ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN GRADO 10º:
Una experiencia de práctica pedagógica investigativa

MARÍA DEL PILAR SANTACRUZ SOLANO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN
2016

ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN GRADO 10º:
Una experiencia de práctica pedagógica investigativa

MARÍA DEL PILAR SANTACRUZ SOLANO

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Dr. YILTON OVIRNE RIASCOS FORERO
Director

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2016

NOTA DE ACEPTACIÓN:

____

____

____

____

Director______________________________

Dr. Yilton Riascos Forero

Evaluador______________________________

Lic. Jhoana Sandoval Serna

Fecha y lugar de sustentación: Popayán, 08 de noviembre de 2016

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por haberme brindado la fuerza necesaria para llevar a cabo la culminación de este gran sueño.

A mi familia, por su apoyo incondicional, especialmente a mi madre *Teresa Solano,* mi padre *Carlos Santacruz,* mi hermana *Blanca,* y mis hermanos *Héctor* y *Carlos.*

A mis amigos y compañeros, quienes me han brindado su apoyo tanto en lo académico como en lo personal.

Al profesor Yilton Riascos, por su valiosa colaboración a lo largo de este proceso, por su tiempo, paciencia y dedicación.

A la Institución Educativa Los Comuneros, especialmente al profesor Albeiro Cerón y a los estudiantes del grado 10B.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

TABLA DE IMÁGENES

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

La Práctica Pedagógica Investigativa (PPI) es un proceso que pretende aproximar a los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca a la realidad profesional del Sistema Educativo Colombiano y Regional; propiciando el ejercicio de la docencia con espíritu investigativo, desde una perspectiva crítica, reflexiva y propositiva en instituciones de educación formal o no formal. A través del desarrollo de un proyecto pedagógico de intervención en el aula, en Matemáticas.

De acuerdo con la estructura curricular del programa, dicho proceso se debe desarrollar en cuatro etapas organizadas en los cuatro últimos semestres (una por semestre) de formación de la licenciatura, y es un requisito parcial para obtener el título profesional.

Estas etapas se denominan PPI-I, PPI-II, PPI-III y PPI-IV. En las dos primeras se deben establecer los elementos teóricos básicos y se definen los temas de interés que se esperan soporten el trabajo de intervención en aula y de investigación que se desarrollarán en las dos últimas etapas. La PPI-IV culmina con la escritura de un documento que explicita todo el proceso de la PPI, y con una socialización pública de la misma.

Este trabajo se encuentra dividido en cinco capítulos y presenta la descripción del proceso de PPI. En el capítulo I denominado *Referentes Teóricos,* se describen los referentes necesarios para llevar a cabo la PPI, aquí se resumen los principales modelos de la Educación Matemática, la investigación en el campo de la Educación Matemática, corriente psicológica, y los contenidos de las Matemáticas, y se corresponden con la primera etapa del proceso.

En el capítulo II se describe el entorno de la Institución Educativa Los Comuneros donde se llevó a cabo la intervención en aula y en el capítulo III, se detalla la metodología seguida en dicha intervención en aula, así como del ejercicio de investigación que se realizó. Estos capítulos corresponden a la segunda y tercera etapa del proceso.

El trabajo de sistematización y escritura del documento se realiza en la PPI-IV, permitiendo la constitución del presente documento.

Capítulo I. REFERENTES TEÓRICOS

La PPI entendida como un proceso, necesita referentes teóricos para su ejecución, los cuales están enmarcados desde dos grandes perspectivas a saber: *la educación matemática* y las *matemáticas;* a continuación se presenta aquello que se consideró como soporte importante para el desarrollo de este trabajo.

1.1. REFERENTE TEÓRICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Aunque se reconoce la existencia de diferencias entre los términos Educación Matemática (EM) y la Didáctica de las Matemáticas (DM), en el presente documento se considerarán como sinónimos.

González (1995) citado por González (1998), señala que:

> La EM es una disciplina que tiene como campo de estudio la problemática específica de la transmisión y adquisición de contenidos, conceptos, teorías, y operaciones matemáticas en el contexto de las diversas instituciones escolares y otras instancias educativas (formalizadas o no), y que se expresa en forma de conocimientos teóricos y prácticos, relativos a dicha problemática, generados por el quehacer académico que, en conferencias, grupos de estudio, ponencias, congresos y exposiciones, llevan a cabo los miembros de la comunidad de EM internacional, que a su vez se ocupan de la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina, trabajo que se materializa, tanto en los informes, libros y artículos que son publicados en revistas u otros medios especializados que le sirven de soporte, como en las expresiones orales y en los artefactos producidos por diferentes comunidades.

En esta definición de EM, resalta su carácter social, por tanto no se debe considerar como una disciplina estática. Adicional a esto, ésta disciplina está relacionada con varias de las áreas del conocimiento, las cuales han sido integradas en los modelos existentes que la describen, algunos de los cuales se presentan a continuación.

1.1.1. MODELOS PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Como se mencionó anteriormente, a continuación se presentarán los modelos más destacados para EM.

Modelo de Steiner

Steiner (1990) citado por Godino (2010) concibe la EM como un sistema que está relacionado y forma parte de otro sistema complejo social, llamado Sistema de Enseñanza de la Matemática (SEM), dentro del cual es posible identificar los siguientes subsistemas:

- La propia clase de matemáticas (CM)
- La formación de profesores (FP)
- Desarrollo del currículo (DC)
- La propia Educación Matemática (EM), como una institución que forma parte del SEM.

Además, representa las ciencias referenciales para la EM, que según él son:

- Matemáticas (M)
- Epistemología y Filosofía de las Matemáticas (EFM)
- Historia de las Matemáticas (HM)
- Psicología (PS)
- Sociología (SO)
- Pedagogía (PE), etc.

En la siguiente figura, se representa el modelo de la EM propuesto por Steiner

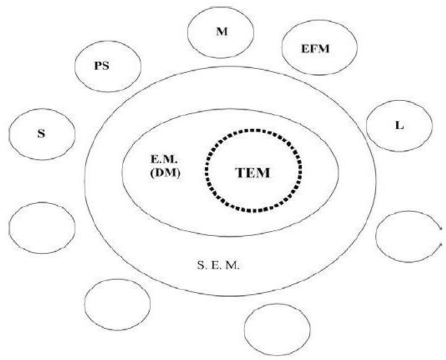


Figura 1. Modelo del sistema de la Educación Matemática según Steiner (1990).

Donde:

S. E. M: Sistema de enseñanza de las matemáticas (Formación de profesores, desarrollo curricular; materiales didácticos; evaluación, etc.)

E. M: Educación matemática (o Didáctica de la Matemática)

TEM.: Teoría de la Educación Matemática

M: Matemáticas

EFM: Epistemología y Filosofía de las matemáticas

PS: Psicología

L: Lingüística

Etc.

Modelo de Higginson

Higginson (1980) citado por Godino (2010) considera que las disciplinas fundacionales de la EM son la Matemática, Psicología, Sociología y Filosofía, las cuales están representadas en cada una de las caras de un tetraedro, como se muestra en la siguiente figura:

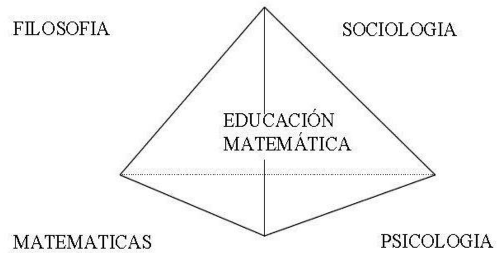


Figura 2. Modelo tetraédrico de la Educación Matemática según Higginson (1980).

Las distintas disciplinas que constituyen el campo de la Educación Matemática, según el modelo, asumen las preguntas básicas que en él se plantean:

- ¿Qué enseñar? (Matemáticas)
- ¿Por qué? (Filosofía)
- ¿A quién y dónde? (Sociología)
- ¿Cuándo y cómo? (Psicología).

Modelo de Vasco

Vasco (1994) distingue entre las Matemáticas de Investigación campo propio de los matemáticos, la Matemática escolar, la cual es impartida por los profesores en las instituciones educativas y la matemática realmente existente que son las matemáticas existentes en las diferentes culturas, como elementos de una trenza diacrónica que componen lo que se denomina Matemáticas.

Además de esto, Vasco, aclara que aunque las ocho disciplinas presentadas en la figura 3, constituyen la EM, esto no implica que los investigadores de la EM deban ser expertos en estos campos ni obtener 8 doctorados, para poder llevar a cabo cualquier investigación, pero que deben ser conscientes de que van a tener encuentros con estas disciplinas, pues les brindarán aportes básicos para la práctica cualificada y seria de la investigación en EM. (1994)

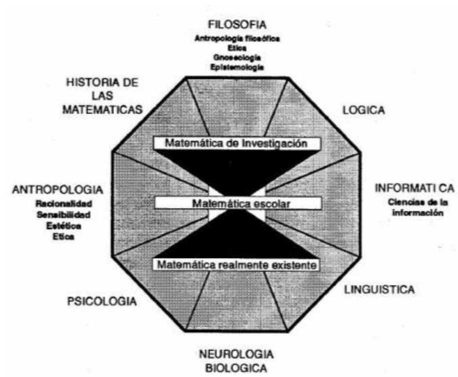


Figura 3. Modelo del Octógono de la Educación Matemática según Vasco.

Estos tres modelos son ejemplos de la forma en que los investigadores consideran la constitución del campo y las dimensiones de trabajo que se han venido constituyendo, lo cual permite considerar la EM como una disciplina científica constituida en la actualidad.

1.1.2. INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Los investigadores de la Didáctica de las Matemáticas, tienen como objetivo ofrecer respuestas a los problemas que han sido planteados por los profesores y diseñadores de los currículum, cuando quieren mejorar la comprensión y aprendizaje de las matemáticas por los estudiantes (Gutiérrez, 1991, pág. 149). Es así como se concibe a la DM como una disciplina de carácter científico.

En su relación con otras áreas del conocimiento, la Didáctica de las Matemáticas tiene una estrecha relación con la Psicología Cognitiva y Educativa, Las Matemáticas y la Pedagogía, como menciona Gutiérrez (1991) "esto hace que los investigadores, en el proceso de creación de sus propios métodos e instrumentos de trabajo, tomen otros procedentes de dichas áreas, uniéndolos y adaptándolos a sus necesidades y puntos de vista".

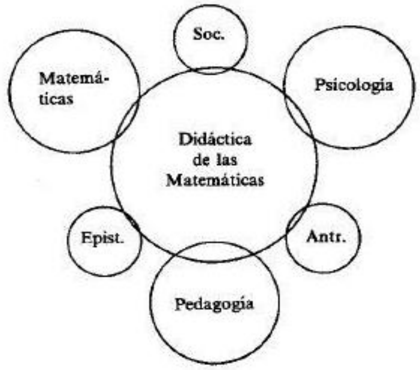


Figura 4. Relación de la Didáctica de las Matemáticas con otras disciplinas.

Aunque son seis las disciplinas relacionadas con la Didáctica de las Matemáticas, se pueden distinguir tres que presentan las relaciones más fuertes, las cuales se describen a continuación:

La relación de la Didáctica de las Matemáticas con las Matemáticas radica en que los didactas, como afirma Gutiérrez (1991) “se centran en los conocimientos ya establecidos y se preocupan de analizarlos para encontrar formas adecuadas de transmitir y entender las Matemáticas”, mientras que los encargados de encontrar nuevos conocimientos son los matemáticos.

La relación con la Pedagogía se debe a que los pedagogos, como afirma Gutiérrez (1991) “tienen como objetivo central la descripción de procesos generales de aprendizaje y de enseñanza que puedan ser aplicables a las diferentes áreas del saber, sin embargo, los didactas se centran en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (incluso cuando están inmersos en una investigación de tipo interdisciplinar)”.

La relación con la Psicología Cognitiva y la Educativa es la más estrecha de las tres, pues según Gutiérrez (1991) “… la mayoría de las estructuras mentales del ser humano son globales y se usan indistintamente en unas actividades u otras (académicas y ordinarias, matemáticas y de otras áreas)”.

De esta forma, aparecen aspectos que resultan relevantes para la investigación en Didáctica de las Matemáticas y que según Gutiérrez (1991) son las siguientes:

Objetivos de la investigación en DM:

Según Gutiérrez (1991), los objetivos de la investigación en DM son los siguientes:

- El perfeccionamiento de las actuales formas de actuación de los profesores de Matemáticas y la búsqueda de otras nuevas, con el objetivo final de promover una mejor enseñanza de herramientas y conceptos matemáticos a los estudiantes.

- El logro de una mejor comprensión de los mecanismos mentales ligados a la actividad de aprendizaje de las Matemáticas, para así poder organizar buenos entornos formativos para los estudiantes y poder proporcionarles los medios necesarios para facilitar su aprendizaje. (pág. 152)

Tipos de investigación:

En Gutiérrez (1991), se describen los siguientes tipos de investigación:

- Análisis de comportamiento:
  El objetivo de este tipo de investigación es averiguar cómo se desarrollan los procesos de aprendizaje y descubrir la evolución del pensamiento de los estudiantes, las causas de sus problemas y cómo se adquieren las habilidades cognitivas que les permiten superarlos.
- Investigación curricular:
  En este tipo de investigaciones se tiene como objetivo final el diseño de unidades curriculares, en las cuales resulta imprescindible evaluar la

calidad de los materiales que se han evaluado. Gutiérrez (1991) resalta que en este tipo de investigación se debe seguir un proceso cíclico de desarrollo y evaluación: elaboración de una primera propuesta de material, experimentación del mismo, evaluación de los resultados, modificación del material como consecuencia de la evaluación, experimentación del nuevo material, etc.

Los tipos de investigación presentados anteriormente, corresponden a investigaciones de tipo práctico pues según Gutiérrez (1991) “tienen la observación como base de sus conclusiones finales”, mientras que los que serán presentados a continuación, corresponden a tipos de investigación “teórica”, estos que según Gutiérrez (1991) son:

- Los que se orientan hacia la “fundamentación” tanto de alguna teoría cognitiva como de la DM en sí misma. En cuanto a las investigaciones en DM, se tienen dos posturas destacadas: G. Brousseau quien encabeza un grupo de investigadores franceses y a H. G. Steiner quien lidera el grupo “Theory of Mathematics Education (TME)”
- Historia de la enseñanza de las Matemáticas o de las propias matemáticas. En este tipo de investigaciones, los investigadores toman el desarrollo histórico de un concepto (o grupo de conceptos) como un elemento que les ayude a comprender cómo se produce el proceso de aprendizaje de este concepto (por qué aparecen determinadas dificultades o errores) o para organizar su enseñanza.
- Investigaciones experimentales que se centran en un problema concreto.

Métodos de investigación

Los métodos de investigación presentados por Gutiérrez (1991) son los siguientes:

- Comparación de los beneficios de una nueva forma de enseñanza frente a otra ya establecida.

- Estudio de casos: se caracteriza porque la obtención de la información y de las conclusiones subsiguientes se basan en la observación de un número muy reducido de individuos. El número de individuos observados, representa la fuerza en cuanto a que permite describir y controlar numerosas variables que de otra forma quedarían ocultas o serían ignoradas por los investigadores debilidad dado que es muy problemático hacer generalizaciones a partir de muestras tan reducidas.
- Los métodos cuantitativos (o estadísticos): se basan en el tratamiento estadístico exhaustivo de la información recogida como forma de generar hipótesis o de validar las conclusiones extraídas.
- Los métodos cualitativos (también llamados etnográficos): tienen como principios básicos de su forma de entender la educación que los estudiantes son diferentes y que su comportamiento o su éxito en el aprendizaje no depende solo de su habilidad o capacidad, sino que están relacionados con una serie de variables de tipo social que deben ser tenidas en cuenta. La recogida de información se hace generalmente mediante la observación y las entrevistas.

1.2. CORRIENTE PSICOLÓGICA

Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud

Aunque en la actualidad se pueden contar numerosas teorías que permiten realizar investigaciones en el campo de la Educación Matemática, como es el caso de los trabajos de la escuela francesa, encabezados por Brousseau, Chevallard, Artigue, Duval y Vergnaud; así como Godino, Batanero y Fond en España y Bishop en USA, entre otros; para este trabajo se ha decidido tomar como base la teoría de Vergnaud para fundamentar las explicaciones que aquí realizan. A continuación se presenta una síntesis de su teoría:

Gerard Vergnaud (1990), define la teoría de campos conceptuales como “una teoría cognitivista que pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y las técnicas”.

Los elementos claves de esta teoría son:

- **Campo conceptual:**

  Entendido como un conjunto de situaciones (no necesariamente situaciones didácticas definidas por Brosseau, sino más bien, tareas), conceptos y teoremas, que permiten analizar estas situaciones. De esta forma, para Vergnaud, un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza.

  Considera que un concepto es una tripleta de conjuntos C(S, I, T) donde:

  S: conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (*la referencia*)

  I: conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (*el significado*)

  T: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (*el significante*)

- **Esquema:**

  Denomina así *a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada,* por ejemplo las representaciones mentales que un individuo necesita para aprender.

- **Invariantes operatorios:**

  Son los conocimientos contenidos en los esquemas. Dentro de estos invariantes es posible identificar:

  - Teoremas en acto: proposición considerada como verdadera por el estudiante

- Conceptos en acto: conceptos que el estudiante utiliza cuando está resolviendo problemas

- **Situación:**

  Es una tarea sencilla o compleja a la que se enfrenta el estudiante, como se dijo anteriormente, no necesariamente es una situación didáctica. Las clases de situaciones son:

  - Situación tipo I: el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación.
  - Situación tipo II: el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas, tentativas abortadas y le conduce eventualmente al éxito, o al fracaso.

1.3. LINEAMIENTOS CURRICULARES EN MATEMÁTICAS

Los *Lineamientos Curriculares* emanados por el Ministerio de Educación Nacional:

> Proponen unos referentes curriculares para orientar a las instituciones educativas en el diseño y desarrollo del currículo dentro del respectivo Plan Educativo Institucional. Estos referentes tienen que ver con la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones pedagógicas, sobre una nueva visión del conocimiento matemático escolar, sobre distintas posibilidades de organizar el currículo y sobre la evaluación. (Lineamientos Curriculares en Matemáticas, 1998)

Además de ser un referente para las instituciones educativas en la elaboración de los currículos, pretenden contribuir al aprendizaje de los estudiantes. Así:

> El enfoque de estos lineamientos está orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales como son la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana. (Lineamientos Curriculares en Matemáticas, 1998).

En estos lineamientos, se han conformado grupos con contenidos matemáticos que se deben enseñar en las instituciones educativas, con el fin de fortalecer los cinco pensamientos a saber: *pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medida, pensamiento aleatorio y sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.*

En esta PPI, la temática a desarrollar es la Geometría Analítica: La Línea Recta y Las Cónicas que se describirá posteriormente, está en el marco de los pensamientos: *pensamiento espacial y sistemas geométricos* y *pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.*

El pensamiento espacial y sistemas geométricos "… es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales." (Lineamientos Curriculares en Matemáticas, 1998), y está ligado al estándar "Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos" (Estandares Básicos en Competencias Matemáticas, 2006).

El pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos:

> …tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (Estandares Básicos en Competencias Matemáticas, 2006)

Este pensamiento, está ligado a los estándares "Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas" y "Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada". (Estandares Básicos en Competencias Matemáticas, 2006)

En las siguientes tablas que se presentan a continuación, se resume lo relacionado con los pensamientos, contenidos, competencias, indicadores de logros y logros para los estudiantes del grado Décimo de la Institución Educativa Los Comuneros, de acuerdo con el Plan Educativo Institucional en el área de matemáticas.

<table>
<tr><th colspan="5">Grado Decimo</th></tr>
<tr><th>Eje temático</th><th>Contenido</th><th>Competencias</th><th>Indicadores de logros</th><th>Logros</th></tr>
<tr>
<td>pensamiento espacial y sistemas geométricos</td>
<td>UNIDAD 3.
LA LINEA RECTA
1. Estudio analítico de la línea recta.
2. Distancia entre dos puntos.
3. Punto de división de un segmento.
4. Dirección y pendiente de una recta.
5. Formas de la ecuación de una recta
6. Rectas paralelas y perpendiculares.
7. Graficas de las cónicas.</td>
<td>INTERPRETATIVA
Identifica las formas de la ecuación de una recta.
Reconoce y diferencia las gráficas de las cónicas.

ARGUMENTATIVA
Explica la forma de hallar la distancia entre dos puntos.
Justifica la representación gráfica de las cónicas.

PROPOSITIVA
Plantea procedimientos en la construcción de gráficas.
Propone formas para encontrar la pendiente de una recta.</td>
<td>• Identifica los problemas fundamentales de los que se ocupa la geometría analítica.
• Aplica adecuadamente la fórmula de la distancia entre los puntos de un plano coordenado.
• Halla las coordenadas del punto medio en pares de puntos dados.
• Dados los puntos de un plano halla la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que une los dos puntos.
• Analiza y aplica correctamente las diferentes formas de la ecuación de la línea recta.
• Interpreta la pendiente de una recta como la tangente del ángulo de inclinación de está, respecto al eje positivo de las X
• Reconoce las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, entre dos rectas dadas, al analizar sus correspondientes pendientes.
• Halla la ecuación de una circunferencia cualquiera, dado su centro y su radio.
• Reconoce la ecuación de cada una de las cónicas a partir de la ecuación general de segundo grado.
• Reconoce y diferencia los elementos de la parábola, la elipse y la hipérbola.
• Traza la gráfica de cualquier ecuación que represente una sección cónica.
• Identifica, clasifica y representa las ecuaciones de cada una de las cónicas dadas algunas de sus características.
• Resuelve problemas correspondientes a las secciones cónicas, identificando los elementos importantes de ellas.</td>
<td>• Adquiere destreza en el manejo de la fórmula de la distancia entre dos puntos de un plano coordenado.
• Halla las coordenadas del punto medio en pares de puntos dados.
• Halla la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que une dos puntos.
• Explica cuáles son las distintas formas de la ecuación de la línea recta y analiza y aplica correctamente estas formas.
• Reconoce las ecuaciones de cada una de las cónicas a partir de la ecuación general de segundo grado.
• Reconoce y diferencia los elementos de la Parábola, la Elipse y la Hipérbola.
• Traza la gráfica de cualquier ecuación que represente una sección cónica.
• Evoca los conceptos de circunferencia y radio para hallar la ecuación de una circunferencia cualquiera, dado su centro y su radio.</td>
</tr>
</table>

Tabla 1. Pensamiento espacial y sistemas geométricos

Eje temático	Contenido	Competencias	Indicadores de logros	Logros
pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	**UNIDAD 10.** **LAS CONICAS** 1. Ecuación de la circunferencia con centro en el origen y con centro en un punto diferente al origen. 2. Parábolas (análisis de la 3. ecuación $y^2 = 4px$) 4. Ecuación de la parábola con vértice en el punto (h, k) y eje de simetría paralelo al eje X o Y 5. Elipse. Ecuación de la elipse con centro en el origen y en el punto (h, k) y el eje mayor es paralelo al eje X o Y. 6. La hipérbola, (Asíntotas de la hipérbola, ecuación de la hipérbola con centro en el origen y con centro en un punto diferente del origen y sus ejes paralelos a los ejes coordenados).	**INTERPRETATIVA** Identifica las ecuaciones de las cónicas y los elementos que conforman cada una de ellas **ARGUMENTATIVA** Justifica la construcción de las cónicas estudiadas. **PROPOSITIVA** Plantea formas de construir las cónicas utilizando algunos elementos de ellas.	• Halla la ecuación de una circunferencia cualquiera, dado su centro y su radio. • Identifica la ecuación de cada una de las cónicas. • Reconoce y diferencia los elementos de la parábola, la elipse y la hipérbola. • Traza la gráfica de cualquier ecuación que represente una sección cónica. • Halla las ecuaciones de cada una de las cónicas utilizando algunas de sus características y las aplica en la solución de problemas • Identifica, clasifica y representa las ecuaciones de cada una de las cónicas dadas algunas de sus características. • Resuelve problemas correspondientes a las secciones cónicas, identificando los elementos importantes de ellas. • Utiliza las transformaciones: translación y rotación de ejes, para el trazado de una sección cónica cuya ecuación no está dada en forma canónica	• Reconoce las ecuaciones de cada una de las cónicas a partir de la ecuación general de segundo grado. • Traza la gráfica de cualquier ecuación que represente una sección cónica. • Utiliza los conceptos de circunferencia y radio para hallar la ecuación de una circunferencia cualquiera, dado su centro y su radio. • Transforma una ecuación dada en otra que carece de términos de primer grado, ya sea mediante una traslación de ejes o usando el método de completar el cuadrado. • Deduce las ecuaciones de cada una de las cónicas dadas algunas de sus características.

Tabla 2. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

1.4. REFERENTES TEÓRICOS EN MATEMÁTICAS

En este caso, dado los objetos de estudio con los que se trabajó en el aula de clase, el referente teórico correspondiente al área de *las matemáticas,* está particularmente ligado a la *geometría analítica.*

La ***geometría analítica*** se encarga del estudio de la relación entre la ***geometría*** y el ***álgebra***, (Engler, Müller, Vrancken, & Hecklein, 2005, pág. 66) siendo el plano cartesiano un elemento fundamental para esta rama de las matemáticas, pues es el que permite obtener la ecuación algebraica de todas las curvas y como caso particular, las ecuaciones de la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

El objetivo en esta parte del trabajo es mostrar técnicamente cómo se obtienen estas ecuaciones, partiendo del concepto de punto.

1.4.1. LA LÍNEA RECTA

Como se mencionó anteriormente, el plano cartesiano es un elemento fundamental de la geometría analítica, está conformado por dos rectas numéricas perpendiculares entre sí y tiene como finalidad describir la posición de los puntos, la cual se determina a través de sus coordenadas.

La determinación de las coordenadas de un punto cualesquiera en el plano cartesiano permite, además de conocer su ubicación, usar una representación como $P(x, y)$ donde P es el nombre del punto que por convención siempre son letras mayúsculas, x la coordenada sobre el eje X e y la coordenada sobre el eje Y.

Otras representaciones usadas ocasionalmente son (x, y), o simplemente P, no solo en $\mathbb{R}^2$, sino en general para puntos en $\mathbb{R}^n$, P o x para $\mathbb{R}$ y $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para $\mathbb{R}^n$.

A partir de esta representación ($P(x, y)$) para el punto en $\mathbb{R}^2$, es posible deducir la ecuación que permite encontrar la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano, como se muestran a continuación:

En Lehmann (1989), se define la fórmula de la distancia entre dos puntos así:

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera sobre el plano, entonces la distancia entre estos dos puntos, está dada por la siguiente fórmula (Lehmann, 1989):

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ [1]

La determinación de las coordenadas de un punto cualesquiera sobre el plano cartesiano también permite obtener las coordenadas del punto medio $M(\bar{x}, \bar{y})$ del segmento que determinan dos puntos A y B (cualesquiera sobre el plano cartesiano), son $\bar{x} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ y $\bar{y} = \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)$, como se muestra en (Lehmann, 1989). De forma equivalente, el punto medio del segmento AB es $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Considerando un conjunto infinito de puntos colineales, se obtiene una línea recta y teniendo en cuenta las coordenadas de sus puntos, también es posible obtener su ecuación algebraica. Es conveniente empezar considerando en primera medida una recta horizontal seguida de una recta vertical y obtener su ecuación a partir de la observación de las coordenadas de sus puntos.

Es así como se concluye que una recta horizontal tiene por ecuación $y = b$; y para una recta vertical, su ecuación es $x = a$.

[1] Por simplicidad en la notación, en el lado izquierdo de la igualdad se usan únicamente los nombres de los puntos. Se omite la escritura de las coordenadas. La fórmula se obtiene mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras.

Para obtener la ecuación de una recta que no es horizontal ni vertical, se hace necesario introducir el concepto de ***pendiente*** de una recta, el cual está definido como sigue:

DEFINICIÓN:

Según Lehman (1989), se llama *pendiente* de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación respecto al eje X. La pendiente de una recta se denota comúnmente con la letra m, por lo tanto se puede escribir:

$$m = \tan \alpha$$

Donde α es el ángulo que forma la recta con el eje X.

A partir de dos puntos que pertenecen a la recta, también es posible obtener dicha pendiente, como se muestra en (Lehmann, 1989), esto es:

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos diferentes cualesquiera que pertenecen a una recta. Entonces la pendiente de la recta es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donde $x_1 \neq x_2$.

Con el concepto de pendiente, es posible decidir cuándo un par de rectas son horizontales o perpendiculares, así:

- Dos rectas no verticales y distintas, son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales. (Lehmann, 1989, pág. 23)
- Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a -1. (Lehmann, 1989, pág. 23)

También, es posible obtener la ecuación de una recta, pues si se conoce un punto que pertenece a la recta y su pendiente, la ecuación de la recta, como se muestra en (Lehmann, 1989, pág. 47) está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1), \text{ con } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$$

Dado que una recta está determinada por dos puntos, entonces la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, como se muestra en (Lehmann, 1989, pág. 60), es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), x_1 \neq x_2$$

1.4.2. LUGAR GEOMÉTRICO

Para introducir las definiciones de cada una de las cónicas, es preciso introducir el concepto de ***lugar geométrico***, pues las cónicas, son ejemplos particulares de lugares geométricos, así:

DEFINICIÓN

Lugar geométrico es el conjunto de puntos (x, y) en el plano que cumplen con una misma propiedad o condición geométrica**.** (Laorga, s. f.)

Ejemplo:

1. **La mediatriz** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento (Moise, 1986).
   En la siguiente figura se muestra la mediatriz del segmento que determina los puntos A y B.

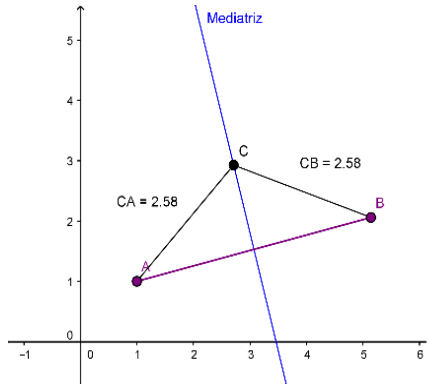


Figura 5. Mediatriz del segmento AB.

2. **Circunferencia:** Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado **centro.** (Oteyza, 2005)

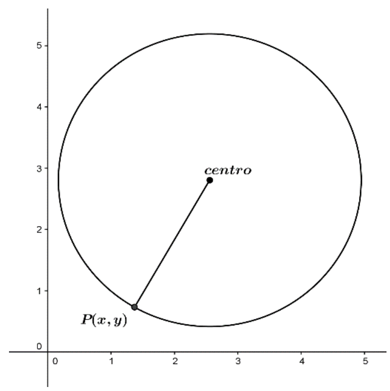


Figura 6. La circunferencia.

Escribiendo la condición geométrica que determina la circunferencia en lenguaje algebraico, se tiene que su ecuación está dada por $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ donde r es el radio de la circunferencia, el cual será definido a continuación y (h,k) es el centro de la misma. Esta ecuación, recibe el nombre de *ecuación canónica de la circunferencia.*

Las definiciones de los elementos de la circunferencia son:

- **Radio:** longitud del segmento de recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia. Su medida es constante. (Rojas, s. f., pág. 34)

- **Cuerda:** segmento que une dos puntos de la circunferencia. Las cuerdas tienen distintas medidas. (Rojas, s. f., pág. 34)
- **Diámetro:** cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, es la cuerda de mayor medida. La medida del diámetro es $2r$. (Rojas, s. f., pág. 35)

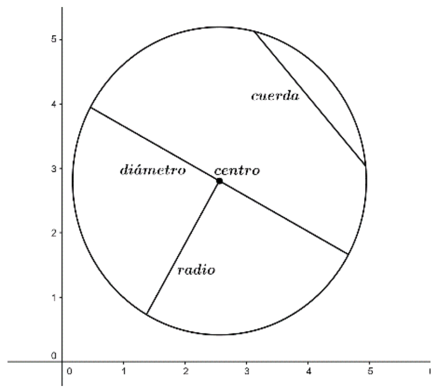


Figura 7. La circunferencia y sus elementos.

3. **Una parábola** es el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz.

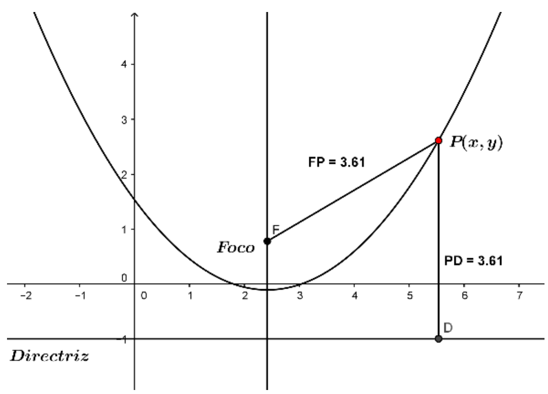


Figura 8. La parábola.

En (Benítez Mojica, Sánchez, & Morales Palomares, s. f.), los elementos de la parábola son presentados y definidos como se muestra a continuación:

- **Foco (F)**: Punto fijo dado que equidista de otros dos puntos, uno que se encuentra en la parábola, y el otro en la directriz. *Nota: una parábola sólo puede tener un foco.*
- **Directriz (D)**: es aquella línea que determina las condiciones de generación de otra línea.
- **Vértice (V)**: Punto de la parábola que es el punto medio de un segmento perpendicular a la directriz que se traza a partir del foco a dicha recta.
- **Eje de la parábola***:* Recta perpendicular a la directriz, que divide exactamente en dos partes iguales a la parábola.
- **Lado recto (LR)**: Segmento perpendicular al eje de la parábola que pasa por el foco, y que une dos puntos de la misma, llamados uno "***L***" y el otro "***R***".
- **Parámetro (p)**: Es la distancia del foco al vértice ***FV***, la misma que se encuentra del vértice al punto de intersección la directriz con el eje de la parábola.

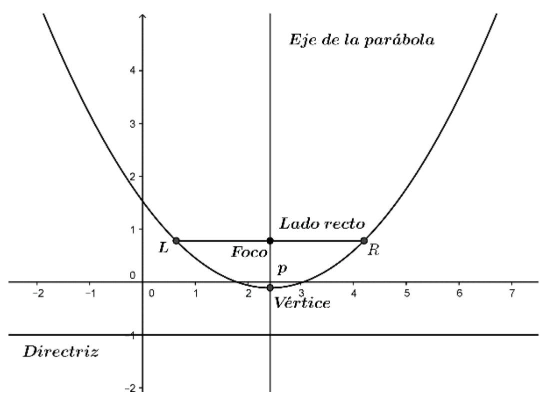


Figura 9. La parábola y sus elementos.

A partir de la definición formal de la parábola, escribiendo en lenguaje algebraico la condición geométrica que la determina. Concluyendo lo siguiente:

- Si el eje de la parábola es paralelo al eje Y, la ecuación de la parábola está dada por:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Donde las coordenadas del centro y el foco son (h,k) y $(h,k+p)$ respectivamente y la ecuación de la recta directriz es $y = k - p$.

Si p es positiva la parábola abre hacia arriba y si p es negativa la parábola abre hacia abajo. En la siguiente figura se muestra gráfica de una parábola cuando p es positiva.

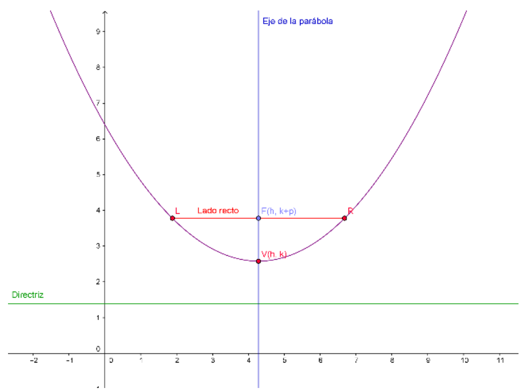


Figura 10. La parábola con p *positiva.*

- Si el eje de la parábola es paralelo al eje X, la ecuación es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Donde las coordenadas del centro y el foco son (h,k) y $(h+p,k)$ respectivamente y la ecuación de la recta directriz es $x = h - p$.

Si p es positiva la parábola abre hacia la derecha y si p es negativa la

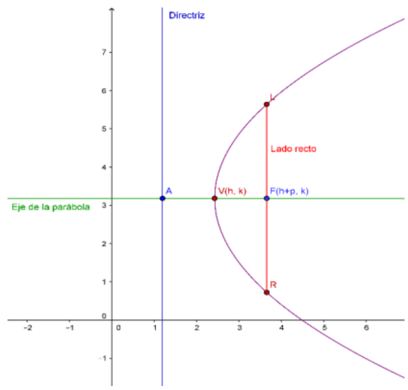


Figura 11. La parábola con p positiva.

parábola abre hacia la izquierda.

4. **La elipse** es el lugar geométrico de los puntos de tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados *focos* es constante. (Pérez, Caro, & Obonaga, 1985, pág. 386)

   Los elementos de la elipse son presentados y definidos en (Lehmann, 1989, págs. 173-174) así:

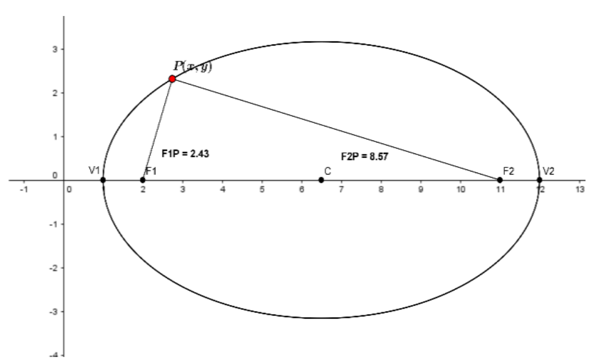


Figura 12. La elipse

- **Focos:** son dos puntos fijos.
- **Eje focal:** recta que pasa por los dos focos.
- **Vértices:** puntos en los cuales el eje focal corta a la elipse.

- Sea a la distancia desde el centro de la elipse a cualquiera de sus vértices. Entonces el **Eje mayor** es el segmento de recta comprendido entre los dos vértices, cuya longitud es $2a$.
- **Centro:** punto medio del segmento que une los focos.
- **Eje normal:** recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro de la elipse.
- Sea b la distancia desde el centro de la elipse a cualquiera de sus puntos de corte. Entonces el **Eje menor** es el segmento de recta comprendido entre los dos puntos de corte de la elipse con el eje normal, cuya longitud es $2b$.
- **Cuerda:** segmento de recta que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, cuando este segmento pasa por alguno de los focos, se denomina **cuerda focal**.
- **Lado recto:** cuerda focal perpendicular al eje focal, cuya longitud es $LR = \frac{2b^2}{a}$

Los elementos se muestran en la siguiente imagen:

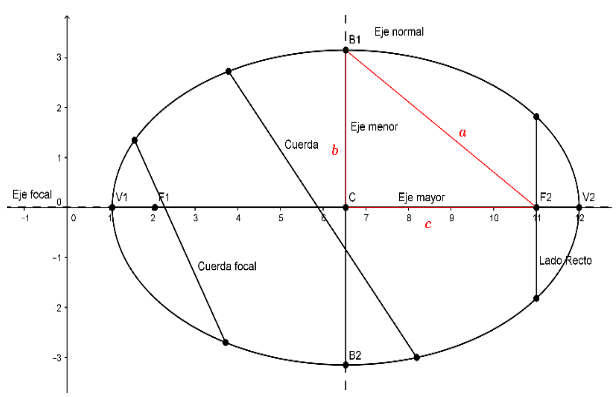


Figura 13. La elipse y sus elementos.

Sea una elipse con centro $C(h, k)$, eje mayor de longitud $2a$, eje menor de longitud $2b$, $2c$ la distancia entre los focos donde c es la distancia desde el centro de la elipse a cualquiera de sus focos y $P(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Entonces esta elipse tiene la siguiente ecuación:

- Si el eje mayor es paralelo al eje X, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

  Donde:

  Las coordenadas del centro son $C(h, k)$

  Las coordenadas de los vértices son $V(h \pm a, k)$

  Las coordenadas de los focos son $F(h \pm c, k)$

En la siguiente figura se muestra una elipse con eje mayor paralelo al eje X y las coordenadas del centro, vértices y focos respectivamente.

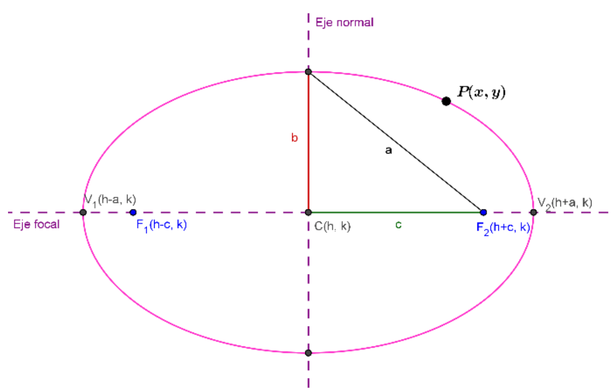


Figura 14. Elipse con eje mayor paralelo al eje X.

- Si el eje mayor es paralelo al eje Y, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

  Donde:

Las coordenadas del centro son $C(h, k)$

Las coordenadas de los vértices son $V(h, k \pm a)$

Las coordenadas de los focos son $F(h, k \pm c)$

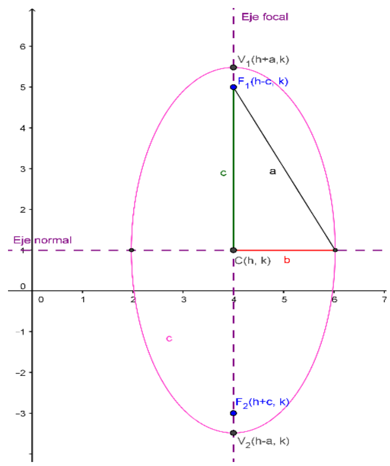


Figura 15. Elipse con eje mayor paralelo al eje Y.

5. **Una hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre constante. (Pérez, Caro, & Obonaga, 1985, pág. 396)

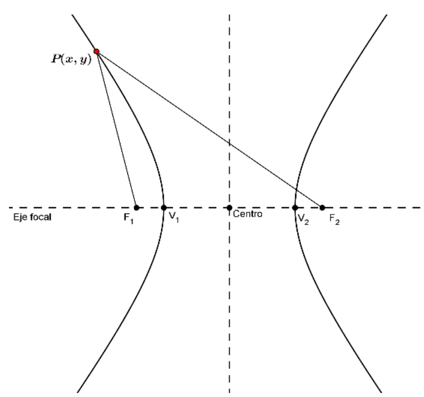


Figura 16. La hipérbola.

Los elementos de la hipérbola son presentados y definidos en (Lehmann, 1989, pág. 192), como se muestra a continuación:

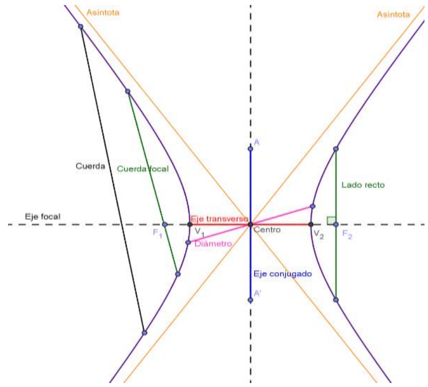


Figura 17. La hipérbola y sus elementos.

Sean V_1, V_2 los vértices y F_1, F_2, los focos de una hipérbola. Entonces:

- **Focos:** puntos fijos.
- **Eje focal:** recta que pasa por los focos. La distancia desde el centro a cualquiera de los focos es c.
- **Vértices:** puntos en los que el eje focal corta a la hipérbola.
- Sea a la distancia desde el centro de la hipérbola hasta cualquiera de los vértices. Entonces el **Eje transverso** es el segmento comprendido entre los vértices, cuya longitud es $2a$.
- **Centro**: punto medio del eje transverso.
- **Eje normal:** recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro.
- Sea b la distancia desde el centro de la hipérbola hasta cualquiera de los puntos de corte del eje normal con la hipérbola. Entonces el **Eje conjugado** es el segmento del eje normal comprendido entre los puntos A y A' como se muestra en la siguiente imagen y cuya longitud es $2b$

- **Cuerda:** segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la hipérbola, los cuales pueden ser de la misma rama. Si la cuerda pasa por un foco, se denomina cuerda focal.
- **Lado recto:** cuerda focal perpendicular al eje focal.
- **Diámetro:** cuerda que pasa por el centro
- **Asíntotas:** rectas auxiliares que permiten la construcción de la cónica. La curva jamás toca la recta.

Como en los casos anteriores, escribiendo la condición geométrica que determina la hipérbola en lenguaje algebraico, se obtiene la ecuación de la hipérbola, esto es

- Si el eje transverso es paralelo al eje X, la ecuación de la hipérbola es:

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Donde:

Las coordenadas del centro son $C(h, k)$.

Las coordenadas de los vértices son $V(h \pm a, k)$.

Las coordenadas de los focos son $F(h \pm c, k)$.

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = k \pm \frac{b}{a}(x - h)$.

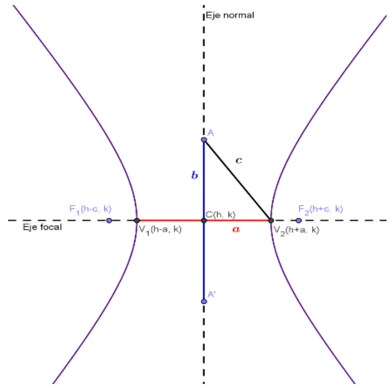


Figura 18. La hipérbola con eje transverso paralelo al eje X.

- Si el eje transverso es paralelo al eje Y, la ecuación de la hipérbola es:

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$$

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

Donde:

Las coordenadas del centro son $C(h, k)$.

Las coordenadas de los vértices son $V(h, k \pm a)$.

Las coordenadas de los focos son $F(h, k \pm c)$.

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = k \pm \frac{a}{b}(x - h)$.

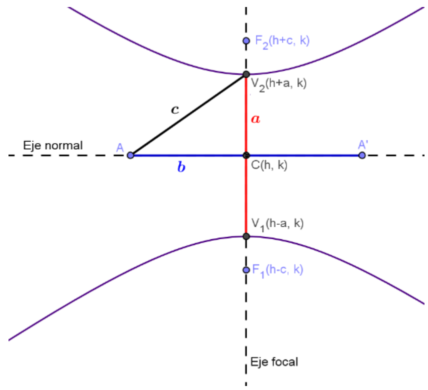


Figura 19. La hipérbola con eje transverso paralelo al eje Y.

Capítulo II. ENTORNO INSTITUCIONAL

LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA

Además de los referentes teóricos presentados anteriormente, es indispensable disponer de una institución educativa para llevar a cabo la intervención en aula de la PPI, pues es la institución la que brinda los medios necesarios para llevarla a cabo (aula y estudiantes)

La intervención en aula se llevó a cabo en la Institución Educativa Los Comuneros (sede principal) ubicada en carrera 7 # 21-4, comuna seis, barrio Los Comuneros, sur de la ciudad de Popayán, y abarcó el cuarto periodo del año lectivo 2015.

Esta institución, cuenta con dos sedes adicionales:

La Escuela José Antonio Galán, fundada mediante decreto 139 del 19 de junio de 1939, asignándosele una directora y dos subdirectoras. En sus inicios se trabajó con niñas, y a partir de 1970 se admitieron niños. El bachillerato se inició con la jornada sabatina en el año 2002 y en el año 2003, la básica secundaria en la jornada de la mañana, y **La Escuela Primero de Mayo** que inicia actividades el 18 de enero de 1978 con un grupo de 25 niños de ambos sexos. Por orden de la Secretaría de Educación Departamental hasta el 10 de julio de 1998 atiende los niveles de preescolar y primaria, después de esta fecha funciona solo para el nivel de preescolar (Educación para nutrir la vida, s. f.)

Tiene como **Misión** formar personas fortaleciendo su pensamiento, para facilitarles el acceso al conocimiento de la ciencia, la tecnología y el arte, de tal manera que participe en la generación de oportunidades para vivir mejor como individuos y como sociedad; y como **Visión**, espera en cinco años convertir la

Institución Educativa Los Comuneros, en uno de los puntos de referencia del desarrollo sociocultural de la Comuna Seis del municipio de Popayán, a través de la contextualización y pertinencia de su proyecto educativo. (Educación para nutrir la vida, s. f.)

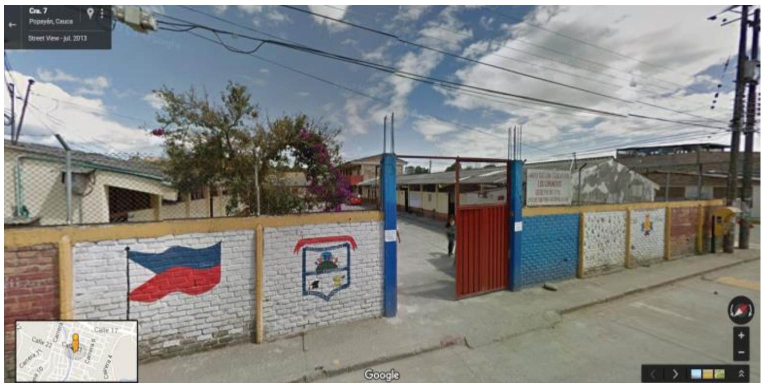


Imagen 1. Institución Educativa Los Comuneros.

La institución educativa Los Comuneros, aprovechando las posibilidades que ofrece la Ley General de Educación, Ley 115 del 8 de febrero de 1994, con un grupo de líderes comunales y educadores visionando el futuro inmediato, propuso la ampliación de la cobertura más allá del tercero de primaria y llegar hasta el bachillerato completo. Se inició entonces el ciclo de secundaria con 30 estudiantes, cuyos padres de familia exigieron para ellos la creación de una jornada nocturna, pues "necesitaban capacitarse para apoyar académicamente a sus hijos". (Educación para nutrir la vida, s. f.)

En esta sede se presta el servicio en tres jornadas: En la mañana de 7:00 a 12:00 atiende estudiantes de primaria; en la tarde de 12:10 a 18:10, atiende estudiantes de básica secundaria y media; y en la noche de, 19:00 a 20:45, se trabaja con programa de educación de adultos en todos los ciclos.

SALÓN DE INTERVENCIÓN EN AULA.

En general, las aulas de esta institución cuentan con pupitres suficientes para los estudiantes, buena iluminación y un tablero pequeño adicionalmente a ello, el ruido del exterior en muchas ocasiones perturba las clases.

Imagen 2. Aula grado Décimo B.

LOS ESTUDIANTES

Dentro del Proyecto Educativo Institucional (PEI) de la Institución Educativa Los Comuneros, la temática correspondiente a la geometría analítica, se encuentra en el currículo del grado Décimo, por esta razón, fue escogido el grado décimo B de la institución, ya que este grupo de estudiantes cumple con los requisitos necesarios para desarrollar la intervención en aula de la Práctica Pedagógica Investigativa.

Imagen 3. Los estudiantes.

El grado décimo B, estaba conformado por 26 estudiantes (16 hombres y 10 mujeres) con edades entre los 14 y 18 años de edad; el área de matemáticas estaba a cargo del licenciado en matemáticas, e ingeniero civil de la Universidad del Cauca, Albeiro cerón.

Durante las actividades desarrolladas en clase, se observó en los estudiantes un fuerte compañerismo y una excelente calidad humana, reflejada a la hora de dirigirse a la practicante.

A pesar de este lazo de amistad, las dudas respecto a un tema determinado fueron hechas en forma individual, posteriormente socializadas en algunos casos por parte de la practicante hacía el resto de estudiantes.

Capítulo III. DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA INVESTIGATIVA

Antes de describir la intervención en el aula, se presenta una descripción en términos generales de las estrategias de enseñanza más utilizadas para esta temática. Esta descripción se denomina *antecedentes*, la cual se muestra a continuación.

3.1. ANTECEDENTES

Los trabajos de investigación relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas, ha sido de interés desde diferentes niveles de formación. Así, en la búsqueda de antecedentes se encuentran resultados, principalmente a nivel de maestría, que centran su atención en propuestas didácticas que involucran diferentes tipos de recursos didácticos.

La mayoría de estos trabajos realizados a nivel de maestría y encontrados en la web, tienen como objetivo principal la enseñanza y el aprendizaje de una o varias cónicas, generalmente en básica secundaria (10° y 11°). Para ello, involucran recursos didácticos como software de geometría dinámica tales como: GeoGebra, Cabri II plus, Winplot y Regla y compás; otros hacen uso de la relación que tienen estos objetos matemáticos con la astronomía para motivar el aprendizaje en los estudiantes; uso de plastilina para elaborar conos y obtener las cónicas a partir de los cortes realizados en dicho cono, uso del cono de Apolonio y chorros de agua para observar la trayectoria parabólica que este describe y uso de papel para obtener las cónicas mediante dobleces sobre éste (los dobleces se realizan mediante instrucciones específicas).

Finalmente, en los trabajos que implementaron el uso de software se menciona que los resultados fueron satisfactorios, dado que la tecnología es atractiva para los estudiantes.

A nivel local, no se encontraron trabajos realizados anteriormente con esta temática.

3.2. INTERVENCIÓN EN AULA

La PPI, es el espacio curricular que brinda condiciones reales a los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas para vivenciar experiencias de aula cercanas a lo que será el desempeño profesional.

La PPI I, fue la etapa de fundamentación en investigación en educación, para ello se tomó como referente los textos: *Lineamientos curriculares en Matemáticas* (1998) y *Estándares Básicos en Competencias Matemáticas* ofrecidos por el Ministerio de Educación Nacional, y la *Teoría de Campos Conceptuales de Vergnaud* (1990).

En la PPI II, teniendo en cuenta el de la institución donde se iba a llevar a cabo la intervención en aula, se definió el objeto de enseñanza: *Las cónicas*, debido al gusto personal que la practicante tiene por la geometría y se diseñaron las clases incluyendo los temas desde línea recta hasta *las cónicas.*

Iniciando la PPI III, se acordó con el profesor Albeiro Cerón, docente a cargo del grupo, comenzar la intervención en aula durante el cuarto periodo escolar del año lectivo 2015.

Durante este periodo, comprendido entre los meses de septiembre y noviembre, se acordó con el profesor orientar los temas correspondientes a la geometría analítica.

El horario establecido para llevar a cabo la intervención en aula fue lunes y miércoles de 16:10 hasta las 17:10 pm y jueves de 12:10 hasta las 14:10 horas.

Antes de iniciar la intervención en aula, se asistió a una clase en calidad de observadora con el fin de conocer el comportamiento de los estudiantes así como también la dinámica seguida por el profesor durante su práctica profesional.

Se planeó la elaboración y aplicación de una prueba diagnóstica para determinar los conocimientos previos relevantes para el desarrollo de los temas a trabajar en el aula, tales como, reconocimiento de las representaciones de los objetos matemáticos, punto, recta y plano, ubicación de puntos en el plano cartesiano, teorema de Pitágoras y gráfica de una función lineal. El instrumento diseñado e implementado en esta evaluación se presenta en los anexos de este trabajo.

Los resultados encontrados en esta evaluación, que dan cuenta de los conocimientos que los estudiantes manifestaron, fueron clasificados en relación con la cercanía a las definiciones esperadas, encontrando desde términos muy bien relacionados hasta aquellos que no muestran esbozo alguno de una apropiación conceptual adecuada; algunos de estos se presentan en las siguientes imágenes:

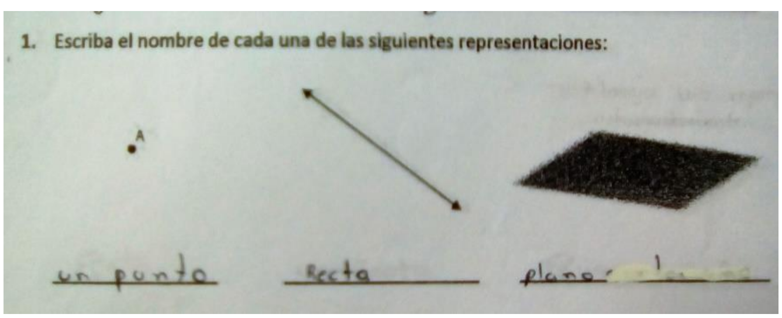


Figura 20. Términos geométricos asociados a las representaciones.

En la figura 20, se observa el uso de los términos geométricos más adecuados para nombrar cada una de las representaciones y que son utilizados por los estudiantes.

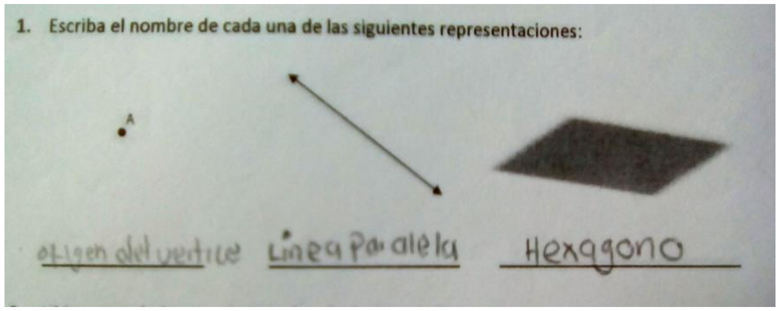


Figura 21. Términos geométricos no asociados a las representaciones.

En la figura 21, se presenta un ejemplo del uso de términos geométricos no adecuados para nombrar cada una de las representaciones.

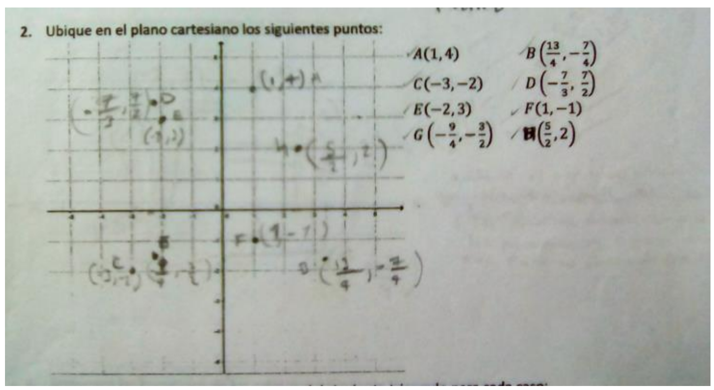


Figura 22. Ubicación correcta de la totalidad de los puntos.

En la figura 22, se observa que el estudiante ubica la totalidad de los puntos en el plano cartesiano sin ningún inconveniente.

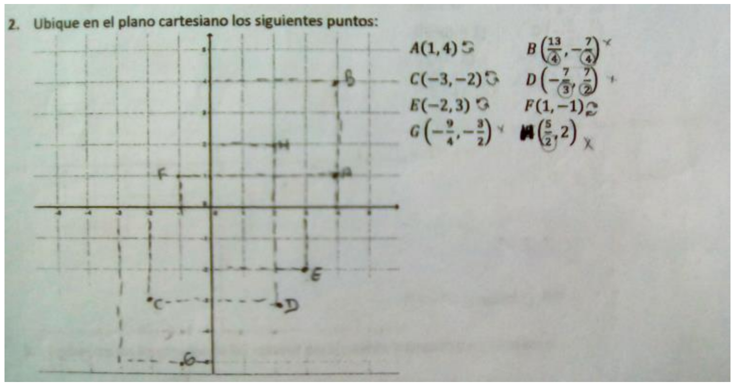


Figura 23. Ubicación incorrecta de los puntos.

En la figura 23, se observa una estrategia con la que los estudiantes invierten el orden de las coordenadas para ubicar los puntos sobre el plano en el caso de las coordenadas enteras; para las coordenadas racionales, ubican los denominadores de las fracciones invirtiendo el orden de las coordenadas también.

Esta evaluación permitió identificar inconsistencias en dichos conceptos, por lo que las primeras sesiones de trabajo de aula se dedicaron a reforzar estos temas, procurando que los estudiantes expresaran sus dudas, algunas de las cuales fueron socializadas por parte de la practicante. Agotada esta fase, se dio inicio a la orientación de los temas a desarrollar durante el periodo.

Para los temas de *distancia entre dos puntos* y *línea recta,* se adoptó la siguiente metodología:

La orientación de la teoría se hizo mediante clases magistrales, en las cuales se presentaron y explicaron los conceptos, y se propusieron ejemplos pertinentes para los temas.

Para aportar en el fortalecimiento de la comprensión de algunos temas se desarrollaron talleres, los cuales también contribuyeron a la preparación para la evaluación correspondiente. Estos talleres incluían ejercicios para utilizar las fórmulas estudiadas y otros de aplicación.

En cuanto a las evaluaciones propuestas, los ítems a desarrollar, son similares a los de los talleres que buscaban establecer situaciones ante las cuales los estudiantes pudieran activar los esquemas mentales correspondientes a las representaciones de los objetos estudiados. Adicionalmente, en tres ocasiones, se propusieron ejercicios para desarrollar en casa, con la intención de dinamizar el trabajo y extenderlo a otros espacios de socialización de los estudiantes.

La metodología adoptada para los temas de *lugar geométrico* y *las cónicas,* fue la siguiente:

Se implementó un ejercicio que procuraba conducir a la definición de lugar geométrico, el cual consiste en construir el lugar geométrico que describe la mediatriz de un segmento dando las siguientes indicaciones:

- Dibujar dos puntos cualesquiera sobre el papel suministrado.
- Construir el segmento que determinan los puntos escogidos anteriormente.
- Encontrar un punto que equidiste de los puntos. Algunos de los estudiantes notaron que uno de los puntos que satisface esta condición corresponde al punto medio del segmento.
- Repetir el paso anterior 5 veces.

Terminadas las indicaciones, se pidió a los estudiantes describir la forma en que habían encontrado tales puntos.

Algunas de las construcciones hechas por los estudiantes se presentan a continuación:

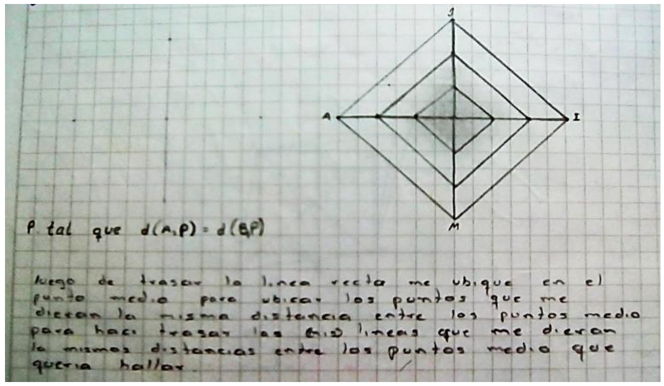


Figura 24. Construcción 1.

La justificación dada en esta construcción fue la siguiente:

"*Luego de trazar la línea recta me ubiqué en punto medio para ubicar los puntos que me dieran la misma distancia entre el puntos medio para así trazar las (mis) líneas que me diera las mismas distancias entre el punto medio que quería hallar*"

El procedimiento hecho por el estudiante es el siguiente:

Traza el segmento de recta pedido (segmento AI) y ubica el punto medio de este segmento. Seguidamente ubica cuatro puntos que equidisten de este punto medio (la distancia usada es escogida por él, para ello toma como referencia la cuadrícula de la hoja tomando dos cuadros), cada uno de estos puntos es el punto medio de un nuevo segmento, encuentra el otro extremo y repite el proceso.

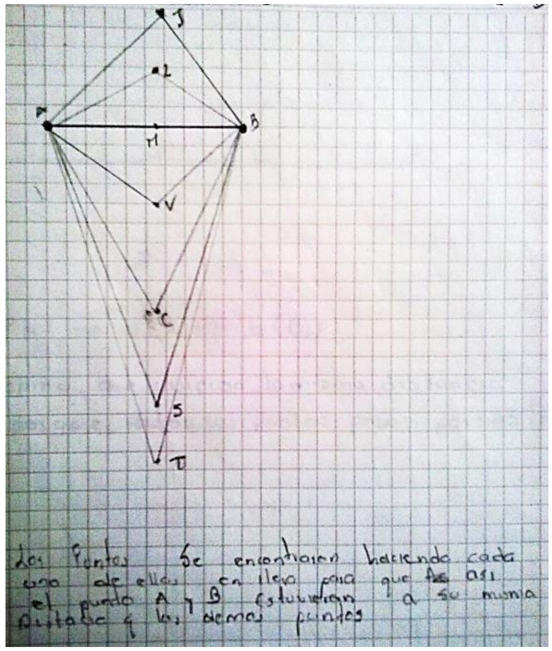


Figura 25. Construcción 2.

La justificación dada en esta construcción es la siguiente:

"Lo*s puntos se encontraron haciendo cada uno de ellos en hilera para que así el punto A y B estuvieran a su misma distancia y los demás puntos*"

En esta construcción, aunque el estudiante concibe que los puntos que satisfacen la condición de equidistancia de los extremos del segmento, son infinitos, lo hace de manera infinita numerable.

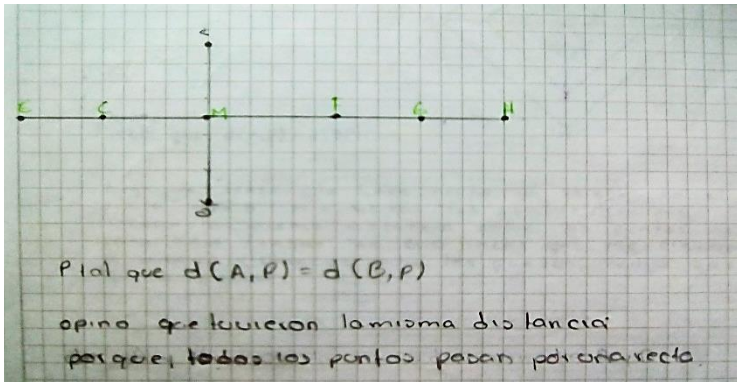


Figura 26. Construcción 3.

La justificación dada en esta construcción fue la siguiente:

"*Opino que tuvieron la misma distancia porque todos los puntos pasan por una recta*"

En este caso se puede observar que el estudiante logra concebir todo el lugar geométrico que determina la mediatriz.

Partiendo del ejercicio anterior se presenta la definición formal de lugar geométrico y se procede a presentar cada una de las cónicas como ejemplos de esta definición, así:

Para la *circunferencia* y *la parábola,* se entrega a los estudiantes una figura de la cónica señalando sus principales elementos y presentado las respectivas definiciones de estos, y usando la definición de lugar geométrico, se presenta la definición de la cónica.

El objetivo es que los estudiantes, a partir de la lectura y estudio de esta definición, logren ubicar sobre la figura los elementos de la cónica como se muestra en las siguientes imágenes respectivamente.

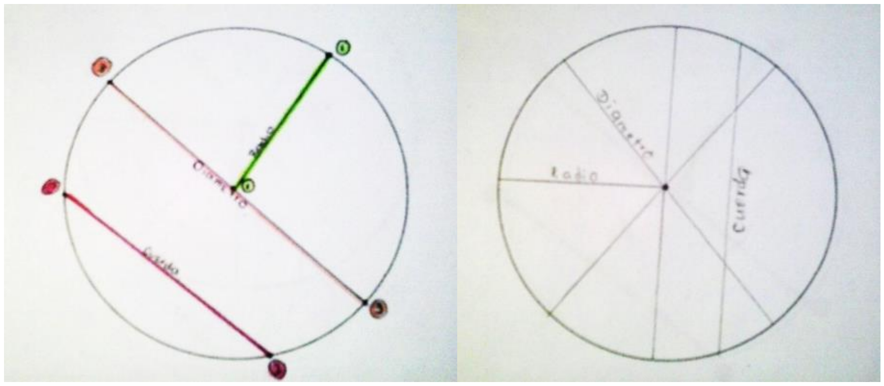


Figura 27. Ubicaciones de los elementos de la circunferencia.

En la figura 27, se pueden observar dos ubicaciones de los elementos de la circunferencia hechas por dos estudiantes, quienes disponían de total libertad para realizar esta actividad.

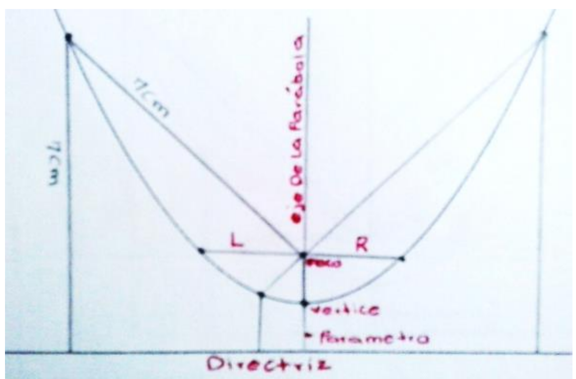


Figura 28. Ubicación de los elementos de la parábola.

En la figura 28, se observa la ubicación de los elementos de la parábola hecha por un estudiante.

Posterior a esto, se presentan las ecuaciones canónicas, así como también ejercicios para desarrollar el tema y encontrar tales ecuaciones.

Para el caso de la *elipse* y *la hipérbola,* también se entrega la figura de la cónica donde se presentan sus principales elementos y la definición de los mismos, la definición de la cónica y finalmente la ecuación canónica, coordenadas del centro, vértices, focos y asíntotas.

Por problemas de impresión, se omitió información que debía aparecer en los textos que iban a ser entregados a los estudiantes, por esta razón, en estos dos casos, durante el desarrollo de la presentación de la teoría correspondiente a estas dos cónicas (elipse e hipérbola), se hace una lectura en conjunto con los estudiantes con el fin de completar los conceptos que se piden en los espacios en blanco (longitudes de ejes, ecuaciones y coordenadas de puntos), explicando en cada uno de los casos cómo se obtiene la respuesta adecuada.

En la PPI IV, se estableció la estructura general del documento, con el fin de realizar la redacción de cada una de sus partes, para ello, se hicieron múltiples sesiones de acompañamiento con el director de práctica, así como la revisión de documentación para complementar los análisis y en general este trabajo.

Capítulo IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Aunque la temática desarrollada en el transcurso la PPI corresponde a la Geometría Analítica: Línea Recta y Las Cónicas, serán presentados únicamente los resultados obtenidos correspondientes a la evaluación diagnóstica y a la línea recta.

Evaluación Diagnóstica

Después de la revisión de la evaluación diagnóstica realizada, se hizo la categorización que se presenta en la tabla siguiente y en la que se observan las categorías de análisis, su descripción y el número de estudiantes ubicados en ella.

Categorías de la prueba diagnóstico. (Resultados de 25/26 estudiantes**)**

PRIMER PUNTO: representaciones geométricas.

En este primer punto, se pide escribir los nombres de las representaciones usadas generalmente para designar un punto, una recta y el plano. Las categorías encontradas se describen en la siguiente tabla.

Categoría	Descripción	% de estudiantes
C1. Uso de Términos geométricos adecuados	Utiliza términos geométricos de forma adecuada para representar los objetos presentados	72%
C2. Uso de Términos geométricos no adecuados	Utiliza términos geométricos de forma inadecuada para representar los objetos presentados	12%
C3. Uso de otros Términos	Utiliza otros términos para representar los objetos presentados	8%
C4. Omisión	No se atreve a representar los objetos presentados	8%

Tabla 3. Categorías punto 1 de la evaluación diagnóstica.

En la primera categoría se ubican el 72% de los estudiantes, quienes asocian términos geométricos como: punto, origen o punto, origen o vértice para la representación de punto; recta, línea, línea recta, línea infinita, línea indefinida, semirrecta, línea semirrecta para la representación de recta; y finalmente plano, trapecio, base o rectángulo, polígono, trapecio base para la representación de plano, que constituyen conceptos geométricos adecuados para nombrar o representar los objetos matemáticos presentados en la prueba.

Estos porcentajes permitieron intuir que las condiciones básicas necesarias para el desarrollo de los temas a presentar en el aula se encontraban adecuados, por lo que no se tuvo necesidad de implementar un plan de actualización para los estudiantes, quienes generalmente presentaron una buena actitud frente al trabajo propuesto en cada una de las sesiones.

En la segunda categoría, con un 12%, se ubicaron los estudiantes que asocian términos como: parábola, línea paralela para la representación de recta; hexágono para la representación de plano.

Con esto se completa un 84% de estudiantes que presentan una cercanía con los conceptos geométricos asociados a los objetos evaluados en la prueba diagnóstica, lo que corrobora la afirmación realizada antes, en relación con las expectativas esperadas con este grupo de estudiantes.

En la tercera categoría, con un 8%, se ubicaron los estudiantes que asocian términos como: punto de referencia/ubicación, punto de referencia y, sombreado para la representación de plano.

En la última categoría, también con un 8%, se ubicaron los estudiantes que no se atrevieron a dar un nombre a los objetos presentados.

Este grupo, conformado por el 16% de los estudiantes, obligó una reflexión en relación con la observación de su desempeño, teniéndolos presente en cada momento del desarrollo de las actividades y procurando su participación activa y promoviendo su trabajo con la intención de que su desempeños fueran incrementándose paulatinamente durante el tiempo de trabajo de aula adelantado.

SEGUNDO PUNTO: ubicación de puntos en el plano cartesiano.

En este punto, se pide ubicar ocho puntos sobre el plano cartesiano (dos por cada cuadrante), donde cuatro de los puntos propuestos corresponden a puntos con coordenadas enteras y los cuatro restantes corresponden a puntos con coordenadas racionales. Las categorías encontradas se presentan en la siguiente tabla.

Categoría	Descripción	% de estudiantes
C1. Reconoce la naturaleza de $A(x, y)$ y asocia con los ejes coordenados	Reconocen el tipo de coordenadas de los puntos, los relacionan con los ejes coordenados y los ubican en el plano cartesiano.	44%
C2. No Reconoce la naturaleza de $A(x, y)$ y asocia con los ejes coordenados	No reconocen el signo de las coordenadas del punto o tipo de coordenada, pero ubican el punto en el plano cartesiano.	8%
C3. Reconoce la naturaleza de $A(x, y)$ y no asocia con los ejes coordenados	Reconocen los signos y el tipo de coordenadas de los puntos, invierten el orden las coordenadas cuando ubican el punto.	16%
C4. No reconoce la naturaleza de $A(x, y)$ y no asocia con los ejes coordenados	No reconocen el signo y el tipo de coordenada e invierten el orden de las mismas cuando ubican el punto.	4%
C5. No ubicación de puntos.	Omiten la ubicación de la mayoría o totalidad de los puntos.	28%

Tabla 4. Categorías punto 2 de la evaluación diagnóstica.

En la primera categoría con un 44%, se ubicaron los estudiantes que no manifestaron ningún inconveniente para ubicar puntos sobre el plano cartesiano, esto es, reconocen el signo y el tipo de la coordenada y así mismo, la asocian con los ejes.

En la segunda categoría con un 8%, se ubicaron los estudiantes que no reconocen la naturaleza de las coordenadas del punto, esto es, omiten el signo de la coordenada y en el caso de las coordenadas de tipo racional, no logran hacer una aproximación adecuada, pero sin embargo, ubican el punto modificado en el plano cartesiano.

Este 52% de los estudiantes, logran ubicar puntos en el plano cartesiano, por esta razón las actividades realizadas con ellos durante las primeras sesiones de trabajo, no requieren mayor atención.

En la tercera categoría con un 16%, se ubicaron los estudiantes que a pesar de reconocer la naturaleza de las coordenadas de los puntos, no asocian con los ejes, es decir invierten el orden de las coordenadas para poder ubicar el punto en cuestión sobre el plano cartesiano.

En la cuarta categoría con un 4%, se ubica un estudiante que no reconoce la naturaleza de las coordenadas, esto es, como en casos anteriores omite el signo de la coordenada, y en el caso de las coordenadas racionales, ubica los denominadores y además de ello, invierte el orden de las coordenadas.

En la quinta categoría con un 28%, se ubican los estudiantes que no ubican ningún punto, o la mayoría de los puntos en cuestión sobre el plano cartesiano. En la mayoría de los casos, los puntos que no fueron ubicados corresponden a puntos con coordenadas de tipo racional, solamente en 3 casos no se ubicó ningún punto.

Este último 48% de los estudiantes, presenta dificultades para ubicar puntos sobre el plano cartesiano, por esta razón, requirieron mayor atención durante el desarrollo de las actividades dedicadas al reforzamiento de este tema.

En términos generales, se pudo observar que la mayoría de los estudiantes presentaba inconvenientes para ubicar puntos con coordenadas cartesianas, ya sea por no contar con una herramienta tecnológica como una calculadora para realizar una adecuada aproximación de la misma, o por una confusión en el concepto, pues en algunos casos, los puntos eran ubicados utilizando únicamente los denominadores de las fracciones.

TERCER PUNTO: aplicación el teorema de Pitágoras.

En este punto, se presenta un triángulo rectángulo y el objetivo aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar las longitudes de cada uno de sus catetos y la hipotenusa.

Categoría	Descripción	% de estudiantes
C1. Aplica el teorema de Pitágoras en los tres casos.	Aplican el teorema de Pitágoras, dando aproximaciones para las raíces obtenidas como respuesta.	40%
C2. Aplica el teorema de Pitágoras, sólo dos respuestas correctas.	Aplican el teorema en los tres casos, pero únicamente en dos de ellos obtienen la respuesta correcta.	12%
C3. Aplica el teorema de Pitágoras, sólo una respuesta correcta.	Aplican el teorema en los tres casos o en uno solo, pero obtienen una sola respuesta correcta.	20%
C4. No aplica el teorema de Pitágoras o solo lo aplica en un caso.	Algunos de los estudiantes aplican el teorema uno de los tres casos, pero no obtienen la respuesta correcta, otros estudiantes no aplican el teorema en ninguno de los casos.	28%

Tabla 5. Categorías punto 3 de la evaluación diagnóstica.

En la primera categoría con un 40% se ubican los estudiantes que aplican el teorema de Pitágoras en los tres casos, dan respuestas correctas y además de ello, logran dar una aproximación para las raíces que obtuvieron como respuesta.

En la segunda categoría con un 12%, se ubicaron los estudiantes que a pesar de que ubicaron el teorema de Pitágoras en los tres casos, lograron obtener únicamente dos respuestas correctas.

En la tercera categoría con un 20%, se ubicaron los estudiantes que aplicaron en teorema en los tres casos o en un único caso, pero finalmente obtuvieron una respuesta correcta. En uno de los casos observados, el estudiante olvida extraer la raíz cuadrada para dar la respuesta deseada.

En la cuarta categoría con un 28%, se ubicaron los estudiantes que aplicaron el teorema de Pitágoras en los tres casos propuestos, no lograron obtener ninguna respuesta correcta. En otros casos el teorema de Pitágoras no fue aplicado.

CUARTO PUNTO: gráfica de una función lineal.

Este punto consiste en graficar una función lineal, la cual está dada en la forma $y = mx + b$. Las categorías obtenidas se presentan en la siguiente tabla.

Categoría	Descripción	% de estudiantes
C1. Tabula y grafica el plano cartesiano.	Los estudiantes toman valores de x particulares para encontrar el valor de y, algunos grafican el plano cartesiano, pero sin embargo, ninguno de ellos grafica la función lineal.	16%
C2. No tabulan, no grafican.	Este grupo de estudiantes, no hacen ningún procedimiento para intentar graficar la función lineal como en el grupo anterior.	84%

Tabla 6. Categorías punto 4 de la evaluación diagnóstica.

En la primera categoría con un 16%, se ubicaron los estudiantes que en algunos casos tabularon y en otros casos, al menos graficaron el plano cartesiano e hicieron el bosquejo de lo que sería la gráfica de la función propuesta.

En la segunda categoría con un 84%, se ubicaron los estudiantes que no hicieron ningún procedimiento ni algebraico ni geométrico para dar solución al ejercicio propuesto.

Finalmente, durante las actividades posteriores relacionadas con cada uno de estos temas, se hizo énfasis en las dificultades observadas para reforzar los conceptos de los estudiantes.

Para describir el desempeño de los estudiantes, se decidió utilizar una escala cualitativa basada en los resultados numéricos de acuerdo con los siguientes rangos:

Excelente: $4 \leq x \leq 5$

Bueno: $3 \leq x < 4$

Deficiente: $2 \leq x < 3$

Insuficiente: $2 < x \leq 0$

El desempeño de la evaluación diagnóstica se muestra en la siguiente figura:

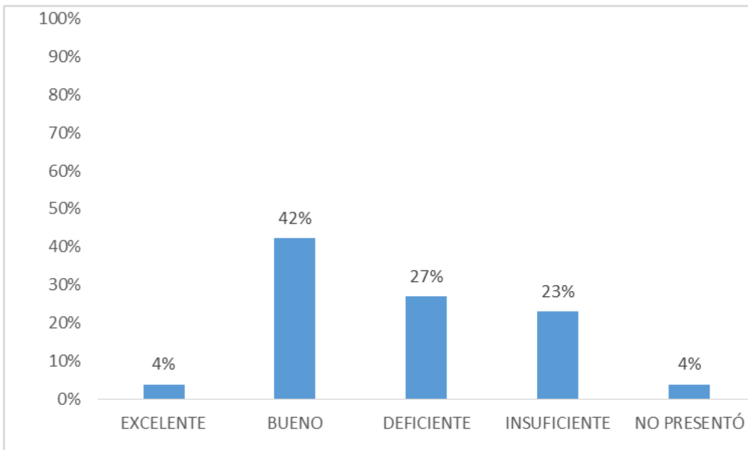


Figura 29. Desempeño de la evaluación diagnóstica.

Como se observa en la figura anterior, el 4% de los estudiantes tiene un desempeño ***excelente***, el 44% un desempeño ***bueno***, el 28% un desempeño ***deficiente***, el 24% un desempeño ***insuficiente*** y el 4% de los estudiantes ***no presentó*** la evaluación (1 estudiante por inasistencia).

El taller correspondiente al tema ***distancia entre dos puntos,*** es de entrega voluntaria con una participación del 42.30%, (11/26 estudiantes). Estos talleres fueron calificados, pero dada la poca participación se toma la decisión de sumar 0,5 décimas a la evaluación del tema. En algunos casos se sumó 0,7 por la presentación de los talleres.

Adicionalmente, en tres ocasiones, se proponen ejercicios para desarrollar en casa, con participación de los estudiantes del 42.30% (11/26 estudiantes), 57.69% (15/26 estudiantes) y 65.38% (17/26 estudiantes) respectivamente. Cada uno de estos ejercicios tuvo una valoración de 0,2 décimas, las cuales fueron sumadas a la evaluación correspondiente a la distancia entre dos puntos, así se obtuvo la nota final ésta la evaluación.

En la siguiente figura se resume la situación descrita anteriormente:

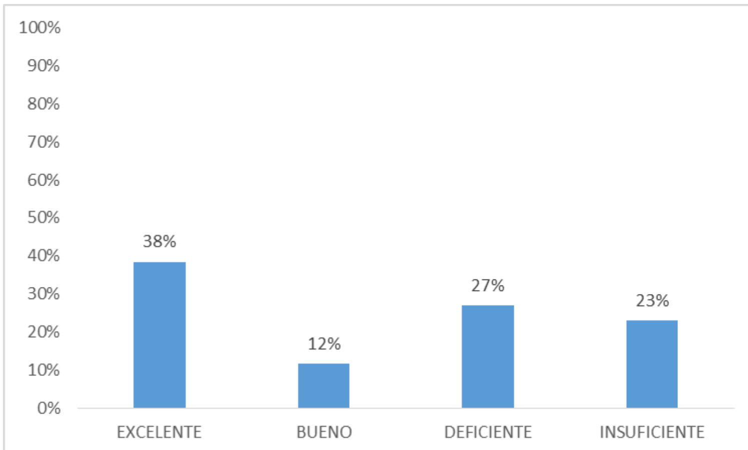


Figura 30. Desempeño de la evaluación de Distancia entre dos puntos.

El 38% de los estudiantes tuvo un desempeño ***excelente*** en esta evaluación, el 12% un desempeño ***bueno***, el 27% un desempeño ***deficiente*** y el 23% un desempeño ***insuficiente***. En esta evaluación se contó con la totalidad de los estudiantes (26 estudiantes).

El taller correspondiente al tema de ***línea recta***, es de entrega obligatoria con una participación del 96.15% (25/26 estudiantes). El 30% de la nota de este taller, fue sumado a la nota de la evaluación del tema. En la siguiente figura se muestra el desempeño de esta evaluación.

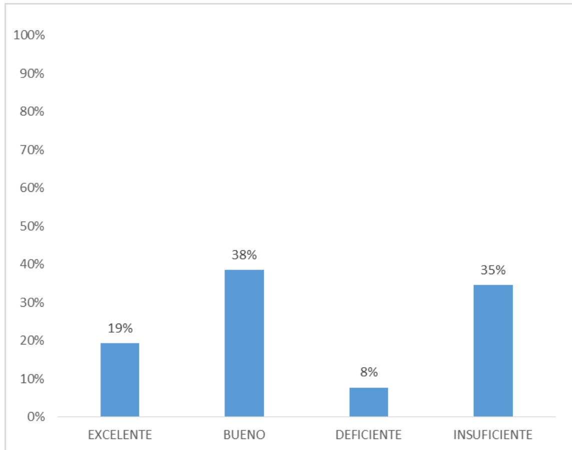


Figura 31. Desempeño de la evaluación de Línea recta.

El 19% de los estudiantes tuvo un desempeño ***excelente***, el 38% un desempeño ***bueno***, el 8% un desempeño ***deficiente***, el 35% un desempeño ***insuficiente.***

Nota: un estudiante no realizó ninguna actividad para esta temática, pero su desempeño se encuentra incluido dentro de la categoría ***insuficiente.***

Finalmente, la nota del periodo reportada al profesor titular fue computada de la siguiente manera:

Las notas de las dos evaluaciones realizadas se promediaron obteniendo una nota. Los desempeños de esta nota, se muestran en la siguiente figura:

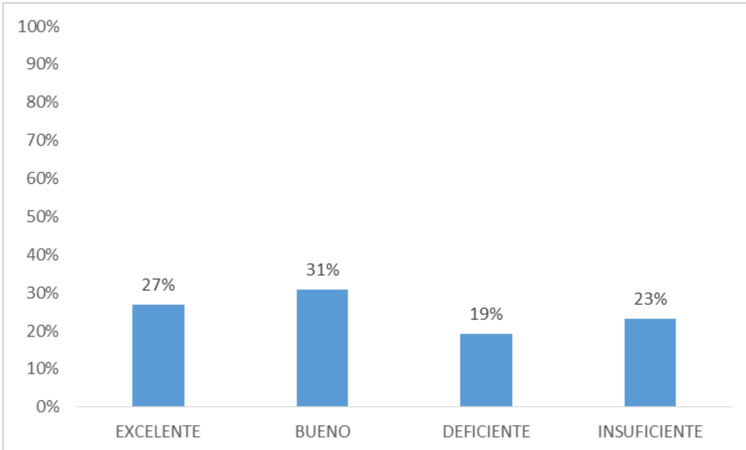


Figura 32. Desempeño académico.

Dado que el 42% de los estudiantes no aprobaban la materia, el profesor titular sugiere dar una nota de apreciación para cada uno de los estudiantes. La practicante dio esta nota con base en criterios como disciplina, participación en clase y asistencia. La razón por la que la nota de apreciación tiene un valor del 50% es favorecer a los estudiantes para que aprueben la materia. En la figura siguiente figura se muestran los desempeños de esta nota.

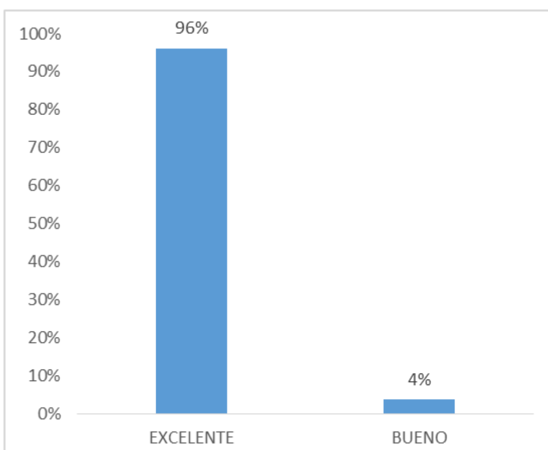


Figura 33. Desempeño de la nota de apreciación.

Finalmente, la nota final de la materia, se obtuvo promediando las dos notas mencionadas anteriormente (nota promedio de las evaluaciones y nota de apreciación). En la siguiente figura se muestran los desempeños finales obtenidos.

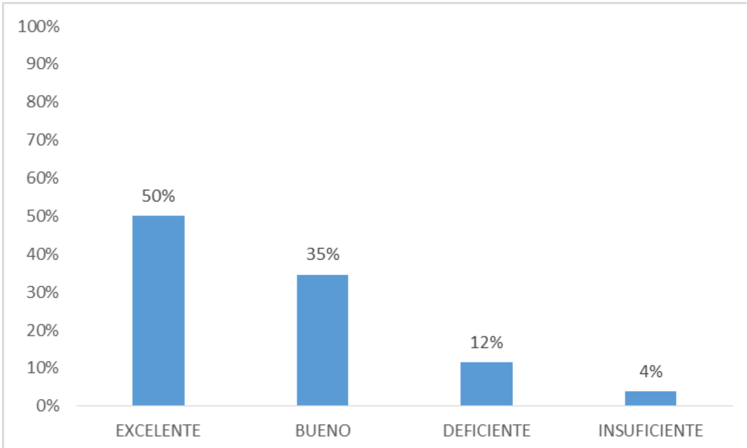


Figura 34. Desempeño de la nota final.

El 50% de los estudiantes alcanzó un desempeño ***excelente***, el 35% un desempeño ***bueno***, el 12% un desempeño ***deficiente*** y finalmente el 4% un desempeño ***insuficiente***.

En la siguiente figura, se resumen los desempeños obtenidos a lo largo de la PPI.

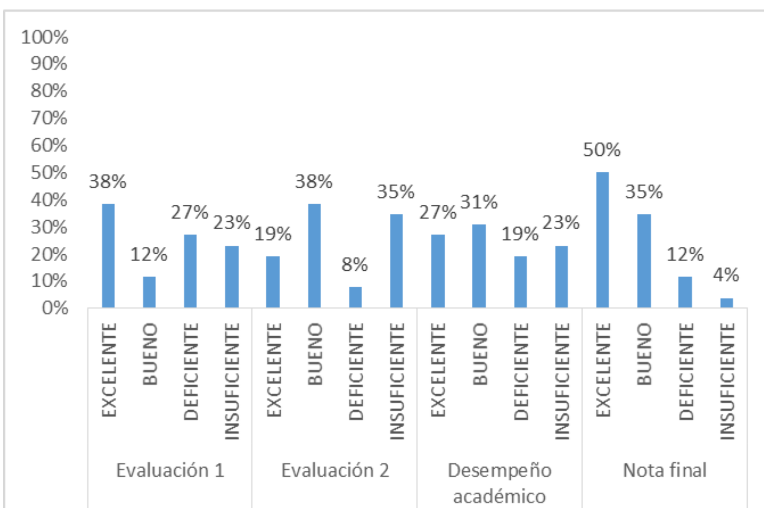


Figura 35. Desempeños obtenidos.

4.1. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

La aplicación de la evaluación diagnóstica fue de suma importancia y aunque los resultados obtenidos no fueron los esperados, permitió identificar las condiciones iniciales de los estudiantes para poder empezar el proceso de PPI, y así, procurar el fortalecimiento de algunos de los conceptos que serían trascendentales durante este proceso.

La ubicación de puntos en el plano cartesiano, por ejemplo, es un actividad matemática que los estudiantes han venido trabajando en grados anteriores (desde grado séptimo aproximadamente), sin embargo, aún presentan errores, las cuales fueron manifestados no solamente durante la aplicación de la evaluación diagnóstica, sino que también en el transcurso de la Práctica Pedagógica. Esto confirma que el aprendizaje es dinámico, y que está en constante construcción a través del tiempo.

En cuanto a las dos evaluaciones realizadas, se observa que los porcentajes de aprobación (desempeños excelente y bueno) son superiores al 50% en ambos casos. En la primera alcanza el 50% mientras que en la segunda, alcanza el 57%.

Aunque el porcentaje de aprobación en la segunda evaluación es mayor que en la primera, el desempeño excelente es mayor en la primera que en la segunda (38% vs 19%), mientras que el desempeño bueno es menor en la primera que en la segunda (12% vs 38%).

En cuanto a los otros desempeños, se tiene que el desempeño deficiente en la primera es 27% y 8% de la segunda; el desempeño insuficiente es 23% en la primera evaluación y 35% en la segunda.

Una posible explicación para justificar el rendimiento de los estudiantes, es que en la primera evaluación, la temática evaluada era menos extensa (distancia entre dos puntos) en comparación con la temática de la segunda evaluación (línea recta). Adicionalmente a ello, la primera temática se explicó con mayor detenimiento que la segunda, todo esto obligado por el tiempo restante estipulado para el desarrollo de la intervención en aula.

4.2. EJERCICIO DE INVESTIGACIÓN

Como parte complementaria de la PPI, en este fragmento del documento se presenta un ejercicio de investigación que consiste en la selección de una situación (en el sentido de Vergnaud) que fue propuesta a los estudiantes y en la cual serán identificados algunos de los elementos de la teoría de campos conceptuales de Vergnaud.

Se entiende por campo conceptual un conjunto de situaciones, conceptos y teoremas, para este caso particular, la situación es la siguiente: Determinar si el triángulo formado por los puntos $A(0,0)$, $B(6,5)$ y $C(1,6)$ es isósceles, escaleno o equilátero.

Según la categorización de las situaciones hecha por Vergnaud, se podría decir que esta situación corresponde al tipo I, esto es, los estudiantes disponen de las condiciones necesarias para el tratamiento de la situación.

Los conceptos que hacen parte del campo conceptual son: el plano cartesiano, rectas, el triángulo y triángulo equilátero, isósceles y escaleno.

Los teoremas del campo conceptual corresponden a las condiciones que deben cumplir las longitudes de los lados del triángulo en cuestión para poder clasificarlo.

Como elementos adicionales de este campo conceptual, es posible considerar los campos aditivo y multiplicativo, de los que habla Vergnaud en su teoría.

La representación del esquema (ideal) del campo conceptual corresponde a la realización de la gráfica del triángulo y posteriormente el cálculo de las longitudes de los lados del triángulo es cuestión. Es decir, este esquema, se manifiesta mediante la solución de la situación, la cual se muestra a continuación.

SOLUCIÓN

Los triángulos se clasifican por la longitud de sus lados en:

- **Triángulo equilátero:** las longitudes de sus lados son iguales.
- **Triángulo isósceles:** las longitudes de dos de sus lados son iguales.
- **Triángulo escaleno:** las longitudes de todos sus lados son diferentes.

Se tiene que la distancia entre dos puntos cualesquiera (P y Q) del plano, está dada por la siguiente fórmula:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Donde $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son los puntos en cuestión.

Gráficamente, la ubicación de los puntos es la siguiente (Figura 36).

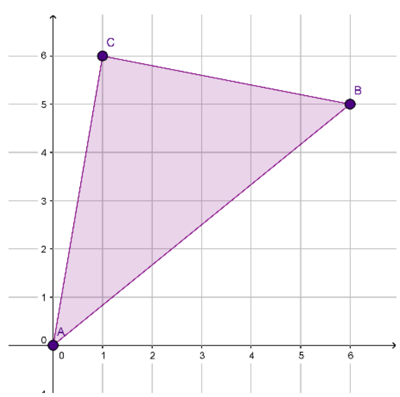


Figura 36. El triángulo.

Para determinar si el triángulo de la figura es isósceles, equilátero o escaleno, es necesario calcular la longitud de cada uno de sus lados, aplicando la ecuación dada anteriormente, esto es:

1. $d(A,B) = \sqrt{(6-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$
2. $d(B,C) = \sqrt{(1-6)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx 5{,}10$
3. $d(C,A) = \sqrt{(1-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37} \approx 6{,}08$

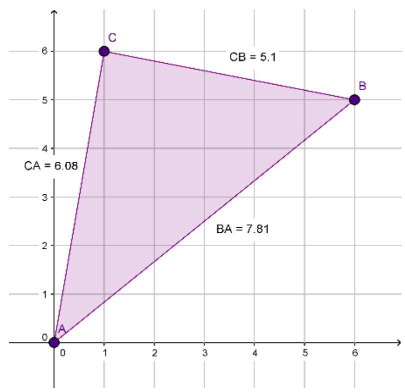


Figura 37. El triángulo y las longitudes de sus lados.

De lo anterior, dado que las longitudes encontradas son distintas y por la clasificación de los triángulos, se tiene que el triángulo es escaleno.

Sin embargo, los esquemas creados por los estudiantes son muy diferentes, y esta diferencia es posible observarla a través de las estrategias implementadas para dar solución a la situación propuesta. En la siguiente tabla, se presenta la categorización realizada para tales estrategias.

CATEGORÍAS DEL EJERCICIO DE INVESTIGACIÓN

Categoría	**Descripción**	**% de estudiantes**
C1. Uso de herramientas analíticas	Hallan las longitudes de los lados mediante la aplicación de la fórmula de la distancia entre dos puntos para saber a qué clase de triángulo corresponde el triángulo en cuestión.	8%
C2. Uso de herramientas geométricas	Grafican el triángulo para saber a qué clase de triángulo corresponde el triángulo en cuestión.	52%

C3. Transiciones: geométrica, y geométrica – analítica.	En el primer caso, grafican el triángulo utilizando la cuadrícula del papel suministrado. En el segundo caso, grafican el triángulo y se hace explícito el hecho que se debe calcular la longitud de los lados del triángulo para dar solución al problema en cuestión.	8%
C4. Omisión	No realizan ningún procedimiento para clasificar el triángulo.	32%

Tabla 7. Categorías del ejercicio de investigación.

Nota: Ninguno de los estudiantes concluye por qué el triángulo es escaleno. Además de ello, esta condición (ser triángulo escaleno) del triángulo en cuestión, no es perceptible a simple vista.

El 60% de los estudiantes se ubica dentro del uso de herramientas o analíticas o geométricas, esto es, calculan la longitud de cada uno de los lados del triángulo haciendo uso de la fórmula de la distancia o grafican el triángulo para concluir que es escaleno, pero sin justificar su respuesta.

En la siguiente figura, se muestra una estrategia implementada por un estudiante, en el cual hace uso de herramientas analíticas, esto es, calcula las longitudes de cada uno de los lados del triángulo y finalmente concluye lo siguiente: "*El ángulo del triángulo es escaleno*"

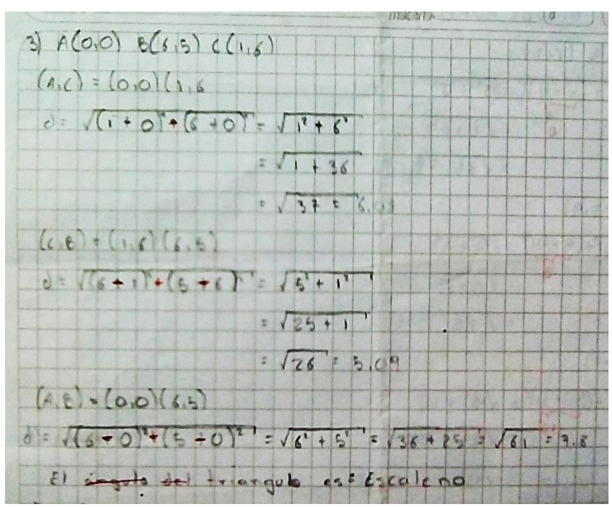


Figura 38. Uso de herramientas analíticas.

En la siguiente figura, se muestra otra estrategia implementada por un estudiante, en la cual, se emplean herramientas geométricas, es decir, se grafica el triángulo y a partir de la visualización hecha por el estudiante, concluye que el triángulo es escaleno, sin justificar su respuesta.

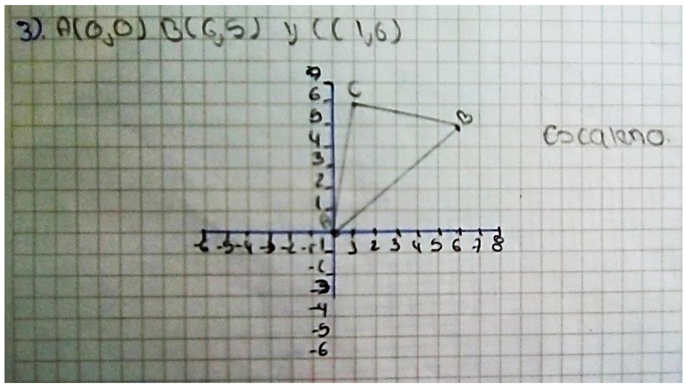


Figura 39. Uso de herramientas geométricas.

El 8% de los estudiantes se encuentran dentro de transiciones, en las dos imágenes siguientes se mostraran cada una de las transiciones encontradas.

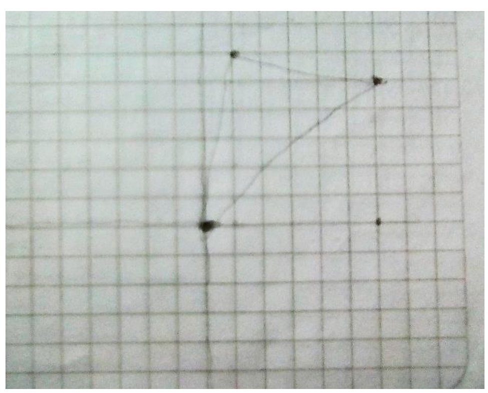


Figura 40. Transición geométrica

En la figura 40, se muestra como el estudiante grafica el triángulo y para la ubicación de los vértices del mismo utiliza la cuadrícula de la hoja de papel, los ejes no están coordenados explícitamente, así como tampoco se dice que clase triángulo es.

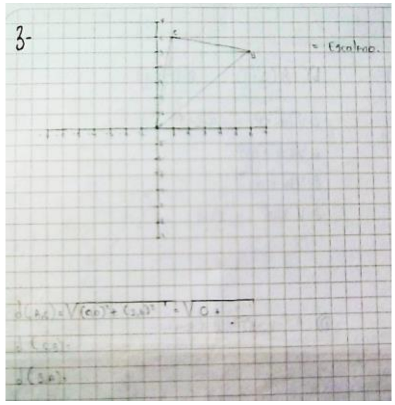


Figura 41. Transición geométrica - analítica.

En la figura 41, se muestra como el estudiante grafica el triángulo e indica cuáles son las distancias que se deben encontrar para poder clasificar el triángulo, pero no se hace. Sin embargo se dice que el triángulo es escaleno.

Finalmente, los invariantes operatorios identificados en cada una de las categorías son los siguientes:

C1: Cálculo de la longitud de los lados del triángulo mediante la fórmula de la distancia entre dos puntos.

C2: Elaboración de la gráfica del .triángulo en el plano cartesiano.

C3: Elaboración de la gráfica del .triángulo en el plano cartesiano sin coordenadas sobre los ejes e indicación de las longitudes que se debían hallar.

Capítulo V. CONCLUSIONES

- La percepción que los estudiantes tienen de las matemáticas, es muy distinta a la que tienen los profesores y por esta razón es que a ellos no les interesan todos los detalles matemáticos que hay detrás de la deducción de una fórmula matemática.
- En la educación básica y media, tanto el aspecto social como el aspecto disciplinar tienen igual peso, pues en este contexto no es correcto calificar a los estudiantes solo por sus conocimientos, sino también por su calidad humana.
- Dado el auge de la tecnología, una forma de contrarrestar la distracción de los estudiantes por el uso de los teléfonos en el aula de clases, es involucrar estos dispositivos dentro de los recursos didácticos a utilizar.
- Los ejercicios grupales de realización en clase, permiten al docente tener una mejor interacción con los estudiantes, son un buen mecanismo para observar sus debilidades, pero también son fuente de indisciplina en el aula. Por esta razón los grupos de trabajo no deben ser numerosos.
- Antes de empezar el diseño de las clases para la intervención en aula, es necesario tener la plena seguridad de contar con los recursos didácticos que se van a implementar durante esta intervención.

BIBLIOGRAFÍA

Benítez Mojica, D., Sánchez, F. d., & Morales Palomares, C. (s. f.). *Desarrollo de competencias Matemáticas III: Geometría Analítica y Estadistica.*

Educación para nutrir la vida. (s. f.). Feriva.

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2005). *Geometría Analítica.* Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral.

Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina científica.* Obtenido de http://www.ugr.es/local/jgodino/

González, F. (1998). LA EDUCACION MATEMATICA EN VENEZUELA: Apuntes para su reconstrucción histórica. . Caracas, Venezuela. Obtenido de http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/21060/2/articulo2.pdf?origin=publication_detail

Gutiérrez, Á. (1991). La investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Laorga, R. y. (s. f.). *Pruebas Acceso Grado Superior: Matemáticas: Ciclos Formativos.* (Editex, Ed.) Obtenido de https://books.google.com.co/books?id=8vuQAwAAQBAJ&lpg=PA166&dq=definici%C3%B3n%20de%20lugar%20geom%C3%A9trico&hl=es&pg=PA166#v=onepage&q=definici%C3%B3n%20de%20lugar%20geom%C3%A9trico&f=false

Lehmann, C. H. (1989). *Geometría analítica.* México, D.F: Editorial Limusa.

Ministerio de Educación Nacional. (7 de Junio de 1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estandares Básicos en Competencias Matemáticas. Colombia. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Moise, E. (1986). *Geometría Moderna.* Adisson-Wesley, Iberoamericana, S.A. Obtenido de http://colmaths.files.wordpress.com/2013/01/geometria-moderna-moise.pdf

Oteyza, E. e. (2005). *Geometria Analitica.* México: Pearson Educación. Obtenido de https://books.google.com.co/books?id=cYRE9rWilbkC&lpg=PA5&vq=%22En%20un%20tri%C3%A1ngulo%20rect%C3%A1ngulo%2C%20el%20cuadrado%20de%20la%20hipotenusa

%20es%20igual%20a%20la%20suma%20de%20los%20cuadrados%20de%20los%20catetos%22&hl=es&pg=PR1#v=onepage&q=%22En

Pérez, J., Caro, V., & Obonaga, E. (1985). *Matemática 5: Trigonometría y Geometría Analítica.* PIME Editores Ltda.

Rojas, C. (s. f.). *Introducción a la geometría.* (U. d. Norte, Ed.) Obtenido de https://books.google.com.co/books?id=-zjSCgAAQBAJ&lpg=PA34&dq=definicion%20de%20radio%20y%20diametro%20de%20una%20circunferencia&pg=PA34#v=onepage&q=definicion%20de%20radio%20y%20diametro%20de%20una%20circunferencia&f=false

Vasco, C. E. (1994). La educación matemática: una disciplina en formación. *MATEMÁTICAS: Enseñanza universitaria, 3*(2). Recuperado el 25 de Febrero de 2014

Vergnaud, G. (1990). Teoría de campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 133-170.

ANEXOS

Anexo 1: Evaluación Diagnóstica

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
LOS COMUNEROS
Aprobado por Resolución N° 2171 de Noviembre 13 de 2002
Emanada de la Gobernación del Cauca
CODIGO DANE 119001002187-01 NIT: 817.001.928-8

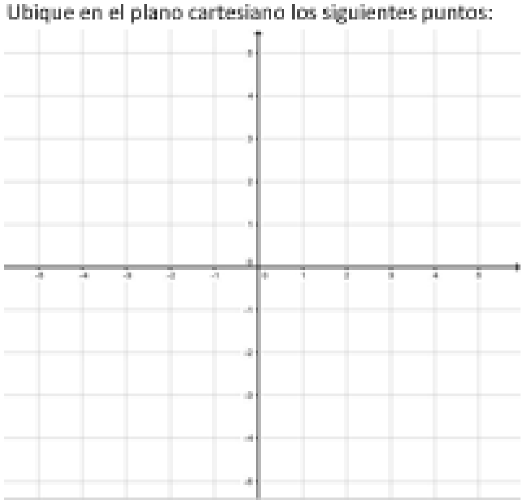
PRUEBA DIAGNOSTICO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA – GRADO DÉCIMO B.

Nombre: ______________________________ **Fecha:** ________________

1. Escriba el nombre de cada una de las siguientes representaciones:

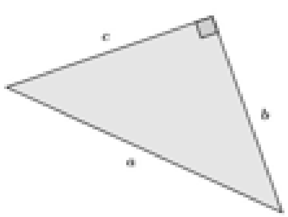
______________ ______________ ______________

2. Ubique en el plano cartesiano los siguientes puntos:



$A(1,4)$ $B\left(\frac{13}{4},-\frac{7}{4}\right)$
$C(-3,-2)$ $D\left(-\frac{7}{3},\frac{7}{2}\right)$
$E(-2,3)$ $F(1,-1)$
$G\left(-\frac{9}{4},-\frac{3}{2}\right)$ $H\left(\frac{5}{2},2\right)$

3. Encuentre las longitudes de los catetos del siguiente triangulo para cada caso:



3.1. $a =$ $b = 2$ $c = 4$
3.2. $a = 5$ $b = 3$ $c =$
3.3. $a = 7$ $b =$ $c = 6$

4. Graficar la siguiente función lineal: $y = 3x + 2$

Anexo 2: Talleres Realizados

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
LOS COMUNEROS
Aprobado por Resolución N° 2171 de Noviembre 13 de 2002
Emanada de la Gobernación del Cauca
CODIGO DANE 119001002187-01 NIT: 817.001.928-8

TALLER DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

1. Calcular la distancia entre los puntos: $A(2,1)$ y $B(-3,2)$
2. Calcular el perímetro del triángulo formado por los puntos: $A(-3,4), B(6,5)$ y $C(1,6)$.
3. Calcule las coordenadas del punto medio del segmento formado por los siguientes puntos: $A\ (3,1)$ y $B(-1,-5)$
4. Determinar las coordenadas del triángulo formado por los puntos medios de los lados de un triángulo formado por los puntos $A(-8,6), B(2,5)$ y $C(1,7)$
5. Encontrar los puntos $P(x,3)$ que distan 5 unidades del punto $(3,4)$.
6. ¿Cuáles son los puntos con coordenada x igual a 4 y que están a 4 unidades del punto $(2,3)$?
7. La coordenada en el eje Y de un punto en el segundo cuadrante es 4 y está a 3 unidades del punto $(2,5)$. Determine la otra coordenada del punto.
8. Calcule las coordenadas del punto A, teniendo en cuenta los datos proporcionados: $A\ (x_1, y_1), B(4,3)$ y $M\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
LOS COMUNEROS
Aprobado por Resolución N° 2171 de Noviembre 13 de 2002
Emanada de la Gobernación del Cauca
CODIGO DANE 119001002187-01 NIT: 817.001.928-8

TALLER LÍNEA RECTA

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2,-3)$ y tiene un ángulo de inclinación de 45°.
2. Determina la ecuación general de la recta de pendiente – 4 y que pasa por el punto $(5,-3)$
3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2,-3)$ y B(4,2)
4. La ecuación de una recta l es $x + 3y - 6 = 0$ y las coordenadas de un punto P son $(4,7)$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por P y es paralela a l.
5. Se tiene el cuadrilátero $ABCD$ cuyos vértices son $A(3,0), B(1,4), C(-3,2)$ y $D(-1,-2)$. Compruebe que es un paralelogramo.
6. Para cada par de rectas diga si son paralelas o perpendiculares o ninguna de las anteriores.
   a) $-3x + 2y - 5 = 0$ y $6x - 4y - 2 = 0$
   b) $-3x + 2y - 7 = 0$ y $2x - 3y - 9 = 0$
   c) $3x - 2y - 4 = 0$ y $2x + 3y - 4 = 0$
7. Encuentre el valor de k para que las rectas $-5x + 2y - 4 = 0$ y $kx + 4y - 7 = 0$ sean perpendiculares.
8. Encuentre la ecuación general de la recta que es perpendicular a la recta $3x - 4y - 2 = 0$ y corta el eje Y en -3

Anexo 3: Evaluaciones Realizadas

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
LOS COMUNEROS
Aprobado por Resolución N° 2171 de Noviembre 13 de 2002
Emanada de la Gobernación del Cauca
CODIGO DANE 119001002187-01 NIT: 817.001.928-8

EVALUACIÓN DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS – GRADO DÉCIMO B.

NOMBRE: ______________________________ **FECHA:** ____________

1. Calcule la distancia entre los puntos A y B en cada caso:
   a) $A(-7,4), B(6,4)$
   b) $A(3,-4), B(-3,9)$
   c) $A(-5,11), B(0,-1)$
2. Calcule el valor de x para que la distancia de $A(-1,4)$ a $B(x,1)$ sea igual a 5.
3. Determinar si el triángulo formado por los puntos $A(0,0), B(6,5)$ y $C(1,6)$es Isósceles, Escaleno o Equilátero.
4. Calcule las coordenadas del punto medio del segmento formado por los siguientes puntos: $A\ (2,8)$ y $B(4,0)$:
5. Calcule las coordenadas del punto que falta, con los datos proporcionados: $A\ (x_1, y_1), B(4,3)$ y $M(2,1)$

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
LOS COMUNEROS
Aprobado por Resolución N° 2171 de Noviembre 13 de 2002
Emanada de la Gobernación del Cauca
CODIGO DANE 119001002187-01 NIT: 817.001.928-8

EVALUACIÓN LÍNEA RECTA-GRADO DÉCIMO B

Nombre: ______________________________ **Fecha:** ____________

1. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:
   a) $A(-1,0), B(-1,3)$
   b) $A(0,-2), B(5,-2)$
   c) $A(-2,3), B(4,-1)$
2. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-4,2)$ y su pendiente es $\frac{1}{2}$
3. Escribe la ecuación de la recta que es paralela a la recta que tiene por ecuación $y = -2x + 3$ y pasa por el punto $P(4,5)$
4. Escribe la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $3x - 2y + 1 = 0$ y pasa por el punto $P(4,-1)$
5. Encuentra el valor de k para que las rectas cuyas ecuaciones son $3x - 2y - 3 = 0$ y $6x - ky - 1 = 0$ sean paralelas.

Anexo 4: Guía de Clase

GEOMETRÍA ANALÍTICA

PROGRAMACIÓN

Tema 1:

- Definiciones básicas:
  - Punto
  - Recta
  - Plano
- Distancia entre dos puntos
  - Punto medio
- Pendiente de una recta
- Línea recta:
  - Rectas paralelas
  - Rectas perpendiculares
- Ecuaciones de la recta:
  - Ecuación punto – pendiente
  - Ecuación de la recta conociendo dos puntos distintos

Tema 2:

- Lugar geométrico
- Circunferencia
- Parábola
- Elipse
- Hipérbola

Logros:

- Comprender los conceptos de los objetos geométricos como: línea recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.
- Identificar los elementos de los objetos geométricos mencionados anteriormente.

- Observar la aplicación de estos objetos en situaciones reales.

LA LÍNEA RECTA

OBJETIVO: Definir los objetos matemáticos básicos de la geometría, punto, recta y plano.

Es necesario preguntar a los estudiantes qué concepciones tienen sobre estos objetos y de acuerdo a ello, se los encamina hacia la definición.

DEFINICIONES:

- **PUNTO:** Objeto sin dimensión, es decir, no es perceptible por la vista, es por esto que utilizamos la huella que deja un lápiz sobre el papel como su representación, y se denotará con letras mayúsculas.
- **RECTA:** Conjuntos de puntos alineados, también sin dimensión (ancho).
- **PLANO:** Conjunto infinito de rectas.

La **GEOMETRÍA ANALÍTICA** se encarga de estudiar la relación entre la **geometría** y el **álgebra**, es así como se obtienen las ecuaciones geométricas de la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

De lo anterior, en el plano cartesiano se representa en punto a través de sus coordenadas. Esto es: el punto $P(x, y)$ tiene x como coordenada sobre el eje X e y como coordenada sobre el eje Y, como se muestra en la siguiente imagen:

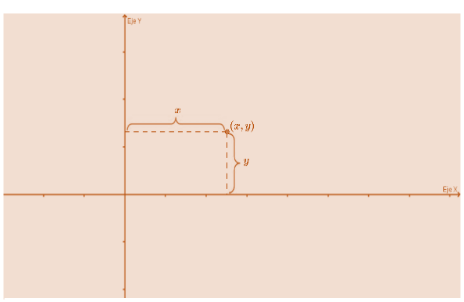


Figura 42. Coordenadas de un punto.

Nota: recuerde que los números enteros ($\mathbb{Z}$), están compuestos por el número y su signo, la escritura de este último se omite para el caso de los enteros positivos o naturales ($\mathbb{N}$).

EJEMPLOS:

1. Ubicar los siguientes puntos en el plano cartesiano:

$A(2,3)$	$B(-4,-5)$
$C(1,-2)$	$D(-2,1)$
$E(4,-3)$	$F(-5,6)$
$G(5,2)$	$H(-3,1)$

2. Ubicar los siguientes puntos en el plano cartesiano:

$A_1(1.5, 2.4)$	$B_1(-3.7,-4.3)$
$C_1(0.6,-4.2)$	$D_1(-2.1, 1.9)$
$E_1(3.8,-2.6)$	$F_1(-4.5, 5.3)$
$G_1(5.7, 2.9)$	$H_1(-0.1, 1.7)$

3. Ubicar en el plano cartesiano los siguientes puntos:

$A_2\left(\frac{2}{3},\frac{13}{4}\right)$	$B_2\left(-\frac{24}{7},-\frac{35}{6}\right)$
$C_2\left(\frac{11}{9},-\frac{7}{8}\right)$	$D_2\left(-\frac{8}{5},\frac{9}{2}\right)$
$E_2\left(\frac{4}{3},-\frac{5}{7}\right)$	$F_2\left(-\frac{5}{3},\frac{6}{5}\right)$
$G_2\left(\frac{11}{6},\frac{11}{2}\right)$	$H_2\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

Nota: recuerde que una fracción está compuesta por: numerador, denominador, vínculo y signo, este último como en el caso de los enteros, se omite para las fracciones positivas.

Sabiendo las coordenadas de los puntos es posible considerar la distancia entre dos de ellos, para ello, se hará uso del Teorema de Pitágoras, como se muestra en Figura 43.

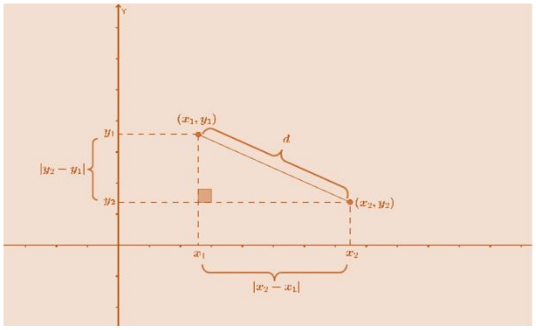


Figura 43. Distancia entre dos puntos.

Procediendo algebraicamente se concluye que la ecuación para encontrar la distancia entre los dos puntos, está dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLOS:

- Encontrar la distancia entre los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(4, 3)$.
- Encontrar el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 0)$, $B(1, -3)$ y $C(3, 4)$.

OBSERVACIÓN: Sean P_1, P_2 y P_3 puntos sobre el plano, se tiene que:

$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$ Si y solo si P_1, P_2 y P_3 son puntos colineales, es decir, se encuentran sobre la misma recta.

EJERCICIO: Verificar que los puntos $P(3, -5), Q(0, -8)$ y $R(-3, -10)$ son colineales.

COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos sobre el plano, las coordenadas del punto medio están dadas por:

$$\bar{x} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \text{ y } \bar{y} = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

EJEMPLO: Determinar las coordenadas del punto medio para los siguientes puntos:

1. $A(-28, 45), B(56, 140)$
2. $A(0, -7), B(-2, -2)$

ECUACIONES DE LA LÍNEA RECTA

Considere una recta horizontal, esta recta está determinada por la ecuación $y = b$; para una recta vertical, se tiene que la ecuación es $x = a$.

Ahora considere una recta que no es horizontal ni vertical, para determinar la ecuación de esta recta es necesario conocer la pendiente de la misma, esto es:

DEFINICIÓN:

Se llama *pendiente* de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación.

La pendiente de una recta se designa comúnmente por la letra m, por tanto se puede escribir: $m = \tan\alpha$

Conociendo dos puntos que pertenecen a la recta, es posible determinar la pendiente de la misma. Esto es:

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos diferentes cualesquiera que pertenecen a una recta. Entonces la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ donde } x_1 \neq x_2$$

OBSERVACIONES:

1. Si una recta es vertical, entonces $x_1 = x_2$ y su pendiente queda indefinida. De manera un poco más informal, podemos decir que las rectas verticales tienen pendiente infinita.
2. Si una recta es horizontal entonces $y_1 = y_2$ y su pendiente es cero.

EJERCICIO: Determinar la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

- $C(-2,0)$ y $D(3,1)$
- $E(-1,2)$ y $F(2,2)$
- $(0,4)$ y $(1,-1)$

RECTAS PARALELAS

Dos rectas no verticales y distintas, son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales.

EJEMPLO: Determinar si la recta que pasa por los puntos $A(0,3)$ y $B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$, y la recta que pasa por los puntos $M(1,2)$ y $N(0,-6)$ son paralelas.

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a -1.

EJEMPLO: Verificar que los puntos $A(-2,-2), B(8,0)$ y $C(2,4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

ECUACIÓN DE LA RECTA PUNTO – PENDIENTE

Se tiene que $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, entonces la ecuación de la recta está dada por

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO:

- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2,3)$ y tiene pendiente $m = -3$

OBSERVACIÓN: La pendiente m y $P(x_1, y_1)$ son dados para obtener la ecuación de la recta.

- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4. -\mathbf{1})$ y tiene un ángulo de inclinación de 135°.

RECORDEMOS:

- Ecuación de la recta $y = mx + b$, con $m = pendiente, b = intercepto\ (corte\ con\ el\ eje\ Y)$
- Ecuación general de la recta: $Ax + By + C = 0$ con $A, B, C\ \in \mathbb{R}$, y A o B distintos de cero.

- Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1,-3)$ y es perpendicular a la recta $3x-4y+2=0$.
- Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1,-3)$ y es perpendicular a la recta $3x-4y+2=0$

ECUACIÓN DE LA RECTA CONOCIENDO DOS PUNTOS

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ está dada por:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1), x_1\neq x_2$$

EJEMPLOS:

- Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(1,2)$ y $Q(3,4)$
- Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(4,3)$ y $Q(-3,-2)$

CÓNICAS

LUGAR GEOMÉTRICO

Se pide a los estudiantes dibujar sobre el papel suministrado dos puntos fijos (distintos), este papel hará las veces de plano. Seguidamente ubicar un punto que equidiste de estos dos puntos, repetir el proceso varias veces. ¿A qué objeto geométrico corresponde el conjunto de puntos obtenido? Observar que no todos los puntos del plano satisfacen esta condición, esto es lo que se denomina *lugar geométrico.*

DEFINICIÓN

Lugar geométrico es el conjunto de puntos (x, y) en el plano que cumplen con una misma propiedad o condición geométrica**.**

EJEMPLO: El conjunto de puntos del caso anterior recibe el nombre de recta *mediatriz,* más formalmente:

Mediatriz: Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

OBSERVACIÓN: La condición geométrica a la que se hace referencia en la definición de lugar geométrico se expresa en términos algebraicos.

EJEMPLO: Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(2,5)$ y $B(4,-7)$

CIRCUNFERENCIA

Se suministra a los estudiantes la figura de una circunferencia con su respectivo centro y las definiciones de los principales elementos.

Los estudiantes deben leer estas definiciones y ubicarlos sobre la figura dada. Terminada esta actividad, se recoge el material y se suministra otra figura con los elementos ya ubicados para que los estudiantes la conserven.

Dado que el lugar geométrico obtenido es una circunferencia, se procede a dar la definición de ésta.

DEFINICIÓN:

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama **centro** de la circunferencia y la distancia constante se llama **radio.**

ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

- **Radio:** longitud del segmento de recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia. La medida es constante.
- **Cuerda:** segmento que une dos puntos de la circunferencia. Las cuerdas tienen distintas medidas.
- **Diámetro:** cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, es la cuerda de mayor medida. La medida del diámetro es $2r$.

De lo anterior, se tiene que la ecuación de una recta está dada por $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ donde r es el radio de la circunferencia y (h,k) es el centro de la misma. (Ecuación canónica)

NOTA:

- EL RADIO NUNCA ES NEGATIVO.
- Si $h=k=0$, la circunferencia tiene centro en el origen.

Después de la definición de circunferencia, se procede a identificar los elementos de la misma, así:

Ejercicio: Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $(2,-3)$ y $(-4,5)$. Hallar el centro, el radio de la circunferencia y realizar la gráfica.

Así como la recta, la circunferencia también tiene una ecuación general, la cual está dada por: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

EJEMPLO: Dadas las ecuaciones generales de las siguientes circunferencias, obtenga su ecuación canónica he identifique las coordenadas del centro, el radio y grafique:

- $x^2+y^2-2x-4y+1=0$
- $x^2+y^2-8x+10y-23=0$
- $x^2+y^2-4x-6y-12=0$
- $x^2+y^2+3x+y+10=0$

LA PARÁBOLA

Con base en la gráfica suministrada, se pide a los estudiantes tomar un punto sobre la curva y medir la distancia desde ese punto hasta la recta y el punto dado (directriz y foco). Con lo anterior, se presenta la definición formal de este lugar geométrico:

DEFINICIÓN:

Una parábola es el lugar geométrico que describe el movimiento de un punto en un plano, que se encuentra a la misma distancia de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz.

Los elementos de la parábola son:

a) ***Foco (F)****:* Punto fijo dado que equidista de otros dos puntos, uno que se encuentra en la parábola, y el otro en la directriz. *Nota: una parábola sólo puede tener un foco.*

b) ***Directriz (D)****:* Recta fija.

c) ***Vértice (V)****:* Punto de la parábola, el cual, es el punto medio de un segmento perpendicular a la directriz que se traza a partir del foco a dicha recta.

d) ***Eje de la parábola****:* Recta perpendicular a la directriz, que divide exactamente en dos partes iguales a la parábola.

e) ***Lado recto (LR)****:* Segmento perpendicular al eje de la parábola que pasa por el foco, y que une dos puntos de la misma, llamados uno "***L***" y el otro "***R***".

f) **Parámetro (*p*)**: Es la distancia que existe del foco al vértice ***FV***, la misma que se encuentra del vértice al punto de intersección la directriz con el eje de la parábola.

LA ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA.

La ecuación de la parábola está dada por:

- Si el eje de la parábola es paralelo al eje *Y*, la ecuación es:

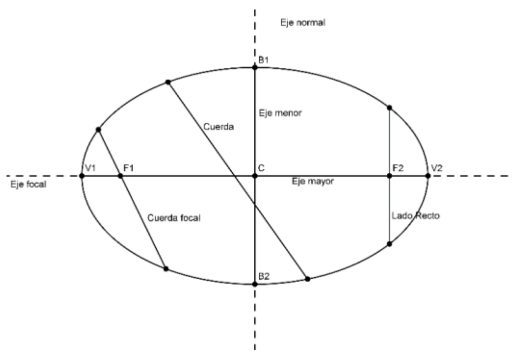
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Donde las coordenadas del centro y el foco son(h,k) y $(h,k+p)$ respectivamente, la ecuación de la recta mediatriz es $y = k - p$.

De lo anterior, si p es positiva, la parábola abre hacia arriba, y si p es negativa, la parábola abre hacia abajo.

- Si el eje de la parábola es paralelo al eje *X*, la ecuación es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$



Donde las coordenadas del centro y el foco son(h,k) y $(h+p,k)$ respectivamente, la ecuación de la recta mediatriz es $x = h - p$.

De lo anterior, si p es positiva, la parábola abre hacia la derecha, y si p es negativa, la parábola abre hacia la izquierda.

EJERCICIOS: Calcular las coordenadas del vértice y de los focos, y las ecuaciones de las siguientes parábolas:

- $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$
- $x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$
- $x^2 - 4x - 6y - 14 = 0$
- $y^2 + 8x + 2y - 15 = 0$

OBSERVACIÓN: La longitud del lado recto es igual al valor absoluto de $4p$ ($|4p|$)

LA ELIPSE

Definición: La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueva en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante mayor que la distancia entre los dos puntos.

Figura 44. La elipse

Los elementos de la elipse son:

- **Focos:** dos puntos fijos.
- **Eje focal:** recta que pasa por los dos focos.

- **Vértices:** puntos en los cuales el eje focal corta a la elipse.
- **Eje mayor:** segmento de recta comprendido entre los dos vértices, cuya longitud es $2a$
- **Centro:** punto medio del segmento que une los focos.
- **Eje normal:** recta perpendicular al eje focal que pasa por el **Centro**
- **Eje menor:** segmento de recta comprendido entre los dos puntos de corte de la elipse con el eje normal, cuya longitud es $2b$
- **Cuerda y cuerda focal:** segmento de recta que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, cuando este segmento pasa por alguno de los focos, se denomina cuerda focal.
- **Lado recto:** cuerda focal perpendicular al eje focal, cuya longitud es $LR = \frac{2b^2}{a}$

ECUACIÓN DE LA ELIPSE

Una elipse con centro $C(h,k)$, eje mayor de longitud $2a$, eje menor de longitud $2b$, $2c$ la distancia entre los focos, y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse, tiene la siguiente ecuación:

- Si el eje mayor es paralelo al eje X, por definición de elipse, se tiene que:

$$(F_1,P) + d(F_2,P) = 2a$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Coordenadas del centro: $C(h,k)$

Coordenadas de los vértices: $V(h \pm a, k)$

Coordenadas de los focos: $F(h \pm c, k)$

- Si el eje mayor es paralelo al eje Y, por definición de elipse, se tiene que:

$$d(F_1,P) + d(F_2,P) = 2a$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Coordenadas del centro: $C(h,k)$

Coordenadas de los vértices: $V(h, k \pm a)$

Coordenadas de los focos: $F(h, k \pm c)$

Ejemplos: Determinar el centro, vértices, focos y gráfica de las siguientes elipses:

1. $9x^2 - 18x + 25y^2 - 250y + 409 = 0$

2. $25x^2 + 250x + 9y^2 + 18y + 409 = 0$

LA HIPÉRBOLA

Definición: una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

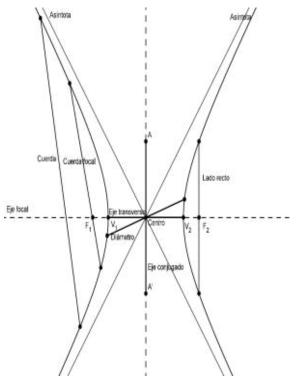


Figura 45. La hipérbola.

Los elementos de la hipérbola son:

- **Focos:** puntos fijos.
- **Eje focal:** recta que pasa por los focos.
- **Vértices:** puntos en los que el eje focal corta a la hipérbola.
- **Eje transverso:** segmento comprendido entre los vértices, cuya longitud es $2a$
- **Centro**: punto medio del eje transverso.
- **Eje normal:** recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro.
- **Eje conjugado:** segmento del eje normal comprendido entre los puntos A y A’ como se muestra en la siguiente imagen y cuya longitud es $2b$
- **Cuerda:** segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la hipérbola, los cuales pueden ser de la misma rama. Si la cuerda pasa por un foco, se denomina cuerda focal.
- Lado recto: cuerda focal perpendicular al eje focal.
- **Diámetro:** cuerda que pasa por el centro
- **Asíntotas:** rectas auxiliares que permiten la construcción de la cónica. La curva jamás toca la recta.

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Una hipérbola con centro $C(h,k)$, eje transverso de longitud $2a$, eje conjugado de longitud $2b$, $2c$ la distancia entre los focos, y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la hipérbola, tiene la siguiente ecuación:

- Si el eje transverso es paralelo al eje X, por definición de hipérbola, se tiene que:

$$|d(F_1,P) - d(F_2,P)| = 2a$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Coordenadas de los vértices: $V(h \pm a, k)$
Coordenadas de los focos: $F(h \pm c, k)$
Ecuaciones de las asíntotas: $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$

Coordenadas del centro: $C(h,k)$

- Si el eje transverso es paralelo al eje Y, por definición de hipérbola, se tiene que:

$$|d(F_1,P) - d(F_2,P)| = 2a$$

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

Coordenadas del centro: $C(h,k)$
Coordenadas de los vértices: $V(h, k \pm a)$
Coordenadas de los focos: $F(h, k \pm c)$
Ecuaciones de las asíntotas: $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$

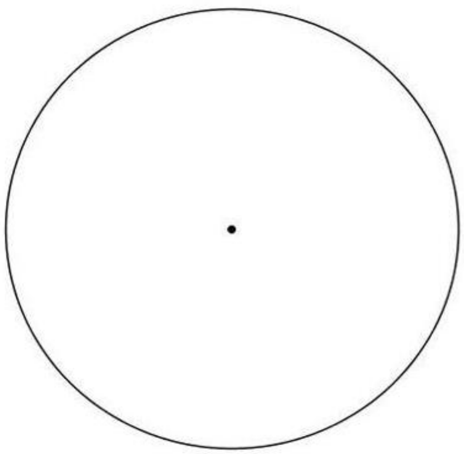
EJEMPLOS: Determinar el centro, vértice, asíntotas y gráfica de las siguientes hipérbolas:

1. $4x^2 - 16x - 9y^2 - 18y - 29 = 0$
2. $4y^2 + 8y - 9x^2 - 36x - 68 = 0$

Anexo 5: Material Entregado a los Estudiantes

Material para la ubicación de los elementos de la circunferencia

LA CIRCUNFERENCIA

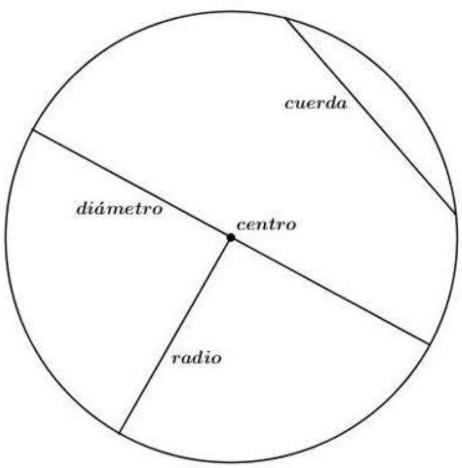


LOS ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA SON:

- **Radio:** segmento de recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia. La medida es constante.
- **Cuerda:** segmento que une dos puntos de la circunferencia. Las cuerdas tienen distintas medidas.
- **Diámetro:** cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, es la cuerda de mayor medida. La medida del diámetro es $2r$.

Material para que conserven los estudiantes

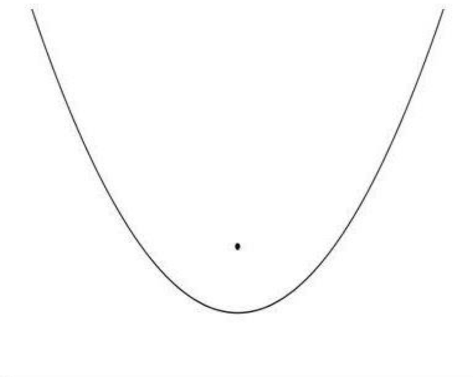
LA CIRCUNFERENCIA Y SUS ELEMENTOS



- **Radio:** segmento de recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia. La medida es constante.
- **Cuerda:** segmento que une dos puntos de la circunferencia. Las cuerdas tienen distintas medidas.
- **Diámetro:** cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, es la cuerda de mayor medida. La medida del diámetro es $2r$.

Material para la ubicación de los elementos de la parábola.

LA PARÁBOLA



LOS ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA SON:

a) ***Foco (F):*** Punto fijo dado que equidista de otros dos puntos, uno que se encuentra en la parábola, y el otro en la directriz. *Nota: una parábola sólo puede tener un foco.*

b) ***Directriz (D):*** Recta fija.

c) ***Vértice (V):*** Punto de la parábola, el cual, es el punto medio de un segmento perpendicular a la directriz que se traza a partir del foco a dicha recta.

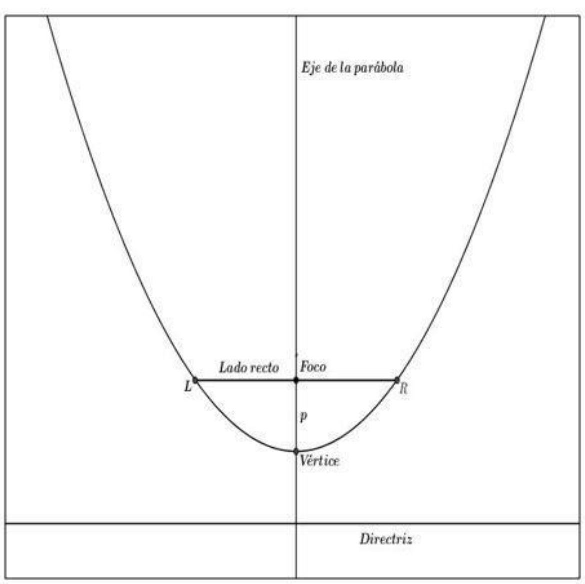
d) ***Eje de la parábola:*** Recta perpendicular a la directriz, que divide exactamente en dos partes iguales a la parábola.

e) ***Lado recto (LR):*** Segmento perpendicular al eje de la parábola que pasa por el foco, y que une dos puntos de la misma, llamados uno "***L***" y el otro "***R***".

f) **Parámetro (*p*)**: Es la distancia que existe del foco al vértice ***FV***, la misma que se encuentra del vértice al punto de intersección la directriz con el eje de la parábola.

Material para que conserven los estudiantes

LOS ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA SON:



a) ***Foco (F):*** Punto fijo dado que equidista de otros dos puntos, uno que se encuentra en la parábola, y el otro en la directriz. *Nota: una parábola sólo puede tener un foco.*

b) ***Directriz (D):*** Recta fija.

c) ***Vértice (V):*** Punto de la parábola, el cual, es el punto medio de un segmento perpendicular a la directriz que se traza a partir del foco a dicha recta.

d) ***Eje de la parábola:*** Recta perpendicular a la directriz, que divide exactamente en dos partes iguales a la parábola.

e) ***Lado recto (LR):*** Segmento perpendicular al eje de la parábola que pasa por el foco, y que une dos puntos de la misma, llamados uno "***L***" y el otro "***R***".

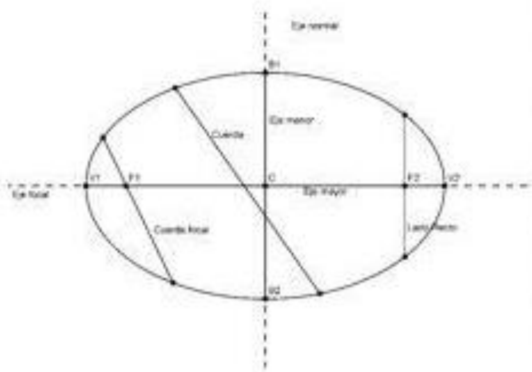
f) **Parámetro (*p*)**: Es la distancia que existe del foco al vértice ***FV***, la misma que se encuentra del vértice al punto de intersección la directriz con el eje de la parábola.

Material entregado para la elipse

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
LOS COMUNEROS
Aprobado por Resolución N° 2171 de Noviembre 13 de 2002
Emanada de la Gobernación del Cauca
CODIGO DANE 119001002187-01 NIT: 817.001.928-8

LA ELIPSE

Definición: La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueva en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante mayor que la distancia entre los dos puntos.



- **Focos:** dos puntos fijos.
- **Eje focal:** recta que pasa por los dos focos.
- **Vértices:** puntos en los cuales el eje focal corta a la elipse.
- **Eje mayor:** segmento de recta comprendido entre los dos vértices, cuya longitud es $2a$
- **Centro:** punto medio del segmento que une los focos.
- **Eje normal:** recta perpendicular al eje focal que pasa por **C**
- **Eje menor:** segmento de recta comprendido entre los dos puntos de corte de la elipse con el eje normal, cuya longitud es $2b$
- **Cuerda y cuerda focal:** segmento de recta que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, cuando este segmento pasa por alguno de los focos, se denomina cuerda focal.
- **Lado recto:** cuerda focal perpendicular al eje focal, cuya longitud es $LR = \frac{2b^2}{a}$

ECUACION DE LA ELIPSE

Una elipse con centro $C(h,k)$, eje mayor de longitud $2a$, eje menor de longitud $2b$, $2c$ la distancia entre los focos, y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse, tiene la siguiente ecuación:

- Si el eje mayor es paralelo al eje X, por definición de elipse, se tiene que:

$$d(F_1,P) + d(F_2,P) = 2a$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Coordenadas del centro: $C(h,k)$
Coordenadas de los vértices: $V(h \pm a, k)$
Coordenadas de los focos: $F(h \pm c, k)$

- Si el eje mayor es paralelo al eje Y, por definición de elipse, se tiene que:

$$d(F_1,P) + d(F_2,P) = 2a$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Coordenadas del centro: $C(h,k)$
Coordenadas de los vértices: $V(h, k \pm a)$
Coordenadas de los focos: $F(h, k \pm c)$

Ejemplos:

Determinar el centro, vértices, focos y gráfica de las siguientes elipses:

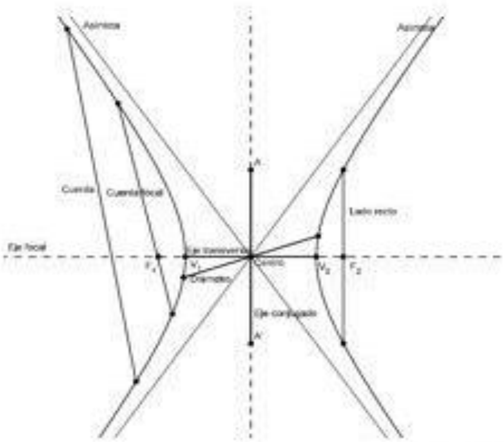
1. $9x^2 - 18x + 25y^2 - 250y + 409 = 0$
2. $25x^2 + 250x + 9y^2 + 18y + 409 = 0$

Material entregado para la hipérbola.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
LOS COMUNEROS
Aprobado por Resolución N° 2171 de Noviembre 13 de 2002
Emanada de la Gobernación del Cauca
CODIGO DANE 119001002187-01 NIT: 817.001.928-8

LA HIPERBOLA

Definición: una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.



- **Focos:** puntos fijos.
- **Eje focal:** recta que pasa por los focos.
- **Vértices:** puntos en los que el eje focal corta a la hipérbola.
- **Eje transverso:** segmento comprendido entre los vértices, cuya longitud es $2a$
- **Centro:** punto medio del eje transverso.
- **Eje normal:** recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro.
- **Eje conjugado:** segmento del eje normal comprendido entre los puntos A y A' como se muestra en la siguiente imagen y cuya longitud es $2b$
- **Cuerda:** segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la hipérbola, los cuales pueden ser de la misma rama. Si la cuerda pasa por un foco, se denomina cuerda focal.
- Lado recto: cuerda focal perpendicular al eje focal.
- **Diámetro:** cuerda que pasa por el centro
- **Asíntotas:** rectas auxiliares que permiten la construcción de la cónica. La curva jamás toca la recta.

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Una hipérbola con centro $C(h,k)$, eje transverso de longitud $2a$, eje conjugado de longitud $2b$, $2c$ la distancia entre los focos, y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la hipérbola, tiene la siguiente ecuación:

- Si el eje transverso es paralelo al eje X, por definición de hipérbola, se tiene que:

$$|d(F_1,P)-d(F_2,P)|=2a$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Coordenadas del centro: $C(h,k)$
Coordenadas de los vértices: $V(h\pm a,k)$
Coordenadas de los focos: $F(h\pm c,k)$
Ecuaciones de las asíntotas: $y=k\pm\frac{b}{a}(x-h)$

- Si el eje transverso es paralelo al eje Y, por definición de hipérbola, se tiene que

$$|d(F_1,P)-d(F_2,P)|=2a$$

$$\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$$

Coordenadas del centro: $C(h,k)$
Coordenadas de los vértices: $V(h,k\pm a)$
Coordenadas de los focos: $F(h,k\pm c)$
Ecuaciones de las asíntotas: $y=k\pm\frac{a}{b}(x-h)$

EJEMPLOS:

Determinar el centro, vértice, asintotas y gráfica de las siguientes hipérbolas:

1. $4x^2-16x-9y^2-18y-29=0$
2. $4y^2+8y-9x^2-36x-68=0$

Nota: los espacios en blanco de los que se habla en la descripción, corresponden a las longitudes de los ejes, coordenadas de los puntos y ecuaciones de las dos imágenes anteriores.