UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

INTRODUCIENDO LA NOCIÓN DE INFINITO ACTUAL EN EL AULA DE CLASE: UNA PROPUESTA PARA ESTUDIANTES DEL PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Estudiante del programa de Licenciatura en Matemáticas:

Jimena Andrea Amaya Quinayas

Directora de trabajo:

Gabriela Inés Arbeláez Rojas

Profesora Departamento de Matemáticas

NOVIEMBRE 2014

NOTA DE ACEPTACIÓN

El presente trabajo

fue aprobado por:

Vo. Bo. Yeny Leonor Rosero

Coordinadora de Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Gabriela Arbeláez Rojas

Directora

Vo. Bo. Martha Lucía Bobadilla

Evaluadora

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por haberme permitido llegar hasta este punto y darme salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.

A mi madre Reineria, por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor.

A mi padre José, que desde el cielo siempre me ha cuidado y protegido.

A mi hermana Liliana, mis sobrinas y José que ha sido como un padre para mí. por sus ejemplos de perseverancia y constancia que los caracterizan y que me han infundado siempre, por el valor mostrado para salir adelante y por su amor.

A mi novio Gustavo, a su paciencia, comprensión, bondad y sacrificio me inspiraste a ser mejor para ti, ahora puedo decir que este trabajo lleva mucho de ti, gracias por estar siempre a mi lado.

A los profesores de la Universidad del Cauca por brindarme las herramientas necesarias para ser una profesional integra, en especial a la profesora Gabriela Arbeláez por dirigir este trabajo con su mejor disposición.

Gracias a esas personas importantes en mi vida, que siempre estuvieron listas para brindarme toda su ayuda, ahora me toca regresar un poquito de todo lo inmenso que me han otorgado. Con todo mi cariño se las dedico a ustedes gracias y que Dios los bendiga.

Pág.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La construcción de los distintos conceptos matemáticos ha generado en la última década gran inquietud en las investigaciones, ya sea como un proceso de aprendizaje significativo o aprendizaje constructivo. Hay ciertos conceptos que son importantes en él estudió de las matemáticas; en particular el infinito, siendo que este se encuentra inmerso en las diferentes temas que se abordan en el área de matemáticas, Aunque los estudiantes no tienen una definición formal poseen cierta intuición acerca de este concepto y de alguna manera lo manejan en los distintos ámbitos.

En este proyecto se pretende que a partir de las ideas previas que tienen los estudiantes sobre el infinito, lleguen a una aproximación de la noción del infinito actual. Los estudiantes en general, muy ligados a pensamientos euclidianos y aristotélicos sólo se acercan a una idea potencial del infinito, ignorando la necesidad del infinito actual; para llegar a conceptos matemáticos tan complejos como el de sucesión, límite, series, entre otros.

En los cursos de los primeros semestres de la Universidad en las carreras de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas, es habitual trabajar con diferentes conceptos en los cuales se involucra la noción de infinito, pero este se emplea sin una explicación específica, por lo contrario se ha tomado como si ya hiciera parte del sentido común. Desde muy temprana edad los estudiantes se enfrentan a la experiencia de contar que pone en juego la noción de infinito, siendo esta su primer encuentro con dicho concepto. "Daría la impresión que la concepción de infinito, casi etimológica, como sinónimo de lo que no tiene fin, o de algo que sigue, sigue y no termina, aparece casi sin conflicto con la intuición, antecede la comprensión del infinito actual y continúa operando prácticamente sin evolucionar en las personas que no se dedican al estudio de las matemáticas" [1] (Monaghan, 2001).

La realización de este proyecto comienza con la idea de que los conceptos matemáticos como el infinito son construcciones históricas. Desde sus comienzos con Aristóteles (siglo IV a. C) quien enuncia: "*el infinito no es aquello fuera de lo cual no hay nada, si no aquello fuera de lo cual siempre existe algo*"[2].En este sentido admite que el infinito puede concebirse a partir de esa posibilidad de añadir siempre algo o de quitar. Luego Cantor en el siglo XIX desarrolló la teoría de conjuntos y la teoría de números transfinitos con lo cual indica que *"la existencia de un infinito potencial presupone la existencia de un infinito actual."* (Ortiz, 1994). En este orden de ideas la primera parte del curso se realiza un esbozo del desarrollo histórico y epistemológico del infinito, para luego conducir a los estudiantes a reflexionar sobre este tema, el cual no es debidamente discutido en los cursos básicos. Luego recrear el infinito potencial y actual por medio de distintos temas usando herramientas didácticas, como por ejemplo las TICS. Igualmente se realiza un análisis de textos matemáticos y literarios en donde trabajan este concepto.

La introducción del infinito actual es causa de controversia en los estudiantes, pues aún tienen una idea euclidiana referente a este tema, cuando enuncia en su libro los *Elementos*, asignándole el status de noción común, que *el todo es mayor que cada una de las partes*. Esto se da porque los estudiantes no han tenido un conocimiento específico sobre el tema y solo se han acercado al infinito potencial. Para acercar a los estudiantes al infinito actual se hace necesario estudiar algunos temas importantes como: funciones, series y sucesiones.

En este documento se encuentra la sistematización que se realiza con los estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas. Para los cuales se planea una

[1]**Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios.** Virginia Montoro* y Nora Scheuer**. * Centro Regional Bariloche. Universidad Nacional del Comahue. República Argentina.

[1.] Aristóteles, Física 206a – 206b

aproximación a las nociones de infinito potencial y actual; usando talleres, presentaciones en power point, audios y lecturas.

En este documento se encuentra un análisis de cada actividad, el cual se enfoca en las respuestas dadas por los estudiantes y su forma de comprender el infinito, Empezamos realizando un seguimiento desde su primer encuentro con este concepto. Luego se reflexiona sobre los avances que tenían en cada sesión, todo esto mediado por un componente lúdico. Enseñando lo grandiosas que son las matemáticas por medio de este increíble concepto.

Inicialmente se realiza una explicación de la importancia que ha tenido el infinito en la historia, cómo se ha desarrollado este concepto en los estudiantes y cómo ha sido su enseñanza en el área de matemáticas. En esta primera parte que contiene lo planeado en el proyecto de aula se recoge: la justificación, los referentes teóricos, la metodología utilizada y las características de la institución educativa. Finalmente se hace una presentación de lo sucedido en cada una de las sesiones de clase, rescatando elementos sustanciales de los trabajos, se hace un recuento de la experiencia de la práctica docente y el análisis correspondiente.

Al final se muestran las conclusiones que hacen referencia a la experiencia de las cuatro Prácticas Pedagógicas divididas en cuatro semestres donde se muestra: cómo aporta el proyecto a la Universidad, cómo fue la intervención en el aula, y una reflexión sobre las sesiones dadas.

1. JUSTIFICACIÓN

Inicialmente todos tenemos una idea cotidiana del infinito, pues la palabra infinito forma parte de nuestro lenguaje habitual, asumiendo significados diversos que suelen diferir de los específicamente matemáticos. Algunas frases comunes en donde se suele utilizar esta palabra son: el amor es infinito o este lugar es infinitamente grande; otra forma de ver el infinito es como lo contrario a lo finito; sin tener una idea clara sobre su significado.

Es por esto que se pretende realizar un recorrido por grandes autores tanto matemáticos como literarios, que han tomado al infinito como un tema para inspirarse e investigar. La idea es llevar a los estudiantes de licenciatura en matemáticas por este mágico mundo del infinito , en el cual por medio de la historia, literatura, paradojas y talleres se pretende aproximar a los estudiantes a este concepto, tema que es tratado por muchos pero no es analizado a profundidad. Así es como se pretende que al finalizar el proyecto los estudiantes tengan una idea diferente de lo que es el infinito y puedan expresarse con propiedad cuando quieran referirse a él.

Este es un tema muy frecuente en la universidad, en los cursos de matemáticas es habitual trabajar con diversos conceptos que involucran la noción de infinito, la cual es tomada como si todos tuviesen ya una idea formal de lo que significa. Es ahí en donde la mayor parte de los estudiantes encuentran un choque con sus conocimientos previamente adquiridos. Es tan simple como el hecho de observar que en la mayoría de libros de cálculo asumen que los estudiantes tienen ya una noción del concepto del infinito, y por lo general comienzan a utilizar y a definir límites al infinito, sin hacer una explicación adecuada del concepto.

Pero, ¿Qué es lo que causa más controversia a los estudiantes cuando se les presenta el tema del infinito? ¿Qué es lo que no logran comprender y causa tal choque? Es tal vez encontrarse con el infinito actual y darse cuenta que el infinito que siempre han manejado en los distintos ámbitos es el potencial, pero que solo tenían una idea vaga de lo que significaba en realidad. El observar que un subconjunto de un conjunto infinito, puede contener el mismo número de elementos que el conjunto inicial; por ejemplo los naturales están contenidos en los enteros pero se puede realizar una correspondencia biunívoca entre ellos y tendrían el mismo número de elementos.

Siendo el infinito un tema tan importante para la formación de los estudiantes de Matemáticas, se ha dejado a un lado en algunas asignaturas sin darle mayor importancia. Un tema que en una amplia variedad de materias, se toca de una u otra forma, para el cual no tienen una explicación clara y son enfrentados a él, sin comprender bien su concepto. Solo en las clases de Matemáticas y Realidad se realiza una explicación más detallada sobre el infinito. Para ese entonces ya se han visto muchos cursos en donde se ha utilizado el concepto sin tener una claridad sobre su significado. La aclaración de un tema como el infinito; sería esencial para los estudiantes de matemáticas, es algo que se debería hacer con todos los que inician esta carrera, ya que es de gran importancia. Así, que este proyecto es trabajado con los estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas, siendo ellos beneficiados con un tema, el cual les será de gran ayuda en su carrera.

El infinito es un tema que clasifica dentro de ese tipo de conceptos, cuya construcción no solo depende de memorizar ciertas fórmulas como se hace con otros, a los cuales se les define y asignan propiedades generalmente claras y evidentes. En este caso es importante tener en cuenta que alrededor del infinito se desarrollan ideas que requieren de razonamientos un poco complejos, precisamente se planea trabajar con distintas estrategias de enseñanza, las cuales son definidas de una forma diferente a las clases tradicionales, basándose en la literatura, las TICS, los documentos históricos y diversos talleres. Las clases son dadas en forma de seminario en donde todos participan y se hace de una manera lúdica. Los talleres son trabajados por medio de la resolución de problemas, en donde se realiza un análisis inicial, se aclaran dudas sobre las preguntas, esto con el fin de tener un mejor enfoque para sus respuestas, seguido de un planteamiento de la solución y finalmente se examina las respuestas obtenidas, siendo esta etapa realmente importante, pues es aquí en donde se logra afianzar los conocimientos adquiridos en cada tema.

El infinito ha sufrido muchos cambios a través de la historia, fruto de un vasto proceso de evolución y en la actualidad se tiene un concepto con mas forma del que se tenía muchos años atrás. En este proceso de cambio que ha tenido el infinito, han surgido diversos personajes que han aportado a la construcción de este concepto; de los cuales para este trabajo se destacan dos, quienes hacen que la historia del infinito se parta en dos como Aristóteles (siglo IV a.C.) para quien el infinito era pensado como una forma de contar y seguir contando o imaginar que contamos infinitamente, el infinito pensado de esta manera era conocido por él, cómo *infinito potencial*, posiblemente asociado a la infinitud potencial del tiempo. Asimismo, Aristóteles establece la imposibilidad del *infinito actual*. Siendo el siglo XIX un antes y un después del infinito, A finales de este siglo, Georg Cantor (1845-1918), demuestra que hay tantos números pares como naturales y tantos naturales como racionales; el siguiente paso de Cantor es demostrar la imposibilidad de hacer corresponder biunívocamente los números reales con los naturales. Con todos estos aportes de estos dos grandes personajes se logra llevar al estudiante del infinito potencial al actual. Con ellos y el apoyo de la literatura tomada de Jorge Luis Borges (1899-1986) con su pasión por el infinito, resaltando que no fue un matemático si no un gran escritor. Se logra un complemento perfecto entre distintos puntos de vista, que combinado con los talleres se logra tener un enfoque central; el cual es: el de acercar a los estudiantes al concepto del infinito actual.

En cuanto a la teoría abordada para la enseñanza y compresión de este concepto el cual esta inicialmente en un conocimiento intuitivo y se trata de pasar a un pensamiento matemático. Se necesita de algunos conceptos abstractos como el de función biyectiva, sucesiones, sumas infinitas, series entre otros, los cuales son de gran importancia para formalizar el concepto del infinito. Toda esta enseñanza fue un proceso en el cual por medio de distintos temas matemáticos, poco a poco se fue aproximando al infinito. Aunque no todos tenían estos conocimientos, por medio de clases magistrales se logra explicar cada tema. Uno de los conceptos más confusos, es el de las sumas infinitas en ellas los estudiantes se enfrentan a unos temas como series, límites, sucesiones, temas que no son trabajados en un primer semestre. Esto se puede evidenciar cuando se trabaja la paradoja de "*Aquiles y la tortuga*"[3], en la cual para dar una de las posibles respuestas, se necesita tener conocimientos de algunas series en este caso la serie geométrica.

[3] Bitácora 5.4 Aquiles y la tortuga pág.

2. REFERENTES TEORICOS.

2.1. ALGUNOS APUNTES HISTORICOS.

Cuando hablamos de las distintas ayudas que se tienen para preparar un tema como el infinito en sus distintas etapas, lo ideal es comenzar por sus inicios, es decir, realizar un recorrido por la historia, trabajando con algunos personajes que hicieron parte de su construcción como: Aristóteles, George Cantor, Hilbert, Zenón entre otros. Sabemos que Aristóteles (siglo IV a. C), es el primero de los filósofos griegos (que se conoce) que trata el concepto de infinito y sus posibilidades de existencia, según él, el infinito solo puede existir en potencia, nunca en acto; esta noción potencial dominó en la historia hasta Cantor en el siglo XIX, el cual tuvo gran influencia en el desarrollo de este.

Fue a partir de George Cantor quien hizo ver que hay una jerarquía de infinitos, cada uno mayor que su precedente. En los años 1871 -1884 creo una completa, nueva y muy especial disciplina matemática, la teoría de conjuntos, en la cual se fundaba por primera vez, después de miles de años de contradicciones, la teoría del infinito con todos los adelantos de la moderna matemática. Fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito, bajo la forma de números transfinitos (cardinales y ordinales). Descubrió que los conjuntos infinitos no tienen siempre el mismo tamaño, o sea el mismo cardinal; los números transfinitos (que se designan con la letra hebrea *Aleph*) y que son capaces de medir conjuntos infinitos. Definió el cardinal del conjunto de los naturales y lo llamo *Aleph-cero*, es decir, *Aleph – cero* mide el infinito de los números naturales, luego se encuentra con que existen otras cantidades, que también se pueden medir como lo son los números pares, los enteros los racionales que también son *Aleph- cero*, todos ellos son conjuntos numerables, así se llaman aquellos conjuntos cuyo cardinal es *Aleph- cero*.

La idea central, es que a partir de la historia la cual es un complemento muy importante para comprender el concepto del infinito, haga parte de las bases que los estudiantes deben tener en cuanto al conocimiento sobre los sucesos y evolución que el concepto del infinito ha tenido a largo de su evolucion, de esta forma en los distintos talleres se ha involucrado la historia, inicialmente se hace un recorrido por autores como Giordano Bruno "*A la proporción, semejanza, unión e identidad del infinito no te acercas más siendo hombre que siendo hormiga*" o David Hilbert "*¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre",* entre otros grandes personajes que intervinieron en el desarrollo del infinito. Se hace recuento sobre la etimología del infinito y el significado que se encuentra en los diccionario, la cual no es más que decir que no tiene fin ni termino, pasando por los símbolos que ha adoptado en el trascurso del tiempo, como el de "Uroboros" que significa, un ciclo eterno, gráficamente visto como una serpiente mordiéndose la cola o el que finalmente adopto "la lemniscata" símbolo que John Wallis propuso. Se habla un poco sobre la Grecia clásica en donde el infinito era llamado el "Apeiron" que significaba sin fin, sin límite, lo infinito, lo ilimitado o lo carente de definición, sin medida. Es en la historia es donde se encuentran las bases suficientes, para que un tema como el infinito sea comprendido con mayor facilidad.

En cuanto a la solución de los talleres se resuelven con la ayuda planteada por el matemático George Pólya (1887-1985), quien formuló un método heurístico para resolver problemas, el cual se aproxima al ciclo utilizado para programar computadores. Según Pólya (1957), al resolver problemas, intervienen cuatro operaciones intelectuales:

- Entender el problema.
- Trazar un plan.
- Ejecutar el plan.
- Revisar.

Así que, por medio de la resolución de problemas se les plantea a los estudiantes diferentes talleres en donde por medio del método heurístico de Polya logran encontrar una solución; como las preguntas pueden tener diferentes respuestas, se centra este método al punto final en el cual después de la solución del taller se analiza cada respuesta y se retoma en la siguiente sesión en donde se aclaran dudas y se toma una respuesta final, en la cual todos están de acuerdo.

3. METODOLOGIA

Para la implementación del proyecto de aula, se presentan diez sesiones en las cuales se pretende poner a los estudiantes a reflexionar sobre un concepto central en matemáticas como lo es *el infinito*. Se diseñan situaciones didácticas orientadas a los estudiantes con el objetivo de que al finalizar el curso los estudiantes tengan un aprendizaje significativo sobre este concepto. En las sesiones se trabajan talleres los cuales son acompañados por distintos materiales cómo: diapositivas, lecturas, videos y audios, las cuales sirven como apoyo para una mejor compresión de los distintos temas.

Inicialmente se presenta una introducción sobre el infinito, en el cual mediante diapositivas se hace un recorrido por la historia con pensamientos de distintos autores, sus orígenes, su símbolo, entre otros aspectos que acompañan a este maravilloso tema.

El primer taller es una prueba diagnóstica individual, en la cual se planea observar que tanto saben los estudiantes sobre el infinito, cómo ellos desde la cotidianidad han abordado el tema, observar si tienen ese concepto potencial, que por intuición todos tenemos, y que aún no han oído hablar sobre ese infinito actual. Esto se hace por medio de preguntas que no son difíciles de comprender, pero que tienen un sentido de comprensión grande en lo referente al infinito potencial y actual.
Seguidamente se presenta un taller importante el cual se trabaja en grupos, en el que se introducen dos conceptos los cuales son: la operatividad con el infinito, series y sumas.

En la cuarta sesión se trabaja sobre la solución de los puntos del taller anterior, en esta ocasión el primer punto, el cual fue perfecto para presentarles la paradoja del “Hotel de Hilbert”. Se empieza con una explicación sobre este punto, luego se les presenta un taller adicional, el cual los hace pensar como puede ser la solución a esta paradoja. Seguido a esto se presenta las correspondencias biunívocas de algunos conjuntos infinitos como los naturales y los pares entre otros, para lo cual se hace necesario realizar una clase en el tablero para recordar algunos temas como función, biyección etc. lo cual se hace con ayuda de los estudiantes.

En la quinta sesión se continúa con la solución del segundo taller, con puntos que sirven para introducir otra paradoja, la de “Aquiles y la Tortuga” de la cual se realiza una ilustración en diapositivas, acompañado de la lectura de un cuento de Jorge Luis Borges titulado “La perpetua carrera de Aquiles y la Tortuga”. Luego se les presenta las sumas infinitas, pero que al sumar sus términos se llega a resultados finitos.

Luego en la sexta sesión se les presenta una historia sobre “la leyenda del origen del ajedrez” y un taller. La finalidad de esta sesión es mostrarles las cosas raras y los errores que se pueden encontrar si no se trabaja bien con el infinito.

En la séptima sesión tal vez una de las más bonitas, se presenta otro de los cuentos de Borges “La Biblioteca de Babel”, se lleva este cuento en audio y por escrito, junto con un taller, aquí se pone a prueba el análisis de documentos matemáticos y su arte al dibujar la biblioteca de babel.

Octava sesión: está es la recopilación de todas las anteriores, se presenta un video el cual realiza un barrido por toda la historia del infinito y se les realiza un resumen de todo lo visto en las sesiones anteriores. Se coloca a prueba a los estudiantes para saber que tanto aprendieron sobre el infinito, como plasman sus ideas y si tienen buena coherencia sus escritos.

La novena sesión es la culminación de todas las clases, nuevamente se les presenta una prueba parecida a la diagnostica, la cual indicara que tanto aprendieron los estudiantes con el curso.

Finalmente la décima sesión es la despedida, se realiza una evaluación a los estudiantes en cuanto a mi labor como docente y al curso, se comparte con ellos un detalle en señal de agradecimiento por su tiempo y dedicación.

4. LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA Y LOS ESTUDIANTES

El proyecto de aula se llevó a cabo en **La Universidad del Cauca Pública de Colombia**. Su campus principal se encuentra ubicado en la ciudad de Popayán, capital del departamento del Cauca. Recibió el 5 de Abril de 2013 la Acreditación Institucional de Alta Calidad por 6 años por parte del Consejo Nacional de Acreditación del Ministerio de Educación y ocupa el puesto 17 en el Ranking U-Sapiens 2012-2.
Se llevó a cabo con los estudiantes de primer semestre de Lic. Matemáticas, quienes en esos momentos cursaban las siguientes asignaturas: Matemáticas Generales, Lógica y conjuntos, Lecto Escritura, Formación Ciudadana y deporte formativo para algunos. Se cuenta con la participación de 28 estudiantes quienes accedieron tomar 2 horas semanales extra clases, los días miércoles de 9 a 11 am, no fue obligatorio quienes querían asistir lo hacían porque tenían interés de conocer cosas nuevas, en este caso el concepto del infinito, pero fue la docente del curso de Matemáticas generales la profesora Olga Lucia quien cedió parte de su tiempo para comunicarnos con ellos y quien les decía que les podía dar un incentivo por asistir a este curso.

El lugar en el cual se llevaría a cabo las sesiones está ubicado en la Facultad de ciencias Naturales y Exactas de la Educación, el salón es el 201 situado en el edificio antiguo de esta facultad, es un lugar amplio y cómodo y cuenta con un televisor en el cual se pueden proyectar los videos y presentaciones, lugar que fue prestado por los encargados de la Facultad para realizar esta práctica.

La primera sesión estuvo llena de muchas expectativas, tanto de mi parte como docente al enfrentarme a un grupo de estudiantes, como de los mismos estudiantes quienes tenían muchas inquietudes sobre lo que se iba a trabajar en este curso. Este inicio estuvo un poco frustrado ya que por esos días se estaba desarrollando un movilización en las universidades públicas y se mantenían asambleas permanentes, así que el primer día no se corrió con suerte y no se pudo terminar por estos inconvenientes, así que se tuvo que suspender estas sesiones por casi un mes, después de este impase se retomaron nuevamente las sesiones. Fue un poco difícil pues estos inconvenientes hacían parecer que no se podría lograr el objetivo planeado, pero fue de gran ayuda el ánimo de mi directora, compañeros y estudiantes que hicieron que todo fuese posible.
Las clases fueron muy amenas se trabajaba con mucho ánimo y dedicación, aunque enfrentarse a estudiantes de universidad no es lo mismo que de un colegio. se contó con un grupo muy juicioso, comprensivo y trabajador del cual no hubo queja alguna, así que las sesiones planteadas se trabajaban a cabalidad, logrando en cada una de ellas llegar al objetivo propuesto, el cual era avanzar día a día en el camino hacia el infinito actual.

5. BITACORAS

5.1 UNA INTRODUCCION AL TEMA DEL INFINITO Y UNA PRUEBA DIAGNOSTICA.

La primera sesión es clave para sentar las bases de un buen curso, el impacto del primer día es muy importante en la motivación de los estudiantes ya que de esto depende que se sientan comprometidos desde el primer momento con el curso y continúen hasta el final.

"El aprendizaje real en la clase depende de la habilidad del profesor para mantener y mejorar la motivación que traían los estudiantes al comienzo del curso. Sea cual sea el nivel de motivación que traen los estudiantes, será cambiado, a mejor o a peor, por lo que ocurra en el aula" (Erickson, 1978).

Las expectativas de este día son tanto del docente como del estudiante, es la sensación desde dos puntos de vista, del docente en el sentido de como entusiasmar y llegar a ellos, para lograr que les guste y comprendan lo que se les va a enseñar, desde el punto de vista del estudiante es tal vez pensar será otra clase igual que las demás o será algo nuevo, me gustara o simplemente asistiré a ver qué sucede. Las expectativas son más del docente pues la preocupación de dar una buena clase es mayor y siempre se realizan distintas preguntas al enfrentar este momento; ¿será que como les hable les gustara?¿ será que la forma de expresarme es la adecuada?, son muchos los factores que intervienen en este primer encuentro y depende del docente lograr que esta experiencia sea inolvidable, es el deber de cada docente hacer de su clase un ritual en donde el saber y el aprendizaje sean sus armas más valiosas.

Se da inicio a la primera sesión en uno de los auditorios, ubicado en la Universidad del cauca en la facultad de ciencias naturales y exactas de la educación, es un salón bastante amplio contando con la presencia de los estudiantes de primer semestre de Lic. Matemáticas quienes muy amablemente y con la ayuda de la Profesora Olga lograron cederme parte de su tiempo para realizar este curso. Los nervios y la ansiedad que sentía en ese preciso momento no se dieron a esperar, pero la verdad era más las ganas de empezar a ejercer mi roll de docente que sentí que todo me fluía con mucha coherencia.

La presentación de esta sesión tiene el objetivo de realizar un recorrido por todos los temas a tratar en el curso-seminario, pues es un especie de resumen de lo que va a tratar el curso.

Se comienza realizando la aclaración de lo que es el infinito potencial y el actual, realizando preguntas a los participantes de lo que ellos conocen sobre el infinito, algunas respuestas son las siguientes:

- *Es algo enorme.*
- *Es algo muy, muy grande…*
- *Es lo que no tiene fin.*

Entre otras respuestas. Se les explica que eso hace parte del infinito potencial "De encontrar uno más, o uno menos siempre"; se les dice que existe otro infinito al cual llamamos el infinito actual, en el cual tomamos los conjuntos como una totalidad, y se da el siguiente ejemplo: los números naturales no cada elemento, si no tomándolo como una totalidad, tomándolos todos; contándoles que esta es la finalidad del curso. Pues se piensa pasar de ese infinito potencial al actual, a través de distintos temas que se van a tratar. Luego de esta intervención se comienza hablando de algunos autores que partieron la historia en dos , aquellos que hablaban de ese infinito potencial y otros que comenzaron con el infinito actual y que finalmente formalizaron el concepto de infinito, se realizan distintas intervenciones tratando de analizar los pensamientos de estos autores, pero aún no es claro el cambio realizado por las distintas épocas y autores; finalmente la profesora Gabriela Arbeláez (Directora de practica) realiza la siguiente intervención: habla sobre la posición que toma frente a uno de los pensamientos de un autor, pero lo más importante es que les habla de la importancia que el infinito tiene en nuestra carrera y la poca importancia que se le ha dado a lo largo de ella, pues todos los cursos de una u otra manera tocan el tema pero ninguno profundiza en el concepto, uno de los temas en los cuales se observa es en los límites, tema difícil de comprender pero muy importante y es aquí en donde el infinito se aborda de una manera formal.

Continuando con la presentación, se desarrollan distintos temas; pero surge una inquietud de uno de los estudiantes por las distintas asambleas que se realizan en ese momentos así que después de un debate entre los estudiantes se llega a dar terminada la sesión y aplazada para la próxima semana.

Se inicia una nueva sesión y se decide dar un pequeño resumen de lo anterior y se continua de explicar las diapositivas hablando sobre: la Etimología de infinito[4], el símbolo[5] y el origen del infinito " El Apeiron"[6], paradojas, cuentos sobre el infinito y finalmente los fractales, es esta oportunidad se realizan algunas intervenciones preguntando sobre lo que piensan los participantes sobre los distintos temas , una de estas intervenciones es sobre la paradoja de Hilbert[7], sobre el Hotel de infinitas habitaciones, se explica de que se trata, sobre su lema *"Siempre estamos completos, pero siempre Tenemos una habitación para ti";* y se realiza la siguiente pregunta:
¿Qué pasaría si llegara un visitante al hotel y solicita una habitación?

Inicialmente se escucha un silencio, de lo cual se supone que están meditando la solución, después de un tiempo y de no escuchar ninguna solución, se les da la siguiente respuesta: solo se pide a los huéspedes del hotel desplazarse una habitación para desocupar la primera, y así se le puede dar una habitación a nuestro huésped nuevo.

Pero se realiza la siguiente pregunta: ¿Qué sucede si llegara un autobús infinito, con infinitos huésped?, recuerden el lema; así que basándose en la primera solución los estudiantes dieron las siguientes respuestas:

[4] Etimología: Según la Real Academia de la Lengua Española el infinito significa que no tiene fin ni termino.

[5] Tiene la forma de la lemniscata $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.Fue John Wallis (1616–1703) el primero en utilizarlo.

[6] En Grecia Clásica se utilizaba la expresión "Apeiron", que significaba sin fin, sin límite, lo infinito, lo ilimitado o lo carente de definición, sin medida. Por lo tanto se podía interpretar que el Apeiron destacan connotaciones éticas como el caos. "A" significa la negación de algo.

[7] David Hilbert fue un matemático alemán, reconocido como uno de los más influyentes del siglo XIX y principios del XX.

- Se piden a los huéspedes que se desplacen infinitamente.
- Se pide que se corran un infinito, y así queda un infinito desocupado.

Ya que ninguno llega a la solución se les dice que esa es una de las paradojas que se va a trabajar en el curso, y por lo tanto quedan invitados a pensar cómo se puede dar solución a esta pregunta.

Seguidamente se habla de las lecturas de Jorge Luis Borges[8], y como de una manera magistral y mágico toca el tema del infinito desde otro punto de vista, cabe resaltar que Borges no es matemático y sin embargo es un tema que lo ha inquietado tanto, y que por medio de estos dos cuentos "La Biblioteca de Babel" y "El Libro de Arena", miraremos otro enfoque del infinito.

Esto se realiza en la primera hora seguida esto, se les informa sobre la realización de una prueba diagnóstica[9], la cual deben responder con la mayor credibilidad posible y de acuerdo a sus convicciones. Este taller es realizado con la finalidad de evidenciar de una manera detallada que tanto conocen los estudiantes sobre el infinito, así que cada pregunta tiene un sentido y un objetivo, este taller se realiza de manera individual

De acuerdo a este taller inicial, en el cual se puede evidenciar de una manera detallada que tanto conocen los estudiantes sobre el infinito

Del siguiente taller se analiza uno a uno las preguntas de la siguiente forma:

La siguiente pregunta es muy común en los colegios, cuya respuesta es muy fácil de intuir según parece, así que una de estas preguntas es si tomamos los granos de arena de todas las playas y todos los desiertos; ¿Se pueden enumerar? ¿El número de granos de arena es infinito o es finito? Explica tu respuesta y si es afirmativa como enumerarías los granos de arena.

[8] Jorge Francisco Isidoro Luis Borges KBE fue un escritor argentino, uno de los autores más destacados de la literatura del siglo XX.

[9] Anexo 1. Prueba diagnóstica.

Este es un mito clásico. Probablemente, todos nosotros, en algún momento de nuestra vida, han pensado que los granos de arena son infinitos.

De aquí se pueden observar distintas respuestas unas que son las más comunes, aquellas respuestas que con la intuición llevan a contestar lo siguiente:

- *No se pueden contar es infinita, porque entre más cuentas van apareciendo más y más.*
- *No se puede porque es imposible de contarlos y se supone que lo que es extendidamente contable es algo infinito.*
- *Porque la formación de la misma son una secuencia de la ruptura de rocas madres, día a día van creciendo las cantidades y día a día van desapareciendo debido al uso.*

Respuestas que día a día han escuchada en la vida, son aquellas respuestas normales que cualquier persona daría, ya que a veces hasta algunos escritores como por ejemplo Borges habla de arena como infinita, así que el imaginar cantidades tan inmensamente grande hace que sea imposible de contar y pensar que son imposibles de contar.

Al contrario de otras respuestas que se puede pensar que tienen un poco más de conocimiento sobre el infinito y tal vez de asociar los granos de arena con los números naturales como una biyección aunque no se dan cuenta de esto, algunas respuestas son dadas de la siguiente forma

- *Se puede enumerar, aunque es un conjunto grande se lograría hacerlo.*
- *Se pensaría en una maquina (como la de los ingenieros azucareros) y los granos ya contados depositarlos en contenedores.*
- *Se enumeran de 1, 2,3,… hasta cierto punto que se enumere el ultimo grano de arena.*
- *Se enumera de forma creciente y como los números son igualmente infinitos habría uno para cada grano de arena que se pueda contar.*

Son respuestas que logran destacar un conocimiento profundo de los números naturales y la biyección, cantidades grandes ya no asustan y pueden ser controladas, podemos observar que algunas respuestas son muy ingeniosas y tienen mucho sentido sobre lo que es el infinito potencial.

Una nueva pregunta es la siguiente**:** Si tenemos un conjunto infinito y le quitamos un número infinito de elementos, ¿El conjunto que queda es finito o infinito? Explica tu respuesta.

La pregunta tiene puede tener distintas respuestas depende de la forma que la queramos interpretar, por lo tanto, no es necesariamente cierto que si partimos un infinito en dos partes las dos partes ya no son infinitas. Por supuesto, a veces esto puede ser cierto, a veces podemos eliminar un número infinito de elementos de $\mathbb{N}$ y el conjunto restante ya no es infinita; vasado en esta relación, algunos estudiantes tienen las siguientes respuestas:

- *Si quitamos infinitos elementos de este, quedaran infinitos elementos porque siempre habrán más elementos, independientemente del número que se le quite.*
- *Únicamente un conjunto puede ser finito si quitamos todos sus elementos ; Ej.: sea* $\pi = \{1{,}1415, \ldots\}$*;* $\pi - \pi = \emptyset$
- *Sin embargo si un conjunto infinito está compuesto por conjuntos infinitos y solo quitamos uno de esos conjuntos, el conjunto resulta ante es igualmente infinito.*
- *Quedará un conjunto infinito, ya que al coger los números reales y le quitamos los enteros positivos sigue siendo infinito.*

Estas respuestas dan lugar a comprender que la dimensión que abordad sobre el infinito es grande pues son capaces de tomar conjuntos grandes como lo son los números reales y solo extraer los enteros y el continua infinito o el hecho de darse cuenta que a un conjunto infinito le extraigo todos los elementos queda vacío y ya no sería infinito.

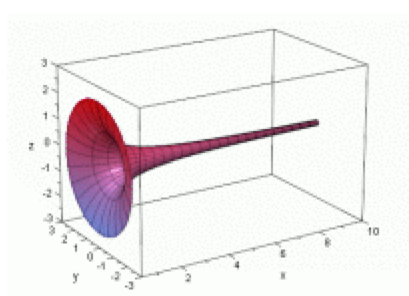
Otras respuestas dadas por los estudiantes son aquellas en las cuales se tiene en cuenta el infinito como una propiedad que tiene como si fuese un atributo, es decir si un cierto conjunto le quito su infinidad el conjunto pierde su infinitud y queda finito de ahí que "*el todo es mayor que la parte*":

- *Finito, porque la infinidad desaparecería.*
- *Finito, fácilmente se puede comprender que a un todo le quitas todo no le quedara nada.*
- *Al quitarle un subconjunto infinito tal vez podríamos obtener un rango finito.*

Seguida de esta pregunta se realiza la siguiente teniendo cuenta los atributos que puede tener o no el infinito: Si un vaso es infinitamente largo, entonces debe tener una capacidad infinita; o sea, si un objeto es infinito, ¿son también todos sus atributos infinitos?

Está basada en una paradoja preciosa nada fácil de comprender y que se le conoce comúnmente como la *Trompeta de Torricelli* en honor a su descubridor Evangelista Torricelli (1608-1647) quien fue un estudiante de Galileo, o también conocida como *El cuerno de Gabriel.*

Dicha trompeta está dada por la función recíproca *y = 1/f(x)* para el dominio de los números reales desde 1 hasta infinito, lo que es interesante de esta curva es que si es rotada sobre el eje *x,* obtenemos la trompeta:



Utilizando integración y propiedades se llega a una conclusión en la cual se puede hallar su volumen; Esta es la "paradoja": ¿cómo un "objeto" puede tener superficie de delimitación infinita y, al mismo tiempo ser finita en el volumen de su "interior"?.

Dado el siguiente recuento se observa como los estudiantes entienden sobre que son los atributos del infinito, ¿acaso es el vidrio del vaso?, o ¿es la cantidad de agua que puede tener?, de acuerdo con cada una de estas inquietudes y preguntas que surgen al enfrentar esta pregunta los estudiantes responden así:

- *Si porque no alcanzarías a enumerar todos los atributos, pues sus atributos serian infinitos.*
- *Si porque son incontables y no podemos llegar a término.*
- *Sus atributos deben ser infinitos porque si el elemento en este caso el vaso es infinito quiere decir que puede obtener infinita capacidad de agua u otra sustancia.*

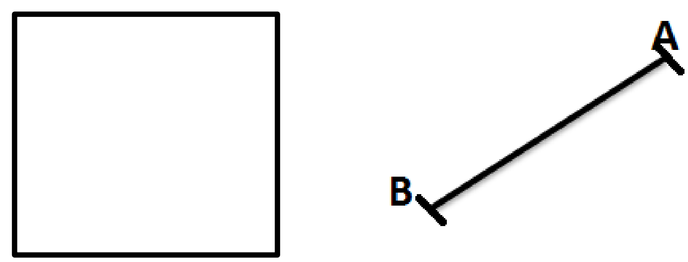
Son respuestas que son ciertas si es infinito pues lo más lógico es que todo sea infinito, pero queda la duda ¿será esto siempre cierto?

Otros estudiantes experimentaron otras respuestas, que son ciertas pues no es nada descabellado pensar asimismo:

- *No porque existe la posibilidad de que el contenido que está en el vaso no sea igual a la misma.*
- *Podemos definir qué capacidad le podemos dar a sus atributos puede ser finito.*
- *Va a llegar a un punto donde ese vaso va a tener un límite y su capacidad va ser limitada.*

Son respuestas muy cotidianas, si es infinito yo le puedo agregar agua hasta cierto punto, la cual es finita y el volumen de ella sería finito, o simplemente pensar que un vaso infinito no puede existir y llegara un momento a tener un límite y de ahí no puede seguir, como en la época de Aristóteles en la cual solo aquello que mente pudiese concebir es cierto de ahí para allá, sería impensable.

La siguiente pregunta enfrenta al estudiante a pensar será que algo pequeño el cual tiene infinitos puntos puede ser igual a algo muy grande quien también tiene infinitos puntos: ¿Entre el cuadrado y el segmento indique cual tiene más puntos? Justifique su respuesta.



Cuando observamos esta pregunta se nos viene a nuestra memoria dos cosas, será que son solo los segmentos del cuadro o será también los puntos de su interior; pero surgen nuevamente inquietudes: ¿Cómo un segmento el cual puedo introducir en el cuadro puede tener igual de puntos que el cuadrado?, pero si tanto el cuadro como el segmento tienen igual de puntos es decir infinitos entonces son dos infinitos así que pueden ser iguales; según estas inquietudes los estudiantes responden lo siguiente:

- *En el cuadrado y el segmento existe igual cantidad de puntos porque entre cada punto que señalemos existen otros puntos, y entre otros existen otro, etc. De esta manera tienen iguales puntos.*
- *Tienen igual cantidad de puntos.*
- *Tienen el mismo número de puntos ya que dentro de un punto hay más puntos y dentro de esos puntos hay más puntos y así sucesivamente.*

Estas respuestas están relacionadas con la comparación de que entre dos números enteros existen infinitos números y también que son segmentos infinitos y por lo tanto son infinitos iguales, aunque en este punto no tienen en cuenta algunas respuestas dadas al inicio con lo de la arena de realizar una especie de biyección entre los puntos.

Basándose en el hecho de que solo toman el segmento como un todo y de pensar que el todo es mayor que la parte, pues solo analizan el hecho de que el segmento se puede introducir en el cuadrado y que el cuadrado tiene más puntos el segmento tiene dos puntos un inicio y un fin y el cuadrado tiene cuatro vértices.

- *El cuadrado tiene más puntos, pues su diámetro es prácticamente el doble de longitud de línea según el tamaño de las figuras.*
- *El cuadrado por que la línea solo tiene el inicio y el del fin y el cuadrado tiene puntos en sus cuatro vértices.*
- *El cuadrado, debido que siempre va a ser 4 veces más que la diagonal de AB.*
- *El cuadrado tiene una línea sucesiva en cambio el segmento tiene un fin, por lado y lado.*
- *El cuadrado ya que es la unión de cuatro segmentos.*
-

Son respuestas muy comunes, pues la parte visual ayuda mucho y es muy obvio pensar que el cuadrado tiene más puntos.

Esta pregunta tiene relación con la anterior vamos a ver si nuevamente lo visual los confunde o les aclara mejor sus ideas: Considere los segmentos AB y CD de la figura.

A____________B

C____________________________________D

¿CD tiene más o igual cantidad de puntos que AB?

En esta oportunidad lo visual puede confundir por lo tanto las respuestas están sujetas a interpretaciones con respecto a lo visual. Los estudiantes tienen distintas interpretaciones:

- *Tiene igual cantidad de puntos inicio y fin.*
- *No importa su tamaño son dos líneas rectas con dos puntos dados.*
- *Tendrían los mismos puntos ya que cada recta es infinita.*
- *Estos tienen puntos dentro de otros puntos pero también se puede determinar por medio de una fórmula para determinar su cantidad.*

Algunas de estas respuestas están sujetas al hecho de indicar: *tienen inicio y fin*, o *como son infinitas son igual,* es decir todos los infinitos son iguales no hay uno más grande que otro, una respuesta diferente es aquella en la que indica que habría tal vez una fórmula para decir que tienen igual puntos pero no indica cual puede ser; así que más adelante se tendrá la oportunidad de profundizar y explicar como por medio de la biyección se puede garantizar que hay igual cantidad de puntos.

Algunas respuestas guiadas solo por lo visual son las siguientes:

- *Porque CD es más largo.*
- *A mi parecer la extensión de longitud de la línea CD hace que esta tenga más cantidad de puntos.*

Aunque son número mayor los estudiantes que contestan que tienen igual cantidad de puntos, se puede observar que sus justificaciones aun no son tan válidas y no están bien argumentadas.

Pasando por los segmentos llegamos a los conjuntos, aquellos que son trabajados desde los primeros años de estudio, en este caso es la comparación entre conjuntos que tienen infinitos elementos, por lo regular siempre estamos acostumbrados a trabajar con conjuntos finitos, veamos que sucede cuando se trabajan con estos conjuntos; la primera pregunta referida a estos conjuntos es la siguiente: Considere al conjunto de los números naturales N = {1, 2, 3, 4, 6,...}y ahora considere P = {2, 4, 6, 8, 10,... }, el subconjunto de los números pares. ¿Hay igual cantidad de enteros en N que en P, o hay más en N?

Antes de analizar las respuestas de los estudiantes, se observa un problema con la redacción de la pregunta, en el conjunto N en donde hace falta un elemento en este el número cinco (N = {1, 2, 3, 4,5, 6,...}) eso se observa en esta pregunta y la siguiente por lo cual algunos estudiantes analizaron este error y sus respuestas variaron de acuerdo a ello.

Algunas respuestas como se ha dicho anteriormente están relacionadas en comparar conjuntos infinitos, es decir si un conjunto es infinito y otro también lo es entonces los conjuntos son iguales, como una implicación verdadera, es decir no existen conjuntos infinitos pequeños y grandes solo existe un solo infinito; una respuesta muy acertada es aquella en la que hacen corresponder elementos uno a uno pero no se sabe si tienen claro lo que es una función uno a uno, dichas respuestas son las siguientes:

- *Hablaríamos de enteros positivos y a mi parecer hay igual cantidad pues el conjunto de números naturales es infinito y los números pares igual.*
- *Hay igual cantidad en N y P porque su resultado es infinito.*
- *Entre N y P hay igual cantidad de elementos ya que al coger un elemento del conjunto N le corresponde exactamente un elemento del subconjunto P.*

En las siguientes respuestas se puede evidenciar lo dicho por Aristóteles que "el todo es más que la suma de sus partes" en el libro de Metafísica, el hecho de hablar de contenencias de conjuntos, puesto que el conjunto de los naturales contiene a los números pares, pero los pares no contienen a los naturales, lo cual hace parecer que el conjunto de los naturales es mayor por lo cual dichas respuestas son las siguientes:

- *Hay más números en N que en P ya que* $P \subset N$ *pero* $N \not\subset P$.
- *Siempre N va a ser uno más que P.*
- *Tendrían 1 y 3 más que P.*

- *Va a tener más que P, porque cuando N lleva 6Z entonces P lleva 3Z y así sucesivamente.*
- *P siempre va a tener la mitad de elementos que P.*
- *A P le hacen falta los impares para llegar a ser como N.*

Otra de las preguntas relacionadas con los conjuntos es: Considere al conjunto de los números naturales N = {1, 2, 3, 4, 6,...} y ahora considere el conjunto B = {2, 3, 4, 5, 6,...}, que se obtiene a partir del conjunto de los números naturales quitando el elemento 1. ¿N tiene más elementos que B o tiene la misma cantidad de elementos que B?

Las respuestas no se dejan esperar son parecidas a las anteriores:

- *Tienen igual cantidad de puntos.*
- *Siempre va a tener uno más.*
- *Siempre van a tener la misma cantidad de puntos ya que a N le falta el 5.*

Debido a la redacción de la pregunta podemos observar una variación de las respuestas pues el análisis se ve centrado en el elemento que falta en N.

La siguiente pregunta es relacionado con la cotidianidad, como han percibido el infinito en la vida, ¿Cuál cuestión a lo largo de tu vida se relaciona con el infinito? Explica tu respuesta.

Algunas respuestas son ingeniosas pero no tienen relación con el infinito pero otras están muy bien fundamentadas:

- *las veces que he reído.*
- *Las palabras habladas.*
- *Jummmm…según yo algo infinito a lo largo de mi vida no creo que exista…*
- *En clases de cálculo cuando los números son infinitos.*
- *Con el universo debido a que es infinito.*
- *El saber es infinito.*
- *El estudio por que no se termina de aprender.*

- *Los compuestos de carbono.*

El análisis que se puede realizar de acuerdo a estas primeras sesiones , es darse cuenta que desde nuestros inicios en la universidad el infinito es una cuestión que nos causa mucha dificultad de comprender y aceptar, que seguimos comprendiendo el infinito como una cuestión cotidiana y potencial, pero el comprenderlo en acto es aún más difícil, no es tampoco negar que algunos estudiantes tienen un conocimiento más cercano al concepto pero aún falta conceptualizarlo, es por ello que esta labor es más aún más interesante y lograr el objetivo previsto desde el inicio sería un ideal.

5.2 PRIMER TALLER.

Después de un largo receso por motivo del paro realizado en las distintas universidades del país, se inicia nuevamente con los estudiantes de Lic. Matemáticas esta vez contando con la asistencia de 22 estudiantes, el inicio de esta sesión se retoma el compromiso y la importancia que se debe tener con el curso, los temas que se habían tratado y el objetivo, los estudiantes están animados y se decide comenzar un poco antes de lo acordado , se les pide conformar parejas para trabajar un taller, y se recalca que lo importante es como justifican cada una de sus preguntas, pues uno de los objetivos de las matemáticas es la justificación y la escritura (taller anexo).

El siguiente taller se planea con el objetivo de trabajar dos paradojas una es la del Hotel de Hilbert y la otra es Aquiles y la Tortuga. En esta sesión se planea es analizar como los estudiantes abarcan cada una de las preguntas y cual son sus respuestas.

Una de las primeras preguntas tienen que ver con los números racionales y los naturales: La infinitud de las fracciones es más grande que la infinitud de los números naturales. Es decir, ¿considera usted que hay más fracciones que números naturales?

Todos tenemos la tentación de argumentar de la siguiente Forma:

- Hay más fracciones que Naturales.
- Hay igual cantidad de fracciones que Naturales.

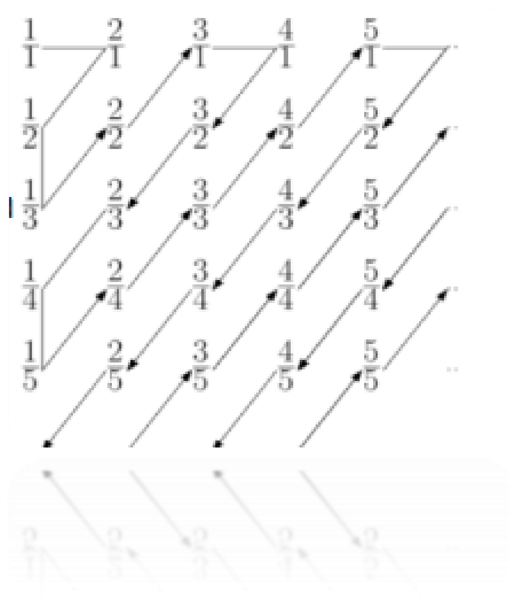
Las justificaciones de los estudiantes para afirmar que hay más fracciones que números naturales son las siguientes:

- *Las fracciones incluyen fracciones negativas y positivas.*
- *Porque entre dos números naturales hay infinitas fracciones.*
- *Las fracciones incluyen números enteros y racionales.*

Son respuestas muy comunes, ya que el hecho de realizar una comparación entre los dos conjuntos podemos garantizar a simple vista que hay más fracciones que números naturales, del cual podemos ver que es un razonamiento lineal, como en la recta numérica es decir se apoyan en el hecho de observar la recta numérica y la ubicación de los números naturales y los racionales.

Aquellos que justifican que tienen igual cantidad de elementos afirman que tanto los naturales y las fracciones son infinitas y por lo tanto son iguales y tienen la misma cantidad, nuevamente observamos el infinito potencial en donde solo podemos comparar infinitos entre infinitos.

Es aquí donde la genialidad de George Cantor viene a rescatarnos de ese pensamiento y nos invita a pensar así: se razona de forma lineal, pero porque no hacerlo diagonalmente.

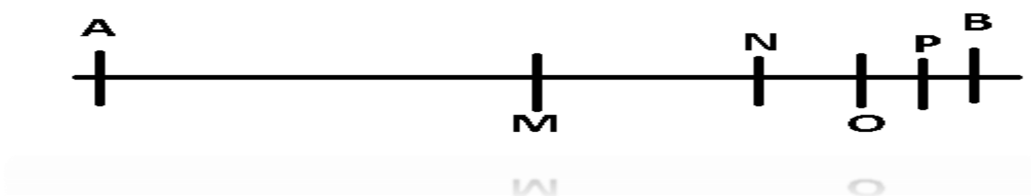


En esta situación se presenta la oportunidad de explicar por qué hay infinitos con cardinalidad igual y porque hay infinitos más grandes que otros.

Esta pregunta es uno de los primeros objetivos que se trabajara con la ayuda del "Hotel de Hilbert", en donde podemos hacer uso de algunas herramientas matemáticas para aclarar este tema.

Otro de los objetivos tiene que ver con las siguientes preguntas, en donde la suma infinita de fracciones nos ayuda a plantear nuevos conocimientos e ideas erróneas que se tiene cuando se trabaja con el infinito

La siguiente pregunta nos recuerda una paradoja, veamos si la recuerdan: La siguiente figura muestra un esquema en el que cada vez se biseca el segmento de la derecha. Es decir los puntos M, N, O, P, son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.



Si se siguen haciendo más y más bisecciones. ¿Cree usted que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto B? Explique su respuesta.

Las respuestas dadas están basadas en las dos siguientes:

- Es posible que el punto A coincida con el punto B.
- No es posible llegar al punto B, ya que siempre se va a encontrar un punto que bisecar.

De acuerdo con el análisis de las respuestas realizada por los estudiantes se puede observar que la mayoría argumenta que no es posible llegar al punto B, ya que se piensa que el aumento de los puntos medios lo va a conducir a una idea de infinito potencial en donde el proceso no se termina por lo tanto no se encuentran límites.

En general podemos observar que la mayoría del curso coincide en ver A y B como puntos fijos, sin embargo el resto de estudiantes no se desprenden de la perspectiva finita de las cosas, es decir, algunos consideran aspectos como que es un segmento acotado entre dos puntos, se realizarían bisecciones hasta que se llega a punto final se hacen más pequeñas. Se observar respuestas como:

- *Se pueden realizar infinitas bisecciones.*
- *Al realizar la bisección va a quedar un espacio.*
- *Se tomar a B como el punto para hacer otra bisección.*
- *No es posible encontrarse con alguno de los extremos.*
- *El punto B va a ser el límite del segmento.*

Un caso particular es aquel en el cual toman como ejemplo un segmento entre 0 y 1 y las bisecciones son decimales y encontramos entre una bisección y otra un numero decimal.

Otro caso particular es el siguiente; tomando nuevamente e A=1 y B=0, luego realizando bisecciones a ½, ¼,… creando una sucesión de la siguiente forma:

$$\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} + \cdots$$

La paradoja de Zenón mostrada de esta manera nos lleva a unas subdivisiones muy pequeñas, un infinito muy pequeño el cual es más controvertido que un infinito grande es aquí en donde la paradoja de Zenón cobra vida en nuestro curso, la cual será trabajada con más detalle en una sesión posterior.

Otra pregunta que nos relaciona esta fantástica paradoja es la siguiente: Se deja caer un balón de básquet desde un balcón de 2 metros de altura a una superficie plana, tras tocar el suelo después de caer una altura h, rebota hasta una altura h/2.

a) ¿Se puede calcular la distancia recorrida por el balón de básquet? Justifique su respuesta.

b) ¿Se puede decir cuántos rebotes hará el balón? Justifique su respuesta.

En esta pregunta se tienen distintos puntos de vista, esto debido a la forma de interpretación del ejercicio, por lo cual se pueden observar lo siguiente:

En la parte **a)** el cual se pide calcular la distancia recorrida por el balón de básquet se presentaron las siguientes respuestas:

- No se puede calcular ya que los rebotes son infinitos y rebotaría infinitamente.
- Como se conoce la altura, tal distancia se puede calcular.

Analizando las respuestas para quienes afirman que rebotaría infinitamente, se observan que lo llevan nuevamente a ese infinito potencial en donde siempre encontramos uno más, aunque el infinito sea muy pequeño:

- *El balón de básquet rebotara infinitamente, en segmentos más "pequeños".*
- *No se puede calcular la distancia recorrida por el balón de básquet porque no se sabe con certeza los rebotes que pueda dar el balón.*
- *No porque si rebota hasta h/2 esto quiere decir que siempre va a conservar un recorrido h.*
- *Si los rebotes son infinitos la distancia también lo será y no se podrá calcular.*

En estas repuestas podemos analizar y observar los atributos del infinito a infinitos rebotes hay infinitas distancias, en este sentido podemos observar que la noción de infinito aún está ligada a ese razonamiento lineal al infinito potencial, y además que todo lo que es infinito debe ser infinito, no importa el contexto ni la situación en la cual se maneje el problema.

Para los estudiantes quienes afirman que la distancia se puede calcular, analizaron distintas formas:

- Como sería el recorrido del balón de básquet:
  - Dicho recorrido se realizaría contando inicialmente 2 metros luego cuando regresa al punto medio de la altura h y cuando regresa serian dos veces h/2 y así sucesivamente.
  - Para otros solo la distancia de h + h/2+h/4+…

En este sentido los estudiantes afirman lo siguiente:

- *Se puede calcular debido a que nos dan la altura h=2m y con esto obtendríamos una sucesión.*
- *La suma de sus alturas de rebotes es igual a su altura inicial:*
  - $\frac{h}{2}+\frac{h}{4}+\frac{h}{8}+\cdots+\cdots=2m$
- *Se forma una especie de secuencia donde la distancia se divide a la mitad, hasta que el balón pare y sumamos sus pivotes.*
- *La suma de las distancias es una sucesión de la forma* $2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$*, donde la razón es ½, como la razón es menor que 1 la sucesión es finita.*

Se puede notar que estos estudiantes tuvieron un análisis más detallado del problema, lo cual les brindo analizar una sucesión que sería la suma de todas las distancias, algunas haciendo uso de las definiciones de sucesiones y otros analizando la probabilidad de que en algún momento el balón se detenga o mirando la altura inicial del cual el balón se deja caer; a pesar de que todos afirman que la distancia se puede calcular, podemos mirar que todos tienen una forma de justificar muy diferente. Algunos afirman lo siguiente:

- *Como la suma inicial es dos todas sus sumas pequeñas no superan a dos y las otras tienen a ese número que finalmente es 2m.*
- *Otros analizan el hecho que en la realidad sería muy válido, el balón se debe detener en algún momento.*

- *Hacer uso de las definiciones de sucesiones.*

En la pregunta **b)**, se tiene el mismo análisis, todos siguen el mismo patrón de la respuesta anterior que es el siguiente:

- *Si se puede afirmar cuantos rebotes da el balón en un determinado tiempo.*
- *No se puede decir ya que los rebotes son infinitos*

Con respecto a que los rebotes se pueden calcular podemos observar dos patrones de respuestas una relacionada con el mundo real y físico y otro relacionado con las distancias:

- *Existe la fuerza de la gravedad, lo cual hará que el balón pare en algún momento.*
- *Llegará un momento en el cual el balón se quede quieto.*
- *Se llegara después de un tiempo a una distancia 0.*
- *Como la altura inicial h, luego h/2 hasta tender a cero.*

Es muy frecuente mirar este tipo de respuesta, ya que se lleva a la vida cotidiana, y podemos decir que todo debe para y no es "*posible*" que el balón sigua rebotando infinitamente, aunque una de las respuestas es justificada por las definiciones de sucesiones.

Como podemos observar se sigue con los mismos análisis de la anterior, los rebotes son infinitos por lo tanto no se puede calcular cuántos rebotes dará el balón, nuevamente miramos ese razonamiento del infinito potencial que siempre voy a encontrar uno más…

Otro tema interesante y tratado más adelante son las sumas infinitas, imposible no hablar de ellas: Considere la siguiente suma

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\cdots$$

Cual cree usted que es el valor de la suma?. Justifique su respuesta.

En esta oportunidad podemos analizar distintas posiciones:

- La suma se aproxima a 2 o tiende a 2.
- La suma es exactamente 2.
- No se puede calcular con precisión.
- No se puede calcular.

Analicemos uno a uno estas respuestas y sus justificaciones,

- *El valor de la suma se aproxima a dos.*
- *La suma de los primeros 8 términos es 1,9921875 al aumentar los términos vemos que el valor de la suma tiende a 2.*
- *Podemos decir que tiende a 2 pero nunca llega a serlo, ya que es una suma donde cada fracción que se agrega es una aproximación a la mitad del fraccionario anterior.*

En este punto se puede analizar el uso de cálculo de algunos términos (calculadora) y observar que se acerca a un entero pero no llega a serlo, es decir un infinito que no puede ser alcanzado.

- *Seria 1 y los demás se acercan a un valor entero, por lo tanto el valor de la suma seria 2.*
- *La suma de las fracciones es 1 y sumándole 1 nos da 2.*

En este sentido también se realizan cálculos pero los aproximan a un número entero, pues lo que realizan es lo siguiente, la suma de estas fracciones es $0,\overline{9999}$, lo cual es 1.

- *El valor de la suma no la podemos saber, porque el valor de la suma siempre va adquirir la mitad del resultado final de cada suma.*
- *Las fracciones resultan ser infinitas por lo tanto, el resultado será infinito y no se puede calcular.*

Es claro que todo lo que es infinito no se puede calcular es lo analizado por los estudiantes, pues siempre va haber uno más; es de esperarse que la idea intuitiva de un infinito potencial prevalece, pues es más fácil imaginarse secuencias que no terminan que comprender que el todo y una parte de él sean equivalentes, en algunas ideas algunos estudiantes refleja una idea fina de lo que en matemáticas se conoce como el límite.

En la misma línea de la anterior pregunta tenemos: considere la siguiente ecuación:

$$y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

¿Puede decir para que valores de n resulta y=2? Explique su respuesta.

Nuevamente se tienen distintas posiciones las cuales son las siguientes:

- Encuentran un valor para n.
- Afirman poder encontrar un valor para n, solo es una aproximación.
- No se puede encontrar un valor para n.

En este caso es importante observar las respuestas dadas por los estudiantes:

- *el resultado nunca va hacer y=2 porque la fracción resultante al dividirla va a dar 1, x donde x es un periodo y va a ser infinito.*
- *Nunca va a ser dos porque la suma de las fracciones siempre va a ser más pequeña,*
- *No porque los valores de n se aproximan nunca nos dará 2.*
- *Nunca va ser dos nos acercamos a él como un numero decimal pero nunca llegara a ser dos.*
- $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{256} = 2.$
- *Para ningún valor de n, siempre va a estar aproximado.*
- *No porque se le suman fracciones cada vez más pequeñas.*

- *El valor que toma n, para tomar el valor de y=2 es* $199999950438 + \frac{1}{67090007}$.
- *La suma tiende a 2, por lo tanto cuando n=∞ la suma tiende a 2.*

En cuanto a esta serie es importante recalcar que se trata de suma de términos que aparecen en la versión de la paradoja de Zenón, trabajada en puntos anteriores, presentadas de diferentes formas, el objetivo es analizar si los estudiantes relacionan las otras situaciones con esta o si por el contario la toman como otro ejercicio aparte; según lo observado y las distintas respuestas podemos analizar, en este caso algunos grupos si relacionaron con los otros ejercicios en el hecho de realizar cortes cada mitad, y en otros casos miramos el uso de la calculadora para hallar sumas aproximadas, y miramos la aproximación de límite.

Matemáticamente, esta suma representa una serie geométrica, en donde cada uno de sus términos es menor que 1, por lo tanto su resultado se puede hallar a partir de una formula sencilla de sumas parciales, siendo para este caso:

$$\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1}$$

Mas el uno inicial es 2, así que podemos decir que podemos encontrar un valor para n.

Finalmente esta taller deja ver muchas cosas en las cuales los estudiantes no están muy enterados; el análisis que se realiza a esta sesión es el siguiente; las preguntas todas son realizadas para cumplir una finalidad y acercar cada vez más a los estudiantes al concepto de infinito, si bien todos saben que existen dos clases de infinito, aún no saben cómo son cada uno de ellos y como pueden diferenciarlos. Así que las preguntas sirven para observan que tanto perciben del infinito; en la pregunta número uno en donde se enfrentan a la comparación de dos infinitos distintos, se observa que la gran mayoría aún tiene la concepción de un infinito potencial, del hecho de representar y comparan conjuntos entre si y mirar la cardinalidad de ellos, así que la intuición los lleva a determinar que si entre dos elementos naturales puedo encontrar muchos cardinales es obvio referirse a que la cardinalidad del conjunto de las fracciones es más grande que el conjunto de los naturales; es muy interesante observar que de una manera intuitiva pueden mirar la cardinalidad de conjuntos, así que no es difícil explicar este tema para ellos; algunos estudiantes los cuales fueron pocos analizaron el hecho de que los conjuntos son infinitos y por tanto son iguales, fue gratificante observar que se puede ya explicar la cardinalidad de algunos conjuntos infinitos y explicar el por qué algunos infinitos tienen cardinalidad igual a otro y cómo podemos encontrar infinitos más grandes que otros; así que estos estudiantes están listos para ello.

En los puntos posteriores se presentan con la finalidad de analizar la paradoja de Zenón en distintas versiones, en este caso los estudiantes se enfrentan a situaciones en donde el mundo real se hace presente , en el hecho del balón de básquet, en el cual el estudiante se ve enfrentado a una infinitud la cual no está presente, este hecho se puedo percibir en algunos estudiantes, para los cuales el balón se detendrá en algún momento; se enfrentan a ecuaciones y gráficas , todas presentan una situación similar*, la divisibilidad infinita de mitades*, si bien algunos estudiantes asociaron con la noción de límites (tiende , se acerca, se aproxima, etc.) o de sucesión , otros solo observaron el infinito potencial, aunque en algunos casos tocaron el infinito actual, cuando miraron la suma como un todo; es gratificante observar que los estudiantes tienen la idea del concepto formal de infinito, el cual solo es cuestión de sacarlo a flote y será este el objetivo de estos puntos.

5.3 HOTEL DE HILBERT

Lo prometido es deuda es decir que en esta sesión se trabajara la primera pregunta del anterior taller, aunque algunos estudiantes no estuvieron presentes en esa sesión, se hace una breve aclaración del taller; para trabajar la pregunta se realiza una presentación en power point, en la cual paso a paso se explica lo siguiente:

- Se realiza un recuento de como la historia del infinito se parte en dos con la aparición de George Cantor en el siglo XIX.
- Se prepara una explicación sobre funciones, de lo cual se hace un refuerzo en el tablero sobre funciones uno a uno, siendo este un tema importante.
- Se explica la genialidad de cantor, aquello que logro con los números naturales, enteros y racionales; esto se realiza en el tablero con ayuda de los estudiantes.
- Luego se habla un poco de los números transfinitos.
- Se continúa con el "Hotel de Hilbert", esta presentación tiene una serie de preguntas las cuales los estudiantes van contestando paso a paso y finalmente se explica la posible respuesta.
- se hace una pregunta final "son todos los infinitos iguales"…

La pregunta del taller anterior es la siguiente:

La infinitud de las fracciones es más grande que la infinitud de los números naturales; o sea, ¿hay más fracciones que números enteros?

Se inicia comentando cuales fueron las respuestas de los grupos frente a esta pregunta, las cuales hablan de infinitos más grandes que otros, ya que unos conjuntos están dentro de otros conjuntos, o todos los infinitos son iguales (si dos conjunto que aparentemente son diferentes y son infinitos entonces serian iguales); con respecto a esto se dice que esto era lo que se pensaba antes del siglo XIX, con respecto a este comparación entre conjuntos infinitos, y es aquí en donde la historia del infinito comienza una nueva etapa, con la genialidad de Georg Cantor quien logra formalizar el concepto del infinito y pasar de ese infinito potencial, al infinito actual de una manera formal, en el cual se habla de infinitos numerables, infinitos iguales a otros.

Pero antes de avanzar en el tema, se hace necesario recordarles a los estudiantes un par de conceptos matemáticos, los cuales son importantes para explicar la numerabilidad y cardinalidad de algunos conjuntos, para esto se realiza un recorderis de funciones, se les plantea la siguiente pregunta:

¿Qué es una función?, para lo cual se observa que la mayoría de los estudiantes no lo recordaban o simplemente aún no lo habían trabajado; luego por medio de las diapositivas y unos ejemplos en el tablero se explica que es función y como es una función biyectiva.

Seguido a esto, se comienza explicando sobre Georg Cantor, quien fue el primero en hablar de conjuntos numerables y eran aquellos que se podían colocar en correspondencia uno a uno con los números naturales, y el cardinal (dando explicación de lo que significa cardinalidad, aunque algunos ya lo tenían presente por el curso de lógica y conjunto) lo llamo el alef-cero y es el primer infinito, no se profundizo mucho en los números transfinitos (diapositiva); luego se pasó a explicar en el tablero cómo se logra la biyección entre los números naturales y los números pares (no sin antes preguntarles si tenían alguna idea de ello),a lo cual se les explico sobre los naturales y los pares quienes tienen la misma cardinalidad y se les realizo la siguiente preguntas:

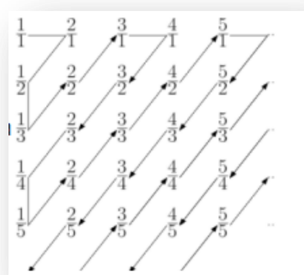
¿Será que los números enteros y los números naturales tienen la misma cardinalidad?

A lo que la mayoría respondió, **no,** pues los naturales estaban contenidos en los números enteros y los demás, simplemente se quedaron pensando.

Se les responde, que tienen la misma cardinalidad y se demuestra de la misma forma del caso de los números pares; de esta manera surge la pregunta.

¿Por qué? Como se puede lograr, se les deja la inquietud, para que piensen y analicen distintas soluciones, después de un rato en el cual debatieron pero no llegaban a la respuesta, se explica cómo se puede lograr la correspondencia uno -

uno, entre los enteros y los naturales; para este punto ya se les ha mostrado algunos conjuntos infinitos que se pueden colocar en correspondencia uno a uno con los naturales, ¿será que hay más? , se realiza la pregunta, para ello algunos comienzan a susurrar y nombran a los impares, luego se les preguntan si sucede lo mismo con los números racionales, aquellos que son de la forma a/ b, con b diferente de cero, recuerdan la pregunta con la cual iniciamos esta sesión, que piensan?, será que puedo colocar a los naturales en correspondencia uno - uno con los racionales, sin dudarlo comentan que no es posible ya que las respuestas que habían dado eran verdaderas, tal vez porque los dos son infinitos, pero no se puede colocar de esa forma con los números naturales, después de un rato y de escuchar distintas posiciones, se le dice que es posible y fue nuevamente Georg Cantor, quien a través de una grandiosa diagonalización de los racionales se logra el cometido, realizo lo siguiente,



Esta explicación se realiza ,nuevamente en el tablero, los estudiantes comprendieron, aunque no estaban muy convencidos, luego se retomó nuevamente la explicación y se hizo la pregunta: ya se tienen que los naturales se pueden colocar en correspondencia uno-uno con los pares, los impares y los enteros entre otros, ¿Qué conjunto falta ?, todos respondieron: los reales, y ¿será que los reales se pueden colocar en correspondencia con los naturales, es decir será que el conjunto de los números reales es numerable? Algunos contestaron - sí, de igual forma como se hizo con los racionales, con los reales debería ser igual.

No se da ninguna respuesta y se les deja la inquietud, y al final de la clase se dará respuesta a la pregunta, seguido a esto se trabaja con la siguiente paradoja:

Se les presenta “El Hotel de Hilbert”, para complementar el hecho de que hay distintos infinitos con la misma cardinalidad, luego por medio de la presentación en diapositivas, se empieza a explicar y se realizan las siguientes preguntas:

Para las cuales se daba un tiempo y puntos a los primeros cuatro grupos que dieran la respuesta y luego se escogía a uno de estos grupos para que salieran a explicarla; las preguntas son las siguientes:

1. El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped, ¿se puede hacer?
2. Imaginemos que el hotel sigue completo, pero llega un autobús con infinitos huéspedes, ¿se pueden alojar?
3. ¡Más difícil todavía!
   El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes, ¿se pueden alojar?

Aunque algunos les costó un poco encontrar la solución, el haber explicado la biyección entre los naturales y otros conjuntos infinitos y el pasar por cada uno de los puestos orientándolos hacia la respuesta, lograron encontrar la solución, las cuales salieron a explicar al tablero, para las dos primeras todos encontraron la misma respuesta, pero fue en la tercera en donde algunos encontraron soluciones novedosas tales como:

- Cada bus se enumera con los números primos y cada huésped del bus se enumera con los múltiplos de cada número que tiene el bus es decir empezamos con el bus 2, es decir son todos los múltiplos de dos y luego con el bus 3, pero como en este caso se repiten algunos números simplemente se salta y se continua con el que se sigue de esta manera no se repiten los números de habitaciones como muestra el siguiente gráfico.

2 4 6 8…

3 9 15 …

5 35 25 …

7 49 …

- Se le daría un número a cada uno de los buses, luego se enumeraría cada uno de los ocupantes del bus, luego se les llamaría a los números uno de cada bus y mirando cuantos son estos, este número seria el número de habitaciones que se correrían para alojar a los numero 1 y esto mismo proceso se haría con los números 2.
- Buses impares en habitaciones impares,
- Buses pares en habitaciones pares.

Esta respuestas se dieron después de un debate entre los grupos y recordarles lo observado por cantor, aunque algunos querían retomar la idea de la enumeración de los racionales, ninguno pudo llegar a ella, es claro que los estudiantes pueden manejar infinitos, pero cuando hablamos de varios infinitos, aun no se percatan de las distintas clases de infinitos, y como pueden formar con los múltiplos de los números y otros, muchos infinitos, a pesar de que se les recordaba la explicación lo de cantor y la numerabilidad de las distintas clases de infinitos, fue por medio de una serie de ayudas e insinuaciones que lograron llegar a las respuestas.

Finalmente se explica que la idea de Hilbert, es explicar que existen distintas clases de infinitos, pero será que todos los infinitos son iguales, es la pregunta que había quedado en suspenso y ahora se les explicaría, si los naturales y los reales tiene la misma cardinalidad; después de un debate, de una manera concisa se responde que no, simplemente no se puede realizar una biyección entre estos dos conjuntos, y se pasa a realizar la demostración que realizo cantor, en el tablero y luego con ayuda de las diapositivas se realiza un ejemplo en particular.

De esta manera se termina la sesión, contando a todos los estudiantes ese paso que hay del infinito potencial al actual. Por medio de la genialidad de Cantor, se finaliza la sesión, no sin antes recordarles que hay otros infinitos más grandes.

Esta es una sesión muy activa, en donde la participación de los estudiantes está presente y la labor del docente como guía se coloca en práctica, de una manera muy divertida y dinámica, el hecho de regalar puntos a los primeros que terminaran, se logró una competencia entre ellos de una manera sana y buena, pero de esa manera las preguntas no se hacían esperar, fue extenuante pero muy gratificante el poder mirar como esta labor es hermosa, porque no estas como ese docente enojado y bravo al que todos le temen, si no al docente que comparte ríe y se divierte con ellos , sin perder nunca el rol de docente el cual es el de enseñar y aprender cada día más.

En una de las sesiones más importantes, pues se le presenta al estudiante como la historia del infinito se parte en dos, pasar del infinito potencial y comenzar ya, hablar del infinito actual a través de la genialidad de Georg Cantor en el siglo XIX, resolver las distintas inquietudes frente a las respuestas posibles, fue todo un esfuerzo, como todos tenían ideas muy buenas simplemente era guiarlos, sin darles la respuesta, fue complicado, el hecho de comenzar a comprender que no todos los infinitos son iguales y algunos aunque en apariencia sean más grandes y finalmente terminan siendo iguales, este nuevo comienzo fue un paso grande en la finalidad del curso, se trata de explicar de una manera gráfica y divertida haciendo un gran esfuerzo para que logren captar la idea, muchos de los presentes quedaron con la inquietud aunque algunos se sintieron satisfechos con la explicación y el trabajo realizado, lo cual se puede notar en la distintas respuestas dadas en el taller de la paradoja de Hilbert o en conversaciones al finalizar la clase, esta sesión estuvo llena de muchas expectativas, pero será al final del curso en donde se podrá dar razón de si comprendieron o no las explicaciones dadas.

5.4 AQUILES Y LA TORTUGA

Se continúa con la solución del taller; en este caso la finalidad de las siguientes preguntas son las sumas infinitas; para lo cual se realiza una presentación en power point (Aquiles y la tortuga Zenon.pptx), sobre la Paradoja de Aquiles y la tortuga, esta vez contando con un cuento de Borges, el cual ayudara a complementar mas esta guía "*La eterna carrera de Aquiles y la tortuga*".

La sesión inicia hablando sobre los puntos del taller y las distintas respuestas encontradas en cada pregunta, para lo cual se les comenta que dichas respuestas fueron ciertas en una época, pero fueron refutadas y demostradas en tiempos posteriores, las preguntas trabajadas en esta sesión son presentadas en las diapositivas (anexo 1). Comentando que estos puntos tienen relación con una paradoja la cual se va a trabajar, así que se realiza la presentación formal de la paradoja de Zenón, no sin antes comentarles quien realizo esta paradoja; se les habla sobre Zenón de Elea y su historia, seguido a esto se cuenta la paradoja:

Aquiles, el atleta más veloz, capaz de correr los 100 m. en 10 segundos, no podrá alcanzar a una lenta tortuga, diez veces menos rápida que él. Ambos disputan una carrera, concediendo Aquiles una ventaja de 100 m. a la tortuga. Cuando Aquiles ha cubierto esos 100 m., la tortuga se ha desplazado 10 m. Al cubrir Aquiles esos 10 m., la tortuga se ha desplazado 1 m. Mientras cubre ese metro que le separa de la tortuga, ésta ha recorrido 0'1 m. Y así indefinidamente.

Aclarando la paradoja, se les habla sobre un cuento de Jorge Luis Borges, el cual aportara para el desarrollo y comprensión de la misma, así que se les entrega el cuento de "La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga", realizando una lectura colectiva paso a paso, en algunos párrafos se detienen para comentar y explicar algunas cosas, las cuales no son tan claras, esta lectura dura unos 20 minutos, terminada la lectura se retoman las diapositivas y se explica en el tablero la solución de la paradoja , y de acuerdo a ello se explica también, las respuestas de los puntos del taller, quedando en claro que algunos infinitos si pueden ser alcanzados. Las explicaciones para estas soluciones fueron las siguientes:

En cuanto a la primera y segunda pregunta se les realiza la representación

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Con lo que se explica que es una serie geométrica, es decir es aquella en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante, llamada *razón z*. En este ejemplo, la razón $z = 1/2$). En general, una serie geométrica es convergente (el limite existe), sólo si $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z}$$

Luego tenemos $a = \frac{1}{2}$ y $z = \frac{1}{2} < 1$, reemplazando en la anterior formula tenemos

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-1/2} = 1$$

Otra forma de explicar esta suma fue la siguiente:

Sea $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

Luego multiplicamos

$$\frac{1}{2} \times S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Luego restamos $S - \frac{1}{2}S$, con lo cual podemos ver que se cancelan algunos términos:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$\frac{1}{2} \times S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Y finalmente tenemos la siguiente ecuación

$$1S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}$$

Despejando S, tenemos que S=1.

De estas dos formas se explica la solución a estas preguntas.

Terminada la explicación, se da paso para que den respuesta de las tres preguntas sobre el texto de Borges, las cuales son:

1. ¿Qué opina usted en el sentido matemático sobre la paradoja de Zenón?
2. Realice un análisis del texto.
3. ¿Qué opina sobre el hecho de que algunos infinitos, si pueden ser alcanzados?

Las respuestas dadas por los estudiantes, estuvieron muy diversas, lo cual surge por el hecho de que el documento de Borges presenta varias refutaciones de distintos autores con respecto a la paradoja, así que unas de las respuestas a la primera pregunta son:

- *Estamos en total desacuerdo con la paradoja, porque Aquiles si puede alcanzar y pasar a la tortuga al cabo de un tiempo determinado es decir:*
- *En el sentido matemático la paradoja obtiene argumentos, supremamente validos ya que siempre que la distancia que recorre la tortuga, es recorrida por Aquiles pero cuando llega Aquiles a ese punto la tortuga ha avanzado*
- *En el sentido matemático vemos como las refutaciones hechas a esta paradoja son ciertas, porque después de un espacio y tiempo determinado Aquiles si podrá alcanzar a la tortuga.*
- *Según lo comprendido en el texto opinamos que había una controversia porque en esa época la suma infinita no tenía respuesta, con el transcurrir del tiempo James dedujo y comprobó que la suma infinita daba resultado finito.*
- *Grupalmente opinamos que la velocidad de Aquiles siempre será mayor a la tortuga, por lo tanto Aquiles la alcanzara una y otra vez.*

$V = \frac{E}{T} = \frac{100}{10} = 10m/s$ *Velocidad de Aquiles*

Otro factor es la diferencia que hay entre un paso de Aquiles y un paso de la tortuga que por un paso de Aquiles son 10 de la tortuga.

- *Opinamos que sirve como ejemplo para indicar la relación entre finito y lo infinito como afirma Stuart Mill: a travesar un espacio finito requiere un tiempo infinitamente divisible, pero no infinito.*

De acuerdo a las distintas respuestas, se puede examinar la capacidad de análisis y comprensión lectora que los estudiantes tienen al enfrentarse a textos como este de Jorge Luis Borges, se observa las distintas refutaciones que en él se encuentran; cada estudiante asume una de estas refutaciones y defiende su posición frente a la paradoja, algunos apoyan las fórmulas matemáticas para refutar, otros toman posiciones de algunos autores que toman partida en el texto, lo importante es observar los trasfondos de cada posición y como la interpretan.

En cuanto a la segunda pregunta en la cual se pide realizar un análisis de la lectura, los estudiantes comprenden lo que Borges realizo en este texto, lo cual es encontrar de distintos autores refutaciones sobre la paradoja y la posición que ellos toman frente a ellas, y finalmente Borges da su punto de vista el cual es “la paradoja de Zenón, seguirá perpetua por toda la eternidad”. Las respuestas dadas son las siguientes:

- *El autor cuenta como hace la recopilación de varios libros acerca de la paradoja de Aquiles y la tortuga y las compara entre ellas, después llega a la conclusión de que no es infinita.*
- *El texto nos muestra como esta paradoja es inmortal ya que a pesar de tener muchas refutaciones que son ciertas esta sigue siendo centro de análisis.*
- *Nos da a conocer los diferentes puntos de vista con que se puede interpretar el planteamiento de una paradoja.*

Es difícil analizar un documento del cual solo se realiza una sola lectura, pero los estudiantes tienen una buena capacidad de interpretación, por que logran extraer del texto lo más importante y dan su punto de vista.

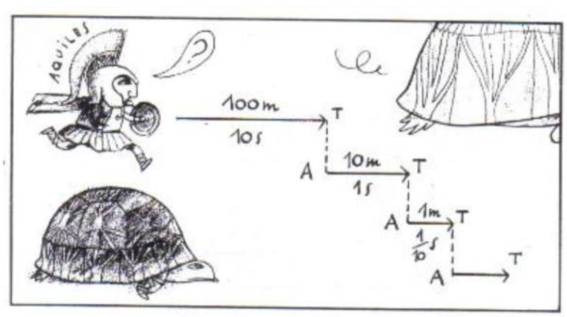
La última pregunta es relacionada con las sumas *infinitas ¿será que los infinitos pueden ser alcanzados?,* para las cuales se encontró una justificación valida de que algunas sumas son finitas, cabe aclarar que no todas las sumas infinitas son finitas, aunque para los estudiantes comprender esta justificación, no es muy clara pues hay muchos conceptos que no todos han manejado , se les dificulta su comprensión y debido al tiempo no se logra dar una explicación más clara, pues para ello se necesitaría una o dos clases para explicar lo de series geométricas, armónicas entre otras, solo se realizó una explicación breve sobre este tema. De acuerdo con esto las respuestas encontradas son las siguientes:

- *Estamos de acuerdo, porque si tomamos la suma* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ *sabemos que de acuerdo a James la suma es finita.*
- *En nuestra opinión infinitos como la paradoja de Aquiles y la tortuga que si pueden ser finitos.*
  "El que persevera alcanza".
- *Opinaríamos que es algo erróneo y contradictorio ya que si se puede alcanzar un infinito ya no sería infinito, pasaría a ser finito.*
- *Esta conclusión planteada por James es una forma de dar respuesta a una problemática que se ha presentado en la antigüedad que era saber el fin del infinito.*
- *El hecho de que algunos infinitos si puedan ser alcanzados nos indica la naturaleza ambigua de las cosas y la vida. En un sentido filosófico el ser abarca la existencia y la no existencia.*
- *Pues sabemos que el infinito es inalcanzable por lo tanto consideremos que si un infinito es alcanzado entonces no es infinito, es finito.*

De acuerdo a estas respuestas, en las cuales no está muy claro el hecho de por qué algunas sumas infinitas son finitas, es por el hecho claro de que el infinito es infinito y no hay más que decir, hablar de un infinito alcanzado es algo contradictorio, son cosas inquietantes, pero es el rigor de las matemáticas quienes llegan a dar respuestas validas a estas cuestiones.

En cuanto a lo personal, puedo afirmar que fue una de las sesiones más complicadas de explicar, pues son muchos conceptos, algunos nuevos otros no tanto, pero igual de complejo de explicar en tan corto tiempo, resaltemos que el documento de Borges, no es muy fácil de “digerir”, así que esta labor me costó mucho, finalmente con resultados muy satisfactorios.

Esta sesión está dedicada a Zenón de Elea, James Gregory y J. Luis Borges, grandes autores que con su amor por las matemáticas, ayudan a comprender los distintos puntos del concepto del infinito, en este caso las sumas infinitas que dan resultados finitos. Aunque no fue fácil se logra llegar a los estudiantes con una nueva forma de interpretar el infinito, encontrando distintas refutaciones de la paradoja, finalmente se queda con la idea de James, quien explica que algunas sumas infinitas, las llamadas en este caso series geométricas si tienen un valor finito, esto se explica de la siguiente forma:



La **serie geométrica** real de término inicial $a \in \mathbb{R}$ no nulo y de razón $r \in \mathbb{R}$ es convergente si y solamente si $|r| < 1$. En tal caso, su suma vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots=10\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{10})^{n}=\frac{10}{1-1/10}=\frac{10}{9/10}=\frac{100}{9}=11,11111...=11,\overline{1}$$

Aunque no todos tienen claro lo que es una serie, o sumatorias se trata de explicar de la manera más comprensible, cabe decir que sería necesario dar una clase de series (para lo cual no hay tiempo, solo sería una sugerencia), pero lo importante es que les queda claro el hecho de mirar el infinito en sumas infinitas que pueden ser alcanzadas.

5.5 ERRORES FRECUENTES QUE CONLLEVA EL CONCEPTO DE INFINITO

El inicio de esta sección tiene la finalidad de mostrar a los estudiantes otra cara del infinito, infinitos que parecen no serlos y errores cuando operamos con él; se pide que se organicen en grupos de tres estudiantes aunque se presentaron grupos de cuatro, esto debido a que llegaban un poco tarde, seguido a esto se decide entregar un taller en el cual se les presenta una lectura interesante sobre la historia del ajedrez y unas preguntas adicionales sobre sumas infinitas.

La importancia de esta lectura se debe al hecho de cómo se opera con el infinito; la historia del ajedrez, aquella en la cual un rey quien se encontraba muy triste por la muerte de su hijo deciden llevarle un juego "El ajedrez", y el rey quedo tan satisfecho, que quiso agradecerle al joven Sissa otorgándole lo que le pidiera , Sessa lo único que pidió fue trigo, pidió que el rey le diera un grano de trigo por la primera casilla del ajedrez, el doble por la segunda, el doble por la tercera, y así sucesivamente hasta llegar a la casilla número 64 parecía inofensivo el regalo pero el rey hizo cálculos y se dio cuenta de lo desorbitante que era el regalo, así que pide ayuda a un matemático y le da una solución en la cual solo le daría un grano de arroz al Sessa, ¿Dónde está el error?, es ahí en donde operar con el infinito no es tan fácil, y esta sesión está dedicada a observar cómo podemos cometer errores si no sabemos operar bien con el infinito.

Se lee la historia del ajedrez en voz alta haciendo que todos participen de la lectura, finalizando esta y resolviendo algunas inquietudes acerca del cuento, se pasa a las preguntas, como todos no comprendían las preguntas se pasa al tablero a dar una explicación, todos no tiene claro lo que es un tablero de ajedrez y cuantas casillas tiene así que uno de los estudiantes se ofrece a pasar al tablero y dibujar la tabla, luego todos comienzan a trabajar sobre la sucesión que representa. La mayoría logra interpretar la sumatoria de los granos de arroz de la siguiente forma:

$$X = 1^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{62} + 2^{63}$$

Con respecto a la primera pregunta e la cual se pide que Calcule la cantidad de arroz que el Rey le debe dar a Sessa.

Todos identifican la suma pero no como realizarla, así que se les recuerda lo hecho en la clase anterior con sumas, que aunque no es la misma si tiene un cierto parecido, así que en el tablero se pasa a repetir esta operación y a dar indicios de cómo realizarla, algunos estudiantes logran identificar como realizar la operación para hallar la suma y para otros se les dificulta, así que se pasa por estos grupos y con más ayudas y pistas se logra que lleguen a la respuesta.

Algunas respuestas son las siguientes:

1. **Cómo crees que fue la solución del matemático, con la cual el Rey de una manera incorrecta le termina ganando a Sessa.**

En esta ocasión cinco grupos logran llegar a la respuesta, esto debido a que de la parte uno identifica la suma y si en vez de llegar hasta la casilla 64, siguen hasta al infinito y operan restando el infinito, logran dar con el error matemático que hizo ganar al Rey, y se realiza la siguiente operación:

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots$$
$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots$$
$$X - 1 = 2\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots\right)$$
$$X - 1 = 2X$$

Como podemos observar, trabajar con el infinito no es del todo fácil, pues no podemos representar al infinito como un valor en este caso estamos representando al infinito con un valor X, la falla esta en mezclar la aritmética finita (los números) con la transfinita (infinitos), no se puede despejar de esta forma porque X no es un número, es el límite de una serie divergente, es decir tiende a infinito, así que aunque los estudiantes no llegan a esta justificación, si logran encontrar la respuesta mediante las operaciones.

Seguido a esto se realizan otras preguntas, en las cuales se puede observar que no se puede operar con el infinito con la misma alegría como se hace con los números. Como dice por ahí, “**con el infinito sólo opera Gauss, y con cuidado**”.

I. Considere la siguiente suma, ¿cree usted que la suma es infinita, o cual es el valor de suma, tiene un solo valor a varios?

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

II. Considere la siguiente suma, cuál cree que es la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots$$

La mayoría de los estudiantes, analizan que si agrupan de distintas formas pueden llegar a resultados distintos en este caso realizan las siguientes operaciones:

Tenemos que

$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0$

Ya que todos los sumandos (aunque haya infinitos) valen cero.

Pero podemos dejar el primer 1 aparte y agrupar los siguientes así:

$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1$

¿Misma suma y dos resultados distintos? En realidad eso significa que **la suma no tiene resultado**. ¿Por qué? Muy sencillo. Dicha suma corresponde con el límite de la serie alternada siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+\ldots$$

Si consideramos la sucesión de sumas parciales de dicha serie (es decir, la sucesión formada por los términos $(a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \ldots)$, tenemos lo siguiente:

$(1,0,1,0,1,0,1,0,1,\ldots)$

Que claramente tiene dos sucesiones con límites distintos (la de los términos impares, que tiene límite 1, y la de los pares, que tiene límite 0). **Eso en teoría de límites significa que la sucesión de sumas parciales no tiene límite, por lo que la suma no tiene resultado**.

Estas son las llamadas series alternantes, los estudiantes logran identificar sus dos distintos resultados, pero aún no tiene la capacidad de justiciar porque la serie es divergente, para ello se les habla un poco de por qué hablamos de series divergentes o convergentes, asociando esto con el límite ya que es algo con lo cual trabajaron en grado once, así que se les dice que es divergente cuando el límite no existe y es convergente cuando el límite existe.

De igual forma analizan la última pregunta.

Lo que se puede identificar es como los estudiantes comienzan a desarrollar, las distintas formas de agrupar sumas infinitas,

Esta sesión está realizada para presentarles a los estudiantes que operar con el infinito no es simple, que se debe tener cuidado o podemos cometer errores, como las del Rey, estas son las cosas raras y los errores que podemos cometer cuando operamos con el infinito, como también el hecho de la suma de infinitos números tenga como resultado un número, o de sumas alternadas que dan dos clases de resultados; es raro ya que en general se piensa que si se suman infinitas cosas el resultado debe ser infinito, esta sesión estuvo llena de dudas, pues los estudiantes aun no manejan algunos conceptos sobre el infinito, pero finalmente se realiza una comparación con el límite que es un concepto bastante difícil de manejar , pero por lo menos lo han manejado y así se pudo aclarar distintas dudas, no les es difícil manejar sumas infinitas ya que todos logran encontrar los resultados, así que a pesar de estar un poco confundidos al inicio lograron finalmente captar la idea del taller.

…y hablando de irracionales, ¿cuál es el órgano más irracional del cuerpo humano? **El pie**

5.6 LA BIBLIOTECA DE BABEL

Es un cuento de Jorge Luis Borges un escritor argentino, que no es matemático; en donde compara al universo con una biblioteca infinita compuesta por un número indefinido de galerías hexagonales e idénticas. En el cuento, el lector llega a conocer las características particulares de la biblioteca a través de la perspectiva de uno de sus habitantes. Según el narrador, la biblioteca se gobierna por dos axiomas: primero, la biblioteca existe desde la eternidad y segundo, los libros de la biblioteca están compuestos a partir de la combinación aleatoria de 25 signos ortográficos.

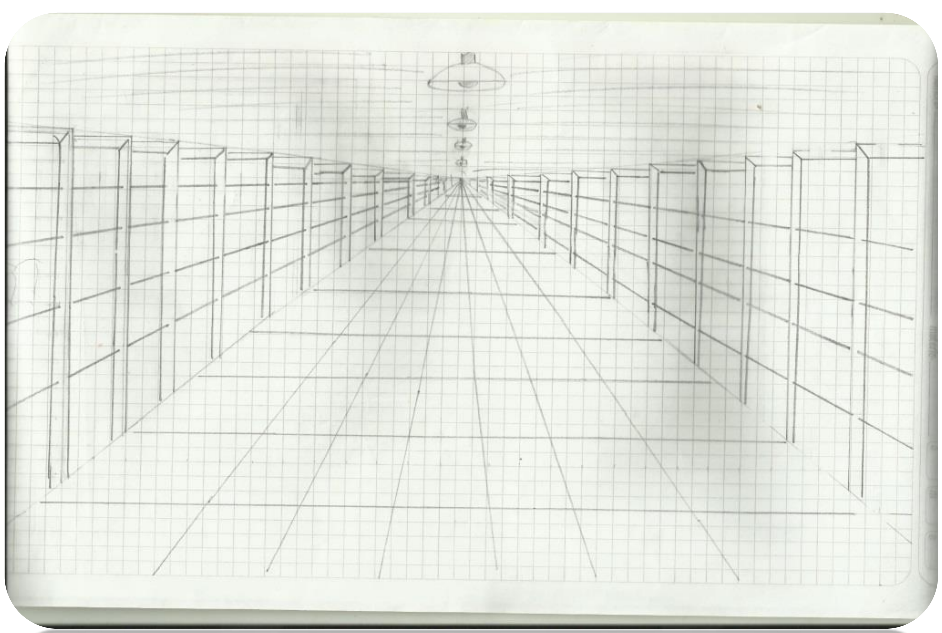
La naturaleza infinita y total de la biblioteca conduce al problema central del cuento: Cuando se proclamó que la Biblioteca abarcaba todos los libros, la primera impresión fue de extravagante felicidad .Todos los hombres se sintieron señores de un tesoro intacto y secreto. No había problema personal o mundial cuya elocuente solución no existiera: en algún hexágono. El universo estaba justificado, el universo bruscamente usurpó las dimensiones ilimitadas de la esperanza. A la desaforada esperanza, sucedió, como es natural, una depresión excesiva. La incertidumbre de que algún anaquel en algún hexágono encerraba libros preciosos y de que esos libros preciosos eran inaccesibles, pareció casi intolerable.

Es un cuento en el cual los estudiantes pueden empezar a identificar textos con contenido matemático y lograr la compresión y análisis de textos en tiempos reducidos. Con la biblioteca de babel se puede observar como de una manera magistral a través del dibujo y la creatividad del estudiante consigue palpar el infinito.

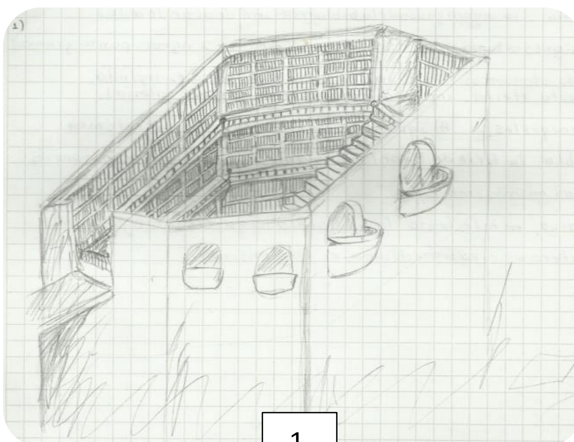
Se inicia, esta vez presentado la lectura de Borges, contando con el audio y el texto impreso, un interesante cuento sobre la concepción del infinito. Se les cuenta a los estudiantes que se trabajara un taller al finalizar. La lectura se hace muy amena y entendible, finalizando se les presenta el taller el cual se les pide trabajar en grupos de tres

Dando inicio a la primera pregunta en donde se les pide imaginar la biblioteca solo basándose en la lectura realizada. Se puede decir que los estudiantes estaban muy animados tratando de imaginarse como puede ser dicho lugar y saber que en una clase de matemáticas el dibujo también hace parte, fue en este primer punto en donde más tiempo dedicaron; estos son algunos dibujos en los cuales plasman su creatividad:

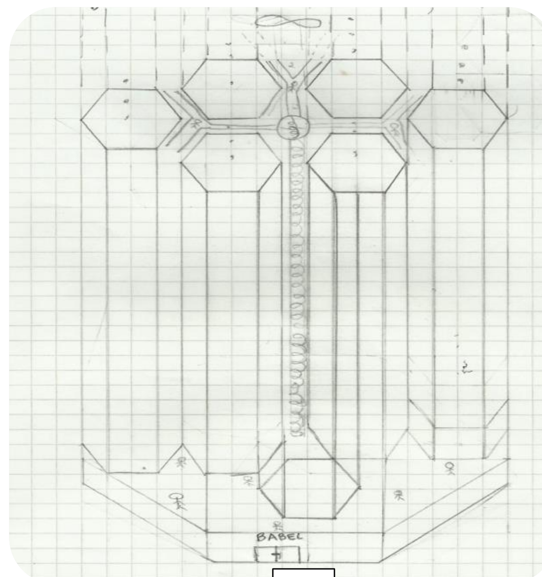
1. En este dibujo los estudiantes plasman un lugar que tiende al infinito como un punto de fuga en un sistema de proyección cónica, es el lugar geométrico en el cual las proyecciones de las rectas paralelas a una dirección dada en el espacio, no paralelas al plano de proyección, convergen. Es un punto impropio, situado en el infinito es una perspectiva frontal con un solo punto de fuga sobre el dibujo. Ocurre cuando una de las caras del cubo es paralela al plano de proyección, por tanto dos ejes del espacio son paralelos al plano de proyección. Las proyecciones de las rectas en esas direcciones se ven realmente paralelas en el dibujo. En ella podemos observar muchos anaqueles y una inmensa profundidad que se pierde en el infinito, es un dibujo muy bien logrado en donde se puede observar y palpar el infinito, este es quizá uno de los pasillos con sus estantes y bastos libros. Podemos observar que los estudiantes comprenden como expresar y dibujar el infinito.



2. En este dibujo (1) se observa el hexágono los libros y la escalera es un dibujo muy interesante, este estudiante realiza una especie de torre referente a la "torre de babel", pero es solo una de las infinitas torres hexagonales que tendría la biblioteca, se puede ver sus dos salidas que permiten el acceso a otra torre de la misma forma, se aprecia las escaleras y sus infinitos libros, es una imagen de la biblioteca desde una mirada lejana al igual que este dibujo (2) en donde se pueden observar las distintas torres hexagonales tendiendo al infinito.



1

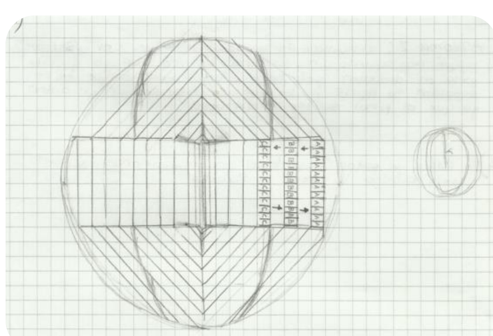


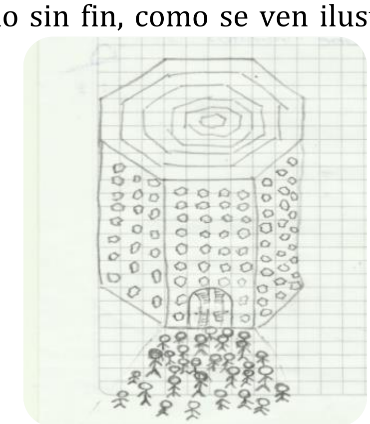
2

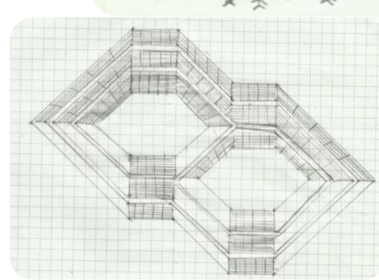
3. En esta ocasión los estudiantes comparan la biblioteca de babel con la vida como un ciclo eterno. Todo comienza en el basto universo y los ciclos de la vida desde sus primeras etapas, su edades superiores la muerte el cielo y todo vuelve a dar inicio, como el símbolo inicial del infinito *uroboros* la serpiente que se mordía la cola, uno de los primeros símbolos que tomo el infinito, un ciclo que no tiene fin; en esta forma se refieren a todos los conocimientos que hay en las etapas de la vida un ciclo que no tendría fin ni

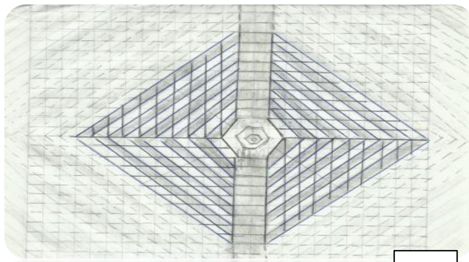
siquiera con la muerte y solo un Dios supremo puede terminar con este ciclo.

4. En esta ocasión el dibujo (1) representa la gran esfera en donde aparentemente estaría representada la biblioteca con sus anaqueles y sus 25 signos ortográficos, podemos observar el hexágono y su infinita escalera. En estos dibujos puede identificar una profundidad infinita, cada hexágono se va incrustando uno a uno y se pierde en el profundo infinito, como si esta biblioteca estuviese metida en un mundo sin fin, como se ven ilustrada en los distintos dibujos (2, 3,4).





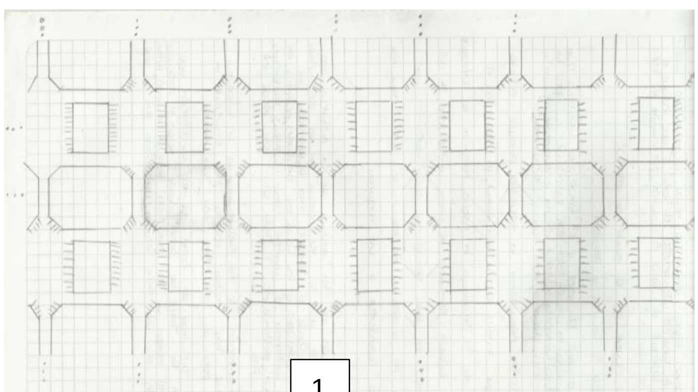




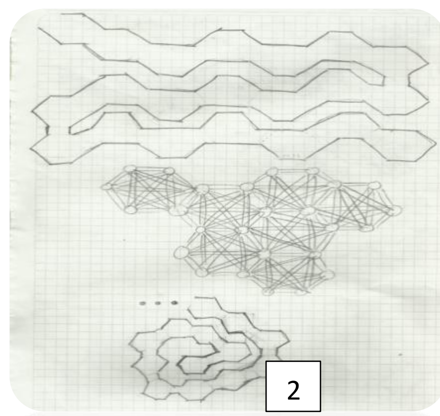
3

4

5. En este dibujo (1) podemos observar muy bien los hexágonos sus interminables pasillos y anaqueles con puntos suspensivos para indicar que todo continua infinitamente como ese infinito potencial; cada rectángulo significa un están lleno de libros al igual que los hexágonos, los espacios entre ellos son los pasillos interminables e indescriptibles. En el dibujo (2) podemos ver un interminable camino de la basta biblioteca hexagonal en la



1



2

Estos son algunos de los dibujos en los cuales los estudiantes plasmaron toda su imaginación de una manera maravillosa, en ellos podemos observar la dedicación y el amor que les colocaron a cada uno y también que cada grupo tuvo un análisis muy detallado de lo que podemos imaginar como la biblioteca, aunque la lectura no es tan fácil de comprender se puede ver que lograron hacer una buena interpretación.

Siguiendo con el análisis del cuento de Borges y su relación con el infinito se realiza una pregunta en la cual se debe analizar que diferentes concepciones del infinito se encuentran en la lectura, con el fin de empezar a identificar al infinito con otras cuestiones que lo relacionen.

Para dar respuesta a esta pregunta los estudiantes se remitieron al texto y buscaron algunos párrafos y oraciones en los cuales hablan sobre el infinito o referente a él, aquí podemos observar que los estudiantes comienzan a identificar muchas formas de interpretar el infinito en diferentes conceptos, como lo es infinitesimal, algo vasto y grande, distintos atributos que pueden aludir al infinito, ilimitada, inalcanzable etc. Es una gran señal de que comprenden el infinito como algo más que solo llamarlo potencial y actual, si no que dé el podemos encontrar distintas formas de interpretación y dieron algunas explicaciones frente a ello refiriéndose a la biblioteca como algo tan enorme que cualquier reducción de origen humano resulta *infinitesimal* o algunas como "Yo me atrevo a insinuar que la biblioteca es ilimitada y periódica". En cada respuestas los estudiantes logran identificar las distintas concepciones del infinito, algunos dan una explicación y otros toman la oración completa en donde hablan sobre él, lo que se puede rescatar es como analizan el texto.

Cuando se lee siempre se encuentra con algo que llama la atención y lo destacamos ya sea porque es algo nuevo, controvertido o simplemente es ahí en donde encontramos la esencia de la lectura, al realizar esta pregunta "¿Que les llamo más la atención del cuento?", poder observar si logran rescatar las ideas principales del cuento, de qué manera logran la comprensión del mismo y ver si les gusto o no, con ello podemos identificar como logran comprender los objetos matemáticos encontrados en la lectura, que tanto han aprendido sobre el infinito. Algunos describen que la terminología y la temática con la que se habla de la biblioteca, otros el hecho de ser una lugar tan grande que se puede encontrar respuesta a todo aunque esto representaría un caos, otros la comparan con la vida cotidiana y el apogeo de las tecnologías y que al final el ser humano se extinguirá pero la biblioteca perduraría hasta la eternidad, describen también la estructura del cuento de una forma poética, la voz del narrador (el audio).Los estudiantes logran dar sus puntos de vista desde lo más interesante hasta dar una explicación certera del significado que Borges quiso dar al escribir este cuento, lo más importante es que alcanzan a destacar la idea del infinito, lo que se quería al presentar este cuento. Cuando todos comienzan a interpretar la lectura se puede percibir esa noción de infinito más enfocada y más certera en el momento de referirse a él, lo cual indica que el concepto de infinito está empezando a tomar forma.

Una de las cosas importantes del cuento son los dos axiomas que rigen la biblioteca, así que se pide dar una explicación de ellos:

- Primero la biblioteca existe desde la eternidad.
- Segundo los libros de la biblioteca están compuestos a partir de la combinación aleatoria de 25 signos ortográficos.

Estos son los axiomas que rigen la biblioteca, a partir de ellos se crea la biblioteca, aunque para algunos no es claro lo que es un axioma, se realiza una explicación a todo el grupo diciendo que los axiomas son proposiciones verdaderas que no necesitan ser demostradas, seguido a esto se observa que los axiomas no son fáciles de comprender y de explicar, así que en este punto se coloca a prueba al estudiante en el hecho de análisis y comprensión de textos matemáticos. Cambe resaltar antes de pasar a las respuestas, que algunos no lograron responder completamente a esta pregunta, esto debido a que se tomaron mucho tiempo en la realización del primer punto, algunos de los análisis realizados del primer axioma son referencia de un ser supremo quien es el creador y al ser humano como ese imperfecto bibliotecario como la vida misma, la cual no es perfecta si no que al trascurrir el tiempo siempre busca esa perfección que para algunos es la búsqueda incansable de la felicidad y en la biblioteca la búsqueda de ese libro que contiene tal secreto, todo gira entorno a este universo imperfecto de infinitos libros y anaqueles; en el segundo axioma todos están de acuerdo que son estos símbolos combinados quienes crean los libros de la biblioteca. Nos podemos referir a un punto trabajado en un taller anterior en donde se preguntaban sobre el infinito y todos sus atributos, en estos axiomas nos indican verdades que rigen la biblioteca las cuales para algunos los comparan con el mundo y todo lo que en el existe y está por existir, el ser humano con todo su entorno.

Uno de los momentos memorables al presentar el cuento es su nombre “la biblioteca de Babel”, de ahí que la pregunta se refería a ¿Por qué el nombre?; todos los que en algún momento han leído la Biblia o han observado películas sobre el génesis (inicio de la vida), pueden realizar la comparación con “La Torre de Babel”, aquella que fue castigada por Dios, por querer alcanzar a un Dios supremo o una verdad inalcanzable, así que no podía ser la excepción en este análisis en donde todos la refirieron a esa perfección que se quería lograr con dicha torre y esta biblioteca pero en la torre se quería alcanzar a Dios en esta la biblioteca es Dios mismo pero igual inalcanzable para el ser humano quien terminaría perdiendo la cabeza en busca de ese libro que contiene la verdad de todo. Sabemos que según las sagradas Escrituras en donde habla sobre la torre de Babel, llamada así puesto que fue construida en Babilonia, Babel significa en hebreo Babilonia, esta torre había sido levantada por los descendientes de Noé a orillas del Éufrates con el fin de escalar el cielo, tal osadía habría sido castigado por Dios mediante la confusión de lenguas, vemos que en una de las referencias es la diversidad de lenguas y a los innumerables idiomas que se hallan fuera del alcance de los humanos, entonces podemos pensar en este vínculo entre la biblioteca y la torre de Babel, ambas sin empresas humanas donde reúnen los esfuerzos por alcanzar la verdad, podemos ver que todos los estudiantes en alguna ocasión de la vida habían escuchado sobre dicha torre, así que los análisis y comparaciones realizadas son referentes a Dios y que solo un Dios puede encontrar dicha perfección y solo puede vivir en la imaginación, algunos se refieren a la inmensidad y grandeza infinita de dicha biblioteca, algo que sería imposible y solo viviría en la imaginación.

Finalmente después de una extensa labor realizada con el análisis del cuento de Borges “La Biblioteca de Babel”, el cual es un título en si controvertido siendo este un icono de caos y desentendimiento referido a la torre de babel en donde la búsqueda de la verdad los lleva a un anhelo de asombro y diversidad intelectual, el hecho de ser una biblioteca lo lleva al de ser un lugar quieto en donde aguardan infinidades de libros y que deberá existir en esta basta biblioteca un libro que contiene la verdad de todo lo creado y por crear, finalmente la biblioteca hace una reflexión sobre el ser humano y la biblioteca, la cual aunque el ser humano desapareciera de la faz de la tierra ella perduraría por siempre. Esta experiencia ayudo a los estudiantes a enfrentarse a una lectura que les proporciona una información , la cual deben analizar y reflexionar en poco tiempo, fue un reto para ellos logara abstraer de un texto en donde maneja temas matemáticos, se puede decir que todos logaron el objetivo, aunque se dedicaron más al dibujo, pues les llamo la atención realizar un dibujo que fuese infinito así que resultaron muy satisfechos con esta sesión, se logró analizar desde otro punto de vista el concepto del infinito,.

En la carrera de matemáticas se piensa que solo se trabajan libros llenos de números, pero se sabe que en el transcurso de la misma se van desarrollando temas en donde se hace necesario la lectura y la historia de grandes personajes que aportaron para la creación y desarrollo de la misma, para estos estudiantes que inician en este mundo de las matemáticas y la vida universitaria le es nuevo todo lo aprendido en este primer semestre, así que con temas tan interesantes y controvertidos como lo es el infinito se logra despertar ese interés por saber y aprender más sobre estas historias, la biblioteca de babel logra abrir un mundo no muy conocido por ellos pero si inquietante para descubrir, así que la lectura de textos matemáticos desempeña un labor importante e interesantes en estos futuros profesionales, en donde se empieza a cambiar esa idea de que matemáticas solo son números y que descubran las maravillosas lecturas que sobre matemáticas se pueden encontrar.

5.7 UN ENSAYO

Escribir no resulta dificil, es posible enseñar a casi todos a escribir claramente, en la medida que la claridad dependa de la organización de las palabras. La fuerza, elegancia y variedad de estilos son mas dificiles de aprender, para lograr una buena redaccion se necesita de buenas reglas y lineamientos para lograr escribir con claridad.

los estudiantes de posgrado nos enfrentamos al finalizar nuestra carreras a la escritura del documento final, el cual debe tener buena redacion y cumplir con unos ciertos lineamientos, que ciertamente cuestan y se hace necesario la ayuda de algunos profesores que son orientadores. El objetivo de este sesion es hacer una realimentacion para los estudiantes desarrollando por medio de un corto ensayo las habilidades de escritura que tienen.

En esta oportunidad se pide a los estudiantes realizar un ensayo, el cual se hará partiendo de un resumen que se les da de todo lo observado en las anteriores sesiones resaltando lo más importante como: el infinito potencial, el actual, las paradojas(Aquiles y la Tortuga , el Hotel de Hilbert), las lecturas (La perpetua carrera de Aquiles y la Tortuga , La Biblioteca de Babel), las sumas infinitas con resultados finito y los errores que se pueden cometer cuando operamos con el infinito, esto con el fin de tratar de abarcar cada uno de las sesiones realizadas; esta explicación dura una media hora aproximadamente. Para complementar se les presenta un video, un documental dirigido por David Berry que tiene una duración de 240 minutos realizado en 2008,cuenta la historia de las matemáticas en cuatro capítulos, el capítulo presentado a los estudiantes es el 4 llamado “al infinito y más allá”, el cual tiene una duración de 58 minutos pero debido al corto tiempo de las sesiones solo se presentan 36 minutos, con el objetivo de tener tiempo para la otra actividad que es realizar el ensayo de una hoja en el cual cada estudiante tenía la libertad de escoger lo que más le llamara la atención del video y el resumen y expresara su posición frente a él.

El video presentado realiza un recorrido por aquellos matemáticos que hicieron parte del infinito, comienza contando que "las matemáticas consisten en resolver problemas y son los grandes problemas por resolver los que mantienen con vida las matemáticas"; la historia cuenta que en 1900 el matemático francés David Hilbert enumeró los principales misterios matemáticos sin resolver, trazando así el camino que seguirían las matemáticas durante el siglo XX. Propuso 23 problemas que no habían sido resueltos, algo que haría que el Congreso internacional de las matemáticas celebrado en Francia no fuese olvidado. Unos cuantos de estos problemas son "la hipótesis del continuo", "Demostrar que los axiomas de la aritmética son consistentes", "la hipótesis de Riemann", "Topología de las Curvas y superficies algebraicas", algunos ya han sido resueltos y se sigue trabajando en el resto.

Uno de los grandes matemáticos mencionados es Georg Cantor en Rusia, descubrió no sólo que el infinito existe, sino que llegó a demostrar que hay dos tipos de infinito, cuenta sobre su vida, sus dificultades y grandes aportes para el progreso de las matemáticas.

Este video realiza un recorrido por todo el entorno de las matemáticas y el infinito, relacionando casi todo lo observado en las sesiones siendo la historia quien nos ayuda a conocer más sobre esta ciencia; podemos encontrar a Newton, Poicaré, Leibniz, Euler, los puentes de Königsberg, entre muchos más. Certeramente es un video que ayudara a lograr comprender por medio de la historia y de grandes matemáticos como fue su evolución y desarrollo de las matemáticas y el infinito.

Finalizado todo este recorrido se les pide a los estudiantes comenzar a escribir el ensayo, se les facilita una hoja. Cabe resaltar que en ningún momento se les explico lo que significaba realizar un ensayo, esto se hizo con el objetivo de observar que tanto saben los estudiantes frente a presentar un ensayo, contando solo con 45 minutos para realizar dicho escrito.

Para lograr analizar los distintos ensayos se realiza el siguiente esquema:

1. Ensayos buenos.
2. Ensayos que son resúmenes.
3. Ensayos que solo son comentarios.

Se puede decir que no lograron realizar buenos ensayos, pero se rescata el hecho de hacer un escrito con buena cohesión, en donde se puede identificar los párrafos, la coherencia en cada oración y el uso de signos de puntuación.

Comenzando con los ensayos buenos, es decir algunos escritos que tienen una estructura parecida al ensayo, estos escritos se destacan por el hecho de tener una buena estructura en donde se pueden identificar distintos párrafos con ideas muy centradas y argumentadas, el uso de signos de puntuación y una buena reflexión de todo lo escrito.

En uno de ellos podemos identificar lo que más le llamo a atención[1], este hecho es que *los matemáticos les satisface más saber que resolvieron un problema que creían no tenía solución, que la aplicación que aquel va a tener en la vida diaria*, aunque no se comprende bien lo que este estudiante pretendía, tal vez el hecho de que algunos matemáticos solo se dedican a las matemáticas y que las cosas banales como el dinero no les importa como Grigori Perelmán, destaca a Georg Cantor como el gran propulsor del concepto del infinito. Se resalta que la estructura del documento es buena, tiene distintos párrafos con buena redacción y cohesión, cada uno finaliza con una reflexión propia, utiliza los signos de puntuación. Se puede decir que va por buen camino a la elaboración de textos, lo realmente importante es que se apropia del significado del infinito y su paso por la historia.

Cada uno de los estudiantes tienen una forma particular de escribir como cada ser humano propio y autónomo que son; tienen sus propios puntos de vistas y por tanto lo demuestran en cada uno de sus escritos, algunos son resúmenes con buena coherencia, en otros tienen ideas de ensayo y logran realizar buenos escritos.

Este en un escrito en donde se evidencia lo aprendido en cada sesión, se habla del infinito con más propiedad, se habla del actual y el potencial y es muy satisfactorio observar que si han comprendido y que el objetivo del curso se logró, no podemos decir que es un ensayo pues le faltan algunas cosas, pero tiene una buena coherencia al escribir.[2]

Como podemos observar algunos estudiantes tienen idea delo que significa un ensayo y logran un buen escrito como lo es este.[3]

Sabemos que todos no son amantes de la escritura, así que para algunos se dedicaron a realizar pequeñas intervenciones de párrafos cortos contando lo que les llamo la atención; no son malos tal vez les cuesta escribir o necesitan tiempo para organizar sus ideas.

En total son 24 ensayos todos muy interesantes por cortos que fueran, lo importante es evidencian lo que se aprendió en las sesiones y el video en verdad ayudo a complementar todo lo trabajado, eso se puede observar en cada ensayo, se siente mucha satisfacción observar que se les quedo muchas cosas sobre el infinito, en cuanto a la escritura se nota que aún nos cuesta escribir y expresar nuestras ideas, de seguir una coherencia desde el inicio hasta el fin, esto es un llamado de atención para nuestros futuros matemáticos , enfocarse un poco más en la escritura, pues se ha podido mirar que cuando se llega al momento de escribir el documento final de la carrera los estudiantes de matemáticas no tenemos buenas bases y nos cuesta mucho escribir. Así que sería de gran ayuda orientar a los estudiantes con buenas bases en la escritura de documentos matemáticos.

5.8 UNA PRUEBA FINAL

Llegando al final de este curso en donde se trabajó el infinito de distintas formas, utilizando distintas herramientas para lograr un aprendizaje un poco más profundo sobre el infinito, haciendo uso de la historia y distintos autores que desde sus distintos puntos de vista aportaron para finalmente llegar a una conceptualización del infinito.

En este último día en donde se ha pasado por distintas sesiones se retoma la primera prueba diagnóstica con el objetivo de observar que tanto aprendieron los estudiantes sobre el infinito, así que se pide que se organicen en parejas y comiencen el taller.

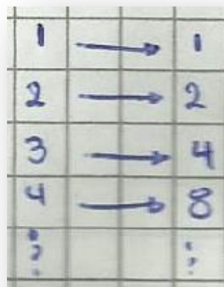
El análisis de estas respuestas son comparadas con las dadas en el inicio para observar el avance que los estudiantes tuvieron con este concepto "utilizado por muchos pero comprendido por pocos" el majestuoso infinito.

La primera pregunta tiene que ver con los granos de arena, será que pueden ser contados los estudiantes al inicio tenían dudas de si eran finitos o infinitos así que sus respuestas no son tan bien justificadas como podemos observar:

- *No se pueden contar es infinita, porque entre más cuentas van apareciendo más y más.*
- *No se puede porque es imposible de contarlos y se supone que lo que es extendidamente contable es algo infinito.*
- *Porque la formación de la misma son una secuencia de la ruptura de rocas madres, día a día van creciendo las cantidades y día a día van desapareciendo debido al uso.*
- *No porque existe la posibilidad de que el contenido que está en el vaso no sea igual a la misma.*
- *Podemos definir qué capacidad le podemos dar a sus atributos puede ser finito.*
- *Va a llegar a un punto donde ese vaso va a tener un límite y su capacidad va ser limitada.*

Como podemos observar las respuestas anteriores aunque no están mal sus justificaciones no son muy buenas, pero veamos ahora que paso con las respuestas de los estudiantes que tanto han cambiado:

- *Si tomamos los granos de arena de todas las playas y todos los desiertos si se pueden enumerar. El número de granos de arena seria finito, porque por muy difícil que se contar es algo posible y va a llegar un punto donde acabaríamos de enumerar.*



- *Comenzaría por decir que contar todos los granos de arena del mundo sería un trabajo muy duro arduo, difícil, complejo o como lo queramos llamar pero en mi punto de vista si se podría hacer porque si nos fijamos la tierra o planeta ya esta medida su distancia longitud somos una esfera en el espacio ya está determinada la cantidad de arena de todo el mundo sabemos que iniciamos a reunirla llegaremos a un punto donde la tendremos toda aunque sea difícil de contar lo podemos hacer.*

  "la cantidad de arena en la tierra es finita si podemos contarla ahora sería como un contenedor que cuente los granos de arena así nos demoremos mucho.
- *Si se puede enumerar, podríamos asignar a cada grano de arena un número correspondiente de tal forma que se puedan contar hasta un número n.*
- *Los granos de arena son numerables porque hay un número determinado de estos, es un numero bastante grande debido a la cantidad de granos que hay en las playas, desiertos, etc., sin embargo se puede determinar el número exacto de granos de arena.*

  Como se puede observar los granos de arena mantienen una relación con los números naturales (puesto que los granos de arena son enteros positivos), *como sabemos los números naturales son numerables, por lo tanto los granos de arena serian numerables si hacemos una relación (parecida a la de Cantor) con los naturales y los granos de arena.*

Se puede decir que los estudiantes tiene una idea más clara de lo que significa el infinito, gracias a los distintos talleres, ahora sus justificaciones son mejores, se usan más tiempo en defender y explicar mejor sus respuesta, se puede decir que tomaron en enserio lo que se les recalco varias veces, aprender a justificar en matemáticas es una base para aprender a demostrar.

En la siguiente pregunta se cuestiona el hecho de si tenemos un conjunto infinito y le quitamos un número infinito de elementos, ¿El conjunto que queda es finito o infinito?; analizando estas respuestas con las dadas anteriormente, podemos analizar la forma de justificar y además la claridad que tienen frente al tema de distintos infinitos en un conjunto o el hecho de como poder quitar esa infinitud si le quitamos todos los elementos, es por hecho que el tema de conjuntos infinitos quedo claro, la mayoría de los grupos toman como ejemplo el conjunto de los naturales, los números pares e impares, al inicio observamos el hecho de que el todo siempre era mayor que la parte ahora los estudiantes superaron este hecho y observan que no siempre el todo es mayor que la parte pues los naturales, pares e impares tienen igual cantidad de elementos.

- *Cuando tenemos el conjunto de los números naturales y a este le quitamos el conjunto de los números impares el conjunto queda infinito:*

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,\dots\}$$

$$B = \{1,3,5,7,9,\dots\}$$

$$A - B = \{2,4,6,8,\dots\}$$

- *si tenemos un conjunto infinito y le quitamos un número infinito; para nosotros quedaría infinito, la única forma de que quedara finito seria si al conjunto le quitamos la misma cantidad es decir:*

$$A - A = \emptyset$$

- *el conjunto seria infinito.Supongamos el conjunto de los Naturales, si al conjunto de los N le quitamos los numeros pares, quedarian los impares los cuales son infinitos incluso tienen el mismo tamaño de los pares o de los naturales.*

Continuamos recorriendo esta prueba en donde los estudiantes logran sacar todo lo aprendido en el curso, la siguiente pregunta causo ciertos inconveniente en su interpretacion : Si un vaso es infinitamente largo, entonces debe tener una capacidad infinita; o sea, si un objeto es infinito, ¿son también todos sus atributos infinitos? Inicialmente los estudiantes comprenden el hecho de que aunque parece infinito se deben analizar otros aspectos como lo visto en la trompeta de Torricelli, comprendiendo esto, ahora los estudiantes dan las siguientes respuestas:

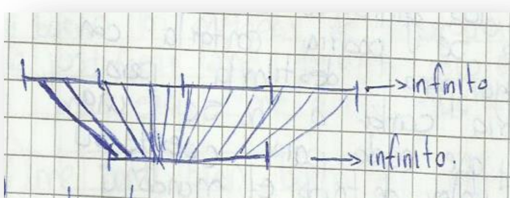
- No porque el hecho de que el vaso sea infinito no quiere decir que necesariamente sus características sean también.
  Pues un ejemplo de lo que no podría ser infinito seria la circunferencia que forma la base del vaso, puesto que si esta fuera infinita se convertiría en dos rectas paralelas que nunca se unirían.
- No, diría que sus atributos no serían infinitos, ya que suponemos que el vaso es infinito y por supuesto su capacidad, pero el cristal es una parte física y no sería infinita.
- Supongamos que el vaso es un conjunto infinito, del cual extraemos un subconjunto infinito (o atributo, en este caso la capacidad), de acuerdo con Cantor un conjunto es infinito si al extraer un subconjunto infinito este se mantiene infinito, por lo tanto si el conjunto (objeto, vaso etc.) es infinito entonces sus atributos serán infinitos.

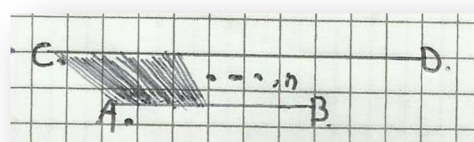
Independientemente de las respuestas dadas, lo más gratificante es observar como los estudiantes empiezan a citar a Cantor, a justificar por medio de ejemplos, contrario a la forma de justificar al inicio.

Cuando los estudiantes se enfrentaron a la siguiente pregunta algunos estudiantes pensaron que era algo muy obvio mirar que el cuadrado era mayor que el segmento o que tal vez como tenían infinitos puntos cada uno eran iguales, mas no sabían cómo justificar sus respuesta, veamos que dicen ahora cuando se les pregunta: Entre el cuadrado y el segmento indique cual tiene más puntos, Justifique su respuesta.

- *Las dos figuras tienen igual cantidad de puntos. Podríamos realizar la siguiente similitud; supongamos que el segmento AB es el intervalo* $[0,1]$, *y el cuadrado corresponde a la recta real R, de acuerdo con Cantor el intervalo y la recta real R tienen el mismo número de elementos, por tanto entre el segmento y el cuadrado tienen el mismo número de puntos.*
- *Se puedo realizar una correspondencia uno a uno entre el segmento y el cuadrado.*

Los estudiantes recordaron la demostración que se realizó para observar que los números naturales y los enteros, los pares y los racionales tienen igual cantidad de puntos. Realizan una correspondencia uno a uno entre las dos figuras. De la misma

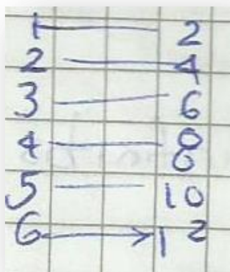


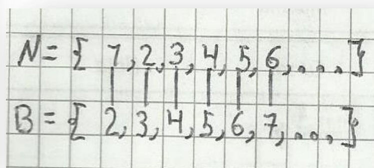


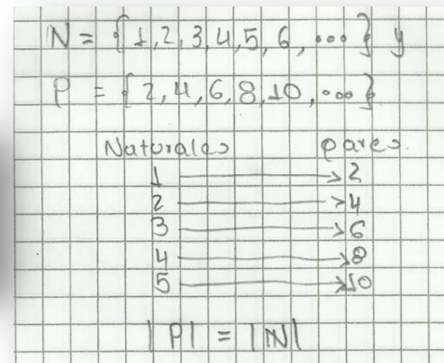
forma justificaron la siguiente figura, y realizaron un dibujo:

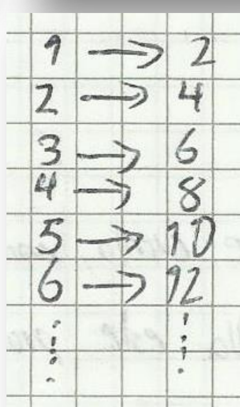
- Estas graficas indican que aunque al inicio no tenían claro lo que era una biyección, después de la explicación finalmente logran comprender y tienen herramientas para justificar, algunas respuestas realizadas por estudiantes realizan comparaciones entre otros contos por ejemplo los naturales y los enteros.

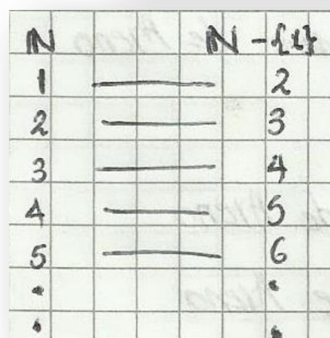
Pasando por segmento llegamos a los conjunto en los cuales habíamos trabajado en una de las sesiones así que en esta parte no tienen ninguna dificultad y realizan la biyección entre dos conjuntos, solo observemos las siguientes graficas: la pregunta es la siguiente sea N = {1, 2, 3, 4, 6,...} y ahora considere P = {2, 4, 6, 8, 10,...}, el subconjunto de los números pares. ¿Hay igual cantidad de enteros en N que en P, o hay más en N? vemos que hicieron los estudiantes:











Podemos observar que los estudiantes logran captar la idea de funciones y la genialidad de cantor cuando demostró que los algunos conjuntos se pueden colocar en correspondencia uno a uno con otros conjuntos.

Finalmente llegamos al hecho de que piensan sobre el infinito en la cotidianidad, a lo que todos respondes hechos y relaciones como las casualidades, el conocimiento, la cantidad de personas que nacen y que no conocen entre otras.

Después de realizar esta prueba nuevamente en la cual el objetivo es examinar que tanto los estudiantes aprendieron en el curso, algo que finalmente sorprende pues se puede destacar ciertos puntos:

- Justificar cada respuesta de una manera más acorde y concisa, es decir no dejar respuestas vacías.
- Toman de referentes algunos autores que se trabajaron en las sesiones por ejemplo Canto, Borges entre otros.
- Aplican los ejercicios trabajados en otros.
- Hablan con más propiedad sobre el concepto del infinito.

Es realmente gratificante ver como se apropiaron del tema del infinito y sus diferentes etapas.

6. CONCLUSIONES

6.1. LA PRÁCTICA EN LA UNIVERSIDAD

La práctica pedagógica me permitió tener una orientación a la realidad del ejercicio del docente, desde una perspectiva crítica y reflexiva, esta asignatura fue tomada durante cuatro semestres en las cuales cada una de ellas tiene una finalidad; siendo estas prácticas esenciales para la realización de un buen proyecto; inicialmente se pretende orientar al estudiante sobre los fundamentos y las bases que se deben tener para enfrentar un proyecto de aula, para lo cual contamos con un impase, puesto que en esta primera etapa no logramos aprender mucho ni tuvimos una buena orientación. Seguidamente en la segunda etapa debido a que en la primera no logramos aprender mucho debemos realizar un trabajo doble pues en ella aprendemos a ejecutar un plan y conocer distintos autores que nos ayudaran a formalizar una idea sobre lo que queremos llevar al aula, en este caso el concepto del infinito en un primer semestre de Licenciatura en Matemáticas; se diseñan unas guías para unas diez sesiones las cuales serán planteadas y ejecutadas en el aula. El momento de la intervención en el aula, es quizás la parte más esperada por nosotros de todas las prácticas, siendo aquí en donde todo lo planeado se pone en práctica. Esta experiencia está llena de muchas anécdotas, alegrías y nervios cuando nos enfrentamos a un grupo, las reacciones de los alumnos y la cantidad de sorpresas que nos esperan, hacen volver esta etapa todo un desafío y una aventura. Inicialmente tenemos unas expectativas y llegado el momento todo comienza a variar, las guías continúan siendo nuestro apoyo pero cuando comenzamos a trabajarlas se comienzan a modificar de acuerdo a las expectativas creadas en cada sesión. Estas prácticas son importantes para nosotros, es en este momento en donde nos podemos visualizar como docentes, y logramos hacernos una autocrítica sobre nuestro estilo de enseñanza.

La enseñanza del infinito se logra a través de una serie de herramientas como lo son la historia, la literatura y las mismas matemáticas. El infinito es un tema que se trabaja cotidianamente en muchos cursos de matemáticas, pero de una manera implícita y nunca es un tema que se aborde en sí mismo.

6.2. COMO APORTA EL PROYECTO A LA UNIVERSIDAD

La práctica pedagógica es muy importante en la Universidad, ya que con ello contribuimos a los estudiantes con nuevas experiencias, temas diferentes que serían de gran ayuda para su formación como futuros matemáticos y licenciados, además demostrarles lo hermosas que son las matemáticas y que escogieron una carrera excelente, enseñarles a amar la carrera que escogieron.

Este proyecto me hizo reflexionar sobre aquellos temas que no se profundizan en nuestra carrera y que son muy importantes estudiarlos y conocer. Pienso en que tenemos una buena oportunidad con estas prácticas de llegarle a los estudiantes con temas interesantes que es sus futuros cursos le pueden servir. Además de diseñar y buscar estrategias diferentes a las tradicionales en donde un tema como por ejemplo límites, pueda ser comprendido de una manera diferente y solo focalizarse en este tema, otros temas como el principio del palomar, ecuaciones, en donde la enseñanza sea de una matemática diferente y divertida; la idea es aprovechar este espacio para mostrar otra cara de las matemáticas y así invitar a estos estudiantes a que continúen en nuestra carrera.

6.3. EL PROYECTO EN EL AULA

En cuanto a la teoría que se aplica para la enseñanza de este concepto es basada en la historia y los cambios que ha surgido el infinito a través del tiempo, también la de resolver problemas, apoyándose en las herramientas visuales, auditivas y lecturas. Aunque uno de los temas complejos para enseñar son las sumas infinitas en donde la serie armónica hace parte y de igual forma la convergencia de ellas; el grado de dificultad de este tema fue grande para ellos puesto que no habían tenido un acercamiento a este tema y era nuevo. Este tema fue planeado con anterioridad, pero se vislumbra algunos inconvenientes que suceden cuando se aplica, siendo este un tema de cálculo, se logró por medio de clases magistrales y por medio de ejemplos aclarar lo que significa series y convergencia. En una sesión más adelante se les plantea otras series que no convergen, aunque este tema fue nuevo logran aproximarse a él.

6.4. SOBRE LAS SESIONES Y LOS TALLERES

Cada una de las sesiones ayudó a que los estudiantes se aproximaran al concepto del infinito. Cuando se realiza la prueba inicial podemos ver que la mayoría de los estudiantes conciben al infinito con un sentido potencial, como algo muy grande y que nunca tiene fin. También fue muy interesante ver que la igualdad de conjuntos infinitos se da en los estudiantes solo por este hecho y además que las cantidades muy grandes y que no se pueden contar son infinitas. No logran comprender como un conjunto, por ejemplo los números naturales $\mathbb{N}$ puede tener igual elementos que los racionales $\mathbb{Q}$, su argumento es ¿cómo es posible si entre dos naturales pueden existir muchos racionales?, fue algo común en sus repuestas y es entendible puesto que históricamente esto también sucedió. También que si tomo una distancia entre los puntos A y B distintos, luego tomo su punto medio llamémoslo C, luego tomo el punto medio entre A y C, y continuo con la bisección; para los estudiantes puedo seguir bisecando infinitamente. Es allí que se decide introducir las paradojas de Hilbert y Zenón de Elea, siendo estas de gran ayuda para observar la cardinalidad de algunos conjuntos y por ende la igualdad de ellos por medio de la función biyectiva. Igualmente se les presentan las sumas infinitas que dan resultados finitos como la serie armónica. Luego en otra sesión se les muestra que no todas las sucesiones pueden dar resultados finitos, esto habla sobre la convergencia y divergencia de algunas de ellas. Tema que fue difícil de explicar y en el cual no se pudo profundizar debido al tiempo, este será un tema que trabajaran en Calculo I.

Para complementar este proyecto se presentan dos hermosos cuentos de Borges los cuales permitieron que los estudiantes por medio de la literatura encontraran otros puntos de vista sobre el infinito y por medio del dibujo de la biblioteca infinita que plantea Borges pudiesen plasmar y palpar al infinito de otra forma.

Finalmente después de diferentes sesiones se piden que escriban sobre el infinito y se pudo encontrar con buenos escritos en donde se expresan con mayor propiedad del tema que en un inicio se hacía difícil de opinar y comprender; para lograr un estocada final se hace una prueba en donde se presentan unos problemas en donde se puede observar que tanto aprendieron, para lo cual se observa que los resultados son muy alentadores, las respuestas tienen buenos fundamentos y hablan con mayor conocimiento, lo cual indica que el acercamiento que se quería realizar se logró, ahora se puede decir que es un tema que cuando a ellos les preguntes tendrán una respuesta no como unos expertos pero no se quedaran callados y tendrán herramientas para hablar por tanto se puede decir misión cumplida.

BIBLIOGRAFIA

ARISTÓTELES. (1996). *Física.* Madrid: Consejo superior de investigaciones científicas.

ZELLINI, P. (2004). *Breve historia del infinito.* Madrid: Ediciones Siruela.

RAMÓN SEBASTIÁN SALAT FIGOLS. (2011)**.** *El infinito en matemáticas***.** IPN. México. Escuela Superior de Física y Matemáticas.

CARLOS BENITEZ RODRIGUEZ. (2007). *El infinito en Matemáticas.* Universidad de Extremadura.

MAYRELY VERA PÉREZ, LUZ DARY PINILLA. (2011). *El infinito: Concepciones de Estudiantes que transitan del colegio a la universidad*. Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga – Colombia).

JORGE LUIS BORGES. (1941). *"El jardín de los senderos que se bifurcan" cuento: La biblioteca de Babel*. Ficciones (10 edición). Alianza Editorial. (1932). *La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga.* Argentina.

BRUNO D'AMORE MESCUD. (2011). *La didáctica del infinito matemático*. Bogotá Universidad distrital francisco José de caldas.

ANA REPPETO MENDOZA. *Concepto de infinito en la escuela.* Revista digital Mendom@tic@. Mendoza- Argentina.

RAMÓN SEBASTIÁN SALAT FIGOLS. *El infinito en matemáticas.* Escuela superior de física y matemáticas, ipn. México.

GARBIN, SABRINA Y AZCARATE, CARMEN. (2002). *Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años*. Universidad Autónoma de Barcelona.

ADRIANA ENGLER, MARÍA INÉS GREGORINI, SILVIA VRANCKEN, DANIELA MÜLLER, MARCELA HECKLEIN Y NATALIA HENZENN. *El límite infinito: una* *situación didáctica.* Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del litoral Esperanza. prov. de Santa fe (argentina).

ANEXOS

Anexo 1. Prueba diagnóstica.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

PRUEBA DIAGNOSTICA

Nombre: ___________________________

Programa: ________________________

Responda las siguientes preguntas y Justifique:

I. Si tomamos los granos de arena de todas las playas y todos los desiertos; ¿Se pueden enumerar? ¿El número de granos de arena es infinito o es finito? Explica tu respuesta y si es afirmativa como enumerarías los granos de arena.

II. Si tenemos un conjunto infinito y le quitamos un número infinito de elementos, ¿El conjunto que queda es finito o infinito? Explica tu respuesta.

III. Si un vaso es infinitamente largo, entonces debe tener una capacidad infinita; o sea, si un objeto es infinito, ¿son también todos sus atributos infinitos?

IV. ¿Entre el cuadrado y el segmento indique cual tiene más puntos? Justifique su respuesta.

V. Considere los segmentos AB y CD de la figura.

A___________B

C_________________________________D

¿CD tiene más o igual cantidad de puntos que AB?

VI. Considere al conjunto de los números naturales N = {1, 2, 3, 4, 6,...} y ahora considere P = {2, 4, 6, 8, 10,...}, el subconjunto de los números pares. ¿Hay igual cantidad de enteros en N que en P, o hay más en N?

VII. Considere al conjunto de los números naturales N = {1, 2, 3, 4, 6,...} y ahora considere el conjunto B = {2, 3, 4, 5, 6,...}, que se obtiene a partir del conjunto de los números naturales quitando el elemento 1. ¿N tiene más elementos que B o tiene la misma cantidad de elementos que B?

VIII. ¿Cuál cuestión a lo largo de tu vida se relaciona con el infinito? Explica tu respuesta.

Anexo 2. Primer taller

Universidad del Cauca

Girando con el Infinito...

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

TALLER

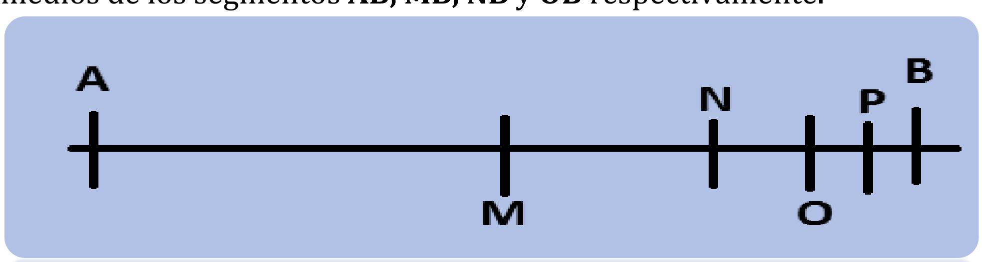
Nombres: ___________________________

Programa: ________________________

En el siguiente taller respondan según su criterio e intente justificar sus afirmaciones:

I. La infinitud de las fracciones es más grande que la infinitud de los números naturales. Es decir, ¿considera usted que hay más fracciones que números naturales?

II. La siguiente figura muestra un esquema en el que cada vez se biseca el segmento de la derecha. Es decir los puntos **M, N, O, P**, son los puntos medios de los segmentos **AB, MB, NB** y **OB** respectivamente.



Si se siguen haciendo más y más bisecciones. ¿Cree usted que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto **B**? Explique su respuesta.

III. Se deja caer un balón de básquet desde un balcón de 2 metros de altura a una superficie plana, tras tocar el suelo después de caer una altura h, rebota hasta una altura h/2.

a) ¿Se puede calcular la distancia recorrida por el balón de básquet? Justifique su respuesta.
b) ¿se puede decir cuántos rebotes hará el balón? Justifique su respuesta.

IV. Considere la siguiente suma

$$\mathbf{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\cdots}$$

Cual cree usted que es el valor de la suma?. Justifique su respuesta.

V. considere la siguiente ecuación:

$$\mathbf{y=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}$$

¿Puede decir para que valores de n resulta y=2? Explique su respuesta.

Anexo 3. Diapositivas del Hotel de Hilbert.

Anexo 4. Diapositivas Aquiles y la Tortuga y preguntas.

Cuento *"La perpetúa carrera de Aquiles y la tortuga"* de Borges.

Preguntas:

- ¿Qué opina usted en el sentido matemático sobre la paradoja de Zenón?

- Realice un análisis del texto.

- ¿Qué opina sobre el hecho de que algunos infinitos, si pueden ser alcanzados?

Anexo 5. La leyenda del origen del ajedrez

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Nombre: ___________________________

Programa: ________________________

I. El cálculo de la cantidad de arroz (La leyenda del origen del ajedrez)

Cuenta la leyenda, que un rey indio llamado Ladava (s. VI a.c), tras perder a su primogénito en una batalla, andaba triste y decaído y nada le hacıa sonreír. Un día llego a palacio un pobre brahmán llamado Sessa con un juego que había inventado para traer la alegría a la vida del rey, el chaturanga, antecesor del ajedrez.

El rey, encantado con el juego, quiso agradecer a Sessa con palacios, joyas, regalos. . . que el joven brahmán siempre rechazaba cortésmente.

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:

En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro. . . y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla. El rey accedió encantado a tan humilde petición y ordeno que trajesen arroz para entregar allí mismo la cantidad que pedía el brahmán. Pronto se descubrió que petición era menos humilde y más complicada de lo que se pensaba: al ir avanzando en las casillas, la cantidad de arroz era inmanejable.

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$18446744073709551615 \approx 18 * 10^{18}$ Granos de arroz

¡Más que todo el arroz cosechado en la India durante los próximos 100 años!

1. **Calcule la cantidad de arroz que el Rey le debe dar a Sessa**

Respecto a la historia podemos encontrar distintos finales

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

UNO: El rey mando decapitar a Sessa.

DOS: Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.

TRES: Finalmente el rey acepta, Pero para ello primero solicita la ayuda de un matemático, el cual le ayuda a solucionar el problema y quien de una manera incorrecta le encuentra una solución, en la cual Sessa debe pagarle al Rey un grano de arroz.

2. **Cómo crees que fue la solución del matemático, con la cual el Rey de una manera incorrecta le termina ganando a Sessa.**

II. ¿Considere la siguiente suma, cree usted que la suma es infinita, o cual es el valor de suma, tiene un solo valor a varios?

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

III. Considere la siguiente suma, cuál cree que es la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots$$

Anexo 6. Taller: la Biblioteca de Babel.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Nombre: ___________________________

Programa: ________________________

LA BIBLIOTECA DE BABEL

Después de haber escuchado el cuento "La biblioteca de Babel" de Jorge Luis Borges; responda las siguientes preguntas:

a) Realiza un dibujo en cual plasmes, como te imaginas la biblioteca de Babel.

b) ¿Qué diferentes concepciones del infinito encuentras en el texto?

c) ¿Qué es lo que más te llama la atención del cuento?

d) Explicar con sus propias palabras que significa cada uno de los axiomas del cuento.

e) ¿Porque crees que se llama "la Biblioteca de Babel"?.

RESPUESTAS

1. ***¿Qué diferentes concepciones del infinito encuentras en el texto?***

b) • La biblioteca es tan enorme que toda reducción de origen humano resulta infinitesimal.
RTA: Podemos decir que una biblioteca es tan infinita, como las personas que mueren y los libros que desaparecen. Así se pierda un anaquel completo, la biblioteca siempre será infinita.

• "No Hay, en la vasta biblioteca dos libros identicos"
RTA: La biblioteca es tan infinito y aun asi no hay forma de que haya 2 libros iguales.

b) Las diferentes concepciones encontradas en el texto son:

- En un primer momento el autor va a referirse al universo como una biblioteca con infinitos estantes o galerias hexagonales, acompañados por tantos pozos de ventilación y barandales como galerias, es decir, infinitos.
- Por otro lado Borgés señala un zaguán en cada galería, en la cual hay un espejo, por tanto, se refiere a infinitos reflejos de los hombres
- Borgés se refiere a que, en cada galería hay 5 anaqueles, en los cuales hay 32 libros de formato uniforme, el cual tiene 400 pg.
- "... Yo me atrevo a insinuar que... la biblioteca es ilimitada y periódica..."

B) La biblioteca tiene diferentes concepciones hacerca del infinito, Por ejemplo esta que el infinito es ilimitado y, periodico, el infinito en algunos casos es finito, Consideremos el caso que la biblioteca es total mirandola desde afuera. La biblioteca se compone de un número indefinido talvez infinito.

b) El actor plantea una biblioteca Infinita, de pisos, Saguanes, anaqueles y porsupuesto libros infinitos en Cantidad, donde podemos encontrar cualquier tipo y nombre de libros, en todas sus versiones

c) Lo que mas nos llama la atención del cuento la Biblioteca de Babel es que en esta biblioteca se le encuentra una respuesta a todo, algo que sería muy bueno pero que es muy difícil de entender porque se descubririan muchos secretos de los cuales no todas las personas estarían en la capacidad de entender y se tendrían consecuencias desagradables como perder la razón porque si bien es cierto es que la especie humana a lo largo de su evolución ha tratado de dar una respuesta a todo, lo que sucede a su alrededor sin importar lo que pasa.

b) • El universo con su elegante dotación de anaqueles, de tomos enigmaticos, de infranquiables escaleras para el viajero y de letrinas para el bibliotecario sentado, solo puede ser obra de un Dios.

• Esos peregrinos disputaban en los corredores estrechos, proferian oscuras maldiciones, se estrangulaban en las escaleras divinas, arrojaban los libros engañosos al fondo de los tuneles, morian despeñados por los hombres de regiones remotas.

2. ***¿Qué es lo que más te llama la atención del cuento?***

c) ¿Qué es lo que más te llama la atención del cuento?

Lo que más nos llama la atención es la terminología con la cuál describe que la biblioteca es de forma infinita ~~p~~ como lo es planteada en todas las partes del cuento.

c. "Quizá me engañen la vejez y el temor, pero sospecho que la especie humana -la única- está por extinguirse y que la Biblioteca perdura: iluminada, solitaria, infinita, perfectamente inmóvil, armada de volumenes preciosos, inutil, incorruptible, secreta."

Este pequeño texto nos llama la atención porque refleja la realidad que vivimos en la actualidad, ya que con el gran apojeo de la Tecnología la especie humana se extingue de tiempo, de espacio familiares, de cosas importantes. Si volvieras al tiempo en que buscabamos y utilizabamos con más frecuencia, no vivieramos en ese mundo virtual que nos hace totalmente dependientes a una máquina.

C) - la voz de quien lo narra

Porque, es muy apega y oviamente hace las pausas bien y se logra entender el mensaje.

- como esta planteada la estructura del texto, de forma poetica matematica.

porque, tiene frases muy cheveres y el solo hecho de que suena muy poetico y sumarle que son terminos matematicos la hace aun mejor, un texto mas interesante.

3. Como el autor intenta explicarnos diferentes temáticas de infinitos con su ingenio, basandose en su imaginación y fantasia.

Además de la relación del titulo y el contenido del texto con la historia de la torre de Babel que era tan infinita y que la construyeron hasta que llegará al cielo.

3. ***Explicar con sus propias palabras que significa cada uno de los axiomas del cuento.***

d. Axioma 1: Jorge Luis Borges en el primer axioma quiere decir que el hombre es el Bibliotecario el cual encuentra respuestas al trascurrir su vida por medio de las experiencias obtenidas y que la gran biblioteca de Babel es el mundo en especial el universo y la naturaleza, siendo esta ultima la que le ha hecho grandes aportes a la ciencia porque cabe recordar que la ley de la gravedad tuvo su origen por una manzana que hizo darle inicio a una brillante idea.

Axioma 2: ...

d. Axiomas:

1. Es la comparación de la dotación de la Biblioteca con el universo y este a su vez creado por un ser superior o por un Dios. Donde el hombre esta representado por el imperfecto bibliotecario y los libros, los anaqueles, escaleras, etc. son lo que conforma el universo como culturas, costumbres, idiomas, sociedades, roblemas, etc. Y todo esto solo puede ser obra de un Dios.

d) 1 axioma: La biblioteca es eterna, perfecta, divina y una obra de Dios
2 Axioma: La organización de la biblioteca será de acuerdo a los 25 signos ortográficos (22 letras, 1 espacio, 2 signos: punto y coma)

Ⓐ Primero: Que la vida siempre va a ser infinita, y con un creador superior.

Segundo: Lo que trata es que con los 25 signos ortograficos se pudo desifrar toda las congeturas y así tener mayor sabiduría.

ⓓ. 1. Afirma que el universo es infinito, lo asemeja a la biblioteca Infinita, al hombre y su diferencia con lo divino entre el libro y su contenido.

2. Plantea como sin duda alguna la humanidad ha planteado 25 simbolos ortograficos para cualquier tipo de escritos, en aquel tiempo.

Los axiomas nos expresan que la biblioteca siempre será infinita en todas sus formas.

d) primero: Entiendo que este axioma se basa en lo eterno, en este caso La biblioteca es eterna porque vienen de generación en generación que guarda un mundo lleno de misterios donde se pudieron perder libros hasta pueden existir "mundos ocultos" por llamarlo así y que el solo hecho de que la biblioteca es infinita lo relacionaríamos con que fue creada por un dios es decir comprendo que hay sierta relacion entre lo divino y lo humano.

4. *¿Porque crees que se llama "la Biblioteca de Babel"?.*

Debido a que cuenta la historia o mejor la
asimila a la torre de babel que era
una estructuro inmensa que sus constructores
y diseñadores pensaban en algún momento
en que dicha estructura llegaría al cielo,
la biblioteca de babel se ha de referir a
algo inmenso y tal vez infinito.

e. SE llama "Biblioteca de Babel" POR la comparación que
SE hace con la "Torre de Babel" donde según el creacionis-
mo se dio el ORIGEN a las principales lenguas (idioma), cultu-
ras, dialogo, donde ERO una Torre infinito. Y CREADOS POR un SER
SUPERIOR.

e) Cuando observamos el texto vemos que la biblioteca es infinita,
perfecta, eterna, infinita y divina en todas sus galerias
libros, anaqueles, ... Al igual que la estructura arquitectónica
de la Biblia, la torre de Babel era enorme, grande, infinita y quería
alcanzar al mismisimo Dios.
Sin embargo, en este texto la biblioteca no quiere alcanzar a Dios,
la biblioteca es creación divina, es Dios mismo.

Anexo 7. Ensayos.

1. Anexo: Escrito por Eliana Muñoz

Universidad del Cauca

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Girando con el Infinito...

Nombre: Eliana Alexandra Muñoz Velasco

Programa: Lic. en matemática

1. **De acuerdo con lo observado en el documental realice un ensayo corto de lo que más te guste.**

Las matemáticas consisten en resolver grandes y pequeños problemas, son
estos los que la mantienen con vida. En ella hay dos mundo el si y
el no, siempre esta presente en nuestra vida. Además que se
basa en demostraciones. Algo que me llamó mucho la atención fue el
hecho de saber que a los matemáticos les satisface más saber que
resolvieron un problema que creían no tenía solución, que la
aplicación que el mismo va ha tener en la vida diaria de los
personas.

Uno gran matematico fue Georg Cantor, el cual dio un amplio concep-
to del infito., de ese infinito que se puede volver finito, como por
ejemplo poder decir que los enteros son de igual tamaño que los
naturales. Además poder definir que hay infitos más grandes.

La geometria deposición es un problema de topologia la utilizamos a
diario, en los planos de metro. La geometria dobla la topologia pues
algo se puede parecer a otro algo sin necesidad de corta el elemen-
to que se va a transformar.

Finalmente comentare el infinito continuo, pues es éste la idea de saber
si existia una serie de números infinitos más grande que los enteros y
una serie más pequeña que todo los números decimales.

2. Anexo: Escrito por Andrés Felipe Gutiérrez.

Universidad del Cauca

Girando con el infinito...

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Nombre: Andres Felipe Gutierrez

Programa: Licenciatura En Matematica.

1. **De acuerdo con lo observado en el documental realice un ensayo corto de lo que más te guste.**

Las matematicas son una forma de expresar todo aquello que nos tiene con duda y que estas tienen solución por medio de la logica y matematicas

Han sido muchos los grandes matematicos los que han ayudado a que las matematicas vayan avanzado, volviendose cada día algo más simple pero sin quitarle la complejidad de ella misma. En las matematicas se ven muchos temas pero algo que dire es que siempre el infinito va ser complicado de entender pero que por medio de lo explicado por Cantor se hace un poco entendible y que el infinito potencial es algo más o uno más. y el infito actual. es aquel que podemos comparar y que los reales no es el conjunto infinito más grande sino que hay otro más grande.

3. Anexo: Escrito por Oscar Meneses.

Universidad del Cauca

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Girando con el Infinito...

Nombre: OSCAR MENESES

Programa: LIC. MATEMÁTICAS.

1. De acuerdo con lo observado en el documental realice un ensayo corto de lo que más te guste.

A lo largo de la historia, las matemáticas han evolucionado de una forma muy significativa, dentro de ello, con muchas personas que estudiaron matemáticas y con el paso del tiempo dieron explicación de un sin número de problemas, con esto empezaré a redactar una pequeña idea sobre la historia de las matemáticas.

Gölden Cantor, un matemático muy reconocido por sus demostraciones, hizo un paso enorme y complejo para las matemáticas, explicando las diferentes teorías sobre el infinito, dando un sin número de demostraciones, con lo que hizo dar un nuevo pensamiento radical a los matemáticos que creían que el infinito no se podía contar. Cantor dio una explicación impresionante a su teoría, tanto que sufrió una enfermedad mental que lo llevó a la muerte.

Por conclusión, diría que así como la humanidad tiene nuevos pensamientos, así mismo, las matemáticas tiene nuevas explicaciones para cada problema nuevo que se presente.

FIN

4. Anexo: Escrito por Sandra Roció, Velasco, Daniel Felipe Pizo y Edwin Bonilla.

Universidad del Cauca

El todo es mayor que la parte...

Girando con el Infinito...

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POSTERIS LUMEN MORITURUS EDAT

1827

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

Nombre: Sandra Rocío Velasco M.

Programa: Licenciatura en Matemáticas

1. **De acuerdo con lo observado en el documental realice un ensayo corto de lo que más te guste.**

En este documental nos hace ver como la explicación de infinito la podemos encontrar como un número finito. ver como Grigori Perelmán a partir de muchos razonamientos logra demostrar la conjetura de Poncare.

Al igual que saber que una suma que creemos infinita tiene un resultado finito. ver que hay razonamientos q. son considerados como verdades por estos matemáticos y que no tienen demostración.

Universidad del Cauca

El todo es mayor que la parte...

Girando con el Infinito...

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POSTERIS LUMEN MORITURUS EDAT

1827

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

Nombre: Daniel felipe pizo ceballos.

Programa: Lic. Matematicas

1. De acuerdo con lo observado en el documental realice un ensayo corto de lo que más te guste.

Inicial mente me llama la atencion segun lo expuesto en el documental el poco reconocimiento que deberian haber recibido grandes matematicos, seguidamente es interezante observar como a todas las figuras o formas en 2D selespuede dar otras iguales o mas complejas, tambien es bueno saber que en matematicas se pueden dar resultados sin tener una demostrasión, finalmente medeja un poco inquietado que muchos de los grandes matematicos terminaran en sanatorios o exiliados.

Universidad del Cauca

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Girando con el Infinito... Nombre: Edwin Bonilla

Programa: Lic matematicas

1. **De acuerdo con lo observado en el documental realice un ensayo corto de lo que más te guste.**

El documental nos muestra una historia en
general de algunos matematicos que se han
basado en el estudio de diferentes teorias
a las cuales le an querido dar una solucion que
de alguna manera estas diferentes teoria se ban entrelazando.
Principalmente pienso que cantor con el estudio
de conjuntos infinitos al demostrar que tipos de
conjunto mas grandes que los reales puede
existir y que no son numerables, de que todos
los conjuntos son numerables y se pueden coger
uno a uno con los naturales; tambien con el
modelo de diagonalizacion.

con ejemplos importantes y interesantes
como lo fueron el ajedrez, la biblioteca etc.
que nos explican mu[y] claramente ese concepto
de infinito.

Anexo 8. Taller Final y algunas repuestas.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

PRUEBA DIAGNOSTICA

Nombre: ___________________________

Programa: ________________________

Responda las siguientes preguntas y Justifique:

I. Si tomamos los granos de arena de todas las playas y todos los desiertos; ¿Se pueden enumerar? ¿El número de granos de arena es infinito o es finito? Explica tu respuesta y si es afirmativa como enumerarías los granos de arena.

II. Si tenemos un conjunto infinito y le quitamos un número infinito de elementos, ¿El conjunto que queda es finito o infinito? Explica tu respuesta.

III. Si un vaso es infinitamente largo, entonces debe tener una capacidad infinita; o sea, si un objeto es infinito, ¿son también todos sus atributos infinitos?

IV. ¿Entre el cuadrado y el segmento indique cual tiene más puntos? Justifique su respuesta.

V. Considere los segmentos AB y CD de la figura.

A___________B

C__________________________________D

¿CD tiene más o igual cantidad de puntos que AB?

VI. Considere al conjunto de los números naturales N = {1, 2, 3, 4, 6,...} y ahora considere P = {2, 4, 6, 8, 10,...}, el subconjunto de los números pares. ¿Hay igual cantidad de enteros en N que en P, o hay más en N?

VII. Considere al conjunto de los números naturales N = {1, 2, 3, 4, 6,...} y ahora considere el conjunto B = {2, 3, 4, 5, 6,...}, que se obtiene a partir del conjunto de los números naturales quitando el elemento 1. ¿N tiene más elementos que B o tiene la misma cantidad de elementos que B?

VIII. ¿Cuál cuestión a lo largo de tu vida se relaciona con el infinito? Explica tu respuesta.

REPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

III. Supongamos que el vaso es un conjunto infinito, del cual extraemos
un subconjunto infinito (o atributo, en este caso la capacidad), de acuerdo
con Cantor un conjunto es infinito si al extraer un subconjunto infinito
este se mantiene infinito, por tanto, si el conjunto (Objeto, vaso, etc)
es infinito entonces sus atributos serán infinitos.

II El conjunto sería infinito. Supongamos el conjunto de los $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, si al conjunto $\mathbb{N}$ le quitamos los pares $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, quedarían los elementos impares $A = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$, los cuales son infinitos, incluso tienen el mismo tamaño de los pares o de los $\mathbb{N}$.

III NO

yo diria que sus atributos no serian infintos
ya que suponemos que el vaso es infinito y por su
puesto su capacida infinita pero cristal suponiendo
que es de cristal seria la parte fisica que la
rodea pero seria algo contradictorio de su que
su capacida es infinita y lo que rodea ser finito
pero para mi no es infinita porque es lo que
rodea su capasida como decir la admosfera
rodea ala tierra seria sus atributos aunque hayan
cosas que parezcan o sean infinitas en la tierra
la capa que nos rodea seria finita porque ya dada
es algo determido.

3. No. Porque el hecho de que el vaso sea infinito no quiere decir que necesariamente sus caracteristicas sean también.

Pues un ejemplo de lo que no podría ser infinito sería la circunferencia que forma la base del vaso, puesto que si esta fuera infinita se convertiría en dos recta paralelas que nunca se unirían.

II) si tenemos un conjunto infinito y le quitamos
un número infinito, para mi quedaria infinito
por que para iniciar un conjunto es un numero o grupo
de elementos y lo que le estamos quitando
son elementos y tanto el conjunto como los elementos
son infinitos pero para mi el conjunto es mas
grande por decirlo asi contiene elementos infinitos
para mi la unica manera que quede finito
Seria a un conjunto infinito llamelo X le quitamos
el mismo infinito X ya la suerte cambiara
Seria algo asi como:

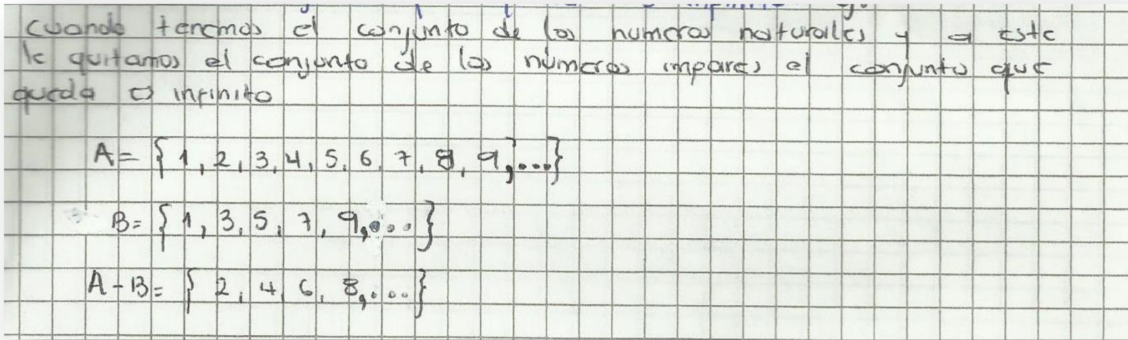
$$A - A = \emptyset$$

y lo de Conjuntos infinito le quitamos elementos infinitos seria
algo asi como.

$$A = \{\cdots \cdots \cdots\}$$

$$A - \cdots\cdots = \cdots$$

Es decir A − infinitos elementos quedarian o seguirian
quedando elementos infinitos es su conjunto.



cuando tenemos el conjunto de los numeros naturales y a este le quitamos el conjunto de los números impares el conjunto que queda es infinito

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

$A - B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

Anexo 9. Universidad del Cauca, Facultad de Educación.

Anexo 10. Estudiantes de I semestre de Lic. Matemáticas

Anexo 11. Algunas sesiones de trabajo

Anexo 12. Cuentos: La Biblioteca de Babel y La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga

LA PERPETUA CARRERA DE AQUILES Y LA TORTUGA

Las implicaciones de la palabra *joya* –valiosa pequeñez, delicadeza que no está sujeta a la fragilidad, facilidad suma de traslación, limpidez que no excluye lo impenetrable, flor para los años– la hacen de uso legítimo aquí. No sé de mejor calificación para la paradoja de Aquiles, tan indiferente a las decisivas refutaciones que desde más de veintitrés siglos la derogan, que ya podemos saludarla inmortal. Las reiteradas visitas del misterio que esa perduración postula, las finas ignorancias a que fue invitada por ella la humanidad, son generosidades que no podemos no agradecerle. Vivámosla otra vez, siquiera para convencernos de perplejidad y de arcano íntimo. Pienso dedicar unas páginas –unos compartidos minutos– a su presentación y a la de sus correctivos más afamados. Es sabido que su inventor fue Zenón de Elea, discípulo de Parménides, negador de que pudiera suceder algo en el universo.

La biblioteca me facilita un par de versiones de la paradoja gloriosa. La primera es la del hispanísimo diccionario Hispano-Americano, en su volumen vigésimo tercero, y se reduce a esta cautelosa noticia: *El movimiento no existe: Aquiles no podría alcanzar a la perezosa tortuga.* Declino esa reserva y busco la menos apurada exposición de G. H. Lewes, cuya *Biographical History of Philosophy* fue la primer lectura especulativa que yo abordé, no sé si vanidosa o curiosamente. Escribo de esta manera su exposición: Aquiles, símbolo de rapidez, tiene que alcanzar la tortuga, símbolo de morosidad. Aquiles corre diez veces más ligero que la tortuga y le da diez metros de ventaja. Aquiles corre esos diez metros, la tortuga corre uno; Aquiles corre ese metro, la tortuga corre un decímetro; Aquiles corre ese decímetro, la tortuga corre un centímetro; Aquiles corre ese centímetro, la tortuga un milímetro; Aquiles el milímetro, la tortuga un décimo de milímetro, y así infinitamente, de modo que Aquiles puede correr para siempre sin alcanzarla. Así la paradoja inmortal.

Paso a las llamadas refutaciones. Las de mayores años –la de Aristóteles y la de Hobbes– están implícitas en la formulada por Stuart Mill. El problema, para él, no es más que uno de tantos ejemplos de la falacia de confusión. Cree, con esta distinción, abrogarlo:

En la conclusión del sofisma, *para siempre* quiere decir cual-

quier imaginable lapso de tiempo; en las premisas, cualquier número de subdivisiones de tiempo. Significa que podemos dividir diez unidades por diez, y el cociente otra vez por diez, cuantas veces queramos, y que no encuentran fin las subdivisiones del recorrido, ni por consiguiente las del tiempo en que se realiza. Pero un ilimitado número de subdivisiones puede efectuarse con lo que es limitado. El argumento no prueba otra infinitud de duración que la contenible en cinco minutos. Mientras los cinco minutos no hayan pasado, lo que falta puede ser dividido por diez, y otra vez por diez, cuantas veces se nos antoje, lo cual es compatible con el hecho de que la duración total sea cinco minutos. Prueba, en resumen, que atravesar ese espacio finito requiere un tiempo infinitamente divisible, pero no infinito. (Mill, *Sistema de lógica*, libro quinto, capítulo siete.)

No anteveo el parecer del lector, pero estoy sintiendo que la proyectada refutación de Stuart Mill no es otra cosa que una exposición de la paradoja. Basta fijar la velocidad de Aquiles a un segundo por metro, para establecer el tiempo que necesita.

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10.000}\dots$$

El límite de la suma de esta infinita progresión geométrica es doce (más exactamente, once y un quinto; más exactamente, once con tres veinticincoavos), pero no es alcanzado nunca. Es decir, el trayecto del héroe será infinito y éste correrá para siempre, pero su derrotero se extenuará antes de doce metros, y su eternidad no verá la terminación de doce segundos. Esa disolución metódica, esa ilimitada caída en precipicios cada vez más minúsculos, no es realmente hostil al problema: es imaginárselo bien. No olvidemos tampoco de atestiguar que los corredores decrecen, no sólo por la disminución visual de la perspectiva, sino por la disminución admirable a que los obliga la ocupación de sitios microscópicos. Realicemos también que esos precipicios eslabonados corrompen el espacio y con mayor vértigo el tiempo vivo, en su doble desesperada persecución de la inmovilidad y del éxtasis.

Otra voluntad de refutación fue la comunicada en mil novecientos diez por Henri Bergson, en el notorio *Ensayo sobre los datos inmediatos de la conciencia*: nombre que comienza por ser una petición de principio. Aquí está su página:

Por una parte, atribuimos al movimiento la divisibilidad misma del espacio que recorre, olvidando que puede dividirse bien un objeto, pero no un acto; por otra, nos habituamos a proyectar este acto mismo en el espacio, a aplicarlo a la línea que reco-

rre el móvil, a solidificarlo, en una palabra. De esta confusión entre el movimiento y el espacio recorrido nacen, en nuestra opinión, los sofismas de la escuela de Elea; porque el intervalo que separa dos puntos es infinitamente divisible, y si el movimiento se compusiera de partes como las del intervalo, jamás el intervalo sería franqueado. Pero la verdad es que cada uno de los pasos de Aquiles es un indivisible acto simple, y que después de un número dado de estos actos, Aquiles hubiera adelantado a la tortuga. La ilusión de los Eleatas provenía de la identificación de esta serie de actos individuales *sui generis*, con el espacio homogéneo que los apoya. Como este espacio puede ser dividido y recompuesto según una ley cualquiera, se creyeron autorizados a rehacer el movimiento total de Aquiles, no ya con pasos de Aquiles, sino con pasos de tortuga. A Aquiles persiguiendo una tortuga sustituyeron, en realidad, dos tortugas regladas la una sobre la otra, dos tortugas de acuerdo en dar la misma clase de pasos o de actos simultáneos, para no alcanzarse jamás. ¿Por qué Aquiles adelanta a la tortuga? Porque cada uno de los pasos de Aquiles y cada uno de los pasos de la tortuga son indivisibles en tanto que movimientos, y magnitudes distintas en tanto que espacio: de suerte que no tardará en darse la suma, para el espacio recorrido por Aquiles, como una longitud superior a la suma del espacio recorrido por la tortuga y de la ventaja que tenía respecto de él. Es lo que no tiene en cuenta Zenón cuando recompone el movimiento de Aquiles, según la misma ley que el movimiento de la tortuga, olvidando que sólo el espacio se presta a un modo de composición y descomposición arbitrarias, y confundiéndolo así con el movimiento. (*Datos inmediatos*, versión española de Barnés, páginas 89, 90. Corrijo, de paso, alguna distracción evidente del traductor.) El argumento es concesivo. Bergson admite que es infinitamente divisible el espacio, pero niega que lo sea el tiempo. Exhibe dos tortugas en lugar de una para distraer al lector. Acollara un tiempo y un espacio que son incompatibles: el brusco tiempo discontinuo de James, con su *perfecta efervescencia de novedad*, y el espacio divisible hasta lo infinito de la creencia común.

Arribo, por eliminación, a la única refutación que conozco, a la única de inspiración condigna del original, virtud que la estética de la inteligencia está reclamando. Es la formulada por Russell. La encontré en la obra nobilísima de William James, *Some Problems of Philosophy*, y la concepción total que postula puede estudiarse en los libros ulteriores de su inventor –*Introduction to Mathematical Philosophy*, 1919; *Our Knowledge of the External World*, 1926– libros de una lucidez inhumana, insatisfactorios e intensos. Para Russell, la operación de contar es (intrínsecamen-

te) la de equiparar dos series. Por ejemplo, si los primogénitos de todas las casas de Egipto fueron muertos por el Ángel, salvo los que habitaban en casa que tenía en la puerta una señal roja, es evidente que tantos se salvaron como señales rojas había, sin que esto importe enumerar cuántos fueron. Aquí es indefinida la cantidad; otras operaciones hay en que es infinita también. La serie natural de los números es infinita, pero podemos demostrar que son tantos los impares como los pares.

Al 1 corresponde el 2
„ 3 „ „ 4
„ 5 „ „ 6, etcétera.

La prueba es tan irreprochable como baladí, pero no difiere de la siguiente de que hay tantos múltiplos de tres mil dieciocho como números hay.

Al 1 corresponde el 3018
„ 2 „ „ 6036
„ 3 „ „ 9054
„ 4 „ „ 12072, etcétera.

Lo mismo puede afirmarse de sus potencias, por más que éstas se vayan rarificando a medida que progresemos.

Al 1 corresponde el 3018
„ 2 „ „ 3018^2, el 9.108.324
„ 3…, etcétera.

Una genial aceptación de estos hechos ha inspirado la fórmula de que una colección infinita –verbigracia, la serie de los números naturales– es una colección cuyos miembros pueden desdoblarse a su vez en series infinitas. La parte, en esas elevadas latitudes de la numeración, no es menos copiosa que el todo: la cantidad precisa de puntos que hay en el universo es la que hay en un metro de universo, o en un decímetro, o en la más honda trayectoria estelar. El problema de Aquiles cabe dentro de esa heroica respuesta. Cada sitio ocupado por la tortuga guarda proporción con otro de Aquiles, y la minuciosa correspondencia, punto por punto, de ambas series simétricas, basta para publicarlas iguales. No queda ningún remanente periódico de la ventaja inicial dada a la tortuga: el punto final en su trayecto, el último en el trayecto de Aquiles y el último en el tiempo de la carrera, son términos que matemáticamente coinciden. Tal es la solución de Russell. James, sin recusar la superioridad técnica