



LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIA NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DEL CAUCA

**UNA CONSTRUCCIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS, A PARTIR DE
LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS, CON LOS ESTUDIANTES DE 10° GRADO DE
LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LOS COMUNEROS DE POPAYÁN**

José Luis Orozco Gonzáles
Carol Lizeth Realpe Vidal

Enero de 2015

**UNA CONSTRUCCIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS, A PARTIR DE
LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS, CON LOS ESTUDIANTES DE 10° GRADO DE
LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LOS COMUNEROS DE POPAYÁN.**

José Luis Orozco Gonzáles

Carol Lizeth Realpe Vidal

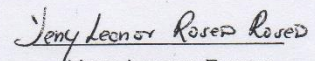
Trabajo de práctica pedagógica para optar al título de Licenciado en Matemáticas.

Orientador

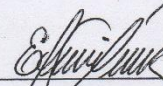
Mg. Eruin Alonso Sánchez Ordoñez

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
ENERO DE 2015

Nota de aceptación

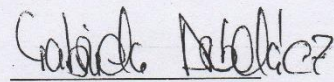

Yeny Leonor Rosero

Coordinadora Licenciatura en Matemáticas



Efraim Alonso Sánchez

Orientador Práctica Pedagógica



Gabriela Arbeláez
Evaluadora

Febrero de 2015

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar a Dios por colocar en nuestro camino, personas valiosas que aportaron e influyeron en las distintas etapas de nuestra práctica pedagógica.

Al profesor Eruin Alonso Sánchez por su interés en orientar y dirigir nuestro trabajo de práctica pedagógica, por su confianza, colaboración y apoyo. Además, por su valiosa contribución en el desarrollo de nuestra práctica docente en el grado 10° de la Institución Educativa “Los Comuneros” de Popayán, en el área de matemáticas.

A los estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa “Los Comuneros” por su compromiso en las actividades escolares propuestas; como también directivos y docentes de esta institución, en aquel momento, por su apoyo y contribución en nuestra formación docente. Gracias por ésta experiencia “para nutrir la vida”.

A nuestros compañeros y amigos que siguieron con nosotros este proceso pedagógico, por compartir sus experiencias y por su apoyo en el desarrollo de la práctica pedagógica.

Por último a nuestras familias y seres más queridos, por su apoyo y disposición para alcanzar y seguir adelante con este proceso pedagógico.

Tabla de contenido

0	Introducción	1
1	Reflexiones Pedagógicas	5
1.1	Relación Practicante-Estudiante	6
1.2	Relación Estudiante-Estudiante	10
1.3	Relación Practicante-Profesor titular	12
1.4	Modelo Pedagógico	16
1.5	Sobre la Teoría Del Aprendizaje	19
1.6	Evaluación	21
2	¿Por qué se habla de una Educación Matemática?	24
2.1	Antecedentes	26
2.2	Referentes Teóricos	28
2.2.1	Desde lo Matemático	28
2.2.1.1	Razones Trigonométricas	29
2.2.1.2	Semejanza	29
2.2.1.3	Razón	30
2.2.1.4	Magnitud y Cantidad	31
2.2.1.5	Proporcionalidad	31
2.2.2	Desde la Educación Matemática	33
2.2.2.1	La Teoría de Las Situaciones Didácticas	33
2.2.2.2	Situaciones Didácticas	33
2.2.2.3	Contrato Didáctico	35

2.2.2.4 Trasposición Didáctica	36
2.3 La pregunta de investigación	38
2.3.1 Una investigación de intervención	39
2.4 Descripción de la población	41
2.5 Análisis de los resultados.....	42
2.5.1 Análisis de la actividad 1	42
2.5.2 Análisis de la actividad 2	47
2.6 Consideraciones finales	57
3 Anexos	62
3.1 Anexo 1. Actividad 0	63
3.2 Anexo 2. Actividad 1	64
3.3 Anexo 3. Actividad 2	65
3.4 Anexo 4. Conociendo el contexto.....	67
3.5 Anexo 5. En la experiencia pedagógica	69
3.6 Anexo 6. En el desarrollo de las actividades	70
3.7 Anexo 7. Trabajos de los estudiantes	72
4 Referencia Bibliográfica	74

0 Introducción

El presente documento ha sido elaborado como requisito parcial para optar por el título de Licenciados en Matemáticas, otorgado por la Universidad del Cauca; y describe una experiencia pedagógica-investigativa llevada a cabo en la Institución Educativa Los Comuneros con los grados 10° en el área de matemáticas.

Este trabajo es la síntesis de un proceso pedagógico que da cuenta de la formación integral, en el campo de las matemáticas, adquirida por quienes realizan este escrito. En este sentido, el objetivo principal al llevar a cabo una intervención pedagógica-investigativa consiste no sólo en realizar un análisis frente al proceso de enseñanza y de aprendizaje de un conocimiento matemático, sino en orientar y fomentar prácticas que involucren tanto a estudiantes como practicantes, para lograr la realización plena de las personas. De esta manera, se busca mediante el diseño de actividades, además de instruir conocimientos matemáticos, integrar estos saberes para desarrollar elementos que permitan explorar y aprovechar las habilidades del sujeto; y propiciar actos de convivencia, por ejemplo el diálogo, la solidaridad, el compartir, entre otros que contribuyan al mejoramiento de la calidad de vida del entorno social.

Desde esta perspectiva, en la necesidad de dar un sentido y buen uso a las matemáticas para aportar al progreso de la comunidad, se hace una reflexión frente a las prácticas matemáticas utilizadas para aprender los conocimientos matemáticos,

y a partir de ello transformar los métodos de enseñanza de las matemáticas. Así pues, en esta experiencia investigativa se indaga acerca de la forma cómo los estudiantes interpretan las razones trigonométricas desde la semejanza de triángulos, por medio de actividades que generen una situación didáctica, fundamentada en ideas constructivistas que permitan aprendizajes significativos.

Con base a estos argumentos se intenta dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo los estudiantes logran interpretar y determinar las razones trigonométricas de los ángulos de un triángulo rectángulo?*

Este interrogante nace en el afán de hacer conciencia frente a las metodologías utilizadas para enseñar matemáticas. Para responder la pregunta se diseñan y establecen dos actividades, previamente evaluadas por el profesor encargado del área de matemáticas, en los grados 10º, con el fin de desarrollar una situación didáctica. Posteriormente, se analizan los hallazgos y procedimientos empleados por los estudiantes en la solución de las actividades propuestas, teniendo como referente teórico “La Teoría de las Situaciones Didácticas” de Guy Brousseau (2009).

Esta experiencia permite concluir que a partir de actividades que generan una situación didáctica se puede comprender y construir el concepto de razones trigonométricas, desarrollar pensamiento crítico, potencializar habilidades y establecer espacios de sana convivencia; elementos que en una obra en común fomentan una formación integral, a través de la cual las personas contribuyen al desarrollo y calidad de vida de su comunidad.

La estructura del documento.

Parte I

Para lograr lo anterior, teniendo en cuenta que en esta experiencia pedagógica se cumple el rol de pedagogo e investigador, se describen las diferentes interacciones que se gestaron en el aula de clase, dadas entre practicante- estudiante, estudiante-estudiante, y profesor-practicante donde se observa cómo estas relaciones propiciaron un ambiente agradable y adecuado, favoreciendo el proceso de enseñanza y de aprendizaje del concepto de las razones trigonométricas. No obstante, otros elementos que contribuyeron en la comprensión y construcción del concepto matemático fueron el *Modelo Pedagógico Constructivista* y la teoría del *Aprendizaje Significativo de Ausbel*, ya que era necesario estimular a los protagonistas (estudiantes, practicantes) del proceso educativo para que indagaran, confrontaran respuestas, compartieran e intercambiaran ideas para desarrollar aprendizajes significativos para extenderlos a otros campos del conocimiento matemático y utilizarlos para resolver nuevos problemas. Todo esto llevo a realizar una evaluación desde tres enfoques saber-hacer, saber-saber y saber-ser con lo cual se hizo una reflexión crítica con respecto a toda la experiencia pedagógica, y contribuyo en la formación integral tanto de estudiantes como de practicantes. Esta parte se le ha llamado *Reflexiones Pedagógicas* pues permite dar cuenta de cómo se llevó a cabo el proceso educativo del concepto de razones trigonométricas, y comprender que esta experiencia tiene como objetivo hacer de las matemáticas una ciencia más humana, es decir se debe involucrar los conocimientos y practicas matemáticas en el desarrollo de pensamiento crítico para contribuir en la calidad de vida de la comunidad.

Parte II

En la segunda sección de este documento se encontraran elementos que hacen parte del informe de la parte investigativa de la práctica pedagógica. Se consideran aspectos de tipo argumentativo apoyándose esencialmente en los diferentes autores

de teorías y de trabajos estudiados, analizados y sintetizados en los diferentes cursos de la línea de educación matemática que ofrece el programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad del Cauca, también se describirán los resultados alcanzados por la investigación y unas breves consideraciones finales acerca de éstos.

1 Reflexiones Pedagógicas

En el inicio de la práctica pedagógica, se vivieron diversas experiencias, basadas en la interacción de los distintos actores que participan en el proceso educativo (profesor titular, practicante, estudiantes). Éstas contribuyeron en el inicio de la formación docente, no sólo a nivel de conocimientos que se forjan a través de la misma, sino también a nivel de formación personal, ya que por medio de la relaciones se gestaron encuentros intelectuales, culturales y éticos donde circularon sensaciones e ideas que permitían establecer un diálogo con los estudiantes para conocer y reflexionar frente a sus necesidades y ayudarlos. De tal manera que este espacio pedagógico¹ construido día a día, condujo a realizar una praxis sobre el trabajo y los objetivos llevados durante la práctica, pensando si estaban respondiendo a los intereses educativos y sociales de la comunidad y de los practicantes. Así, esta experiencia pedagógica se convirtió en un enseñar y en un aprender que involucró a estudiantes y practicantes, buscando interrogantes y respuestas que contribuyeran a mejorar los procesos pedagógicos para apostarle a una educación cuyo reto es *“forjar individuos que desde sus conocimientos y principios éticos trabajen a favor de la comunidad”* (I.E. Los Comuneros, 2008, p.44), reto propio de la Institución Educativa Los comuneros donde se llevó a cabo la práctica.

De igual manera, para contribuir en el proceso de práctica se establecieron estrategias, actividades y métodos que facilitaran ésta; por ello se requirió apoyarse

¹ Se entiende el espacio pedagógico como el lugar donde se hace Pedagogía, y Pedagogía se entiende como “Un espacio donde se piensa antes de actuar, circulan encuentros y se gestan polifonías sobre el otro, y, en este sentido, está estrechamente unida con la educación”. Zambrano, 2002, p.36.

sobre un método pedagógico y una teoría de aprendizaje que aportará a un adecuado desarrollo de la práctica.

A continuación, se hablará acerca de esas vivencias que permitieron obtener una reflexión pedagógica en la formación docente, a través de las relaciones que se desarrollaron en el aula de clase; y sobre el aporte del modelo pedagógico, de la teoría del aprendizaje y de la evaluación en el proceso pedagógico.

1. 1 Relación Practicante-Estudiante

En el marco de las relaciones manifestadas en el aula de clase se encuentra la interacción entre practicante y estudiante, vínculo que proporciona experiencias para empezar a forjar una formación docente.

Esta relación, practicante-estudiante, se inició conociendo a los estudiantes, a través de un llamado a lista, de sus rasgos físicos, de características propias de su personalidad y de las actitudes asumidas en clase por ellos. Este conocer implicó memorizar sus nombres, distinguirlos por aquellos que eran: callados, participativos, hiperactivos, intrépidos, responsables, entre otros; además reconocer y comprender sus estados de ánimo y las situaciones emocionales que afectaban o influían en su desempeño académico. Todo ello contribuyó a una buena comunicación e interacción que permitió tener un acercamiento con los chicos para generar espacios de confianza y respeto donde *“El niño no es una simple exterioridad ni objeto individual”* (Zambrano, 2002, p.36), es decir, entendiendo que el niño no es algo que sólo se empapa de conocimientos, sino que es un sujeto que siente, tiene necesidades y requiere de ayuda y entendimiento por parte del profesor.

Así mismo, interactuar con los estudiantes y observarlos, permitió tener una perspectiva del aula de clase; éstos, pese a que se les podía estigmatizar por el contexto social que los rodea, eran jóvenes respetuosos, colaboradores y con sueños de progresar a través del estudio. Todos ellos con distintas habilidades intelectuales, algunos inclinados a la parte artística, salud, ciencias sociales, lenguas modernas y unos cuantos a la parte matemática. Sin embargo, a pesar de que el gusto por las matemáticas era poco, su desempeño fue bueno, era interesante y motivador ver que al explicar algo nuevo, ellos indagaban, deducían o lanzaban afirmaciones relacionadas con sus conceptos previos que eran discutidas dentro del aula de clase. Esto significaba que los muchachos tenían una capacidad crítica para reflexionar no sólo los aspectos académicos, sino sociales de la vida, ya que expresaban sus inquietudes y participaban en la construcción de respuestas.

El trabajo del practicante implicó ser un factor determinante para llevar a cabo un adecuado proceso de aprendizaje en los estudiantes. En este caso, el practicante debió preparar sus clases ajustándose al currículo respectivo de la institución educativa y establecer una metodología que despertara la motivación y permitiera la comprensión en los estudiantes; de tal manera que los conocimientos enseñados estuvieran relacionados con problemas cotidianos del entorno social de los estudiantes, y no se encontraran por encima de su nivel intelectual. Más allá de ello, estaban las actitudes personales del practicante, ser respetuoso, carismático, colaborador, y dispuesto a resolver inquietudes o atender sugerencias, buscaba agradar a los estudiantes y los animaba a expresar sus dudas, de tal forma que no quedaran vacíos que con el transcurrir de las clases afectaran la comprensión de otros conceptos. Además, la praxis² realizada frente a su labor aportó para mejorar los procesos educativos que llevaba a cabo día a día con los estudiantes, puesto que le permitía reconocer sus dificultades que influían en la enseñanza y aprendizaje de los

² Según Zambrano, “La Pedagogía ha cobrado sentido y transcendencia en la Educación, pasando de ser sólo un espacio de trasmisión de conocimiento a una práctica – reflexión, y viceversa”. (2002,p.36) En este sentido, se entiende la *praxis* como el *hacer* una práctica-reflexión y reflexión-práctica en torno a los encuentros, relaciones, interacciones y roles que se desarrollan en un espacio pedagógico.

chicos para corregirlas a tiempo, y también conocer sus fortalezas que debía seguir cultivando; igualmente, la praxis ayudó a detectar y manejar controladamente factores del contexto social que afectaban la educación de los jóvenes. De esta manera, la labor educativa del practicante intervino en la formación de los estudiantes porque más que planear adecuadamente las clases y tener unos buenos valores, se requería del profesor una reflexión que contribuyera a sus procesos de aprendizaje y, de acuerdo con Flórez (1999, p.43), propiciará ambientes estimulantes de experiencias para facilitar al niño su acceso a las estructuras cognoscitivas.

El rol del practicante en esta relación fue el de mediador entre el saber y el estudiante, encargado de generar espacios para una retroalimentación entre el saber, el estudiante y él, donde había una entrega y recepción de conocimientos que le permitían entender cómo el estudiante respondía ante ciertas situaciones, cómo debía actuar frente a las respuestas dadas por los chicos y le orientaban a realizar una praxis.

Por otro lado, el practicante representaba a la figura que ejercía una autoridad en el aula de clase, es decir, estaba en el deber de *“ejercer responsablemente el poder”* (I.E. Los Comuneros, 2008, p.52). Esto implicó para el practicante un gran compromiso ya que él era encargado de orientar y controlar adecuadamente las actividades que se daban entorno a la enseñanza y el aprendizaje. Por ejemplo, saber cuándo y de qué manera debía actuar ante situaciones de comportamiento de los estudiantes que no permitieron orientar las clases, o cómo hacer un llamado de atención cuando no cumplía con sus responsabilidades académicas. Sin embargo, para ser merecedores de esa autoridad, los practicantes debían ser modelo ejemplar para sus estudiantes a través de sus actitudes, valores éticos y *“desempeño académico”*; de forma que los estudiantes vieran en sus practicantes un ejemplo que aportara a sus vidas. Esta autoridad ejercida por el practicante buscaba controlar

posibles aspectos que afectaran el proceso educativo, sin dejar de lado la comunicación e interacción entre profesor-estudiante.

Para abordar el tema de la disciplina, elemento relevante en un ambiente educativo y para el buen desarrollo de una clase, se tuvo en cuenta el Libro institucional “Educación para nutrir la vida”. Así se pudo establecer con los estudiantes ciertas normas en esta mini-sociedad llamada aula de clase, en palabras de Brousseau (2009) se estableció un contrato didáctico por parte del practicante y los estudiantes, pero es preciso aclarar que desde esta perspectiva, el contrato didáctico no solo es un contrato pedagógico en general. Depende estrechamente de los conocimientos en juego. Entonces adoptamos la disciplina como:

Comportamiento o forma de actuar dado por principios y valores, que a su vez son determinados culturalmente; en este caso asumidos desde uno de los principios de la institución: EDUCACIÓN COMO UNA APUESTA ÉTICA, la cual genera actitudes como la constancia y la tenacidad, y comportamientos como el cumplimiento, la puntualidad, el orden, la organización, el espíritu y el rigor científico” (I.E. Los Comuneros, 2008, p.52)

Ahora, bajo este principio de disciplina, en ocasiones se debió aplicar varias de las reglas que se habían planteado, debido a comportamientos inadecuados de algunos estudiantes en ciertos momentos de la intervención del practicante; así mismo se les brindaron estímulos a los estudiantes con buena disciplina. Todo esto con fines de una formación no solo académica, pues también se está formando a personas que son parte de una sociedad.

1. 2 Relación estudiante-estudiante

Otra de las interacciones sociales que se manifestaron en el aula y que es preciso describir, es la de los alumnos con sus pares, ya que ellos son actores principales del proceso educativo, pues por medio de sus comportamientos y actitudes, proporcionan una visión de cómo se manifestó de cierta manera el ambiente en el salón de clases. Además, ellos dan cuenta del proceso del aprendizaje y de la enseñanza ya que según Flórez (1999)

(...) los éxitos de éstas se basan en la interacción y en la comunicación de los alumnos y en el debate y la crítica argumentativa del grupo para lograr resultados cognitivos y éticos colectivos y soluciones a los problemas reales comunitarios mediante la interacción teórico-práctica. (p.46)

Un primer aspecto observado entre los estudiantes fue la generación de subgrupos que se desprendían del grupo total. Ésta pudo ser motivada por los gustos musicales, género, amistades forjadas a través del tiempo, diferencia de edades, o de la inclusión o exclusión de las llamadas culturas urbanas³. Todos estos aspectos brindaron un espacio donde se discutieron algunas de estas temáticas, logrando de esta manera un intercambio de situaciones de la vida y de experiencias entre los estudiantes. Por tanto se desencadenaron rasgos que aportaron al aprendizaje y a la formación de los estudiantes como personas al servicio de su comunidad.

La relación de compañerismo dada entre estudiantes fue una de las características del curso, donde se gestaron actitudes de colaboración, solidaridad, respeto y apoyo. Así, en el desarrollo de la clase, los chicos tenían confianza para indagar acerca del

³ Entiéndase por culturas urbanas como agrupaciones principalmente de jóvenes que se originan y desarrollan en la ciudad. Sus miembros se comportan de acuerdo a las ideologías, gustos musicales o deportivos de su subcultura. Las culturas urbanas surgen de la necesidad de identidad de los jóvenes y adolescentes. (Pensamientos, tendencias, modas). Fabiola Vargas, Sandra Jarawww.ministerioaguadevida.org)

tema de clase o de algo que no habían entendido; además se explicaban y orientaban entre sí. Este aspecto llamó la atención porque algunos estudiantes tenían facilidad para comprender mejor los temas o las actividades, que se les proponía realizar, con la explicación dada por sus compañeros, quizás se deba a un lenguaje tácito desarrollado por ellos, donde la comunicación sea natural y hace que los conocimientos sean fáciles de acceder, precisamente Prieto (1990, p.79) alude a esto cuando cita a Delamont (1976) y dice:

Los significados envueltos en la comunicación tanto del discurso de los alumnos como de los profesores, están insertos en contextos específicos y que regulan la “actuación” o habla. Cada intercambio implica, de hecho, la existencia de significados no siempre compartidos, de elementos implícitos y contradictorios, ambigüedades, confusiones y problemas que lo convierten en un proceso altamente complejo, que requiere de negociaciones permanentes para una comprensión recíproca y lo transforman en un acto de “toma y dame” constante.

De igual modo, por medio de este vínculo establecido entre estudiantes, se observó ciertas normas implícitas gestadas por ellos como el respeto por sus cosas, pedir prestado sus útiles escolares y el compartir. También una mini-sociedad donde había un representante de grupo y líderes que guiaban en las actividades académicas y extracurriculares. En cuanto al género, no era una constante que demarcaba con fuerza la relación de los estudiantes, ya que entre las niñas y los niños se veía el respeto de unos a otros, y los inconvenientes que a veces se presentaban eran superados con facilidad, sin necesidad de tomar acciones de intervención por parte del practicante, ni tampoco del profesor titular.

Al tener en cuenta la edad de los estudiantes, fue inevitable que se presentaran situaciones de humor por parte de ellos en el trámite de una jornada académica. Esto significó un reto para los practicantes, debido a que tenían que decidir hasta que momento dejar fluir el humor, para que la clase no fuese aburrida y monótona; pero

también medir hasta qué punto permitir las risas, para ponerse nuevamente serios en la clase y retomar la principal empresa en la cual estaban comprometidos, la construcción del conocimiento por parte de sus alumnos.

De manera global, la relación entre los estudiantes proporcionó un buen ambiente de grupo, favoreciendo la labor docente ya que le ayudaba a controlar y orientar mejor al grupo para avanzar con los temas planeados en la intervención del practicante.

1. 3 Relación Practicante-Profesor titular

Al inicio de la nueva fase del ciclo de práctica pedagógica, se dio la oportunidad de forjar una relación que permitió intercambiar experiencias con el profesor Eruin Alonso Sánchez, encargado del grado 10° de la Institución Educativa en cuestión.

En el desarrollo de esta interacción entre el profesor titular y practicantes un aspecto que se tuvo en cuenta es que dicho educador fue el responsable de dirigir el proceso de la práctica pedagógica de los maestros en formación. Por consiguiente la comunicación se apoyó en dos puntos complementados entre sí; el primero, tener la posibilidad de observar al profesor ejerciendo la docencia universitaria y el segundo desempeñando la docencia en los niveles de básica y media. A su vez ésta resultó fluida, abriendo espacios para la reflexión acerca del desarrollo de una clase de matemáticas, de manera que se tenía la posibilidad de discutir acerca de la forma cómo se había desarrollado una clase de matemáticas, de las sensaciones o emociones percibidas por el profesor titular con respecto a los practicantes, y viceversa. Igualmente, se podía expresar observaciones e inquietudes referentes a las situaciones vividas por los practicantes durante la clase. Así pues, se sentía un apoyo, colaboración y contribución a la formación docente de los practicantes por parte del profesor, ya que al tener la oportunidad de interactuar con él, como docente universitario y escolar simultáneamente, les hacía ver sus errores desde el campo

escolar, universitario y como persona, pero también les indicaba sus fortalezas, motivándolos a mejorar. Por lo tanto, la comunicación se generó dentro de un ambiente de confianza, facilitando la retroalimentación de enseñanzas y de aprendizajes, desde el campo de la educación y de la vida.

Por otro lado, la comunicación establecida entre el profesor titular y los practicantes, fue una parte indispensable para la planeación de los contenidos ya que se dio total autonomía en la escogencia de la unidad de trabajo en el grado 10° y dicha planeación se realizó de acuerdo a lo establecido en la malla curricular de la institución educativa, los estándares y lineamientos curriculares y bajo la observación del profesor titular.

Por otra parte, el profesor titular, se convirtió en instrumento mediador para que los practicantes transformaran su formación académica universitaria hacia una académica escolar, teniendo en cuenta las necesidades de la población escolar a la cual se orientaron las clases. Por consiguiente, fue necesario realizar una *“transposición didáctica”*, es decir, *“hacer una adaptación de la presentación axiomática de las matemáticas para la enseñanza, donde el profesor debe producir una recontextualización y una repersonalización del conocimiento, adaptándolo a una situación específica del contexto social del niño y sobre sentido para él.”* (Brousseau, 2009, p.4) Así, se buscaba transformar el saber matemático en un conocimiento comprensible para el niño y que estuviera a su disposición.

Para ello, era necesario promover un primer acercamiento de los practicantes con la institución en donde se trabajó, con el objetivo de que éstos conocieran e interactuaran con el entorno escolar. Por esta razón, el profesor titular realizó un recorrido con los practicantes por las instalaciones del centro educativo (sala de profesores, cafetería-restaurante escolar, aulas de clase, baños, biblioteca y sala de

sistemas), de igual modo, presentó a los practicantes con los directivos institucionales, como la coordinadora académica y profesores de otras disciplinas, aparte de las matemáticas, tal como español, física, inglés, sociales, psicología. Finalmente, el profesor presentó a los estudiantes del grado 10°, con los cuales se iba a trabajar. En el instante en que los practicantes son presentados por el profesor, sienten confianza, respaldo y apoyo ante tantas miradas curiosas que los observan.

Posteriormente a la presentación de los practicantes a los estudiantes, los practicantes tienen la oportunidad de asistir y observar la primera clase del profesor titular, no como docente universitario, sino como profesor escolar. Este momento es fundamental en la práctica de los maestros en formación, ya que se observa el contraste entre orientar una clase de matemáticas en la universidad y otra en un espacio escolar. Ahí, se puede distinguir como se modifica la metodología, la expresión del profesor con los estudiantes, como se debe hablar, caminar, manejar el tablero, como se trata de ser amigo y profesor a la vez de los muchachos; estos gestos y actitudes observadas tratan de ser retomadas por parte de los practicantes. Sin embargo, los practicantes durante las siguientes clases que orientaron poco a poco desarrollaron su propia metodología, estrategias, conocieron a los estudiantes desde otro de punto de vista, diferente al que concebía el profesor y adoptaron algunas características del profesor titular. Así, parte de su formación como maestros, se ve influida y motivada por el profesor titular.

En el proceso de orientar las clases de matemáticas hubo dos momentos trascendentales para los practicantes. El primero, el acompañamiento del profesor titular en las clases orientadas por los practicantes; el segundo en que se decide dejar el salón a cargo del practicante.

Durante el acompañamiento del profesor se sentía respaldo del profesor a nivel de dominio de grupo y de preguntas inesperadas sobre las temáticas propuestas para desarrollar en clase. Aun así, se sentía un poco de presión de ser observado, de la opinión del profesor sobre el trabajo del practicante. Así mismo, en el instante es que el salón de clase es dejado a cargo del practicante, se siente una gran responsabilidad, ha llegado el momento de tomar el control solo, sin ayuda de nadie, de demostrar el nivel de cada quien para ser docente y decidir si se es competente para ejercer la carrera. Además, se siente con autonomía para actuar dentro del aula de clase.

Cabe resaltar que una de las características dadas dentro de la relación entre profesor titular-practicante fue la autonomía dentro del contexto escolar para la toma y ejecución de decisiones ceñidas al currículo de la institución educativa, no hubo una intervención, manipulación e influencia del profesor sobre los practicantes con respecto a la forma cómo se debía orientar las clases, o cómo evaluar a los estudiantes. Eso fue interesante, porque aportó a que el practicante tuviese libertad y conciencia de construir su ética profesional y de ser auto-crítico de sus clases, puesto que el practicante sería consciente bajo que límites debía actuar con respecto a sus estudiantes, por ejemplo, bajo que reglamentos evaluarlos.

1. 4 Modelo Pedagógico

Una de las motivaciones que se tuvo al plantear las estrategias que se iban a llevar a cabo para orientar las clases en el área de matemáticas, en la Institución Educativa Los Comuneros, era buscar la manera de cómo llegarles a los estudiantes por medio de actividades que fortalecieran sus conocimientos matemáticos, despertaran su interés y motivación para seguir indagando acerca de ellos y cómo tratar de relacionar con otros conceptos previos. También encontrar la forma de cómo romper ese paradigma impuesto por esos métodos tradicionales y obsoletos que han abierto brechas generacionales que dificultan la comprensión de los conocimientos matemáticos. Esto con el objetivo de promover la imaginación, la creatividad y educar la intuición matemática en los estudiantes, para que sean capaces de realizar conjeturas, llegar a deducciones, formalizar un nuevo conocimiento matemático y elaborar estrategias para aplicar adecuadamente los conceptos. Además, otro de los objetivos es darle a la matemática su función social, es decir que esté al servicio de todos, que a través de ella se tejan procesos que aporten al progreso de su comunidad. Así, integrando estos propósitos se busca fomentar un espíritu crítico en los estudiantes donde haya “*deseo de saber, iniciativa personal frente al conocimiento y frente a la realidad social*” (Malla Curricular Área de Matemáticas), objetivo propio de la Institución Educativa de Los Comuneros para formar estudiantes útiles a la sociedad.

Para alcanzar estos objetivos fue necesario buscar un modelo pedagógico que permitiera propiciar un ambiente que estimulara la construcción del conocimiento, por medio de experiencias en las cuales el estudiante interactuara con el saber desde sus bases para construirlo e integrarlo con otros conceptos previos para así estructurarlo, modificarlo y extenderlo a otros campos donde se pueda aplicar.

El modelo pedagógico que más se acomodaba a los objetivos propuestos era “*El Modelo Pedagógico Constructivista*” enfocado a la *pedagogía social constructivista*, ya que la enseñanza está encaminada en

Lograr que los alumnos aprendan a pensar, se auto enriquezcan en su interioridad con estructuras, esquemas y operaciones mentales internas que les permitan pensar, resolver, y decidir con éxito situaciones académicas y vivenciales, donde los aprendizajes deben ser significativos y requieren de la reflexión, comprensión y construcción de sentido. (Flórez. 1999, p.46)

Satisfaciendo los propósitos inicialmente planteados.

Sin embargo, para aplicar este modelo pedagógico era necesario tener en cuenta el contexto social que rodeaba a los estudiantes⁴, por eso las actividades se plantearon teniendo en cuenta la realidad social, situaciones cotidianas que los estudiantes podían vivir y se desarrollaron con materiales fáciles de conseguir.

Las actividades propuestas consistieron en que los estudiantes trataran de realizar procedimientos, cálculos y comparaciones sobre objetos matemáticos que tuvieran alguna relación en común. Luego, observaran todas las características en común que podían tener estos objetos entre sí; a través de ello comenzaron a deducir fenómenos que ocurrían sucesivamente en una situación determinada e identificar sus características. Así pues, iniciaron a plantear hipótesis, inferencias y encontrar propiedades de los objetos matemáticos que eran discutidas en clase, ya sea proponiéndoles un contraejemplo donde observaran que en algunos casos las generalizaciones fallaban y había que hacer restricciones; o realizándoles preguntas

⁴ Es necesario tener en cuenta el contexto social donde se lleva a cabo el proceso educativo para establecer un modelo pedagógico en una institución educativa ya que el currículo no se puede sistematizar para todos los contextos sociales ya que su función social se va desarrollando y construyendo en base al nivel y la realidad y pedagogía de cada sociedad. (Jimeno Sacristán, 1988, pp.14-22)

que los ponía a pensar sobre sus resultados. Finalmente, se realizaba una presentación formal del objeto.

De esta manera, se comenzó a desarrollar en los estudiantes una capacidad crítica argumentativa que justificará el porqué de las cosas dando espacio para el debate, la participación e interacción entre los estudiantes y el conocimiento. Además se dio lugar a una retroalimentación entre practicante-estudiantes ya que el intercambio de ideas permitía realizar un acompañamiento al estudiante por parte del practicante, para orientarlo, y evitar o corregir posibles interpretaciones inadecuadas sobre el saber que se reconstruía, sin dejar de lado la praxis durante este proceso.

1. 5 Sobre la teoría del aprendizaje.

Dentro de esta corriente *social-cognitiva* o *pedagogía social constructivista* del *Modelo Pedagógico constructivista* que se adoptó, se observó que los estudiantes no eran receptores pasivos de conocimientos, sino individuos activos en la construcción y en la adquisición del saber que se realizaba a través de aprendizajes significativos donde ejercían su pensamiento crítico y aplica los conocimientos a situaciones reales (García, 2013). Por ende, de las teorías del aprendizaje existentes que apoyaron el modelo pedagógico social constructivista fue la teoría del *Aprendizaje Significativo de Ausbel*, según la cual para aprender es necesario relacionar los nuevos aprendizajes a partir de las ideas previas del alumnado (Ballester, 2002) . Ésta llamó la atención de los practicantes, por tal razón se tomó en cuenta los planteamientos de esta teoría y bajo estos se intentó planear la intervención en el aula, ya que todas las actividades y situaciones eran potencialmente enriquecidas con materiales, y requerían por parte de los estudiantes un buen dominio de los conceptos previos, por ejemplo el de razón y proporcionalidad, además de algunos elementos de la geometría básica de los triángulos y sus propiedades, para luego sumergirlos en diversas situaciones que se relacionaban en alguna forma con estos y con los nuevos objetos matemáticos que se intentaba introducir. En especial el concepto de razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, tema importante para los practicantes pues de éste se despliega el objetivo de la investigación que se realizará en la segunda gran parte de este escrito.

Para redondear esta idea, es preciso mencionar que los estudiantes respondieron de una manera positiva a las intenciones de los practicantes, en el sentido de que realizaban con gran entusiasmo la actividades en clase y se intentaba realizar una confrontación entre el saber y el estudiante por medio de las conjeturas que ellos establecían, preguntas y proponiendo nuevos retos. De esta manera se trató de propiciar un ambiente adecuado para lograr un aprendizaje significativo, es decir:

Un aprendizaje a largo plazo que no sea fácilmente sometido al olvido, y que para lograrlo es necesario conectar las estrategias didácticas del profesor con las ideas previas del alumnado y presentar la información de manera coherente y con un significado, “construyendo” de manera sólida los conceptos, interconectando los unos con los otros en forma de red de conocimiento (Ballester, 2002).

También se tuvo en cuenta que los chicos estuviesen motivados en las clases, para propiciar la creatividad y el trabajo en equipo. Así mismo el entorno que se encontraba la institución educativa y por ende los alumnos de la misma.

1. 6 Evaluación

Con base en este modelo y teniendo en cuenta el Decreto 1290 que permite a los profesores establecer una evaluación integral, sujeta al sistema de evaluación de la institución donde se lleva a cabo el proceso educativo (Decreto 1290, 2009, art.4 y 5), se establecieron los siguientes criterios para realizar una evaluación de los estudiantes: El primero buscaba que los chicos fueran capaces de manejar y aplicar adecuadamente los conocimientos matemáticos en distintas situaciones que se les propusiera; el segundo que desarrollaran una capacidad crítica sobre los fenómenos que pueden ocurrir en el entorno escolar; y el tercero las actitudes y valores practicados con respecto a los individuos con los cuales interactúa durante la construcción del conocimiento.

Por medio de estos tres parámetros se realizó una evaluación continua, sistemática, formativa y reflexiva (Lineamiento Curriculares, 1998, p.84) donde no sólo se daba o justificaba una nota sobre los resultados obtenidos de los conocimientos enseñados, al contrario se trataba de valorar y reflexionar el aporte de éstos en la formación académica y social tanto del estudiante como del profesor. Esta evaluación fue imparcial, permitió observar las diferentes formas de pensar, comprender y proceder los estudiantes para construir respuestas; de igual forma ayudo a identificar a tiempo las malas interpretaciones que se pudiesen estar dando con respecto a un concepto y modificar las metodologías que afectarían el aprendizaje y la enseñanza, puesto que el proceso formativo no se puede fraccionar en diferentes actividades: enseñanza, aprendizaje y evaluación, como si ellas no hicieran parte de una misma unidad (Decreto1290, 2009. p.23).

La evaluación fue en gran parte cualitativa, cuyo fin radica en la intención de interpretar, con más precisión, el complejo proceso del aprendizaje significativo y el desarrollo de las competencias. Para lo cual, se requiere tener en cuenta, con prioridad, los comportamientos y los procedimientos, las respuestas consideradas como válidas por los diferentes sectores de la cultura. (Lineamientos Curriculares, 1998 p.84; Decreto 1290, 2009, p.24) Por ello se plantearon preguntas, talleres, exámenes escritos y actividades en clase para observar la capacidad interpretativa, argumentativa y propositiva del estudiante a través del saber-hacer, saber-saber y saber-ser que evidencian esto. Y es precisamente lo que se abordara a continuación.

Saber-hacer

En este componente de la evaluación están todas las actividades en clase y en casa, orientadas y dirigidas por los practicantes, en las cuales los estudiantes podían colaborar mutuamente y también consultar e indagar con ayuda de sus familiares. Entre ellas se podría mencionar trabajos manuales con cartulina, talleres, consultas en el cuaderno, entre otras. La idea era que los chicos presentaran estas actividades en los tiempos acordados, completas, con buen orden, en varias ocasiones de manera individual, pero en otras en grupo. Además algunas de las actividades eran socializadas por los mismos estudiantes para toda la clase, de esta manera se compartía los logros investigativos de cada uno de ellos con el resto de los participantes del trabajo del aula.

Saber-saber

Para evaluar a los estudiantes de manera individual y verificar en qué condiciones se encontraba el nivel de comprensión de los conocimientos explícitos y orientados por los practicantes, éstos planearon realizar dos evaluaciones escritas a los estudiantes, cada una contenía preguntas que no eran ajenas para los estudiantes y que los ponían a pensar e indagar en los procesos que se habían realizado en la construcción de los conocimientos evaluados, cabe resaltar que las preguntas de diferentes tipo, como por ejemplo de opción múltiple, de completar la respuesta, de identificar datos a partir de gráficas, esto con el fin de identificar los errores y

dificultades de los estudiantes y tomar decisiones a partir de los resultados de tales pruebas con el propósito de superarlos.

Saber-ser

Como ya se había mencionado, la intervención de la práctica pedagógica en la Institución, estaría caracterizada por una labor social, en el sentido de que los practicantes formarían parte del proceso formativo de los adolescentes, en pleno auge de su pubertad, y de todas las situaciones que esto conlleva. Para ello los estudiantes fueron evaluados de manera integral; lo que quiere decir que no sólo las competencias académicas deben contemplarse, sino también el desarrollo de las competencias personales y sociales con las que van construyendo sus relaciones con la naturaleza, con los otros y consigo mismo. (MEN, 2009, p. 62).

2 ¿Por qué se habla de una Educación Matemática?

En la actualidad las matemáticas se han posicionado como un fenómeno cultural que ha trascendido en las diferentes sociedades, gracias a las prácticas matemáticas que se realizan en cada comunidad para aprender, enseñar y aplicar esta ciencia, adquiriendo así un valor significativo y desempeñado un papel crucial en el desarrollo social, económico y cultural en cada contexto social, teniendo en cuenta sus distintas necesidades y objetivos. Parafraseando a Vasco (1994):

Las matemáticas realmente existentes se distinguen por ser procesos culturales de un contexto social; cumplen una función social permitiendo que las personas la practiquen en su vida cotidiana, dándole vida, utilidad e importancia. De ahí que se convierten en procesos culturales ya que las diversas formas de aplicar y utilizar las matemáticas van adquiriendo características, propias del contexto social de acuerdo a sus fines y necesidades, que se distinguen de otros contextos sociales. (Pp.1-3)

En este sentido, durante la práctica pedagógica se trabajó una disciplina teniendo en cuenta los aspectos culturales, sociales y económicos de la comunidad donde se ubicaba la Institución Educativa, para tratar de responder a algunas necesidades de la población; y hacer de las matemáticas una ciencia al alcance y servicio de todos, a través de la cual se propusieran soluciones a situaciones de la vida cotidiana. El objetivo era dar un enfoque social a las matemáticas; no se pretendía enseñar conocimientos matemáticos alejados del contexto social del estudiante, sin relación alguna con sus actividades diarias, ni que fueran aprendidos sin un significado para

él; se buscaba que para el chico estos conocimientos fueran significativos y encontrarán en ellos una aplicación y utilidad.

Así, parte del trabajo pedagógico consistió en realizar una indagación y una reflexión crítica frente a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, convirtiéndose en una fuente de investigación, por medio de la cual se identificó y analizó algunas maneras de interpretar, aplicar y utilizar las matemáticas por parte de los estudiantes, que de algún modo se generalizaron entre ellos y adquirieron ciertas características.

Por ende, desde la educación matemática se estudió las diferentes estrategias y técnicas empleadas en el aula de clase, generadas a partir de la necesidad de poder entender, explicar y manejar problemas que nacen en su propio contexto sociocultural. De igual manera, desde estas prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes, se realizó una reflexión crítica frente a la metodología utilizada para enseñar las matemáticas con el fin de ayudar a superar dificultades que se presentaban durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje. De acuerdo con Vasco (1994), esto nace con el fin de que quien enseñe no se limite a analizar una serie de eventualidades o rasgos característicos presentados en la clase, sino también suscitar nuevos procesos educativos que ayuden a mejorar y transformar la manera como se enseña y aprende la matemática.

Luego, en este camino el practicante pasa de ser pedagogo a investigador en una doble función que se complementan y permiten apostarle a una práctica social, que aborda tres elementos:

LAS MATEMÁTICAS como ciencia exacta y razonable; el saber enseñar bien las matemáticas; y la reflexión de saber y conocer cuál es la función social de LAS MATEMÁTICAS en la sociedad para hacerla más sociable y humana, que no sea sólo abstracta, temerosa y para unos pocos. (Vasco, 1994, p.2)

De ahí que las matemáticas más que una área a enseñar, hacen parte de los procesos culturales que se desarrollan en la comunidad por las formas cómo se aprehende y emplea ésta; adquiriendo un rol, ligado a los fines y necesidades del entorno social, y hace de ellas, unas matemáticas propias del contexto donde se llevó a cabo la práctica, distinguiéndose de otras prácticas matemáticas en diferentes espacios culturales.

2. 1 Antecedentes

En la búsqueda de investigaciones sobre la enseñanza de la trigonometría en educación secundaria, principalmente en la internet, se encontraron dos publicaciones, las cuales están relacionadas con la investigación de este informe, pues sus planteamientos y objetivos están fuertemente ligados, por ende se tomarán como antecedentes del mismo.

La primera de ellas es una propuesta didáctica, “Geometría, medición y razones trigonométricas” de Cedillo, Cruz, Vega y Cambray (2006) que se incluyó en el módulo 9 del proyecto “Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe”, de la serie *Enseñanza de las matemáticas*. En esta propuesta se busca que los alumnos reconozcan que no hay variación en las razones trigonométricas de dos lados correspondientes a dos triángulos rectángulos semejantes. A su vez, intentan que los estudiantes empleen adecuadamente el teorema de Pitágoras para calcular longitudes de los lados de triángulos rectángulos; y se familiaricen con los términos seno, coseno y tangente al referirse a las razones trigonométricas respectivas de los lados de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos.

La segunda investigación es “La historia de las matemáticas en la enseñanza de la trigonometría. El teorema de Pitágoras” Massa, Romero y Casals (2007). En esta publicación se propone que la historia de las matemáticas sea una herramienta para

la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría. En una de sus conclusiones se menciona que *“el uso de casos históricos es uno de los recursos que se puede utilizar para mejorar la transmisión y adquisición de los contenidos matemáticos y también para actuar de revulsivo en aquellos casos donde el alumno no esté suficientemente motivado”* (Massa y otros, 2007, p. 8).

2. 2 Referentes Teóricos

2.2.1. Desde lo Matemático

Escuchar a los estudiantes preguntarse *¿para qué las matemáticas?* Es común en un aula de clase y resulta aún difícil ver su aplicación en su entorno social cuando no hay una contextualización del conocimiento sobre una situación cotidiana de sus vidas y desconocen completamente la historia de esos conocimientos. En el caso de la trigonometría, una rama de las matemáticas, no es la excepción.

La trigonometría es una rama de las matemáticas, cuyo origen se remonta a Egipto cuando se desarrolla estrechamente con la astronomía, y literalmente significa *“la medida del triángulo”* que relaciona sus lados y ángulos (E.M., 1995, p.68). Ésta aparece a menudo en problemas cotidianos, por ejemplo, se puede “hacer” trigonometría al estudiar la forma geométrica que describe la figura de una espiga de trigo donde sus hojas linear-lanceolada (alargadas, rectas y terminadas en punta) guardan proporción y semejanza; o al hallar la altura de una persona con la proyección de su sombra y el suelo. Su empleo permitió calcular áreas, distancias y trayectorias; determinar el tiempo (la hora); dar las bases para establecer las medidas precisas para construir puentes o edificaciones y aportó al perfeccionamiento de la navegación. Además, contribuyó en la mecánica, electricidad, termodinámica e investigación atómica; entre otras cosas (Hernández, 2013, pp.3-10).

Así, el desarrollo de la trigonometría ha apoyado el avance tecnológico de la sociedad, empleándose en muchos campos del conocimiento, tanto teóricos como prácticos, e interviene en toda clase de investigaciones geométricas y algebraicas en

las cuales aparecen las llamadas funciones trigonométricas, de gran aplicación. (Hernández, 2013, p.4).

2.2.1.1 Razones Trigonómicas

En este camino, previo a la aparición de las funciones trigonométricas, emergieron las razones trigonométricas, establecidas a partir de la relación de los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Éstas se definen comúnmente como el *cociente* entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos. Para acceder a la conceptualización de ellas fue necesario de algunos conocimientos previos que a continuación se exponen.

2.2.1.2 Semejanza

En lenguaje cotidiano, cuando se habla de semejanza, casi siempre se hace referencia al concepto más general de *parecido* entre dos entidades independientes: color “parecido”, tamaño “parecido”, forma “parecida”, etcétera; es decir, semejanza es aquella cualidad común que se puede encontrar entre dos objetos o personas.

Intuitivamente, la primera idea que se teje sobre el concepto de “semejanza” es de carácter visual. Así, en lenguaje ordinario, se puede decir que dos figuras son semejantes si “tienen el mismo aspecto” pero no necesariamente el mismo tamaño, o también si una de ellas es un modelo a escala de la otra. Retomando a Castro y Céspedes quienes citan a Godino (2003), se puede mencionar la noción informal de figuras semejantes como las que tienen la misma forma y que puede ser precisada utilizando las transformaciones del plano que se conocen como homotecias y semejanzas. De esta manera, se tiene un primer acercamiento a este concepto “semejanza”.

Formalmente, para que dos polígonos sean semejantes basta con cumplir dos condiciones, que los lados análogos sean proporcionales y sus ángulos correspondientes congruentes. Sin embargo, en este trabajo interesa definir la semejanza a partir de la figura geométrica “*triángulo*”. Por lo tanto, se considerará la definición de Moisey Downs (1986, p.327), el estudio de la semejanza esta dado a partir de una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia se llama una *semejanza* y se dice que los triángulos son semejantes.

La definición formal de semejanza, relaciona aspectos tanto geométricos como algebraicos. Para entender el concepto de semejanza es necesario conocer aspectos relacionados con razón, proporcionalidad numérica, magnitud y cantidad de medida. Por lo tanto, se profundizará un poco en estos conceptos básicos.

2.2.1.3 Razón

Según Godino, Batanero y Roa (2002, p.421) entre los usos de las fracciones figura el de razón, entendida, como la comparación entre una parte y otra parte. El término “razón” no siempre es sinónimo de “fracción”. Las fracciones son “cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero”; mientras que una *razón* es “*un par ordenado de cantidades de magnitudes*”. Cada una de esas cantidades viene expresada mediante un número real y una unidad de medida.

A diferencia de las fracciones, la razón permite comparar entre sí magnitudes que se miden con unidades diferentes y su segunda componente puede ser cero; además no necesariamente es un número racional, por eso es de cuidado interpretarla como un *cociente* de enteros (Godino y otros, 2002, p.421).

Las razones se refieran a cantidades de magnitudes medibles cada una con sus respectivas unidades. Esto implica hablar de magnitud y cantidad de magnitud.

2.2.1.4 Magnitudes y Cantidad de magnitud

Siguiendo a Godino y otros (2002, p.615)

Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad, la luminosidad,..." y la

Cantidad es el aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de la misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar. (Diccionario de M. Moliner).

En otras palabras, se designa como *magnitud* a aquellos atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, etc.), o también de manera discreta ("el número de personas"). Y se llama *cantidad* al valor numérico que toman dichas variables, es decir, al valor que toma la magnitud en un objeto particular (el largo de esta mesa es 1'3 m); pero también se habla de una longitud o distancia entre dos puntos de 1'3 m. En este caso la cantidad de longitud (o simplemente, la longitud) de 1'3 m hace referencia a cualquier objeto de la clase de todos los objetos que se pueden superponer exactamente con el largo de nuestra mesa, al menos imaginariamente. (Godino, y otros, 2002, pág.616)

2.2.1.5 Proporcionalidad

En matemática el concepto de semejanza está muy ligado al concepto de proporcionalidad; por ello se dice que dos objetos son semejantes si "tienen" una *proporción* entre ellos. El estudio de la semejanza se realiza a partir de la consideración de la proporcionalidad entre segmentos, "la razón geométrica entre dos segmentos representa el cociente entre su longitud" (Biblioteca Temática Escolar, 2007). Así, cuando dos figuras son semejantes, la razón entre los lados homólogos es una constante que se denomina razón de proporcionalidad.

La proporcionalidad es una noción relacional que se utiliza para comparar magnitudes medibles de igual o distinto orden, expresadas a través de cantidades que tienen unidades de medida equivalente, varían conjuntamente y están relacionadas por una relación constante, llamada razón constante de proporcionalidad dada en forma de cociente.(Diez, 2004, p.95; Sánchez, 2011, pp.44-57)

En este mismo sentido, para introducir el concepto de semejanza fue necesario definir las *series proporcionales*⁵:

Dos series de números, con el mismo número de elementos, son proporcionales entre sí, si existe un número real fijo **k**, llamado razón de proporcionalidad, que permite escribir cada valor de la segunda serie como producto por **k** de los valores correspondiente de la primera serie. (Godino y otros, 2002, p.421).

Esto es,

*Dadas dos ternas de números positivos **a, b, c, ...y p, q, r, ...***

Si

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \dots$$

*Entonces las ternas **a, b, c, ...y p, q, r, ...** son proporcionales.* (Moisey Downs, 1986, p.327).

Cuando en las ternas consideradas sólo intervienen dos pares de números que se corresponden se dice que se establece una *proporción* (Godino & Batanero).

⁵ Maurin y Johsua (1993)

2.2.2 Desde La Educación Matemática

2.2.2.1 La Teoría de Las Situaciones Didácticas

Para los fines de este informe de práctica, dentro de la parte investigativa, se considera que la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau da un modelo que permite aplicar ideas y principios basados en el modelo pedagógico constructivista, y realizar una investigación en educación matemática que incluya recursos y medios de construcción y validación de conocimientos significativos.

A continuación, se hace una breve presentación de los fundamentos, principios y métodos de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau la cual constituye el principal soporte teórico de este trabajo.

2.2.2.2 Situaciones Didácticas

En palabras de Sánchez y Zubieta (1995), citando a Brousseau, se entiende por situaciones didácticas como:

El conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno o entre un grupo de alumnos, cierto medio (que comprende herramientas y objetos) y un sistema educativo (el profesor) con objeto de que los alumnos apropien un saber construido o un en vías de construcción. (p.42)

Por medio, de las situaciones didácticas se intenta propiciar un ambiente adecuado para la construcción de los conceptos matemáticos, a través de una modelización teórica previa con el fin de que los estudiantes construyan nuevos conocimientos, a partir de saberes previos; de tal manera que esos objetos matemáticos sean apropiados por los chicos para extenderlos a diferentes contextos y utilizarlos en la

solución de otros tipos de problemas matemáticos. Para ello, se requiere elegir o elaborar un problema o actividad adecuada que estimule el desarrollo de una "Situación Didáctica" en el aula de clase; este problema o actividad deberá despertar el interés y la motivación en el estudiante para que se apropie de él e intente resolverlo desde sus conocimientos previos; esto es lo que llama Brousseau una "*devolución del problema*".

Además de un problema o actividad inicial que estimula la "Situación Didáctica", se encuentran otros factores que surgen de las diferentes interacciones entre profesor-alumno-saber dadas dentro de un contrato didáctico establecido en el aula de clase, los cuales ayudan a propiciar el entorno donde se da la "Situación Didáctica", estas son:

Las situaciones didácticas, son las fases en las que interviene el profesor dentro de la actividad para orientar el proceso de construcción de un conocimiento, y surgen los elementos que el profesor esperaba lograr mediante la actividad.

Las situaciones a-didácticas, son las fases en las cuales el profesor deliberadamente renuncia a intervenir en la actividad que propone, y encuentra elementos no esperados con la actividad.

Obstáculos didácticos, es la presencia de "Conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que fuera de ese dominio puede ser fuente de errores y dificultades" (Chevallard, 1998, p.224). De manera simplificada puede interpretarse como un conocimiento que dificulta la asimilación de otro conocimiento.

La "*situación didáctica*" se desarrolla en el aula a través de las siguientes etapas:

"*Devolución del problema*", el profesor diseña un problema "adecuado" y consigue que los estudiantes lo apropien y lo vuelvan suyo.

Fase didáctica de acción, los estudiantes realizan acciones cuyo propósito es resolver el problema, contestar la pregunta o realizar la actividad interesante que le permite al niño conocer y comprender.

Fase didáctica de formulación, los estudiantes lanzan conjeturas, realizando representaciones de sus hallazgos, descubrimientos o construcciones, a través de su propio lenguaje.

Fase didáctica de validación, los estudiantes argumentan y confrontan la validez de sus formulaciones.

Fase didáctica de institucionalización, el profesor relaciona el conocimiento construido en el aula con el saber construido científicamente, poniendo en contexto las representaciones individuales de los estudiantes con respecto a las representaciones convencionales admitidas.

2.2.2.3 Contrato Didáctico

En el tratamiento de las situaciones didácticas, Brousseau agrega a su estudio el concepto de *Contrato Didáctico* como un componente social, el cual se aborda a continuación:

Conjunto de comportamientos (específicos) del maestro que son esperados por el alumno, y conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro, y que regulan el funcionamiento de la clase y las relaciones maestro-alumno-saber, definiendo así los roles de cada uno y la repartición de tareas: ¿Quién puede hacer qué? ¿Cuáles son los fines y los objetivos?... (San Martín & Jiménez) (p.26)

Las interacciones que se gestan por medio del contrato didáctico favorecen el espacio donde se desenvuelven esas “Situaciones Didácticas” ya que ponen de manifiesto las maneras como estudiante-profesor-saber interactúan entre sí, y da cuenta de las herramientas necesarias para resolver un problema, pregunta o actividad que estimulan el inicio de una “Situación Didáctica” en pro de la construcción de nuevos conocimientos significativos.

En seguida, se presentan algunas ideas de Chevallard que relacionan aspectos didácticos y cognoscitivos frente a la manera de enseñar y presentar un objeto o una actividad ligada a un conocimiento matemático, en torno al cual gira una situación didáctica.

2.2.2.4 Trasposición Didáctica

De acuerdo con Chevallard, La Transposición Didáctica es el “*Conjunto de las transformaciones adaptativas que sufre una obra para ser enseñada*” (Chevallard, 1998, p.136). Ésta pasa por tres etapas:

La primera etapa corresponde al *trabajo del matemático* donde éste debe transformar el saber matemático en un saber comunicable para que otras personas puedan acceder a él y comprenderlo. Este saber tiene que responder a ciertas exigencias establecidas por la comunidad matemática.

La segunda etapa corresponde al *trabajo escolar* donde se transforma la obra matemática para fines educativos, en este caso el saber se adapta a un contexto didáctico en concreto.

La tercera etapa corresponde al *trabajo del profesor* que se refiere al saber del profesor, la manera cómo él lo interpreta personalmente y lo expone en la clase.

2.3 La pregunta de investigación

En el proceso pedagógico, la fundamentación teórica adquirida durante la formación pedagógica y la experiencia como estudiante por parte de quienes realizan el presente trabajo, ha permitido reflexionar frente a la manera cómo muchos de los conocimientos matemáticos son aprendidos, ya sea de forma “memorística”, mecánica o por la repetición de un algoritmo que no dan cuenta de los procesos que posibilitan la validación, comprensión y aplicación de un conocimiento matemático; esta situación fue un ente motivador que llevó a los autores de este trabajo a indagar acerca de la forma cómo los estudiantes interpretan las razones trigonométricas desde la semejanza de triángulos, por medio de actividades fundamentadas en ideas constructivistas que permitieran aprendizajes significativos.

Con base a lo anterior se intenta dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo los estudiantes logran interpretar y determinar las razones trigonométricas de los ángulos de un triángulo rectángulo?

Así pues, basados en la propuesta de enseñanza de las matemáticas que se trabaja en la institución educativa donde se llevó a cabo la práctica, fundamentada desde el modelo pedagógico constructivista, se implementaron dos actividades que aportaban significativamente en el desarrollo del tema de las razones trigonométricas, desde la semejanza de triángulos, establecido en el plan de estudios en el área de matemáticas.

Dichas actividades se realizaron de forma sistemática con el objetivo de realizar una investigación desde la formación y la experiencia pedagógica, teniendo en cuenta la

información obtenida de los trabajos de los estudiantes y las reflexiones que se habían hecho frente a las respuestas y polifonías⁶ que se gestaron en el aula de clase.

2.3.1 Una investigación de intervención

La metodología que se utilizó para hacer esta investigación fue describir las actividades que permitieron introducir el tema de las razones trigonométricas desde la semejanza de triángulos. A partir de ellas se reunió y sintetizó cada una de las evidencias registradas en los diarios de campos de los practicantes, en los cuadernos escaneados, en los trabajos elaborados y en las evaluaciones de los estudiantes. Posteriormente, se analizó cada una de las respuestas, expresiones o representaciones que habían hecho los estudiantes para intentar explicar desde La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) por qué se había generado ciertas eventualidades en torno a dicho conocimiento.

Por otro lado, este trabajo investigativo fue de carácter de intervención, es decir, fue una investigación que se dio desde, y en la práctica. De tal manera que el practicante no se limitó a registrar y analizar lo que sucedía en el aula de clase, también intervino en los procesos que se desarrollaban dentro de este espacio, para favorecer la enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos en cuestión.

Según Cochran – Smith (2003)

Asumir una investigación como forma de ser profesional significa que los profesores y futuros profesores trabajan en comunidades de investigación para generar conocimiento local, dar perspectiva y teorizar su práctica, interpretar e interrogar una teoría y la investigación de los demás. Fundamental en esta noción es la idea de que

⁶ Las polifonías entendidas como los gestos, actitudes, expresiones e ideas que circularon en el aula de clase.

el trabajo en comunidades de investigación es social y político, es decir, implica problematizar las actuales formas de organización de la escuela; las formas como se construye el conocimiento, evalúa y usa, y los papeles individuales y colectivos de los profesores para promover un cambio. (p.8)

Por ende, esta investigación de intervención, tuvo como objetivo no sólo determinar los factores que influían en la comprensión de un concepto matemático, sino afrontar aquellas dificultades que afectaban la adecuada interpretación y uso del conocimiento matemático. Luego, desde la parte pedagógica y matemática tratar de proporcionar estrategias que favorecieran el proceso de aprendizaje y de enseñanza, ayudarán a reforzar conocimientos y superar obstáculos y errores para que los estudiantes tengan herramientas para enfrentar nuevas situaciones.

2.4 Descripción de la población

El trabajo pedagógico se desarrolló en la Institución educativa “Los Comuneros” ubicada en la comuna 6 del municipio de Popayán; es una institución de carácter público, calendario A, que atiende estudiantes provenientes de barrios de la misma comuna, algunos de ellos en condición de desplazamiento.

Los estudiantes se ubican mayoritariamente en los estratos socioeconómicos 1 y 2.

La institución educativa tiene un énfasis en salud y desarrolla un proyecto de acuerdos de convivencia. En tal sentido el plan de estudio contempla el aporte desde cada una de las áreas al énfasis y a los acuerdos de convivencia y ha definido en su Proyecto Educativo Institucional como modelo pedagógico la Pedagogía Dialogante.

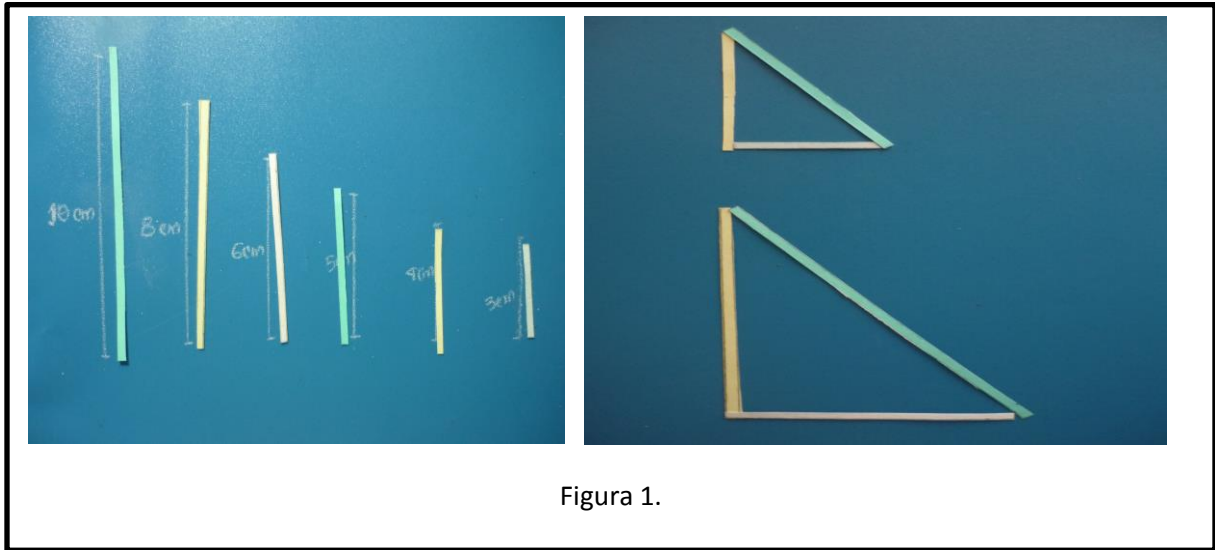
El plan de estudios en el área de matemáticas ha sido construido tomando como base los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas emanados por el MEN. Como estrategia metodológica se tiene la solución y formulación de problemas. (Sánchez, 2011, p.85)

2.5 Análisis de los resultados

En esta sección del informe se presenta los resultados principales que se obtuvieron a partir de la implementación de dos actividades a los estudiantes, las cuales serán útiles para intentar proporcionar aproximaciones a la pregunta problema de este trabajo pedagógico investigativo. La *Actividad 1* sirve como introducción al concepto de *la semejanza de triángulos*, la cual aporta conocimientos previos para un adecuado desarrollo de la *Actividad 2* que consiste en una introducción a las *razones trigonométricas* con materiales concretos; ésta será la fuente principal de recursos e información para este análisis, desde la TSD como se había mencionado anteriormente.

2.5.1 Análisis de la Actividad 1.

En este apartado se entregó a los estudiantes tiras de papel con medidas diferentes y se pidió que formaran dos triángulos, uno cuyos lados tuvieran longitudes de 3, 4 y 5cm; y otro de 6, 8 y 10cm. El proceso anterior se repitió con tiras de 4, 4 y 2 cm; y de 4, 8, y 8cm. Por último con tres tiras de 3 cm y con tres tiras de 12 cm. como se observa en la *figura 1*. El objetivo era que compararan las figuras formadas y comentaran lo observado; de esta manera se pretendió acercar a los niños a la noción de *Proporcionalidad y Semejanza*, y que trataran de deducir la definición de estos conceptos matemáticos.



Durante el desarrollo de esta actividad se identificaron las siguientes etapas que dieron paso a la iniciación de una de las “Situaciones Didácticas” (SD):

Fase de acción

Los estudiantes en esta actividad procedieron a construir de manera fluida las representaciones geométricas de los triángulos que se les solicitaron en las instrucciones dadas, en donde compararon dichas figuras en medio de discusiones con sus compañeros.

Fase de formulación

Al preguntar a los estudiantes sobre qué observaban con respecto a las figuras formadas, la respuesta común fue que *“un triángulo tenía el doble de tamaño que el otro”*; quizás la afirmación estuvo dada porque notaron que la longitud de un lado del triángulo A, era el doble de la longitud de un lado del triángulo B con el cual tenía correspondencia, de igual manera sucedió para los otros lados; o también fue deducida por lo que la observación les permitió intuir, diciendo así que *“una figura*

tenía el doble tamaño de la otra forma”, es decir, al observar que los dos triángulos tenían la misma forma, pero uno a escala más grande que el otro, concluyeron que “uno tenía el doble tamaño del otro”, sin verificar las medidas de los lados, sólo por lo que la intuición y las sensaciones le permitían conjeturar.

Por ejemplo, en la *figura 2*. se puede evidenciar cómo se concibe el concepto de semejanza de dos triángulos, aquí se ha dicho que los triángulo ΔIHJ y ΔIKL son semejantes y se ha dado el valor de los lados del ΔIKL para hallar las razones trigonométricas del ángulo $\sphericalangle H$. Para resolver esto el estudiante le da valores a los lados del ΔIHJ teniendo en cuenta que los triángulos son semejantes; y cómo se observa la medida de esos lados es el doble de la medida de los lados correspondientes al ΔIKL .

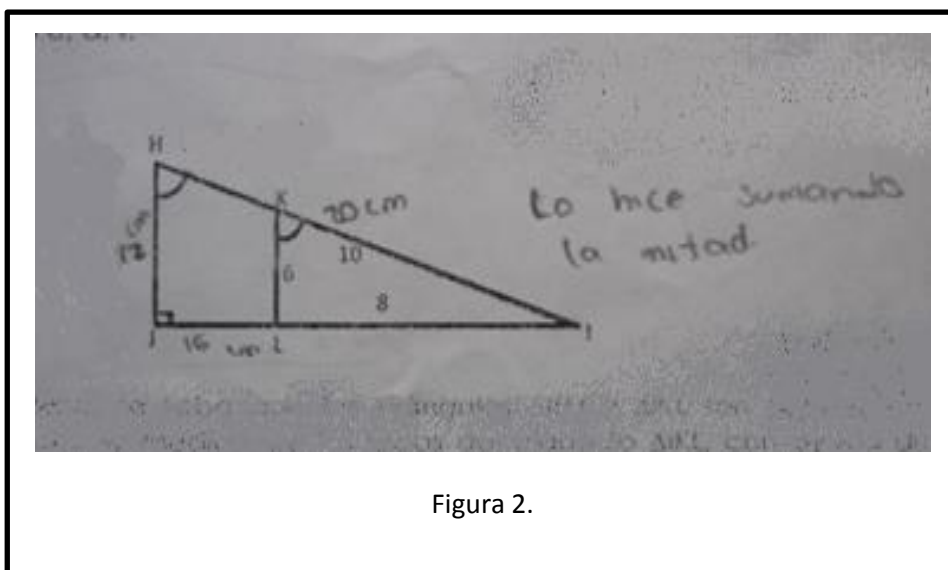


Figura 2.

Fase de validación

Una de las afirmaciones que llamó la atención fue de un niño que dijo: “*son triángulos proporcionales, porque un triángulo es el doble del otro*”, ya que se observa cómo interpreta el chico el concepto de la proporcionalidad, él entiende que si dos figuras tienen igual forma, donde una es el doble de tamaño que la otra, entonces las figuras son proporcionales, tratando de dar una aproximación al concepto de semejanza de triángulos, que directamente tiene que ver con la proporcionalidad, tal vez porque este chico ya había hecho un contacto previo con este concepto matemático.

Así se observó que el concepto de proporcionalidad fue entendido por los estudiantes como “una figura es proporcional a otra, si una es el doble de la otra”. Esto se dio para un caso particular, pero implícitamente los estudiantes estaban desarrollando su propia interpretación del concepto, ya que estaban observando que al comparar los lados correspondientes, había una constante resultante: *La constante de proporcionalidad*.

Esta situación condujo a desarrollar una primera idea intuitiva en los estudiantes del concepto de semejanza. Los estudiantes se dejaron guiar por lo visual, para ellos una figura era semejante a otra si se parecían, o si una era el doble de otra, relacionando el concepto de proporcionalidad con el de la semejanza. Posteriormente encontraron otras propiedades matemáticas que caracterizaban a la semejanza de figuras. Sin embargo, en la elaboración de figuras semejantes propuestas, no tenían en cuenta el concepto formal de semejanza, y dibujaban figuras que gráficamente fueran iguales; esto condujo que al realizar ciertas comparaciones entre ángulos y lados de dos triángulos correspondientes, obtuvieran ciertos errores.

Por ende se entró a una fase de institucionalización sobre el concepto de proporcionalidad y semejanza.

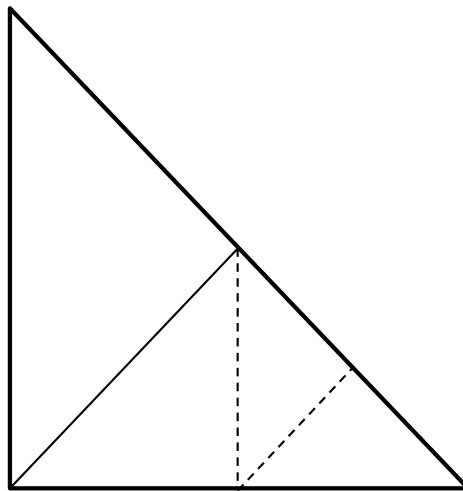
Fase de institucionalización

Finalmente, se confrontan las respuestas dadas por los estudiantes correspondientes a la *Actividad 1* para tratar de reflexionar y formalizar el concepto matemático de proporcionalidad y semejanza de triángulos, ya no para un caso particular, sino en general.

2.5.2 Análisis de la actividad 2.

En seguida, se presentarán las instrucciones que se orientaron a los estudiantes para desarrollar la *Actividad 2*:

En un octavo de cartulina, dibuja un triángulo rectángulo isósceles, procurando dibujar un triángulo grande. Ahora, en el triángulo que dibujaste traza un segmento perpendicular a la hipotenusa y que además pase por el punto que une a los dos catetos (Ver figura)



Repite el paso anterior con los nuevos triángulos formados, hasta obtener 4 triángulos. Con ayuda de una tijera, recorta los triángulos formados. Asigna un nombre a cada triángulo de la siguiente manera: organiza los triángulos de mayor a menor tamaño, y al mayor llámalo T1, al que le sigue T2, al que le sigue T3. Mide la longitud de los lados de cada triángulo, toma nota de tus resultados y completa la siguiente tabla:

a1=___ cm	b1=___ cm	c1=___ cm
a2=___ cm	b2=___ cm	c2=___ cm
a3=___ cm	b3=___ cm	c3=___ cm

Donde a_1, b_1, c_1 son los lados del triángulo T_1 , a_2, b_2, c_2 son los lados del triángulo T_2 y a_3, b_3, c_3 son los lados del triángulo T_3 .

Ahora con los datos anteriores determina si los triángulos T_1 con T_2 son semejantes, y también si lo son los triángulos T_2 con T_3 es decir si:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3}$$

Y la medida de sus ángulos correspondientes es igual.

También asigna un nombre a los ángulos de menor amplitud de cada triángulo. ¿Será que los triángulos T_1 y T_3 son semejantes? ¡Compruébalo! Con base a la explicación, ahora llena la siguiente tabla:

	$a_1/c_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$a_2/c_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$a_3/c_3 = \underline{\hspace{1cm}}$
	$b_1/c_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$b_2/c_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$b_3/c_3 = \underline{\hspace{1cm}}$
	$a_1/b_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$a_2/b_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$a_3/b_3 = \underline{\hspace{1cm}}$

Devolución del problema

En esta actividad hubo, en general, una apropiación por parte de los estudiantes que se evidenció⁷ en el interés y motivación para realizar cada uno de los puntos propuestos en la actividad, sin importarles el grado de éxito que obtuvieran al realizar dichos puntos. Así se logró sumergir a los estudiantes en una situación que propició la construcción gradual del conocimiento matemático en juego.

Fase de acción

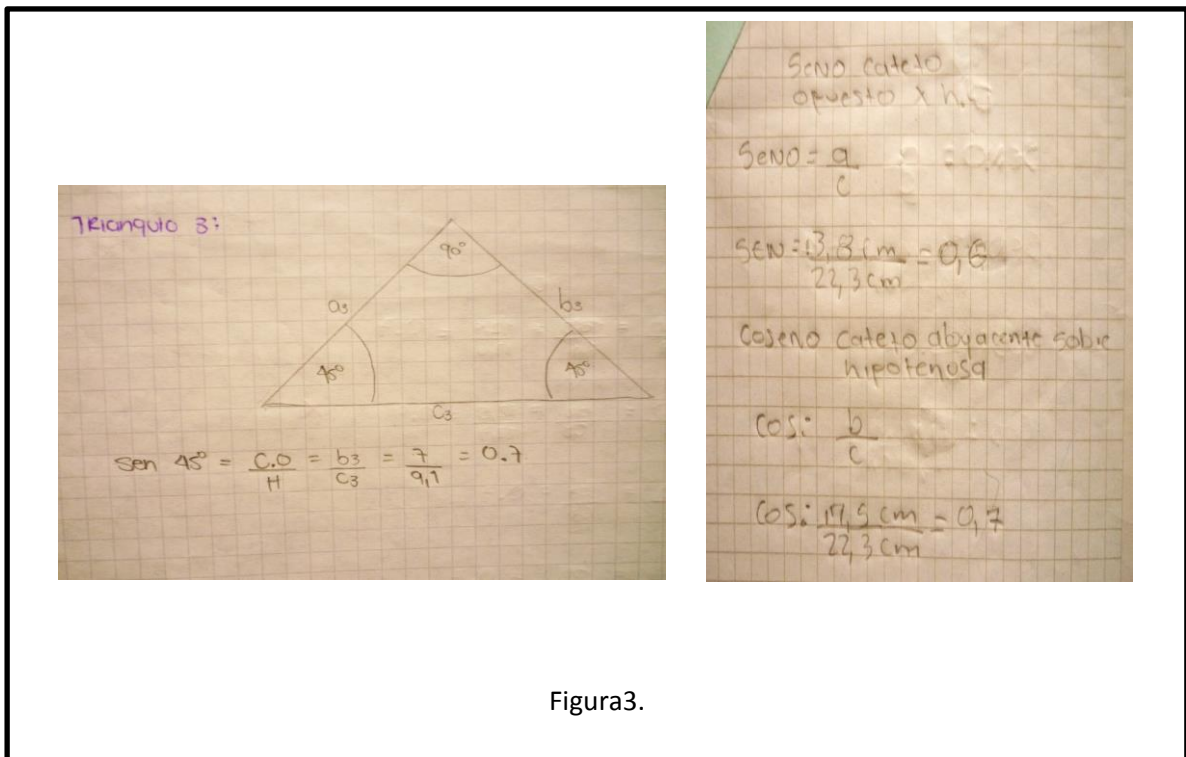
Los estudiantes procedieron a realizar las construcciones de las figuras geométricas con la cartulina y demás materiales. En el marco del desarrollo de las tareas anteriores se destacaron los siguientes aspectos:

- En los trabajos se observó que sólo unos pocos estudiantes utilizan las unidades de medida. Por ejemplo, no emplean las unidades de medida para

⁷ Ver Anexo 6.

los ángulos o para las longitudes de los segmentos formados por los lados de los triángulos. Además, había estudiantes que no asignaban una letra para distinguir los ángulos del triángulo a los cuales se les estaba encontrando sus razones trigonométricas. (Ver figura 3.)

Además se observó que algunos niños no tomaban como patrón de inicio de medida el cero (0), sino el uno (1).



- Un aspecto que llamó la atención fue la confusión que se generó en los estudiantes al distinguir el cateto opuesto del cateto adyacente correspondiente al ángulo al cual se les pedía calcular el valor de su razón trigonométrica. Algunos estudiantes calcularon el coseno en vez del seno de dicho ángulo, ya que por la diferente orientación en que se encontraban los ángulos, no tenían en cuenta que los catetos respectivos también cambiaban de ubicación; pensaban que se ubicarían en el mismo lugar.

En la figura 4. Se puede observar un ejemplo de ello donde se pide hallar las razones trigonométricas del $\sphericalangle E$. Como se ve el estudiante ubica incorrectamente el cateto opuesto correspondiente al $\sphericalangle E$.

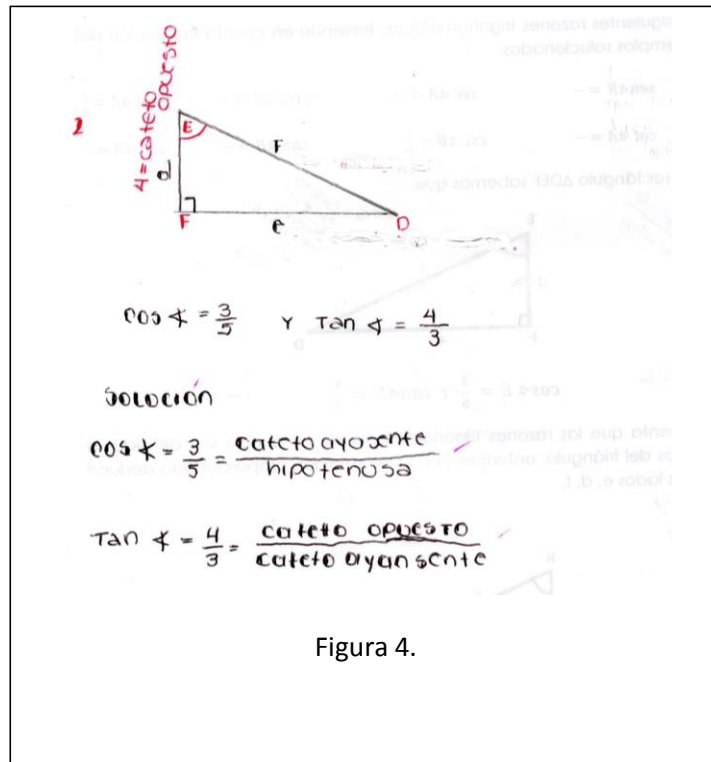


Figura 4.

- Existen procesos inadecuados de medición, igualmente miden mal los ángulos con el transportador, los miden en sentido opuesto o no sabían hacer uso de esta herramienta.
- Para realizar el trabajo de las razones trigonométricas para el ángulo de 45° , era necesario graficar la figura de un triángulo rectángulo isósceles, sin embargo algunos estudiantes no tuvieron en cuenta la definición de un triángulo isósceles para graficar su figura y esto influyó en el cálculo de las razones trigonométricas correspondientes. Por otro lado, en unos trabajos

tuvieron en cuenta la definición, así que hubo figuras que se aproximaron a la definición de triángulos isósceles; se debe tener en cuenta que las medidas en la realidad no son exactas, por eso en los valores había un error de aproximación pequeño. (Ver figura 5.)

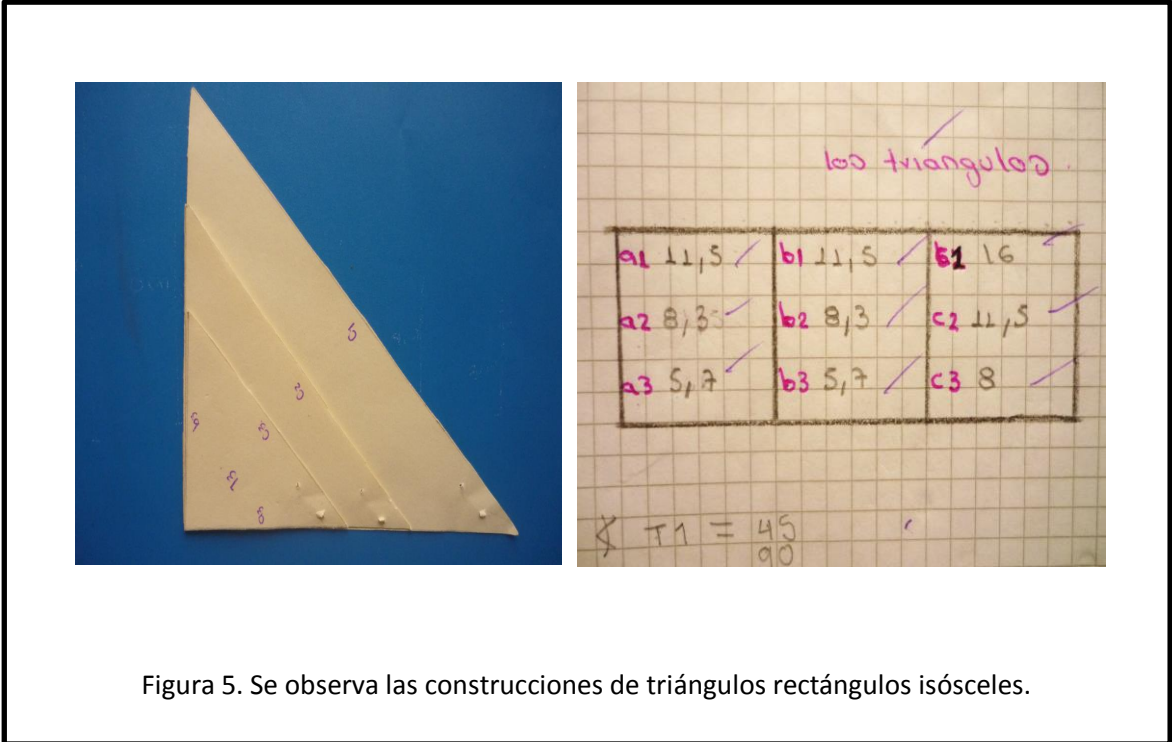


Figura 5. Se observa las construcciones de triángulos rectángulos isósceles.

- Al comparar los lados de los triángulos semejantes empleando el concepto de razón y proporcionalidad, tenían dificultades algebraicas ya que despejaban las variables correspondientes a la razones inadecuadamente; además olvidaban que los ángulos correspondientes de los triángulos debían ser iguales. En esta medida no utilizaban adecuadamente la definición de semejanza de triángulos para determinar las razones trigonométricas de los triángulos.
- Un estudiante en particular, para calcular la razón trigonométrica del seno del ángulo de 90° no admite que el cateto opuesto sea igual a la hipotenusa; por ello la razón trigonométrica del seno de 90° no es 1. Es de notar que una

buena ubicación de los catetos en un triángulo, incide en el adecuado cálculo de las razones trigonométricas. Esto se observa en la figura 6, el estudiante ha intentado calcular el valor del $\text{sen} \angle A$, por definición esta razón trigonométrica es $\text{sen} \angle A = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$ Sin embargo, el estudiante determina que el cateto opuesto del ángulo A es el *lado a* y no considera que el cateto opuesto sea igual a la hipotenusa, por ello el valor de la razón trigonométrica es $\text{sen} \angle A = 0.7$, y no $\text{sen} \angle A = 1$.

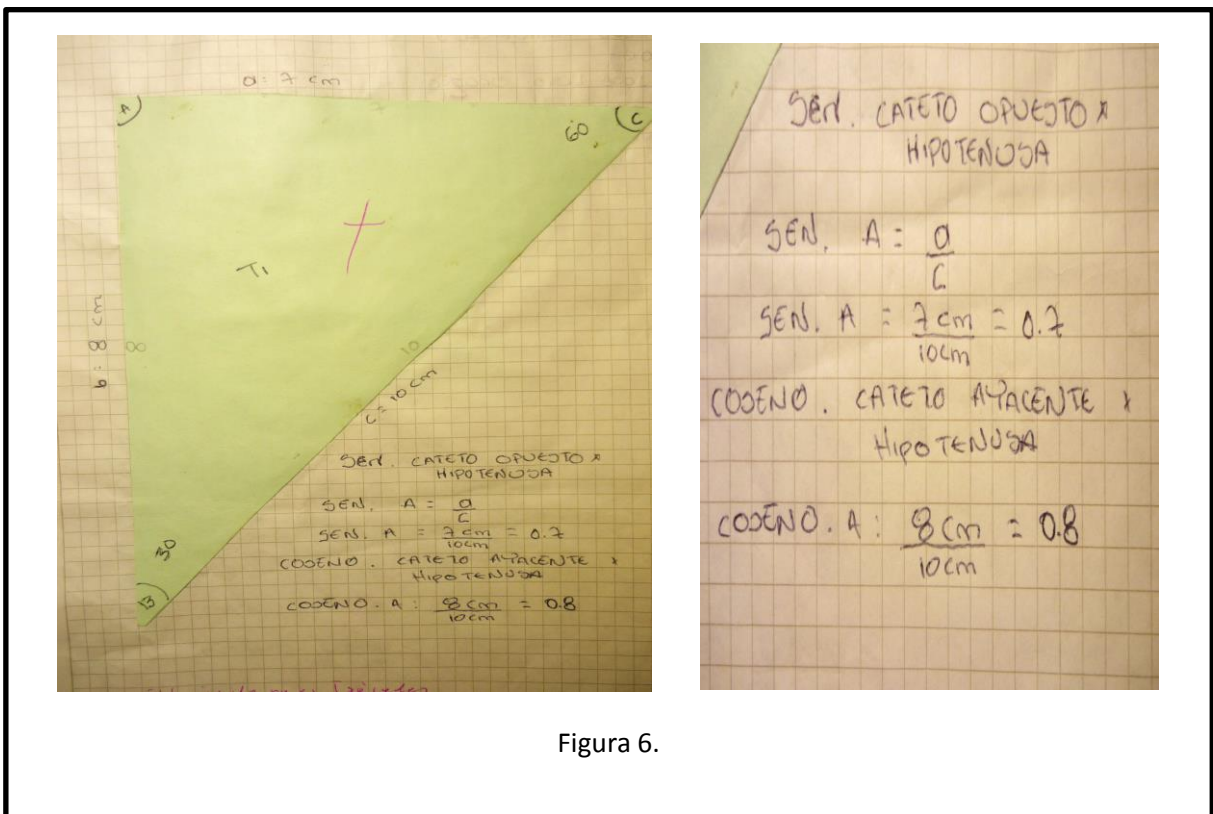
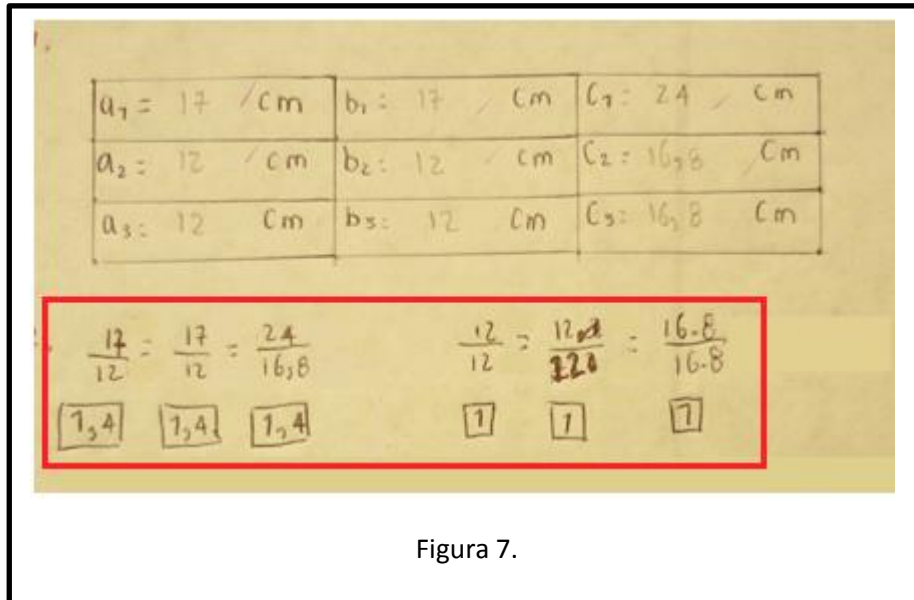


Figura 6.

Fase de formulación

En este momento, se manifiestan los hallazgos logrados por parte de los estudiantes en esta actividad:

- Con los datos encontrados en los trabajos se solicitó verificar si los lados de los tres triángulos formados eran semejantes. Algunos resultados que se obtuvieron fueron (Ver figura7):



En estos resultados algunos estudiantes esperaban que los valores de las tres razones fueran exactamente iguales en cada una de las proporciones, ya que afirmaban que los resultados obtenidos eran diferentes y preguntaban si estaban correctos sus cálculos. En este caso, los resultados obtenidos no debían ser necesariamente iguales, puesto que factores como el trazar, cortar los triángulos, medir las longitudes de los lados de estas figuras con mucha o poca exactitud, hacían que los datos variaran.

En otro caso, las razones arrojaron resultados como (Ver figura 8):

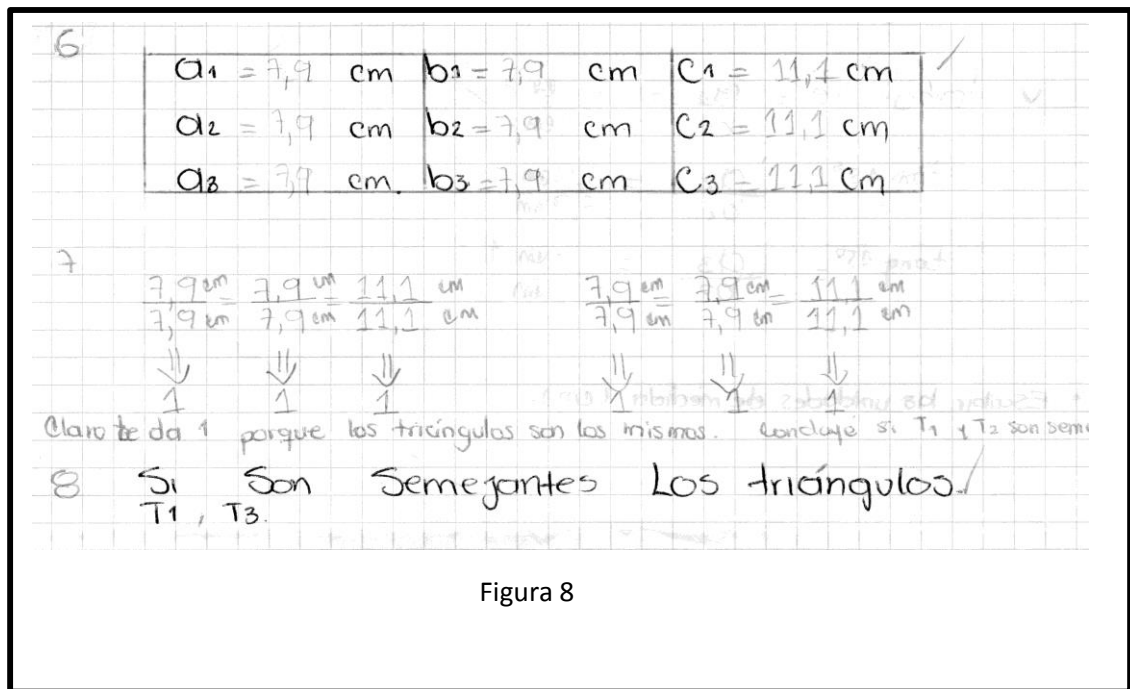


Figura 8

Esto indicaba que la medida de los lados de los triángulos eran iguales, esto se debió a que algunos estudiantes habían realizado el cociente entre las mismas longitudes de los lados de cada triángulo, o que habían comparado triángulos congruentes, claramente eran semejantes; sin embargo este caso no se pretendía obtener en el trabajo, ya que se quería trabajar con triángulos no congruentes.

- En el trabajo hay una interpretación distinta de lo que se pide realizar por parte de algunos estudiantes (hallar las razones trigonométricas del ángulo de 45°). Ellos proceden a encontrar los datos que necesitan (la medida de la longitud de los lados y de los ángulos). Pero hay algo particular que llama la atención: con una calculadora encuentran el valor de la razón trigonométrica seno del ángulo de 60° , como saben la definición de esta razón $\text{Seno } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, entonces hacen lo siguiente a partir del Triángulo a que tiene a su izquierda:

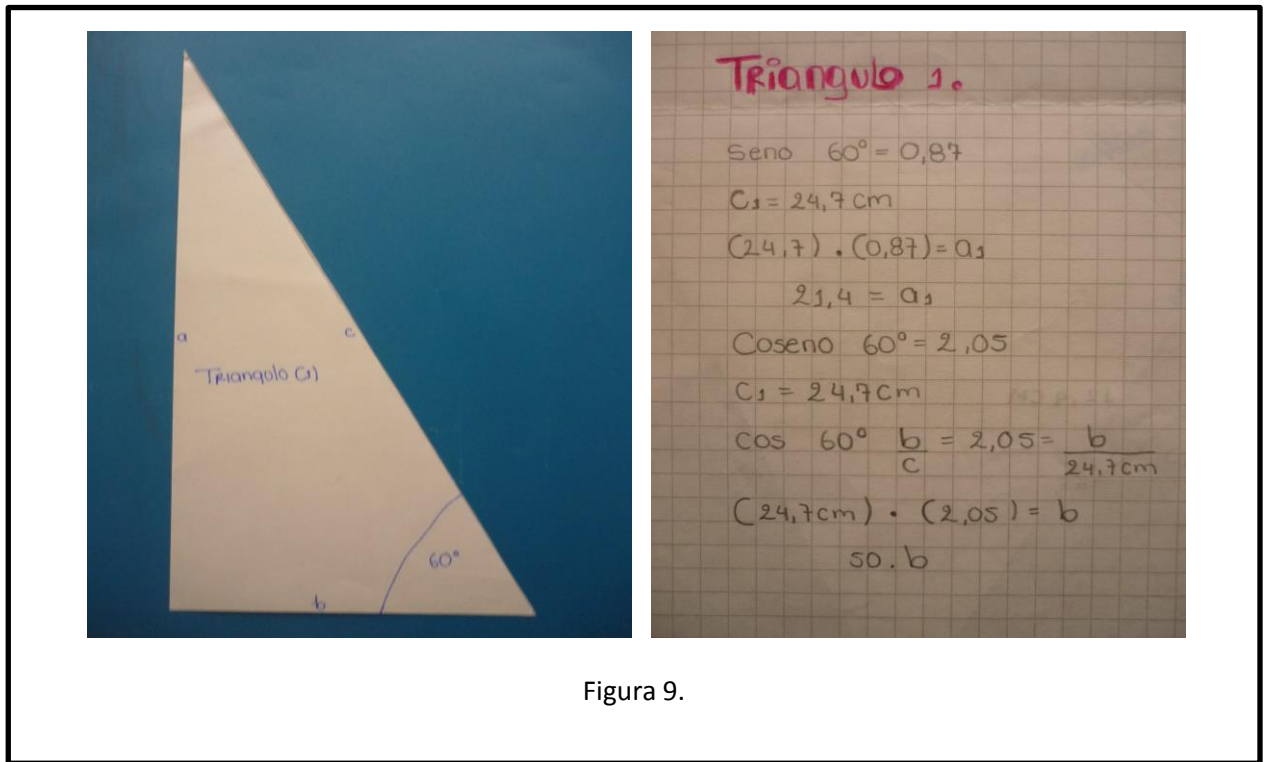


Figura 9.

Encuentran “implícitamente” una aplicación de las razones trigonométricas.

Fase de validación

Aquí, los estudiantes intentan argumentar los descubrimientos que la actividad le otorga.

La primera observación que realizaron los estudiantes frente a sus resultados fue que el seno y coseno del ángulo de 45° eran iguales. ¿Por qué el seno y coseno del ángulo de 45° eran iguales? Uno de los estudiantes afirmó que la razón era que los lados de los triángulos isósceles construidos eran iguales. De ahí, como conclusión:

- La razón del seno y coseno del ángulo de 45° son iguales porque los catetos de cada uno de los triángulos correspondientes miden igual:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \text{cos}45^\circ = 0.7$$

Fase de Institucionalización

A partir de esta actividad, se confrontaron los resultados obtenidos por los estudiantes en clase, relacionando los conocimientos previos con las conjeturas, representaciones y cálculos hechos. Seguidamente, se pasó a formalizar los conceptos de la razón Seno y Coseno de un ángulo en un triángulo rectángulo.

Finalmente en esta etapa, los practicantes concluyeron esta actividad diciendo a los estudiantes *“No importa el tamaño que tenga los triángulos rectángulos, si estos son semejantes, entonces sus razones Seno y Coseno serán iguales”*

2.6 Consideraciones finales

- Las Matemáticas como ciencia formal y rígida puede ser estudiada y enseñada por medio de métodos que permitan descontextualizar el conocimiento matemático, llevándolo a sus ideas más primitivas para a través de una actividad poder estimular el interés y la motivación en los estudiantes para apropiarse de un conocimiento; y generar en ellos la necesidad de crear estrategias que le permitan resolver un problema en torno a dicho conocimiento. Así, a partir de esos conocimientos previamente establecidos intentar recontextualizar el conocimiento matemático en cuestión.

Para ello, es fundamental que durante este proceso donde se está en vía de construcción de un conocimiento matemático, se haga un recorrido por la historia, la epistemología y la filosofía del conocimiento; es decir se deben implementar actividades que permitan dar cuenta de cómo ese conocimiento ha surgido y hecho parte de la humanidad. Por ende, en este trabajo se trató de construir el concepto de razones trigonométricas desde la semejanza de triángulos, una manera como históricamente surgió este conocimiento y que permite contextualizarlo para lograr aprendizajes significativos.

- Al sumergir a los estudiantes en actividades en las que se hace lo posible por generar un ambiente en el cual ellos se sientan motivados y seguros para realizar conjeturas y afirmaciones con respecto a los conocimientos que están en juego en esa actividad, es pertinente tener en cuenta que en algunas ocasiones los estudiantes realizan esta labor sin tomarse por lo menos un corto tiempo para pensar y reflexionar si estas afirmaciones tienen por lo menos algún grado de validez en matemáticas. Por tanto se piensa que el contrato didáctico podría controlar este proceso, pero se debe tener cuidado

en no condicionar por completo la actitud impulsiva de los estudiantes por generar respuestas a interrogantes en los cuales ellos estén motivados.

- En este trabajo pedagógico investigativo con los elementos que se recopilaron y sintetizaron no se pudo responder con certeza a la pregunta de investigación. No obstante, se puede decir que gracias a la búsqueda y análisis de resultados se pudo concluir lo siguiente:

Al colocar a los chicos en una situación donde se hacen construcciones con elementos reales y en torno a su contexto, despierta en ellos interés y motivación para intentar dar soluciones o respuestas a los problemas a los cuales se les confronta. En este sentido, el grado de éxito para lograr construir y concluir elementos de las actividades propuestas fue bueno ya que gracias a la actividad 2 los estudiantes lograron ver que sin importar el tamaño de los triángulos rectángulos semejantes, sus razones trigonométricas respecto a uno de sus ángulos agudos eran aproximados. En consecuencia, se reflexiona que para construir y comprender el concepto las razones trigonométricas es necesario utilizar la semejanza entre triángulos rectángulos; de esta manera al comparar dos lados correspondientes a dos triángulos rectángulos, asociados a su respectivo ángulo, se obtiene la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo, de ahí que se puede llegar al concepto de razón trigonométrica.

- En esta investigación de intervención, el concepto de “*Razón*” fue la base conceptual que permitió desarrollar y llegar a una construcción del concepto “*Razón Trigonométrica*” dentro del aula de clase. En este sentido, a través de la comparación de las magnitudes de los lados de triángulos, empleando el concepto de razón, se hizo una introducción y formalización el concepto de proporcionalidad. Así mismo, esta situación condujo a desarrollar una primera idea intuitiva en los estudiantes del concepto de semejanza. Sin embargo, en la elaboración de figuras semejantes propuestas, no tenían en cuenta el

concepto formal de semejanza o no utilizaban adecuadamente, por lo cual obtuvieran ciertos errores. Por tanto, hubo cierta dificultad para construir y definir el concepto de razones trigonométricas.

En esta medida, se observa que el concepto de razón es necesario para introducir el concepto de proporcionalidad, éste último, a su vez, el de semejanza, para finalmente construir el de razón trigonométrica. Así, del concepto de razón se derivan otros conceptos importantes, tales como proporcionalidad y semejanza, para llegar al concepto de razón trigonométrica. Por ende es importante tener claro este concepto, ya que a partir de la comparación entre magnitudes numéricas, se puede extender el concepto a la comparación de magnitudes de segmentos; de donde se obtiene la razón trigonométrica que relaciona la comparación de la longitud de los lados de la figura y sus ángulos.

- En la práctica pedagógica, a través de las actividades propuestas, se trabajó el pensamiento espacial y el pensamiento métrico. El pensamiento espacial se trabajó utilizando los sistemas geométricos, ya que se graficó y construyó en el plano figuras con forma de triángulo; con ellas se identificó y analizó sus ángulos y lados, para así clasificarlas según sus lados y ángulos. Así mismo se elaboraron figuras de triángulos semejantes, con los cuales se hizo comparaciones entre los lados y ángulos correspondientes de los triángulos, permitiendo introducir el concepto de semejanza. En particular, se trabajó con figuras de triángulos rectángulos semejantes, donde se identificó su ángulo rectángulo y con base en sus ángulos se reconoció sus catetos opuesto y adyacente, y la hipotenusa para determinar sus razones trigonométricas y construir el concepto de razón trigonométrica. No obstante se presentó en los estudiantes dificultades para identificar los catetos del triángulo según el ángulo, ya que al cambiar la orientación de la figura presentaron dificultad para identificarlos, asumían que los catetos quedaban en el mismo lugar. Esto es causado por la manera cómo se presentan a los estudiantes las figuras,

que en su mayoría son más estáticas y no se les modifica su ubicación en el espacio. Esto indica que las figuras geométricas con las cuales se trabajan en el aula de clase deben tener dinámica para que los estudiantes no asuman un pensamiento o abstracción lineal de los objetos con los cuales interactúan.

Otro pensamiento que se trabajó en clase fue el pensamiento métrico, al igual que el pensamiento geométrico, éste influyó en las actividades realizadas para determinar y construir el concepto de razón trigonométrica. En particular se utilizó para medir ángulos y segmentos de recta, reconocer unidades de medida y pasar de un sistema de medida a otro, identificar diferentes magnitudes y la relación entre ellas, y emplear adecuadamente los instrumentos de medida. En este caso las dificultades que se observaron en los estudiantes fue el uso de instrumentos de medida, ya que algunos niños no tomaban como patrón de inicio de medida el 0, sino el 1, esto puede ser causado por el hecho que en el proceso de contar no se inicia desde cero, sino desde uno; esto se puede dar por el hecho de que relacionan el proceso de contar una cantidad con el proceso de medir una magnitud, aspectos distintos. De igual manera se observó el inadecuado uso de instrumentos de medida o de cálculo, como el transportador o calculadora, esto puede darse porque no se involucran con frecuencia estas herramientas en las actividades académicas, por ende no las emplean correctamente. Lo anterior influyó en cierta manera en la determinación de las razones trigonométricas de triángulos semejantes, ya que la adecuada toma de medidas permitía un poco mayor de exactitud en los resultados y obtener deducciones más acertadas sobre los conceptos que se están trabajando.

- La institucionalización es una etapa de vital importancia en una situación didáctica; y dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje del conocimiento matemático, ya que es el espacio donde se confrontan y validan formalmente cada una de las conjeturas, hallazgos o representaciones

realizadas por los estudiantes en las etapas de acción, formulación y validación dentro del desarrollo de la situación didáctica. Esta etapa no sólo permite recoger cada uno de los elementos que se han podido establecer durante las actividades que propician la situación didáctica, sino que permite crear una interacción entre profesor-alumno-saber para realizar una reflexión crítica frente a los conocimientos obtenidos, rompiendo con el esquema tradicional de enseñanza donde se presenta el conocimiento de una forma más axiomática; y de esta manera dar prioridad al papel del estudiante en la construcción del conocimiento, el cual debe ser acompañado y orientado por el profesor.

- Toda esta experiencia educativa, al ser una actividad social, logró que sus participantes tomaran los sucesos de ésta y los usaran como aprendizajes, no sólo en relación al conocimiento formal sino también en aprendizajes de otra índole, como emocionales y actitudinales en el sentido de que se generaron sentimientos de afecto, admiración, entre otros; promoviendo valores de respeto, responsabilidad, cooperación, compañerismo, sinceridad, solidaridad, tolerancia, valentía y muchos más. De lo anterior, se puede decir que los participantes que formaron parte de este trabajo estuvieron ante una “experiencia para nutrir la vida”.

3.Anexos

Anexo 1. Actividad 0

INSTITUCIÓN EDUCATIVA “LOS COMUNEROS” – UNIVERSIDAD DEL CAUCA



LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
PRÁCTICA PEDAGÓGICA
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS – GRADO 10°



CLASE N°: 1

TEMA: Triángulos y su clasificación.

OBJETIVO: Lograr que los estudiantes identifiquen con qué tipo de triángulo se hallan en una situación específica y resolver problemas entorno a ellos.

Actividad. Con tiras de medidas: 7cm, 8 cm, 9cm, 10cm, 5cm, 4 cm y de 3cm, se te indicará construir algunas formas de triángulos, de acuerdo a las siguientes indicaciones:

- Toma una tira de 3cm, una de 4cm y una de 5cm. Forma con ellas un triángulo, pues tienes tres segmentos para lograrlo. Ahora, haz lo mismo con tiras de 8, 8 y 4 centímetros, con tiras de 8,8 y 8 centímetros y finalmente repítelo con tiras de 10, 8 y 9 centímetros, con el fin de usar los temas expuestos en clase, trata de clasificar las construcciones geométricas anteriores, es decir los triángulos según la medida de sus lados y según la amplitud de sus ángulos, escribe tus respuestas en tu cuaderno.
- Toma tiras de medida 4, 5 y 10 centímetros y trata de construir un triángulo, ¿qué puedes concluir de lo anterior?
- En la clasificación de los triángulos hace falta por enunciar algunos tipos de triángulos, a pesar de eso los construiste en primer paso, saca tus conclusiones y trata de hacer tu propia definición de los triángulos que no hayas podido clasificar según las indicaciones de tu profesor (triángulos obtusángulos y escalenos).

Anexo 2. Actividad1

INSTITUCIÓN EDUCATIVA “LOS COMUNEROS” – UNIVERSIDAD DEL CAUCA



LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
PRÁCTICA PEDAGÓGICA
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS – GRADO 10°



CLASE N°: 2

TEMA: Proporcionalidad y semejanza.

OBJETIVO: A partir de construcciones y comparaciones de figuras geométricas se pretende acercar a los niños a la noción de *Proporcionalidad y Semejanza*, y que traten de deducir la definición de estos conceptos matemáticos.

Introducción: En términos corrientes, dos figuras geométricas son semejantes, si tienen exactamente la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Por ejemplo dos circunferencias cualesquiera son semejantes; dos cuadrados cualesquiera son semejantes; dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes. Otra manera de expresar esto es decir que dos figuras son semejantes, si una de ellas es un modelo a escala de la otra.

Actividad 1.

Retomemos las construcciones de la clase anterior, ahora toma tiras de 6, 10 y 8 centímetros, y de 3, 4 y 5 centímetros, forma triángulos con cada grupo y determina que características tienen en común, repite el proceso anterior con tiras de 4, 4 y 2 centímetros y con 4, 8, y 8. Por último con tres tiras de 3 cm y con tres tiras de 12 cm. Comparara las figuras formadas y comenta lo observado.

Anexo 3. Actividad 2

INSTITUCIÓN EDUCATIVA “LOS COMUNEROS” – UNIVERSIDAD DEL CAUCA



LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
PRÁCTICA PEDAGÓGICA
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS – GRADO 10



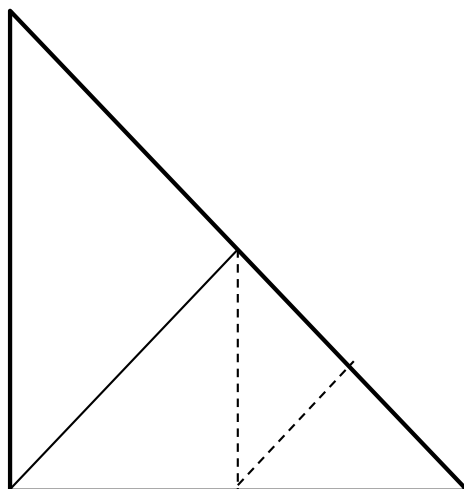
CLASE N°: 3

TEMA: Introducción a las razones trigonométricas.

OBJETIVO: Establecer a partir de la semejanza de triángulos, que para cualquier triángulo rectángulo isósceles sus razones trigonométricas son iguales.

Actividad.

1. En un octavo de cartulina, dibuja un triángulo rectángulo donde la medida de la hipotenusa es el doble de la medida de uno de sus catetos, procurando dibujar un triángulo grande.
2. Ahora, en el triángulo que dibujaste traza un segmento perpendicular a la hipotenusa y que además pase por el punto que une a los dos catetos.



- Repite el paso anterior con los nuevos triángulos formados, hasta obtener 4 triángulos.
- Con ayuda de una tijera, recorta los triángulos formados.
- Asigna un nombre a cada triángulo de la siguiente manera, organiza los triángulos de mayor a menor tamaño, y al mayor llámalo T_1 , al que le sigue T_2 , al que le sigue T_3 .
- Mide la longitud de los lados de cada triángulo, toma nota de tus resultados y completa la siguiente tabla:

$a_1 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$	$b_1 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$	$c_1 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$
$a_2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$	$b_2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$	$c_2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$
$a_3 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$	$b_3 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$	$c_3 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$

Donde a_1, b_1, c_1 son los lados del triángulo T_1 , a_2, b_2, c_2 son los lados del triángulo T_2 y a_3, b_3, c_3 son los lados del triángulo T_3 .

- Ahora con los datos anteriores determina si los triángulos T_1 con T_2 son semejantes, y también si lo son los triángulos T_2 con T_3 es decir si:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3}$$

Y la medida de sus ángulos correspondientes es igual.

También asigna un nombre a los ángulos de menor amplitud de cada triángulo.

- ¿Será que los triángulos T_1 y T_3 son semejantes? ¡Compruébalo!
- Con base a la explicación, ahora llena la siguiente tabla

	$a_1/c_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$a_2/c_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$a_3/c_3 = \underline{\hspace{1cm}}$
	$b_1/c_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$b_2/c_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$b_3/c_3 = \underline{\hspace{1cm}}$
	$a_1/b_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$a_2/b_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$a_3/b_3 = \underline{\hspace{1cm}}$

Anexo 4. Conociendo el contexto



Institución Educativa Los comuneros

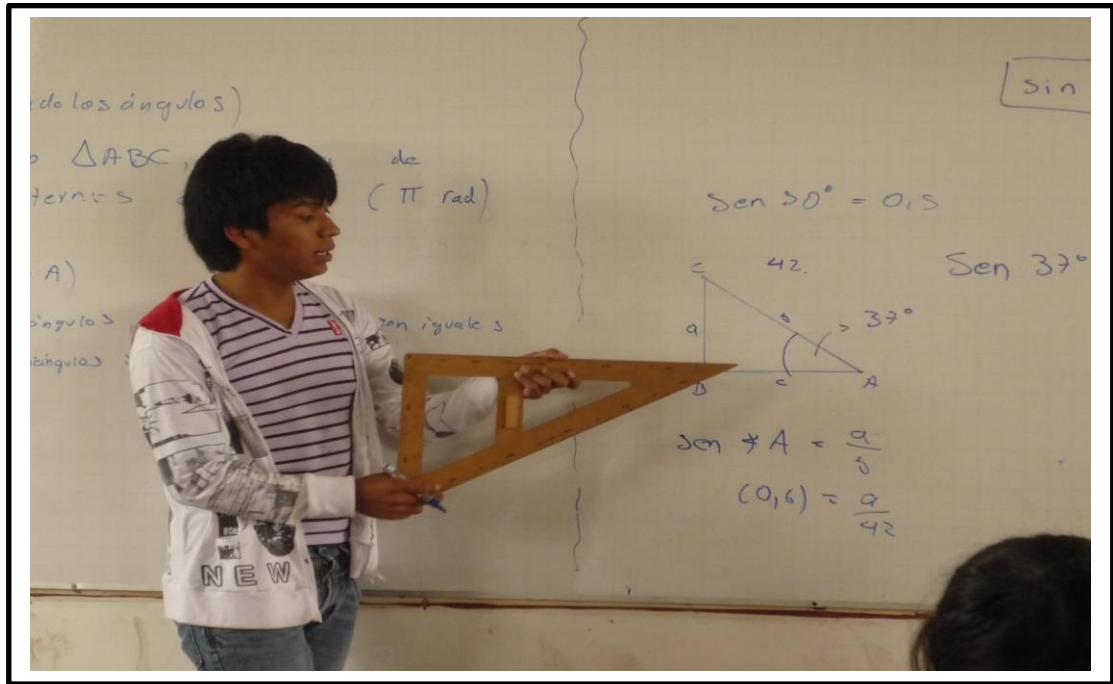


Biblioteca

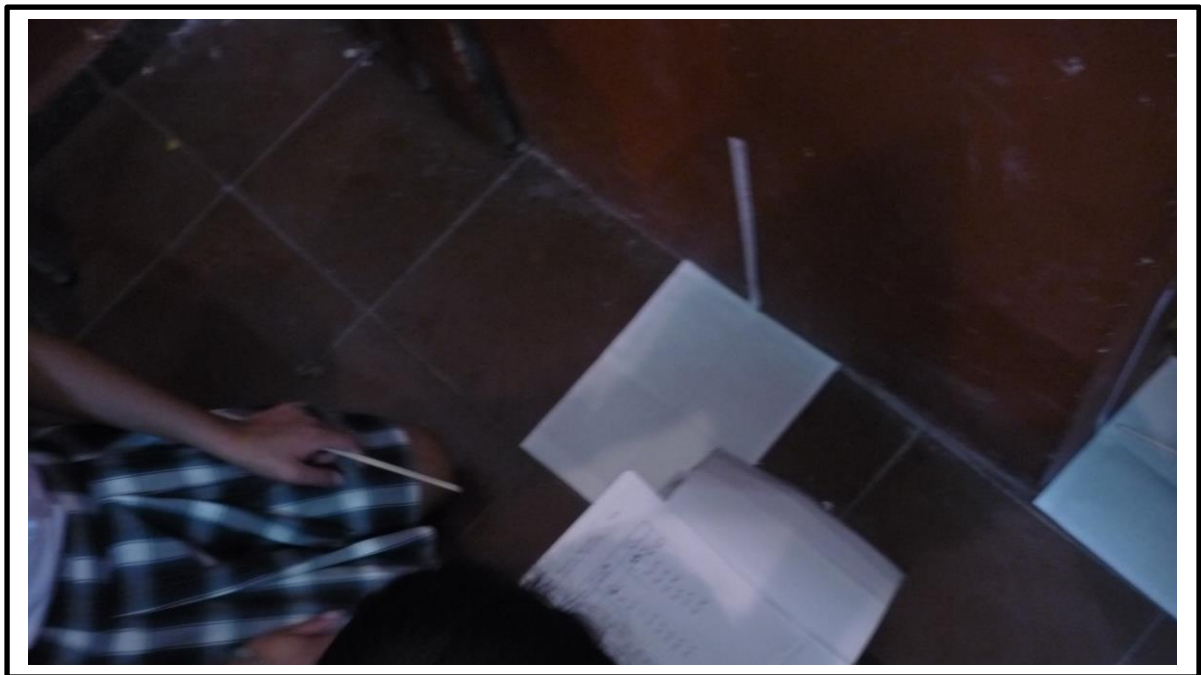


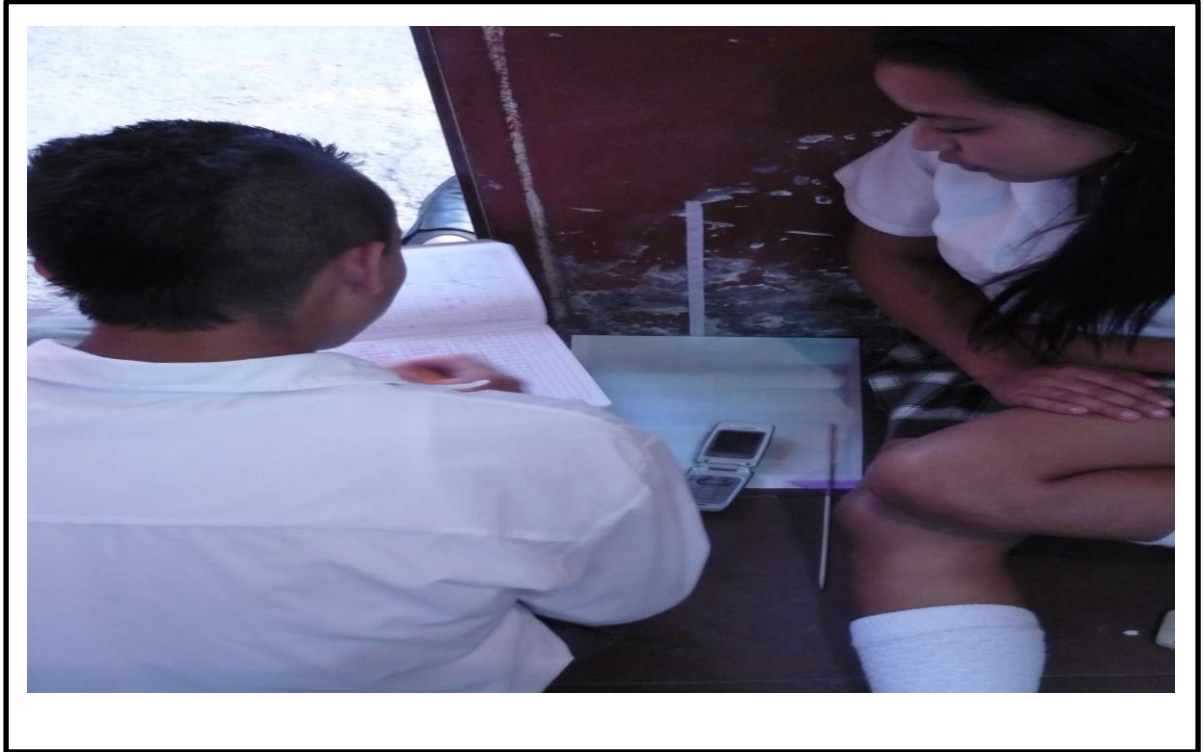
Sala de Informática

Anexo 5. En la experiencia pedagógica

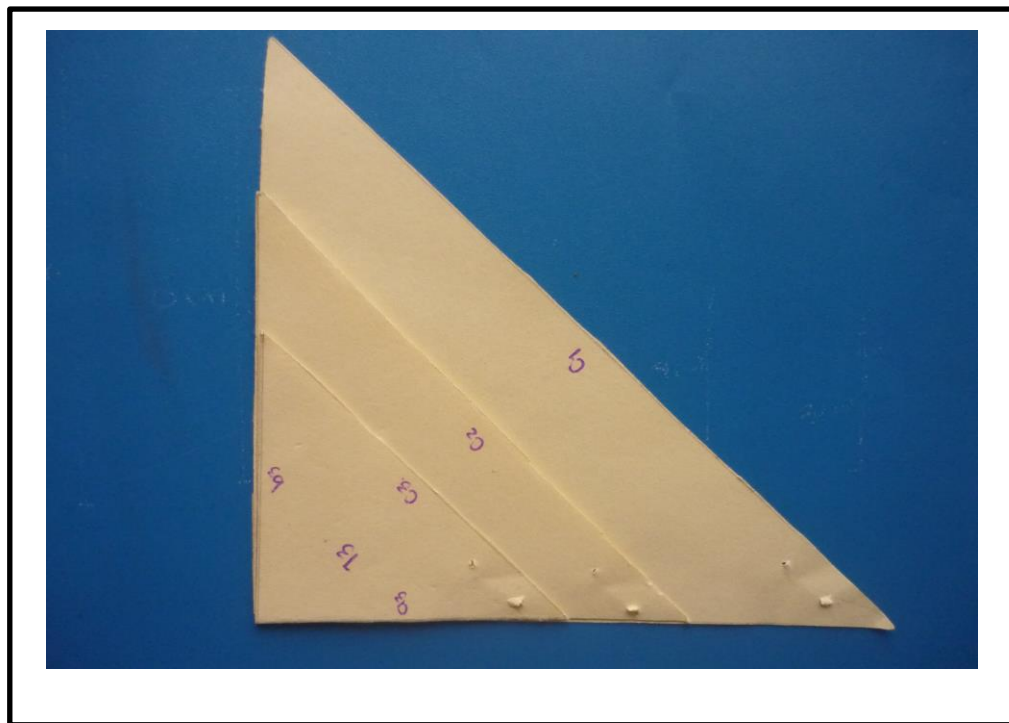
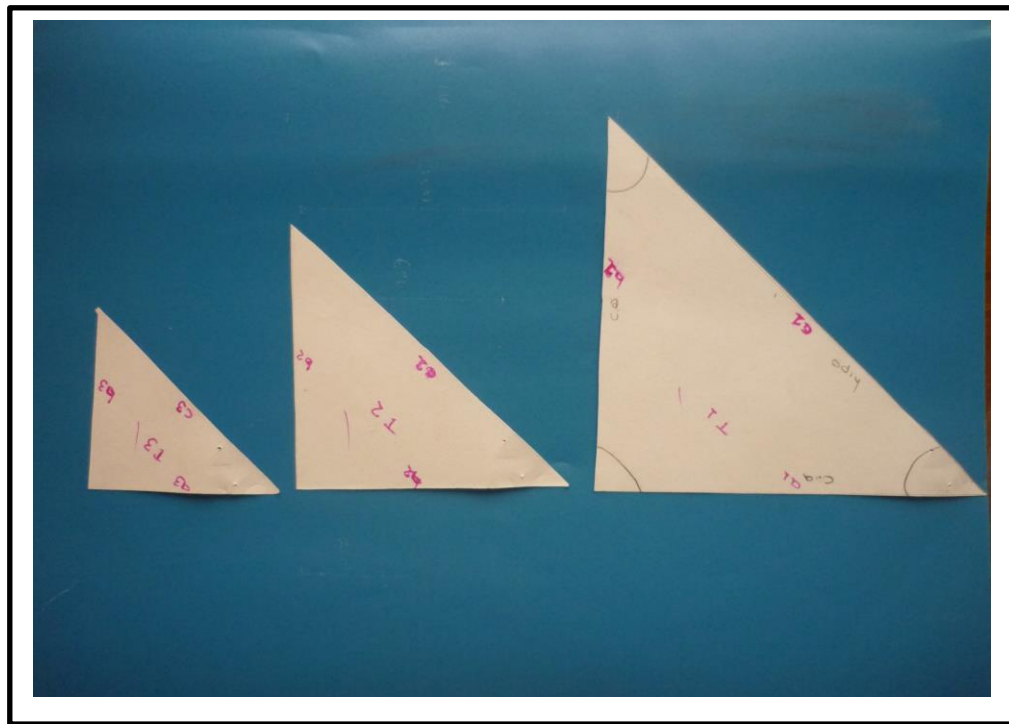


Anexo 6. En el desarrollo de las actividades





Anexo 7. Trabajos de los estudiantes



Solución

① Seno - coseno - tangente:

$$\checkmark \text{ Seno: } \frac{a_1}{c_1} = \frac{8.5 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = 0.7$$

$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{a_2}{c_2} = \frac{6.2 \text{ cm}}{8.5 \text{ cm}} = 0.7$$

$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{a_3}{c_3} = \frac{6 \text{ cm}}{8.5 \text{ cm}} = 0.7$$

$$\checkmark \text{ Coseno: } \frac{b_1}{c_1} = \frac{8.5 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = 0.7$$

$$\text{Cos } 45^\circ = \frac{b_2}{c_2} = \frac{6 \text{ cm}}{8.5 \text{ cm}} = 0.7$$

$$\text{Cos } 45^\circ = \frac{b_3}{c_3} = \frac{5.8 \text{ cm}}{8.5 \text{ cm}} = 0.7$$

$$\checkmark \text{ Tangente: } \frac{a_1}{b_1} = \frac{8.5 \text{ cm}}{8.5 \text{ cm}} = 1$$

$$\text{tan } 45^\circ = \frac{a_2}{b_2} = \frac{6.2 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 1$$

$$\text{tan } 45^\circ = \frac{a_3}{b_3} = \frac{6 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 1$$

$a_1 = 8.5 \text{ cm}$	$b_1 = 8.5 \text{ cm}$	$c_1 = 12 \text{ cm}$
$a_2 = 6.2 \text{ cm}$	$b_2 = 6 \text{ cm}$	$c_2 = 8.5 \text{ cm}$
$a_3 = 6 \text{ cm}$	$b_3 = 5.8 \text{ cm}$	$c_3 = 8.5 \text{ cm}$

No olvidar escribir el nombre de las razones del ángulo que vamos a calcular.
 Recuerda escribir las unidades (cm).

④ - Seno - coseno - Tangente

$$\checkmark \text{ Seno} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{8.5}{12} = 0.7$$

$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{a_2}{c_2} = \frac{6.2}{8.5} = 0.7$$

$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{a_3}{c_3} = \frac{6}{8.5} = 0.7$$

$$\checkmark \text{ coseno} = \frac{b_1}{c_1} = \frac{8.5}{12} = 0.7$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{b_2}{c_2} = \frac{6}{8.5} = 0.7$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{b_3}{c_3} = \frac{5.8}{8.5} = 0.6 \quad 0.6 \neq 0.7$$

$$\checkmark \text{ Tangente } \frac{a_1}{b_1} = \frac{8.5}{8.5} = 1$$

$$\text{tan } 45^\circ = \frac{a_2}{b_2} = \frac{6.2}{6} = 1$$

$$\text{tan } 45^\circ = \frac{a_3}{b_3} = \frac{6}{6} = 1$$

4 Referencias Bibliográficas

Ballester, A (2002). "El aprendizaje significativo en la práctica. Cómo hacer el aprendizaje significativo en el aula". Depósito legal PM 1838-2002. www.pensamientoestrategico.com

Borrego, J., Cabezón Ochoa, M., Fernández Rubio J. & García Cebrian, M. Semejanza. Retrieved from <http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatemáticasB/>

Brousseau, G. (2009). *Fundamentos y método de la didáctica de las matemáticas*. Universidad de Burdeos.

Castro Cortés, C & Céspedes Guevara, N. (2009). Concepciones de los estudiantes de grado octavo sobre el concepto de semejanza. Retrieved from <http://www.usergioarboleda.edu.co/civilizar/invedusa/concepciones-concepto-semejanza.pdf>

Cedillo, T., Cruz V., Vega, E. y Cambray, R. (2006). *Módulo 9. Geometría, medición y razones trigonométricas*. "Tecnología y educación a distancia en América Latina y El Caribe" Programa Interamericano de Capacitación de Maestros. Serie "Enseñanza de Las Matemáticas". México.

Chevallard (1998). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. SEP e ICE Universidad de Barcelona. España.

Cochran -Smith, M. (2003). Learning and unlearning: the education of teacher educators. (pp. 5 - 28). *Teaching and teacher education*.

[Díez Palomar, Francisco Javier](http://www.tesisenred.net/handle/10803/1/browse?value=D%C3%A9z+Palomar,+Francisco+Javier&type=author) (2004). La enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas: un modelo dialógico. <http://www.tesisenred.net/handle/10803/1/browse?value=D%C3%A9z+Palomar,+Francisco+Javier&type=author>

Downs, M. (1986). *Geometría Moderna*. Editorial Wesley. (p.327).

Flórez, R. (1999). Análisis de la enseñanza y la evaluación del aprendizaje según los modelos pedagógicos: Evaluación pedagógica y cognición. (pp. 31-55). *McGraw Hill*.

García Santos, Z. s.f. Relación entre modelos educativos y comunicativos. http://letrasuruguay.espaciolatino.com/aaa/garcia_santos_zoila_libertad/relacion_entre_modelos_educativos.htm

Godino, J. & Batanero, C. (2002). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Proporcionalidad.pdf

Godino, J., Batanero, C. & Roa, R. (2002). Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

Hernández, L. (2013). Retrieved from <http://www.iedricaurtevirtual.com/guias/trig10i.pdf>

I.E. Los Comuneros. (2008). *Educación para nutrir la vida: Acuerdos para la convivencia*. (pp. 44-52)

Malla Curricular Área de Matemáticas. (2008). I.E. Los Comuneros.

Massa, E., Romero, F y Casals, A. (2007). *La historia de las Matemáticas en el enseñanza de la trigonometría. El Teorema de Pitágoras*.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2009). *Fundamentaciones y orientaciones para la implementación del Decreto 1290 del 16 de abril de 2009*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Murcia Prieto Parra. s.f. La práctica pedagógica en el aula: un análisis crítico. Retrieved from <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/5624/5045>

Ordoñez, E., Palacios E., Villamizar, A. (1995). *Enciclopedia Matemática*. Santa Fe de Bogotá. Ediciones Terranova.

Sacristán, J. (1988). El Currículo: Una reflexión sobre la práctica. (Pp.14-22)

San Martín, O. y Jiménez, J. (1995). *Los problemas matemáticos en la escuela*. Antología básica y antología complementaria. México.

Sánchez, E. (2011). *Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes: Una posible forma para comprender la construcción de dichos*

objetos matemáticos. Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación. Universidad del Cauca, Colombia.

Sánchez, E. y Zubieta G. (1993). (Eds.) *Lecturas en didáctica de las matemáticas*. Escuela Francesa. México d.f. Departamento de matemática educativa.

Vasco, C. (1994). La educación matemática: Una disciplina en formación.

Matemáticas: Enseñanza universitaria. (pp. 59 - 75). *Revista de la ERM*.

Zambrano, A. (2002). Definición y pretensión de la pedagogía, pedagogía, educabilidad y formación de docente. (pp.35-38). Grupo Editorial Biblioteca Pedagógica S.