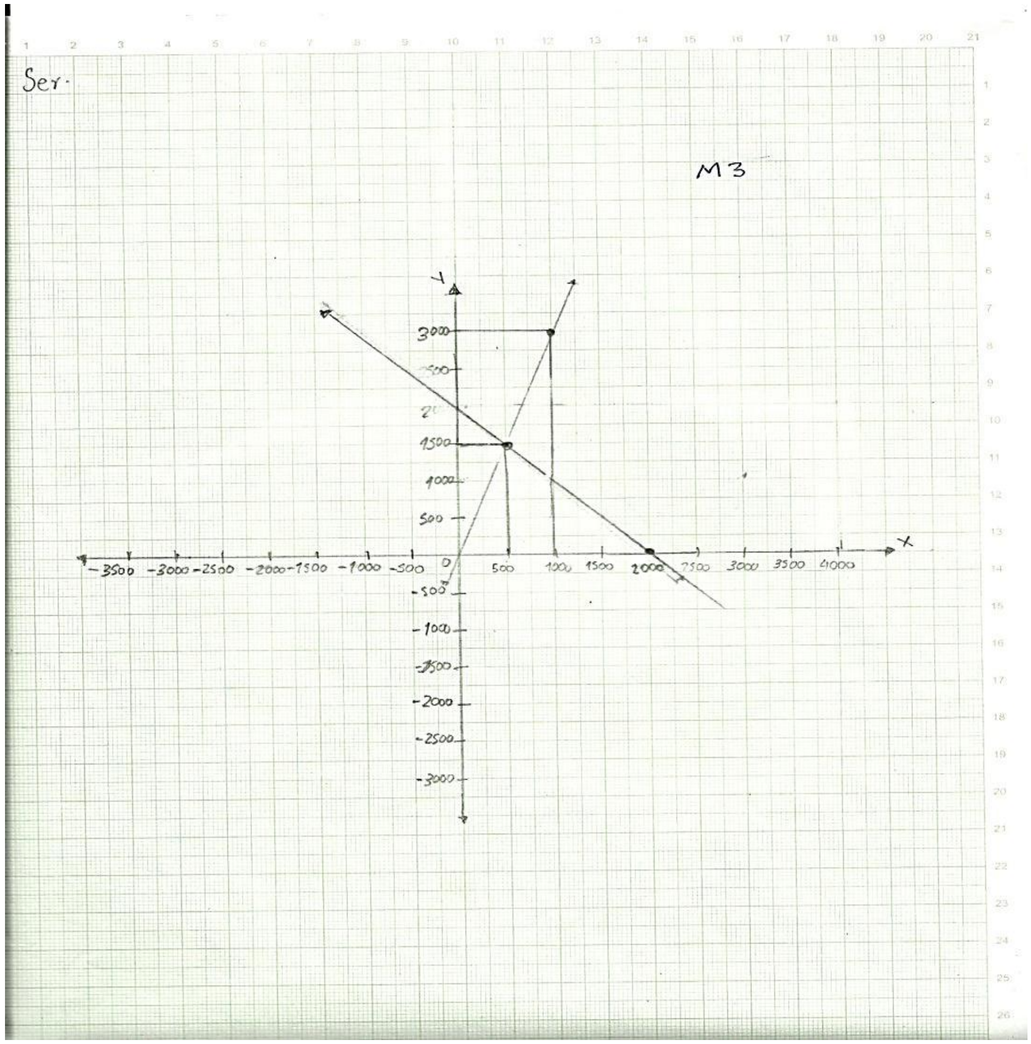
$x+y=2000$

$y=2000-x$

3. Graficar en el papel milimetrado cada una de las rectas que representan las ecuaciones del sistema analizado; y comparar con los gráficos dados.

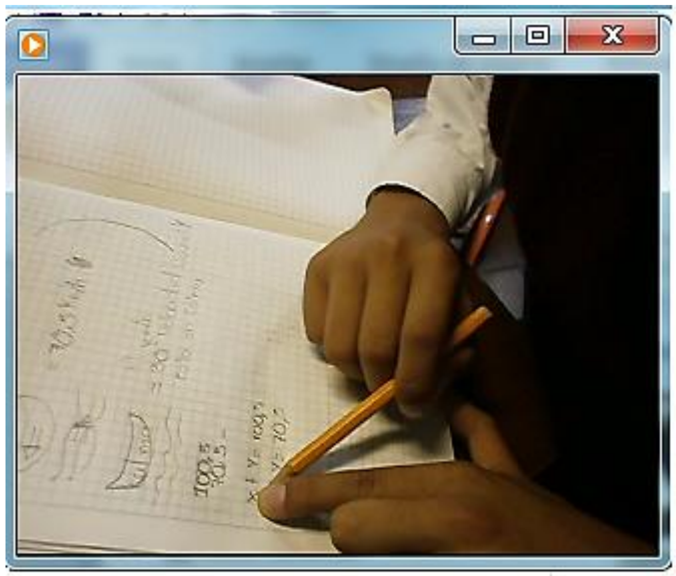
4. Responder a la pregunta de cada problema en la carta, usando la solución grafica del problema.

Registro (LEC M3), gráfica de las ecuaciones



Anexo 14: Evidencias de los registros tomados en video

H1: Se apoya en un gráfico y el lenguaje algebraico, para plantear las ecuaciones. (Problema de la lancha)



M4: Se apoya en la estructura lineal del problema para justificar sus ecuaciones (sigue la lectura del lenguaje vernáculo con un dedo y al mismo tiempo con el otro dedo la lectura del lenguaje algebraico), la palabra "*alcanza*" la identifica como igualdad en la ecuación que plantea. (Problema de los animales)