ESTRATEGIAS EMPLEADAS POR LOS ESTUDIANTES DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA COMERCIAL DEL NORTE PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS RELACIONADOS CON ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES CONVEXAS

ANDERSON ARANDA ROMERO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2017

ESTRATEGIAS EMPLEADAS POR LOS ESTUDIANTES DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA COMERCIAL DEL NORTE PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS RELACIONADOS CON ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES CONVEXAS

ANDERSON ARANDA ROMERO

ASESORA

GABRIELA INÉS ARBELÁEZ ROJAS

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2017

NOTA DE ACEPTACIÓN

El presente trabajo de
Práctica pedagógica fue aprobado
Por la asesora y
el respectivo evaluador

Vo.Bo. Alex Montes
Coordinador del Programa de Licenciatura en Matemáticas

Vo.Bo. Gabriela Inés Arbeláez Rojas
Asesora

Vo.Bo. Francisco Enríquez
Evaluador

Contenido

Página

1. Contexto

1.1 La institución Educativa Comercial del Norte…………………………..……10

2. Objetivos…………………………………………………………………..........12

2.1 Objetivo general

2.2 Objetivos específicos

3. Planteamiento del problema

3.1 Definición del problema……………………………………..…….……...13

3.2 Justificación…………………………………………………………...…14

4. Marco teórico

4.1 La resolución de problemas matemáticos……………...………………...…....15

4.2 Polya y su método heurístico………………………………………………….....16

4.3 El método de Polya para la resolución de problemas matemáticos……..……17

5. Metodología de trabajo……………………...…….…….……………….……….21

6. Bitácoras

6.1 Reflexión sobre la práctica pedagógica……………………….………........24

6.2 Bitácora I…………………………………….………………............24

6.3 Bitácora II……………………….…………………………..……........33

6.4 Bitácora III…………………………..…………….………..……….... …46

6.5 Bitácora IV………………………………..………………………......57

6.6 Bitácora V……………………..…………………………..……….... 70

6.7 Bitácora VI……………………………………………………………...…81

6.8 Bitácora VII…………………………………………………...…........91

6.9 Bitácora VIII……………………………….…………..……….…...…...101

7 Conclusiones……………………..…………………………...……………........113

8 **Bibliografía**……………………………………………………………………......117

9 **Anexos**……………………………………………………………………………..120

9.1 **Algunas estrategias para la resolución de problemas de áreas de polígonos convexos**………………………………………………………….……........120

9.2 **Talleres**……………………………..………………………...…...…128

Agradecimientos

En primer lugar doy gracias a Dios por darme la sabiduría y la inteligencia para afrontar esta etapa de mi vida en la cual quiero avanzar un escalón más hacia la cima del éxito. Además, estoy muy feliz y agradecido con el padre celestial por escuchar mis súplicas y oraciones en los momentos difíciles donde prevalecía el decaimiento, la preocupación y la desesperación. Gracias por brindarme ese consuelo, y esa paz interior que necesitaba para pararme y seguir luchando por este sueño.

Agradezco a la Universidad del Cauca por abrirme las puertas para cumplir este sueño y por brindarme una excelente formación matemática. Gracias por permitirme vivir experiencias enriquecedoras e inolvidables, las cuales me han permitido crecer como persona y como futuro docente.

En especial, quiero darle gracias a la profesora **Gabriela Inés Arbeláez Rojas**, por orientarme en este proceso de la práctica pedagógica, el cual ha sido el camino por el cual inicié la actividad docente. Gracias profe Gaby por tener la suficiente paciencia en el transcurso de la elaboración del trabajo de práctica pedagógica.

Agradezco a mis padres que son personas maravillosas que me han brindado todo el apoyo, y se han esforzado lo suficiente para que yo sea un profesional y pueda llegar lejos en la vida. A ellos dedico este sueño que ha sido una bendición de Dios. Que Dios los bendiga a todos ustedes, y les brinde mucha prosperidad, paz y les tenga preparado un camino que los conduzca hacia la felicidad. Muchos éxitos les deseo en sus vidas.

INTRODUCCIÓN

La práctica pedagógica es un espacio curricular del Programa de Licenciatura en Matemáticas en el que los estudiantes se acercan a la realidad del sistema educativo básico medio colombiano, en el área de las matemáticas. La asignatura “práctica pedagógica” está dividida en cuatro fases: referentes teóricos, planteamiento de un proyecto de aula, implementación de la propuesta y sistematización. En el proyecto de aula se pretendía generar estrategias para resolver problemas de olimpiadas relacionados con áreas de polígonos regulares e irregulares. Para la realización de este proyecto de aula se vincularon estudiantes de grado noveno, décimo y undécimo de la institución educativa Comercial del Norte.

En primera instancia, la enseñanza de la matemática debe ser una actividad en la cual el docente capture la atención e interés del estudiante por el aprendizaje de esta disciplina. Una manera idónea de llevar a cabo este aprendizaje es mediante la resolución de problemas, que en la actualidad se ha convertido en una buena alternativa para la enseñanza y el aprendizaje.

Con este proyecto se pretende atraer a los estudiantes al maravilloso mundo de la resolución de problemas, fomentando la creatividad y un ambiente dinámico para que puedan aplicar sus estrategias o descubrir aquellas que le permitan llegar a la solución.

En este sentido, se quiere despertar el interés por la geometría que actualmente está ubicada en un segundo plano en muchas instituciones educativas públicas en nuestro país. Por su parte, los problemas de olimpiadas matemáticas son un detonante para propiciar aprendizajes significativos.

Asimismo, con la resolución de problemas sobre áreas podemos fortalecer los conocimientos que tienen los estudiantes sobre este tema, como también fortalecer conocimientos en temas relacionados con áreas de polígonos regulares e irregulares.

Como se dijo anteriormente, el documento que se presenta a continuación constituye la sistematización de la práctica pedagógica que se llevó a cabo durante seis meses. Para ello hemos estructurado el documento en seis capítulos los cuales describiremos a continuación.

En el primer capítulo se llevó a cabo la presentación de la Institución Educativa Comercial del Norte. En este caso, vamos a conocer la institución en la cual se ha realizado la práctica pedagógica.

En el segundo capítulo se realizó la presentación de los objetivos, planteamiento del problema y justificación del trabajo de práctica pedagógica.

En el tercer capítulo se presentó los referentes teóricos, que incluyen dos elementos que son: la resolución de problemas y el método de los cuatro pasos de Polya.

El cuarto capítulo contempla la metodología de trabajo, expresando los propósitos y actividades a desarrollar en cada una de las sesiones para que los estudiantes puedan apropiarse de estrategias para resolver problemas de olimpiadas relacionados con áreas de regiones poligonales convexos.

En el quinto capítulo se abordaron las reflexiones sobre cada una de las sesiones realizadas, consignándolas en una bitácora. Denominaremos bitácora a aquel escrito que tiene como propósito hacer una reflexión sobre una actividad efectuada. En ella se incluyen en detalle, entre otras cosas, observaciones, ideas, datos, avances y obstáculos de las actividades que se llevaron a cabo para el desarrollo del proyecto de aula que se implementó.

En el último capítulo tendremos las conclusiones del proyecto. En ellas se expresan las debilidades y fortalezas tanto del docente como de los estudiantes. Además se van a mencionar algunas consideraciones finales del proyecto de aula implementado.

1. CONTEXTO

1.1 La Institución Educativa Comercial del Norte

El 12 de diciembre de 1980 fue creado “Colegio Comercial nocturno Luis Vásquez” en la ciudad de Popayán. El 5 de octubre de 1981 se empezaron las labores académicas fijando su sede en la Escuela Urbana de Varones Julián Uribe Uribe, localizada en el barrio “El placer”. Desde el año 1986 se dio la apertura a la jornada de la tarde con el nombre de Colegio Comercial Luis Vásquez.

En el año 1988 suceden dos acontecimientos:

- ❖ En la jornada de la noche se empezó a trabajar por ciclos de acuerdo al decreto No 3011.
- ❖ Se fusionaron la jornada de la mañana “Centro Docente Julián Uribe Uribe” con el colegio Comercial Luis Vásquez”.

A partir del 20 de agosto de 1999, se fusionaron las tres jornadas en una sola institución, bajo el nombre de “**Colegio Comercial del norte”.**

El 23 de diciembre del 2002 el Colegio Comercial del Norte según decreto departamental 1559, toma el nombre de "**Institución Educativa Comercial del Norte**" y se fusiona con las escuelas: La paz, Toez, Francisco José Chaux Ferrer (la Rejoya) y villa Nueva, quienes en adelante se denominan sedes de la institución.

Respecto a la "**Institución Educativa Comercial del Norte**" queremos mencionar los siguientes aspectos:

- Es una institución pública de carácter comercial.
- La sede principal cuenta con dos jornadas (mañana y tarde).En la noche las instalaciones de institución educativa son empleadas para la realización de bachillerato por ciclos.
- Está ubicada en la Calle 73N # 9-21 en el barrio el placer de la ciudad de Popayán.
- Posee una población de 510 estudiantes (desde transición hasta 6º) de la jornada de la mañana en la sede principal (barrio "El Placer") y 466 estudiantes de la jornada tarde albergando estudiantes de 7º hasta 11º. Posee 375 estudiantes de primaria en la sede la paz (barrio "La Paz"), 130 estudiantes (desde transición hasta 9º) en la escuela Francisco José Chaux Ferrer (perteneciente a la vereda "La Rejoya"), 63 estudiantes (desde transición hasta 5º) en la escuela Toez (localizada en el barrio "Toez") y 42 estudiantes (desde transición hasta 5º) en la escuela Villa Nueva (perteneciente a la vereda "La Rejoya").
- Cuenta con 21 profesores de Planta en la sede principal para la jornada de la tarde y 18 profesores de la jornada de la mañana. De estos 21 profesores, tres son provisionales, dos en período de prueba y 16 en propiedad.

2. Objetivos

2.1 Objetivo general

Apropiar a los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Comercial del Norte de estrategias que permitan resolver problemas de olimpiadas matemáticas relacionados con áreas de regiones poligonales convexas.

2.2 Objetivos específicos

Motivar a los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Comercial del Norte a aprender geometría mediante resolución de problemas de Olimpiadas Matemáticas.

Conocer las estrategias que emplean los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Comercial del norte, para la solución de problemas de Matemáticas relacionados con áreas de regiones poligonales convexas.

Aplicar propuestas didácticas (Arenas, 2012) que permitan fomentar el aprendizaje de áreas de regiones poligonales convexas para llamar la atención de los estudiantes por el estudio de la matemática.

Fomentar espacios de aprendizaje que contribuyan a fortalecer la formación matemática de los estudiantes en el tema de áreas de regiones poligonales convexas.

3. Planteamiento del problema

3.1 Definición del problema

Uno de los estándares básicos de competencias matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para la educación básica secundaria, establece que para el grado 7º el estudiante debe estar en capacidad de: "*calcular áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos*". Sin embargo, la enseñanza del tema de áreas de regiones poligonales convexas es un tema en el que no se profundiza su estudio en la Institución Educativa Comercial del Norte. Esto se debe a que los dos docentes que abordan los cursos de educación básica secundaria afirman verbalmente que en cuanto al tema de áreas abarcan las siguientes regiones planas: rectángulos, cuadrados, triángulos, paralelogramos, trapecios, rombo y polígono regular durante el cuarto periodo académico de la institución.

No obstante, los docentes manifestaron que a pesar de enseñarse el tema de áreas, gran parte de los escolares de educación básica secundaria aún tienen vacíos conceptuales que no son superados, los cuales causan dificultad en la asignatura "trigonometría", cuando se aplican las razones trigonométricas al cálculo de áreas.

Adicionalmente otra situación que afronta la Institución Comercial del Norte es que existen estudiantes que provienen de otras instituciones educativas del departamento del Cauca, las cuales no ofrecen en su programa escolar la asignatura "geometría", en particular para el grado séptimo. Esto trae como consecuencia que los discentes no van a tener los conocimientos para resolver los problemas de olimpiadas matemáticas que se pretenden proponer. Asimismo, los escolares van a tener dificultades cuando se enfrenten a problemas (relacionados con áreas) ya sea en las pruebas de admisión de la Universidad del Cauca o pruebas Saber 11.

3.2 JUSTIFICACIÓN

El proyecto de práctica pedagógica que se llevó a cabo en la institución Educativa Comercial del Norte de la ciudad de Popayán, es importante porque se pretendía conducir a los estudiantes de noveno grado a generar estrategias que les permitieran resolver problemas de olimpiadas relacionados con áreas de regiones poligonales convexas. Esto contribuye a que los escolares puedan:

- Eliminar los vacíos conceptuales que tienen los estudiantes en el tema de áreas, con el fin de afrontar sin dificultad las aplicaciones al tema de áreas en trigonometría.
- Ampliar sus conocimientos en tema de áreas, para que así puedan resolver problemas de áreas de regiones poligonales convexas cuando aspiren a ingresar a la Universidad del Cauca, presentar las pruebas de estado y competiciones como las Olimpiadas Regionales de Matemáticas.

Con este proyecto de práctica se quería incentivar a los estudiantes de grado noveno hacia el aprendizaje activo de la matemática mediante la resolución de problemas. Esta forma de aprendizaje va a permitir tener estudiantes cada vez más interesados en matemáticas, capaces de desarrollar sus propias estrategias para resolver problemas, y encaminarlos a estudiar la carrera de matemáticas.

4. MARCO TEÓRICO

"*La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces*." (Sales, 2000, p.13)

4.1 LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

La Resolución de problemas matemáticos se está convirtiendo en una alternativa que permite no sólo aprender; sino despertar el interés del estudiante por el estudio de esta ciencia que se ha caracterizado como una "asignatura difícil" para muchos escolares. Según Sepúlveda: *"la mayoría de las personas tienen dificultades y muestran deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas; algunas de las posibles razones son: los alumnos no tienen la oportunidad de entender la importancia de lo que significa aprender matemáticas, el currículo que se ofrece es demasiado rígido, y los estudiantes no están comprometidos con el aprendizaje de las matemáticas*."(Sepúlveda, 2009)

Adicionalmente Sepúlveda (2009) afirma que:

- ✓ "*En los últimos 30 años se han llevado proyectos de investigación en el campo de la educación matemática enfocados hacia la resolución de problemas matemáticos, entre los cuales se destacan los trabajos de Lester (1980), Schoenfeld (1992), y Kilpatrick (1969). Kilpatrick (1992) revisa las corrientes de investigación en educación matemática que tuvieron lugar durante el siglo XX y destaca entre ellas las que se centraron en el estudio de la resolución de problemas. Shoenfeld propone una secuencia de acciones que puede establecer una relación holística entre el problema, su resolución y las estrategias que puede emplear el sujeto para comprenderlo.*

- ✓ *Polya preocupado por el mal desempeño de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas al resolver problemas, decidió sistematizar un método que pudiera ser útil a los estudiantes al resolver problemas. Este método pretendía brindar las herramientas necesarias para incursionar en la realización de acciones y reflexiones que condujeran a los estudiantes a desarrollar los procesos de resolución*." (p.80)

Por otra parte, el método de Polya establece cuatro fases en la resolución de problemas: comprender el problema, diseñar un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Además, de acuerdo con Sepúlveda (2009)*: "Polya establece que existen dos tipos de problemas: rutinarios y no rutinarios. Los problemas rutinarios son aquellos que teniendo interés en resolverlos, el que los enfrenta encuentra el camino de solución de manera casi inmediata, no requieren un esfuerzo mental extraordinario para visualizar el método, el trazo, el algoritmo o el lugar donde puede consultarse una idea para su solución. En cambio, los problemas no rutinarios requieren esfuerzo y meditación antes de que se vislumbre alguna idea para la solución. Esta caracterización de Polya puede ser relativa, ya que para determinados estudiantes los problemas rutinarios pueden llegar a significar un esfuerzo demasiado grande; mientras que para estudiantes con habilidad para las matemáticas puede llegar a significar un simple entrenamiento."* (p.82)

4.2 POLYA Y SU METODO HEURÍSTICO

Según Cortés M (2007): "*Polya a través del libro "how to solve it" (1954), introduce el término "heurística" para describir el arte de la resolución de problemas, concepto que desarrolla luego en "Matemática y razonamiento plausible" (1957) "Mathematical Discovery" (1981)"*. Esto es, para Polya: "*la heurística trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso*" (p.83). Además la obra de Polya explota la inquietud que todos poseemos por descubrir y poner en juego las facultades inventivas para resolver problemas. Está basado en un estudio profundo de los métodos de solución denominado método Heurístico en la solución de problemas matemáticos. Los métodos heurísticos son estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizadas por los solucionadores de problemas, basadas en la experiencia previa con problemas similares. Estas estrategias indican las vías o posibles enfoques a seguir para alcanzar una solución.

Asimismo Sepúlveda expresa que Polya plantea que un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero si se pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por medio propio, se puede experimentar el encanto del descubrimiento (p.84).

4.3 El MÉTODO DE POLYA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Una de las más grandes contribuciones de Polya (Cortes, 2007) en la enseñanza de las matemáticas es su método de cuatro pasos para resolver problemas matemáticos. Para Polya: "*cada uno de ellos es importante debido a que puede suceder que a un alumno se le ocurra por casualidad una idea brillante y saltándose todo el trabajo preparatorio, vaya directamente a la solución.*". (p.85). Los cuatro pasos a los que queda reducido el proceso que deben producirse en el pensamiento de un alumno promedio para alcanzar con éxito la resolución de un problema matemático son los siguientes:

Comprensión del problema.

Polya (1965) plantea que el maestro debe evitar que el estudiante no comprenda el problema. Para ello, el problema debe escogerse adecuadamente, ni muy difícil ni muy fácil, y debe dedicarse un cierto tiempo a exponerlo de un modo natural e interesante.

El alumno deberá también separar las principales partes del problema, la incógnita, los datos, la condición. Estas partes debe considerarlas atentamente, repetidas veces y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada al problema debe dibujar la figura y destacar en ella la incógnita y los datos.

No obstante, se recomienda que para la comprensión del problema el estudiante tenga en cuenta los siguientes aspectos: entender todas las palabras del problema, trabajar con casos iniciales y especiales; trazar un dibujo o incluso recurrir a un problema análogo puede ser útil para resolver el problema planteado.

Concepción de un plan.

Cuando el problema ha sido comprendido por el escolar, es necesario construir un plan para resolverlo. De acuerdo con Polya: "*se tiene un plan cuando se sabe, grosso modo, que cálculos, razonamientos o construcciones se han de efectuar para determinar la incógnita*". (p.28) La idea de un plan toma forma poco a poco, después de ensayos que no necesariamente conducen a buenos resultados y de perseverar hasta conseguir lo anhelado, lo cual lo conducirá a una idea buena que lo llevará a la solución del problema (para Polya esta idea la concibe como una "idea brillante").

Las buenas ideas se basan en la experiencia pasada y en los conocimientos adquiridos previamente. Mientras tanto, lo mejor que puede hacer el maestro es conducir al estudiante a la idea brillante, ayudándole por medio de preguntas estimulantes, pero sin resolverle el problema al estudiante.

Ejecución del plan.

Cuando el alumno ha concebido un plan, en esta fase lo pondrá en ejecución. Polya afirma que: "*Si el alumno ha establecido un plan, el maestro puede disfrutar un momento de paz relativa. El peligro estriba en que el alumno olvide su plan, lo que puede ocurrir fácilmente si lo ha recibido del exterior y lo ha aceptado por provenir del maestro. Pero si él mismo ha trabajado en el plan, y si ha concebido la idea final con satisfacción entonces no lo perderá tan fácilmente.*" (p.29)

Visión retrospectiva.

Cuando el alumno ha llevado a cabo su plan y posteriormente ha redactado la solución, es hora de verificar cada paso de su razonamiento para estar seguro de que su solución es correcta. No obstante, puede haber errores si su razonamiento es largo y enredado. Por lo tanto, Polya afirma que es recomendable verificar la solución reexaminando el resultado y el camino que le condujo a ella, le permitiría consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas.

Al analizar el siguiente ejemplo, es necesario realizar la visión retrospectiva ya que una de las soluciones brinda un valor negativo para la base y la altura. Es aquí donde podemos sacar provecho de la última fase de Polya para concientizar al estudiante de que es necesario verificar si la respuesta obtenida tiene sentido.

Ejemplo. El área de un paralelogramo es 48 cm^2, su base x+3 cm y su altura x+1 cm.

Encuentre:

a) El valor de x

b) La longitud de la base y la altura del paralelogramo.

Sabemos que el área del paralelogramo es igual al producto de la longitud de la base por la longitud de su altura, es decir, $48 = (x+3)(x+1)$.

Posteriormente, reescribiendo la anterior ecuación tendremos la siguiente: $x^2 + 4x +5 = 0$; mediante descomposición factorial obtendremos $x= -9$ o $x= 5$.

Debemos tener presente que la solución $x= -9$ no es válida porque las longitudes empleadas son cantidades positivas.

5. Metodología de trabajo

El proyecto de aula que se implementó en la Institución Educativa Comercial del Norte de la ciudad de Popayán, se llevó a cabo en ocho sesiones de trabajo con los estudiantes de grado noveno. Para su ejecución se propuso ocho talleres (en los que se pretendían aplicar los cuatro pasos de George Polya), los cuales iban a estar distribuidos de la siguiente manera: un taller inicial con el que se busca motivar a los escolares para la resolución de problemas; un segundo taller para saber qué tan familiarizados estaban con el tema de área de polígonos regulares. Por último, se destinaron seis talleres para conocer las estrategias que emplearían los educandos para resolver los problemas propuestos.

Por su parte, los problemas de olimpiadas matemáticas que se propusieron fueron de nivel básico. Es decir, son problemas propuestos por el comité organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad del Valle, (Comité organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas, 2012) los cuales estaban destinados para estudiantes de grados sexto y séptimo de educación básica secundaria.

¿Cómo se implementaron los talleres?

En la primera sesión se dará a conocer la temática que se trabajará en las ocho sesiones. También se planteará el primer taller y se presentará un video que tiene como propósito motivar a los estudiantes para el estudio de la matemática a partir de la resolución de problemas.

En la segunda sesión se presentó el taller dos, el cual estaba formado por cinco ejercicios y un problema de olimpiadas matemáticas. La importancia de este radicaba en conocer las fortalezas y debilidades que tienen los estudiantes resolviendo problemas relacionados con áreas de regiones poligonales convexas. Con la presentación de este taller se determinó si era factible proponer problemas de olimpiadas o si se trabajaba con ejercicios (problemas rutinarios) y problemas de razonamiento lógico; los cuales algunos de estos serán extraídos de las pruebas internas de la Universidad de Antioquia.

En la tercera sesión se implementó el taller tres, con el cual se pretendía trabajar con tres ejercicios relacionados con áreas de regiones triangulares y el teorema de Pitágoras. Análogamente, se presentaron dos ejercicios relacionados con ecuaciones lineales en una variable, regla de división de fracciones y una propiedad de la radicación.

En la cuarta sesión, se llevaron a cabo dos actividades, la primera, fue una actividad lúdica donde los estudiantes podrán interactuar jugando Tangram. La segunda, proponer un taller donde los educandos aplicaron la estrategia que consiste en dividir un polígono convexo en polígonos convexos más simples para determinar su área total.

En la sesión quinta se les planteó a los estudiantes un taller constituido por tres ejercicios y un problema de razonamiento lógico, con el propósito de que aplicaran la estrategia empleada en la sesión anterior (recurriendo a un problema análogo).

En la sexta sesión se propuso cuatro problemas de razonamiento lógico, de tal manera que uno de los problemas también se pudiera resolver mediante otra estrategia de solución, como lo es dividir la región en rectas paralelas entre sí que pasan por sus vértices.

En la séptima sesión, se propondrá un taller de la siguiente manera: un ejercicio en el que los escolares puedan obtener el área de dos figuras geométricas planas, teniendo en cuenta ciertas características como la congruencia. Seguidamente, se abordaron dos ejercicios en donde deben aplicaron la estrategia empleada en la cuarta sesión (problema análogo) y un problema de razonamiento lógico.

En la octava sesión se llevó a cabo dos actividades. En primer lugar, se brindó la explicación a los estudiantes sobre la fórmula de Herón. Además, se formuló el taller ocho, el cual tenía como finalidad plantear un problema en el que se empleara la Formula de Herón. Simultáneamente, se propusieron dos ejercicios y un problema de olimpiadas para que pudieran aplicar las estrategias utilizadas anteriormente.

7. Bitácoras.

7.1 Reflexión sobre la práctica pedagógica

Dentro de la práctica pedagógica realizada en la Institución Educativa Comercial del Norte, se observaron diversos aspectos importantes durante el ejercicio docente, puesto que en este espacio de enseñanza y aprendizaje se generaron estrategias de resolución de problemas, se diseñaron actividades que llamaron la atención de los estudiantes, concientizándolos sobre la importancia de dicha estrategia para la formación matemática.

6.2 Bitácora I

Para empezar, Nieto (2005) considera que es una tarea indispensable para un docente sensibilizar a los estudiantes a que se interesen por el estudio de la matemática, pero preferiblemente a partir de la resolución de problemas. Para ello es necesario optar por modificar la forma tradicional en que se ha venido enseñando esta disciplina, puesto que según De Lozada M (2001): "*el método tradicional sofoca la creatividad del estudiante y destruye su confianza en sus propias posibilidades de resolver problemas.*" (p.15)

En este caso se debe aprovechar al máximo los beneficios que trae consigo la resolución de problemas. De acuerdo con De Losada: "*La participación en competencias de olimpiadas matemáticas inspira en muchos estudiantes un interés creciente en la Matemática e incrementa el deseo que tienen para aprender más matemáticas. También permite la formación de nuevas generaciones de matemáticos en muchos países del mundo.*" (p.18)

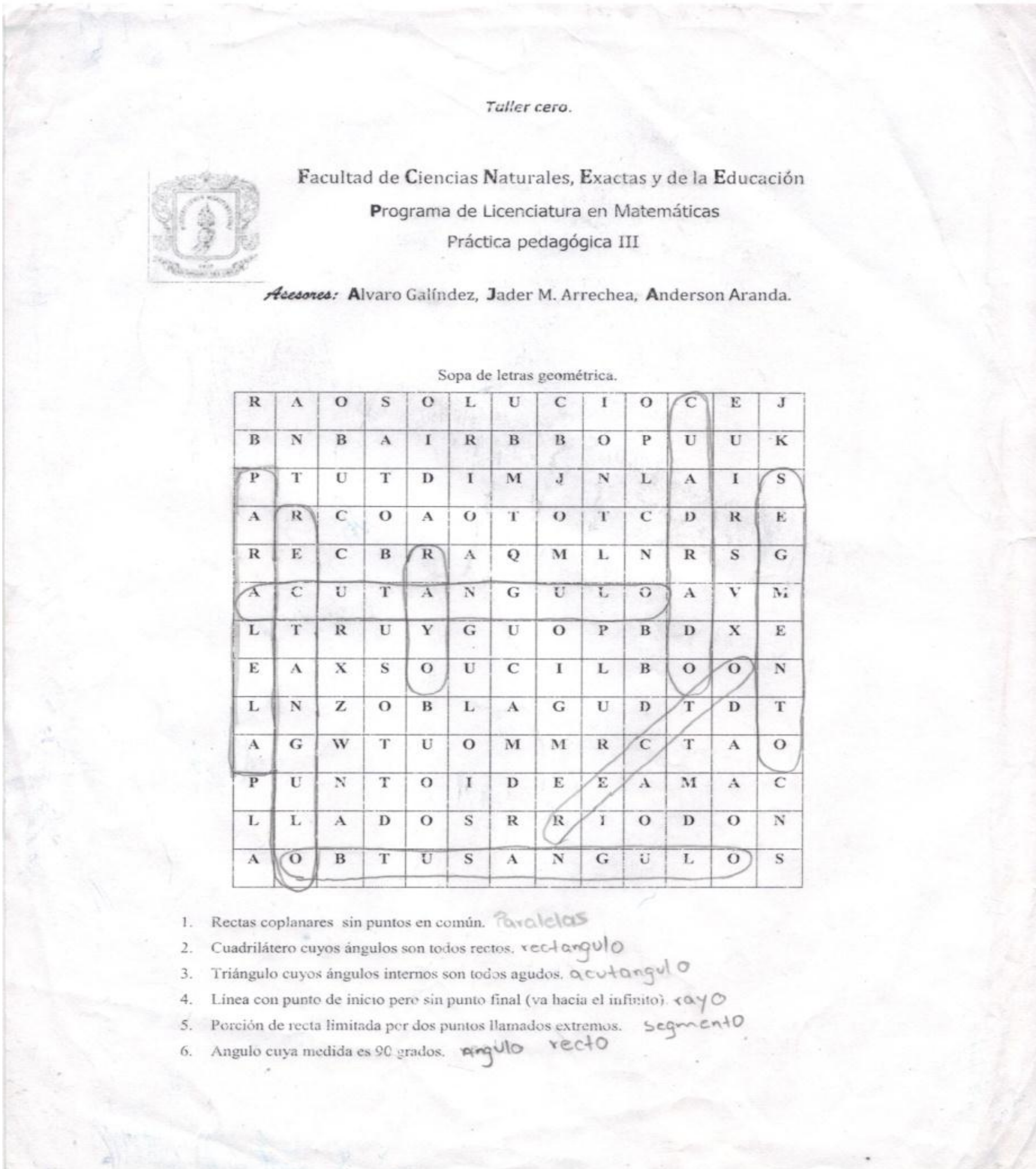
En cuanto a la primera sesión de trabajo con los escolares, se tuvo una participación de 130 estudiantes de grados Noveno, décimo y undécimo. Esta comienza con la presentación de los practicantes Alvaro Galindez y Anderson Aranda Romero, quienes plantearon la propuesta de trabajo que se iba a llevar a cabo (resolución de acertijos lógicos y problemas de olimpiadas relacionados con áreas de regiones poligonales convexas). Los practicantes tuvieron una corta interacción verbal con los estudiantes con respecto al interrogante, ¿Qué significa la Matemática para ustedes? Infortunadamente hubo una escaza participación de los escolares con relación a la pregunta planteada. Uno de los estudiantes manifestó que "*la Matemática es una ciencia de puras fórmulas"*. Otra respuesta afirmaba que "la Matemática es una ciencia difícil" y una tercera enfatizo en que "*la Matemática es una ciencia abstracta"*.

No obstante, un video sirve como punto de apoyo para motivar a las personas, en especial a 130 estudiantes que era el propósito. En este caso, se consideró que el video (Disney, 1959) "Donald in the magic land" (Donald en la tierra mágica) era apropiado para motivar a los estudiantes ya que este muestra lo interesante que es estar inmerso en el mundo de las matemáticas, considerado como un lugar encantador. Para ello, el espíritu de la aventura (quien le habla al pato Donald) lleva al pato Donald a recorrer ese maravilloso mundo y le expresa a Donald (quien considera que esta ciencia es "para locos") que sin ella no se tendrían los inventos que se tienen hoy en día, por ejemplo: la música, los instrumentos ópticos, la mayoría de los juegos que conocemos, las figuras arquitectónicas, etc. Adicionalmente en el video se resalta un aspecto importante que hace referencia a que esta disciplina ha abierto las puertas a muchos desarrollos científicos, donde cada descubrimiento conduce a muchos otros. Es interesante que el video exprese que aún quedan muchas puertas por abrir, y que esas puertas pueden ser abiertas gracias a las matemáticas.

Biblioteca Institución Educativa Comercial del Norte.

Después de presentar el video se propuso el taller uno constituido por una sopa de letras y dos problemas de razonamiento lógico. Respecto al primer punto del taller (sopa de letras) se tuvo en cuenta los siguientes aspectos:

1. Algunos estudiantes resolvieron la sopa de letras sin leer los enunciados. Esto arrojó como resultado frases marcadas que no correspondían a los enunciados propuestos en la actividad, dado que algunos grupos no recordaban los conceptos requeridos para el desarrollo de la misma, procediendo a encontrarlos directamente en la sopa de letras. Por ejemplo, En la figura uno se puede apreciar que el grupo no tiene claro el concepto de ángulo recto, dado que la respuesta plasmada fue el de ángulo llano para la sexta pregunta. Asimismo, se visualiza cierta confusión en el manejo de los conceptos triángulo acutángulo y triángulo obtusángulo. Además de ello, este grupo encontró en la sopa de letras la palabra “punto” la cual no hacia parte de las opciones establecidas en la sopa de letras.


Taller cero.

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

Asesores: Alvaro Galíndez, Jader M. Arrechea, Anderson Aranda.

Sopa de letras geométrica.

R	A	O	S	O	L	U	C	I	O	C	E	J
B	N	B	A	I	R	B	B	O	P	U	U	K
P	T	U	T	D	I	M	J	N	L	A	I	S
A	R	C	O	A	O	T	O	T	C	D	R	E
R	E	C	B	R	A	Q	M	L	N	R	S	G
A	C	U	T	A	N	G	U	L	O	A	V	M
L	T	R	U	Y	G	U	O	P	B	D	X	E
E	A	X	S	O	U	C	I	L	B	O	O	N
L	N	Z	O	B	L	A	G	U	D	T	D	T
A	G	W	T	U	O	M	M	R	C	T	A	O
P	U	N	T	O	I	D	E	E	A	M	A	C
L	L	A	D	O	S	R	R	I	O	D	O	N
A	O	B	T	U	S	A	N	G	U	L	O	S

1. Rectas coplanares sin puntos en común. Paralelas
2. Cuadrilátero cuyos ángulos son todos rectos. rectangulo
3. Triángulo cuyos ángulos internos son todos agudos. acutangulo
4. Línea con punto de inicio pero sin punto final (va hacia el infinito). rayo
5. Porción de recta limitada por dos puntos llamados extremos. segmento
6. Angulo cuya medida es 90 grados. angulo recto

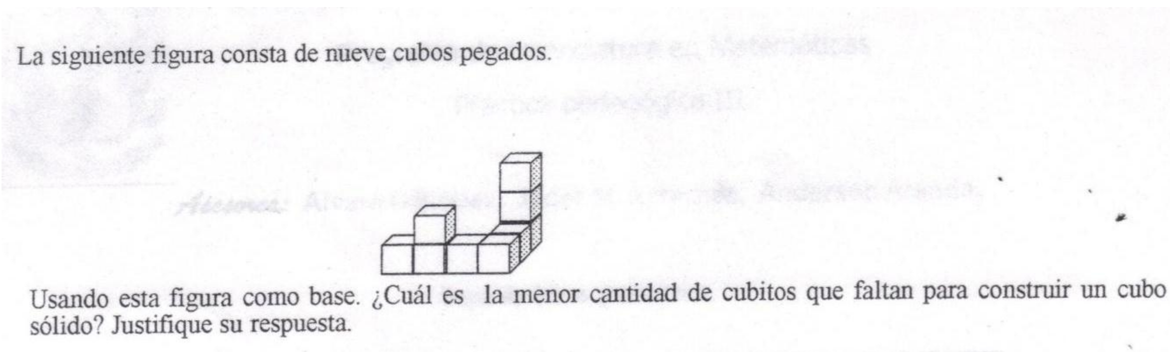
Figura 1

En conclusión, es importante resaltar que a la hora de resolver una sopa de letras, se deben leer los enunciados con atención para **comprenderlos,** antes de escoger una cierta respuesta.

2. Aunque algunos educandos leyeron los enunciados propuestos, se abstuvieron de dar respuesta debido a que no recordaban a qué hacían referencia. De esta forma, el estudiante no

recurría a la sopa de letras para encontrar las palabras sino que consultaba al docente sobre el significado de los mismos para así desarrollar la actividad con éxito. Es de aclarar que dentro de la actividad, la labor del docente se redujo a orientar a los estudiantes por medio de preguntas, con el fin de ampliar las posibilidades de acceder a la respuesta correcta, aunque en algunos casos hubo la necesidad de aplicar el efecto Topaze.

Por otra parte, en el segundo punto del taller (figura 2), referente al cubo sólido, se tuvo presente las siguientes consideraciones:


La siguiente figura consta de nueve cubos pegados.

Usando esta figura como base. ¿Cuál es la menor cantidad de cubitos que faltan para construir un cubo sólido? Justifique su respuesta.

Figura 2.

1. Cuando se les preguntó por la noción de cubo se notó que la mayoría no tenían una idea clara de su significado, pues para ellos un cubo representa un "solido formado de caras cuadradas". En esta respuesta se puede apreciar que en términos generales, los estudiantes no tienen el concepto formal de cubo (un cubo o hexaedro regular es un poliedro convexo de seis caras cuadradas congruentes).

2. Los estudiantes observaron la figura y tomaron como referencia el cubo correspondiente a dicho grafico; es decir, paralelepípedo formado por las siguientes longitudes: 4 cm de largo, 3 cm de ancho y 4 cm de altura; dando como resultado un cubo

de 48 cubos pequeños. No obstante el cubo al cual se estaba haciendo referencia en la figura 2 era aquel que estaba formado por 64 cubos pequeños.

3. Otros grupos tuvieron en cuenta que la figura estaba constituida por caras cuadradas, y que el cubo al cual se quería hacer referencia estaba formado por 64 cubos pequeños. Sin embargo, a pesar de tener idea sobre la noción de cubo, los estudiantes presentaron dificultad para determinar que el número de cubos restantes era 55, dado que presentaban confusión con la expresión “la menor cantidad” (figura 3). En este caso, podría hablarse de un cubo de 64, 125, 216 o 343, etc., cubos pequeños. El cubo buscado tenía arista de longitud 4 unidades. Así que el menor cubo consta de 64 cubos pequeños.

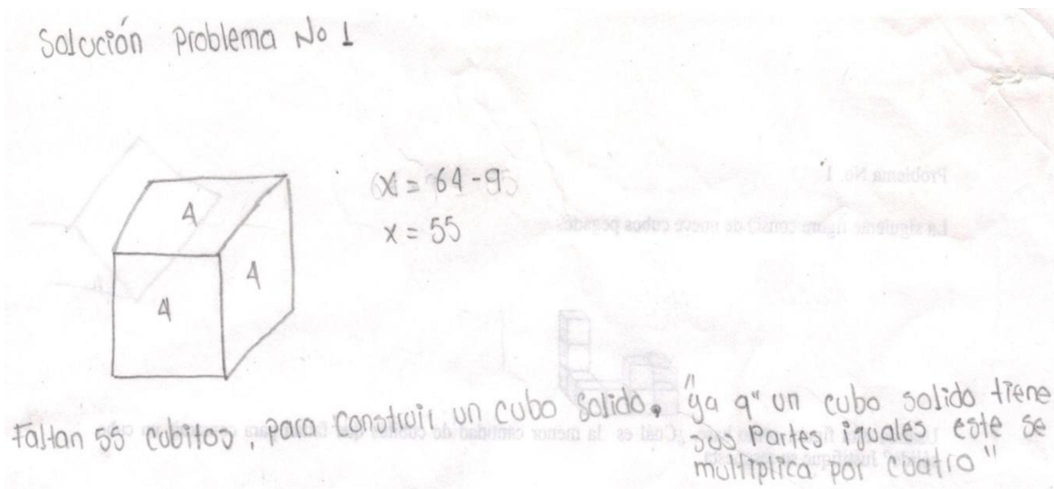


Figura 3.

En cuanto al tercer punto del taller, que a propósito llamó mucho la atención de los estudiantes porque lo querían resolver inmediatamente, citamos a continuación su enunciado:

Un granjero tiene que conseguir pasar con su barca a una oveja, un lobo y una lechuga hacia la otra orilla del río. Pero en su barca sólo hay espacio para él y otra de las tres cosas con lo cual tendrá que ir de un lado a otro y siempre llevando como máximo una cosa. Ten en cuenta que si el lobo se queda sólo con la oveja en una orilla se la comerá, y si la oveja se queda con la lechuga se la comerá. ¿Cómo debe ingeniárselas?

Respecto a este problema tenemos las siguientes consideraciones:

1. Se percibió que la mayoría de los grupos conformados se desenvolvieron sin dificultad en el desarrollo del problema. Quizás algunos escolares lo hayan conocido con anterioridad, siendo necesario realizar varios intentos para recordar la estrategia de solución y posteriormente obtener su respectiva respuesta (figura 4).

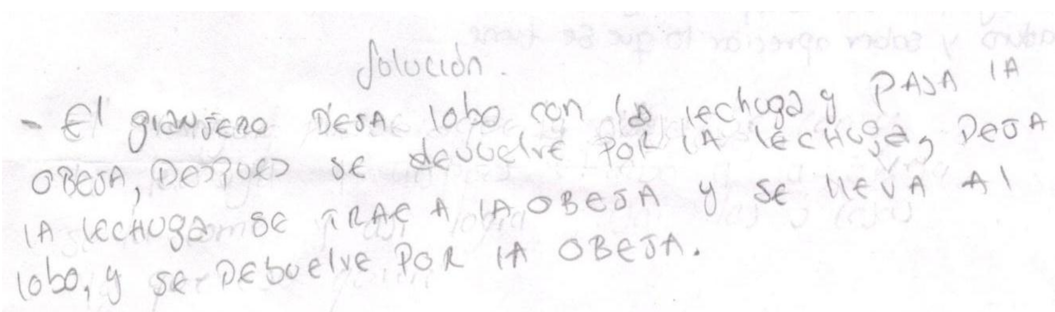


Figura 4.

2. Algunos grupos tardaron un poco en resolver el problema, evidenciándose discusiones en torno al mismo en aras de tener una mejor aproximación hacia la solución. También se notó el interés de los estudiantes al abordar el ejercicio por la forma como se expresaban verbalmente al discutir sobre las posibles soluciones. Se debe resaltar la actitud de los estudiantes quienes se mostraron interesados en seguir resolviendo este tipo de ejercicios (acertijos matemáticos).

3. Dos grupos no resolvieron el problema porque consideraban que no es posible que pasen los tres elementos sin que uno de ellos deje de afectar al otro. En esta instancia se hizo una representación con los estudiantes, quienes personificaron a cada uno de los miembros del acertijo considerando los elementos necesarios para tal fin, con el objetivo de facilitar su explicación y posteriormente acercarlos a la solución del ejercicio.

Por último, se destacan los siguientes aspectos de esta primera sesión:

1. Con este proyecto de aula se quiere incursionar en el campo de la enseñanza de las Matemáticas mediante la resolución de problemas. Lo anterior con el propósito de brindarle al estudiante un espacio donde pueda reflexionar, crear o poner en práctica estrategias de solución para cada uno de los problemas planteados, despertando así el interés por esta disciplina.

2. Es indispensable que se desarrolle el pensamiento espacial[1] en los escolares, porque el estudiante va a comprender los objetos tridimensionales (como el caso del segundo problema del taller) partiendo de gráficos bidimensionales y recíprocamente. Además, contribuye con el desarrollo de habilidades como las que se describen a continuación:

    I. Imaginar una representación bidimensional desde distintas perspectivas.
    II. Visualizar efectos de reflexión e inversión de objetos - imágenes.

---

[1] El pensamiento espacial se considera como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y diversas traducciones a representaciones materiales.

Por otra parte y como opinión personal, considero que el docente al interactuar por primera vez con sus estudiantes, debe superar rápidamente los temores que se generan durante su labor, mostrando seguridad con relación a lo que se está enseñando para convencer al estudiante a adentrarse en el estudio de las matemáticas, esta vez, desde la resolución de problemas. Método que durante cuatro décadas, ha mostrado ser muy enriquecedor y favorable, tanto para el estudiante como para el profesor.

6.3 Bitácora II

Adentrarse en el maravilloso mundo de la resolución de problemas matemáticos, es una acción esencial dentro de la matemática, ya que permite desarrollar ciertas habilidades en los estudiantes, manteniéndolos inquietos, confrontando lo desconocido y tratando de encontrar relación con algún problema que anteriormente hayan resuelto. Según Polya, un problema se vuelve más interesante, si no se puede solucionar de manera inmediata por algún método o algoritmo conocido. Es decir, si requiere de una buena dedicación, paciencia y sobre todo creatividad, para que después de varios intentos sea posible decir ¡lo resolví!

Por otra parte, en la segunda sesión se tuvo la participación de 38 estudiantes pertenecientes al grupo B, distribuidos en doce grupos de trabajo a quienes se les propuso el taller dos, con el fin de hacer una prueba diagnóstica que permitiera conocer las habilidades y dificultades que poseen los educandos al desarrollar la temática de áreas de regiones poligonales básicas (tales como triángulos y rectángulos entre otros).

El taller dos estaba conformado por cinco ejercicios y un problema de Olimpiadas Matemáticas, para ser resuelto durante un tiempo de dos horas. Seguidamente se les expresó a los escolares que si tenían alguna inquietud sobre el taller, la hicieran saber para que fuera resuelta y así pudieran desarrollar los ejercicios sin ninguna dificultad. Los resultados obtenidos en la sesión de trabajo fueron los siguientes:

Cuatro grupos resolvieron correctamente el primer ejercicio del taller, el cual consistía en calcular el área de dos triángulos equiláteros, cuyas longitudes de sus lados son 13 cm (para el primer triángulo) y 48 cm (para el segundo triángulo). Es importante resaltar que los estudiantes empezaron a idear un plan para determinar el área de los dos triángulos. Por su parte, el docente bajo la metodología de Polya los inducía a que no empezaran a resolver el problema sin haberlo comprendido. Esto permitió que los escolares pudieran continuar con el proceso de resolución, estableciendo un plan en aras de encontrar la solución del ejercicio, la cual se puede apreciar en la figura 1.

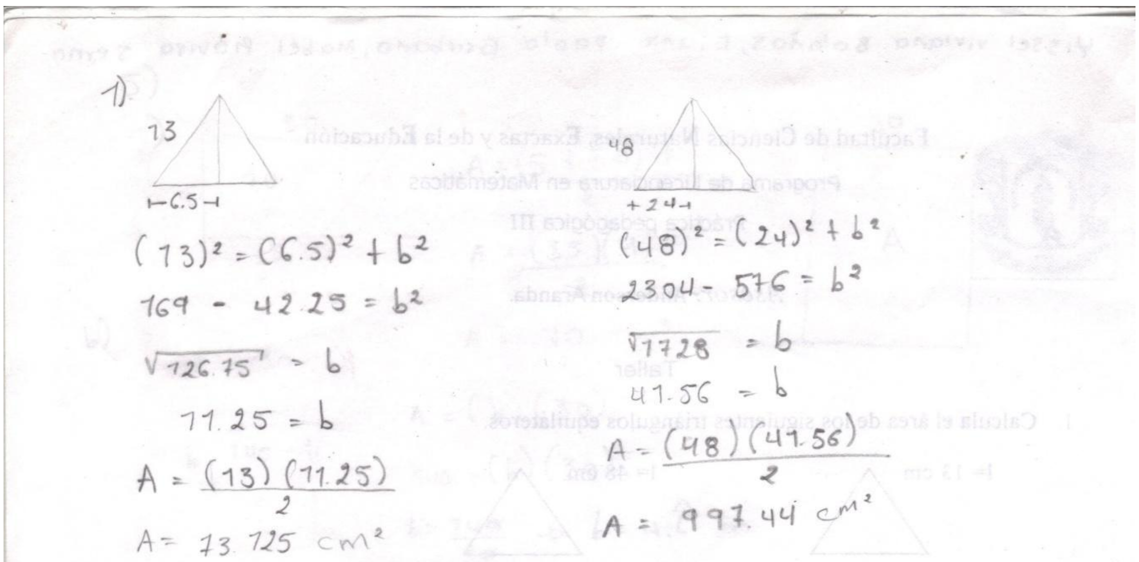


Figura 1

Siete grupos utilizaron procedimientos que los condujeron hacia una respuesta incorrecta. Se pudo apreciar que los errores que se cometieron estaban relacionados con los siguientes aspectos:

1. Al determinar la longitud de las alturas mediante el teorema de Pitágoras, se notó que tienen dificultad al aplicar esta proposición (figura 2).
2. Aunque los estudiantes conocen la fórmula para hallar el área de un triángulo, no logran identificar con facilidad cual es la base y la altura del mismo. En esta ocasión

consideraron en los dos triángulos equiláteros que las longitudes de sus respectivas alturas son iguales a las longitudes de sus respectivos lados (figura 3).

3. Se evidencia dificultad al determinar el área de una región triangular, dado que existe confusión con el concepto de perímetro (figura 4). Algunos estudiantes consideraron que el área de cada región triangular es igual a la longitud de su respectivo lado, como se aprecia en la figura 5.
4. No despejaron correctamente la variable que representa la longitud de la altura.

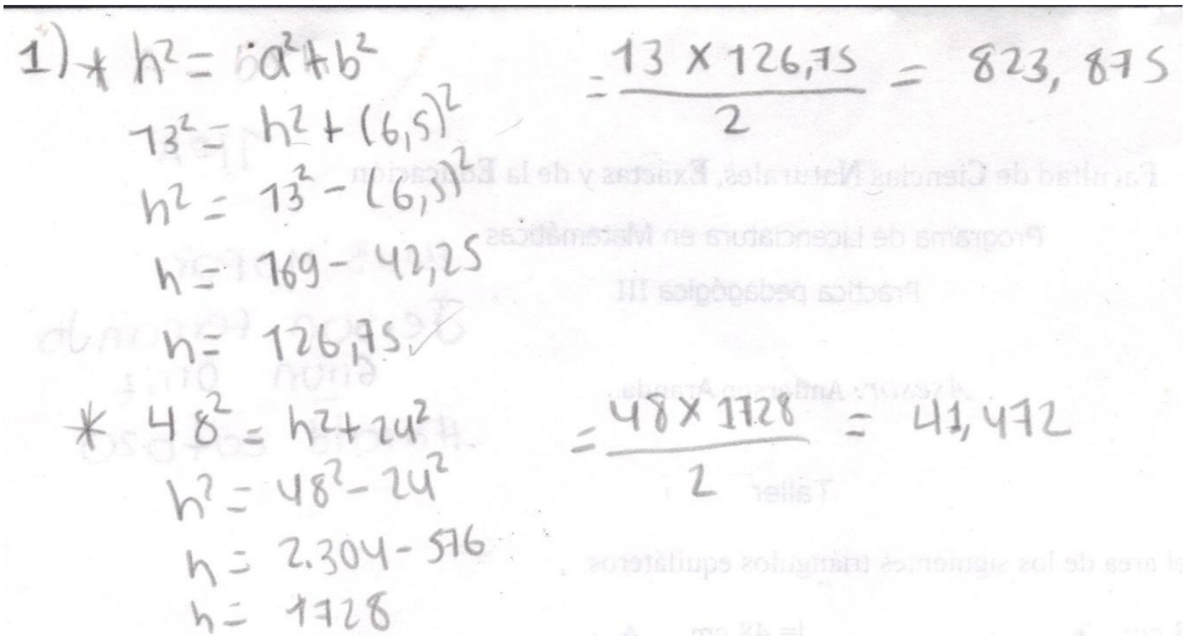


Figura 2.

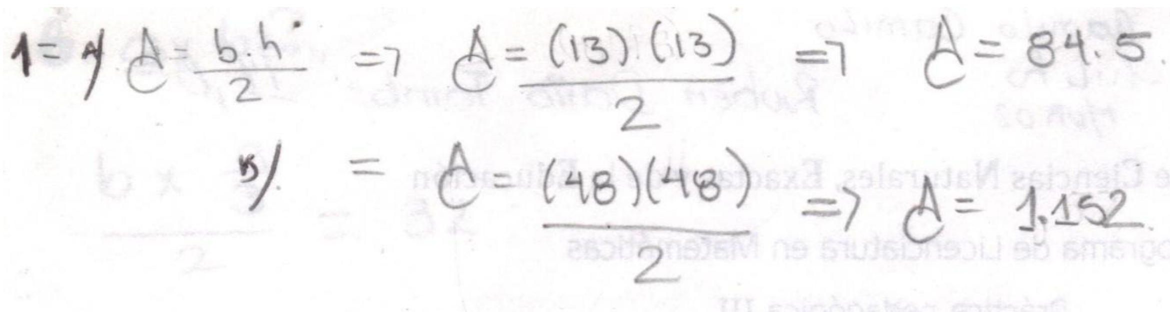


Figura 3.

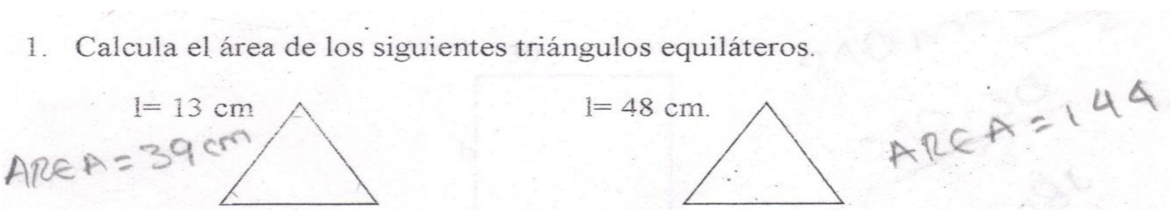


Figura 4.

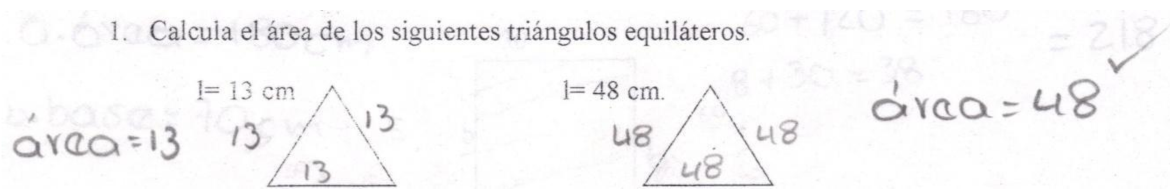


Figura 5.

Ahora bien, se observó que los educandos que no resolvieron correctamente el ejercicio debido a que tienen dificultad para establecer su solución. Infortunadamente estas respuestas no fueron mostradas al profesor para su respectiva corrección, lo cual hubiese permitido que los escolares aclararan las respectivas dudas.

Por otra parte, en el segundo ejercicio del taller se deseaba determinar la longitud de la base del triángulo de área 14 cm^2 y altura 4 cm. En este caso se obtuvieron los siguientes resultados:

Seis grupos determinaron mediante un procedimiento correcto la longitud de la base del triángulo sin ninguna dificultad. Se observó que, para su comprensión, los escolares identificaron los datos del ejercicio (área del triángulo y longitud de la altura) y el respectivo valor a hallar (longitud de la base del triángulo). El procedimiento matemático que utilizaron los escolares se describe a continuación.

Utilizar la fórmula que permite calcular el área de una región triangular y los datos del ejercicio, para obtener la longitud de la base del triángulo. La puesta en marcha de esta estrategia se puede apreciar en la figura 6.

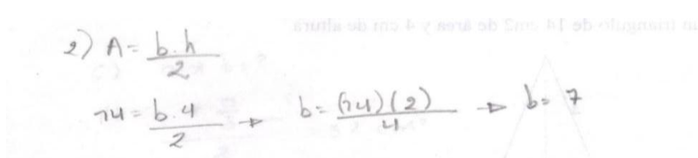


Figura 6

Por su parte, se observó que cuatro grupos presentaron una solución incorrecta del ejercicio. Se puede notar que los cuatro grupos que llegaron a una respuesta errada posiblemente tienen vacíos conceptuales que les impiden acercarse a la solución del mismo. No obstante, se evidenció que estos grupos se equivocaron al despejar la variable que representa la longitud de la base, así como también, al aplicar la fórmula del área de la región triangular para obtener dicha longitud (figura 7).

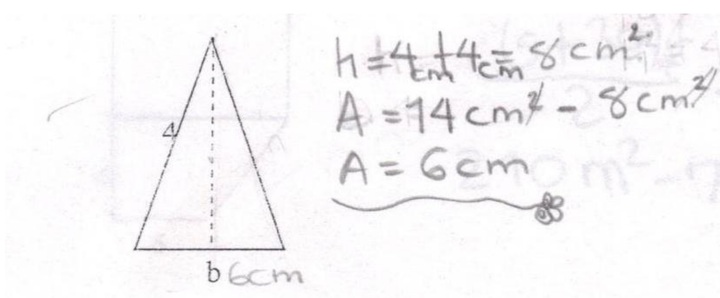


Figura 7

El tercer punto del taller consistía en determinar el área de un rombo de 5 cm de lado y 6 cm de diagonal menor. Con el propósito de facilitar la solución del ejercicio, se dio la respectiva fórmula para calcular el área del rombo y algunas de sus propiedades. Los resultados obtenidos al desarrollar este ejercicio fueron los siguientes:

Tres grupos determinaron el área del rombo correctamente, identificando la información del ejercicio (Cinco centímetros de lado y 6 centímetros de diagonal menor) y la incógnita (área del rombo). Asimismo, utilizaron el siguiente proceso que los condujo a la solución: Tener en cuenta que las diagonales del rombo son perpendiculares en sus puntos medios. Luego, hacer uso del teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal mayor, y emplear la fórmula para calcular el área del rombo. El proceso anterior se puede apreciar en la siguiente figura:

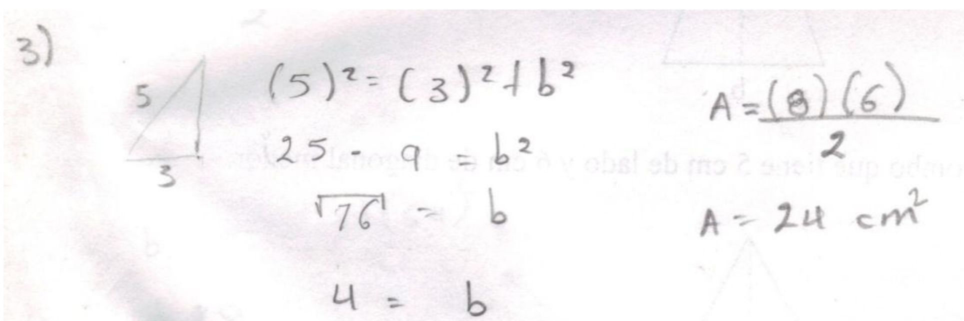


Figura 8

Por su parte, tres grupos no determinaron correctamente el área del rombo. Se pudo apreciar que tuvieron dificultad para resolver el ejercicio, debido a que al parecer no tienen una idea clara o no recodaban el concepto de dicho cuadrilátero y sus propiedades. A pesar de brindárseles la fórmula para determinar el área, tuvieron dificultad para establecer su solución, debido a que al intentar calcular la diagonal mayor, no despejaron correctamente la variable que representaba dicha longitud. De la misma manera, intentaron aplicar el siguiente procedimiento: determinar la longitud de una de las semidiagonales mayores, con el fin de calcular el área de uno de los triángulos que conforman el rombo. Sin embargo, se puede apreciar en la figura 9 que la longitud de la semidiagonal mayor no fue hallada correctamente, lo cual trajo como consecuencia que el área del triángulo de base 3 cm e hipotenusa 5 cm no fuera correcta. Adicionalmente no terminaron de encontrar el área total, lo cual hubiese sido importante su revisión para que se cercioren de los errores cometidos durante el proceso que conduce hacia su solución.

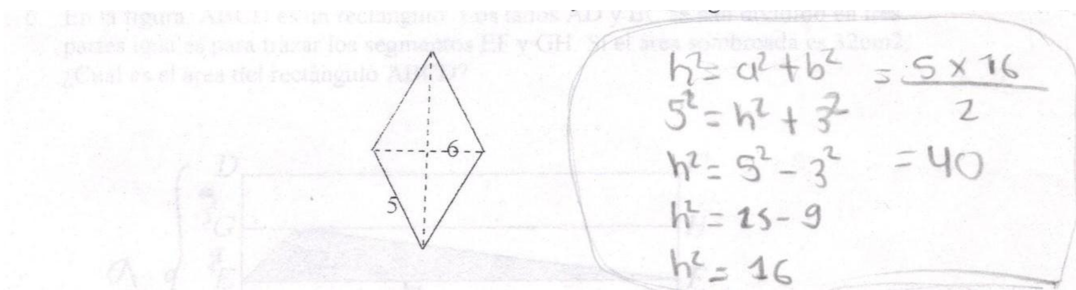


Figura 9

Se tuvieron cuatro respuestas que no han sido justificadas por los escolares. En la figura 10 se puede apreciar la solución presentada por uno de los grupos, en donde se notó que los escolares no tenían definido el proceso que los llevaría a la respuesta correcta. Se notó que el procedimiento matemático empleado por los educandos para tal fin fue la siguiente: sumar los lados del rombo y sus diagonales (considerando que 12 es la longitud de la diagonal mayor).

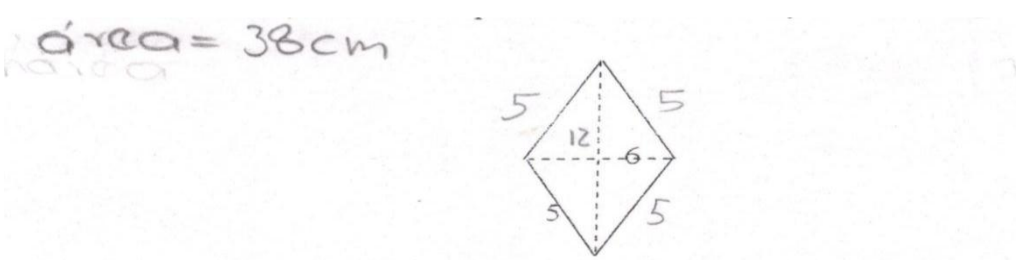


Figura 10

Dos grupos no solucionaron ejercicio. Al parecer esto se debió a la falta de compromiso (por parte de uno de los grupos) para desarrollar el taller y a los vacíos tanto de aritmética como de geometría (del otro grupo).

En cuanto al cuarto punto, se pide hallar la longitud de la altura de un trapecio cuyas longitudes de las bases mayor y menor son 38 cm y 18 cm respectivamente, mientras que el área es 196 cm^2. En esta ocasión se pretendía que los estudiantes aplicaran la fórmula para determinar el área del trapecio. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Tres grupos resolvieron el ejercicio correctamente empleando la fórmula para el área del trapecio sin tener inconvenientes a la hora de resolverlo, como se puede ilustrar a continuación (figura 11):

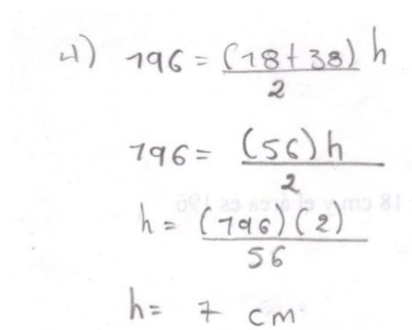


Figura 11

Cinco grupos resolvieron incorrectamente este ejercicio. Los errores estaban enmarcados en los siguientes aspectos: no empleaban la fórmula para hallar el área del trapecio, llegando a confundir esta fórmula con aquella que permite determinar el área de una región rectangular (figura 12). Se notó que tuvieron dificultad al despejar la altura en la fórmula del trapecio. En este caso, al desarrollar el ejercicio no llevaron a cabo la revisión del ejercicio para verificar su procedimiento y respuesta.

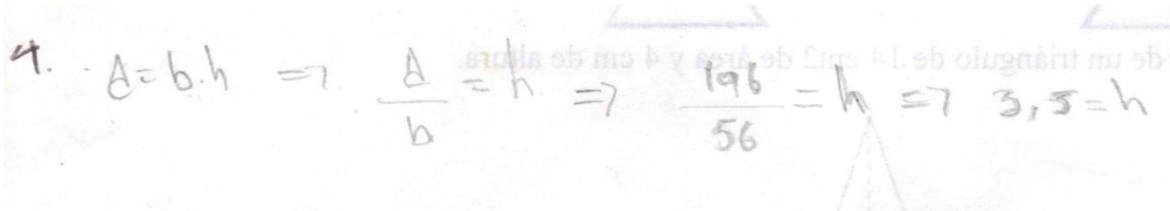


Figura 12

Cuatro grupos no brindaron respuesta a este ejercicio, posiblemente porque tuvieron dificultad para comprenderlo y establecer un plan que los conduciría a la respuesta del mismo.

El quinto punto hacía referencia a dos piscinas juntas de área 210 m^2, la cual tenía forma rectangular para los adultos y forma de trapecio para los niños. El propósito era determinar el área de cada zona de la piscina y la longitud de la base para la piscina de los adultos. Los resultados que se obtuvieron al desarrollar este ejercicio fueron los siguientes:

Siete grupos resolvieron el ejercicio correctamente observándose un mayor desempeño por parte de los escolares en este ejercicio que en el anterior (figura 11). Se pudo notar que los escolares (con la orientación del docente) han tenido en cuenta la información del ejercicio para así establecer la debida respuesta. A propósito, el procedimiento matemático que llevaron a cabo fue el siguiente: Para el numeral a), calcular el área de la piscina de los niños mediante la fórmula del área del trapecio, y posteriormente obtener el área de la piscina de los adultos, teniendo en cuenta el área total de la piscina. Para el numeral b) emplear la fórmula para el área del rectángulo, con el fin de hallar la longitud de la base. En la figura 13 se puede observar el desarrollo de los discentes al resolver los dos numerales del ejercicio.

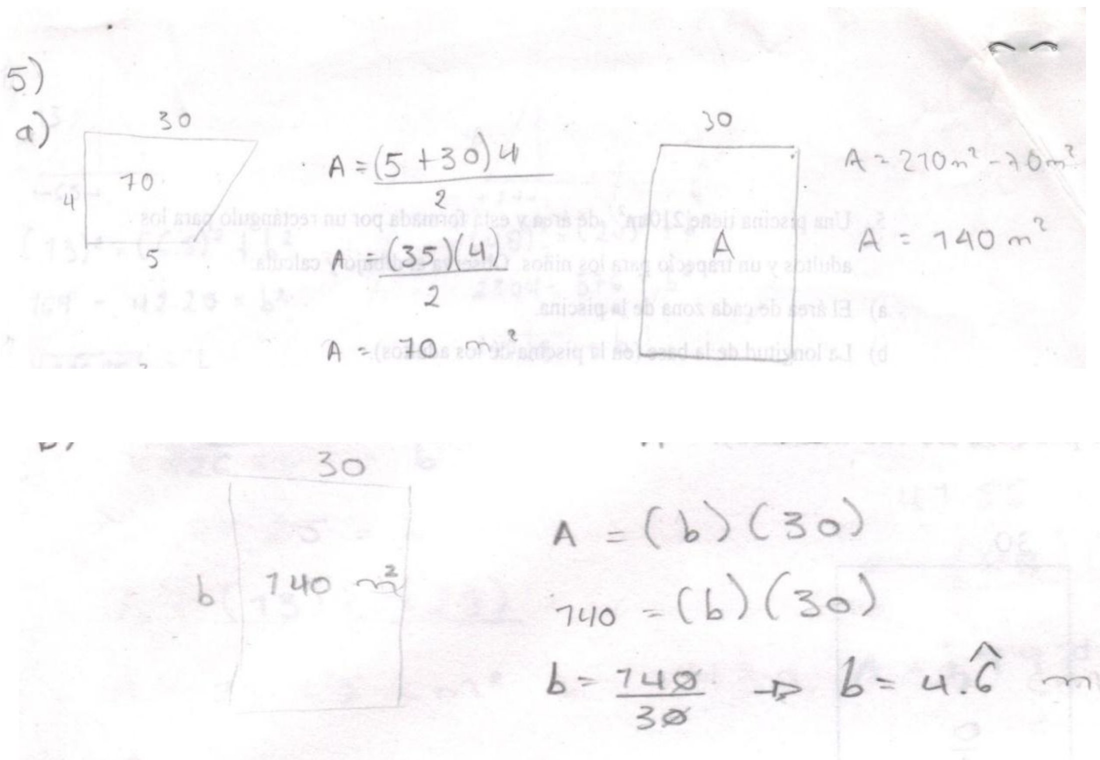


Figura 13

Observaciones.

1. Un grupo sólo resolvió la parte b) del ejercicio, al parecer copiaron los resultados de otro grupo, debido a que no justificaron en la hoja de respuestas como se obtenían los valores 140 y 70, correspondientes al numeral a).
2. Un grupo resolvió incorrectamente el ejercicio uno, evidenciándose que no tenían definido el procedimiento matemático para resolver la parte a) del mismo, y no dieron respuesta al numeral b). Por su parte, tres grupos no resolvieron el ejercicio planteado por razones que se desconocen.

El punto seis correspondía a un problema de Olimpiadas Matemáticas, el cual plantea lo siguiente: En la figura 14, ABCD es un rectángulo. Los lados AD y BC se han dividido en tres partes iguales para trazar los segmentos EF y GF. Si el área sombreada es 32 cm^2, ¿Cuál es el área del rectángulo ABCD?

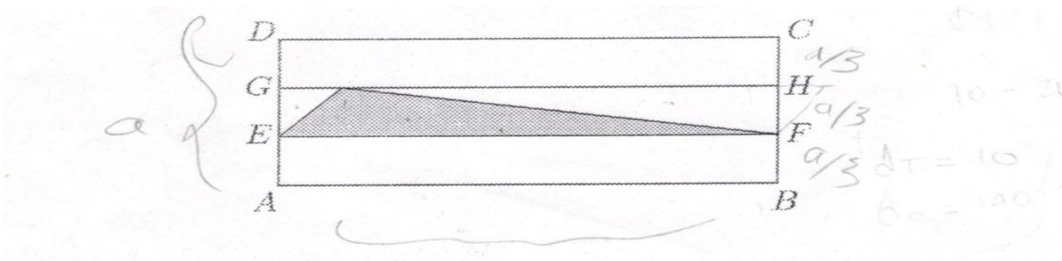


Figura 14

Durante la solución de este problema, se notó que los escolares tuvieron dificultad para comprender y por ende establecer un plan, llegando a considerar algunos de estos que hacía falta información. Ante esta situación se expresó a todos los grupos que la información proporcionada era suficiente para resolverlo. De esta manera se orientó a los grupos en la comprensión del problema y también a establecer el plan que conduciría a la solución. Para la resolución de este problema fue necesario recurrir al efecto Topaze.

Algunos estudiantes quedaron sorprendidos porque ellos querían determinar la longitud de la base del rectángulo y la altura, los cuales no eran necesarios para tal fin. Adicionalmente, la puesta en marcha del plan (tercer paso de Polya) establecida para tal fin se puede ilustrar en la figura 15.

6. $a \times b = ?$

$$\frac{b \times \frac{a}{3}}{2} = 32$$

$$b \times \frac{a}{3} = 32 \cdot 2 \Rightarrow b \times \frac{a}{3} = 64$$

$$b \times a = 64 \cdot 3 \Rightarrow b \times a = 192$$

Figura 15

Al analizar este punto de acuerdo al método de Polya, se observó que la totalidad de los grupos no comprendían suficientemente el problema, debido a que no consideraron que los segmentos AD y BC se dividieran en tres segmentos iguales. Esto ocasionó dificultades para establecer un plan que les permitiera acercarse a la solución. En este caso, la aplicación del cuarto paso de Polya no se llevó a cabo con el asesoramiento del profesor, puesto que por el poco tiempo que se tuvo para resolver el ejercicio, el docente tuvo que brindarles la solución al problema de olimpiadas. Este asesoramiento hubiese sido favorable para los educandos, ya que habría permitido aclarar las inquietudes relacionadas en torno al desarrollo del Problema.

Antes de realizar las consideraciones finales sobre este taller, es conveniente resaltar que muchos estudiantes tienen vacios en geometría, porque en algunas instituciones esta asignatura no hace parte del currículo. Aunque este no es el caso del colegio donde se realizó la Práctica, el espacio curricular que allí tiene la geometría es aún muy escaso para que el estudiante adquiera cierta solvencia en el tema (por cada tres periodos de matemáticas hay uno de geometría).

Por consiguiente, se tienen las siguientes consideraciones con relación al taller dos:

De acuerdo con los resultados obtenidos en el anterior taller, surge la necesidad de hacer un repaso general sobre el cálculo de áreas de ciertas regiones poligonales tales como: cuadrados, rectángulos, triángulos, entre otros, con el fin de contribuir a subsanar los distintos vacíos conceptuales.

De otro lado, es importante recalcar el hecho de que los estudiantes cuando se enfrentan a un problema, deben comprenderlo cabalmente antes de buscar una estrategia de resolución. Para abordar la fase que Polya denomina visión retrospectiva, se sugirió a cada grupo que al terminar de resolver un problema, volviesen sobre él, con el fin de cerciorarse de que no se hubieran cometido errores en el proceso de solución. Sin embargo, algunos grupos se mostraron reacios a ello y mostraban sus resultados al docente para que se les hiciera las correcciones del caso. Como considero que este es un hábito que se debería corregir para que el estudiante adquiera cierta autonomía frente al conocimiento.

6.4 Bitácora III.

"La principal razón de existir del matemático es resolver problemas, y por lo tanto en lo que realmente consisten las matemáticas es en problemas y soluciones. (Como se cita en Nieto, 2005) "

En la tercera sesión se contó con la participación de 26 estudiantes del grupo B, los cuales formaron doce grupos de trabajo con el propósito de desarrollar el taller tres en un tiempo de dos horas. A continuación se presentan los resultados obtenidos y las consideraciones de la presente sesión:

En el primer punto se observó que once grupos resolvieron correctamente el ejercicio propuesto, cuyo objetivo era hallar la altura del triangulo de base $(144)^{1/2}$ cm y área 108 cm^2. Es importante resaltar que para resolver un problema matemático, este debe ser comprendido cuidadosamente ya que de lo contrario se podría incurrir en errores.

Por eso en esta sesión el docente condujo a los grupos conformados, a leer bien el ejercicio antes de empezar a resolverlo. Luego, orientó a los educandos que tenían dificultad para establecer la solución asesorándolos en cuanto a la verificación de su respuesta. En este caso se notó que los escolares emplearon el siguiente procedimiento matemático: utilizaron la fórmula para calcular el área de una región triangular y despejaron la longitud de la altura (figura 1).

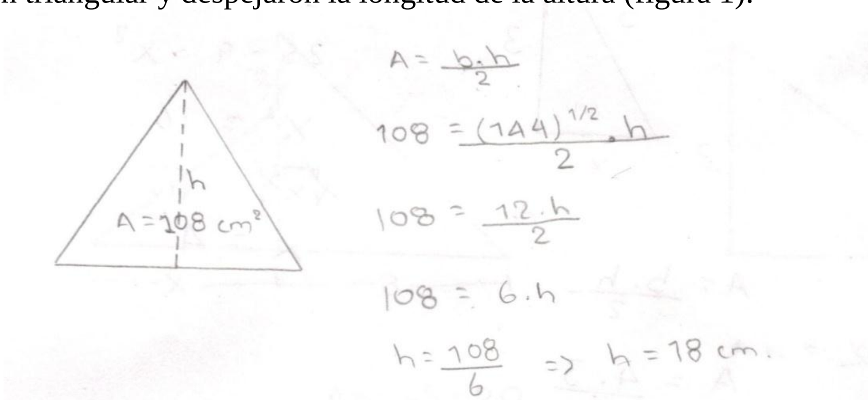


Figura 1

Un grupo tuvo dificultad para determinar la longitud de la altura del triángulo, mediante la estrategia utilizada por los anteriores grupos, evidenciándose que no se ha comprendido el problema tal vez porque no identificaron los elementos esenciales para determinar el área de un triángulo (la base y la altura), a pesar de que reconocen la fórmula que les permite calcular dicho valor. Por consiguiente, al intentar aplicar la estrategia se percibió que no se llegó a la solución del ejercicio, como se puede verificar en la siguiente figura anexa

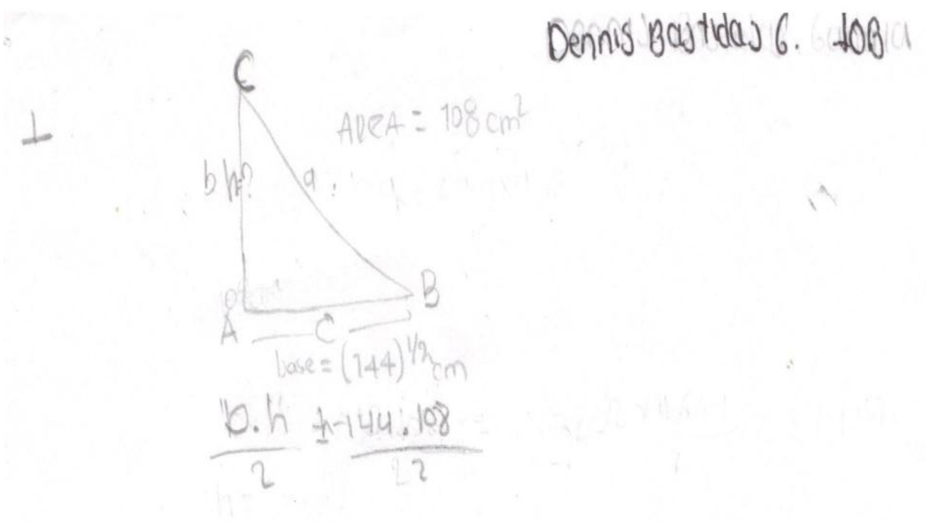


Figura 2.

El segundo punto del taller consistía en hallar la longitud del lado del triángulo equilátero de área 48 cm^2. El desarrollo de este ejercicio permitió conseguir los siguientes resultados:

1. Once grupos resolvieron correctamente el ejercicio (ver figura 3). Para ello se presentó el concepto de triángulo equilátero, sus características y por último el teorema de Pitágoras. Sin embargo, durante el desarrollo de este ejercicio, el docente tuvo que recurrir al efecto Topaze, llevando a cabo la respectiva orientación en el tablero.

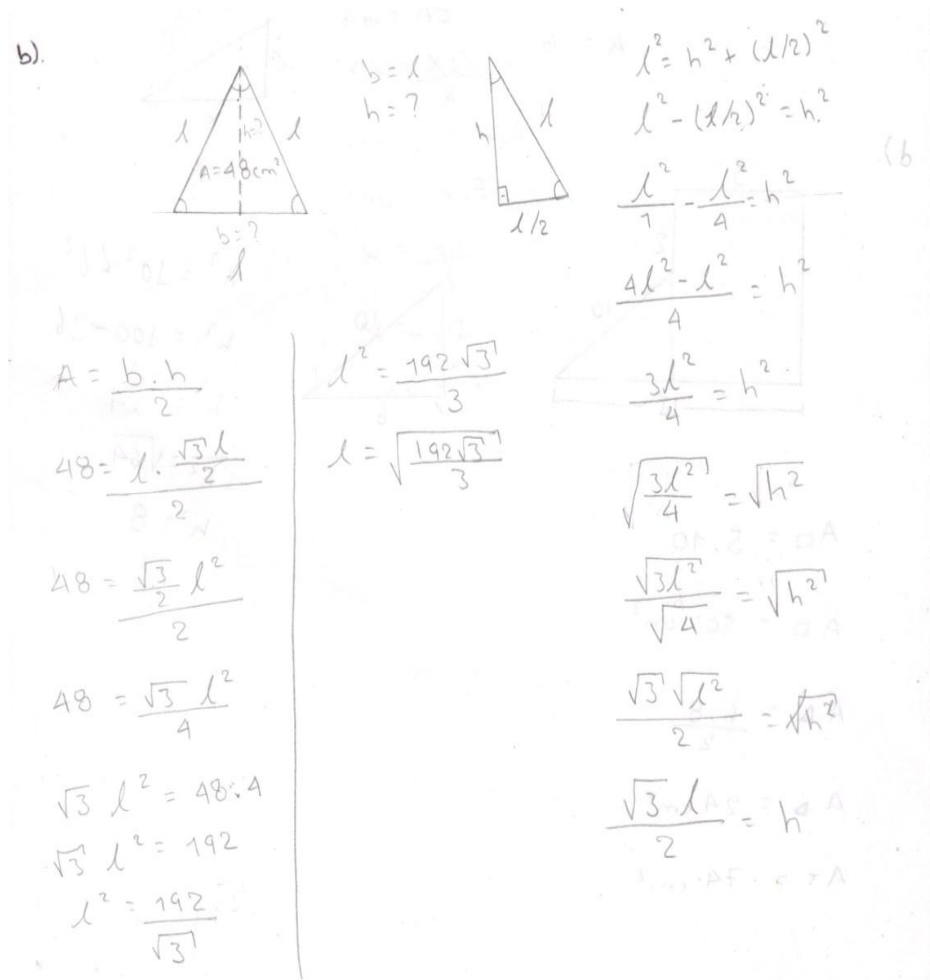


Figura 3.

2. Respecto al segundo ejercicio, un grupo lo resolvió de manera incorrecta. Se pudo observar que los estudiantes no han reconocido el valor que se requiere (la longitud del triángulo equilátero).

   Asimismo, se pudo apreciar que los escolares no tienen definido un procedimiento que les permitiera aproximarse a la respuesta (figura 4). Para ello, el grupo se apoyó en una representación gráfica del triángulo equilátero, pero no hay claridad en el desarrollo de la solución. Se puede afirmar que por razones desconocidas no se ha realizado la revisión con la orientación del docente, para así eliminar las dificultades que tuvieron los escolares al resolver el ejercicio.

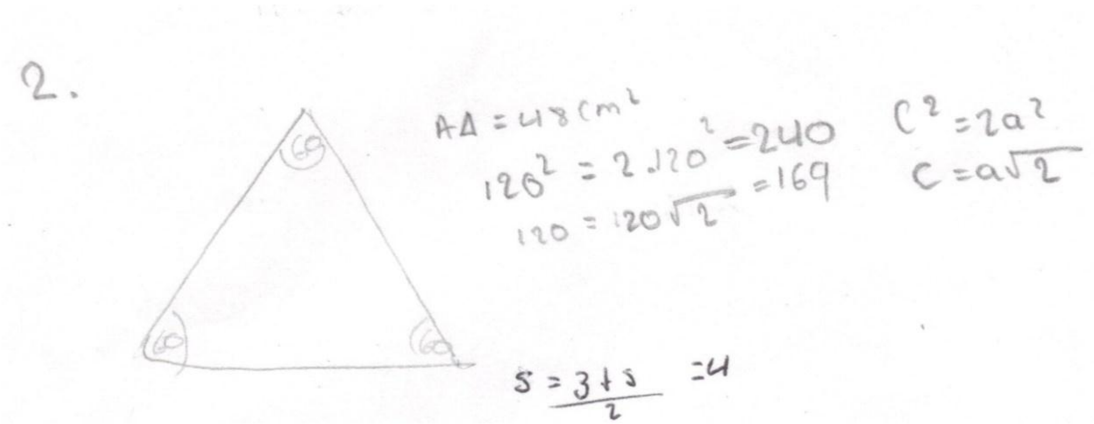


Figura 4.

Por otro lado, en el tercer punto del taller se pide determinar el área de un triángulo rectángulo, cuya altura e hipotenusa son 3 cm y 5 cm respectivamente. Al resolverse este ejercicio se obtuvieron los siguientes resultados: diez grupos lo resolvieron correctamente, destacándose que tuvieron en cuenta las hipótesis del problema y sus respectivos valores a determinar, que en este caso son la longitud del cateto adyacente y el área de la región triangular. Además, los estudiantes aplicaron un procedimiento que los ha conducido a la respuesta acertada (ver figura 5). Por su parte, el profesor revisó algunas de estas soluciones planteadas por los escolares con el fin de corregir los errores.

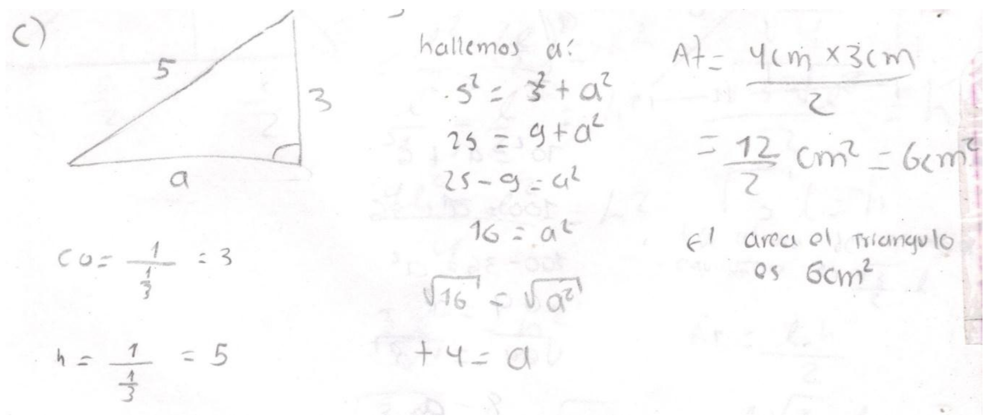


Figura 5

Dos grupos no llegaron a la respuesta esperada. La representación grafica expuesta por los escolares no es correcta para la solución del problema, a pesar de idear un plan adecuado. En la figura 6 se ilustra que se intentó encontrar el área mediante la fórmula de Herón, pero este intento fue fallido debido a que no hallaron primero la longitud del cateto adyacente, posiblemente porque tuvieron dificultades para calcularlo.

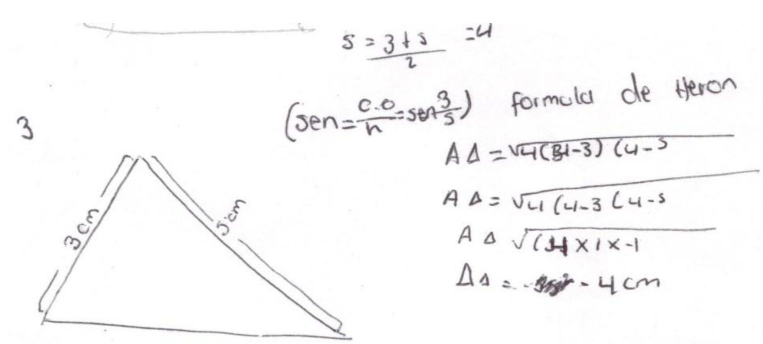


Figura 6

Después de realizar una errónea representación gráfica del triángulo rectángulo, hallaron el semiperímetro sumando sólo dos de sus lados:

$$S = \frac{3+5}{2} = 4,$$

Así, obtuvieron el "semiperímetro" $S = 4$. Luego emplearon la fórmula de Herón para hallar el área del triángulo rectángulo, pero no llegaron a lo que se quería.

Otro grupo resolvió sin éxito el ejercicio, aplicando incorrectamente el mismo procedimiento plasmado en la figura 5. Además, no se llevó a cabo la revisión del ejercicio (con la orientación del profesor) para realizar la corrección del mismo. En la figura siete se puede apreciar que prevalecen los errores aritméticos cometidos por los estudiantes al aplicar el teorema de Pitágoras. En este caso la respuesta para la igualdad $b^2 = 5^2 - 3^2$ es 4^2 y no 2^2. Aquí se pudo notar que los estudiantes cuando tienen una diferencia de cuadrados, proceden a obtener un número restando sus bases y conservando el mismo exponente.

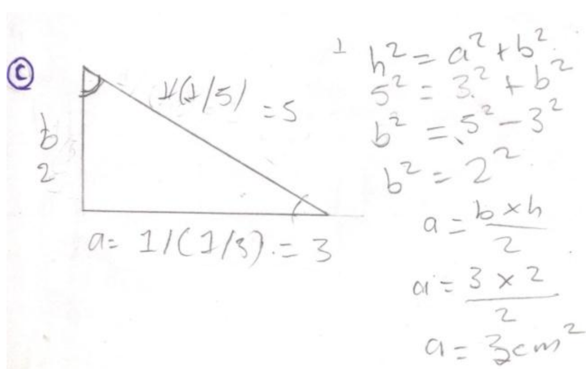


Figura 7.

Con respecto al cuarto ejercicio, los estudiantes debían calcular el área sombreada de la figura ocho, donde el área total es 65 mm^2. A continuación se presentan los resultados obtenidos con relación a este ejercicio:

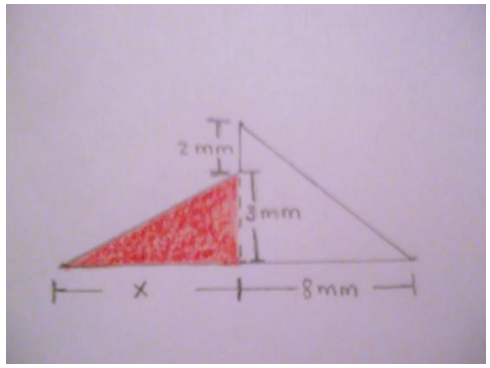


Figura 8

El ejercicio fue resuelto correctamente por dos grupos; se pudo notar que los estudiantes han considerado las longitudes del cateto adyacente y opuesto del triángulo no sombreado, y la incógnita (el área del triángulo sombreado) de forma correcta, así como también el proceso a seguir, la cual se puede apreciar en la figura 9. Se notó que los grupos llevaron a cabo la verificación del ejercicio. Para ello reemplazaron la longitud obtenida b = 30 en la fórmula del área del triángulo, obteniéndose un área de 45 mm^2.

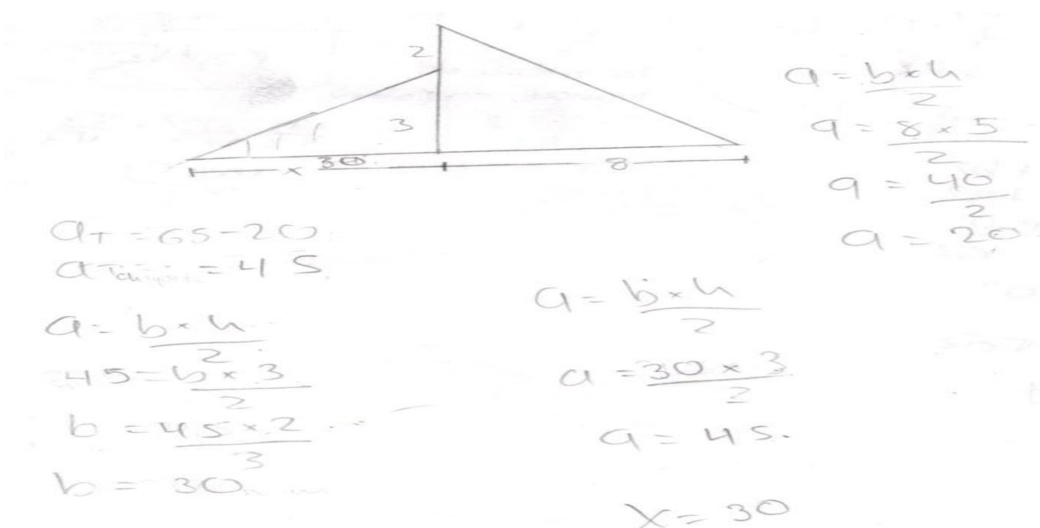


Figura 9

Otro grupo intentó solucionar este ejercicio, encontrando un valor que no hacia parte de la respuesta del mismo (figura 10). Posiblemente consideraron que era indispensable hallar la longitud de la hipotenusa (del triángulo rectángulo de longitudes 8 mm para el cateto adyacente y 5 mm para el cateto opuesto); sin embargo, se requería plantear una ecuación lineal con los datos brindados en el ejercicio y la fórmula del área de una región triangular. Por su parte, los demás grupos fueron instruidos por el profesor para que desarrollaran el ejercicio, de tal forma que lo pudieran culminar de manera correcta.

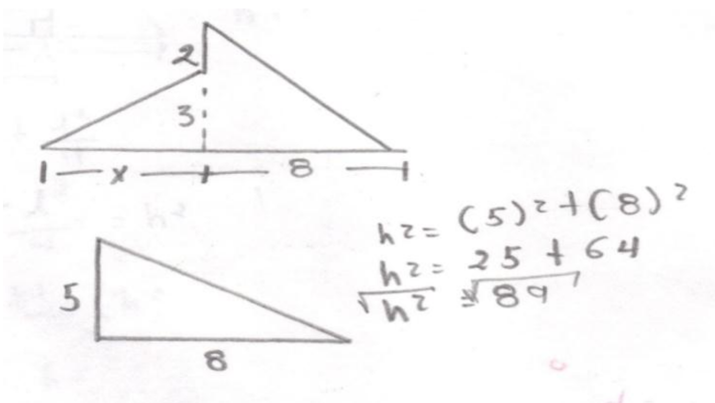


Figura 10.

Con relacion al ejercicio 5, se desea determinar el área total de la figura 11.

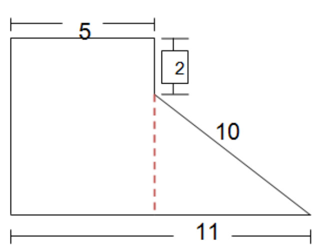


Figura 11.

Se obtuvieron los siguientes resultados en el desarrollo del ejercicio:

Ocho grupos lo abordaron correctamente. Se pudo afirmar que se ha considerado la información del ejercicio (las tres longitudes dadas en el ejercicio), y lo que se pretende determinar (área total de la figura 11). Para resolver el ejercicio emplearon el siguiente procedimiento matemático: Reconocieron que la figura total está formada por un rectángulo y un triángulo rectángulo. Se puede apreciar que el triángulo en mención, comparte una porción de uno de los lados del rectángulo, el cual determinaron mediante el teorema de Pitágoras. Esto les permitió obtener el área de la figura 11, sumando las áreas de las regiones triangular y rectangular. En la figura 12 se puede apreciar el proceso empleado por los escolares para resolver el ejercicio.

Cuando los escolares recurrieron al docente para que verificara sus soluciones, se notó que algunos grupos obtienen erróneamente una de las raíces cuadradas "$\sqrt{h^2} = h$". El docente hizo la respectiva aclaración. No obstante algunos escolares se notaron poco dispuestos a corregir este error debido que afirmaron que así les han enseñado a obtener este tipo de raíces.

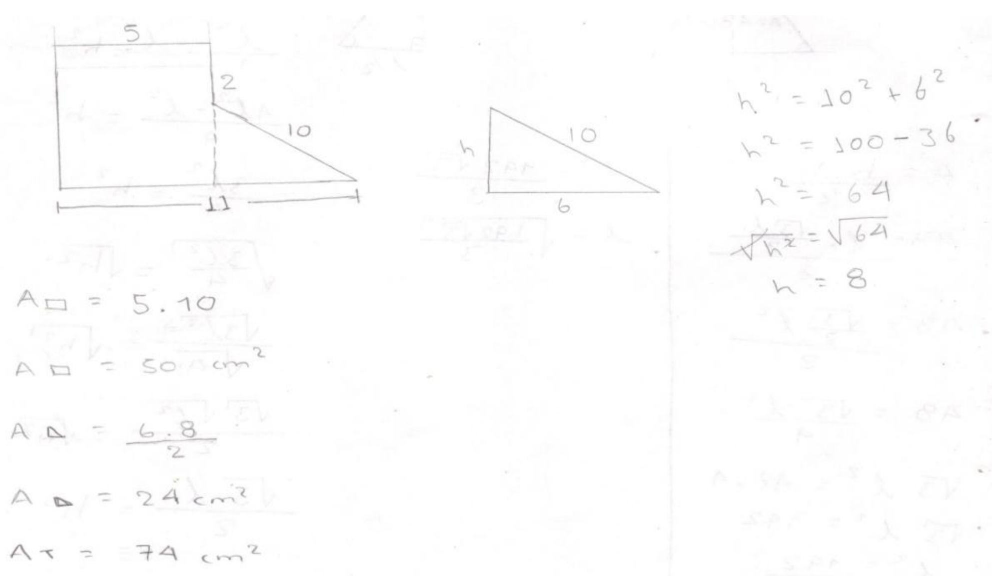


Figura 12

Cuatro grupos no tuvieron éxito al resolver el ejercicio, notándose en los escolares dificultad para identificar la base y altura del triángulo adyacente al rectángulo. Asimismo, se pudo apreciar confusión en la fórmula del área de una región rectangular y la fórmula del área del cuadrado (figura 13). Por eso, es importante que los escolares reconozcan la información que brinda el ejercicio antes de intentar desarrollarlo. Además, en la próxima sesión se debe seguir trabajando con ejercicios que permitan aclarar este tipo de dificultades.

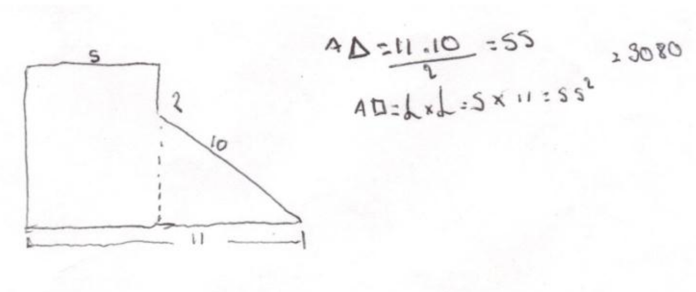


Figura 13

Observación. Se observó que en la formulación de este ejercicio no se colocaron unidades de medida. Sin embargo algunos escolares en sus soluciones establecieron que las longitudes dadas estaban en cm. Por consiguiente, debe reconocerse que este fue un error que se tuvo al proponer el ejercicio, el cual debe evitarse en los siguientes talleres, en aras de evitar confusiones por parte de los escolares.

Finalmente, se dan a conocer algunos aspectos relevantes de la sesión tres.

1. Se notó dificultad en algunos escolares al aplicar el teorema de Pitágoras. Es necesario trabajar con algunas propiedades de los números reales, para eliminar las dificultades presentes en los estudiantes.

2. En la presente sesión se notó que algunos escolares las omitían durante el proceso de resolución e incluso en su respectiva respuesta. No obstante, debe aclararse que lo primordial en los tres talleres propuestos hasta el momento, es el proceso geométrico que conduce hacia su solución, más que la unidad de medida en la respuesta del ejercicio.
3. Ante las dificultadas presentes en los educandos al resolver el tercer ejercicio, se evidenció la necesidad de realizar actividades que permitan a los escolares determinar el área total de una figura.

6.5 Bitácora IV

"*Si te atreves a enseñar, no dejes de aprender*" (John Cotton Dana).

La cuarta sesión contó con la participación de 21 estudiantes quienes conformaron ocho grupos de trabajo. El objetivo de la primera actividad es hacer que los estudiantes interactuaran entre sí mientras jugaban con el Tangram, con el propósito de familiarizarlos con la estrategia que consistía en dividir el polígono convexo en polígonos convexos más simples, para así determinar el área de estos y por ende obtener el área total[2]. En La segunda actividad se planteó el taller cuatro constituido por tres ejercicios, continuando con el repaso acordado en la sesión anterior, así como también el empleo de la estrategia mencionada anteriormente.

El Tangram es un juego popular chino que consiste en 7 piezas, las cuales se describen a continuación:

- 1 cuadrado
- 2 triángulos pequeños
- 1 triángulo mediano
- 2 triángulos grandes
- 1 paralelogramo

Ahora bien, esta actividad se propuso porque según Potoy (2007), este representa más que un juego. Es decir, facilita la estimulación de ciertas habilidades para el aprendizaje como por ejemplo:

[2] Se está empleando el axioma de aditividad de áreas para polígonos convexos o cóncavos respectivamente.

- Orientación espacial
- Atención
- Memoria visual
- Razonamiento lógico espacial

La puesta en marcha del juego se llevó a cabo de la siguiente forma: el profesor expresó a los grupos que debían armar dos figuras rectilíneas (una casa y un cuadrado), en donde se les daba la silueta que se aprecia en la figura 1 y con la cual debían armar la figura dos, haciendo uso de las 7 piezas del Tangram (figura 2).

Figura 1

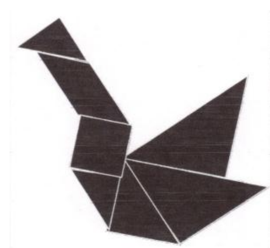


Figura 2.

De esta actividad, se obtuvieron las siguientes apreciaciones:

1. Cuando cada grupo termino de armar la primera figura, se les pregunto verbalmente como hallarían el área de la misma, bajo el supuesto que los polígonos que la conforman tuviesen dimensiones las cuales no se plasmaron dado que se buscaba una respuesta general del ejercicio, con relación a la estrategia que se debía seguir para determinar su solución. De acuerdo a lo anterior, tres grupos respondieron que era necesario hallar el área de cada figura por separado para luego sumarlas, obteniendo así el área total de la figura dada.

2. Algunos grupos armaron las figuras sin ninguna dificultad mientras que otros tuvieron inconvenientes durante este proceso, lo que hizo que la duración de la misma se prolongara un poco más. A continuación se presentan las imágenes relacionadas con la actividad antes mencionada, en las cuales se puede apreciar la participación de los estudiantes y la estructura de cada figura:

Figura 3.

Figura 4.

Posteriormente se formuló el taller cuatro para que fuera resuelto en el tiempo restante de la cuarta sesión y parte de la siguiente clase. Cabe resaltar, que no fue necesario continuar con la actividad en la siguiente sesión, dado que los estudiantes desarrollaron completamente el taller en la misma. En cuanto al desarrollo de esta actividad, se obtuvieron los siguientes resultados:

En el literal a) del primer ejercicio del taller se debía determinar el área de un triángulo equilátero de lado 16 cm, lo cual fue resuelto correctamente por siete grupos (figura 5).

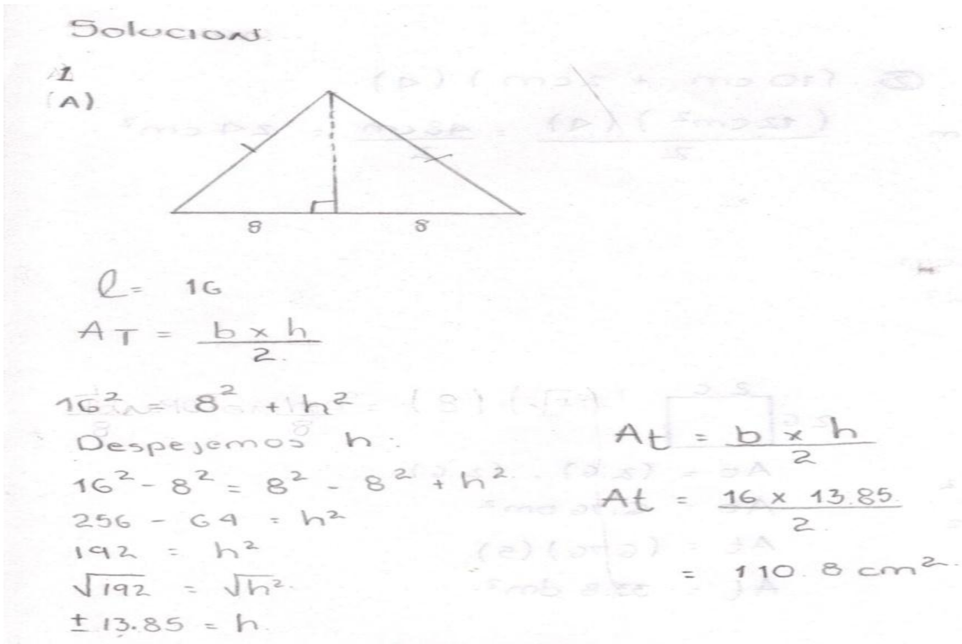


Figura 5

Se evidenció que los discentes tuvieron en cuenta los datos (triángulo equilátero de lado 16 cm) y lo que se desea calcular (la longitud de la altura y el área del triángulo). Emplearon dos tipos de argumentaciones matemáticas para resolver el ejercicio. La primera consistía en calcular la altura del triángulo mediante el teorema de Pitágoras y el siguiente resultado de la Geometría: “En todo triángulo isósceles, la altura coincide con la mediana”. Por último y mediante la fórmula del área, determinaron el respectivo valor de esta.

Observación

El resultado de la geometría utilizado en la solución del ejercicio fue recordado por el docente a algunos grupos, debido a que hubo dificultad para encontrar la longitud de la altura cuando querían brindar la solución.

El segundo procedimiento de solución consistía en determinar la altura del triángulo utilizando la razón trigonométrica correspondiente a la función tangente. Se utilizó una de las propiedades de los triángulos equiláteros, la cual plantea que la medida de los ángulos interiores de un triángulo equilátero es igual a 60º. Posteriormente se encontró el área de la región triangular dada como se ilustra en la siguiente imagen.

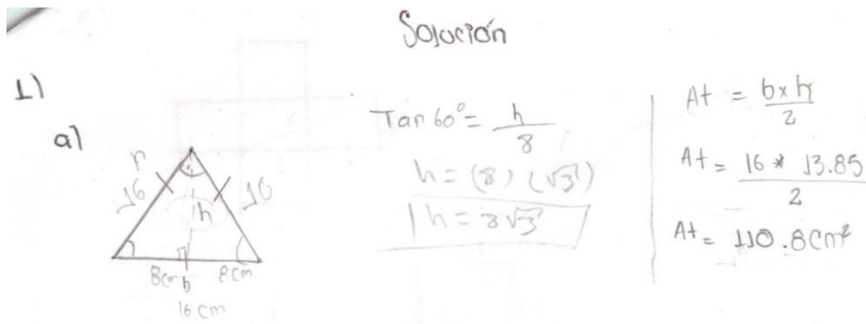


Figura 6.

Un grupo llegó a la respuesta del ejercicio, pero cometieron un error al aplicar el teorema de Pitágoras con el fin de calcular la longitud de la altura del triángulo como se ilustra a continuación.

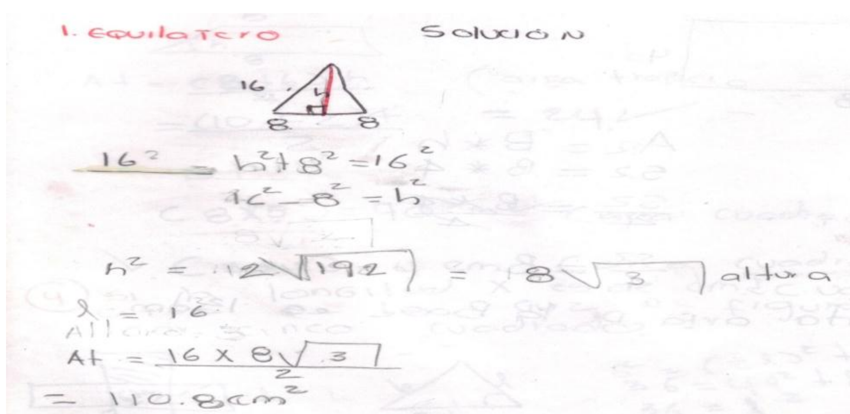


Figura 7

En la figura siete se puede apreciar que se tuvo presente la información del ejercicio. Sin embargo, al aplicar el primer procedimiento se pudo notar en su respuesta que no se hizo la revisión (con la orientación del profesor) de la solución, a pesar de haber obtenido el respectivo valor del área. Esto hubiese evitado que los escolares consideraran la expresión h^2 para representar la longitud de la altura.

Por otra parte en el literal b) se buscaba calcular el área de un triángulo obtusángulo de longitud para la base 6 cm y para la altura 2 cm. Para resolver este ejercicio, los estudiantes debían emplear la fórmula para hallar el área de una región triangular.

De acuerdo con lo anterior, los resultados obtenidos fueron los siguientes: Todos los grupos tuvieron éxito al resolver el ejercicio. Adicionalmente se notó que para la solución, los estudiantes realizaron la representación gráfica correctamente, identificando la altura del respectivo triángulo. El desarrollo de los escolares lo podemos apreciar en la figura 8.

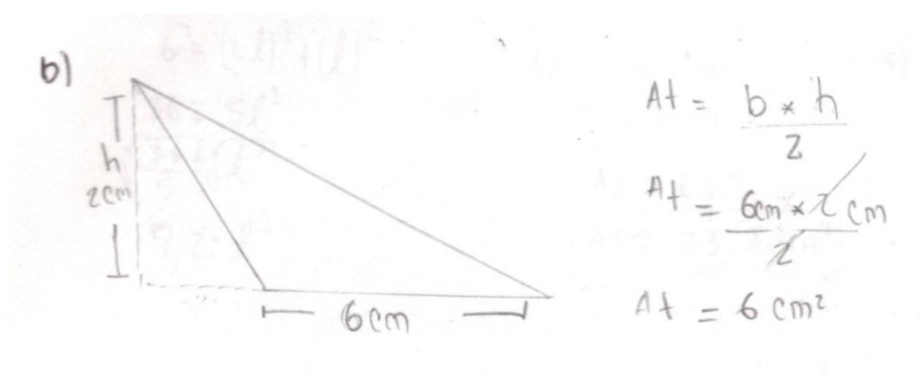


Figura 8

Debe resaltarse que algunos grupos no recordaban la definición de triángulo obtusángulo, requiriéndose la respectiva explicación del profesor para que pudiesen resolver el ejercicio. De la misma manera, se puede apreciar en la figura 9 que un grupo no tiene claro el concepto de triángulo obtusángulo, llegando a considerarlo como aquel triángulo que posee “dos lados iguales y uno desigual”. Respecto a este comentario, en el momento de asesorar a los escolares el profesor hizo una revisión rápida de la solución, notando que el área encontrada y la representación grafica era correcta, pero no se fijó en la definición que estaba en la parte superior, lo cual hubiese sido importante para hacer la respectiva aclaración.

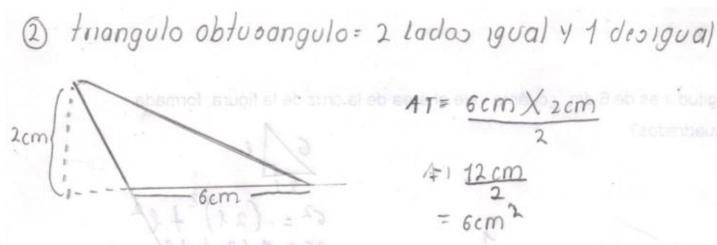


Figura 9

Uno de los grupos alcanzó la respuesta correcta del ejercicio, pero realizó un proceso innecesario e incorrecto que no aportó al mecanismo establecido para la búsqueda de la solución, dado que calcularon erróneamente el tercer lado del triángulo aplicando el teorema de Pitágoras, con lo cual se podría decir que al parecer la falta de concentración de los estudiantes, debido a que el triángulo no era rectángulo. Por consiguiente, hubiese sido significativo para los escolares revisar esta solución minuciosamente en el aula, para que estos reflexionaran cuando se debe aplicar este importante teorema.

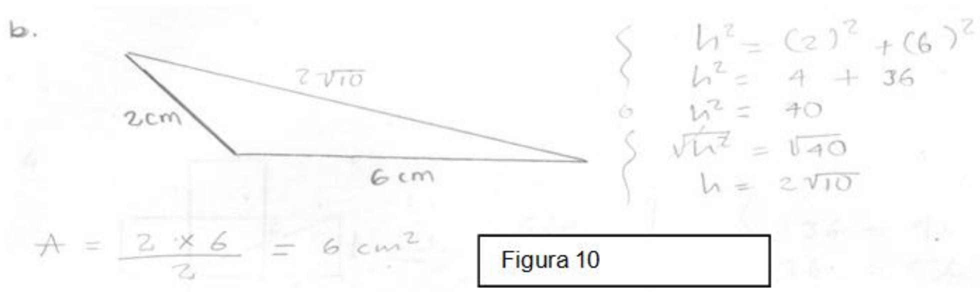


Figura 10

El segundo punto del taller consistía en calcular el área de la siguiente figura:

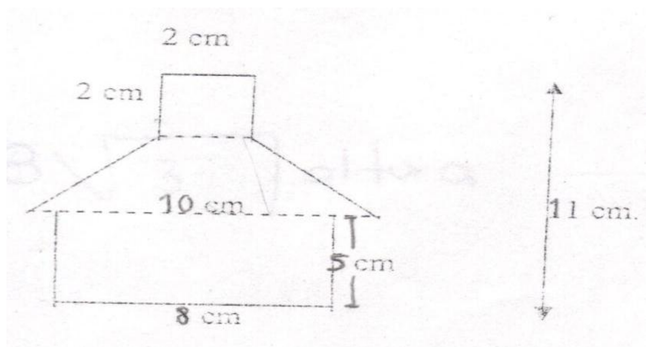


Figura 11

Los resultados obtenidos al desarrollar este ejercicio fueron los siguientes:

Seis grupos resolvieron el ejercicio sin dificultad, teniendo en cuenta los datos correspondientes a las longitudes de cada uno de los polígonos que conformaban la figura en su totalidad, y la incógnita que representaba el área total de la figura. Al observar las soluciones se aprecia que los estudiantes establecen el siguiente argumento matemático como mecanismo de solución del ejercicio: encontrar el área de las tres regiones (región cuadrada, rectangular y la formada por el trapecio) que componen la figura total en el problema, para posteriormente obtener el área total de la figura sumando las áreas obtenidas como se describe en la figura 13:

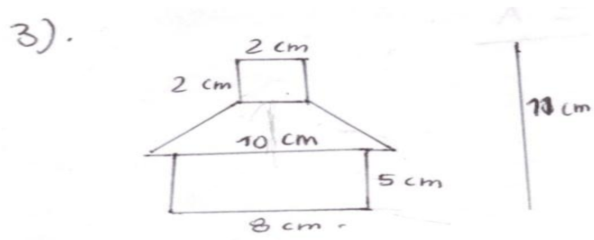


Figura 12

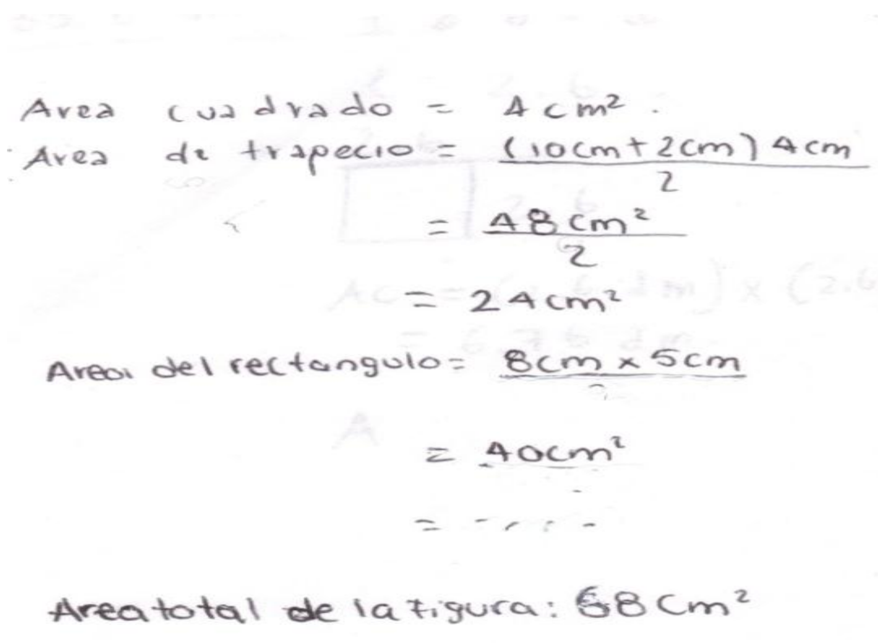


Figura 13

Dos de los grupos tuvieron inconvenientes al resolver el ejercicio, ya que se vieron obligados a preguntar cómo se obtenía el área total de la figura. Fue necesario explicar que la figura estaba conformada en su totalidad por tres polígonos: un cuadrado, un trapecio y un rectángulo.

Un grupo a pesar de haber acertado en la respuesta, cometió un error en la resolución. En la figura seis se aprecia que la altura del trapecio (de base mayor 10 cm y menor 2 cm) considerada por los estudiantes no es la correcta, pues su valor real corresponde a 4 cm. Al aplicar la fórmula del área del trapecio obtuvieron 24 cm^2; este valor no satisface la igualdad (figura 14).

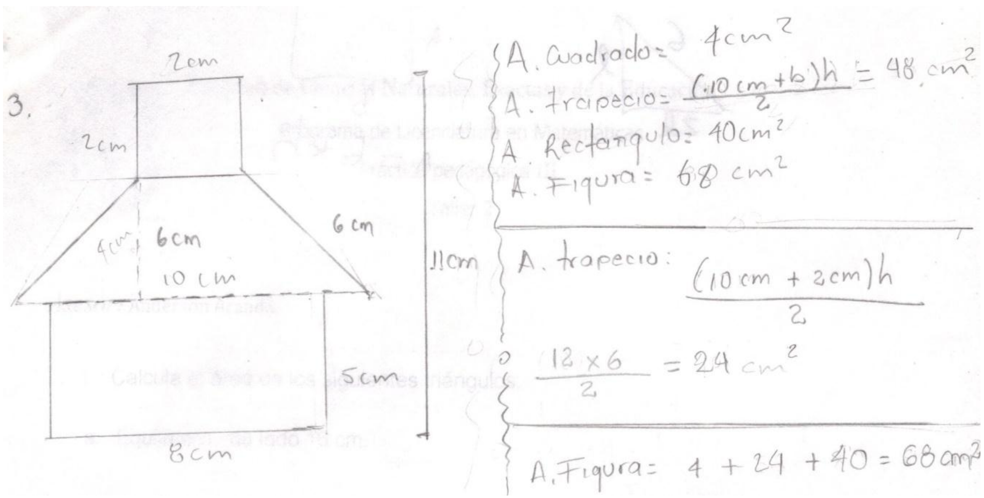


Figura 14.

Se notó que los discentes al resolver el ejercicio tuvieron falencias al determinar uno de los datos del trapecio (la longitud de la altura). Aunque aplicaron una estrategia que los condujo a la respuesta del mismo, se evidenció que hizo falta la aplicación de la visión retrospectiva, para corregir aquellas inconsistencias que se tuvieron al encontrar el área total de la figura.

Un grupo no ha determinado el valor a calcular (área de la figura total). En la figura 15 se puede notar que al aplicar el procedimiento empleado en la figura 13, calcularon el área de los tres polígonos que conforman la figura 12, pero determinaron incorrectamente el área del trapecio y del rectángulo. Además olvidaron determinar el propósito del ejercicio (área total de la figura).

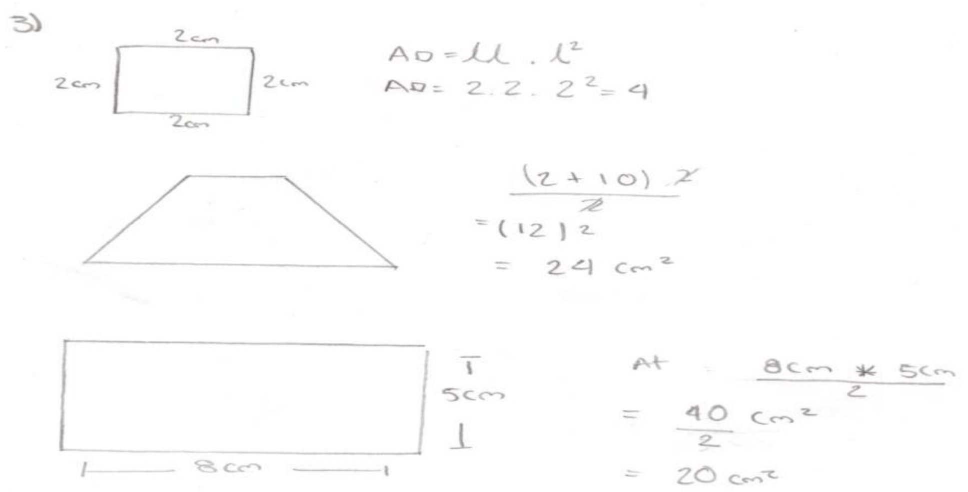


Figura 15.

De otro lado, el último punto del taller hace referencia al siguiente problema de Olimpiadas Matemáticas: Si la longitud x es 6 dm, ¿Cuánto vale el área de la cruz de la figura, formada por cinco cuadrados? (figura 16)

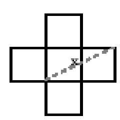


Figura 16

Respecto a este ejercicio se consideraron los siguientes resultados: Seis grupos resolvieron el problema, mas no encontraron su respectiva solución, observándose que tuvieron en cuenta los datos, la incógnita dados por el ejercicio y emplearon el siguiente procedimiento: Considerar la figura total como la unión de cinco regiones cuadradas (la longitud del lado para cada una de estas regiones es la misma). Luego calcular el área de una de estas regiones, haciendo uso del teorema de Pitágoras y la longitud de la diagonal dada, posteriormente obtener el área total sumando las respectivas áreas. La puesta en marcha del plan (tercer paso de Polya) se puede observar a continuación:

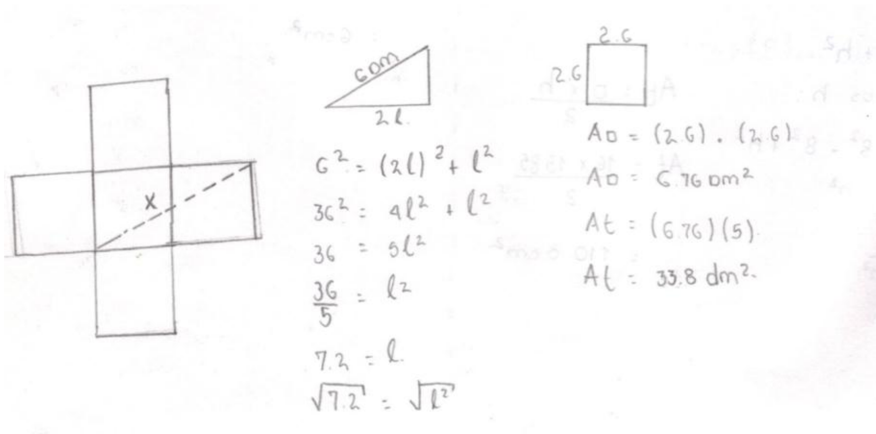


Figura 17

Observaciones respecto al cuarto punto:

1. Teniendo en cuenta que la longitud de los lados de los cuadrados es l, los estudiantes determinaron que el valor de l^2 corresponde a $\frac{36}{5}$, el cual representa el área de cada cuadrado. Por lo tanto, el área de la cruz (Figura total) es: $A = 5 * \frac{36}{5} = 36\, dm^2$.

2. Se pudo notar que la diferencia entre la respuesta obtenida por los escolares ($33.8\, dm^2$) y la respuesta correcta del ejercicio ($36\, dm^2$) es de 2.2 dm^2, lo cual ocurre por la pérdida de decimales al extraer la respectiva raíz cuadrada al valor de l^2. En esta sesión se destacó el empeño que tuvieron para resolver el problema. Es indispensable resaltar que si el docente hubiese explicado (Preferiblemente en el tablero) la solución del problema en aras de aplicar el cuarto paso de Polya, habría sido significativo para los escolares debido a que contribuiría a que

reflexionaran el proceso que conduce a la solución. Sin embargo, la aplicación de este paso no se realizó al final de la clase por el corto tiempo que tuvieron los escolares para su solución.

3. Hubo la necesidad de intervenir en aquellos problemas donde se requería la aplicación del teorema de Pitágoras.

Finalmente se tienen las siguientes consideraciones de la sesión:

La actividad con el Tangram fue significativa para los estudiantes porque pudieron poner a prueba su creatividad para construir las figuras propuestas. Se debe seguir fortaleciendo su creatividad eliminando los vacíos conceptuales a medida que se va avanzando en el proceso de resolución de problemas, con el fin de contribuir a que los estudiantes se apropien de estrategias que les permita solucionar los problemas y ejercicios plateados durante la sesión.

Es importante que los escolares expresen a sus compañeros las diferentes respuestas planteadas, con el fin de generar discusión sobre la validez de cada una de ellas. Esto sería favorable para ellos porque tendrían la posibilidad de apropiarse de distintas estrategias aplicadas, como también contribuir en su razonamiento lógico lo cual favorecería el aprendizaje.

6.6 Bitácora V.

En La quinta sesión participaron 21 estudiantes del grupo B quienes formaron nueve grupos de trabajo con el fin de resolver el taller cinco, el cual estaba conformado por tres ejercicios y un problema de razonamiento lógico. A continuación se van a apreciar los resultados obtenidos y las consideraciones de la respectiva sesión.

En el primer punto del taller se debía hallar el área de la figura uno. El desarrollo de este ejercicio por parte de los escolares permitió obtener los siguientes resultados:

Ocho grupos resolvieron el ejercicio de manera correcta, observándose que la mayoría de los estudiantes tuvieron en cuenta cada uno de los datos establecidos por el ejercicio así como también la respectiva incógnita. Con el fin de resolver el ejercicio, los estudiantes emplearon el siguiente procedimiento matemático que les permitió resolverlo:

Dividir la región sombreada en cuatro regiones rectangulares cuyas longitudes son 2 cm de base y 1 cm de altura respectivamente, y un cuadrado de 2 cm de lado. Posteriormente se determina el área de cada una de las regiones divididas y se suman con el fin de obtener el área total de la región establecida. En la figura 2 se puede apreciar la ejecución del plan por parte de los escolares, notándose que seis de estos grupos al terminar de resolver el ejercicio, acudieron al profesor con el fin revisar el procedimiento que lleva a su solución.

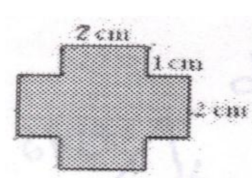


Figura 1

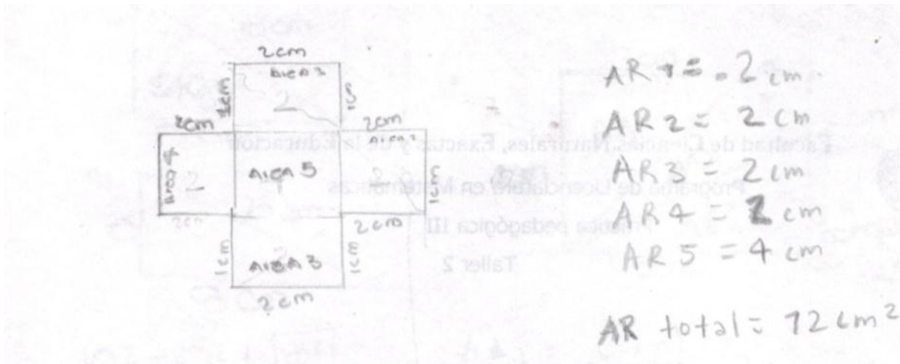


Figura 2

Aunque dos de las respuestas coinciden en el valor numérico, difieren en sus respectivas unidades, es decir, están dadas en cm y no en cm^2. Lo más probable es que los estudiantes tienen dificultad para diferenciar unidades de longitud y de superficie (figura 3). Cabe resaltar que los escolares no tuvieron en cuenta la orientación del profesor al finalizar el ejercicio para revisarlo y corregirlo.

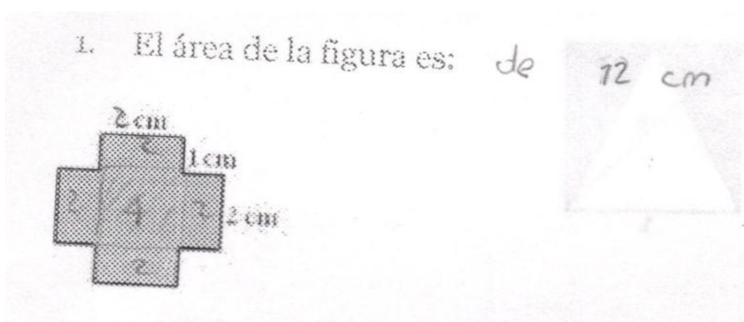


Figura 3.

El segundo procedimiento (empleado por un grupo) era similar a la anterior, pero esta vez se dividió la figura uno en tres regiones rectangulares (figura 4). Se notó que la respuesta al ejercicio es acertada, pero posiblemente tuvieron dificultad al aplicar la fórmula que permitiría determinar el área del rectángulo de base 4 cm y altura 2 cm, como también el área de las dos regiones rectangulares de base 2 cm de longitud y altura 1cm. Se puede afirmar que los educandos no mostraron su resultado al profesor, para que este los concienciara de sus falencias y por ende los encaminara a superarlas.

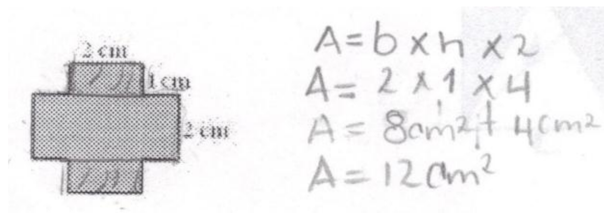


Figura 4

El segundo punto del taller consistía en calcular el área de la región sombreada (figura 5). Se plantea este ejercicio con el propósito de aplicar el teorema de Pitágoras, la regla de división de fracciones, y la siguiente propiedad de las potencias:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \text{, con } n \in N \ \ y\, a \neq 0$$

Los resultados obtenidos al resolver este punto son los siguientes: ocho grupos encontraron el área de la figura sombreada de forma correcta. Se pudo apreciar que tuvieron en cuenta los datos expuestos en el ejercicio, a saber, la longitud de la diagonal, la base del rectángulo, y las respectivas incógnitas (principal representada por el área del triángulo sombreado, y secundaria por la longitud de la altura del rectángulo). La argumentación matemática desarrollada por los escolares fue la siguiente: utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del cateto opuesto del triángulo y así hallar el área correspondiente, obteniéndose un valor de 24 cm^2, tal como se ilustra en la figura 6. Se revisaron algunas de las soluciones expuestas por los educandos para la respectiva corrección.

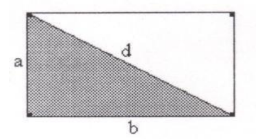


Figura 5

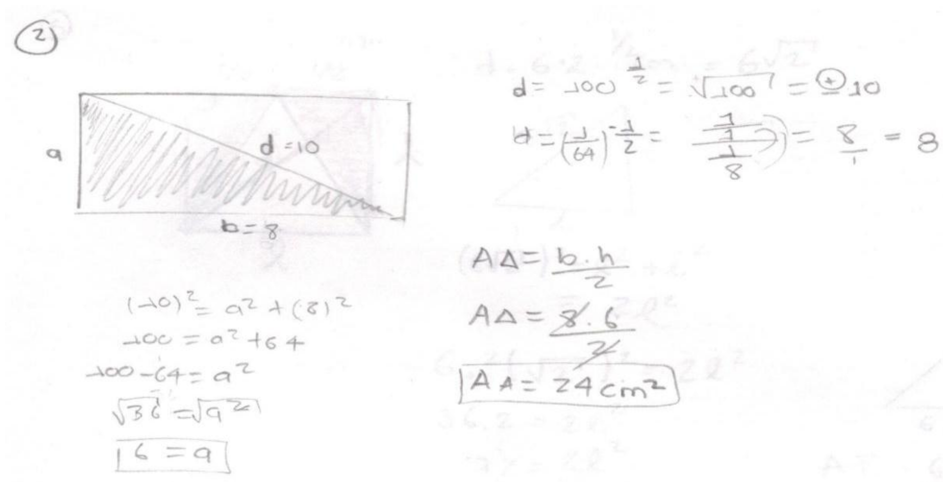


Figura 6

Un grupo no completó su respuesta, a pesar de haber calculado el valor de **a** que representa la longitud del rectángulo. posible afirmar que no se tuvo en cuenta la incógnita principal, obstaculizando de alguna forma llegar a la solución del ejercicio, como se hizo anteriormente (figura 7).

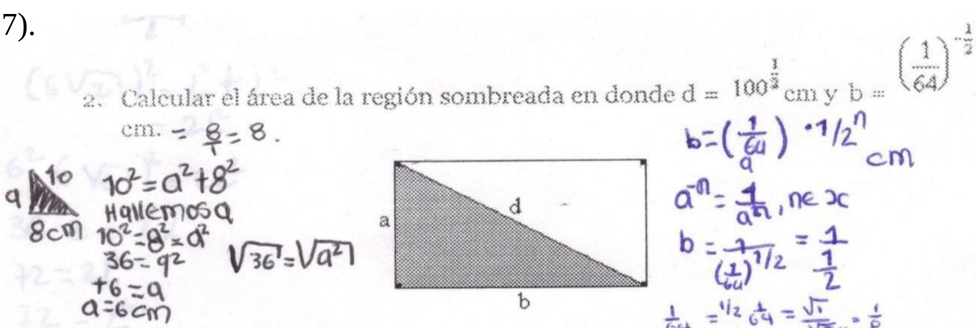


Figura 7

En el ejercicio tres se debía calcular el área de la figura sombreada (figura 8). Con el desarrollo de este ejercicio se obtuvieron los siguientes resultados:

Ocho grupos establecieron un procedimiento que los condujo a la respuesta correcta. Para ello los educandos tuvieron en cuenta la información del ejercicio (longitudes de la diagonal y la base del rectángulo), y lo que se quería encontrar (el área de la región sombreada). Análogamente, se notó que para llegar a la respuesta emplearon la siguiente argumentación: considerar la región rectangular como la unión de dos regiones triangulares y un cuadrilátero; luego determinar el área de la región rectangular y de las dos regiones triangulares. El área de la región rectangular es igual a la suma de las dos áreas rectangulares obtenidas anteriormente y el área del cuadrilátero, cuyo valor se pretende calcular. En la figura 9 se puede apreciar la argumentación desarrollada por los escolares.

Observación: Se pudo evidenciar que seis grupos tenían presente que la región rectangular estaba formada por tres polígonos y que la suma de sus áreas es igual al área del rectángulo.

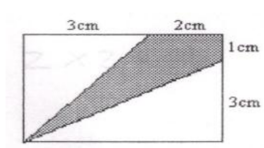


Figura 8

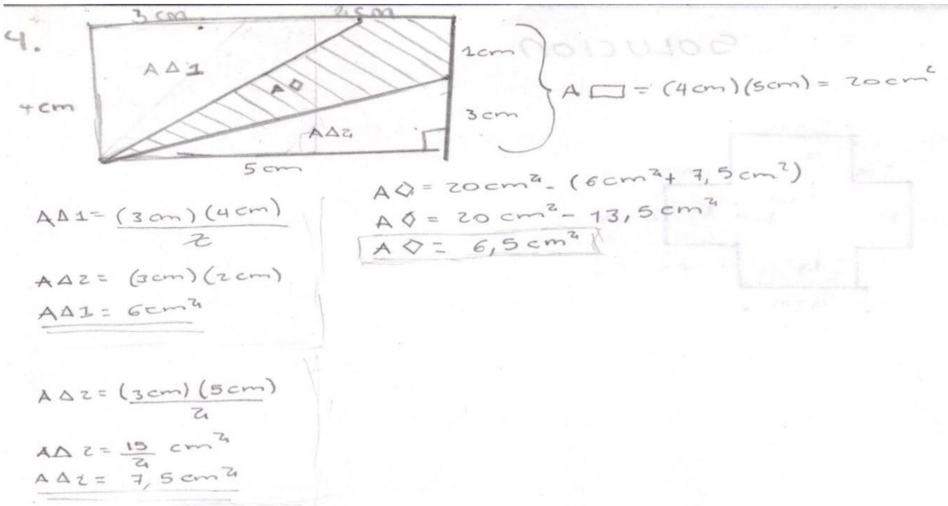


Figura 9

Se observó que dos de los grupos que resolvieron el ejercicio no recordaban que se debía dividir la región total en otras regiones poligonales, proceso que permite determinar el área total de la región. Con el fin de recordar la explicación dada en la sesión cuatro para determinar el área de una región poligonal, se les planteó los siguientes interrogantes los cuales contribuyeron a que los estudiantes resolvieran correctamente el ejercicio, y con la orientación del docente, se llevó a cabo la verificación de la solución planteada.

1. ¿Cuántos polígonos conforman el rectángulo?

2. ¿Cuál es el área de las figuras geométricas no sombreadas?

3. ¿Cuál es el área de la región rectangular?

4. ¿Qué deben hacer con el área del rectángulo y el área de las figuras no sombreadas para obtener el área sombreada?

Se debe resaltar que un grupo no terminó de resolver el ejercicio. Se observó que los estudiantes aplicaron de forma infructuosa el mismo procedimiento que los grupos anteriores (figura 10). Se desconoce la razón por el cual los escolares no verificaron la respuesta con el acompañamiento del profesor en aras de verificar la misma.

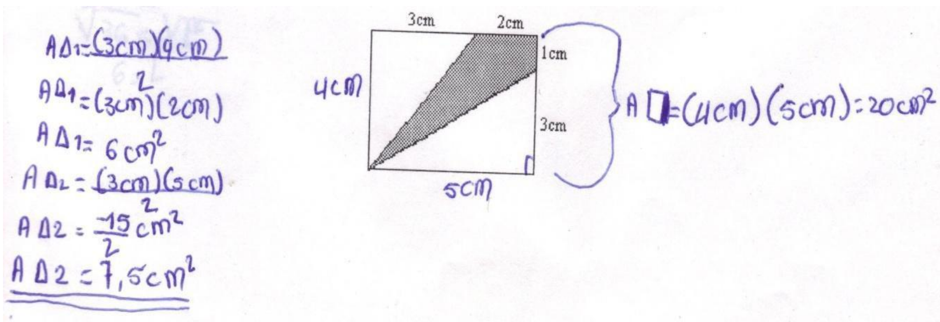


Figura 10

El último punto del taller consistía en determinar el área de la región sombreada (figura 11). Respecto a la solución de este problema de razonamiento lógico se obtuvieron los siguientes resultados:

Ocho grupos tuvieron éxito al resolver el problema planteado. Se pudo evidenciar que los escolares comprendieron el problema de razonamiento lógico; algunos escolares recurrieron a una representación gráfica para resaltar los datos antes de establecer una estrategia. Para establecer un plan los escolares idearon tres estrategias de solución, las cuales se mencionan a continuación:

1. Aplicar el teorema de Pitágoras para determinar la longitud de un lado del cuadrado y posteriormente encontrar el área mediante la aplicación de la fórmula establecida para tal fin, tal y como se puede visualizar en la figura 12.

2. Dividir el cuadrado en cuatro triángulos rectángulos, para aplicar la razón trigonométrica correspondiente a la función seno a uno de estos triángulos. Determinar la longitud de un lado del cuadrado con el propósito de obtener así, el área del mismo (figuras 13).
3. La tercera estrategia (aplicada por un grupo) es similar a la anterior, pero la diferencia radica en dividir la figura sombreada en dos triángulos rectángulos (figura 14).

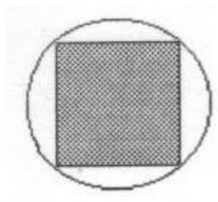


Figura 11

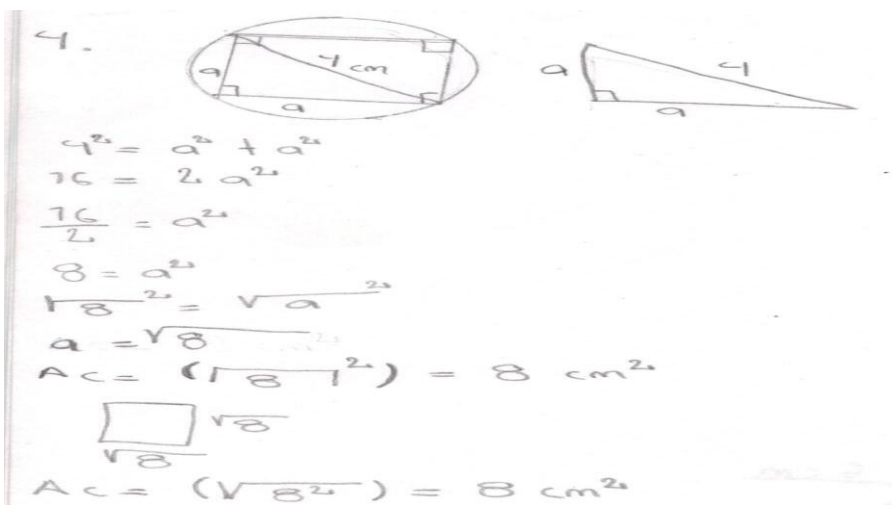


Figura 12

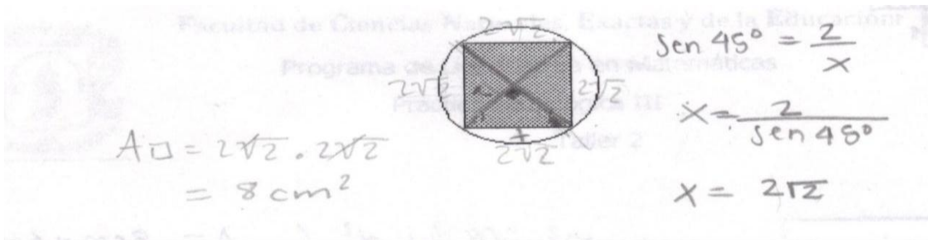


Figura 13.

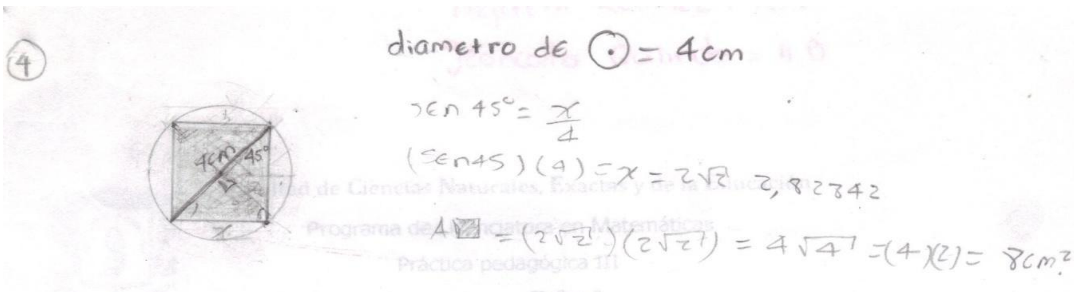


Figura 14.

Uno de los grupos dio una respuesta incorrecta considerando que el área del cuadrado inscrito es 16 cm^2. Con base en el método de los cuatro pasos de Polya se observó lo siguiente:

Los estudiantes comprendieron el problema, identificando en el gráfico los datos (diámetro de la circunferencia), y reconociendo la incógnita del mismo (área del cuadrado). Para establecer un plan que los encaminara a la respuesta, idearon la primera estrategia descrita anteriormente. No obstante, al ejecutarla tuvieron dificultad para encontrar el área de la región cuadrada, debido a que al parecer desconocen el procedimiento establecido para tal fin, (figura 15). No se tuvo en cuenta el cuarto paso de la teoría de Polya con el cual se hubiese podido evitar que los educandos cometieran errores al determinar su solución.

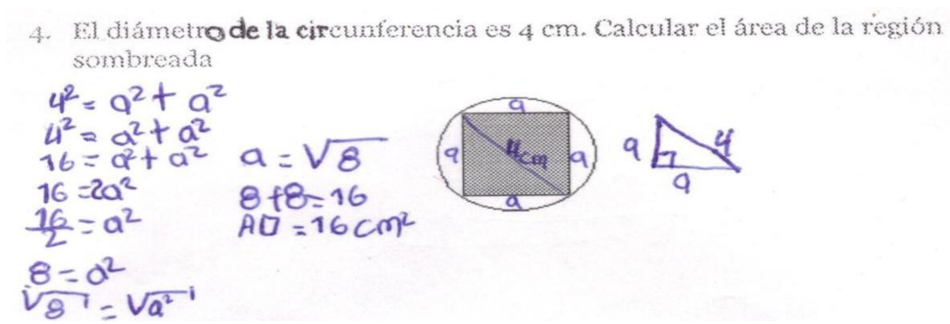


Figura 15

He aquí las consideraciones finales de la quinta sesión:

1. La mayoría de los estudiantes tuvieron éxito en resolver el taller propuesto, aunque se notó que aún prevalecen dificultades en algunos grupos al determinar el área de algunos polígonos tales. Se pudo apreciar que dos grupos tienen dificultad para diferenciar las unidades de longitud de las unidades de área. Por eso, es necesario aclarar las dudas con relación al manejo de unidades.
2. De esta sesión se puede inferir que la mayoría de los estudiantes del grupo B se han apropiado de la estrategia que consiste en dividir la región general en polígonos convexos conocidos para determinar el área total. Sin embargo, al aplicar este mecanismo se notó que existen falencias en algunos procedimientos aritméticos que obstaculizan la búsqueda de la respuesta correcta.
3. En esta sesión se observó que la mayoría los grupos llevaron a cabo los tres primeros pasos del método de Polya. Además el docente acompañó a los grupos de trabajo que solicitaron la respectiva orientación cuando terminaban de resolver cada uno de los ejercicios, para revisar sus respuestas y así, llevar a cabo el cuarto paso de Polya.

4. Como opinión personal, considero que el docente debe motivar a los estudiantes a superar las dificultades que les impiden avanzar en su proceso de aprendizaje. Asimismo, debe ser cuidadoso al momento de corregirlos, sin ser tajantes ni autoritarios, dado que esto impediría el normal desarrollo de las sesiones, creando conflicto entre las partes (Docente – Estudiantes).

6.7 Bitácora VI

En esta sesión se contó con 23 estudiantes, con los que se formaron 13 grupos de trabajo con el fin de abordar el taller seis compuesto por tres problemas de razonamiento lógico y un problema de Olimpiadas Matemáticas. A continuación se dan a conocer los resultados obtenidos y las respectivas consideraciones finales.

En el primer punto del taller los estudiantes debían obtener el área de la figura sombreada en el que cada cuadrado tiene lados de longitud de 1m de lado (figura 1).

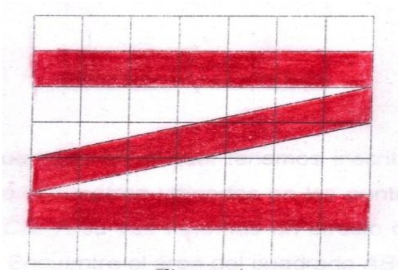


Figura 1

Doce grupos tuvieron éxito al resolver este ejercicio; se pudo apreciar que tuvieron en cuenta los datos proporcionados y la respectiva incógnita (área de la figura sombreada). Al establecer el plan de trabajo hicieron uso de la estrategia que se da a conocer a continuación: determinar el área de la región cuadrada (de 7 m de lado) y de las cuatro figuras no sombreadas (2 rectángulos y 2 triángulos), para obtener el área sombreada de la figura, apoyándose de la estrategia empleada en la cuarta sesión. De la misma manera, la ejecución de esta estrategia se puede ilustrar en la figura 2. El cuarto paso de Polya se realizó con aquellos estudiantes que requirieron de la orientación del profesor cuando terminaban de resolver el ejercicio.

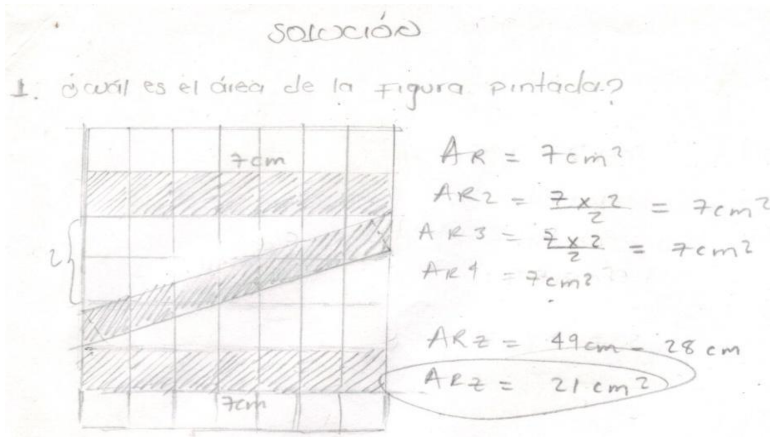


Figura 2

Se puede inferir que en las soluciones anteriores, cuatro grupos consideraron lo siguiente: "*se puede formar un rectángulo uniendo por completo la letra Z porque da igual*" (figura 3) es decir, con las tres franjas de la figura sombreada se puede formar un rectángulo de base 7 cm y altura 3 cm. En este sentido, la estrategia de solución consiste en transformar el problema en un problema auxiliar (hallar el área de un rectángulo de longitudes 7 y 3 cm respectivamente), sin embargo se puede afirmar que el "rectángulo formado" y la figura sombreada tienen la misma área, pero al unir las tres franjas sin hacer modificaciones no se obtiene inmediatamente un rectángulo, por ser la franja central un paralelogramo. En este caso se revisó rápidamente el procedimiento que condujo hacia la solución, pero no se revisó el comentario mencionado anteriormente por los escolares. Por consiguiente, hubiese sido importante mostrar a los demás grupos que al recortar con tijeras las tres franjas de la figura sin hacer modificaciones, no se consigue lo expresado anteriormente, aplicándose así la ejecución del cuarto paso de Polya. Un grupo no resolvió el problema planteado.

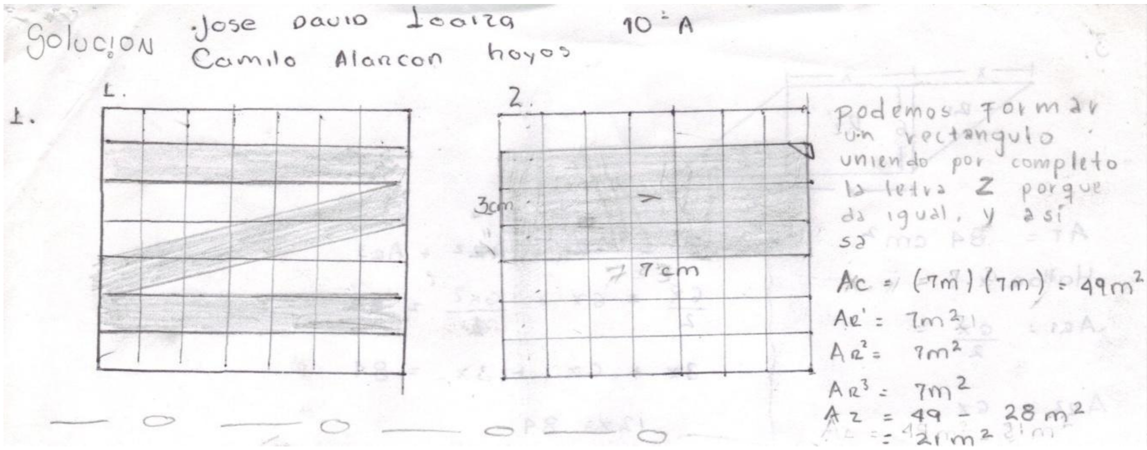


Figura 3

En el punto dos del taller se buscaba determinar el área de la región sombreada, donde el lado de cada cuadrado tiene $1m$ de longitud (Figura 4), obteniéndose así los siguientes resultados:

Diez grupos resolvieron el problema de razonamiento lógico de manera correcta, percibiéndose desde la teoría de Polya que los estudiantes tuvieron en cuenta los datos expuestos por el problema, al igual que la incógnita y la representación gráfica. A la hora de ejecutar el plan se pudo apreciar que los escolares implementaron las siguientes estrategias con miras a obtener la correspondiente solución:

1. Recurrir a un problema análogo. Para ello consideraron la región rectangular como la unión de cuatro regiones triangulares (tres no sombreadas y una sombreada); luego determinar el área de la región rectangular y de las tres regiones triangulares no sombreadas. El área de la región rectangular es igual a la suma de las tres áreas obtenidas anteriormente y el área sombreada, cuyo valor se pretende calcular. (figura 5).

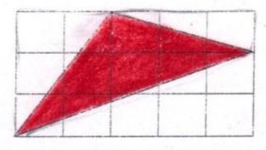


Figura 4

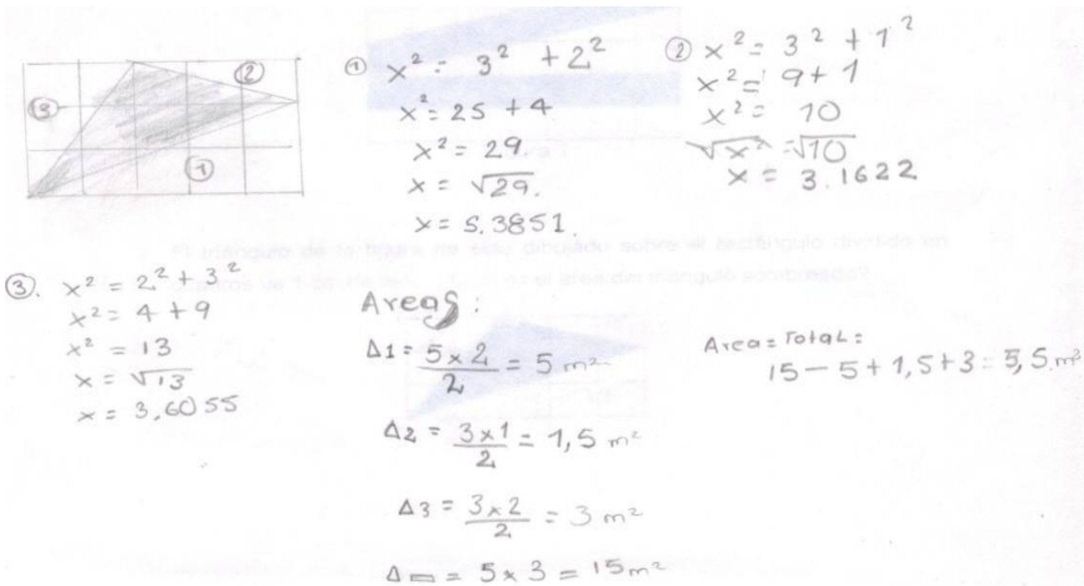


Figura 5.

2. Trazar rectas verticales que pasan a través de los vértices del polígono y que sean paralelas entre sí. (Yanes, 2003). Para ello se considera una recta paralela que divida la figura sombreada en dos triángulos, los cuales comparten un mismo lado, considerándose como base para los dos triángulos resultantes. Luego se encuentra la longitud de esta base mediante semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras. Se determina el área de dichas figuras, permitiendo obtener el área total de la superficie, mediante la suma de las áreas previamente calculadas. La aplicación de esta estrategia se puede ilustrar en la figura 6. Para desarrollar el ejercicio los escolares acudieron a la orientación del docente

con el propósito de resolver el ejercicio y por consiguiente efectuar el cuarto paso de Polya.

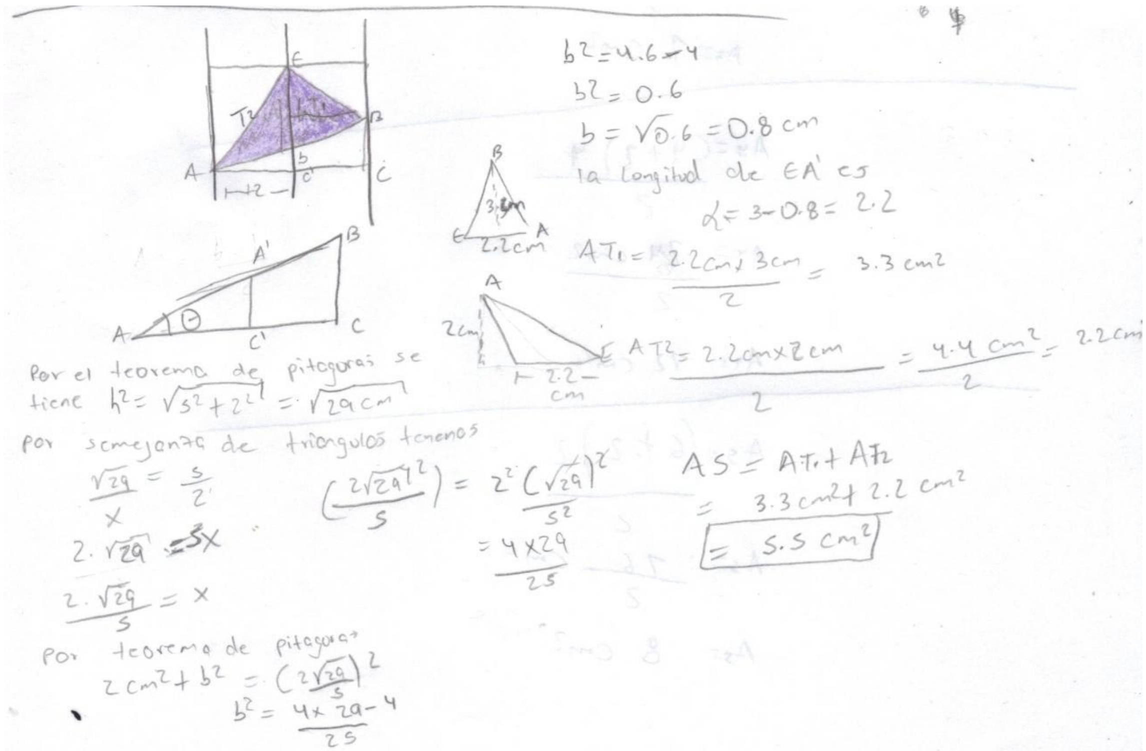


Figura 6.

Observación

Dos grupos resolvieron el ejercicio de forma incorrecta, notándose que emplearon la primera estrategia, pero tuvieron dificultades para operar números racionales. Uno de los grupos no resolvió el problema planteado, quizás porque tuvieron dificultad para su comprensión y por ende para aplicar alguna estrategia que los encaminaría a la solución.

De otro lado, en el problema tres se buscaba encontrar el valor de la incógnita x. Se obtuvieron los siguientes resultados.

Once grupos resolvieron el ejercicio planteado. Se pudo notar que tuvieron en cuenta los datos expuestos por el ejercicio, la incógnita y la respectiva representación gráfica. Utilizaron las siguientes estrategias para llevar a cabo su solución:

1. Emplear un problema Análogo. En este caso se dividió el paralelogramo en tres regiones (como el problema cuatro de la sesión cuatro), una rectangular y dos triangulares, y posteriormente los escolares calcularon el área de cada una de ellas, para obtener el valor de x con la ayuda de una ecuación lineal, igualando el área dada por el ejercicio y la suma de las tres áreas previamente calculadas. A continuación se puede observar la ejecución del plan ideado por los escolares (figura 7):

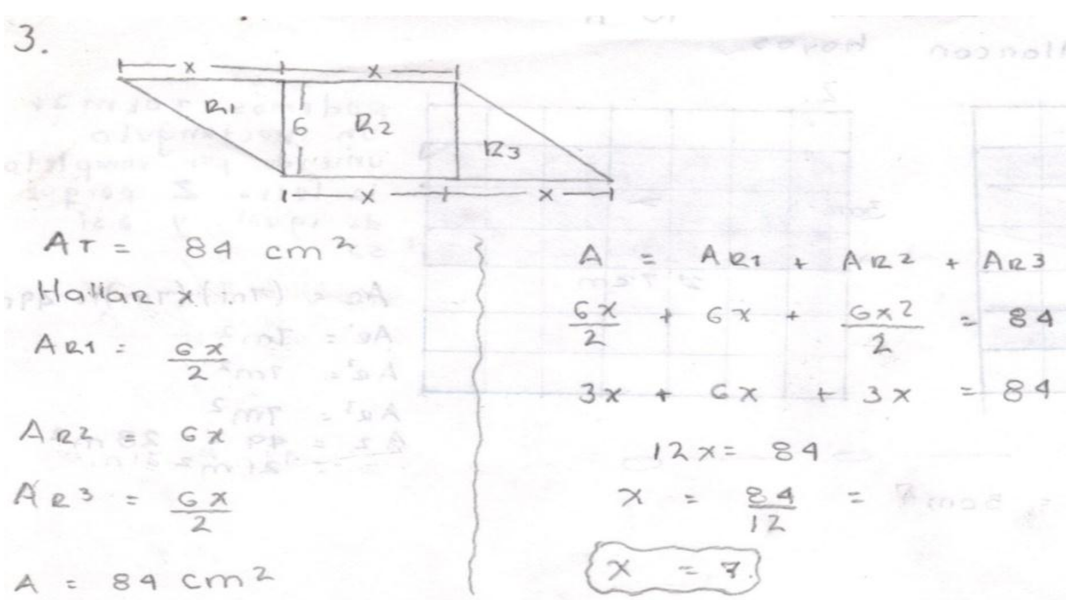


Figura 7

2. Transformar el problema en un problema auxiliar. Para ello se formaron dos rectángulos adyacentes (respecto a la altura) con longitudes de base x cm y altura 6 cm mediante la unión de los dos triángulos de la figura. Cada rectángulo tendría un área de $42\,cm^2$, y mediante la

aplicación de la fórmula del área de un rectángulo, se obtiene el valor de x. En la figura 8 se puede apreciar la ejecución del plan que idearon los escolares.

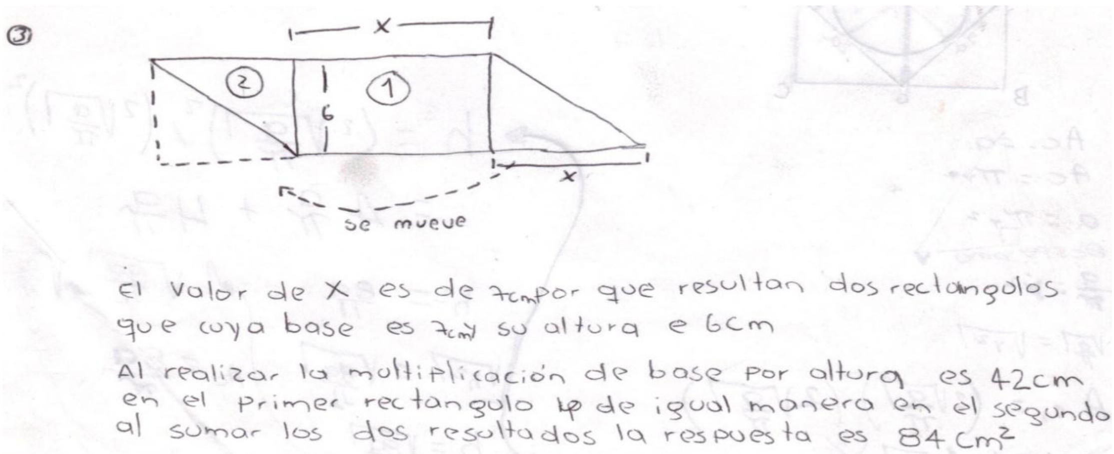


Figura 8.

Observación

1. Los escolares determinaron que el valor de la incógnita x es 7 cm. El papel del docente en el desarrollo del problema de razonamiento lógico fue orientar a aquellos grupos que tuvieron dificultad para plantear y resolver la ecuación lineal, como también verificar las soluciones descritas por algunos grupos.

2. Un grupo resolvió incorrectamente el ejercicio obteniendo para la variable x un valor de 2 cm. Desde la perspectiva de Polya es posible observar que los estudiantes emplearon la primera estrategia, pero al aplicarla calcularon erróneamente un cociente, lo que les impidió acercarse a la respuesta correcta. En este caso se pudo notar que no se llevó a cabo la visión retrospectiva del problema.

El último punto del taller era un problema de Olimpiadas Matemáticas cuyo enunciado se presenta a continuación: Sea A*BCD* un cuadrado en el cual está inscrito otro cuadrado *EFGH* cuyos vértices se encuentran ubicados en los puntos medios de los lados del cuadrado *ABCD*. A su vez se tiene un círculo de área ***a*** inscrito en el cuadrado *EFGH*. Encuentre el área del cuadrado *ABCD* en función de ***a.***

Con relación a este problema se tienen los siguientes resultados: Doce grupos resolvieron este punto haciendo uso del siguiente plan: emplear la fórmula para hallar el área de un círculo y obtener su respectivo radio, determinar el diámetro y con la ayuda del teorema de Pitágoras hallar la longitud de la diagonal del cuadrado inscrito, siendo esta paralela al lado AB del cuadrado ABCD para luego obtener el área deseada mediante la fórmula del área del cuadrado (figura 9).

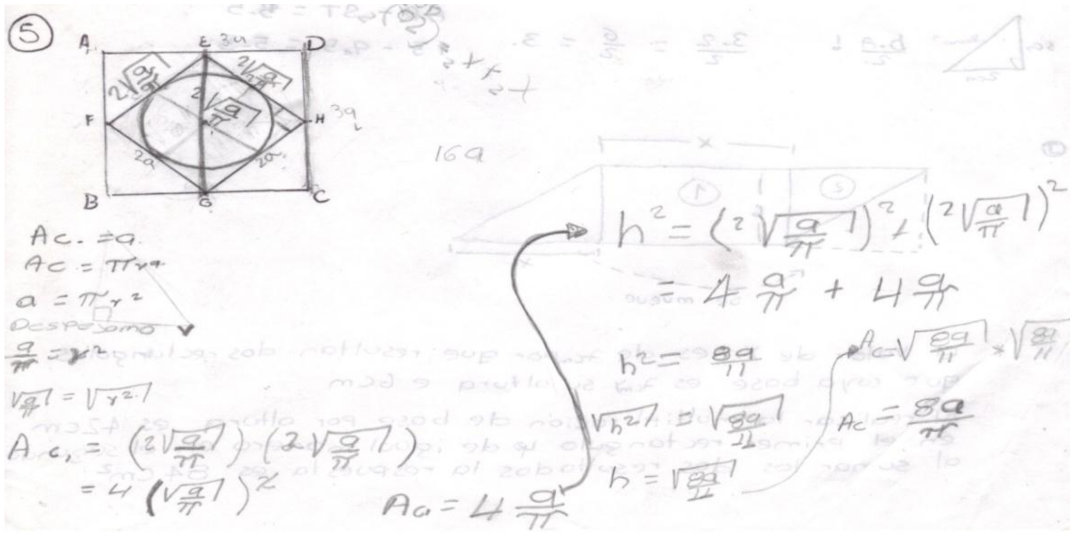


Figura 9.

En la figura 10 se puede evidenciar que la gráfica de la circunferencia que llevó a cabo un grupo, obstaculiza la comprensión del ejercicio, y por lo tanto el diseño de una estrategia de trabajo. Se puede apreciar que por razones desconocidas no culminó la respectiva solución, a pesar de haberse resuelto en el tablero.

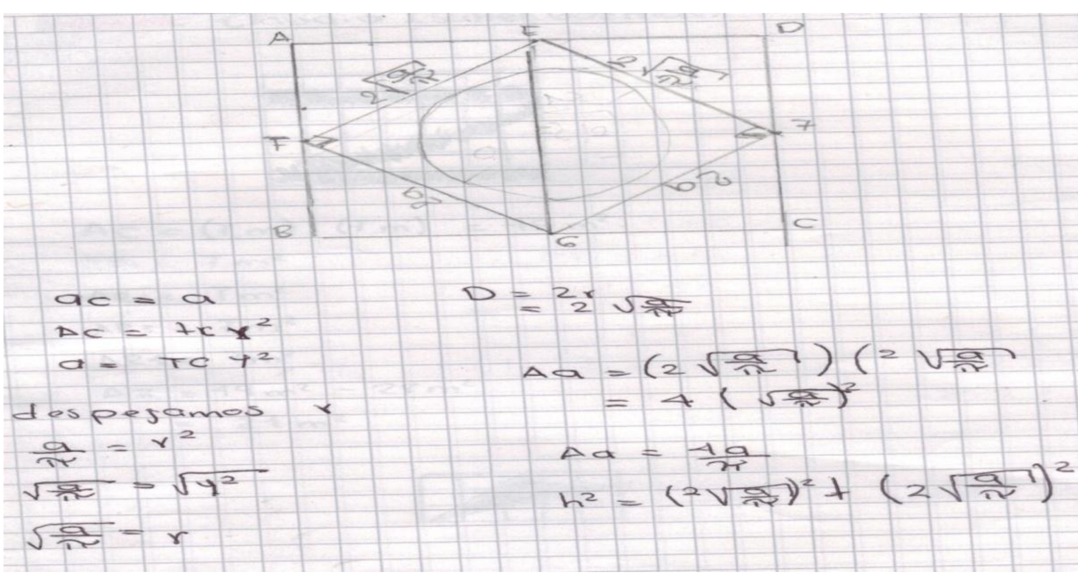


Figura 10

Observación

En un principio los estudiantes tuvieron dificultad para expresar gráficamente el problema propuesto. El docente los exhortó a realizar la respectiva gráfica, para así resolver sus inquietudes a medida que se avanzaba en la solución del ejercicio. Sin embargo, al notar que algunos grupos continuaban presentando dificultades, el profesor incentivo a un estudiante a resolver el ejercicio en el tablero, para facilitar a sus compañeros la comprensión del proceso que conduce hacia la solución. De esta forma se llevó a cabo la visión retrospectiva del problema.

En seguida se presentan las consideraciones derivadas de la presente sesión:

1 Se notó que los estudiantes no tuvieron dificultad en la solución de los tres primeros puntos del taller, aunque algunos necesitaron la orientación del docente para llevar a cabo su solución y verificación. Se noto que existió mayor dificultad al resolver el último punto que correspondía a un ejercicio de Olimpiadas Matemáticas, especialmente al realizar la respectiva gráfica.

2 En esta sesión se pudo apreciar la persistencia mostrada por los discentes a la hora de desarrollar cada uno de los puntos del taller, en particular con el problema de olimpiadas. Un estudiante compartió a sus compañeros la solución del ejercicio de olimpiadas en el tablero, contribuyendo a la retroalimentación general de conocimientos. Esto hace que la enseñanza de las Matemáticas mediante la resolución de problemas resulte ser más interesante y significativa.

6.8 Bitácora VII

"Enfrentarse, siempre enfrentarse, es el modo de resolver el problema. ¡Enfrentarse a él!" (Conrad Joseph).

En la séptima sesión se contó con la participación de 21 estudiantes del grupo B, los cuales formaron nueve grupos de trabajo. El propósito de esta clase era desarrollar el taller número siete (en grupos formados por dos o tres estudiantes), durante un tiempo de dos horas, con el fin de que los educandos usaran la propiedad de congruencia al trabajar con la estrategia empleada en la sesión número cuatro. A continuación se presentan los resultados obtenidos y las consideraciones finales de la presente sesión:

En el primer punto del taller se pedía encontrar el área sombreada de la figura uno, el cual fue desarrollado correctamente por seis grupos de trabajo. A continuación se describen los siguientes procedimientos matemáticos que utilizaron los escolares para resolver el ejercicio:

Dividir cada uno de los rombos que conforman la figura sombreada en cuatro triángulos rectángulos (obteniéndose 12 triángulos congruentes en total), para así hallar el área de uno de los triángulos rectángulos, y posteriormente determinar el área total de la figura sombreada. En la figura dos se puede ilustrar la ejecución del procedimiento matemático empleado por los seis grupos que resolvieron correctamente el ejercicio.

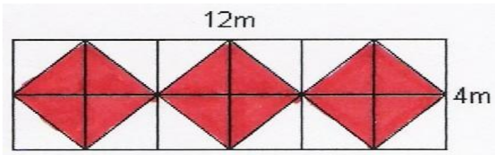
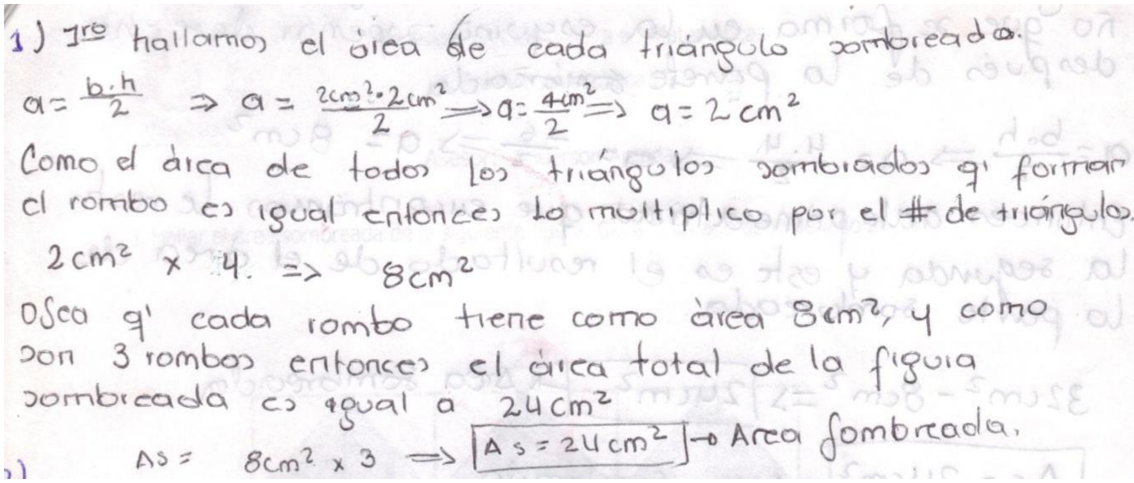


Figura 1



1) 1ro hallamos el área de cada triángulo sombreado.

$a = \frac{b.h}{2} \Rightarrow a = \frac{2cm^2 \cdot 2cm^2}{2} \Rightarrow a = \frac{4cm^2}{2} \Rightarrow a = 2\,cm^2$

Como el área de todos los triángulos sombreados q' forman el rombo es igual entonces lo multiplico por el # de triángulos.

$2cm^2 \times 4 \Rightarrow 8cm^2$

Osea q' cada rombo tiene como área $8cm^2$, y como son 3 rombos entonces el área total de la figura sombreada es igual a $24cm^2$

$As = 8cm^2 \times 3 \Rightarrow \boxed{As = 24cm^2} \rightarrow$ Area sombreada.

Figura 2.

De la misma manera, se debe resaltar que dos grupos resolvieron incorrectamente el ejercicio empleando el siguiente procedimiento matemático: dividir uno de los rombos de la figura sombreada en cuatro triángulos rectángulos congruentes. Hallar el área de uno de los triángulos rectángulos y posteriormente cuadruplicar esta área calculada, con el fin de determinar el área pedida, luego encontrar el área total de la figura sombreada, triplicando el área encontrada del cuadrilátero mencionado anteriormente.

Al aplicar la estrategia anterior, se observó que los escolares hallaron de manera equivocada el área de uno de los triángulos que forma cada rombo (figura 3); calcularon la altura del triangulo rectángulo con la ayuda del teorema de Pitágoras, lo cual fue un procedimiento innecesario, puesto que la longitud de la altura del triángulo era 2 m. La respectiva revisión hubiese permitido que los educandos pudieran verificar su solución y corregir el error.

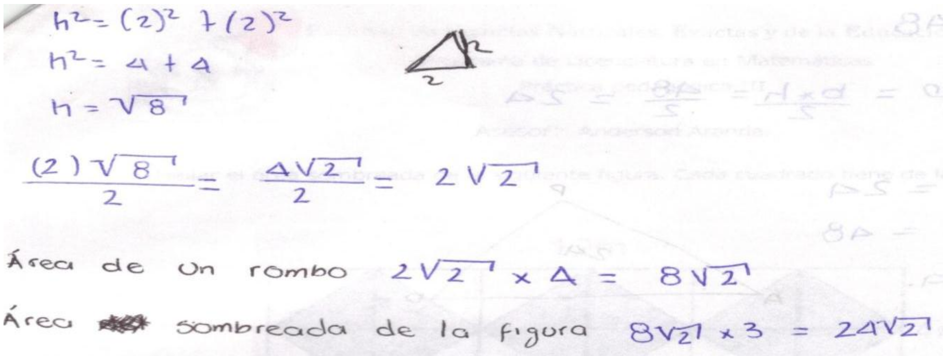


Figura 3

En el segundo punto del taller se requería determinar el área sombreada de la figura 3. El desarrollo de este ejercicio por parte de los educandos permitió obtener los siguientes resultados:

Seis grupos alcanzaron la solución correcta del ejercicio. Se pudo evidenciar que los estudiantes tuvieron en cuenta la información brindada del mismo y lo que se debe determinar. En adición a esto, el mecanismo seguido por los educandos para resolver el ejercicio consta de los siguientes resultados:

1. Determinar el área de uno de los triángulos de base 6 cm y altura 3 cm inmersos en la figura sombreada. Luego con la ayuda de la congruencia de triángulos se tiene que los dos triángulos tienen igual área, y posteriormente encontrar el área de toda la superficie sombreada. (figura 4).
2. Dividir la región sombreada en cuatro regiones triangulares congruentes, para obtener las áreas de cada una de estas. Al sumar las áreas previamente obtenidas, se encuentra el área total de la superficie sombreada (figura 5).

3. Encontrar el área del rectángulo (de base 12 cm y altura 6 cm) y de las tres regiones triangulares no sombreadas, para hallar el área de la región sombreada mediante el procedimiento empleado en la sesión cuatro (figura 6).

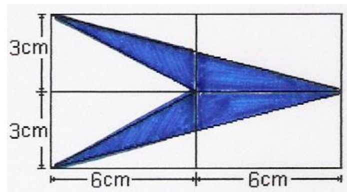


Figura 3

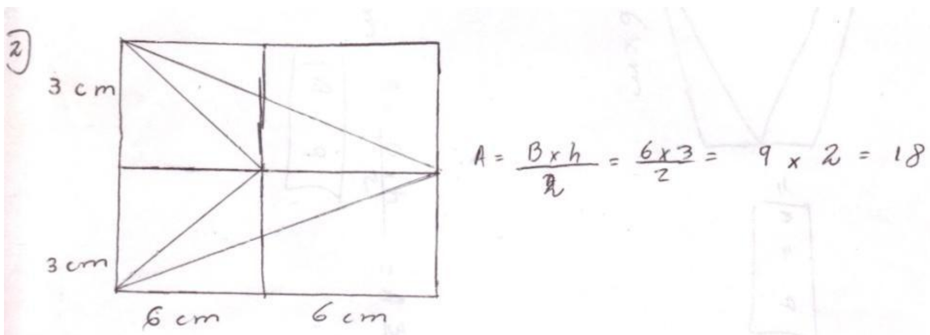
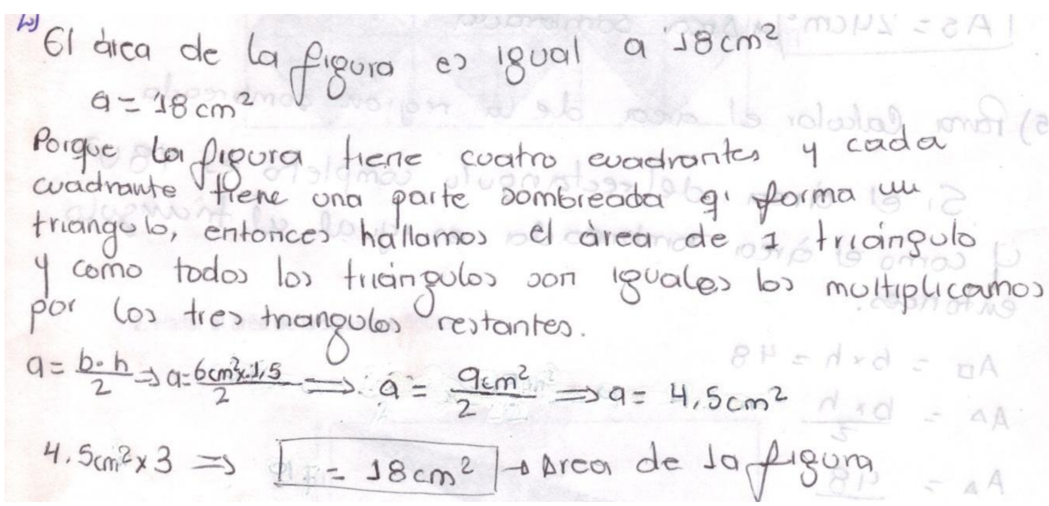


Figura 4



El área de la figura es igual a $18 cm^2$

$a = 18 cm^2$

Porque la figura tiene cuatro cuadrantes y cada cuadrante tiene una parte sombreada q' forma un triangulo, entonces hallamos el área de 1 triángulo y como todos los triángulos son iguales los multiplicamos por los tres triangulos restantes.

$a = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow a = \frac{6cm^2 x 1,5}{2} \Rightarrow a = \frac{9cm^2}{2} \Rightarrow a = 4,5cm^2$

$4.5cm^2 x 3 \Rightarrow \boxed{A = 18cm^2} \rightarrow$ Area de la figura

Figura 5

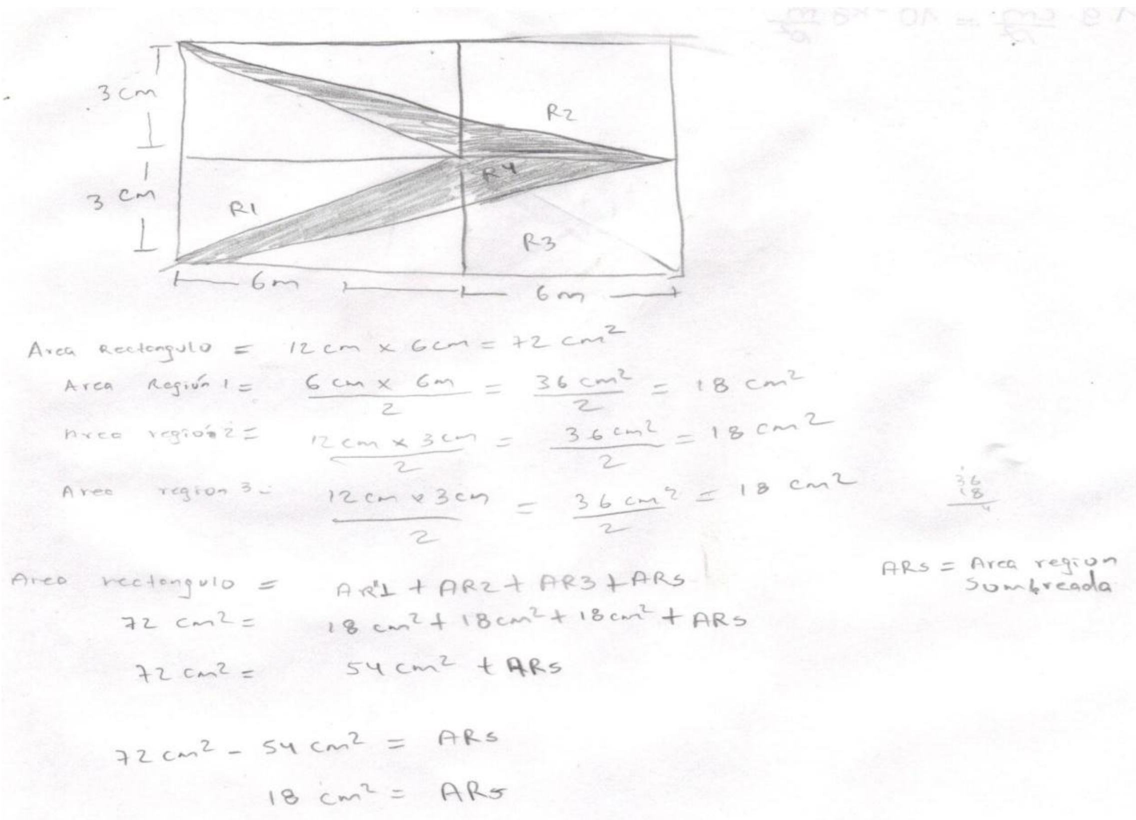


Figura 6

Observaciones.

1. Dos grupos no desarrollaron completamente el ejercicio, puesto que no tienen definida una argumentación matemática clara que les permita aproximarse hacia la respuesta.
2. Un grupo empleó el procedimiento del numeral 1, pero se percibe la falta de una escritura correcta y detallada del proceso que conduce hacia la respuesta del ejercicio.
3. Un grupo calculó el valor numérico correcto, aunque tuvo inconsistencias al aplicar la fórmula del área del triángulo, y dificultad para diferenciar las unidades de longitud y las de área. En este caso se observó que no hicieron revisar su solución para llevar a cabo la respectiva corrección.

Por otro lado, en el tercer ejercicio se buscaba calcular el área de la región sombreada (figura 7). A continuación se presentan los resultados y las consideraciones concernientes a este ejercicio:

Ocho grupos llegaron a la respuesta correcta del ejercicio. Se puede decir que los escolares reconocieron la información del ejercicio y lo que se debía determinar (área de la figura sombreada). Para su solución, se notó que los grupos formados emplearon el siguiente procedimiento matemático.

Utilizar la fórmula del área de la región triangular para encontrar la longitud de la altura del triángulo ABC, y con la longitud obtenida determinar el área del triángulo sombreado.

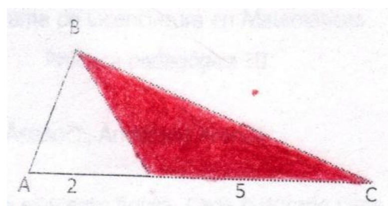


Figura 7

Observación

Al aplicar el procedimiento mencionado anteriormente, uno de los grupos que llegó a la respuesta del ejercicio, calculó la longitud de la altura cometiendo un error en el proceso. Este error consiste en denotar en unidades cuadradas la respectiva longitud, que se ilustra en la figura ocho.

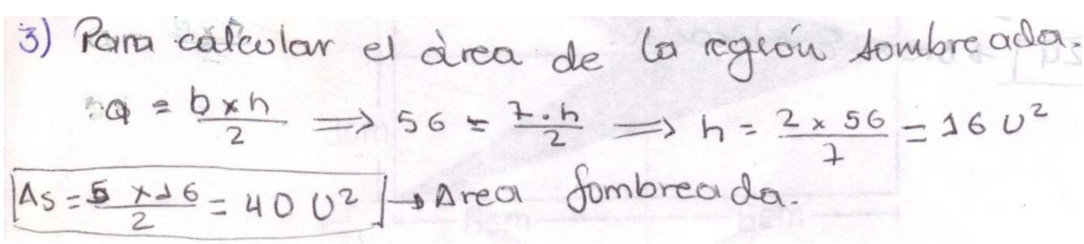


Figura 8.

Un grupo no resolvió correctamente el ejercicio. Aquí se notó que los escolares utilizaron erróneamente el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del segmento BC, desviándose del propósito que era calcular el área de la región triangular sombreada.

El cuarto punto del taller corresponde a un problema de razonamiento lógico en el cual se debía encontrar el área de la figura sombreada (figura 9). A continuación se presentan los resultados obtenidos y las observaciones:

Tres grupos resolvieron correctamente el problema observándose comprensión y disposición para su solución. En aras de resolver el ejercicio, el docente propuso revisar un problema análogo expuesto en la sesión anterior (ejercicio 2-Taller 6) para facilitar el mecanismo que los llevaría hacia su solución. Sin embargo, algunos de los grupos conformados no recordaban el ejercicio dos y por ende fue necesario recordarles la estrategia empleada para tal fin. Además de esto, se pudo apreciar que el plan establecido por los estudiantes está determinado por los siguientes resultados:

1. Considérese la región cuadrangular divida en tres subregiones (dos triangulares y un cuadrilátero): determinar el área de la región rectangular y de cada región no sombreada, y Seguidamente, emplear el procedimiento de la sesión cuatro[3] para calcular el área pedida (figura 10). En este caso no se realizó la visión retrospectiva para revisar la solución.
2. Hallar el área de la región triangular ABC y la región triangular MNB. Con el procedimiento de la sesión cuatro, obtener el área de la región sombreada como se aprecia en la figura 11.

[3] Este procedimiento consiste en dividir la región poligonal convexa en subregiones poligonales convexas, con el fin de determinar el área de cada una de estás y por consiguiente el área total.

3. Dividir la región sombreada en tres regiones triangulares congruentes (de base 4 cm y altura 4cm) y calcular el área de una de las regiones triangulares. Por último determinar el área de la región sombreada, triplicando el área de la región triangular obtenida anteriormente (figura 12). Esta estrategia fue aplicada omitiendo algunos detalles al resolverlo, los cuales hubiesen sido valiosos para una mejor comprensión.

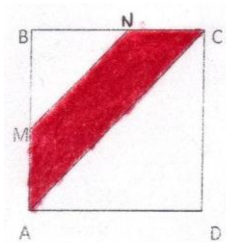


Figura 9

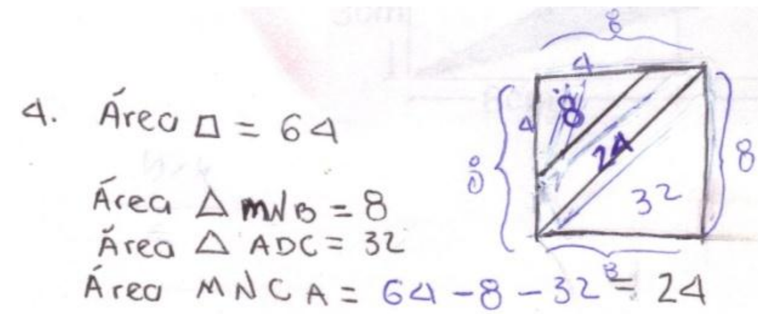


Figura 10

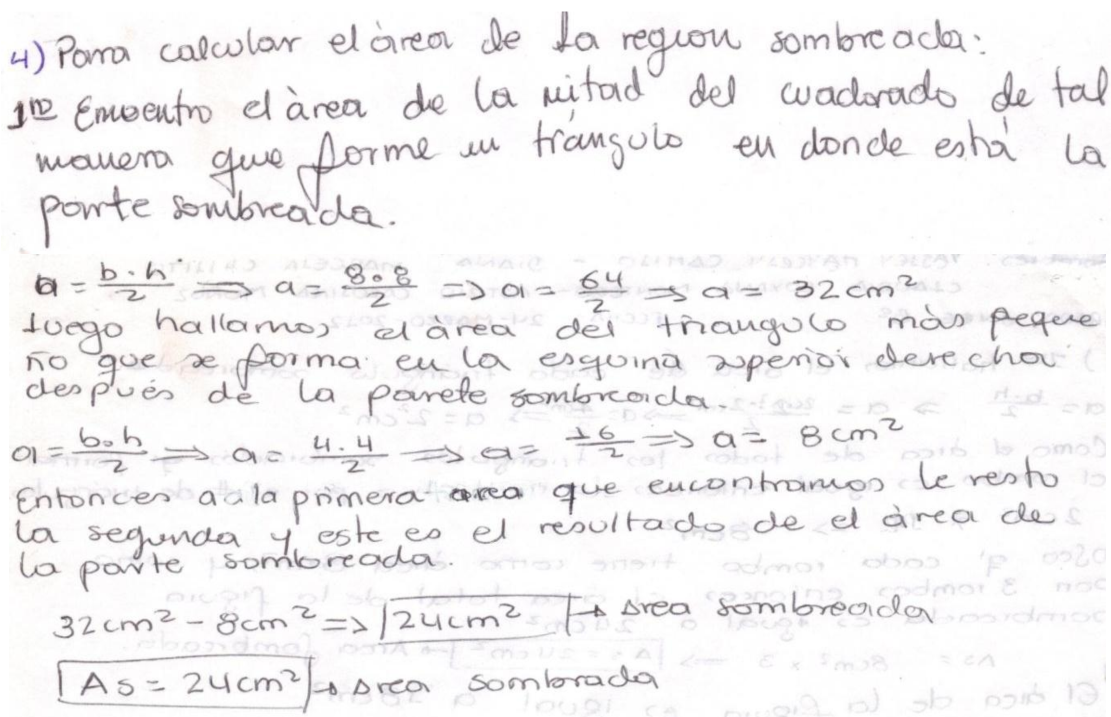


Figura 11

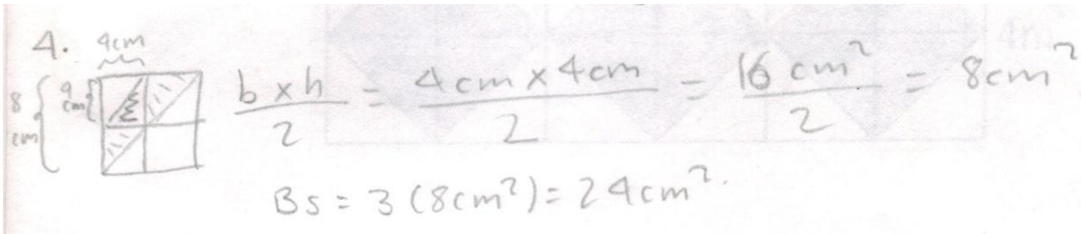


Figura 12

Observaciones

1. Dos grupos que encontraron el área de la región sombreada tenían dos procedimientos diferentes, sin embargo presentaban inconsistencias en el primer procedimiento. Esto hizo pensar que no había comprensión y una estrategia clara para desarrollar el problema de razonamiento lógico, lo que posiblemente los llevó a tomar la decisión de copiar sin detalles la respuesta de otro grupo.
2. Un grupo no culminó la solución del problema de razonamiento lógico, percibiéndose que hallaron solamente el área de uno de los triángulos rectángulos que conforman el cuadrado ABCD. Tres grupos no resolvieron el problema planteado por razones que se desconocen.

Finalmente se tienen las siguientes consideraciones de la presente sesión:

En esta sesión el cuarto paso de Polya se llevó a cabo por aquellos escolares que requerían de la ayuda del profesor. Se debe resaltar que en esta sesión gran parte de los escolares no acudieron a la orientación del docente para revisar su solución.

La igualdad y congruencia en geometría son dos nociones matemáticas que los estudiantes tienden a confundir, siendo necesaria su oportuna aclaración en la siguiente sesión de clase.

Infortunadamente existe un grupo de escolares que aún tiene dificultades para aplicar el teorema de Pitágoras. Al parecer la insistencia a algunas sesiones de clase ha contribuido a que no se subsanen estas dificultades.

Vale la pena resaltar la creatividad que tuvieron los escolares al resolver el primer punto sin emplear la fórmula para determinar el área de un rombo. Esto les permite que no estén ligados a resolver el ejercicio de una sola forma, sino que deben explorar nuevas formas que permitan obtener la respectiva solución bajo una argumentación lógica.

Finalmente, como opinión personal considero que no es viable dar a conocer al estudiante la forma más fácil de resolver un problema, dado que minimiza no sólo su creatividad, sino también la posibilidad de interacción al constituir un grupo de trabajo. Por consiguiente, se debe incentivar a los escolares a resolver problemas matemáticos de diferentes formas, sin importar si la respuesta es o no inmediata.

6.9 Bitácora VIII

En la octava sesión se contó con la presencia de 18 estudiantes con los cuales se formaron seis grupos de trabajo para desarrollar el taller número 8, cuyo propósito fundamental era enseñar la fórmula de Herón y continuar trabajando con las estrategias empleadas por los escolares en las sesiones anteriores. A continuación se presentan los resultados obtenidos y las consideraciones finales de la sesión:

En el primer punto del taller se buscaba calcular el área de la región triangular de lados con longitudes 20 cm, 13 cm y 25 cm:

Para que los escolares pudieran resolver el ejercicio sin ninguna dificultad, se les enseñó con anterioridad la fórmula de Herón. El ejercicio fue resuelto correctamente por cinco grupos, en donde se puede apreciar la solución planteada por uno de los grupos en la figura 1.

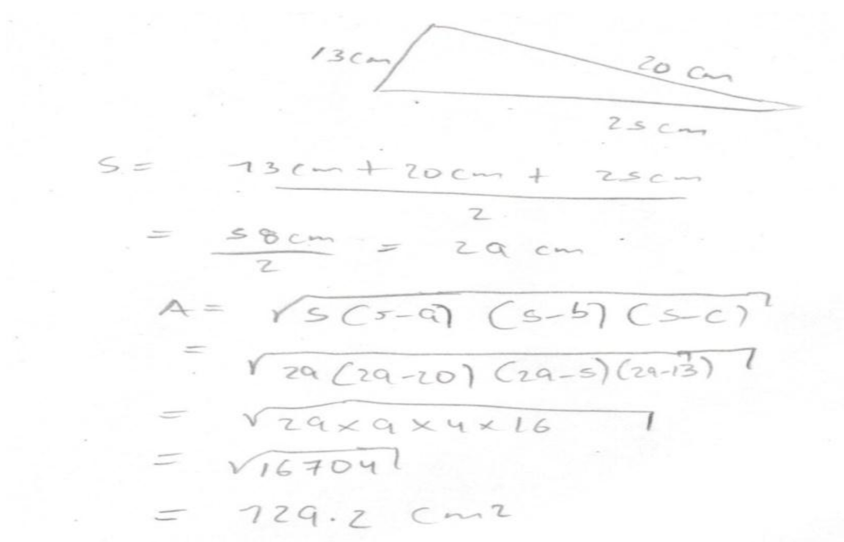


Figura 1

Un grupo no tuvo éxito al resolver el ejercicio, ya que al aplicar la fórmula de Herón, los estudiantes cometieron un error al extraer una de las raíces cuadradas implícitas en el ejercicio, lo cual impidió obtener el valor aproximado del área ($129.2\ cm^2$).

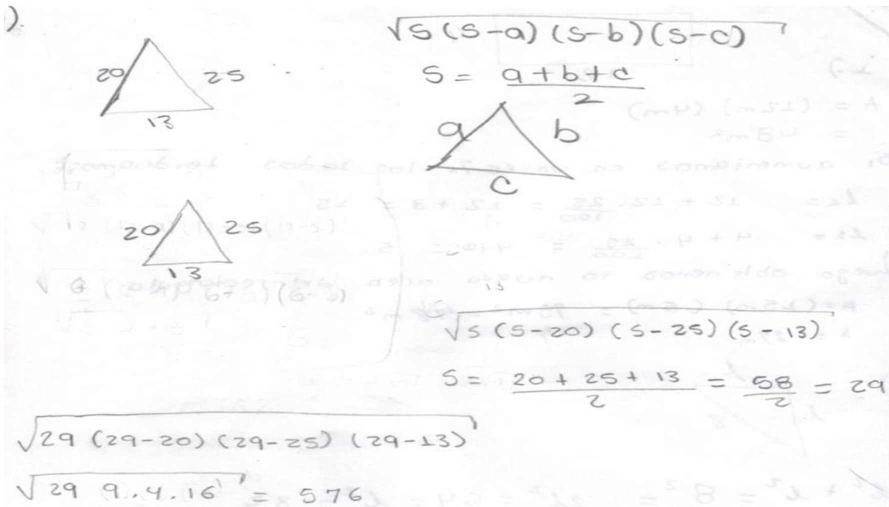
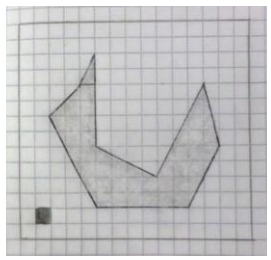


Figura 2

En el segundo punto se pedía encontrar el área de la figura sombreada, sabiendo que el lado de cada cuadrado sombreado es de 1 cm (figura 3). Respecto al desarrollo de este ejercicio, se destacan los siguientes resultados:

Cinco grupos resolvieron correctamente el ejercicio planteado, observándose que los estudiantes identificaron correctamente los datos y el valor a determinar del ejercicio. Asimismo, a la hora de establecer un plan para resolver el problema, se solicitó a los escolares la implementación del siguiente proceso matemático:

Dividir la figura sombreada utilizando rectas verticales paralelas entre sí, pasando por los vértices de dicha figura, obteniéndose en total siete polígonos representados por tres triángulos, tres trapecios rectángulos y un paralelogramo; luego, determinar el área de cada uno de estos y posteriormente hallar el área total de la figura sombreada. La solución desarrollada por los discentes se puede observar en las figuras 4, 5 y 6.



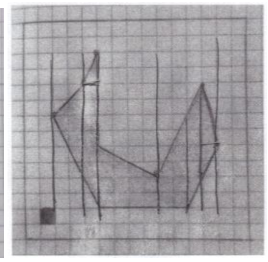


Figura 3. Figura 4

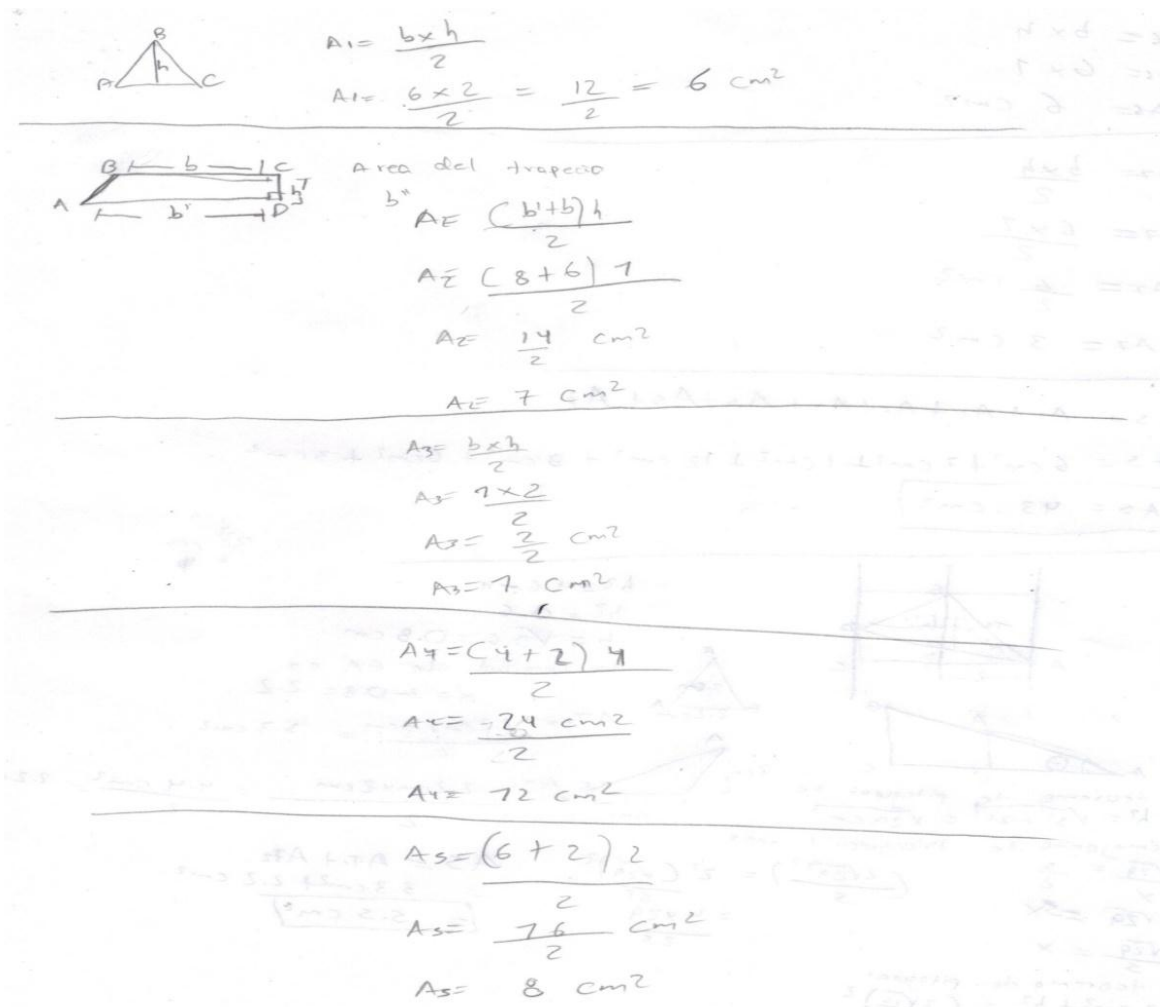


Figura 5

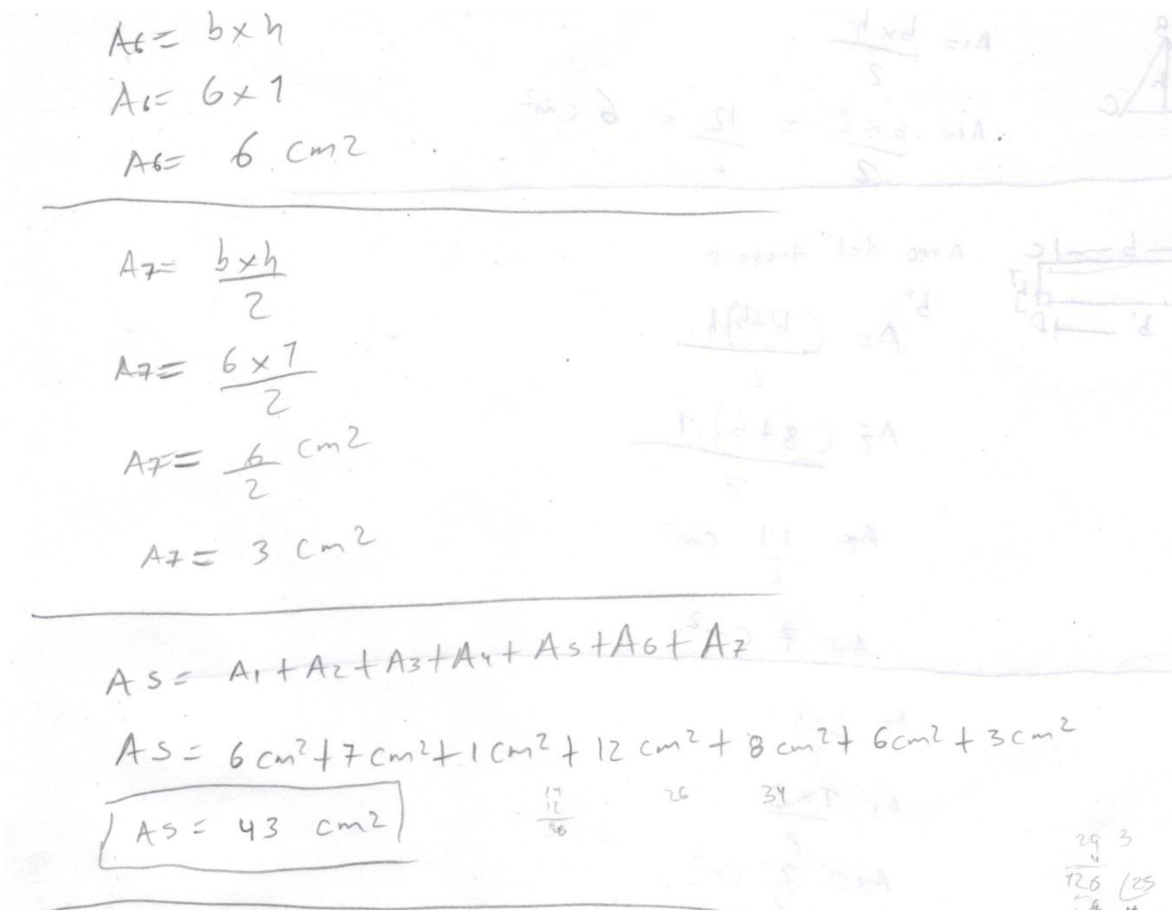


Figura 6

Un grupo tuvo éxito al resolver el ejercicio propuesto, pero no justificaron el proceso que conduce hacia la solución. Para ello, dividen la región de la forma solicitada y escribieron solamente las respuestas de cada región y el área total. El docente les sugirió que trataran de resolver el ejercicio sin recurrir a la copia.

En el tercer punto se pide encontrar el área de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6 cm. A continuación se presentan los resultados obtenidos durante el desarrollo de esta sesión:

Se sugirió que hicieran la representación gráfica del hexágono y luego dividieran esa región en seis regiones triangulares congruentes; seguidamente, encontrar el área de uno de los triángulos y posteriormente obtener el área total del polígono multiplicando por seis el área de la región triangular calculada.

Un grupo no construyó el hexágono con ayuda del transportador, regla y compás (figura 7), aunque pudieron llegar a la respuesta del ejercicio. Al parecer, la dificultad que tuvieron al realizar la representación gráfica los llevó a no hacer tal construcción, basándose en la gráfica de otro grupo y resaltando los cálculos que conducían hacía la solución.

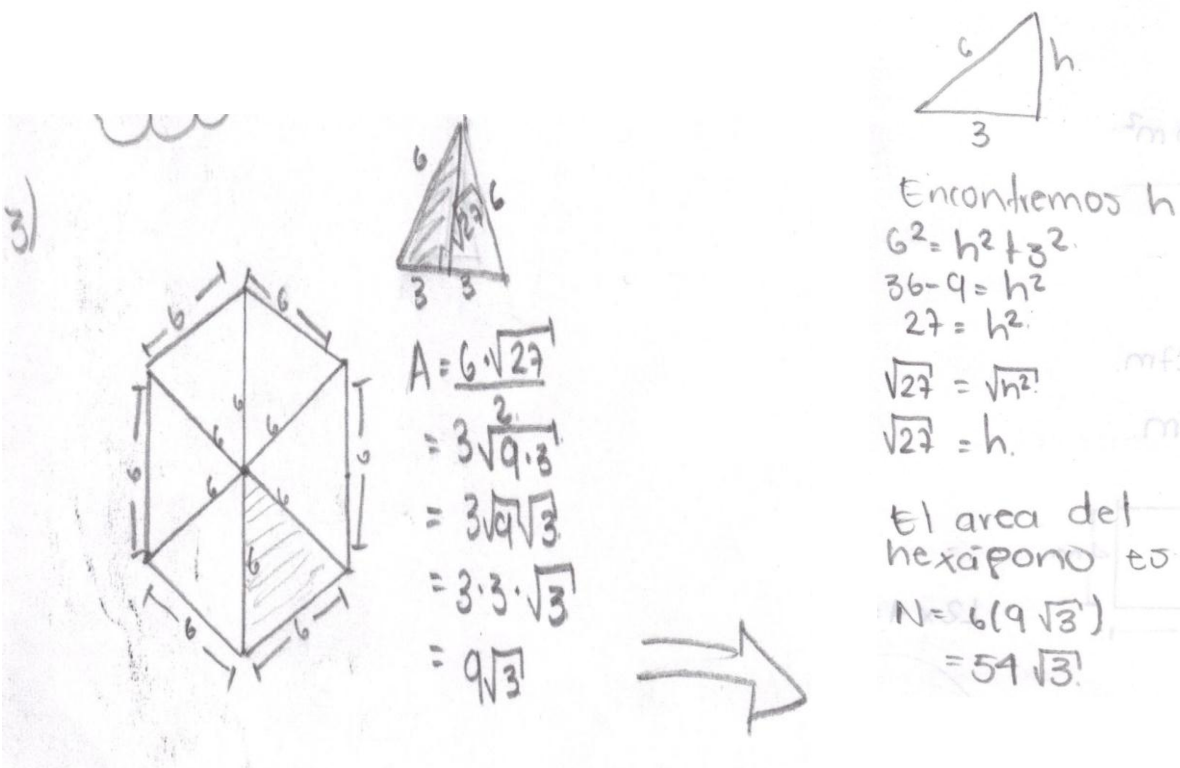


Figura 7

Dos grupos resolvieron correctamente el ejercicio empleando la misma estrategia que el anterior grupo, pero esta vez elaboraron una representación grafica como se les indicó al principio de la sesión.

Tres grupos resolvieron correctamente el ejercicio empleando el siguiente argumento matemático: dividir la región poligonal en seis regiones triangulares y encontrar la altura de uno de los triángulos, haciendo uso de la razón trigonométrica correspondiente. Posteriormente, hallar el área de la región triangular con la fórmula adecuada, y determinar el área total del polígono regular. Los resultados obtenidos en la aplicación de dicho proceso se pueden ilustrar en las figuras 8 y 9:

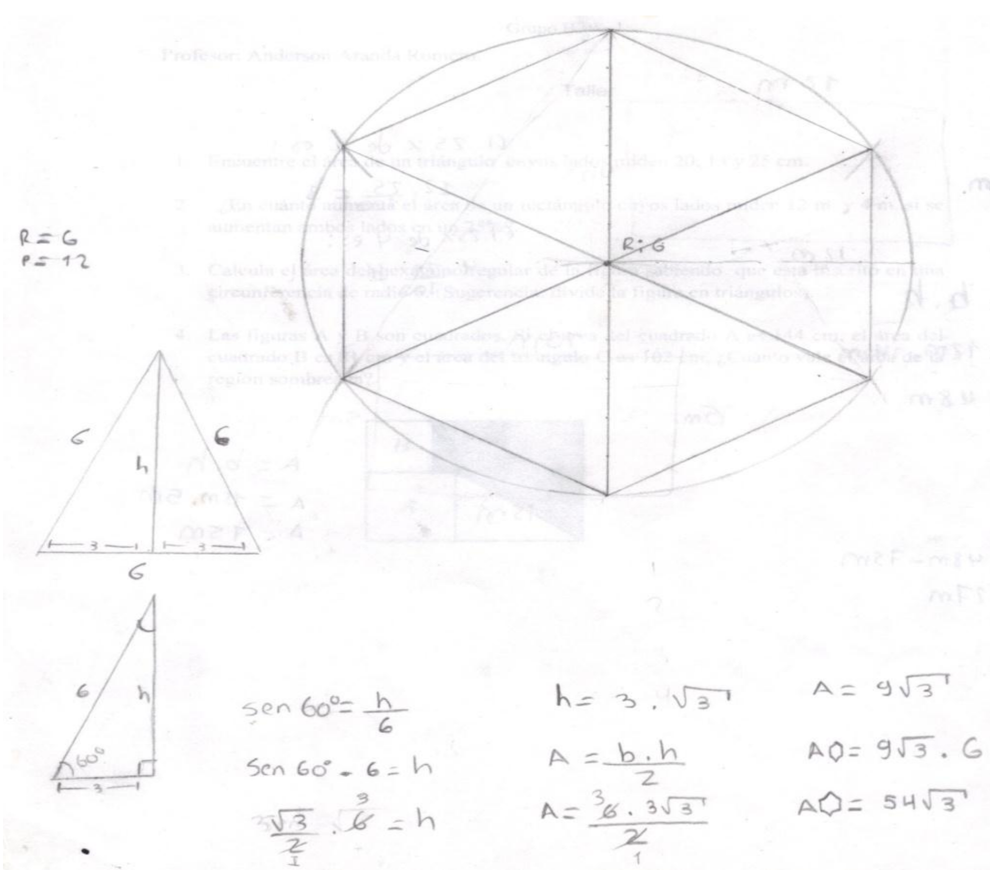


Figura 8

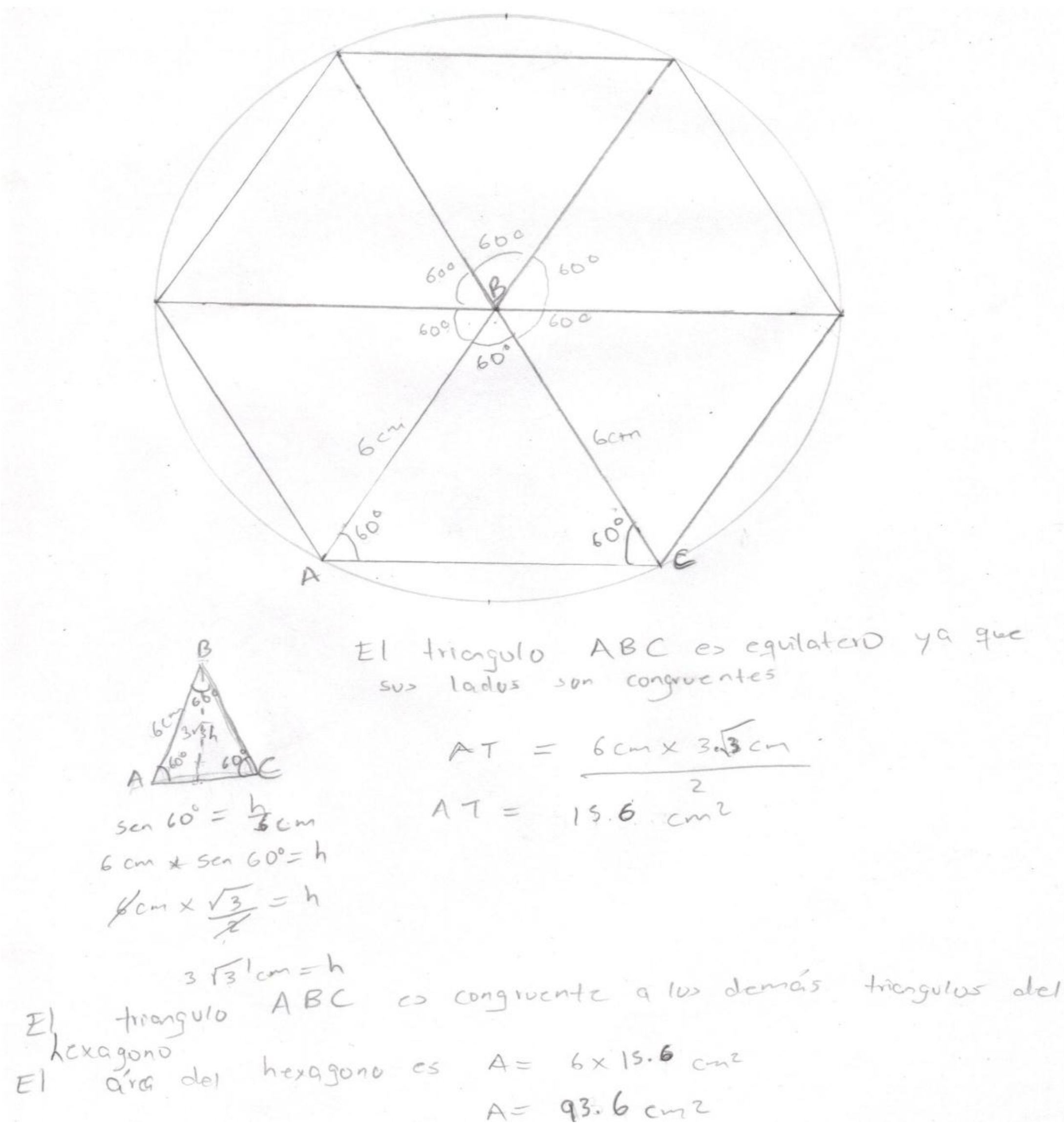


Figura 9.

De la misma manera, se puede obtener el área del hexágono regular utilizando la fórmula para tal propósito (figura 10). Con la aplicación de esta fórmula los educandos verificaron su respuesta al ejercicio, determinando si estaba correcta o debían retornar a su proceso de resolución para corregirla.

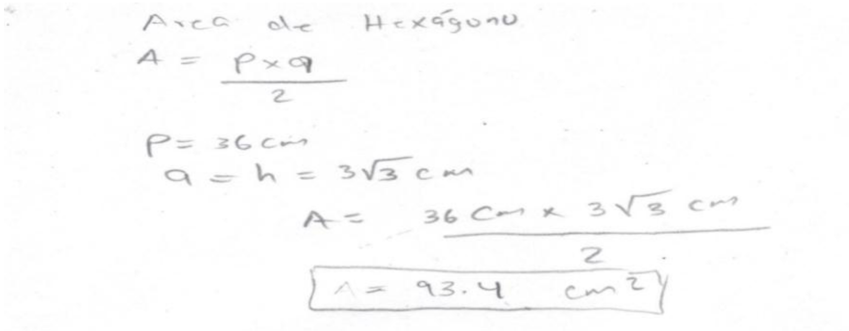


Figura 10

Infortunadamente un grupo no terminó de resolver el ejercicio propuesto, notándose dificultad para graficar el hexágono y aplicar el teorema de Pitágoras (el cual permitiría obtener la altura de uno de los triángulos y por ende el área del mismo), siendo un impedimento para aproximarse a la respuesta del ejercicio y obstaculizando su verificación.

Observaciones

1. Se puede notar que el área del polígono regular (usando calculadora) determinada por los estudiantes sin la utilización de la fórmula es de 93.6 cm^2, en tanto que el área de la misma región calculada a través de la fórmula para hallar el área del hexágono regular es de 93.4 cm^2, arrojando una diferencia de cálculo de 0.2, lo que quiere decir que existe una aproximación entre dichos valores. Esto se debió a la pérdida de cifras decimales en la operación mostrada en la figuras 6 y 7 (Se consideró $\sqrt{3} \approx 1.73$).
2. Se puede afirmar que el desarrollo de esta actividad fue valioso para el estudiante dado que contribuye a mejorar su capacidad de razonamiento para resolver problemas matemáticos, desligándose del empleo de fórmulas que muchas veces reducen su ingenio y creatividad.

Con relación a lo anterior se trajo a colación la siguiente situación: Suponga que una persona le pide ayuda para encontrar el área de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6 cm, sin contar con la fórmula para hallar el área del hexágono regular. Debe encontrarla utilizando las herramientas que usted considere convenientes (lápiz, regla, compás y transportador). ¿Cómo haría usted para encontrar el área del hexágono?. Para la solución del problema se les manifestó que debían construir el hexágono con los elementos dados y posteriormente calcular el valor pedido.

De otro lado, el cuarto punto corresponde a un problema de Olimpiadas Matemáticas representado en la siguiente situación: Sobre una malla cuadriculada se ha dibujado una máscara. ¿Cuál es el área en cm^2 de la máscara, si se tiene en cuenta que el área del cuadrado sombreado es 1 cm^2? (figura 11)

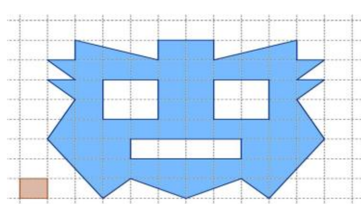


Figura 11.

De acuerdo a lo anterior, los resultados obtenidos en el desarrollo del problema se describen a continuación:

Dos grupos tuvieron éxito al resolver el problema, esto se pudo apreciar a partir de la estrategia que utilizaron para determinar su respectiva solución. Tal estrategia consistía en hallar el área total de la figura, utilizando el procedimiento empleado en la cuarta sesión, logrando así, obtener el valor correspondiente del área requerida ($50\ cm^2$).

Un grupo no tuvo éxito al resolver el problema, puesto que a pesar de haber empleado la misma estrategia que los anteriores grupos, no calcularon correctamente el área de un triángulo de base 3 cm y altura 1 cm. En este caso, al ejecutar la estrategia, no tuvieron en cuenta que la base del triángulo era 3 cm en lugar de 2 cm (figuras 12 y 13). Por consiguiente, se pudo apreciar que no se llevó a cabo el cuarto paso de Polya para verificar la solución planteada por los educandos, dado que el área de la figura sombreada era 50 cm^2.

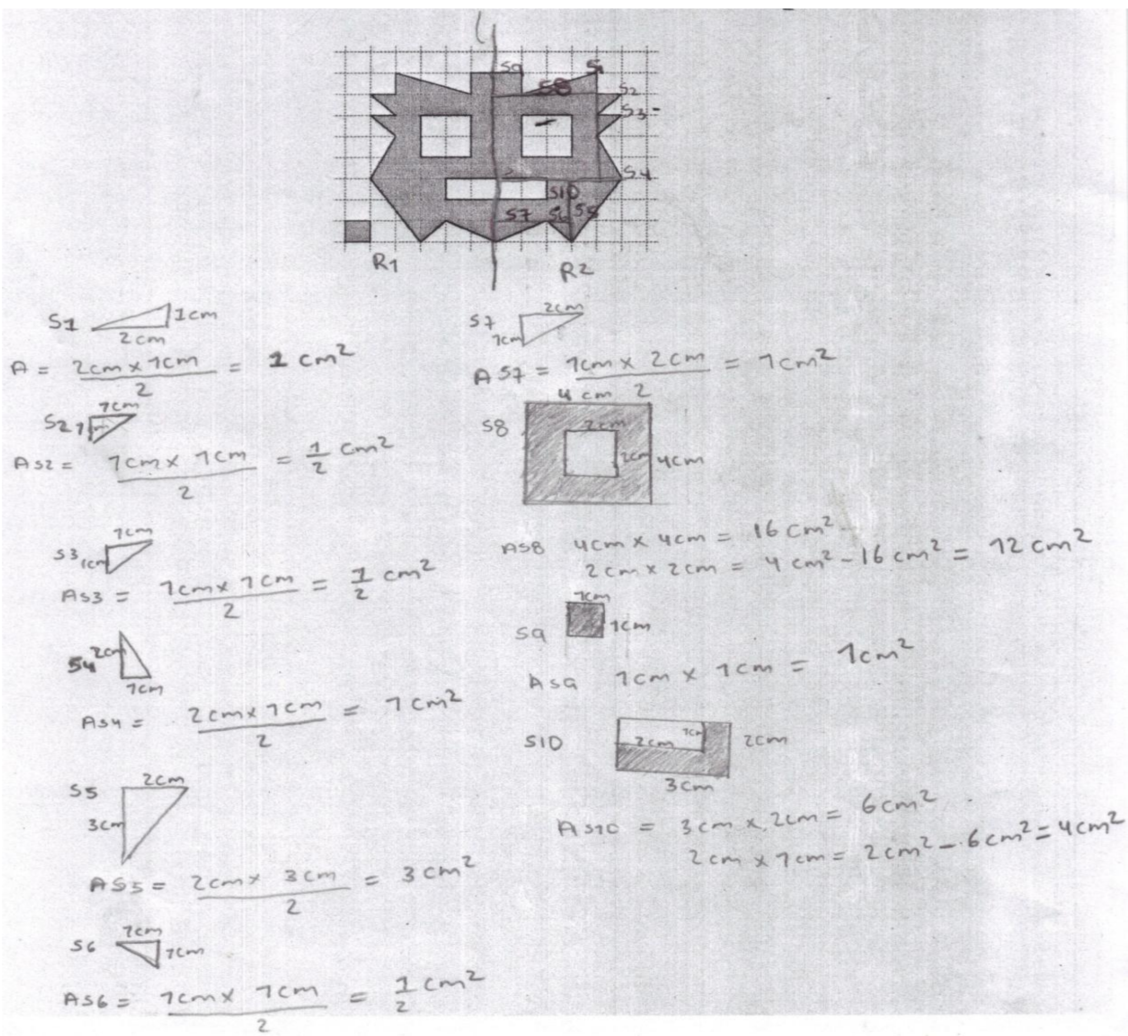
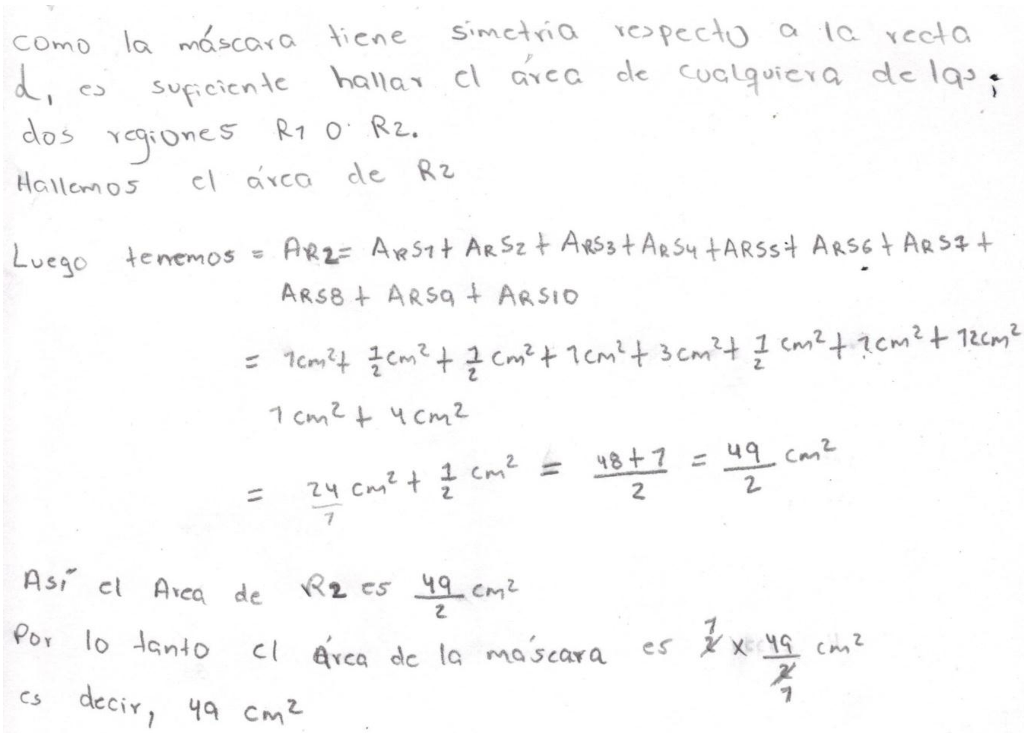


Figura 12.


como la máscara tiene simetría respecto a la recta
d, es suficiente hallar el área de cualquiera de las
dos regiones R1 o R2.
Hallemos el área de R2

Luego tenemos = $A_{R2} = A_{RS1} + A_{RS2} + A_{RS3} + A_{RS4} + A_{RS5} + A_{RS6} + A_{RS7} + A_{RS8} + A_{RS9} + A_{RS10}$

$= 1cm^2 + \frac{1}{2}cm^2 + \frac{1}{2}cm^2 + 1cm^2 + 3cm^2 + \frac{1}{2}cm^2 + 1cm^2 + 12cm^2 + 1cm^2 + 4cm^2$

$= \frac{24}{1}cm^2 + \frac{1}{2}cm^2 = \frac{48+1}{2} = \frac{49}{2}cm^2$

Así el Área de R2 es $\frac{49}{2}cm^2$
Por lo tanto el Área de la máscara es $\cancel{2}^{1} \times \frac{49}{\cancel{2}_{1}} cm^2$
es decir, 49 cm^2

Figura 13

Tres grupos no resolvieron completamente el problema de Olimpiadas Matemáticas percibiéndose la falta de tiempo para desarrollar este último punto del taller.

Por último, se tienen las siguientes consideraciones:

Se notó que los escolares asimilaron la fórmula de Herón, en donde la mayoría de los escolares tuvieron éxito al resolver aquel ejercicio mediante este importante resultado de la geometría.

El docente no intervino en la ejecución del cuarto paso de Polya, dejando esta labor a los educandos, con el fin de concientizarlos sobre la importancia de este paso que permite no sólo verificar el problema, sino que contribuye a explorar nuevas estrategias de solución.

Al desarrollar el tercer punto del taller se evidenció que algunos estudiantes requirieron de la orientación del profesor, para llevar a cabo la elaboración de la gráfica del hexágono regular. Además, fue el punto del taller que más tiempo requirió para su solución.

En el proceso de la práctica pedagógica se percibió que la mayoría de los escolares trataban de ser concisos a la hora de desarrollar los ejercicios. Es importante resaltar el trabajo desarrollado por los escolares a pesar de que algunos grupos no culminaron el taller.

Por último, se observó que los estudiantes aprovecharon al máximo esta forma de aprender Matemáticas, dado que contribuye a mejorar su capacidad de razonamiento, teniendo en cuenta que en la resolución de problemas muchas veces el estudiante puede encontrar diversas estrategias de solución, dependiendo del nivel académico que este posea.

10 Conclusiones

Como consideración personal, el proyecto de aula fue un espacio en donde se consiguieron los siguientes aspectos: adquirir experiencia en el ejercicio docente y contribuir en el aprendizaje de los estudiantes, con miras a transformar el pensamiento de estos con relación al estudio de las matemáticas, dado que para muchos, esta no es más que una ciencia compleja y sin utilidad. Esto permite al docente tener un mejor desempeño en el aula al aplicar la metodología de Polya, discutir con los estudiantes algunas soluciones en clase, y sobre todo motivar a los escolares a aprender Matemáticas resolviendo problemas.

Se pudo conocer cuáles fueron las fortalezas y debilidades presentes en los estudiantes durante su proceso de aprendizaje. A continuación enumerando algunas de estas deficiencias:

1. Se notó que algunos escolares perdían el ritmo de trabajo debido a la inasistencia a algunas de las sesiones, por ello se les dificultaba desarrollar los ejercicios propuestos en las mismas.
2. La impuntualidad que tuvieron algunos estudiantes les impidió en varias ocasiones culminar los ejercicios propuestos en los talleres y aprovechar las respectivas explicaciones del profesor al iniciar cada una de las jornadas.

Las fortalezas presentes en los estudiantes se evidenciaron a lo largo de la experiencia y se describen a continuación:

a. A pesar de tener vacíos conceptuales que representaban un impedimento para resolver los talleres propuestos, algunos escolares perseveraron en el proceso de aprendizaje para adquirir conocimientos y superar así sus falencias.

b. La puntualidad y compromiso que tenían la mayoría de los estudiantes para asistir a las sesiones fue una ventaja para aprovechar el tiempo al máximo.

c. La experiencia que tenían algunos estudiantes en Olimpiadas matemáticas fue determinante para el desarrollo de los talleres propuestos.

En el proyecto de aula se pudo conocer que la mayoría de los estudiantes solamente empleaban fórmulas para hallar el área de polígonos tales como rectángulos, triángulos, etc. Sin embargo, ellos se apropiaron de dos estrategias que les permitió resolver problemas de Olimpiadas Matemáticas (de nivel básico) relacionados con áreas de regiones poligonales convexas. En este caso, las estrategias empleadas fueron las siguientes:

- Dividir la región poligonal convexa en regiones poligonales más simples para determinar el área total. En este caso, vale la pena mencionar que se puede dividir la región poligonal mediante rectas paralelas que pasan por sus vértices o triangulizando la región total, y luego calcular las respectivas áreas para conseguir el área deseada.
- Buscar un problema que se relacione con el nuestro (problema Análogo).
- Transformar el problema en un problema auxiliar.

La mayoría de los estudiantes no tenían estrategias que les permitieran resolver problemas de matemáticas relacionados con áreas de áreas poligonales, mientras que aquellos que tenían más experiencia en resolver los problemas, participaban en eventos de Olimpiadas Matemáticas.

Respecto al uso de las unidades de medida se tiene la siguiente propuesta: Si se continúa con el proceso de enseñanza mediante la resolución de problemas, se podrían hacer una aclaración al inicio del taller para indicar las unidades de medida correspondientes para la longitud, el área o el volumen, permitiendo así que los escolares no tengan que estar preocupados por la unidad de medida al finalizar el ejercicio.

De acuerdo al planteamiento de Polya sobre la visión retrospectiva, algunos estudiantes omiten una fase importante y muy instructiva del trabajo que es la visión retrospectiva del problema. En este trabajo de práctica pedagógica se pudo apreciar que algunos escolares estaban más preocupados por llegar a la respuesta del ejercicio, sin importar si el procedimiento que conduce a la solución fuera incorrecto. Ante esta situación, el profesor concienció a aquellos educandos a hacer una visión retrospectiva, pero las dificultades en temas como aritmética y algebra impedían llevar a cabo este paso de la teoría de Polya. Para evitar que este paso se omitiera, el profesor orientaba a los escolares, cuando terminaban sus soluciones para corregir los posibles errores en la solución planteada.

Se resalta la importancia del juego de Tangram en la cuarta sesión, el cual resultó ser una herramienta útil para que los estudiantes pusieran a prueba su creatividad y descubrieran la primera estrategia que consistía en dividir el polígono en polígonos regulares, con el fin de determinar el área total de la figura. De esta forma, según Adela Salvador (2003), un juego bien elegido puede servir para introducir un tema, ayuda a comprender mejor los conceptos nuevos, afianzar los ya adquiridos, alcanzar cierta destreza en algún algoritmo o descubrir la importancia de una propiedad. (p.5)

Se debe ser cuidado al diseñar cualquier tipo de talleres, dado que en dos de los talleres propuestos por el docente, se encontraron errores de redacción en el planteamiento de los ejercicios. En el taller 1 se utilizó la palabra hueco en lugar de espacio, mientras que en el taller 3 no se colocaron unidades de medida en el quinto punto. En otro trabajo relacionado con Olimpiadas Matemáticas, debe redactarse cuidadosamente los ejercicios para evitar confusiones.

Finalmente, la enseñanza de las matemáticas mediante resolución de problemas resulta significativa para los estudiantes, puesto que permite fortalecer el trabajo en grupo. En la realización de los talleres propuestos se notó un compromiso en la mayoría de los grupos establecidos, incluso se observó cooperación entre ellos. Según Vygotsky, las formas superiores de conocimiento son socio-generadas, siendo el detonante para fortalecer el trabajo en grupo, argumentar, discutir y compartir sus estrategias. (Catsigeras, 2005)

8. Bibliografía.

Arenas, M. (2012). Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas. Bogotá, Colombia. Universidad Nacional de Colombia: Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/9300/1/5654114.2012.pdf

Catsigeras, E. (2005). Un enfoque constructivista en la enseñanza de los conceptos de límite y continuidad. Montevideo, Uruguay: Universidad de la República. Recuperado de

http://www.fing.edu.uy/~eleonora/Recopilacion/Archivos/AprendizajeConstructivista2005.pdf

Comité organizador de las olimpiadas matemáticas. (2012). Olimpiadas Regionales de Matemáticas - Universidad del valle: Universidad del valle. Cali, Colombia. Recuperado de http://matematicas.univalle.edu.co/orm/

De Losada, M. (2001). Olimpiadas de matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Caracas, Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Vol. 3, P. 15, 18,19.

Disney, W. (1959). Donald in the magic Land [video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=U_ZHsk0-eF0

Godino, J; Batanero, C; Roa, R. (2002). Medida de Magnitudes y su Didáctica Para Maestros. Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

Nieto, J. (2005). Olimpiadas matemáticas: el arte de resolver problemas. Caracas, Venezuela: Minerva, p. 2.

Ministerio de Educación Nacional. (1998).ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MÁTEMÁTICAS. Bogotá, Colombia: Ministerio de educación Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Polya, G. (1965). Como plantear y resolver problemas. Ciudad de México, México: Trillas, 2[a] edición. P. 5, 28-38, 82, 102, Traducción de: How to solve it.

Potoy, Y. (2007). Material didáctico para la enseñanza aprendizaje de conceptos matemáticos. Managua, Nicaragua: Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua. Recuperado de http://www.cimat.mx/especialidad.seg/actual/documentos/tangramYGeoplano.pdf

Sales, J. (2000). Pedro Puig Adam, maestro. Cataluña, España: Suma, p 13.

Salvador, A. (2002). El juego como recurso didáctico en el aula de Matemáticas. Madrid, España: Universidad Politécnica de Madrid. Recuperado de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/12.Juego.pdf

Sepúlveda, A., Cortés, M (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. Ciudad de México, México: Revista Educación Matemática, vol. 21, p. 80, 82,85.

Villalva, M, Hernández, V. (2006). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Montevideo, Uruguay: Uruguay Educa. Recuperado de http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5CFundamentosBrousseau.pdf

Yanes, G. (2003). Acerca de la validez de la fórmula para calcular el área de un polígono. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/6003/1/YanesAcercaGeometr%C3%ADa2003.pdf

Zapata, F. (2009). La enseñanza de la magnitud área. Bogotá, Colombia: Asociación colombiana de educación matemática. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/887/1/23Conferencias.pdf

9. Anexos

9.1 Algunas estrategias para la resolución de problemas de áreas de polígonos convexos.

A continuación presentaremos algunas estrategias las cuales nos permiten obtener el área deseada de un polígono. Sin embargo, antes de mencionar las estrategias, se tiene la siguiente propiedad que es indispensable para la estrategia tres.

***Propiedad de congruencia*.** Si una región plana R es congruente con otra región S entonces ambas regiones tienen la misma área: área(R) = área(S).

Ejemplo.

Hallar el área de la figura sombreada.

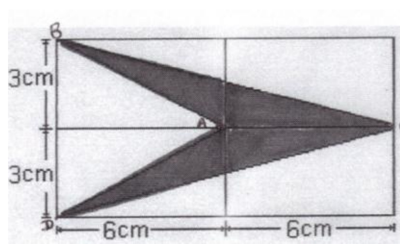


Figura 1

Solución. Por congruencia de triángulos tenemos que los triángulos ABC y ACD son congruentes. Por lo tanto, el área de cada uno de los triángulos es $9cm^2$.

Estrategia uno

Axioma de aditividad de áreas. Si una región R se descompone en N subregiones disjuntas, A, B,..., N, entonces el área de R es la suma de las áreas de las subregiones:

$$\text{Área (R)} = \text{área (A)} + \text{área (B)} + ... + \text{área (N)}.$$

Ejemplo.

Problema. Sobre una malla cuadriculada, se ha dibujado la siguiente figura (ver figura 2).

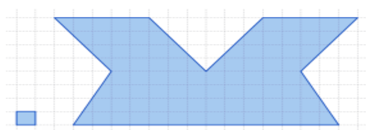


Figura 2.

¿Cuál será el área de la figura, si se tiene en cuenta que el área del cuadrado sombreado es 1 cm^2?

Solución. Una forma de aplicar la estrategia uno es dividir el polígono cóncavo en figuras como trapecios y paralelogramos (figura 3). Posteriormente, se determina el área de estas tres subregiones para así obtener el área de la figura sombreada.

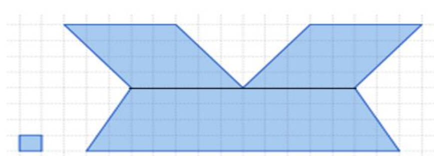
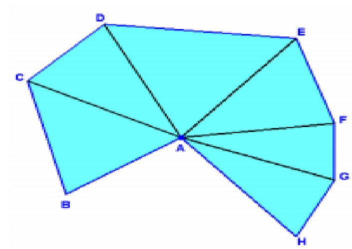


Figura 3.

Observaciones:

1. *Para emplear esta estrategia, se descompone la figura R en varias subregiones disjuntas. Estas suelen ser figuras geométricas conocidas (triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos, trapecios, rombos).*

2. *Cuando se divide la figura R en regiones triangulares, a este procedimiento se le denomina triangulación del polígono (figura 4).*



Triangulación de un polígono irregular

Figura 4

Ejemplo *.

Calcular el área del pentágono inscrito en una circunferencia de radio 4 cm (figura 5).

Solución.

Una forma de solución es dividir el pentágono en cinco triángulos congruentes como se ilustra a continuación.

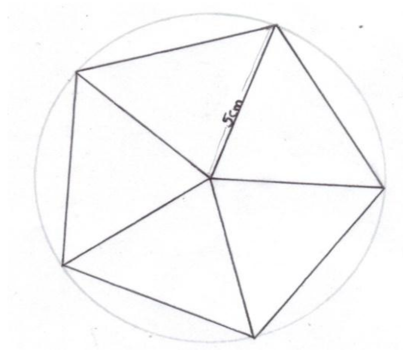


Figura 5.

Ahora, considerando el triángulo ABC (ver figura 12), tenemos que su altura es:

$$(4cm) * sen54º = h,$$

de donde $h = 3.24\ cm$.

Además el lado AC del pentágono es de aproximadamente $4.7\ cm$.

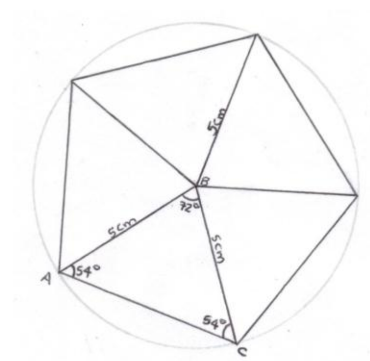


Figura 6.

Luego, el área del triángulo ABC es:

$$A_T = \frac{4.7 * 3.24}{2} = 7.6\ cm^2$$

Por lo tanto, el área del pentágono es:

$$A = 5 * 7.6cm^2$$

$$A = 38\ cm^2$$

Determinar el área del polígono convexo de cuatro lados (figura 7) inscrito en el rectángulo, sabiendo que cada cuadrado tiene 1 unidad de lado.

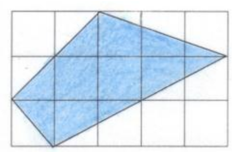


Figura 7.

Para hallar el área del polígono convexo, realicemos el siguiente procedimiento: Se encuentra el área del rectángulo. En este caso, el área del rectángulo es de $15U^2$; se considerar esta región rectangular como la unión de cinco subregiones disjuntas.

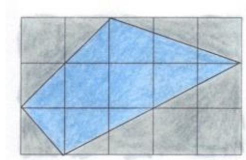


Figura 8.

a. Obsérvese que cuatro de las subregiones corresponden a figuras triangulares (figura 8), y se puede determinar sus áreas. Luego, el área de cada una de esas subregiones es: $2\ U^2$, $\frac{3}{2}$ U^2, $\frac{1}{2}$ U^2, $4\ U^2$

   Se tiene que el área total de estas subregiones es $8\ U^2$.

b. Aplicando la estrategia 1 se puede notar que el área del polígono irregular es:

$$15\ U^2 = A + 8U^2;$$

de donde obtenemos $A = 7\ U^2$.

Estrategia dos

Dividir la región poligonal convexa (o cóncava respectivamente) en regiones poligonales convexas mediante rectas paralelas.

Esta estrategia consiste en trazar rectas que pasan a través de los vértices de la región poligonal y que sean paralelas entre sí. De esta manera la figura quedará dividida en figuras menores de tres y/o cuatro lados; estas últimas tendrán dos lados paralelos situados entre dos rectas consecutivas (figura 9).

Figura 9.

Observación: las rectas no sólo pueden establecerse de forma horizontal. También se puede establecer de forma vertical o oblicua; Ver figura 10.

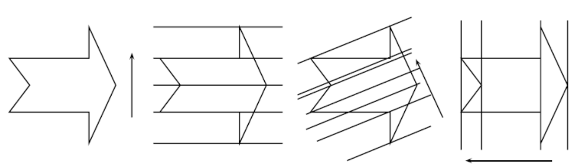


Figura 10.

Esta división de figuras en regiones nos permite calcular el área total que se encuentran entre dos rectas paralelas consecutivas, tales como triángulos y/o cuadriláteros (con lados ubicados en esas rectas).

Ejemplo.

Calcular el área total, de las seis regiones sombreadas ubicadas entre las dos rectas paralelas (figura 11).

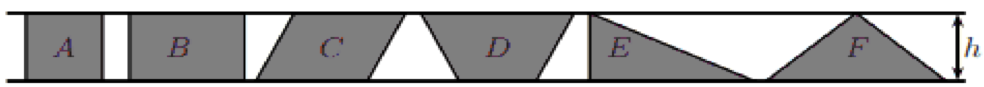


Figura 11.

Solución

El área total se calcula sumando el área de las seis regiones, obtenidas mediante las formulas que permiten calcular las respectivas áreas de los polígonos que resultan entre las dos paralelas. Esto es:

Área total = área(A) + área(B) + área(C) + área(D) + área(E) + área(F)

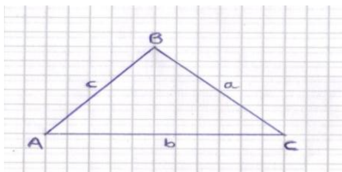
Observación:

Para el caso del triángulo, cuando se conoce solamente la longitud de sus lados, es posible encontrar el área de este mediante el siguiente procedimiento:

Formula de Herón.

Se puede determinar el área de un triángulo cuando solamente se tienen las longitudes de sus lados. Usando la formula de Herón:

Dado el triángulo ABC cuyos lados tienen longitudes a, b y c; el área del triángulo es:



$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\qquad s = \frac{a+b+c}{2}$

Donde s es el semiperímetro:

9.2. Talleres

Facultad de **C**iencias **N**aturales, **E**xactas y de la **E**ducación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

Taller uno.

Profesores: Alvaro Galindez, **A**nderson Aranda.

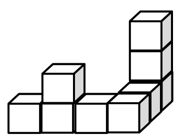
Sopa de letras geométrica.

R	**A**	**O**	**S**	**O**	**L**	**U**	**C**	**I**	**O**	**C**	**E**	**J**
B	**N**	**B**	**A**	**I**	**R**	**B**	**B**	**O**	**P**	**U**	**U**	**K**
P	**T**	**U**	**T**	**D**	**I**	**M**	**J**	**N**	**L**	**A**	**I**	**S**
A	**R**	**C**	**O**	**A**	**O**	**T**	**O**	**T**	**C**	**D**	**R**	**E**
R	**E**	**C**	**B**	**R**	**A**	**Q**	**M**	**L**	**N**	**R**	**S**	**G**
A	**C**	**U**	**T**	**A**	**N**	**G**	**U**	**L**	**O**	**A**	**V**	**M**
L	**T**	**R**	**U**	**Y**	**G**	**U**	**O**	**P**	**B**	**D**	**X**	**E**
E	**A**	**X**	**S**	**O**	**U**	**C**	**I**	**L**	**B**	**O**	**O**	**N**
L	**N**	**Z**	**O**	**B**	**L**	**A**	**G**	**U**	**D**	**T**	**D**	**T**
A	**G**	**W**	**T**	**U**	**O**	**M**	**M**	**R**	**C**	**T**	**A**	**O**
P	**U**	**N**	**T**	**O**	**I**	**D**	**E**	**E**	**A**	**M**	**A**	**C**
L	**L**	**A**	**D**	**O**	**S**	**R**	**R**	**I**	**O**	**D**	**O**	**N**
A	**O**	**B**	**T**	**U**	**S**	**A**	**N**	**G**	**U**	**L**	**O**	**S**

1. Rectas coplanares sin puntos en común.
2. Cuadrilátero cuyos ángulos son todos rectos.
3. Triángulo cuyos ángulos internos son todos agudos.
4. Recta con punto de inicio pero sin punto final (va hacia el infinito).
5. Porción de recta limitada por dos puntos llamados extremos.
6. Angulo cuya medida es 90 grados.
7. Triángulo que tiene un ángulo obtuso.
8. Cuadrilátero cuyos lados son congruentes y sus ángulos son rectos.

Problema No. 1

La siguiente figura consta de nueve cubos pegados:



Usando esta figura como base, ¿Cuál es la menor cantidad de cubitos que faltan para construir un cubo sólido? Justifique su respuesta.

Problema No. 2

Un granjero tiene que conseguir pasar con su barca a una oveja, un lobo y una lechuga hacia la otra orilla del río. Pero en su barca sólo hay **espacio**[4] para él y otra de las tres cosas con lo cual tendrá que ir de un lado a otro y siempre llevando como máximo una cosa. Ten en cuenta que si el lobo se queda sólo con la oveja en una orilla se la comerá y si la oveja se queda con la lechuga se la comerá. ¿Cómo debe ingeniárselas?

[4] En el taller original presentado a los escolares, se colocó la palabra hueco en vez de espacio.

Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación

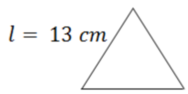
Programa de Licenciatura en Matemáticas

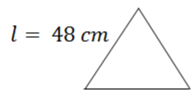
Práctica pedagógica III

Taller 2

Profesor: Anderson Aranda.

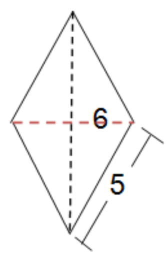
1. Calcula el área de los siguientes triángulos equiláteros:



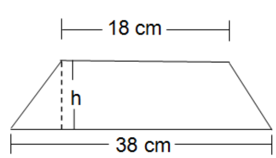


2. Calcular La base de un triángulo de 14 cm^2 de área y 4 cm de altura.

3. Hallar el área de un rombo que tiene 5 cm de lado y 6 cm de diagonal menor.



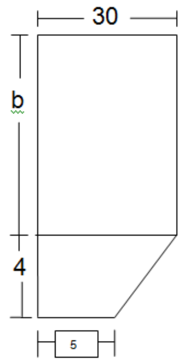
4. Encontrar la altura de un trapecio cuyas bases miden 38 cm y 18 cm y el área es 196.



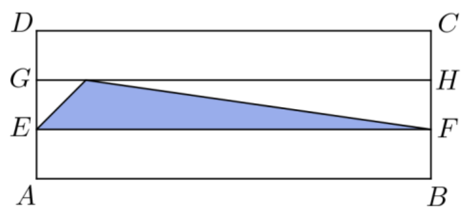
5. Una piscina tiene 210 m^2 de área y está formada por un rectángulo para los adultos y un trapecio para los niños. Observa el dibujo y calcula:

a) El área de cada zona de la piscina.

b) La longitud de la base (en la piscina de los adultos).



6. En la figura, ABCD es un rectángulo. Los lados AD y BC se han dividido en tres partes iguales para trazar los segmentos EF y GH. Sí el área sombreada es 32cm^2, ¿Cuál es el área del rectángulo ABCD?



Facultad de **C**iencias **N**aturales, **E**xactas y de la **E**ducación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

Taller 3

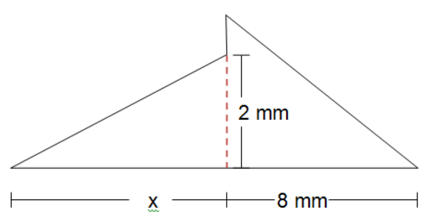
Profesor: Anderson Aranda Romero.

a) El área de un triángulo es 108 cm^2 y su base mide $(144)^{1/2}$ cm. ¿Cuál es la medida de la altura?

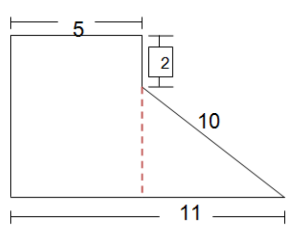
b) El área de un triángulo equilátero es 48 cm^2. Halle el lado del triángulo.

c) ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo si su cateto opuesto mide 1/ (1/3) cm, y su hipotenusa mide 1/(1/5) cm?

d) Encontrar el valor de x y el área de la figura sombreada, sabiendo que el área de la figura total es 65 mm^2.



e) Hallar el área total de la siguiente figura:



Facultad de **C**iencias **N**aturales, **E**xactas y de la **E**ducación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

Taller 4

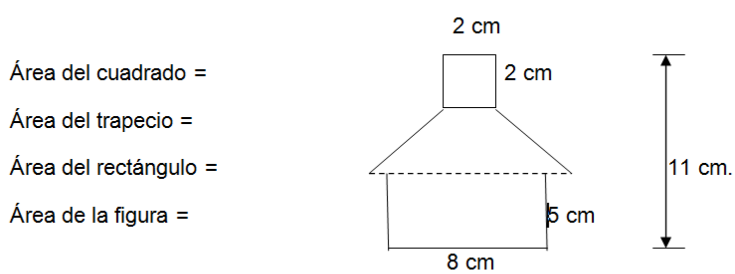
Profesor: Anderson Aranda.

1. Calcula el área de los siguientes triángulos:

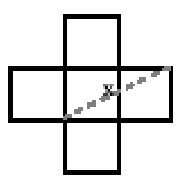
   a. Equilátero de lado 16 cm.

   b. Obtusángulo de base 6 cm y altura 2 cm (dibujar el triángulo).

2. Observa la figura y calcula el área total.



3. Si la longitud *x* es de 6 dm, ¿Cuál es el área de la cruz de la figura formada por cinco cuadrados?



Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

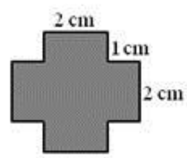
Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

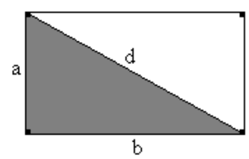
Taller 5

Profesor: **A**nderson Aranda.

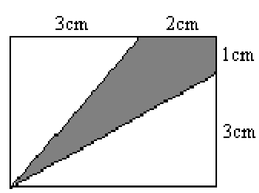
1. El área de la figura es:



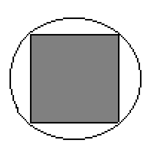
2. Calcular el área de la región sombreada, en donde $d = \sqrt{100}$ cm y $b = (1/64)^{(-1/2)}$ cm.



3. Calcular el área sombreada en la siguiente figura:



4. El diámetro de la circunferencia es 4 cm. Calcular el área de la región sombreada:



Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

Taller 6

Profesor: Anderson Aranda.

1. Sobre una pared dividida en cuadros de 1 m de lado se pinta una letra z, como lo indica la figura 1. ¿Cuál es el área de la figura pintada?

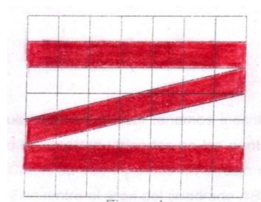
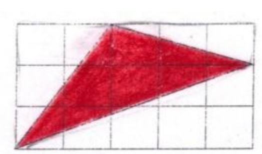
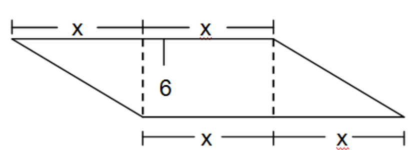


Figura 1

2. El triángulo de la figura ha sido dibujado sobre el rectángulo dividido en cuadros de 1 cm de lado. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?



3. Si el área de la figura es 84 cm^2, ¿Cuál es el valor de x?



4. Sea *ABCD* un cuadrado en el cual tenemos inscrito otro cuadrado *EFGH* cuyos vértices se encuentran ubicados en los puntos medios de los lados del cuadrado *ABCD*. A su vez tenemos un círculo de área ***a*** inscrito en el cuadrado *EFGH*. Encuentre el área del cuadrado *ABCD* en función de ***a.***

Facultad de **C**iencias **N**aturales, **E**xactas y de la **E**ducación

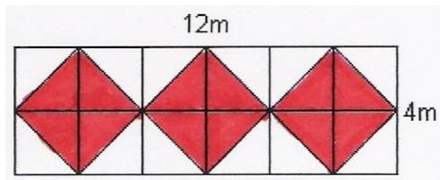
Programa de Licenciatura en Matemáticas

Práctica pedagógica III

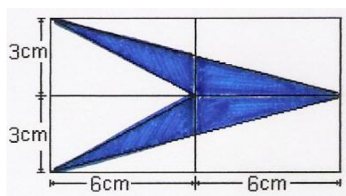
Taller 7

Profesor: **A**nderson Aranda.

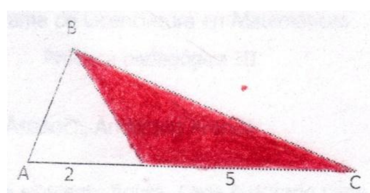
1. Hallar el área sombreada de la siguiente figura (cada cuadrado tiene de lado 2 cm):



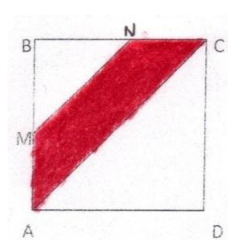
2. Hallar el área de la siguiente figura:



3. Calcular el área de la región sombreada, si el área de ABC es 56 U^2.



4. calcular el área de la siguiente región sombreada (ABCD es un cuadrado; M y N son puntos medios; CD = 8 cm):



Facultad de **C**iencias **N**aturales, **E**xactas y de la **E**ducación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

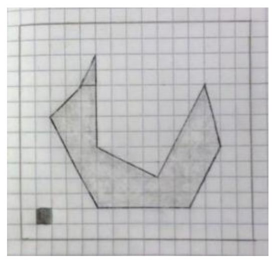
Práctica pedagógica III

Taller 8

Profesor: Anderson Aranda

1. Encuentre el área del triángulo cuyos lados miden 20, 13 y 25 cm.

2. ¿Cuál es el área de la figura sombreada, sabiendo que el área del cuadrado sombreado es de 1 cm^2?



3. Calcula el área del hexágono regular de la figura sabiendo que está inscrito en una circunferencia de radio 6 (Sugerencia: divide la figura en triángulos congruentes).

4. Sobre una malla cuadriculada se ha dibujado una máscara. ¿Cuál es el área en cm^2 de la máscara, si se tiene en cuenta que el área del cuadrado sombreado es 1 cm^2?