ACTIVIDADES COGNITIVAS DE CARÁCTER SEMIÓTICO REALIZADAS POR LOS ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA "ALEJANDRO DE HUMBOLDT" EN LA FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS DE SEGUNDO GRADO.

Andrés Camilo López Dorado.

Andry Rocío Perafán Daza.

Luis Fernando Realpe Gómez.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN.

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

POPAYÁN.

2018.

ACTIVIDADES COGNITIVAS DE CARÁCTER SEMIÓTICO REALIZADAS POR LOS ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA “ALEJANDRO DE HUMBOLDT” EN LA FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS DE SEGUNDO GRADO.

Andrés Camilo López Dorado.

Andry Rocío Perafán Daza.

Luis Fernando Realpe Gómez.

Director de Práctica Pedagógica: Mg. Ángel Hernán Zúñiga Solarte.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN.

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

POPAYÁN.

2018

José Andrés Sánchez Carrasquilla.

Evaluador.

Wilmer Libardo Molina.

Coordinador del programa

Licenciatura en Matemáticas.

Ángel Hernán Zúñiga Solarte.

Director de Práctica Pedagógica.

Popayán 03 de Mayo de 2018.

Agradecimientos.

A Dios por darnos la fortaleza y perseverancia para cumplir nuestras metas.

A cada una de nuestras familias, por formarnos en valores, por su perseverancia y sacrificio para ayudarnos económicamente durante todo nuestro proceso de formación académica e impulsaros a cumplir nuestras metas.

A nuestro director de Practica Pedagógica Mg. Ángel Hernán Zúñiga por si paciencia, dedicación, motivación y criterio, ha sido un privilegio su colaboración y ayuda en este proceso.

A los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Alejandro de Humboldt, quienes nos brindaron su colaboración para realizar nuestro proyecto y a la Institución por darnos la oportunidad de llevar a cabo nuestra práctica docente.

A nuestro profesor titular y evaluador José Andrés Sánchez Carrasquilla, por su compromiso y colaboración durante nuestro proceso práctica pedagógica.

Finalmente a los profesores que al pasar de los años se convirtieron en nuestro ejemplo a seguir.

Resumen.

El presente documento corresponde a la sistematización de la Practica Pedagógica realizada en la Institución Educativa Alejandro de Humboldt (IE-AH) en los grados octavos, la cual se llevó a cabo con la temática de Factorización y bajo la implementación de una herramienta didáctica denominada “Caja de Polinomios”. En esta investigación se mostrara nuestro proceso de docencia y la reflexión que se ha hecho sobre este, referida a las actividades de carácter semiótico utilizadas por los estudiantes en el trabajo matemático, esta reflexión está orientada por una pregunta de investigación que surge al trabajar con los sistemas de representación algebraico y geométrico.

En este sentido, es importante mencionar que en nuestra formación como docentes la Practica Pedagógica es de suma importancia, ya que es un primer acercamiento al aula que nos ayuda a formarnos profesionalmente por ser organizadores de la actividad de formación en matemáticas; así mismo, nos forma como investigadores teniendo en cuenta una mirada diferente respecto a las actividades y acontecimientos que se presentan en el aula con los estudiantes. En este orden de ideas, el presente documento da cuenta de nuestro primer acercamiento hacia lo que es el rol del docente en su quehacer como formador y no menos importante el de investigador de su propia práctica.

Tabla de contenido

Tabla de imágenes.

Presentación

En nuestra formación como Licenciados en Matemáticas atendimos un ciclo de cursos correspondientes a una Práctica Pedagógica, los cuales están articulados unos a otros y distribuidos a través de unas fases; en la primera se realizó un acercamiento a las herramientas con las cuales se iba a hacer la recolección de datos; en la segunda, se hace un reconocimiento de la institución en la cual se va a realizar la docencia directa y se elabora un plan de intervención con una temática; en un tercer momento se hace la intervención directa en el aula por parte de nosotros y culminar con la presentación de este documento de sistematización sobre nuestra práctica.

Así mismo, como estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y futuros docentes debemos tener en cuenta la realidad educativa a la cual nos vamos a enfrentar, donde en gran parte de las instituciones educativas es común concebir las matemáticas como una disciplina netamente abstracta y aburrida, por lo cual muchos estudiantes no muestran interés en ella, más aun cuando en grado octavo se introduce al alumno en el estudio del Álgebra. Por lo anterior se puede decir que hay una ruptura, un antes y un después, ya que para nadie es un secreto que el Álgebra en ocasiones se convierte en un "trauma" para algunos estudiantes.

Adentrándonos un poco en esta rama de las matemáticas encontramos la *Factorización*, que por lo general no goza de una buena reputación ante los estudiantes debido a su tecnicismo, se puede catalogar como de reconocida importancia en este primer acercamiento al Algebra y que corresponde al contenido desarrollado en nuestro proyecto de intervención. Por lo anterior, nos propusimos buscar una manera de enseñar dichos conceptos de manera integral. Por tal razón, surgió la necesidad de implementar una herramienta didáctica denominada: *"La Caja de Polinomios"* para trabajar la *Factorización* desde una mirada lúdica, todo con el fin de hacer un poco más ameno el proceso de enseñanza con los estudiantes de grado octavo de la IE-AH.

Del mismo modo, la caja de polinomios nos permitió adentrarnos hacia un aspecto investigativo teniendo en cuenta unos referentes conceptuales, bajo los cuales se planteó una pregunta investigativa referida a las actividades cognitivas que llevan a cabo los estudiantes cuando factorizan polinomios, mediante el sistema de representación algebraico y geométrico.

En este sentido, el presente documento hace referencia a la sistematización de nuestra Práctica Pedagógica, donde en el primer capítulo está plasmado lo concerniente a nuestra docencia en la institución educativa, la cual inicio con un acercamiento a la misma, seguida por una etapa de inmersión que nos permitió plantear un Proyecto de Intervención Pedagógica en el Aula con la temática de factorización, luego se presenta la fase de nuestra docencia directa y se culmina con algunos aprendizajes significativos, que como maestros en formación obtuvimos de este proceso.

El segundo capítulo está referido a la reflexión en la docencia, el cual inicia con la presentación de la pregunta de investigación, después se introducen los referentes conceptuales que se tuvieron en cuenta para lograr analizar los registros obtenidos del trabajo en el aula, con el fin de dar respuesta a nuestra pregunta de investigación mediante el análisis de los registros obtenidos.

Finalmente, se presenta un capítulo de conclusiones y recomendaciones a las que llegamos en el transcurso de nuestra docencia y que pueden resultar útiles para nuevos interesados en seguir esta línea de trabajo.

Docencia en la Institución Educativa Alejandro de Humboldt de Popayán.

Acercamiento a la realidad educativa

El proceso de docencia inicio con una visita a la IE-AH, en la cual se conoció su infraestructura y se obtuvieron algunos documentos institucionales que nos permitieron familiarizarnos con aspectos de carácter curricular, metodológico y social. En lo referido a lo curricular y metodológico, destacamos que la institución educativa cuenta con una intensidad horaria de cuatro horas semanales para el área de matemáticas, un enfoque socio crítico, un modelo Pedagógico Integrado y que posee una modalidad pedagógica académica; así mismo, la institución establece cuatro periodos en el año escolar, para analizar los avances obtenidos por los estudiantes respecto a los logros establecidos en las diferentes áreas de formación. La evaluación se realiza en el transcurso del periodo permitiendo hacer un seguimiento a los estudiantes y realizando actividades de recuperación con aquellos alumnos que presentan dificultad en la consecución de algunos logros.

En cuanto a lo sociodemográfico, la institución recibe población estudiantil flotante perteneciente en su mayoría al estrato socioeconómico uno y dos, además unos pocos al estrato tres. La mayoría de los estudiantes se encuentran en situación de vulnerabilidad originada por: la violencia, el desplazamiento, el desempleo, las condiciones económicas precarias, los conflictos urbanos originados por las pandillas, necesidades básicas insatisfechas, el comercio y consumo de estupefacientes, la ausencia de prácticas dialógicas en sus núcleos familiares, entre otros.

En la segunda visita a la institución el día 14 de febrero de 2017 se realizó una reunión con los profesores pertenecientes al Departamento de Matemáticas y los directores de la práctica pedagógica, en ella se precisaron algunos aspectos relacionados con nuestra intervención pedagógica tales como: elección de los grados escolares – de sexto a decimo - por parte de los practicantes, correspondiéndole a cada uno de ellos un curso, cabe aclarar que el grado once debido a circunstancias curriculares no estaba disponible, después se definieron los periodos de intervención en el aula, en nuestro caso - Andry Rocío Perafán Daza en el grado 8°1, Andrés Camilo López Dorado en 8°2 y Luis Fernando Realpe Gómez en 8°3 - decidimos trabajar los contenidos matemáticos establecidos en el plan de estudios correspondientes al tercer periodo para los grupos de grado octavo.

Inmersión

El proceso de inmersión es una etapa de la docencia en la cual como practicantes tenemos un acercamiento al aula de clase como observadores, en este orden de ideas, vale la pena mencionar algunos de los fines de dicho proceso, que se llevan a cabo dentro del contexto educativo planteados por Hernández (2014) quien nos dice:

- Decidir en qué lugares específicos se recolectarán los datos y validar si la muestra o unidades se mantienen. Esta labor, a diferencia del proceso cuantitativo, no es secuencial, sino que va ocurriendo y, de hecho, la recolección de datos y el análisis ya se iniciaron.
- Observar lo que ocurre en el ambiente (desde lo más ordinario hasta cualquier suceso inusual o importante). Aspectos explícitos e implícitos, sin imponer puntos de vista y tratando, en la medida de lo posible, de evitar el desconcierto o interrupción de actividades de las personas. Tal observación es holística o integral y toma en cuenta el contexto social.
- Detectar procesos sociales fundamentales en el ambiente y determinar cómo operan.
- Tomar notas y empezar a generar datos en forma de apuntes, mapas, esquemas, cuadros, diagramas y fotografías, así como recabar objetos y artefactos.
- Reflexionar sobre el propio papel, las alteraciones que provoca nuestra presencia y las vivencias, que también son una fuente de datos (p. 368).

Las distintas finalidades establecidas para el proceso de inmersión, que inició el día 20 de febrero de 2017, permitieron que se hicieran diversos registros y se recolectaran distintas evidencias.

Del mismo modo, el proceso de inmersión permitió hacer un acercamiento a la institución educativa, donde se conocieron políticas académicas institucionales que orientan la gestión de conocimiento al interior del aula, además, este proceso tenía el propósito de conocer con mayor profundidad la realidad a la cual nos íbamos a enfrentar cuando realizáramos nuestra docencia directa, por lo cual se hizo un acompañamiento de dos horas semanales al docente titular José Andrés Sánchez Carrasquilla en el desarrollo de las temáticas del segundo periodo académico, como observadores de las situaciones presentadas y a la vez como apoyo para los estudiantes dándoles algún tipo de asesoría en medio de la clase sobre los conceptos y actividades que se iban realizando.

Así mismo, en este acompañamiento nos dimos cuenta que en cada curso el número de estudiantes era en promedio de treinta y dos, además, pudimos realizar la siguiente caracterización: en su mayoría pertenecen al estrato socioeconómico uno y dos, algunos eran víctimas del desplazamiento y unos pocos hacían parte de población flotante.

En cuanto a lo académico, algunos estudiantes no mostraban mucho interés por el área y otros participaban de manera activa en la clase. Además, pudimos observar que algunas de las confusiones más frecuentes en ellos, se presentaban al momento de realizar operaciones de potenciación y radicación, esto debido a que no reconocían las propiedades adecuadas que podrían aplicar, por otra parte se vieron dificultades cuando hacían operaciones con números negativos. En la imagen presentada a continuación podemos ver los procedimientos realizados por uno de los estudiantes al operar potencias:

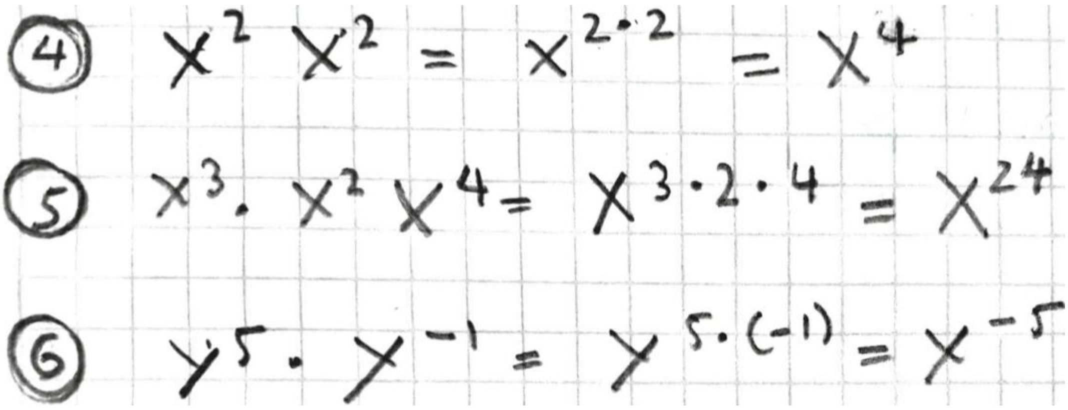


Imagen 1: Operaciones con potencias.

En este caso vemos que el estudiante no aplicó la propiedad del producto de potencias con igual base, la cual establece que la potencia producto tiene la misma base y su exponente es la suma de los exponentes de las potencias que son sus factores.

También, en este primer acercamiento al aula como observadores "…se nos dio ciertas recomendaciones a tener en cuenta en el salón por parte del profesor titular, tales como el de tener siempre el buen manejo de los estudiantes, trabajar con talleres en clase y en lo posible no dejar tareas para la casa y llevar varios ejemplos para mostrarles a los estudiantes de cada concepto que se les oriente" (Perafán- DC7, 2017).

De igual manera, este proceso de inmersión nos permitió saber de algunos estudiantes con necesidades educativas especiales de carácter cognitivo, aquí es importante mencionar que el Proyecto Educativo Institucional (P.E.I., 2016) hace énfasis en la atención a este tipo de población, en nuestro caso se encontraron las siguientes particularidades:

En el grupo 8°-1 había una estudiante diagnosticada con un trastorno psicológico, que en ocasiones tomaba una posición retadora ante ciertas situaciones que se daban en el proceso de enseñanza al interior del aula.

En los grupos 8°-2 y 8°-3 había dos estudiantes diagnosticados con retardo mental leve; el caso más relevante era el de la estudiante del grado 8°-2, quien poseía un ritmo de aprendizaje más lento que los demás, lo que implicaba desarrollar un trabajo especial con ella con el fin de que asimilara lo esencial de los conceptos (López Dorado, Perafan Daza, & Realpe Gómez., 2017). Vale la pena mencionar, que este trabajo estuvo amparado bajo el decreto 1421 de 2017 del Ministerio de Educación Nacional (MEN), que hace referencia al proceso que se debe desarrollar con los estudiantes que tienen estas características (MEN, 2017); esto se detallara en la metodología.

Gracias al conocimiento detallado de la realidad educativa a la que nos íbamos a enfrentar, se genera el Proyecto de Intervención Pedagógica en el Aula (PIPA), sobre el cual se basaría nuestra docencia directa. En este proyecto se enmarcan las generalidades de la institución, las condiciones curriculares y metodológicas sobre las cuales se iba a trabajar, lo relacionado con el proceso de inmersión y cómo estaría configurada la intervención en el aula con las diferentes actividades a realizar anexadas en el portafolio del documento.

La inmersión en dirección al perfeccionamiento del PIPA nos permitió planear el tipo de actividades a desarrollar y estimar el tiempo promedio para el desarrollo de las mismas. Dicho proceso también nos permitió un acercamiento estrecho o detallado al aula de clase, donde se logró llegar a algunos acuerdos con el profesor titular respecto a la temática que se iba a trabajar, que para nuestro caso fue la enseñanza de los primeros ocho métodos de factorización, del mismo modo, se tomó una decisión sobre las fechas en las cuales se ejecutaría nuestra docencia directa -tercer periodo del año lectivo 2017-.

Además, las diversas actividades respecto a la temática de factorización plasmadas en los planes de clase plasmadas en el PIPA, se hicieron con el fin de que los estudiantes realizarán operaciones cognitivas de formación, tratamiento y conversión en los sistemas de representación algebraico y geométrico, por lo anterior, se plantearon talleres en los cuales ellos debían moverse entre estos dos sistemas de representación, para esto se incluyó una herramienta didáctica denominada “Caja de Polinomios” en la cual es posible representar geométricamente mediante áreas los polinomios y su factorización.

La herramienta didáctica anteriormente mencionada, se utilizó con el fin de presentarle a los estudiantes el estudio de algunos casos de factorización de expresiones algebraicas de una manera distinta a la tradicional, es decir, a través de la caja de polinomios se trabajó la factorización de una manera gráfica por medio del cálculo de áreas, lo que nos facilitó observar y reflexionar sobre las distintas posibilidades y relaciones que se establecen entre las representaciones algebraicas y geométricas de una misma expresión simbólica, actividad cognitiva que tiene un carácter semiótico.

Docencia Directa

La docencia directa como ejecución de lo planeado, nos señaló la necesidad de realizar algunas modificaciones prácticas en las actividades planteadas en el PIPA, pues los tiempos destinados para algunas de ellas no fueron suficientes para su culminación.

Respecto a los talleres que se plantearon con la caja de polinomios, inicialmente se diseñó el mismo taller para todos los grupos, pero analizando la posibilidad de que los estudiantes copiaran la figura del primero que terminara, surgió otro de los cambios que se realizó al PIPA, diseñando un taller distinto para cada uno de los grupos, con ejercicios que tenían el mismo grado de dificultad y que buscaban que los estudiantes realizarán el proceso de llevar un polinomio de su representación algebraica a la geométrica.

De igual manera, se incluyeron actividades de recuperación que no se habían incorporado en el PIPA, en las cuales se ofrecían nuevas oportunidades a los estudiantes que a lo largo de nuestra intervención tuvieron dificultades y no alcanzaron los logros establecidos. Dicha oportunidad consistía en el desarrollo de un taller en el cual se incluyeron todos los contenidos temáticos que se trabajaron respecto a la Factorización. Además, se hizo un acompañamiento y seguimiento personalizado a los estudiantes que tenían mayor dificultad, es decir, se trabajó con ellos cada uno de los ejercicios sobre la temática en la cual tenían mayores inconvenientes y con esto se mejoraba la calificación inicial asignada a esa actividad.

Además de los talleres algebraicos y los que se debían desarrollar con la caja de polinomios, se incluyeron tres pruebas escritas las cuales inicialmente no estaban consideradas, esto por sugerencia del profesor titular, con el fin de cumplir con lo establecido en el sistema de evaluación institucional incluido en el Plan Anual de Matemáticas, como lo plantea Tobar, *et al.* (2010) "en el aspecto de evaluación se tendrá en cuenta los trabajos y actividades en grupo e individuales - orales, escritos, actividades de desempeño, participación, aportes, etc. -" (p.12). Así mismo, en los criterios de evaluación institucional se consideraba que se debía evaluar continuamente al estudiante en diferentes aspectos. Tobar, *et al.* (2010) Afirma que:

> Comportamientos que muestren su trabajo cotidiano: su actitud, su dedicación, su interés, su participación, su habilidad para asimilar y comprender informaciones y procedimientos, su refinamiento progresivo en los métodos para conocer, para analizar, crear y resolver problemas; y su inventiva o tendencia a buscar nuevos métodos o respuestas para las situaciones dadas. (p.13)

Respecto a la metodología también surgieron algunos cambios pues se debió incluir un componente teórico por cada método de factorización, es decir, fue necesario que los estudiantes plasmaran en sus cuadernos apuntes muy precisos sobre la teórica matemática de cada uno de ellos. Lo anterior no quiere decir que desde el principio no se diera una buena orientación en este aspecto, simplemente se quería que en los cuadernos de los estudiantes hubiera una información más detallada de los procesos.

También es importe decir que para el trabajo realizado con los estudiantes con necesidades educativas especiales, particularmente con la estudiante del grado 8-2, que estaba diagnosticada con retardo mental leve, se tuvo en cuenta el Decreto 1421 de 2017, el cual demanda que para atender a estudiantes con necesidades educativas especiales debe realizarse un ajuste curricular, para este caso el ajuste curricular que se realizo fue con la ayuda del profesor titular Andrés Sánchez quien atendió a esta estudiante, acompañándola en el desarrollo de los talleres algebraicos y con la caja de polinomios, pues fue la única que trabajo de manera individual. Así mismo, las pruebas escritas que se le realizaron eran distintas a la de los demás alumnos, pues los ejercicios que se le proponían correspondían a su nivel cognitivo.

Por otra parte, retomaremos algunos de los hechos destacados en el trascurso de nuestra docencia directa, teniendo en cuenta el orden temático que se llevó a cabo:

- Inicialmente se desarrolló un taller de repaso que incluía propiedades de potenciación, cuyo objetivo era ambientar al estudiante con elementos importantes de la matemática que necesitaría al momento de factorizar. Luego se trabajaron las siguientes temáticas correspondientes a la factorización: factor común, factor común por agrupación, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto por adicción y sustracción, trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, factorización por combinación de casos.
- En cuanto a *factor común* y *factor común por agrupación*, que fueron los dos primeros métodos de factorización que se trabajaron, destacamos que no tuvieron mayor inconveniente cuando se trataba de encontrar lo común en los términos que componían el polinomio, sin embargo, se presentó una confusión cuando tuvieron que calcular el máximo común divisor de la parte numérica (ver imagen 2), además, al extraer la parte literal no tenían claridad en que se debía tomar el termino común con menor exponente, así mismo, al momento de agrupar para extraer lo común, no lo hacían de forma correcta.

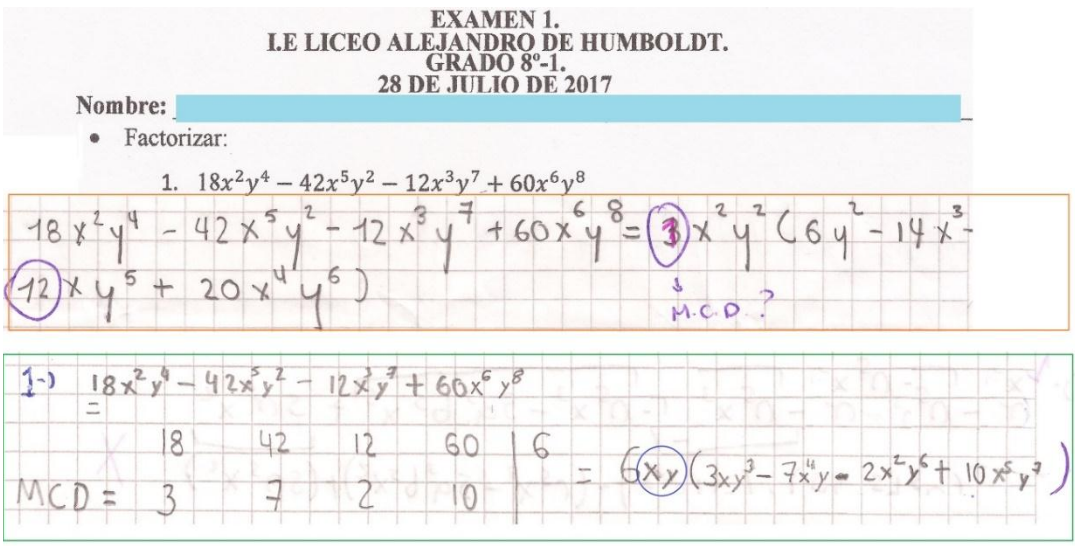


Imagen 2: Confusiones en factor común.

- Después de ver los dos primeros casos de factorización y realizar las actividades planteadas para esta temática, se hizo la primera presentación de la caja de polinomios, herramienta con la cual se pretendía que los estudiantes factorizaran polinomios de grado dos mediante el uso de áreas en el sistema geométrico. En la primera sesión se explicó en qué consistía el uso de la caja y como se debían disponer las fichas para lograr formar la figura geométrica que representara el polinomio a factorizar -un cuadrado o rectángulo- según el polinomio inicial. Para esto se realizaron unas fichas adhesivas que se podían pegar y despegar del tablero, esto permitió que los estudiantes entendieran el manejo de la caja de polinomios al momento de factorizar y las reglas que se debían tener en cuenta para su respectivo manejo.

Imagen 3: Presentación caja de polinomios.

- Cuando se trabajó el caso de trinomio cuadrado perfecto, la gran mayoría de los estudiantes pudo extraer la raíz cuadrada del primer y tercer término, pero algunos alumnos confundieron la raíz cuadrada con la mitad del término (imagen 4).

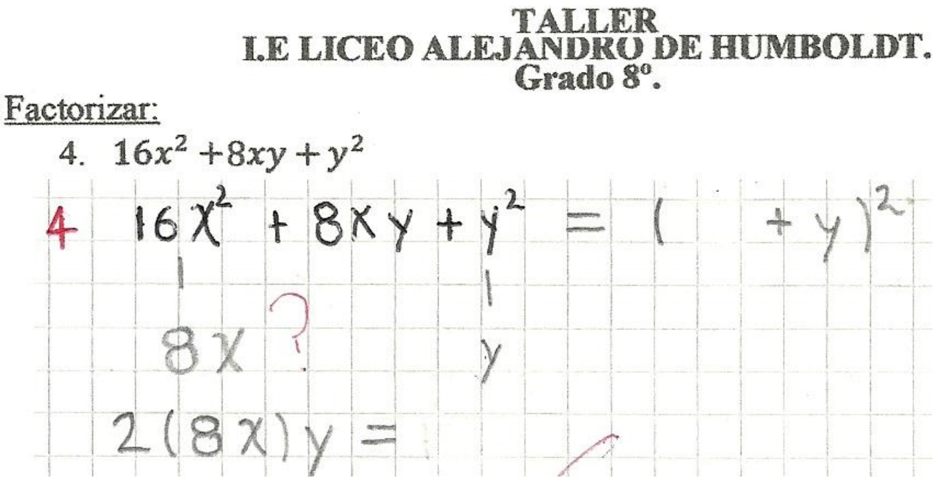
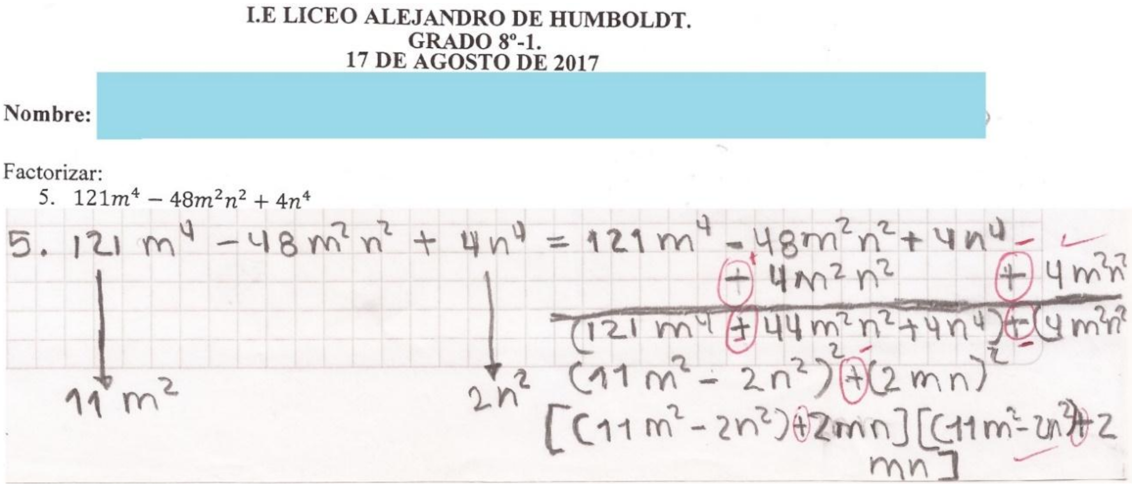


Imagen 4: Confusiones al extraer raíz cuadrada.

- Uno de los casos de factorización en el cual los estudiantes tuvieron mayores inconvenientes, fue en el de trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción, ya que no eran conscientes de que al sumar y restar una misma expresión algebraica al polinomio este no se alteraba (ver imagen 5). No obstante, fue muy interesante que después de realizar algunos ejercicios, ciertos estudiantes llegaron a la conclusión de que lo que se sumaba y restaba debía ser una expresión que tuviera raíz cuadrada exacta - cuadrado perfecto - , ya que en el proceso de factorizar un polinomio de este tipo siempre se debía obtener una diferencia de cuadrados, para finalmente llegar a la factorización del polinomio inicial.


I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.
GRADO 8º-1.
17 DE AGOSTO DE 2017

Nombre:

Factorizar:

5. $121m^4 - 48m^2n^2 + 4n^4$

$5.\ 121m^4 - 48m^2n^2 + 4n^4 = 121m^4 - 48m^2n^2 + 4n^4 -$

$+ 4m^2n^2 \quad + 4m^2n^2$

$(121m^4 + 44m^2n^2 + 4n^4) - (4m^2n^2)$

$11m^2 \qquad 2n^2$

$(11m^2 - 2n^2)^2 + (2mn)^2$

$[(11m^2 - 2n^2) + 2mn][(11m^2 - 2n^2) + 2mn]$

Imagen 5: Sumar y restar un mismo término.

- Respecto al trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ los estudiantes no tuvieron mayor problema en identificar el coeficiente del primer término del polinomio que iba a ser utilizado para multiplicarlo y dividirlo. Lo que causo dificultad fue realizar el producto entre el coeficiente y el polinomio para llevarlo a la forma $x^2 + bx + c$ para ser factorizado.
- Además, cuando se trabajó la temática de factorización de polinomios combinando casos, en donde los estudiantes debían factorizar un polinomio usando dos o más casos ya estudiados, una de las cosas que observamos fue que la mayor dificultad de ellos, radicaba en la incertidumbre de no saber que método de factorización era el adecuado para factorizar el polinomio dado.
- En relación al trabajo con la caja de polinomios, cabe mencionar que se realizaron actividades respecto a cada una de las temáticas de factorización antes mencionadas, excepto la de trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción, ya que los polinomios de este tipo tenían grado mayor que dos. Además, se pudo observar que los estudiantes sentían más afinidad al trabajar en el sistema de representación geométrico

que algebraico, ya que participaron de manera activa en el desarrollo de los talleres con la caja de polinomios y no tuvieron mayores dificultades para formar el cuadrado o rectángulo que representaba la factorización del polinomio inicial.

- Respecto a la calificación de los talleres y de las pruebas escritas se tiene en cuenta el modelo planteado por la institución educativa el cual sugiere que: "J" equivale a reprobar, "B" es básico, "A" alto y "S" superior. Estos rangos de calificación por sugerencia del profesor titular se establecieron de la siguiente manera: de 0 a 3.4 seria "J", de 3.5 a 3.9 "B", de 4.0 a 4.4 "A" y de 4.5 a 5 "S". Estos rangos numéricos se aplican únicamente para los cursos de matemáticas del profesor Andrés, ya que en otras áreas estos eran distintos, lo anterior se hacía con el fin de que el estudiante se esforzara un poco más y no solamente lo hiciera por aprobar la materia.

  Los datos cuantitativos eran ingresados a un software diseñado por el docente titular, en el cual se promediaban las notas y se le asignaba la letra correspondiente, además arrojaba, en una casilla ubicada en la parte inferior, cuantos estudiantes iban perdiendo la materia. Al final el docente titular utilizo los rangos numéricos establecidos por la institución - de 0 a 2.9 "J", de 3 a 3.5 "B", de 3.6 a 4.0 "A", de 4.1 a 5 "S" - lo cual implico que muchos estudiantes que iban perdiendo la materia por encontrarse en el rango de 3 a 3,4 aprobaran la materia.

Estudiante	Notas									Definitiva	Valoración
	Taller 1.	Examen.	Taller C.P.	Taller 2	Taller C.P 2	Examen 2.	Taller 3.	Taller.C.P 3	Examen 3.		
AYLEEN THALIANA ANGULO DIAZ	4,8	3,4	3,5	4,5	4	3,5	4	4	2	3,74	B
VALENTINA AROCA MORALES	2,5	3	3,8	4,5	3	4,8	3,5	4	3,2	3,59	B
GIOVANNI BOLAÑOS HOYOS	3,8	3,2	3,8	4,4	5	4,1	2,5	4	3,1	3,77	B
RONAL ARBEY CUCHUMBE IMBACHI	3,8	2,5	4,1	3,5	3,5	3	3,5	3,5	0	3,04	J
MARCEL YESID DAVID OHMEN	2	2,5	3,5	0	3	1	1,5	4	1,5	2,11	J
PAMELA GARCIA CARABALI	4,2	2,7	4,1	5	3	3,7	4	5	3,3	3,89	B
LANDER BREINNER GOLONDRINO LOF	3	2	4,5	4,5	4	1,5	5	4	2	3,39	J
JUAN SEBASTIAN GONZALEZ PARRA	4,5	3	4	5	4,5	4,4	4	5	2,7	4,12	A
ARLEX DAVID GUAITARILLA GOLONDR	2	2	3,2	4	5	1,5	2,5	5	2	3,02	J
MONICA HERNANDEZ BOLAÑOS	2,5	1	4,1	4,5	3,5	2	4,5	3,5	0	2,84	J
NICOLAS JAYA AYALA	4,7	2,8	4	3,8	4,5	1,5	3,5	5	2,7	3,61	B
JUAN DIEGO LEDEZMA CHATE	3,9	2,5	5	4,4	5	4	2,5	3,5	2,4	3,69	B
CRISTIAN FERNANDO MARTINEZ ÑUS	2	1	3,2	4	5	3,2	2,5	5	1,8	3,08	J
JUAN MANUEL MEJIA TROCHEZ	5	5	3,5	3,5	3	3	5	4	3,5	3,94	B
JILARY KATHERINE MUÑOZ MONJE	4,8	4,3	3,8	4,5	5	4,8	5	4	3,3	4,39	A
NICOL ALEXIS MUÑOZ MOSQUERA	3	2	4,1	4,5	3	2,4	5	5	2	3,44	J
HASLY YUSIETH NARVAEZ MONTILLA	5	3,3	3,2	5	5	5	5	5	3,2	4,41	A
EDUAR NUÑEZ PAZ	3,8	1,7	3,5	4,3	4	1	3	4	2	3,03	J
DEAR JOHNSSON ORTEGA CHILITO	4,5	3,9	5	3,5	5	4,8	4	3,5	2,8	4,11	A
KATHERIN ANDREA PEÑA MARTINEZ	3,8	3,2	4,5	4,4	0	4,1	3	4	3,5	3,39	J
ANGIE DANIELA PEREZ JOAQUI	3,8	3,8	3,8	4,3	3	4	3	4	2	3,52	B
JULIANA ANDREA PLAZA MUÑOZ	5	4,4	5	5	5	5	5	0	4,5	4,32	A
CARLOS JAVIER QUILINDO PIAMBA	3,8	3	4,1	4,4	3	1,2	3,5	5	1,8	3,31	J
BRAYAN STIVEN RAMIREZ DOMINGUE	3	4	3,2	5	5	5	4,2	5	4,8	4,36	A
KEVIN ENRIQUE RIASCOS PALACIOS	2	1,5	5	5	5	4,6	4,2	3,5	4	3,87	B
DIANA FERNANDA ROJAS CATUCHE	4,2	3,8	4,1	4,4	3,5	4,8	3	3,5	4	3,92	B
ANGIE NATALIA RUIZ ORTIZ	3,8	3,4	3,5	5	3	3	4,5	4	3,3	3,72	B
JHON JAIRO SABI RODRIGUEZ	3,5	3,2	4	5	4,5	5	4.2	5	3,9	4,26	A
ANYI TATIANA SANCHEZ CASAMACHIN	3	3	3,8	5	3	1,5	3	4	2	3,14	J
ILBA NOVER TABARES ARENAS	0	4	3,8	5	5	4	0	0	4	2,87	J
JHEISSON CAMILO URRIAGO CASTELLA	5	3,4	0	5	4	4,8	5	4	4,8	4,00	A
KAREN FERNANDA YACE MOSQUERA	3	3	4,5	5	4	3	3	4	2	3,50	B

Imagen 6: Ejemplo plantilla de notas.

Por otro lado, se hizo uso de clases magistrales para orientar parte de la temática; se inició dictando la teoría de cada método de factorización, esto se hacía con el fin de tener un mayor control en la disciplina de los estudiantes y acaparar su atención; después, se orientaban algunos ejemplos en el tablero y se hacían preguntas a los alumnos, finalmente se dejaban ejercicios para que los desarrollarán en el aula, esto con el propósito de que nos hicieran preguntas acerca de las posibles dudas que tenían, lo que permitía saber si era necesario hacer más ejemplos de la temática y a la vez ver los obstáculos que los estudiantes tenían para irlos sobrepasando poco a poco.

Imagen 7: Orientación teórica.

En la presentación de la herramienta - Caja de Polinomios - se les oriento a los estudiantes acerca de su manejo y las reglas a tener en cuenta para su debida utilización, mediante unas fichas elaboradas convenientemente para que los estudiantes pudieran visualizarlas. Además, se les explico que la caja de polinomios constaba de un tablero y tres tipos de fichas – la primera un cuadrado de lado x y rotulada con x^2 que representaba su área, la segunda un rectángulo de lados x y una unidad de longitud, rotulada con x que denotaba su área y la ultima un cuadrado de lado una unidad de longitud, rotulado con 1 expresando su área - mediante estas se pretendió formar un cuadrado o rectángulo teniendo en cuenta las reglas de uso.

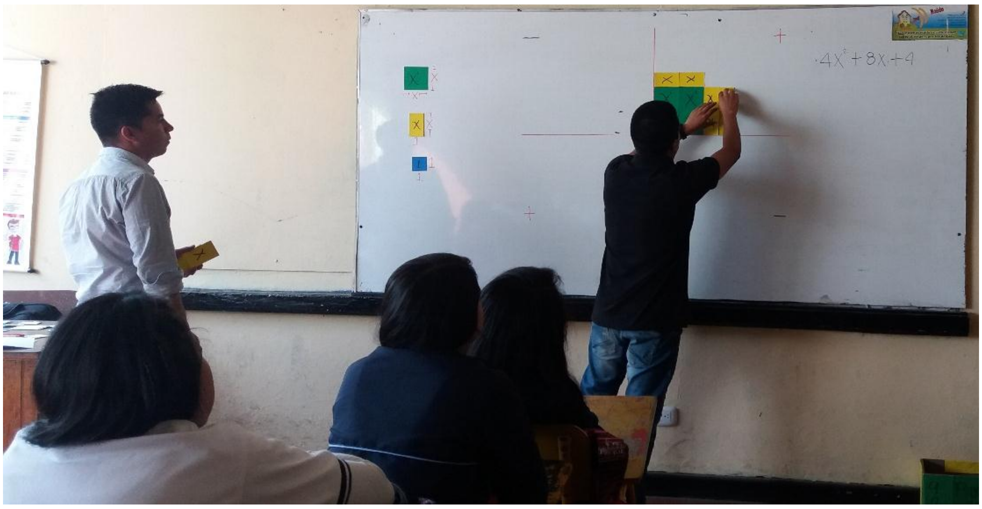


Imagen 8: Presentación caja de polinomios.

Después de la inducción realizada sobre el manejo de la caja de polinomios, se les entrego a cada grupo de estudiantes una caja para trabajar, aquí es importante mencionar que en su primer acercamiento hacia herramienta, se evidenció que aún no eran conscientes sobre el uso correcto, pues no veían la relación entre la representación algebraica y geométrica del polinomio y su respectiva factorización mediante áreas de cuadrados o rectángulos en la caja de polinomios, aunque como ya se mencionó, se les había dado una explicación y las reglas de manejo de la herramienta.

Imagen 9: Estudiantes con la caja de polinomios.

El trabajo con la caja de polinomios fomento entre los estudiantes el trabajo en grupo colaborativo, realizando tareas simultáneamente, por ejemplo, mientras unos estudiantes armaban con las fichas los rectángulos en la caja de polinomios, otros dibujan lo realizado en una hoja de cuadernillo y otros escribían la factorización solicitada. Además, se observó un decidido compromiso en la mayoría de los grupos para trabajar con la caja de polinomios porque además de repartirse roles o tareas específicas, se discutía lo realizado en conjunto con la finalidad de alcanzar la meta establecida.

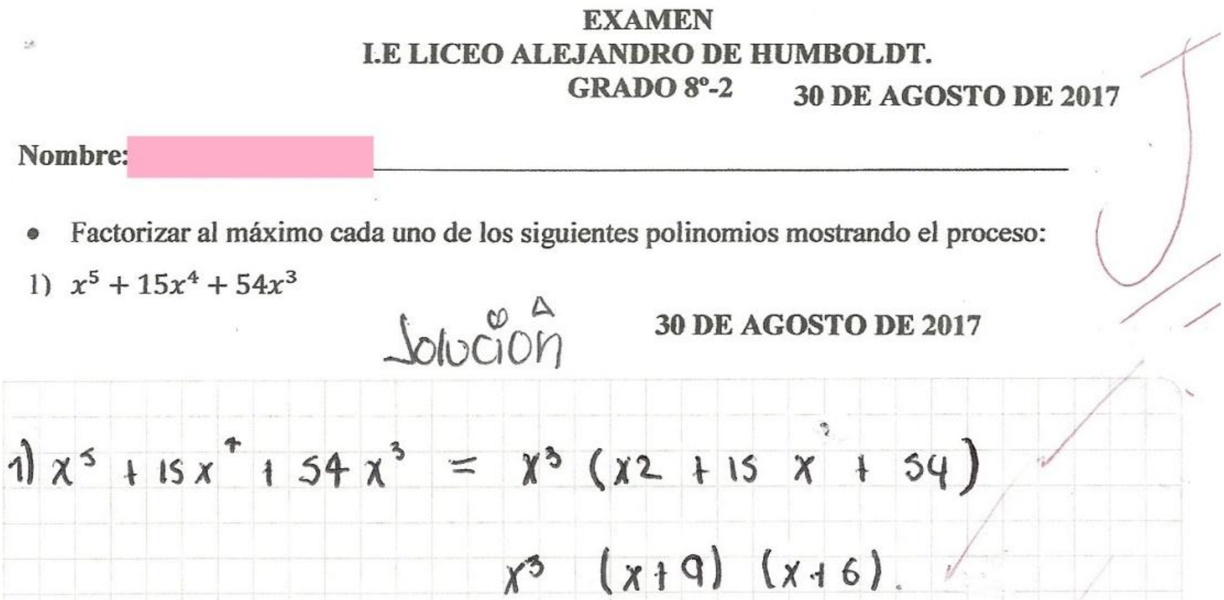
Imagen 10: Trabajo colaborativo.

Haciendo un paralelo entre los distintos desempeños de los estudiantes al desarrollar las actividades propuestas en el aula, ejecutadas a través de diversos talleres escritos, evaluaciones y con la caja de polinomios, se pudo observar una situación característica en nuestro proceso de docencia directa: mientras algunos estudiantes se desempeñaron mejor a la hora de factorizar mediante la caja de polinomios, otros se identificaron mejor con el proceso algebraico y otra parte de los alumnos se desempeñó bien, tanto con la caja de polinomios como con el proceso algebraico; dicha situación se hizo evidente cuando ellos resolvían los talleres propuestos en clase con la caja de polinomios y los talleres o exámenes escritos.

A Continuación, se presentan algunos casos particulares de estudiantes que se ajustan a lo anteriormente mencionado:

ACA- 8°2 era una de las estudiantes que se caracterizaba por realizar procesos de factorización mediante la caja de polinomios, sin embargo, al realizarlas acudiendo únicamente a la representación algebraica no se desempeñaba muy bien.

En seguida se expone parte de una prueba escrita y de un taller de factorización realizado por la estudiante mencionada utilizando la caja de polinomios, donde se puede evidenciar un mejor trabajo con la herramienta, no obstante, es importante precisar que los talleres se realizaban en grupos, mientras que las pruebas escritas se realizaban individualmente:



EXAMEN
I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.
GRADO 8°-2 **30 DE AGOSTO DE 2017**

Nombre: [redacted]

- **Factorizar al máximo cada uno de los siguientes polinomios mostrando el proceso:**

1) $x^5 + 15x^4 + 54x^3$

Solución **30 DE AGOSTO DE 2017**

1) $x^5 + 15x^4 + 54x^3 = x^3(x^2 + 15x + 54)$

$x^3 (x+9)(x+6)$.

Imagen 11: Examen estudiante 8°2.

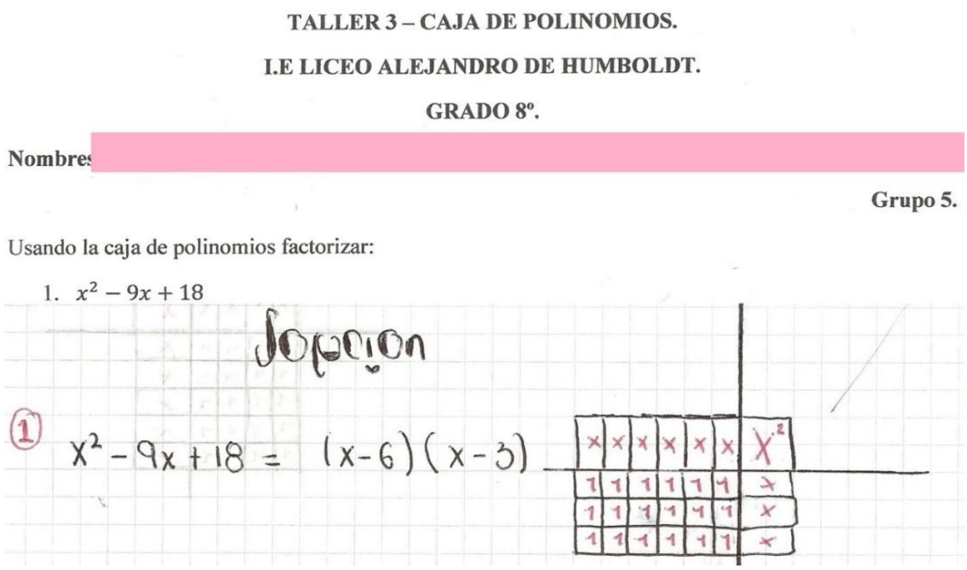


Imagen 12: Taller 3 caja de polinomios de 8°2.

En el registro anterior se observa que la estudiante durante la presentación de la prueba escrita, tan solo resolvió uno de los cinco ejercicios propuestos; sin embargo, cuando trabajó con la caja de polinomios logro un mejor desempeño, puesto que se le facilitaba realizar las factorizaciones mediante la representación geométrica del polinomio.

También es importante referirse a los estudiantes que se destacaban tanto con la caja de polinomios, como algebraicamente:

El estudiante MA- 8°2, se caracterizaba por factorizar polinomios de manera eficaz con la caja de polinomios y algebraicamente. A continuación, se presenta parte una de sus pruebas escritas y de un taller de factorización utilizando la caja de polinomios:

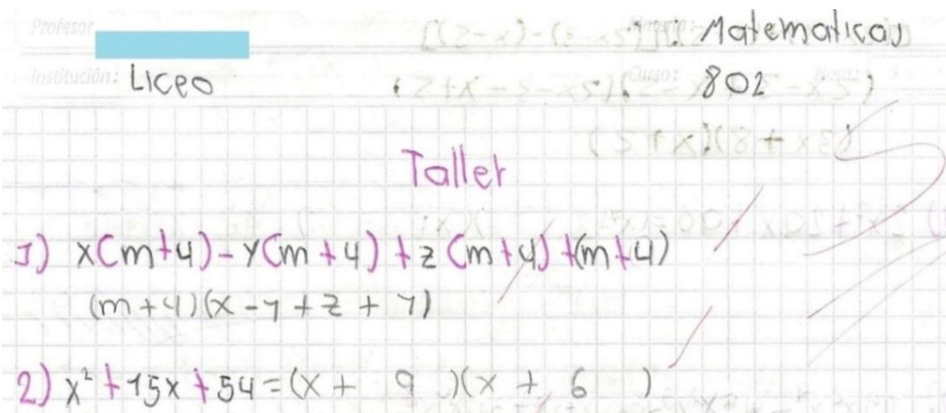


Imagen 13: Taller escrito de 8°2.

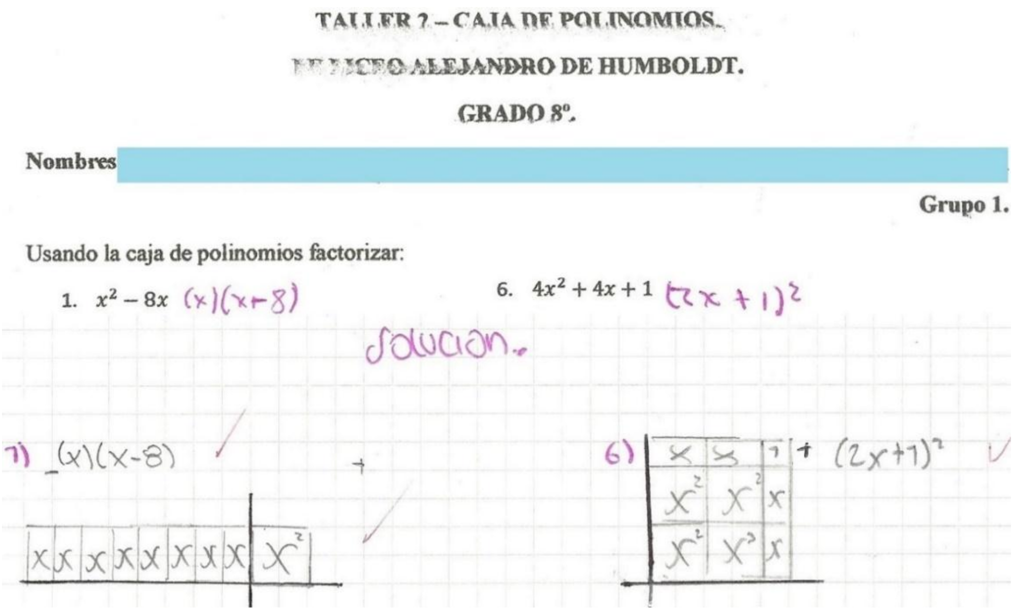
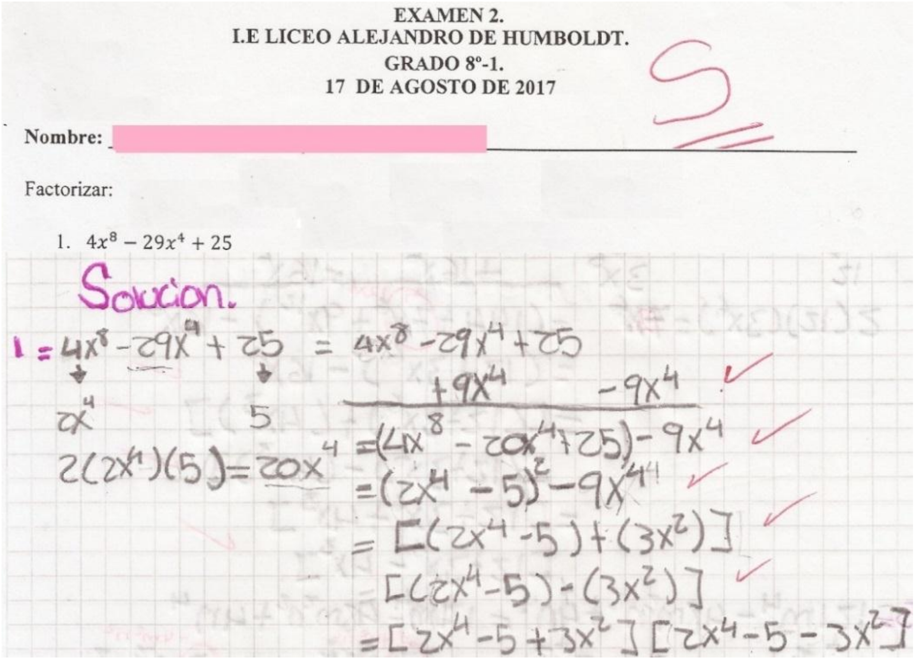


Imagen 14: Taller 2 caja de polinomios de 8°2.

Con lo anterior se puede evidenciar que los estudiantes tienen distintos estilos de trabajo, es decir, se pueden catalogar entre quienes se desempeñaban de una mejor manera con la caja de polinomios, que con los procesos algebraicos, por otra parte, quienes se destacaron muy bien, independientemente del sistema de representación que se utilizara.

Otra de las situaciones que se presentó fue el de la estudiante JKMM- 8°1, quien en varias ocasiones mencionó que no le gustaba la metodología de desarrollar ejercicios de factorización mediante la caja de polinomios y prefería desarrollarlos en el sistema algebraico, ya que se sentía más cómoda y tenía mejores destrezas en el trabajo con él, que con el sistema geométrico. Esta estudiante era una de las que estaba identificada con necesidades educativas especiales, debido a que estaba diagnosticada con un trastorno psicológico, el cual consistía en tomar una posición retadora ante ciertas situaciones que se daban en el proceso de enseñanza y aprendizaje al interior del aula. Es de aclarar que la estudiante tenía un ritmo de aprendizaje común a sus compañeros y era notorio su interés por esta área del conocimiento, lo cual se evidenciaba en su buen desempeño, pero en ocasiones con su actitud intentaba no dejar desarrollar las actividades planeadas.

Esta actitud de la estudiante fue más notoria cuando se desarrollaron los talleres con la caja de polinomios, permitiendo identificar que una de las causas de su actitud era que ella no sentía empatía con sus compañeros de grupo, así que en las primeras ocasiones la mayor dificultad fue que pudieran organizarse de tal manera que realizaran los ejercicios colaborativamente. Sin embargo, nos llamó la atención que a pesar de la apatía que exteriorizaba hacia la herramienta didáctica y la situación antes descrita, la estudiante en general tuvo un buen desempeño en los dos sistemas de representación, algebraico y geométrico, lo cual se puede evidenciar a continuación:



EXAMEN 2.
I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.
GRADO 8°-1.
17 DE AGOSTO DE 2017

S

Nombre: [redacted]

Factorizar:

1. $4x^8 - 29x^4 + 25$

Solucion.

$1 = 4x^8 - 29x^4 + 25 \quad = 4x^8 - 29x^4 + 25$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +9x^4 \qquad -9x^4$

$2x^4 \qquad 5 \qquad = (4x^8 - 20x^4 + 25) - 9x^4$

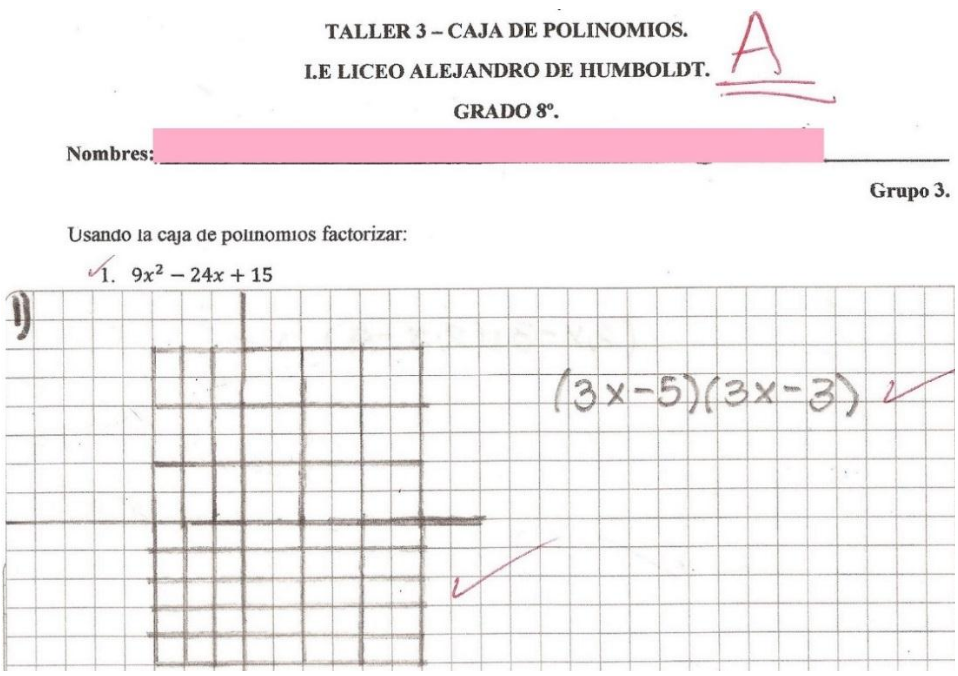
$2(2x^4)(5) = 20x^4 \quad = (2x^4 - 5)^2 - 9x^4$

$= [(2x^4 - 5) + (3x^2)]$

$[(2x^4 - 5) - (3x^2)]$

$= [2x^4 - 5 + 3x^2][2x^4 - 5 - 3x^2]$

Imagen 15: Examen 2 de 8°1.



TALLER 3 – CAJA DE POLINOMIOS.
I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.
GRADO 8°.

A

Nombres: [redacted]

Grupo 3.

Usando la caja de polinomios factorizar:

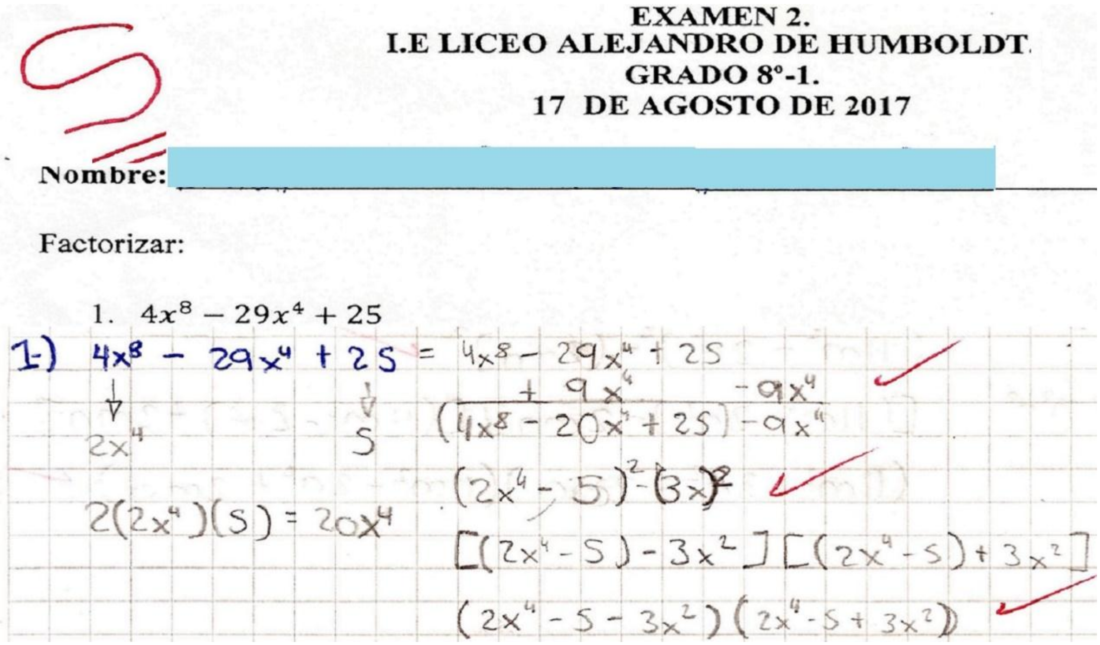
1. $9x^2 - 24x + 15$

1)

$(3x-5)(3x-3)$

Imagen 16: Taller 3 (grupo 3) caja de polinomios grado 8°1.

De otro lado, el estudiante BSRD- 8°1 fue uno de los que se desempeñó muy bien en los procesos de factorización tanto en el sistema algebraico como geométrico, así como se ve a continuación:


EXAMEN 2.
I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.
GRADO 8°-1.
17 DE AGOSTO DE 2017

Nombre:

Factorizar:

1. $4x^8 - 29x^4 + 25$

1-) $4x^8 - 29x^4 + 25 = 4x^8 - 29x^4 + 25$

$2x^4 \qquad 5 \qquad + 9x^4 \qquad - 9x^4$

$(4x^8 - 20x^4 + 25) - 9x^4$

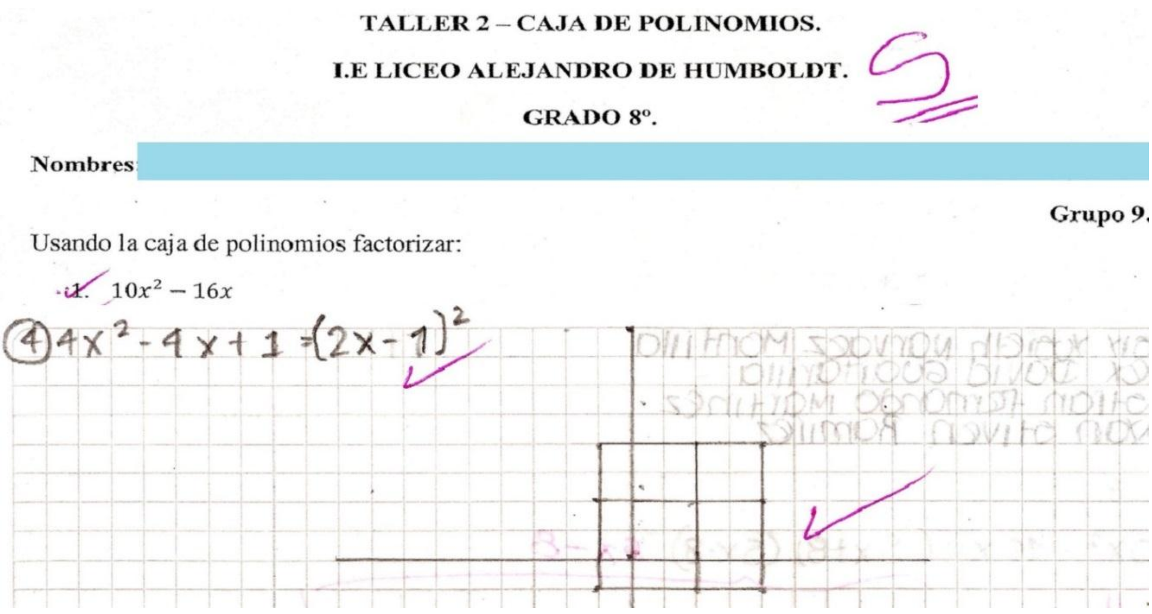
$2(2x^4)(5) = 20x^4$

$(2x^4 - 5)^2 - (3x^2)^2$

$[(2x^4 - 5) - 3x^2][(2x^4 - 5) + 3x^2]$

$(2x^4 - 5 - 3x^2)(2x^4 - 5 + 3x^2)$

Imagen 17: Examen 2 de estudiante de 8°1.


TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.
I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.
GRADO 8°.

Nombres:

Grupo 9.

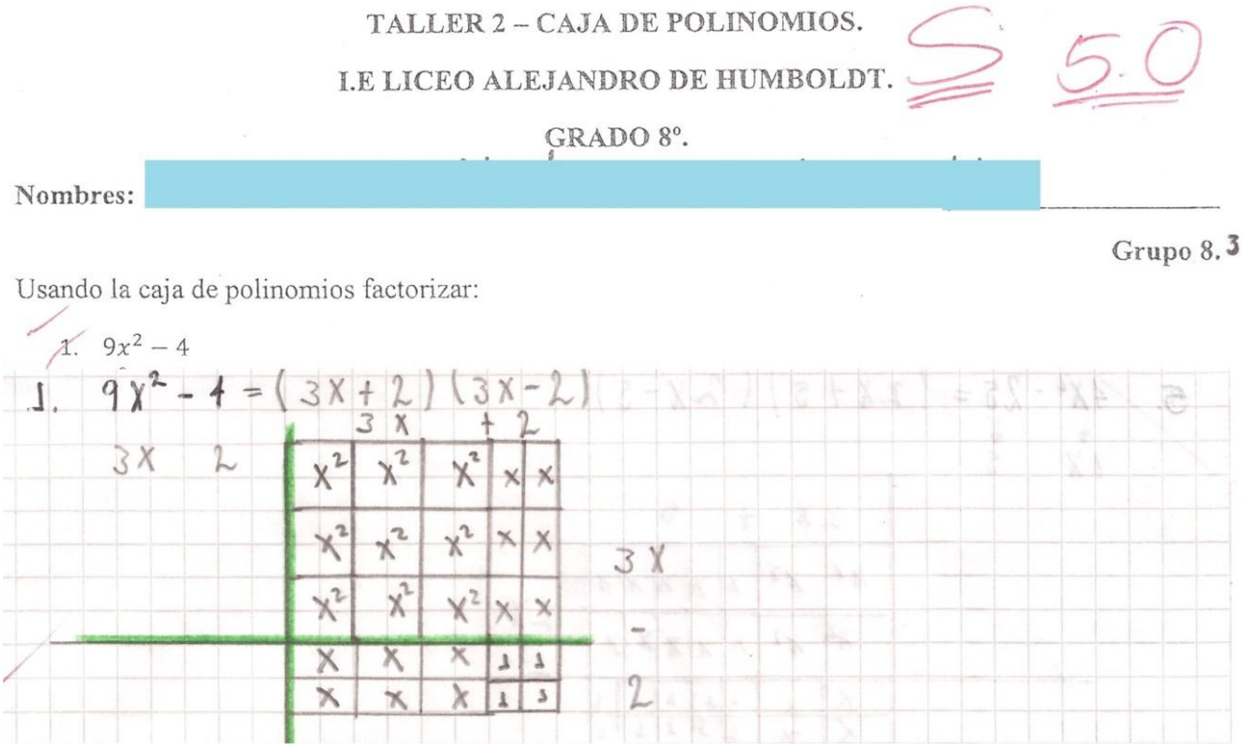
Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $10x^2 - 16x$

④ $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

Imagen 18: Taller 2 (grupo 9) caja de polinomios grado 8°1.

Así mismo, en el grado 8º3 el grupo conformado por los estudiantes RC, DFV y WFM se destacó de manera eficiente trabajando con la caja de polinomios como también de manera algebraica, como se muestra en las siguientes imágenes:



TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8°.

Nombres: [redacted]

Grupo 8. 3

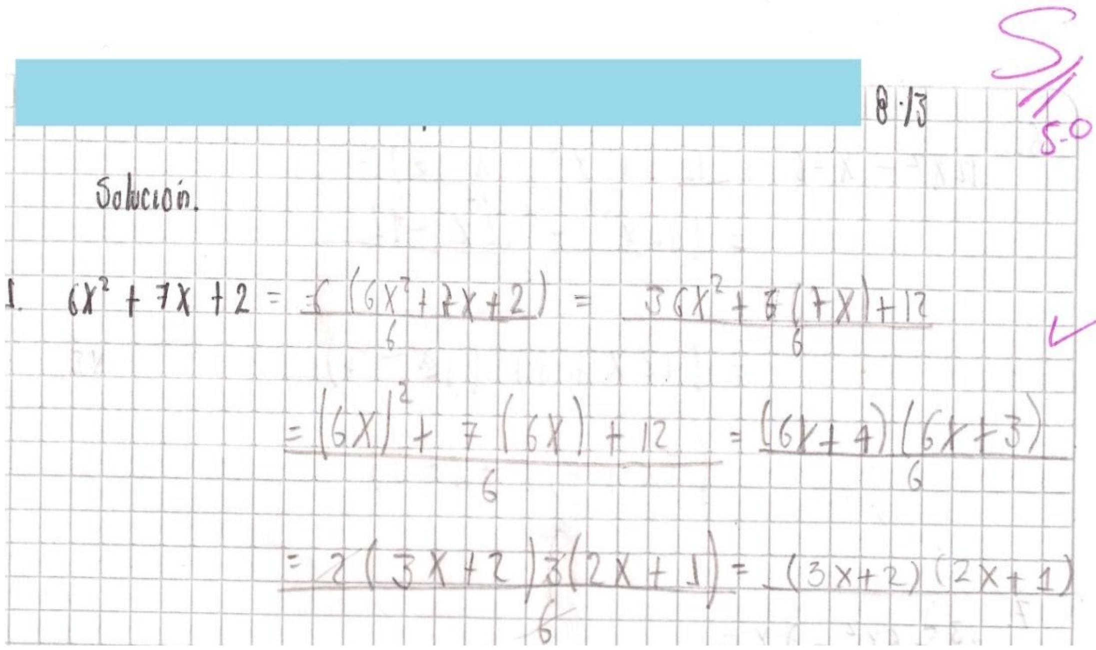
Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $9x^2 - 4$

1. $9x^2 - 4 = (3x+2)(3x-2)$

5.0

Imagen 19: Taller 2 caja de polinomios grado 8°3.



[redacted] 8°3

Solución.

1. $6x^2 + 7x + 2 = \frac{6(6x^2+7x+2)}{6} = \frac{36x^2+7(6x)+12}{6}$

$= \frac{(6x)^2+7(6x)+12}{6} = \frac{(6x+4)(6x+3)}{6}$

$= \frac{2(3x+2)3(2x+1)}{6} = (3x+2)(2x+1)$

5.0

Imagen 20: Taller estudiantes de 8°3.

Aprendizajes del ejercicio de la docencia

Como futuros profesores fue de suma importancia poner en práctica los conocimientos adquiridos a través de nuestra continua formación, pues de esta manera nos percatamos de lo diferente y compleja que es la realidad al tratar de aplicar lo aprendido, lo que nos ha ayudado a encontrar algunas debilidades y fortalezas, tanto de nosotros, como de los métodos que intentamos aplicar.

Estimación del tiempo.

Uno de los principales aprendizajes resultantes de esta experiencia, fue el cálculo adecuado del tiempo para las actividades propuestas, es decir, como ya se mencionó, en un principio los tiempos estipulados para las actividades no eran los apropiados, sin embargo, en el transcurso de la docencia logramos regularlos de una mejor manera, no obstante, pensamos que calcular el tiempo de una actividad de este tipo, sin margen de error, no es posible, pero la experiencia ayuda a minimizar este margen.

Importancia de la factorización.

Así mismo, una situación característica ocurrida durante nuestro proceso de enseñanza, nos señaló la necesidad de conocer aplicaciones referidas a la factorización, ya que dos estudiantes nos cuestionaron sobre la utilidad o aplicación de esta en su vida cotidiana, la respuesta a la pregunta por parte de nosotros, consistió en mostrarles las utilidades de la matemática, su aporte a la ciencia y tecnología en la fabricación de dispositivos electrónicos. Teniendo en cuenta que a fondo no tuvimos en el momento una respuesta que llegara al centro del asunto, nos deja la inquietud de buscar posibles respuestas que satisfagan estos interrogantes.

Inicialmente vimos los cuestionamientos de estos estudiantes como una manera de interrumpir la clase, puesto que uno de ellos tenía rendimiento bajo y mostraba poco interés hacia el área, sin embargo, el otro estudiante tenía buenas habilidades a la hora de factorizar, presentando buenas calificaciones en los exámenes escritos y con un interés notable en las diversas actividades, en este último caso, se podría pensar que con su cuestionamiento, el estudiante buscaba entender más a fondo el fin de las matemáticas o su aplicabilidad en la vida, para no verlas simplemente como definiciones y conceptos abstractos sin ningún sentido.

Estudiantes con necesidades educativas especiales.

Del mismo modo, una de las cosas que nos dejó la experiencia docente, fue aprender a conocer a nuestros estudiantes, ya que todos no tenían la misma capacidad al momento de resolver los ejercicios de factorización o en general en cualquier temática, es decir, se debe reconocer que cada uno de ellos tiene su propio ritmo de aprendizaje. Añadido a esto con la presencia de estudiantes con necesidades educativas especiales, se debió pensar en actividades con las cuales pudieran ser incluidos sin ser discriminados. El caso más notorio fue el de la estudiante VAC- 8°2, ya mencionado, con quien se debió hacer un trabajo distinto. Además, cuando se daba una calificación cuantitativa se hizo teniendo en cuenta su condición. Así pues, esto nos acercó un poco más al trabajo que se debe realizar con estudiantes que tengan necesidades educativas especiales de carácter cognitivo, perdiendo de cierta forma la "intriga" al tener al interior del aula alumnos con estas características.

Imagen 21: Trabajo personalizado.

Reflexión En La Docencia.

Presentación de la pregunta de investigación

Es de vital importancia reconocer que nuestra reflexión está orientada a responder la pregunta que nos planteamos, la cual surgió durante nuestro proceso de docencia en la etapa de inmersión, ya que con la escogencia de la herramienta didáctica, nos encontraríamos inmersos al interior de los sistemas de representación algebraico y geométrico, además, la caja de polinomios permitía que los estudiantes realizaran conversiones de un sistema de representación a otro y que a la vez en cada sistema realizaran operaciones, en este sentido, la pregunta está centrada en los procesos cognitivos de los estudiantes, los cuales ocurren al interior de los procedimientos de factorización.

Del mismo modo, es pertinente mencionar que las actividades desarrolladas durante la docencia directa, tanto con la caja de polinomios como en el ámbito netamente algebraico, eran pensadas en dar respuesta a la pregunta, pues en estas siempre teníamos como eje central de observación las operaciones cognitivas que los estudiantes pudieran desarrollar, ya que la pregunta que nos planteamos fue la siguiente:

¿Qué actividades cognitivas de carácter semiótico utilizan los estudiantes de grado octavo de la I.E. Alejandro de Humboldt, al desarrollar actividades de factorización de expresiones algebraicas de grado dos?

Referentes Conceptuales

Operaciones cognitivas de carácter semiótico.

Nuestra formación como docentes requiere de una constante actualización de conocimientos, puesto que el mundo de hoy evoluciona con mucha rapidez, incidiendo en las aulas de clases. Esto hace necesario el manejo de algunas teorías educativas, ya que en éstas pueden estar las respuestas a las preguntas que surgen a partir de nuestras prácticas pedagógicas.

En cuanto a los sistemas de representación, las operaciones cognitivas de carácter semiótico presentes son las de formación, tratamiento y conversión, caracterizadas y definidas por Duval, 1999 como:

1. *Formación:* Formar una representación semiótica es recurrir a unos signos para actualizar o para sustituir la visión de un objeto [...] los signos utilizados pertenecen a un sistema semiótico ya construido y ya utilizado por otros. […] es necesario que la formación de representaciones semióticas respete las reglas propias al sistema empelado no solo por razones de comunicabilidad, sino también para hacer posible la utilización de medios de tratamiento que ofrece ese sistema semiótico empleado. […] La formación implica *la selección de un conjunto de marcas o un cierto número de caracteres de un contenido* percibido, imaginado o ya representado, en función de las posibilidades de representación propias del *registro escogido*.

2. *Tratamiento:* Un tratamiento es la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), respecto a una cuestión, a un problema o una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción en la serie de las trasformaciones efectuadas. Un tratamiento es una **transformación de la representación al interior del registro** de representación o de un sistema.

3. *Conversión:* es la transformación de una representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro. […] La conversión es pues una **transformación externa relativa al registro de la representación de partida.**

   […]Sin embargo, la conversión requiere que se perciba la diferencia entre lo que Frege llamaba el sentido y la referencia de los símbolos o de los signos, o entre el contenido de una representación y lo que esta representa. Sin la percepción de esta diferencia, la actividad de conversión resulta imposible o incomprensible (p.40-44).

Así mismo, Duval (1999) menciona que en la mayoría de casos la actividad de conversión es menos inmediata y menos simple de lo que se tiene la tendencia a creer. Para darse cuenta de esto, es necesario analizar cómo puede efectuarse la puesta en correspondencia sobre la cual reposa toda conversión de representación. La puesta en correspondencia de dos representaciones pertenecientes a registros diferentes, puede establecerse localmente a través de una correspondencia asociativa entre unidades significantes elementales constitutivas, de cada uno de los dos registros.

Cuando hay correspondencia término a término en las unidades significantes se habla de "**congruencia**" de las representaciones, en este sentido Duval, 1999 nos habla de tres criterios de congruencia entre representaciones:

- *Posibilidad de una correspondencia **"semántica"** de los elementos significantes:* a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental. Se considera como unidad significante elemental a toda unidad que depende del "léxico" de un registro.
- *Univocidad **"semántica"** terminal:* a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más de una única unidad significante elemental en el registro de representación de llegada.
- El tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes. Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones. Este criterio de correspondencia en el **orden del arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones** es pertinente solo cuando estas tienen el mismo número de dimensiones… Este criterio es importante sobre todo cuando se trata de comparar frases y formulas literales (p.50-51).

Así, en nuestra práctica pedagógica nos pudimos percatar de la importancia que tiene la teoría en nuestra labor docente, puesto que esta es la base que fundamental y acredita el trabajo práctico.

Caja de polinomios.

En general, las matemáticas se consideran abstractas y alejadas de la realidad, lo cual genera falta de interés en los estudiantes, así, surge la necesidad de buscar la manera de capturar su atención para que hagan parte de su propio proceso de aprendizaje. Según lo anterior tenemos que:

> Los recursos para el trabajo en el aula de clase de matemáticas juegan un papel esencial para despertar sentimientos y actitudes positivas hacia las matemáticas, para desmitificarlas, y propiciar la participación y la integración y vencer los obstáculos

> emocionales responsables del aburrimiento, permitiendo ver que las matemáticas son una materia viva, llena de interés y muy útil dentro y fuera del aula. (Soto, Naranjo y Lozano., 2009, pág. 48)

Además, la escogencia de una herramienta didáctica para trabajar en el aula debe llamar la atención del estudiante, pero es primordial no dejar de lado el fin académico con el cual se utiliza, es decir, no se trata de que el estudiante "juegue" dejando de lado la temática que se está tratando, sino que por el contrario la herramienta se convierta en un mediador ya que "un juego bien elegido puede servir para introducir un tema, ayudar a comprender mejor los conceptos o procesos, afianzar los ya adquiridos, adquirir destreza en algún algoritmo o descubrir la importancia de una propiedad, reforzar automatismos y consolidar un contenido" (Salvador, pág. 5).

Teniendo en cuenta lo anterior, se escogió la Caja de Polinomios la cual es una herramienta didáctica de carácter lúdico, mediante la cual se pueden realizar diferentes operaciones con polinomios, entre ellas la factorización en una o dos variables, en nuestro caso se implementó para factorizar expresiones algebraicas de grado dos.

Esta es una herramienta cuyo origen "aparece en la Universidad de Nariño a partir de los trabajos de algunos docentes adscritos al Departamento de Matemáticas y Estadística" (Soto *et al.*, 2009, p.44) y que relaciona el pensamiento euclidiano y cartesiano, dichos docentes se basaron en matemáticos como:

> Euclides, quien construye un modelo incorruptible, típico del más alto intelecto humano…Tabit ben Qurra el Harani, este matemático árabe, del siglo X, estudia una dificultad relacionada con la interpretación de los objetos algebraicos en el contexto de la geometría euclidiana... Descartes y Fermat, quienes desarrollaron la caracterización del plano cartesiano donde se conjugan los conceptos de espacio y tiempo para los objetos (Soto *et al.*, 2009, p.44).

Metodología.

Las distintas actividades planeadas están enmarcadas en la pedagogía activa, que como menciona uno de sus artículos la Revolución Educativa Colombia Aprende del Ministerio de Educación Nacional, permite la interacción maestro – alumno, cuyo proceso es el dialogo y cooperación, utilizando como estrategia la participación activa del estudiante, del mismo modo, la pedagogía activa es considerada una

> […] Alternativa pedagógica que se centra en promover la participación activa de los educandos en el quehacer educativo. Es el proceso didáctico y dinámico que se realiza con la aplicación de técnicas participativas, con uso de abundante material didáctico, juegos educativos y trabajos grupales. El proceso didáctico que la metodología activa implementa es dinámico y participativo, convirtiendo a los estudiantes en verdaderos protagonistas de su propia educación, donde la función fundamental del docente es de guía, orientador y facilitador del aprendizaje (Save the Children [Salvar a los niños], 2005, p.9 (como se citó en García, 2014).

Como podemos ver, esta metodología se centra en el estudiante y en que él se apropie de su proceso de aprendizaje, para lo cual, el docente debe ser un mediador entre este y el conocimiento, a la vez que debe brindar las herramientas y posibilidades para que el estudiante adquiera el saber que se pretende.

Análisis de Registros

En las diferentes actividades que se llevaron a cabo con los estudiantes, se obtuvieron diversos registros tanto fotográficos como fílmicos del trabajo desarrollado con la caja de polinomios, talleres resueltos en clase, pruebas escritas y de los cuadernos de los estudiantes, esto con el objetivo de dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

Del conjunto de registros obtenidos en la docencia directa, se realizara el análisis de 6 de estos, de los cuales 3 son de talleres desarrollados mediante la caja de polinomios (geométricos) y tres registros de talleres algebraicos. Este conjunto abarca los ocho métodos de factorización estudiados, entre ellos, el método de Factor Común se encuentra inmerso en el método de Factor Común por Agrupación; de la misma manera, los métodos de Trinomio Cuadrado Perfecto y de Diferencia de Cuadrados están incluidos en el método de Trinomio Cuadrado Perfecto por Adición y Sustracción; los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ por ser un caso particular de los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ se tiene la inclusión, y por último el método de Combinación de Casos incluye varios de los métodos ya mencionados.

Ahora, se presentará una serie de análisis de algunos registros del trabajo realizado por los estudiantes, con el fin de catalogar el tipo de operaciones cognitivas encontradas en dichos registros.

A continuación, vamos a trabajar el taller con la caja de polinomios según el registro de estudiantes del grado 8º3, del cual se tomó el cuarto ejercicio y la forma en como lo resolvió, este se tomó como representante de las variadas evidencias en las cuales está presente la misma actividad cognitiva.

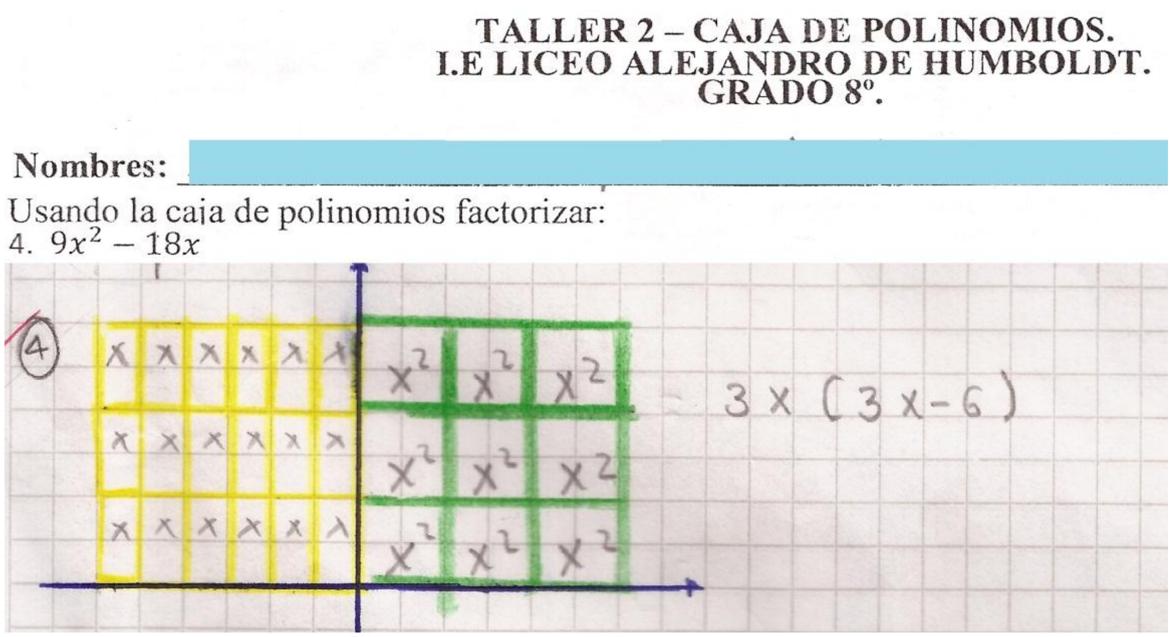


Imagen 22: Taller caja de polinomios grado 8°3.

En la anterior evidencia (imagen 22), los estudiantes del grado 8°3 buscan factorizar el polinomio $9x^2 - 18x$, para esto emplean la caja de polinomios y realizan el siguiente proceso: primero identifican los coeficientes de cada termino ya que este les indica el número de fichas de cada tipo que deben escoger, de esta manera toman 9 fichas rotuladas con x^2 y 18 con x.

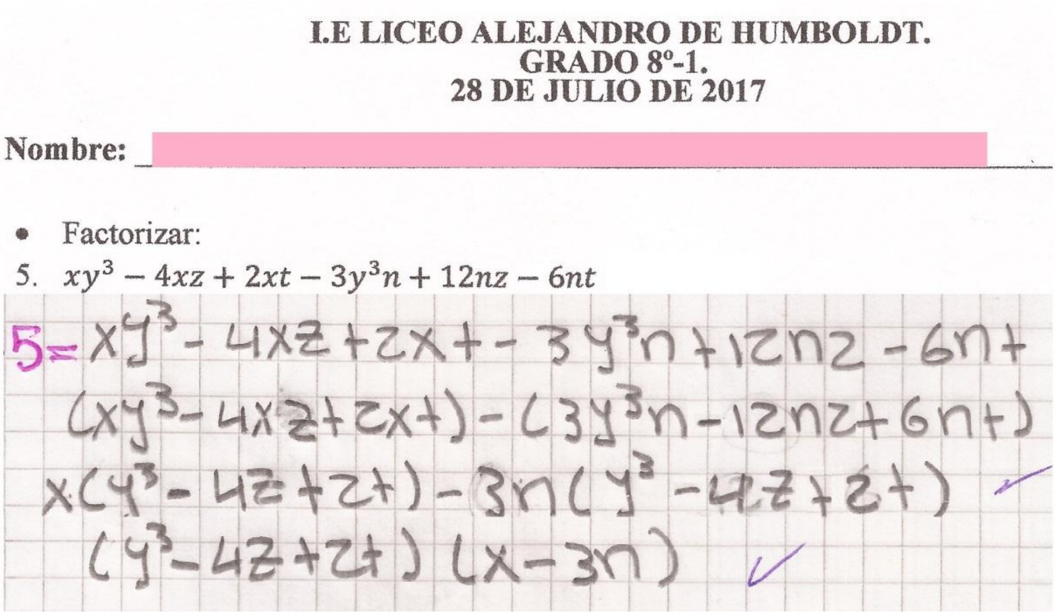
Seguidamente, buscan formar un rectángulo con el número de fichas que obtuvieron, para lo cual, tienen en cuenta el signo que acompaña a cada termino ya que esto les indica en que cuadrante deben disponer las fichas de cada tipo. Los estudiantes ubican las 9 fichas de área x^2 en el primer cuadrante y las 18 fichas de área x las colocan en el segundo cuadrante que corresponde al cuadrante negativo y empalman las fichas del cuadrante 1 y 2 por el lado común, como se muestra en la imagen.

Una vez formado el rectángulo con las fichas, proceden a encontrar su área, para ello miden las longitudes horizontal y vertical. Respecto a la longitud horizontal los estudiantes suman los tres segmentos colineales de longitud x que se encuentran en el primer cuadrante que es positivo y los seis segmentos de longitud 1 que se encuentran en el segundo cuadrante, el cual es negativo, para un total de una medida de longitud horizontal de $(3x - 6)$. En el eje vertical realizan el mismo proceso y obtienen una longitud de $3x$, seguidamente, realizan el producto de la representación de las medidas de las longitudes del lado horizontal $(3x - 6)$ por la medida de la longitud del lado vertical 3x del rectángulo, dando como resultado el área total la cual queda representada como el producto de $3x(3x - 6)$. En consecuencia por ser esta el área total, el estudiante iguala a $3x(3x - 6)$ con $9x^2 - 18x$. En este sentido, son dos maneras de representar la misma área, lo que quiere decir que el producto de la representación de las medidas de las longitudes de los lados del rectángulo coincide con la factorización del polinomio inicial.

Este análisis nos deja establecido la existencia de la operación cognitiva de conversión cuando los estudiantes realizan una congruencia de unidades significantes entre los términos del polinomio y el número de fichas de cada tipo, es decir, reconoce que el termino $9x^2$ se puede expresar en la caja de polinomios con 9 fichas de área x^2 y el $18x$ con 18 fichas de área x. De igual manera, se evidencia la operación cognitiva de conversión cuando los alumnos expresan las longitudes de los lados del rectángulo de manera algébrica, para lo cual suman los segmentos colineales de las fichas y tienen en cuenta el signo del cuadrante en el cual están ubicadas, así obtienen que la medida de la longitud horizontal es $(3x - 6)$ y la medida de la longitud vertical es $3x$, para finalmente expresar el producto de estos lados como el área total del rectángulo la cual es la factorización del polinomio inicial.

De igual manera, hay presencia de la operación cognitiva de tratamiento cuando los estudiantes están trabajando al interior del sistema de representación geométrico y forman el rectángulo que representa el polinomio siguiendo las reglas de uso de la caja de polinomios.

Ahora, vamos a analizar el procedimiento que siguió la estudiante JKMM- 8°1 para factorizar el ejercicio número 5 de factor común por agrupación de términos.


I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.
GRADO 8°-1.
28 DE JULIO DE 2017

Nombre: ______

- Factorizar:

5. $xy^3 - 4xz + 2xt - 3y^3n + 12nz - 6nt$

$5 = xy^3 - 4xz + 2xt - 3y^3n + 12nz - 6nt$

$(xy^3 - 4xz + 2xt) - (3y^3n - 12nz + 6nt)$

$x(y^3 - 4z + 2t) - 3n(y^3 - 4z + 2t)$ ✓

$(y^3 - 4z + 2t)(x - 3n)$ ✓

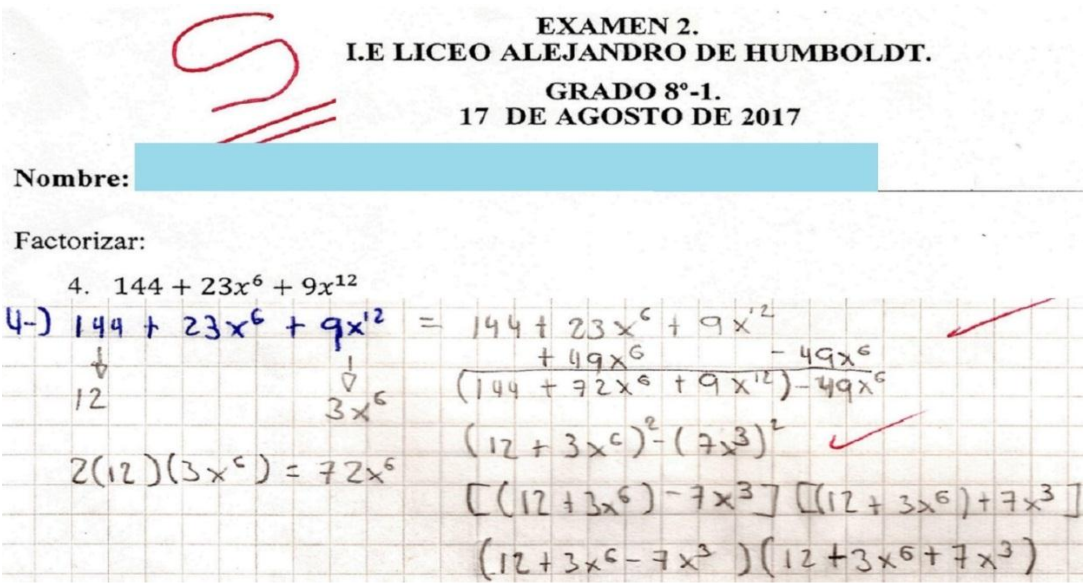
Imagen 23: Examen factor común por agrupación grado 8°3

En el anterior registro (imagen 23) la estudiante busca factorizar el polinomio de seis términos $xy^3 - 4xz + 2xt - 3y^3n + 12nz - 6nt$, para lo cual realiza el siguiente proceso: agrupa los tres primeros términos en un paréntesis y los otros tres en otro, obteniendo $(xy^3 - 4xz + 2xt) - (3y^3n - 12nz + 6nt)$, en seguida, extrae el factor común de cada paréntesis, del primero obtiene x y del segundo $3n$ llegando a la siguiente expresión: $x(y^3 - 4z + 2t) - 3n(y^3 - 4z + 2t)$, aquí la estudiante observa que en estos dos términos tienen como factor común el paréntesis $(y^3 - 4z + 2t)$ y llega a la expresión $(y^3 - 4z + 2t)(x - 3n)$, aquí da como terminado el ejercicio, ya que, expreso el polinomio inicial como el producto de factores así: $xy^3 - 4xz + 2xt - 3y^3n + 12nz - 6nt = (y^3 - 4z + 2t)(x - 3n)$.

En el proceso descrito anteriormente, la estudiante reconoce que el polinomio inicial no tiene un factor común en los seis términos, así que usa el proceso de factorización de polinomios por agrupación de términos para desarrollarlo, para esto agrupa los términos que tienen un factor común y obtiene la expresión $(xy^3 - 4xz + 2xt) - (3y^3n - 12nz + 6nt)$, en donde coloco en un paréntesis los tres primeros términos y en otro los otros tres, paralelamente, cuando agrupa estos términos tiene en cuenta la ley de los signos para expresar $-3y^3n + 12nz - 6nt = -(3y^3n - 12nz + 6nt)$. Posteriormente, identifica que en el primer paréntesis puede factorizar el término común x y en el segundo $3n$, llegando a la expresión $x(y^3 - 4z + 2t) - 3n(y^3 - 4z + 2t)$, en esta expresión identifica el factor común $(y^3 - 4z + 2t)$ y obtiene finalmente la factorización del polinomio como el producto de los términos $(y^3 - 4z + 2t)(x - 3n)$. En lo anterior, podemos observar que la estudiante hace uso de sus conocimientos sobre los procesos de factorización de polinomios de factor común y factor común por agrupación, así como de leyes de signos, es decir, trabaja al interior del sistema de representación algebraico.

Desde una perspectiva de carácter semiótico, en el registro anterior (imagen 23) la estudiante hace uso de la operación cognitiva de tratamiento al interior del sistema de representación algebraico en distintos momentos: primero cuando agrupa los términos en paréntesis llegando a la expresión equivalente al polinomio inicial $(xy^3 - 4xz + 2xt) - (3y^3n - 12nz + 6nt)$, así mismo, está presente el tratamiento cuando extrae de cada paréntesis el termino común y obtiene $x(y^3 - 4z + 2t) - 3n(y^3 - 4z + 2t)$; seguidamente hay tratamiento en el momento en que la estudiante identifica en las dos expresiones como factor común el paréntesis $(y^3 - 4z + 2t)$ y llega a la expresión final $(y^3 - 4z + 2t)(x - 3n)$. Aquí, mediante el uso de la operación cognitiva de tratamiento la estudiante expresa el polinomio inicial, que es suma de términos, como un producto de dos factores que es equivalente así: $xy^3 - 4xz + 2xt - 3y^3n + 12nz - 6nt = (y^3 - 4z + 2t)(x - 3n)$.

A continuación, tenemos el segundo examen del estudiante BSRD- 8°1 del cual se tomó el cuarto ejercicio de factorización y la forma en como lo resolvió:


EXAMEN 2.
I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.
GRADO 8°-1.
17 DE AGOSTO DE 2017

Nombre:

Factorizar:

4. $144 + 23x^6 + 9x^{12}$

4-) $144 + 23x^6 + 9x^{12} = 144 + 23x^6 + 9x^{12}$

$12 \qquad 3x^6 \qquad + 49x^6 \quad - 49x^6$

$2(12)(3x^6) = 72x^6 \qquad (144 + 72x^6 + 9x^{12}) - 49x^6$

$(12 + 3x^6)^2 - (7x^3)^2$

$[(12 + 3x^6) - 7x^3][(12 + 3x^6) + 7x^3]$

$(12 + 3x^6 - 7x^3)(12 + 3x^6 + 7x^3)$

Imagen 24: Examen 2 de estudiante de 8°1.

En el registro anterior (imagen 24), podemos observar que el estudiante lleva a cabo el siguiente proceso en la búsqueda de la factorización del polinomio $144 + 23x^6 + 9x^{12}$; en un primer momento extrae la raíz cuadrada del primer y tercer término como lo indican las flechas, luego realizan el doble producto de las raíces obteniendo como resultado $72x^6$. Seguidamente procede a sumar $49x^6$ debido a que ese es el término que se requiere para obtener el doble producto de las raíces, así mismo, resta $49x^6$ para que el polinomio inicial no se vea afectado y con esto obtiene $(144 + 72x^6 + 9x^{12}) - 49x^6$, agrupando los tres primeros términos en un paréntesis, por ser esta expresión un trinomio cuadrado perfecto.

En seguida, realiza las siguientes dos actividades: factoriza el trinomio cuadrado perfecto del paréntesis y obtiene $(12 + 3x^6)^2$, así mismo transforma la expresión $49x^6$ en $(7x^3)^2$, con estas dos actividades llega a la expresión$(12 + 3x^6)^2 - (7x^3)^2$. El estudiante identifica esta expresión como una diferencia de cuadrados y la factoriza expresándola como producto de los siguientes dos factores $[(12 + 3x^6) - 7x^3][(12 + 3x^6) + 7x^3]$. Finalmente, suprime los paréntesis internos y expresa los factores como sigue: $(12 + 3x^6 - 7x^3)(12 + 3x^6 + 7x^3)$, debido a que identifica que en ninguno de los dos factores puede seguir realizando operaciones matemáticas, es decir ya obtuvo la factorización del polinomio inicial.

En el proceso descrito anteriormente, podemos ver que el estudiante hace uso de sus conocimientos sobre operaciones con expresiones algebraicas y propiedades de potencias, esto cuando realiza el doble producto de las raíces del primer y tercer término, así mismo al momento de sumar y restar el término $49x^6$ y cuando transforma este término y lo expresa como $(7x^3)^2$. De igual manera, se vale de los procesos para factorizar polinomios de la forma de trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados. Por tanto, se tiene que el estudiante está trabajando al interior del sistema de representación algebraico

Respecto a lo anterior, desde una mirada semiótica el estudiante hace uso de la operación cognitiva de tratamiento al desarrollar el cuarto ejercicio del examen (imagen 24) en distintos momentos; el primero cuando suma y resta el termino $49x^6$, siguiendo una regla algebraica, así convierte la expresión original de tres términos en una de cuatro, en segundo lugar, hay tratamiento cuando factoriza el trinomio cuadrado perfecto $144 + 72x^6 + 9x^{12}$ y lo expresa como el producto de los factores $(12 + 3x^6)^2$, seguidamente el estudiante realiza la actividad de expresar el termino $49x^6$ como $(7x^3)^2$ usando propiedades de las potencias, así obtiene $(12 + 3x^6)^2 - (7x^3)^2$; de igual manera, hace tratamiento cuando identifica esta expresión como una diferencia de cuadrados y lo factoriza así: $[(12 + 3x^6) - 7x^3][(12 + 3x^6) +$

$7x^3$].. Finalmente el estudiante hace uso de la operación cognitiva de tratamiento, en el instante que suprime los paréntesis y llega a la expresión $(12 + 3x^6 - 7x^3)(12 + 3x^6 + 7x^3)$, la cual es la factorización del polinomio inicial.

Ahora, se analizara un registro obtenido del trabajo realizado con la caja de polinomios del grupo 8 del grado 8º2, en el cual se busca la factorización del polinomio de $9x^2 - 3x - 12$.

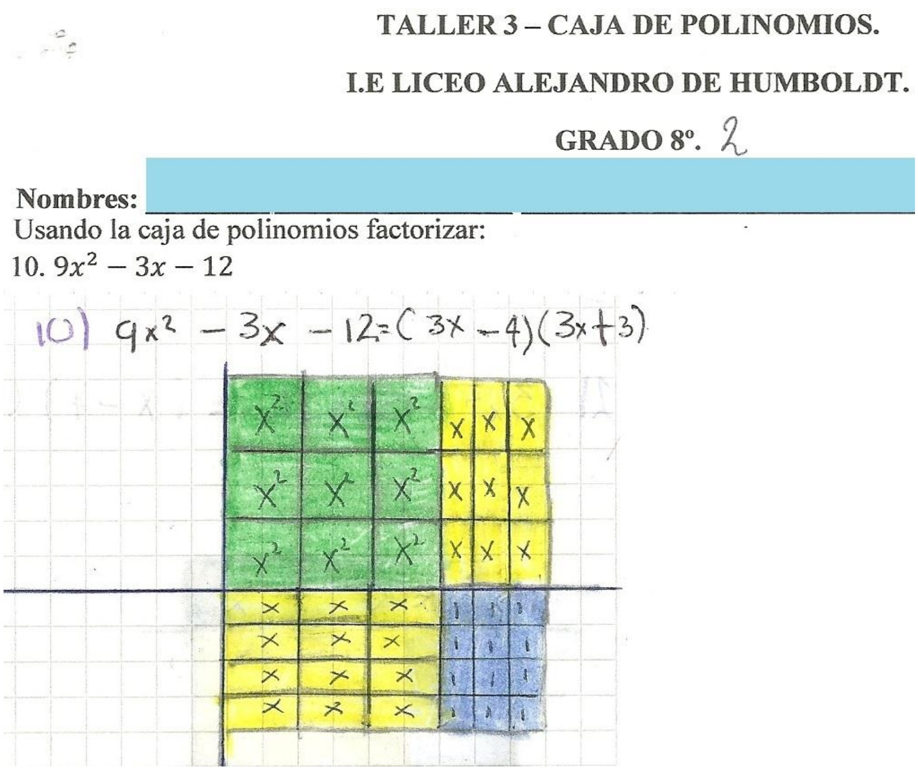


Imagen 25: Taller caja de polinomios grupo 8 de 8°2.

En el anterior registro (imagen 25), los estudiantes del octavo grupo del grado 8º3 organizados al inicio de la actividad deben factorizar el polinomio $9x^2 - 3x - 12$, vale la pena mencionar que este tipo de polinomios requiere en ocasiones hacer uso de unas técnicas o claves con la caja de polinomios con el fin de formar un cuadrado o rectángulo que represente el polinomio. Así los estudiantes realizan el siguiente proceso atendiendo a estas orientaciones: primero identifican el número de fichas de cada tipo que deben tomar inicialmente: así, escogen 9 fichas rotuladas con x^2, 3 rotuladas con x y 12 rotuladas con la unidad, atendiendo las reglas de uso de la caja.

Posteriormente, teniendo en cuenta el signo que acompaña a cada termino, los estudiantes ubican las fichas en los cuadrantes respectivos de la siguiente manera: forman un cuadrado con las 9 fichas rotuladas con x^2 en el primer cuadrante debido a que el signo que acompaña al termino $9x^2$ es positivo; así mismo forman un rectángulo con las 12 fichas rotuladas con la unidad, colocando 3 fichas horizontalmente y 4 verticalmente, esto lo hacen en el cuarto cuadrante debido a que el signo del termino independiente es negativo. Vale la pena mencionar que la formación del cuadrado en el primer cuadrante y el rectángulo en el cuarto cuadrante, tiene una justificación en que los estudiantes ven que configurar las fichas de este modo puede llevar a la construcción del rectángulo final.

Posteriormente, debido a que las fichas rotuladas x son la conexión entre las fichas rotuladas con x^2 y la unidad, los estudiantes reconocen que deben ubicar las 3 fichas rotuladas con x en los cuadrantes negativos (segundo o cuarto), pero ven conveniente disponerlas en el cuarto cuadrante, ya que haciendo una analogía con la regla algebraica de sumar y restar un término para no afectar la expresión inicial, observan que al colocar estas tres fichas en el cuarto cuadrante puede también colocar 9 fichas rotuladas con x en el primer cuadrante (positivo) y 9 en el cuatro cuadrante (negativo) para finalmente forma el rectángulo que se ve en el registro (imagen 25).

Después de tener el rectángulo formado con las fichas, los estudiantes proceden a hallar el área de este, así obtuvieron que la medida de la longitud vertical es $(3x - 4)$ y la medida de la longitud horizontal es $(3x + 3)$. Luego, el área total del rectángulo queda representada por el producto de la representación de las medidas de las longitudes de sus lados, este producto representa la factorización del polinomio inicial y los estudiantes lo expresan de la siguiente manera: $9x^2 - 3x - 12 = (3x - 4)(3x + 3)$.

En el proceso antes descrito, para factorizar el polinomio $9x^2 - 3x - 12$, las fichas con las cuales se cuenta inicialmente según los coeficientes del polinomio no son suficientes para formar un rectángulo, por lo cual los estudiantes deciden tomar 18 fichas más rotuladas con x y ubicarlas convenientemente para formar el rectángulo. Así mismo, vemos que los estudiantes en este proceso de factorización mediante la caja de polinomios se están moviendo en el sistema de representación geométrico y algebraico.

Desde la perspectiva semiótica, en el registro (imagen 25) anteriormente descrito, los estudiantes hacen uso de las operaciones cognitivas de tratamiento y conversión; la primera está presente cuando los estudiantes forman el rectángulo teniendo en cuenta las reglas de uso de la caja de polinomios, así mismo cuando haciendo una analogía con una regla algebraica deciden tomar 18 fichas mas rotuladas con x y ubicar 9 de estas en el primer cuadrante (positivo) y 9 en el cuatro cuadrante (negativo).

La segunda operación cognitiva, conversión, está presente cuando los estudiantes hacen una congruencia de unidades significantes entre los términos del polinomio y el número de fichas de cada tipo, es decir, reconoce que el término $9x^2$ se puede expresar en la caja de polinomios con 9 fichas de área x^2, el término $3x$ con 3 fichas de área x y el término independiente 12 tomando doce fichas de la unidad. Así mismo, se evidencia la operación cognitiva de conversión cuando los estudiantes pasan del sistema de representación geométrico (caja de polinomios) al algebraico, expresando las longitudes de los lados del rectángulo de manera algébrica, para lo cual suma los lados de las fichas y tiene en cuenta el signo del cuadrante en el cual están ubicadas, así obtiene que la medida de la longitud vertical es $(3x - 4)$ y la medida de la longitud horizontal es $(3x + 3)$, es decir realiza un congruencia de unidades significantes entre la medida de los lados y la expresión que los representa, para finalmente expresar el producto de estos lados como el área total del rectángulo la cual es la factorización del polinomio inicial.

En seguida, se analizara uno de los ejercicios realizados por el mismo grupo de estudiantes mencionados en el anterior registro:

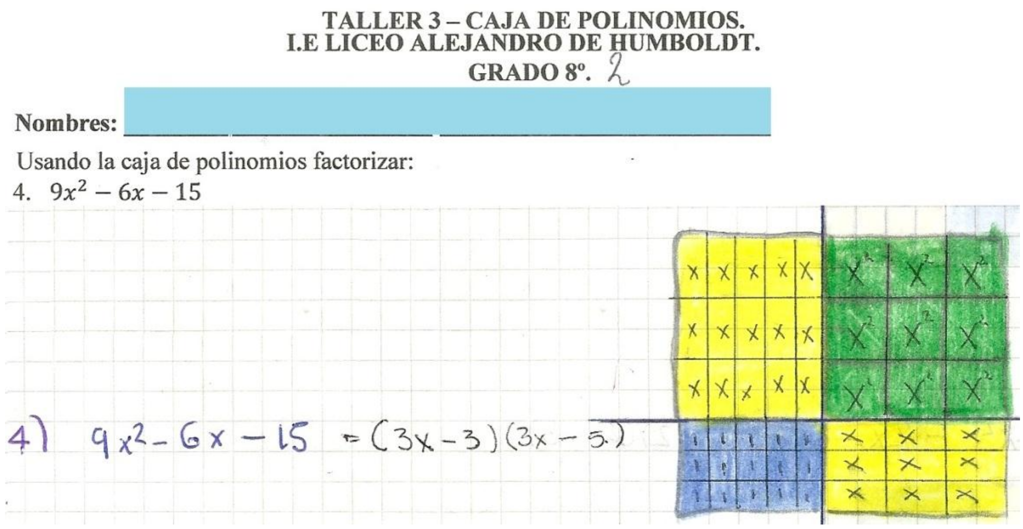


Imagen 26: Confusiones con el uso de la caja de polinomios.

En el anterior registro (imagen 26), se les pedía a los estudiantes factorizar el polinomio $9x^2 - 6x - 15$ para lo cual realizaron el siguiente proceso: inicialmente observaron el coeficiente de cada término del polinomio, ya que esto les indicaba el número de fichas que en un principio debían tomar, así, escogen 9 fichas rotuladas con x^2, 6 rotuladas con x y 15 rotuladas con la unidad, teniendo en cuenta las reglas de uso de la caja de polinomios.

En seguida, ubican las 9 fichas de área x^2 en el primer cuadrante debido a que el signo de este término es positivo y formaron un cuadrado con estas, en seguida colocaron las 6 fichas rotuladas con x en el segundo cuadrante de signo negativo, con lo cual no siguieron la recomendación de que con este tipo de polinomios era conveniente primero formar una figura con las fichas rotuladas con la unidad, esto lleva a que los estudiantes con la intención de formar la figura geométrica (cuadrado o rectángulo) ubiquen las 15 fichas rotuladas con la unidad en el tercer cuadrante (positivo), sin tener en cuenta que el signo que acompaña este término en el polinomio inicial es negativo y por tanto estas fichas debían estar en el segundo o cuarto cuadrante. Posteriormente, los estudiantes reconocían que para poder formar un rectángulo debían tomar más fichas rotuladas con x, pero debido a que su intención es formar un rectángulo no tienen en cuenta que se deben agregar en diferentes cuadrantes haciendo una analogía con la regla algebraica de sumar y restar un mismo término para no alterar la expresión inicial, de esta manera cuando toman las 18 fichas más alteran el polinomio debido a que las ubican cuadrantes con el mismo signo (negativo).

Posteriormente, con el rectángulo formado continúan el proceso hallando el área del rectángulo para lo cual encuentran las medidas de longitud de los lados de este, así consiguen por el lado vertical $(3x - 3)$ y en el lado horizontal $(3x - 5)$, Luego, el área total queda representada por el producto de la representación de las medidas de las longitudes de sus lados así : $(3x - 3)$ $(3x - 5)$, pero este producto no representa el polinomio inicial sino el polinomio $9x^2 - 24x + 15$.

Desde una perspectiva de carácter semiótico, los estudiantes hacen uso de las operaciones cognitivas de tratamiento y conversión en la búsqueda de la factorización del polinomio que se planteó. La conversión aparece en un primer momento cuando los estudiantes realizan una congruencia de unidades significantes expresando el término $9x^2$ con 9 fichas de área x^2, el $6x$ con 6 fichas de área x y el termino independiente con 15 fichas rotuladas con la unidad.

En seguida, cuando forman el rectángulo hacen uso de la operación cognitiva de tratamiento, aunque en este proceso solo respetan las reglas de uso de la caja de polinomios cuando ubican las 9 fichas de área x^2 en el primer cuadrante y las 6 fichas de área x en el segundo cuadrante, lo cual no pasa cuando ubican las 15 fichas de la unidad en el tercer cuadrante que es positivo, ya que el signo que acompaña este término en el polinomio es negativo, por lo cual estas fichas debían ubicarse en el segundo o cuarto cuadrante, además en el instante que deciden tomar las 18 fichas para completar el rectángulo es consciente de que esto se hace teniendo en cuenta la regla algebraica de sumar y restar una misma cantidad para no alterar la expresión inicial, pero esto, se debe hacer en la caja de polinomios en dos cuadrantes de signo contrario, lo cual no lo tienen en cuenta, ya que en los cuadrantes donde ubican estas 18 fichas son del mismo signo (negativo) con lo cual el polinomio inicial si se ve afectado.

De igual manera, la operación cognitiva de conversión también aparece en un segundo momento cuando los estudiantes encuentran las medidas de longitud de los lados del rectángulo, para lo cual suman los lados de las fichas y tienen en cuenta el signo del cuadrante en el cual están ubicadas, así obtienen que la medida de la longitud vertical es $(3x - 3)$ y la medida de la longitud horizontal es $(3x - 5)$, es decir realizan un congruencia de unidades significantes entre la medida de los lados y la expresión que los representa, para finalmente expresar el producto de estos lados como el área total del rectángulo.

Es importante mencionar que en este caso, los estudiantes no factorizaron el polinomio inicial, ya que al trabajar al interior de la caja de polinomios ubican las fichas de manera incorrecta al no tener en cuenta el signo del termino independiente, pero esto no quiere decir que en este proceso llevado a cabo por los estudiantes no estén presentes las operaciones cognitivas de carácter semiótico, ya que como se vio anteriormente las operaciones de tratamiento y conversión se encuentran en diferentes momentos. Finalmente encontramos una incongruencia, puesto que los estudiantes no reconocen que la factorización del polinomio no es la del $9x^2 - 6x - 15$ sino la del polinomio $9x^2 - 24x + 15$.

A continuación, vamos a trabajar el taller de la caja de polinomios según el registro de estudiantes del grado 8º3 del cual se tomó el segundo ejercicio y la forma en como lo resolvió.

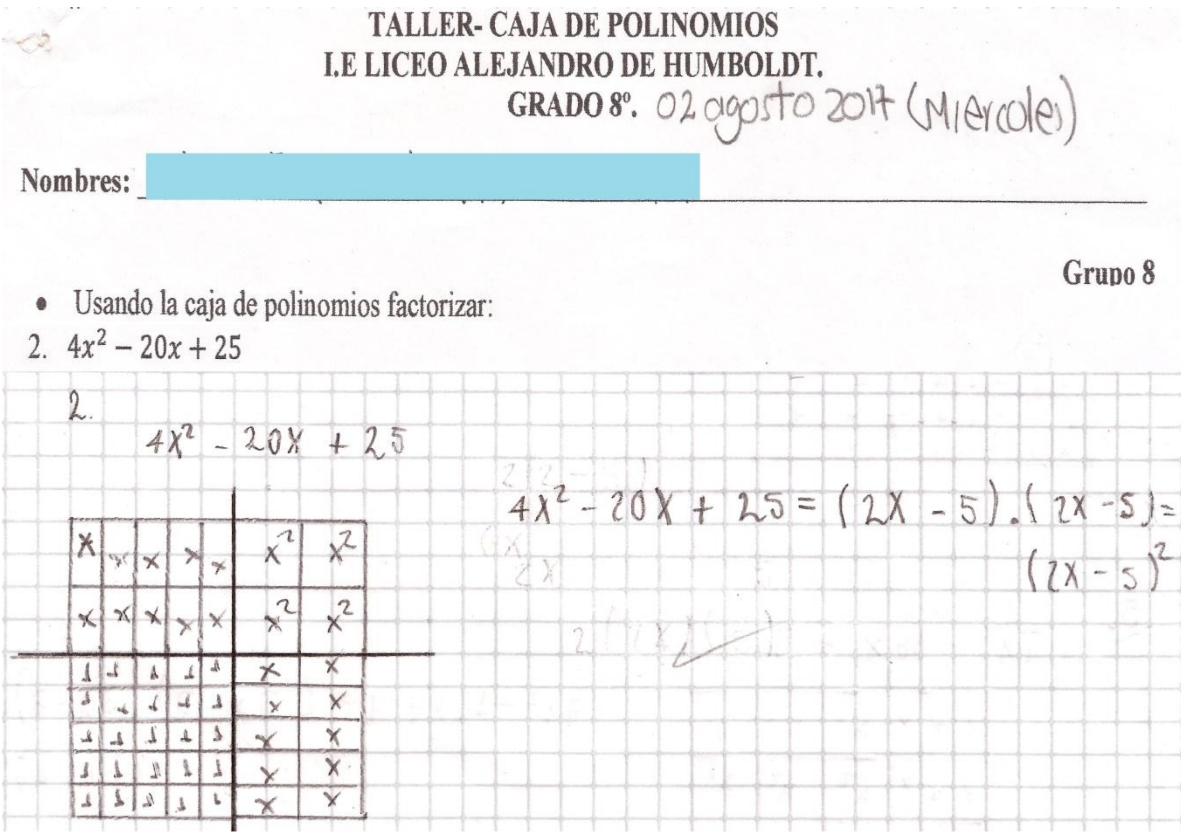


Imagen 27: Taller caja de polinomios estudiantes de 8°3.

En la anterior evidencia (imagen 27), los estudiantes del grado 8°3 buscan factorizar el polinomio $4x^2 - 20x + 25$, para esto emplean la caja de polinomios y realizan el siguiente proceso: primero identifican los coeficientes de cada termino, ya que este les indica el número de fichas de cada tipo que deben escoger, en este sentido toman 4 fichas rotuladas con x^2, 20 con x y 25 con 1 que representa la unidad.

Después, buscan formar un cuadrado o rectángulo con el número de fichas que obtuvieron, para lo cual tuvieron en cuenta el signo que acompaña a cada termino, ya que esto les indicaba en que cuadrante debían disponer las fichas de cada tipo, en este caso, podemos observar en la imagen que ubicaron las cuatro fichas de x^2 en el primer cuadrante ya que este es positivo, las 20 fichas rotuladas con x las colocaron en el segundo y cuarto cuadrante, los cuales son negativos, ubicando mediante un razonamiento simétrico 10 fichas en cada uno de estos cuadrantes, y las 25 fichas que representan la unidad las colocaron en el tercer cuadrante, con el fin de completar la figura geométrica.

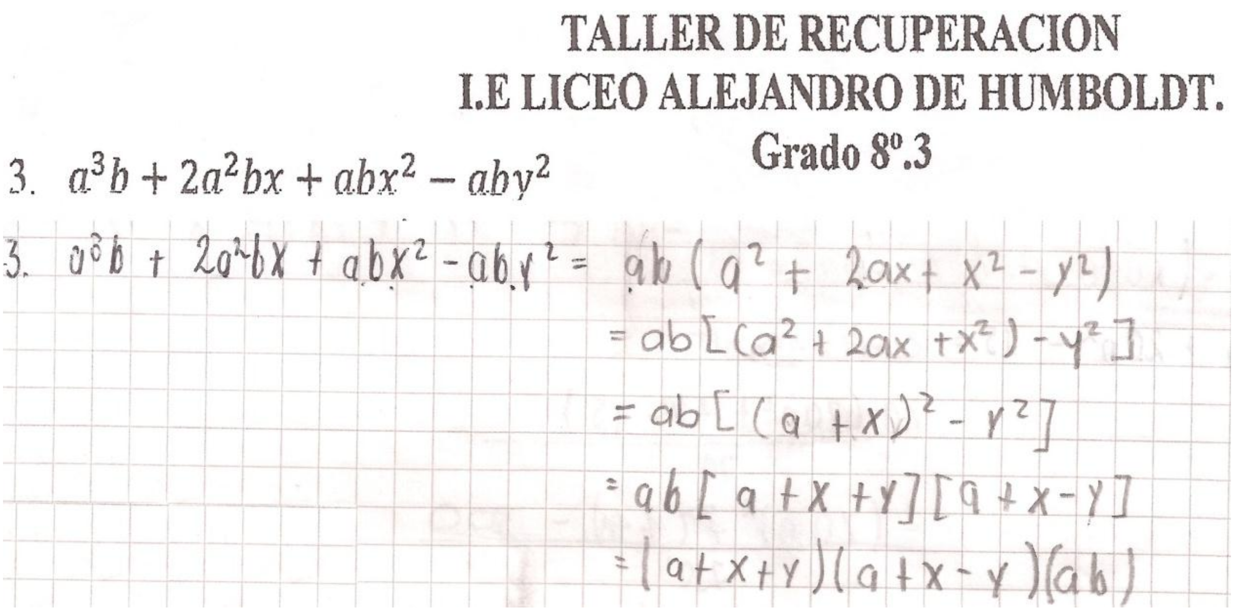
Posteriormente, proceden a hallar el área del rectángulo que formaron, realizando el producto de la longitud horizontal : $(2x - 5)$, por la longitud vertical : $(2x - 5)$; observamos que este caso las dos longitudes son las mimas, por lo que el rectángulo es un cuadrado de longitud $(2x - 5)$ cuya área total es el producto de $(2x - 5)(2x - 5) = (2x - 5)^2$. Aquí, los estudiantes transformaron la expresión algebraica $4x^2 \ -20x + 25$ en un cuadrado de área $(2x - 5)^2$ que representa la factorización del polinomio inicial.

En el proceso descrito previamente del registro (imagen 27), los estudiantes tienen en cuenta los coeficientes del polinomio escrito en un principio algebraicamente, para saber el número de fichas que deben escoger de cada tipo, después al trabajar dentro de la caja de polinomios tenían en cuenta las reglas de manejo en cuanto a la disposición de las fichas, así como su ubicación según los signos de cada cuadrante. Además, tienen en cuenta su conocimiento sobre geometría cuando hallan el área del cuadrado como el producto de sus lados. En este sentido, podemos inferir que el estudiante se está moviendo en el ámbito tanto algebraico como geométrico.

Según lo anterior, desde una perspectiva semiótica, los estudiantes hacen uso de la operación cognitiva de tratamiento y conversión, la primera está presente cuando los estudiantes están trabajando en el sistema de representación geométrico y forman el cuadrado que representa el polinomio siguiendo las reglas de uso de la caja de polinomios; además también hay tratamiento cuando el estudiante realiza la siguiente operación $(2x - 5)(2x - 5) = (2x - 5)^2$, donde usa propiedades de potencias.

Del mismo modo, la operación cognitiva de conversión está presente en dos momentos: el primero se evidencia cuando realizan una congruencia entre los términos del polinomio y el número de fichas de cada tipo, es decir, reconocen que el termino $4x^2$ se puede expresar en la caja de polinomios con cuatro fichas de área x^2, el $20x$ con 20 fichas de área x y el termino independiente 25 con 25 fichas de la unidad. Finalmente, el segundo momento en que se evidencia la operación cognitiva de conversión es cuando los estudiantes expresan las longitudes de los lados del cuadrado de manera algébrica, para lo cual suman los lados de las fichas y tiene en cuenta el signo del cuadrante en el cual están ubicadas, así expresa el área del cuadrado como el producto de estos lados

Ahora vamos a analizar la forma en como el estudiante DFV- 8°3 resolvió el tercer ejercicio del taller de recuperación, vale la pena mencionar que en este taller se pedía los estudiantes factorizar ciertos número de polinomios pero no se les indicaba el proceso (método) que debían usar, sino que ellos debían identificarlo.


TALLER DE RECUPERACION
I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.
Grado 8º.3

3. $a^3b + 2a^2bx + abx^2 - aby^2$

3. $a^3b + 2a^2bx + abx^2 - aby^2 = ab(a^2 + 2ax + x^2 - y^2)$
$= ab[(a^2 + 2ax + x^2) - y^2]$
$= ab[(a + x)^2 - y^2]$
$= ab[a + x + y][a + x - y]$
$= (a + x + y)(a + x - y)(ab)$

Imagen 28: Taller de recuperación de estudiante de 8°3.

En el anterior registro (imagen 28), podemos observar que el estudiante realiza el siguiente proceso para factorizar el polinomio $a^3b + 2a^2bx + abx^2 - aby^2$: En primer lugar reconoce que los cuatro términos del polinomio tienen en común la expresión ab, así que extrae esta expresión, obteniendo como resultado $ab(a^2 + 2ax + x^2 - y^2)$; seguidamente agrupa los tres primeros términos que se encuentran dentro del paréntesis ya que identifica que estos tres términos forman un trinomio cuadrado perfecto, así obtiene $ab[(a^2 + 2ax + x^2) - y^2]$.

Posteriormente factoriza el trinomio dentro del paréntesis $(a^2 + 2ax + x^2)$ como $(a + x)^2$ llegando a la expresión resultante $ab\ [(a + x)^2 - y^2]$, aquí identifica una diferencia de cuadrados dentro del corchete y lo factoriza como sigue $[(a + x)^2 - y^2] = [a + x + y][a + x - y]$ y obtiene la expresión resultante $ab[a + x + y][a + x - y]$. Finalmente, se da cuenta que no puede seguir realizando operaciones en la expresión obtenida y cambia los corchetes por paréntesis y cambia el orden de los factores llegando a la factorización del polinomio inicial como sigue: $a^3b + 2a^2bx + abx^2 - aby^2 = (a + x + y)(a + x - y)(ab)$.

En el proceso descrito anteriormente, podemos observar que el estudiante hace uso de sus conocimientos sobre los procesos para factorizar de factor común, trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados. De otro lado, cuando expresa los factores $ab[a + x + y][a + x -$

$y]$ como $(a+x+y)(a+x-y)(ab)$, en donde cambia el orden de los productos hace uso de una ley matemática la cual expresa que el orden de los factores no altera el producto. De lo dicho anteriormente, podemos concluir que el estudiante está trabajando al interior del sistema de representación algebraico.

Desde una perspectiva de carácter semiótico, en la anterior descripción del registro (imagen 28), el estudiante hace uso de la operación cognitiva de tratamiento en diferentes momentos en busca de la factorización del polinomio inicial $a^3b + 2a^2bx + abx^2 - aby^2$. El primer momento en donde aparece la operación de tratamiento es cuando el estudiante extrae el factor común ab de los cuatro términos del polinomio y llega a la expresión $ab(a^2 + 2ax + x^2 - y^2)$. Así mismo, hay tratamiento cuando el estudiante agrupa los tres primero términos de paréntesis formando el trinomio cuadrado perfecto $(a^2 + 2ax + x^2)$ el cual lo factoriza como $(a+x)^2$ obteniendo la expresión $ab[(a+x)^2 - y^2]$.

En seguida, en el proceso seguido por el estudiante, el hace uso de la operación cognitiva de tratamiento cuando identifica la diferencia de cuadrados en el corchete y lo factoriza como tal llegando a la expresión $ab[a+x+y][a+x-y]$. Finalmente, hay tratamiento nuevamente cuando el estudiante cambia los corchetes por paréntesis y cambia el orden de los factores siguiendo una regla matemática y obtiene la factorización del polinomio $(a+x+y)(a+x-y)(ab)$.

Resultados de la reflexión

Es importante mencionar que las operaciones cognitivas utilizadas con mayor frecuencia por parte de los estudiantes al momento de factorizar polinomios eran: tratamiento, al trabajar al interior del sistema algebraico o geométrico, donde hacían uso de los conocimientos que tenían en cada sistema para resolver los ejercicios propuestos; así mismo, está presente la conversión cuando ellos llevaban un polinomio del sistema algebraico al geométrico, representándolo en la caja de polinomios y viceversa, es decir, teniendo el polinomio factorizado geométricamente debían escribirlo en su forma algebraica.

De esta manera, las clases donde se trabajó el componente teórico relacionado a los métodos de factorización, permitió visualizar procesos algebraicos los cuales involucraron en particular operaciones de tratamiento por parte de los estudiantes, puesto que en los ejercicios propuestos en los talleres, se les pedía factorizar, lo cual implicaba la modificación de las expresiones algebraicas en el mismo sistema de representación, es decir, se les presentaba una expresión algebraica inicial y médiate pasos lógicos que respetaban las reglas del sistema de representación algebraico llegaban a una expresión final.

Del mismo modo, cuando se trabajaba con la caja de polinomios, los estudiantes hacían operaciones de tratamiento en el sistema de representación geométrico, ya que debían seguir las reglas del funcionamiento de la caja de polinomios para lograr armar un cuadrado o rectángulo según el polinomio inicial entregado, lo cual implicaba la ubicación de las fichas de forma correcta.

De otro lado, cuando se propusieron actividades con la caja de polinomios también se involucraba la operación de conversión, ya que se les proponía ejercicios en los cuales los estudiantes debían factorizar polinomios expresados algebraicamente mediante su representación geométrica, es decir, se les daba una expresión algebraica que debían representar en la caja de polinomios, hallando el área del cuadrado o rectángulo resultante, para luego regresar a la representación algebraica; de acuerdo con lo dicho, es de notar que los estudiantes debían moverse del sistema algebraico al geométrico y viceversa.

Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

- Una planeación comparada con respecto a la docencia directa se debe modificar; en nuestro caso la mayoría de las actividades se debieron ajustar en cuanto al tiempo.
- Las operaciones cognitivas utilizadas con más frecuencias por los estudiantes fueron de tratamiento y conversión, pues al realizar las actividades con la caja de polinomios debían estar en constante movimiento de un sistema de representación algebraico al geométrico y viceversa, por ende, estas operaciones fueron las que más se hicieron visibles en los análisis no quiere decir que la operación cognitiva de formación no estuviera presente, solo que se nos dificulto visualizarla en los registro que analizamos.
- Uno de los aspectos a destacar de nuestra docencia fue la labor realizada con la caja de polinomios por parte de los estudiantes, quienes trabajaban de la siguiente manera: mientras unos armaban la figura en la caja, otro dibujaba en una hoja de cuadernillo la figura resultante y algunos integrantes calculaban el área del cuadrado o rectángulo para dar respuesta a la factorización del polinomio. Además, un estudiante de cada grupo era el encargado de entregar al final de la actividad la caja con las fichas completas y organizadas. Para cada actividad la función de cada integrante del grupo era distinta. Esta distribución de roles corresponde a la caracterización de un trabajo en grupo colaborativo.
- Hubo comprensión de los casos de factorización, en tanto que los estudiantes lograron articular los dos sistemas de representación y dieron evidencia de desarrollar actividades cognitivas como se estableció en los análisis.

Recomendaciones

- Cuando se trabaja con la caja de polinomios es importante que cada grupo de estudiantes desarrolle un taller distinto, de lo contrario, se facilitaba que entre los grupos le copiaran al primero que lo solucionara.
- La organización de los grupos es pertinente que se realice por parte un profesor que conozca bien a los estudiantes, con el fin de buscar un "equilibrio académico" en todos los grupos, conformándolos de tal manera que los estudiantes con mejor desempeño se agruparan con los de un menor desempeño académico.
- Es conveniente que los talleres propuestos a los estudiantes recojan varios métodos de factorización sin indicar que método se debe utilizar en cada ejercicio, esto con el fin de que los estudiantes logren reconocer por si solos el proceso adecuado para la correcta factorización.|

Referencias Bibliográficas.

Duval., R. (1999). *SEMIOSIS Y PENSAMIENTO HUMANO: Registros Semióticos y Aprendizajes intelectuales.* Cali.: Universidad del Valle.

García, M. A. (2014). *Metodología Activa como Herramienta para el Aprendizaje De Las Operaciones Básicas En Matemática Maya.* Quetzaltenango: UNIVERSIDAD RAFAEL LANDÍVAR.

Hernández., S. (2014). *Metodología de la Investigación.* McGrawHill Education.

López Dorado, A. C., Perafan Daza, A. R., & Realpe Gómez., L. F. (2017). PROYECTO DE INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA EN EL AULA. *PIPA.* Popayán, Colombia: Universidad del Cauca.

MEN. (29 de Agosto de 2017). Decreto 1421. *Por el cual reglamenta en el marco de la educación inclusiva la intención educativa a la población con discapacidad.* Bogotá., Colombia.: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (s.f.). Pedagogía Activa. *Revolucion Educativa Colombia Aprende.*

P.E.I. (Septiembre de 2016). *Proyecto Educativo Institucional.* Popayán., Colombia.: INSTITUCIÓN EDUCATIVA ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

Salvador, A. (s.f.). *El juego como recurso didáctico en el aula de Matemáticas.* Universidad Politécnica de Madrid. Obtenido de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/12.Juego.pdf

Soto, F.; Naranjo, C. & Lozano, J. (2009). Aprendizaje del Álgebra en grupos con discapacidad auditiva utilizando la Caja de Polinomios. *REVISTA SIGMA.*, 38-60.

Tobar, Teran, Mancipe, Yanza, Fajardo, Luna. (2010). *PLAN ANUAL DE MATEMÁTICAS.* Popayán.: I. E Alejandro de Humboldt; Departamento de Matemáticas.

Anexos

La Intervención en el Aula

Temáticas a enseñar

Tema: La Factorización

Nuestro Proyecto de Intervención estará encaminado hacia la enseñanza de los procesos de Factorización, este se ejecutará en un tiempo estimado de 9 semanas, comprendidas entre el 10 de Julio de 2017 y el 8 de septiembre de 2017, que corresponden al tercer periodo académico del año lectivo.

Subtemas

Aunque a continuación los subtemas los vamos a presentar de manera independiente, es decir, se va a exhibir cada uno de los casos de factorización, nuestra intención será articular dichos casos.

1- Factor Común
2- Factor Común por Agrupación
3- Factorización de Trinomios Cuadrados Perfectos
4- Diferencia de Cuadrados
5- Trinomios cuadrado perfecto por adición y sustracción
6- Trinomio de la Forma $x^2 + bx + c$
7- Trinomio de la Forma $ax^2 + bx + c$
8- Factorización Combinando Casos

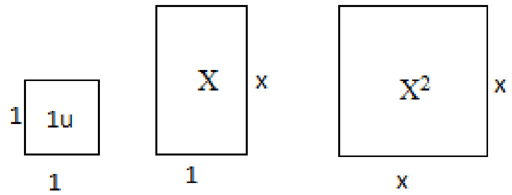
Consideraciones didácticas y metodológicas

En primer lugar, se debe tener en cuenta que al inicio de nuestra docencia directa (10 de Julio de 2017) los estudiantes vienen de las vacaciones de mitad de año, por lo que se hace indispensable recodar o reforzar conceptos ya estudiados en los cuales hayan tenido ciertas dificultades y que van a ser necesarios para el desarrollo de la temática establecida.

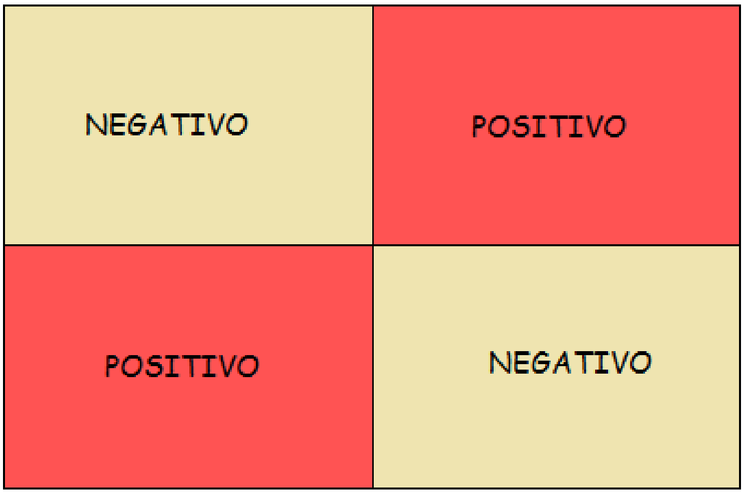
En cuanto a la orientación de los subtemas establecidos anteriormente, en general se trabajará bajo un modelo holístico, donde se darán clases magistrales, sin dejar de lado la participación activa de los estudiantes en la construcción de los conocimientos, con lo cual se busca que estos no sean solo receptores de información, sino que también se apropien de su formación y reflexionen su proceso de aprendizaje. Así mismo, es importante mencionar que la orientación de los contenidos temáticos girara en torno a una herramienta didáctica denominada: “Caja de Polinomios”.

Así pues, se hará uso de diversas estrategias metodológicas que se espera ayuden a que los estudiantes logren un mejoramiento en su aprendizaje y les permita asimilar los conceptos de una mejor manera. Del mismo modo, consideramos que algunas de las estrategias a implementar en nuestra docencia directa serán: trabajo colaborativo (actividades en grupo), uso de guías (talleres) e implementación de material lúdico en el aula (Caja de Polinomios), con lo cual se pretende que los estudiantes se interesen por el aprendizaje de los conceptos matemáticos que se están trabajando y a la vez puedan tener otra visión de las matemáticas.

Teniendo en cuenta que el uso de material concreto puede ayudar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje, en nuestro proyecto de intervención pedagógica en el aula haremos uso de la “Caja de Polinomios” como una herramienta didáctica para la enseñanza de la factorización de trinomios, esta caja es un “rompecabezas” que permite representar geométricamente la factorización de trinomios; dicha caja contiene 3 clases de fichas, las cuales se muestran a continuación:

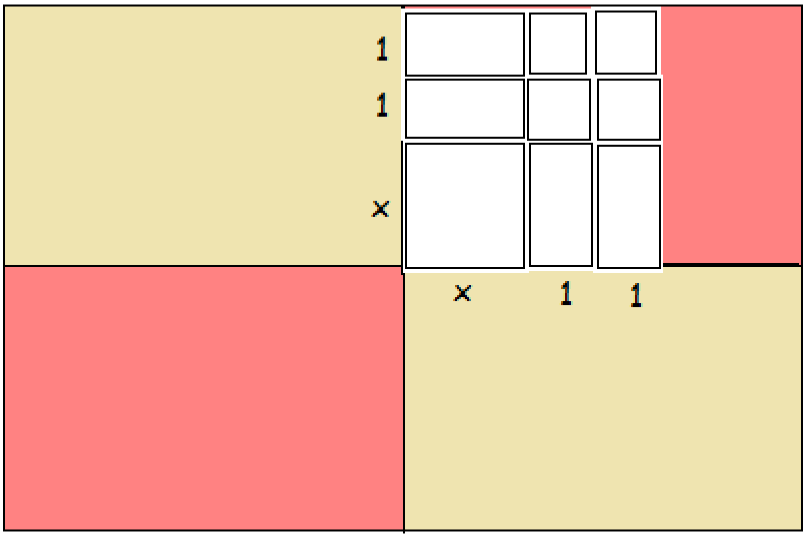


La ficha que se tomó como unidad es la marcada con $1u^2$, cuyos lados representan la unidad de medida, las fichas marcadas con x, son rectángulos de lados x y 1(unidad de medida) y las fichas etiquetadas con x^2 son cuadrados de lado x. Además, se dispondrá de un plano cartesiano (una base en madera) donde irán ordenadas las fichas según lo requiera el ejercicio.



Un trinomio es factorizable si se puede representarse como un rectángulo cuando se utiliza la Caja de Polinomios; en este caso, los factores son las dimensiones consecutivas de dos lados del rectángulo.

A manera de ejemplo, tenemos el trinomio $x^2 + 4x + 4$. Para factorizar este trinomio por medio de la caja, se necesitan nueve fichas como lo indica la gráfica que sigue



La factorización simbólica de esta factorización se resume como:

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$$

De esta manera, Espinosa (2013) parafraseando a Vallejo (2009) intenta mostrar una nueva posibilidad de enseñar la factorización de polinomios en relación con lo geométrico, en este caso, con el modelo de área que plantean en su investigación, donde se utilizan figuras geométricas. Pero, en este trabajo se identifica un aspecto diferente: la enseñanza de la factorización de polinomios usando materiales manipulativos que, en el caso de la caja de polinomios, se conforma por figuras geométricas.

Espinosa (2013) citando a Hernández afirma que el material manipulativo denominado Caja de polinomios:

Está diseñado para que el estudiante desarrolle conceptos matemáticos desde una perspectiva constructivista. Mediante el uso de dichas piezas, los estudiantes exploran y conceptualizan las nociones básicas de Pre álgebra y Álgebra, pueden crear reglas en forma inductiva, es decir, van de lo concreto a lo abstracto.

Finalmente, como estrategia didáctica se tendrá en cuenta la participación de los estudiantes, el trabajo colaborativo del grupo, interpretación del lenguaje matemático al manipular una expresión algebraica y su posible representación geométrica; el respeto por los compañeros en el desarrollo de las actividades propuestas y mantener la motivación de los estudiantes en el trabajo realizado en los espacios de conceptualización.

La evaluación

En primer lugar, es importante mencionar que nosotros pretendemos realizar una evaluación integral en cuanto sea posible, es decir, valorar tanto el proceso actitudinal como académico de los estudiantes, más aun, acatando una de las recomendaciones del profesor titular, la cual consiste en valorar el trabajo que el estudiante realiza en el aula, puesto que el trabajo por fuera de la institución educativa se dificulta por circunstancias familiarízales, sociales, económicas, entre otras.

Así mismo es importante conocer algunos de los Criterios de Evaluación, que el Departamento de Matemáticas ha plasmado, (Tobar, Teran, Mancipe, Yanza, Fajardo, Luna, 201O)*:*

La reflexión sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer, según los estándares, y lo que en realidad saben y saben hacer, según las evaluaciones, será la base para promover prácticas pedagógicas que permitan mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Se tomará como punto de vista los cambios observados en los estudiantes desde sus estados iniciales de conocimiento y actuación (evaluación diagnóstica), pasando por el análisis de los comportamientos y logros durante los procesos de enseñanza aprendizaje (evaluación formativa) hasta llegar a algún estado final transitorio (evaluación sumativa)

En todos los casos se evaluará continuamente al estudiante en comportamientos que muestren su trabajo cotidiano: su actitud, su dedicación, su interés, su participación, su habilidad para asimilar y comprender informaciones y procedimientos, su refinamiento progresivo en los métodos para conocer, para analizar, crear y resolver problemas; y su inventiva o tendencia a buscar nuevos métodos o respuestas para las situaciones dadas.

La evaluación será considerada como una plataforma que le permita al estudiante aprender matemática de forma natural estableciendo un puente entre el colegio y la matemática cotidiana, destacando la utilidad del pensamiento matemático y destacando lo que es más importante aprender.

En el aspecto de evaluación se tendrá en cuenta los trabajos y actividades en grupo e individuales (orales, escritos, actividades de desempeño, participación, aportes, etc.).

Estos criterios los consideramos muy acordes al trabajo que nosotros vamos a realizar, pues también conciben la evaluación como un proceso integral, el cual se construye de la mano con el estudiante.

Así mismo, teniendo en cuenta que nuestro proyecto de intervención en el aula va enfocado al uso de material manipulativo con el cual se pretende que los estudiantes logren un mejor aprendizaje de la temática a enseñar (factorización), una de las estrategias que se tendrá en cuenta para la evaluación es que los estudiantes usando la “caja de polinomios” factoricen ciertos trinomios.

Lo anterior no deja de lado la importancia del trabajo con lápiz y papel, es decir no se limitará solamente a que el estudiante aprenda a usar la caja de polinomios, sino que se busca que esta sea una herramienta geométrica que les ayude a asociar la factorización como una forma de expresar un polinomio en factores, así mismo se tendrá en cuenta que el estudiante vaya de lo concreto a lo abstracto y viceversa.

Finalmente, se harán tanto talleres como pruebas escritas, algunas con el uso de la “caja de polinomios” y otras que permitan tener un seguimiento de la aplicación de los métodos de factorización respecto al manejo de la técnica.

Portafolio

Actividad 1.

Tema: Taller de nociones previas.

Objetivo: Recordar conceptos previos que serán necesarios para el desarrollo de los contenidos de factorización.

Tiempo estimado: 2 horas.

Consideraciones matemáticas:

Los contenidos temáticos que vamos a tener en cuenta para el desarrollo de esta clase, son los Productos y Cocientes Notables, además, algunas propiedades de Potenciación y algunas propiedades de los números Reales, entre las que destacamos, la Propiedad Distributiva del producto respecto a la suma.

Algunos de los conceptos a recordar serán:

1. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

$$a(b+c) = ab + ac.$$

2. Producto de potencias de igual base.

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

3. Cociente de potencias de igual base.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

4. Cuadrado de una suma.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

5. Cuadrado de la diferencia.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

6. Suma por diferencia.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

7. Cociente de la Diferencia de los Cuadrados de dos cantidades entre la suma de las cantidades.

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$$

8. Cociente de la Diferencia de los Cuadrados de dos cantidades entre la Diferencia de las cantidades.

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$$

9. Cociente de la Suma de los cubos de dos cantidades, entre La suma de las cantidades.

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^3$$

Método y Actividad:

En un primer momento, creemos necesario reafirmar ciertas condiciones y acuerdos existentes en el aula para el buen desarrollo de nuestra práctica y con el fin de propiciar un buen ambiente de aprendizaje.

En cuanto al desarrollo temático, en esta primera clase después de las vacaciones se hará un recuento de los conceptos vistos anteriormente y que se hacen indispensables para comenzar la temática de factorización.

Sabiendo que los estudiantes ya han visto estas temáticas, se pretende que resuelvan el siguiente taller de aplicación de los conceptos y propiedades. Para el desarrollo de este taller se organizarán grupos de 4 estudiantes y se permitirá el uso de apuntes. Al finalizar la actividad se recibirá el taller solucionado por lo estudiantes.

TALLER.

Resolver:

- $5\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right)=$
- $3\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{5}\right)=$
- $x^3x^8x^2=$
- $a^{\frac{5}{3}}a^{\frac{1}{2}}=$
- $\frac{x^{2/5}}{x^{3/5}}=$
- $x^{-3/4}x^{1/4}=$
- $(3m+5n)^2=$
- $(x^{-2}+2y^{-1})^2=$
- $(1-3z^2)^2=$
- $(3m^2-5n^3)^2=$
- $(3m-n)(3m+n)=$
- $(y^3+7)(y^3-7)=$
- $\frac{m^2-n^2}{m+n}=$
- $\frac{9x^2-16y^2}{3x+4y}=$
- $\frac{m^2-49}{m-7}=$
- $\frac{m^4-16}{m^2-4}=$
- $\frac{\boldsymbol{x^3+y^3}}{\boldsymbol{x+y}}=$

Evaluación:

En esta actividad se evaluará el comportamiento y el trabajo colaborativo de los estudiantes en el aula. Al final de la actividad se recibirá el taller para darle una valoración cuantitativa a los procesos realizados por los estudiantes y en general se tendrá en cuenta que hayan aplicado los conceptos previos de una manera correcta.

Actividad 2.

Tema: Factor Común.

Objetivo: Comprender el método de factor común para factorizar un polinomio y relacionar este método con la propiedad distributiva.

Tiempo estimado: 2 horas.

Consideraciones matemáticas.

Cuando escribe una expresión algebraica como un producto, los términos de este producto reciben el nombre de factores. Teniendo en cuenta que factorizar un polinomio significa expresarlo como producto de polinomios de menor grado, este primer método de factorización consiste en encontrar el factor común de cada una de los términos del polinomio.

El factor común será el máximo común divisor (MCD) de cada uno de los coeficientes de los términos del polinomio acompañado de la(s) variables comunes con su menor exponente. Este factor común será el primer término del producto.

Para encontrar el segundo término tal que al multiplicarlo por el factor común de como resultado el polinomio inicial, bastara con dividir cada uno de los términos del polinomio entre el factor común.

Método y actividad.

Para iniciar, se recordará el concepto de máximo común divisor y se ilustrará algunos ejemplos, así mismo se pedirá a los estudiantes realizar algunos ejercicios en clase.

1. Ejemplos: Hallar:

- MCD (3,12)
- MCD (8,24)

2. Ejercicios para los estudiantes: hallar

- MCD (45,60)
- MCD (36,5)

Posteriormente se mostrará algunos ejemplos en los cuales se hallará el factor común de algunos términos:

- $8abc^4$ y $16a^3b^2c$
- $2x^8z^4$; $4x^3y^2$; $-8x^3w$
- $35a^3b^8c$; $-7a^4b^7c^2$; $14a^5b^6d^3$; $-21a^6b^5$

A continuación, se explicará mediante algunos ejemplos el método de factorización de polinomios aplicando el método de factor común.

Ejemplos.

1. Factorizar: $16x + 24$

- Hallemos el factor común de cada término del polinomio, esto es, hallemos el factor común de $16x$ y 24. Tenemos que la variable x no es común a los dos términos, luego el factor común será solamente el MCD(16,24)= 8.
- Hallemos el segundo factor que multiplicado por 8 dé como resultado el polinomio inicial, para esto bastara dividir cada termino entre el factor común 8.

$$\frac{16x}{8} = 2x$$

$$\frac{24}{8} = 3$$

Luego $16x + 24 = 8(2x + 3)$

2. Factorizar: $25x^4 - 15x^3 + 35x^8 - 45x^2$

- MCD (25,15,35.45) =5
- El factor común será el 5 acompañado de la variable con su menor exponente, así $5x^2$.
- Ahora hallemos loa términos por los cuales se debe multiplicar el factor común para obtener como resultado el polinomio inicial:

$$\frac{25x^4}{5x^2} = 5x^2$$

$$\frac{-15x^3}{5x^2} = -3x$$

$$\frac{35x^8}{5x^2} = 7x^6$$

$$\frac{-45x^2}{5x^2} = -9$$

Luego: $25x^4 - 15x^3 + 35x^8 - 45x^2 = 5x^2(5x^2 - 3x + 7x^6 - 9)$

Ejercicio para los estudiantes:

Factorizar:

- $24m^6n^2 + 12m^3n^5 + 4m^4n^3 - 8m^3n^2 + 4m^2n$

Evaluación:

En esta actividad se tendrá en cuenta la participación activa de los estudiantes y su actitud frente al desarrollo de la actividad en el aula.

Actividad 3.

Tema: Factor común por agrupación de términos.

Objetivo: Mostrar la factorización de un polinomio por medio de agrupación de términos.

Tiempo estimado: 1 hora.

Consideraciones matemáticas:

- El método de Factor común por agrupación de términos, consiste en agrupar entre paréntesis los términos que tienen algún factor común, separando los paréntesis por el signo del primer término de cada grupo.
- La agrupación puede hacerse generalmente de más de un modo con tal que los términos que se agrupen tengan algún factor común, y siempre que las cantidades que quedan dentro del paréntesis después de sacar el factor común en cada grupo, sean exactamente iguales.
- Después de lo anterior se utiliza el procedimiento del caso I, Factor Común Polinomio.

Método y/o Actividad:

En un primer momento, se ilustrará el anterior procedimiento mediante los siguientes ejemplos:

$\boldsymbol{a})\ ax\ +bx\ +ay\ +by$

- Agrupar términos que tienen factor común: $(ax+bx)\ +\ (ay+by)$
- Factorizar por medio de factor común: $x(a+b)\ +\ y(a+b)$
- Formando factores: uno con los términos con factor común y otros con los términos no comunes se llega a:

$$(a+b)(x+y)$$

$\boldsymbol{b})\ 2x^2\ -3xy-4x+6y$

- Agrupando términos que tiene factor común: $(2x^2-3xy)-(4x-6y)$
- Factorizar por medio de factor común: $x(2x-3y)-2(2x-3y)$
- Formando factores: $(2x-3y)(x-2)$

c) $a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$

- Agrupando el primer término con el tercero, el segundo con el cuarto y el quinto con el sexto, tenemos que:

$$a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y = (a^2x - 2a^2y) - (ax^2 - 2axy) + (x^3 - 2x^2y).$$

$$= a^2(x - 2y) - ax(x - 2y) + x^2(x - 2y)$$

$$= (x - 2y)(a^2 - ax + x^2).$$

Durante el desarrollo de los ejemplos ya mencionados se tendrá en cuenta la participación de los estudiantes, es decir, se les realizaran preguntas con el fin de constatar que están entendiendo el procedimiento.

Luego se les pedirá a los estudiantes que resuelvan los siguientes ejercicios:

- $x^2 - a^2 + x - a^2x$ Solución: $(x - a^2)(x + 1)$
- $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$ Solución: $(ax - b)(4a^2 - 3m)$
- $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$ Solución: $(a^2 - 3b)(2x - 5y)$
- $20ax - 5bx - 2by + 8ay$ Solución: $(4a - b)(5x + 2y)$
- $2x^3 - nx^2 + 2xz^2 - nz^2 - 3ny^2 + 6xy^2$ Solución: $(2x - n)(x^2 + 3y^2 + z^2)$

Evaluación

Se tendrá en cuenta la actitud y disponibilidad para el trabajo por parte del estudiante en las actividades presentadas.

Actividad 4.

Tema: Taller Factor común y Factor común por agrupación de términos**.**

Objetivo: Aplica adecuadamente el método de Factor Común y Factor común por Agrupación para factorizar polinomios.

Tiempo estimado: 2 horas.

Consideraciones matemáticas:

- Factor común.
- Factor común por agrupación.

Método y actividad.

Inicialmente para la resolución de este taller se organizará a los estudiantes en grupos de 4 personas.

<u>Taller.</u>

- Factorizar:

1. $b + b^2$
2. $3a^3 - a^2$
3. $8m^2 - 12mn$
4. $35m^2n^3 - 70m^3$
5. $24a^2xy^2 - 36x^2y^4$
6. $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$
7. $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$
8. $9a^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3$
9. $a^{20} - a^{16} + a^{12} - a^8 + a^4 - a^2$
10. $100a^2b^3c - 150ab^2c^2 + 50ab^3c^3 - 200abc^2$
11. $2(x - 1) + y(x - 1)$
12. $a(n + 2) + n + 2$
13. $1 - x + 2a(1 - x)$
14. $a^3(a - b + 1) - b^2(a - b + 1)$
15. $a^2 + ab + ax + bx$
16. $mx - 2nx - 2my + 4ny$

17. $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$
18. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$
19. $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n$
20. $3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2$
21. $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$
22. $ax - 2ay + bx - 2by + cx - 2cy$
23. $2x^3 - nx^2 + 2xz^2 - nz^2 - 3ny^2 + 6xy^2$
24. $a^2b^3 - n^4 + a^2b^3x^2 - n^4x^2 - 3a^2b^3x + 3n^4x$
25. $2mp^3 + 4ms - 2mt - 3p^3n - 12ns + 6nt$

Evaluación.

Se valorará el comportamiento y actitud del estudiante en el aula frente a la actividad. Respecto al desarrollo del taller se tendrá en cuenta que el estudiante aplique el método de factor común y factor común por agrupación para factorizar los polinomios dados. Al finalizar la actividad, se recibirá lo hecho por los estudiantes.

Actividad 5.

Tema: Prueba escrita: Factor común y Factor común por agrupación de términos**.**

Objetivo: Resuelve los ejercicios presentados en la prueba escrita.

Tiempo estimado: 1 horas.

Consideraciones matemáticas:

- Factor común.
- Factor común por agrupación.

Método y actividad.

Para cada octavo los exámenes fueron diferentes:

EXAMEN 1.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º-1.

28 DE JULIO DE 2017

Nombre: ____

- Factorizar:
  1. $18x^2y^4 - 42x^5y^2 - 12x^3y^7 + 60x^6y^8$
  2. $2m^2 + m + 6mn + 3n$
  3. $m(x + 2) + x + 2 + 3(x + 2)$
  4. $7m^2 - 13n^2y + 7my - 13mn^2$
  5. $xy^3 - 4xz + 2xt - 3y^3n + 12nz - 6nt$
  6. $a^3b^5 - n^5 + a^3b^5x^3 - n^5x^3 - 5a^3b^5x^2 + 5n^5x^2$

EXAMEN

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

26 DE JULIO DE 2017

Nombre: ____

- Factorizar:

1. $15x^2y^4 - 45x^3y^5 - 60x^2y^6 + 30x^6y^8$
2. $ax - 2bx - 2ay + 4by$
3. $x(m+4) - y(m+4) + z(m+4) + m + 4$
4. $3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2$
5. $6ax^3 - 18axy + 24axz - 5x^2 + 15y - 20z$
6. $a^2b^3 - n^4 + a^2b^3x^2 - n^4x^2 - 3a^2b^3x + 3n^4x$

Evaluación:

En este caso, a cada ejercicio se le asigna un valor numérico entre 0.0 y 0.8

Actividad 6.

Tema: Caja de polinomios

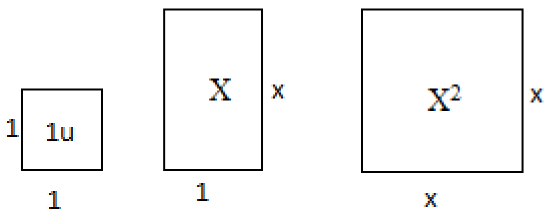
Objetivos: Familiarizar al estudiante con el uso de la caja de polinomios y resolver algunos ejercicios.

Tiempo estimado: 1 hora.

Método y actividad.

Inicialmente se conformarán grupos de 3 estudiantes a los cuales se les entregara una caja de polinomios con las respetivas fichas y se les pedirá que formen figuras rectangulares de diferentes tamaños.

Luego se les darán las dimensiones que tendrán las fichas



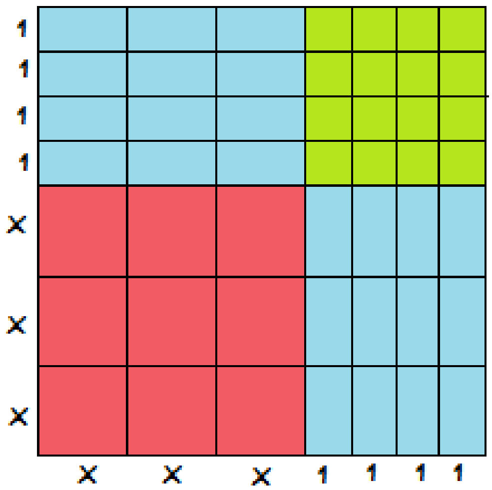
A continuación, se les explicara que:

La ficha rotulada con 1, se tomó 1 como unidad de medida,

Las fichas rotuladas como x son rectángulos de lados x y 1 como unidad de medida;

Las fichas rotuladas con x^2 son cuadrados de lado x.

Luego se le pedirá a los estudiantes que tomen 9 fichas rotuladas con x^2, 24 fichas rotuladas con x y 16 fichas rotuladas con 1u, para lo cual se les pedirá que formen un rectángulo, que para este caso se formara un cuadrado.



Seguidamente se les pedirá a los estudiantes que realicen el siguiente taller utilizando la caja de polinomios. Se conformaran 10 grupos de trabajo, cada grupo trabajara en un taller distinto a los demás:

TALLER- CAJA DE POLINOMIOS

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 1

- Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - 2x + 1$
2. $4x^2 + 8x + 4$
3. $9x^2 - 6x + 1$
4. $x^2 + 6x + 9$
5. $9x^2 - 30x + 25$
6. $4x^2 - 24x + 36$
7. $x^2 - 8x + 16$
8. $9x^2 - 18x + 9$
9. $4x^2 + 4x + 1$
10. $4x^2 - 20x + 25$

TALLER- CAJA DE POLINOMIOS

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

____

Grupo 2

- Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - 4x + 4$
2. $4x^2 - 16x + 16$
3. $x^2 + 2x + 1$
4. $4x^2 + 8x + 4$
5. $9x^2 - 12x + 4$
6. $x^2 - 12x + 36$
7. $4x^2 - 20x + 25$
8. $9x^2 - 6x + 1$
9. $x^2 + 8x + 16$
10. $9x^2 - 24x + 16$

TALLER- CAJA DE POLINOMIOS

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 3

- Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - 12x + 36$
2. $4x^2 + 4x + 1$
3. $9x^2 - 30x + 25$
4. $4x^2 - 16x + 16$
5. $x^2 + 6x + 9$
6. $4x^2 - 20x + 25$
7. $x^2 - 4x + 4$
8. $9x^2 - 18x + 9$
9. $x^2 - 12x + 36$
10. $9x^2 - 12x + 4$

TALLER- CAJA DE POLINOMIOS
I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.
GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 4

- Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 + 8x + 16$
2. $4x^2 - 20x + 25$
3. $9x^2 - 18x + 9$
4. $x^2 - 6x + 9$
5. $4x^2 + 4x + 1$
6. $x^2 - 12x + 36$
7. $9x^2 - 6x + 1$
8. $4x^2 - 16x + 16$
9. $9x^2 - 12x + 4$
10. $x^2 + 2x + 1$

TALLER- CAJA DE POLINOMIOS

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 5

- Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 + 2x + 1$
2. $4x^2 - 16x + 16$
3. $x^2 + 6x + 9$
4. $9x^2 - 18x + 9$
5. $x^2 + 8x + 16$
6. $4x^2 - 4x + 1$
7. $x^2 - 10x + 25$
8. $4x^2 - 12x + 9$
9. $9x^2 - 30x + 25$
10. $x^2 + 2x + 1$

TALLER- CAJA DE POLINOMIOS

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 6

- Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - 12x + 36$
2. $4x^2 - 24x + 36$
3. $9x^2 - 18x + 9$
4. $x^2 + 4x + 4$
5. $4x^2 + 8x + 4$
6. $x^2 - 12x + 36$
7. $9x^2 - 30x + 25$
8. $x^2 + 6x + 9$
9. $x^2 - 4x + 4$
10. $9x^2 - 24x + 16$

TALLER- CAJA DE POLINOMIOS

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 7

- Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 + 2x + 1$
2. $9x^2 - 30x + 25$
3. $4x^2 + 8x + 4$
4. $x^2 + 6x + 9$
5. $4x^2 - 20x + 25$
6. $x^2 - 4x + 4$
7. $4x^2 - 24x + 36$
8. $9x^2 - 18x + 9$
9. $x^2 + 4x + 4$
10. $9x^2 - 12x + 4$

TALLER- CAJA DE POLINOMIOS

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 8

- Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 + 4x + 4$
2. $4x^2 - 20x + 25$
3. $x^2 - 4x + 4$
4. $4x^2 - 24x + 36$
5. $9x^2 - 18x + 9$
6. $x^2 - 10x + 25$
7. $9x^2 - 12x + 4$
8. $x^2 + 2x + 1$
9. $4x^2 - 12x + 9$
10. $9x^2 - 30x + 25$

TALLER- CAJA DE POLINOMIOS

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 9

- Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - 12x + 36$
2. $9x^2 - 30x + 25$
3. $x^2 + 6x + 9$
4. $x^2 - 4x + 4$
5. $9x^2 - 24x + 16$
6. $x^2 - 8x + 16$
7. $9x^2 - 18x + 9$
8. $4x^2 + 4x + 1$
9. $x^2 + 6x + 9$
10. $4x^2 - 20x + 25$

TALLER- CAJA DE POLINOMIOS

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 10

- Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - 10x + 25$
2. $4x^2 - 12x + 9$
3. $9x^2 - 24x + 16$
4. $x^2 + 2x + 1$
5. $9x^2 - 30x + 25$
6. $4x^2 + 4x + 1$
7. $9x^2 - 6x + 1$
8. $x^2 - 12x + 36$
9. $4x^2 - 16x + 16$
10. $9x^2 - 12x + 4$

Evaluación.

Cada grupo deberá entregar en una hoja de cuadernillo los 10 ejercicios solucionados mediante la caja de polinomios, dibujando la figura obtenida al factorizar cada uno de los polinomios.

Actividad 7.

Tema: Trinomio Cuadrado Perfecto

Objetivo: Identificar y resolver de manera correcta los trinomios cuadrados perfectos.

Tiempo estimado: 1 horas.

Consideraciones matemáticas:

- Trinomio cuadrado perfecto: se identifica por tener tres términos, de los cuales dos tienen raíces cuadradas exactas y el restante equivale al doble producto de las raíces del primero por el segundo
- Para solucionar un trinomio cuadrado perfecto debemos reordenar los términos dejando de primero y de tercero los términos que tengan raíz cuadrada, luego extraemos la raíz cuadrada del primer y tercer término y los escribimos en un paréntesis, separándolos por el signo que acompaña al segundo término, al cerrar el paréntesis elevamos todo el binomio al cuadrado.
- Sabemos que $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Luego, se tendrá inversamente que $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

Método y/o Actividad:

Se iniciará mediante los siguientes ejemplos:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

En este orden de ideas, para factorizar un trinomio cuadrado perfecto se debe proceder de la siguiente manera:

1. Ordenar los términos del trinomio de manera descendente o ascendentemente.
2. Extraer la raíz cuadrada del primer término.
3. Extraer la raíz cuadrada del tercer término
4. Verificar si el segundo término, coincide con el doble producto de las raíces extraídas.
5. En caso afirmativo, el trinomio se puede factorizar utilizando las raíces extraídas y teniendo en cuenta el signo del segundo término del trinomio inicial y elevando al cuadrado.

Se realizarán tres ejemplos donde se les explicara como factorizar trinomios cuadrados perfectos:

Ejemplo 1:

$-60x + 25x^2 + 36$

Ordenamos el trinomio respecto a la variable x:

$25x^2 - 60x + 36$

Hallamos las raíces cuadradas del primer y tercer término

Raíz cuadrada de $25x^2 = 5x$

Raíz cuadrada de 36 = 6

El segundo término es igual al doble producto de las raíces

$2(5x)(6) = 60x$

Se factorizará el trinomio cuadrado perfecto de la siguiente manera:

$25x^2 - 60x + 36 = (5x - 6)(5x - 6) = (5x - 6)^2$

Se le pedirá al estudiante que resuelva los siguientes ejercicios:

- $25m^2 - 100m + 100$
- $x^4y^4 + 21x^2y^2 + 121$

Durante el desarrollo de los ejemplos ya mencionados se tendrá en cuenta la participación de los estudiantes, es decir, se les realizaran preguntas con el fin de constatar que están entendiendo el procedimiento.

Evaluación

Se tendrá en cuenta la participación activa por parte del estudiante, en las actividades realizadas.

Actividad 8.

Tema: Diferencia de Cuadrados

Objetivo: Resuelve ejercicios expresando la diferencia de dos términos cuadrados en forma equivalente al producto de dos polinomios.

Tiempo estimado: 1 hora.

Consideraciones matemáticas:

En general, decimos que, para factorizar una diferencia de cuadrados perfectos, debemos obtener las raíces cuadradas de cada uno de los términos y realizar el producto de la suma por la diferencia de la raíz de estos términos.

Al estudiar los productos notables teníamos que:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

En donde el resultado es una diferencia de cuadrados, para este capítulo se tomará la igualdad como sigue:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Donde siempre la diferencia de cuadrados es igual al producto de la suma por la diferencia de sus bases.

Pasos:

1. Se extrae la raíz cuadrada de ambos términos.
2. Se multiplica la suma por la diferencia de estas cantidades (el segundo término del binomio negativo es la raíz del término del binomio que es negativo).

<u>Ejemplo explicativo:</u>

$$Factorizar\ x^2-y^2$$

$Raices: \sqrt{x^2};\ \ \sqrt{y^2}.\ Por\ lo\ tanto,\ la\ respuesta\ es, (x+y)(x-y)$

Método y/o Actividad:

En primer lugar, se recordará uno de los productos notables ya estudiados anteriormente:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Donde consideraremos la igualdad en sentido contrario (simetría de la igualdad), obteniendo:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Ésta es la factorización de una diferencia de cuadrados perfectos.

Luego, se realizarán los siguientes ejemplos:

$$36m^2-49n^2.$$

Solución:

La expresión dada es una diferencia de cuadrados pues cada término tiene raíz cuadrada exacta:

$$\sqrt{36m^2}-\sqrt{49n^2}$$

Las raíces cuadradas de cada término son:

$$6m\ y\ 7n$$

Luego, por factorización obtenemos: $36m^2-49n^2=(6m+7n)(6m-7n)$.

Después, se les dirá a los estudiantes que este método se puede "generalizar" para expresiones algebraicas, es decir, para la factorización de la diferencia de expresiones compuestas, en este caso, es útil el manejo de los signos de agrupación: paréntesis y corchetes.

Ejemplo:

$$Factorizar: (x+y)^2-(x-y)^2$$

Solución:

Hallemos las raíces cuadradas de cada término:

$$\sqrt{(x+y)^2} = (x+y) \;\; y \;\; \sqrt{(x-y)^2} = (x-y)\,, asi:$$

$$[(x+y)^2 - (x-y)^2] = [(x+y) + (x-y)][(x+y) + (x-y)]$$

$$= [x+y+x-y][x+y-x+y]$$

$$= (2x)(2y) = 4xy$$

Evaluación.

Se tendrá en cuenta la participación activa de los estudiantes en la actividad, así mismo, se proporcionará “puntos” a los estudiantes que realicen los ejercicios.

Actividad 9.

Tema: Trinomios cuadrado perfecto por adición y sustracción.

Objetivo: mostrar la técnica de sumar y restar una cantidad para llevar un polinomio a la forma de trinomio cuadrado perfecto.

Tiempo estimado: 2 horas.

Consideraciones matemáticas.

Existen trinomios para para los cuales dos de sus términos tienen raíces cuadradas exactas pero el tercer término no es equivalente al doble producto de las raíces cuadradas de los otros dos términos. Pero es posible llevarlo a la forma de un trinomio cuadrado perfecto sumando y restando una misma cantidad. A continuación, se presenta el proceso para factorizar un trinomio con estas características:

- Se ordena el trinomio.
- Se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer término.
- Se halla el doble producto de las raíces halladas en el paso anterior y se compara el resultado con el segundo término del trinomio.
- Se suma o resta, según sea el caso, al trinomio la cantidad necesaria para obtener el segundo término del trinomio cuadrado perfecto hallado en el anterior paso.
- Si en el anterior paso se sumó cierta cantidad, se resta esa misma cantidad para no alterar el trinomio (de igual manera, si se restó cierta cantidad ahora se le sumara la misma).

Método y/o Actividad:

Inicialmente se ilustrará el anterior proceso con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Factorizar $4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4$.

- El polinomio ya está organizado, ahora inspeccionemos si es un trinomio cuadrado perfecto. Hallando las raíces del primer y tercer término obtenemos $2a^2$ y $3b^2$ respectivamente.

- Tenemos que el doble de la raíz cuadrada de los términos que obtuvimos anteriormente es $12a^2b^2$, el cual no corresponde al segundo término del trinomio ($8a^2b^2$), luego este no es un trinomio cuadrado perfecto.
- Para obtener el trinomio cuadrado perfecto, debemos conseguir que el segundo término sea $12a^2b^2$, así que sumamos $4a^2b^2$ y restamos esta misma cantidad para no afectar el trinomio inicial.

$$\begin{array}{r}4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4 \qquad\quad \\ +4a^2b^2 \qquad\quad -4a^2b^2 \\ \hline 4a^4 + 12a^2b^2 + 9b^4 - 4a^2b^2\end{array}$$

- Factorizando el trinomio cuadrado perfecto obtenemos:

$$(4a^4 + 12a^2b^2 + 9b^4) - 4a^2b^2 = (2a^2 + 3b^2)^2 - 4a^2b^2$$

- Factorizando esta diferencia de cuadrados:

$$(2a^2 + 3b^2 + 2ab)(\,2a^2 + 3b^2 - 2ab)$$

- Por lo tanto, la factorización del polinomio es:

$$4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4 = (2a^2 + 3b^2 + 2ab)(\,2a^2 + 3b^2 - 2ab)$$

Ejemplo 2: factorizar $49x^4 - 151x^2x^4 + 81y^8$.

- El trinomio está organizado respecto a la variable x.
- La raíz cuadrada del primer término es $7x^2$, y la del tercer termino $9y^2$.
- Para que sea trinomio cuadrado perfecto el segundo término debía ser

$$-2(7x^2)(\,9y^2) = -126x^2y^2$$

- Sumamos y restamos $25x^2y^2$:

$$\begin{array}{r}49x^4 - 151x^2x^4 + 81y^8 \qquad\quad \\ +25x^2y^2 \qquad\quad -25x^2y^2 \\ \hline 49x^4 - 126x^2x^4 + 81y^8 - 25x^2y^2\end{array}$$

- Luego:

$$\begin{aligned}49x^4 - 126x^2x^4 + 81y^8 - 25x^2y^2 &= (49x^4 - 126x^2x^4 + 81y^8) - 25x^2y^2 \\ &= (7x^2 - 9y^2)^2 - 25x^2y^2 \\ &= (7x^2 - 9y^2 + 5xy)(\,7x^2 - 9y^2 - 5xy)\end{aligned}$$

- Finalmente, tenemos que la factorización del polinomio es:

$$49x^4 - 151x^2x^4 + 81y^8 = (7x^2 + 5xy - 9y^2)(\,7x^2 - 5xy - 9y^2)$$

Para finalizar la clase, se pedirá a los estudiantes que factoricen el siguiente trinomio:

$$4x^4 - 29x^2 + 25$$

Evaluación.

En general, se tendrá en cuenta la disposición de los estudiantes en el aula en el transcurso de la clase, así mismo mediante el ejercicio que se platea a los estudiantes para que lo resuelvan en el aula, se observara la forma en como aplican el método.

Actividad 10.

Tema: Taller - Trinomio Cuadrado Perfecto, Diferencia de Cuadrados y Trinomios Cuadrado Perfecto por Adición y Sustracción.

Objetivo: Aplica adecuadamente los métodos de Trinomio Cuadrado Perfecto, Diferencia de Cuadrados y Trinomios Cuadrado Perfecto por Adición y Sustracción, para factorizar polinomios.

Tiempo estimado: 2 horas.

Consideraciones matemáticas:

- Trinomio Cuadrado Perfecto.
- Diferencia de Cuadrados.
- Trinomios Cuadrado Perfecto por Adición y Sustracción.

Método y actividad.

Inicialmente para la resolución del siguiente taller se organizará a los estudiantes en grupos de 2 personas:

TALLER

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

Grado 8º.

Factorizar:

1. $25m^2 - 100m + 100$
2. $169a^2 - 100$
3. $9 - (m + n)^2$
4. $64x^2 + 16xy + y^2$
5. $x^8 + 3x^4 + 4$
6. $4m^2 - 81$
7. $121a^2 - 44ab + 4b^2$
8. $x^4 + 6x^2 + 9$
9. $196a^2 - 289$
10. $a^{10} + 8a^5$+16

11. $225 + 5m^2 + m^4$
12. $196x^2 - 336xy + 144y^2$
13. $x^{2t} - y^{4k}$
14. $121x^4 - 133x^2y^4 + 36y^8$
15. $4 - 108x^2 + 121x^4$
16. $a^4 - 3a^2b^2 + b^4$
17. $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$
18. $(2x - 3)^2 - (x - 5)^2$
19. $4a^8 - 53a^4b^4 + 49b^8$
20. $z^8 - w^8$
21. $49x^8 + 76x^4y^4 + 100y^8$
22. $\frac{144}{x^6y^4} - \frac{64}{w^8z^{22}}$
23. $169x^2 + 286x + 121$
24. $x^4y^4 + 21x^2y^2 + 121$

Evaluación.

Se valorará el comportamiento y actitud del estudiante en el aula frente a la actividad. Respecto al desarrollo del taller, al finalizar la actividad los estudiantes deberán entregar una hoja de cuadernillo con los ejercicios resueltos. La nota más alta se le asignara al grupo que más realice ejercicios y de acuerdo a ello se calificara a los demás grupos.

Actividad 11.

Tema: Factorización de Trinomios Cuadrados Perfectos, Diferencia de Cuadrados y Factor Común, por medio de la caja de polinomios.

Objetivo: Representar por medio de la caja de polinomios la factorización de Trinomios Cuadrados Perfectos, Diferencia de Cuadrados y de Factor Común.

Tiempo estimado: 1 hora.

Consideraciones matemáticas.

- Trinomio Cuadrado Perfecto.
- Diferencia de Cuadrados.
- Factor Común.
- Caja de polinomios.

Método y/o actividad.

Seguidamente se les pedirá a los estudiantes que realicen el siguiente taller utilizando la caja de polinomios. Se conformaran 10 grupos de trabajo, cada grupo trabajara en un taller distinto a los demás:

TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 1.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - 8x$
2. $x^2 - 16$
3. $9x^2 - 1$
4. $4x^2 + 5x$
5. $9x^2 - 4$
6. $4x^2 + 4x + 1$
7. $4x^2 - 9$
8. $2x^2 + 5x$
9. $4x^2 - 12x + 9$
10. $x^2 - 25$

TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 2.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $9x^2 - 1$
2. $10x^2 - 14x$
3. $4x^2 - 1$
4. $9x^2 - 6x + 1$
5. $x^2 - 16$
6. $9x^2 - 4$
7. $3x^2 - 6x$
8. $4x^2 - 8x + 4$
9. $x^2 - 4$
10. $2x^2 + 5x$

TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 3.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $4x^2 - 25$
2. $2x^2 - 7x$
3. $9x^2 - 9$
4. $9x^2 - 18x + 9$
5. $x^2 - 25$
6. $4x^2 - 9$
7. $8x^2 - 16x$
8. $x^2 - 8x + 16$
9. $4x^2 - 4$
10. $3x^2 - 5x$

TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 4.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $9x^2 - 18x$
2. $x^2 - 16$
3. $4x^2 - 4$
4. $9x^2 - 24x$ +16
5. $x^2 - 9$
6. $2x^2 + 7x$
7. $4x^2 - 1$
8. $x^2 - 10x + 25$
9. $9x^2 - 9$
10. $4x^2 - 5x$

TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 5.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $4x^2 - 25$
2. $6x^2 - 16x$
3. $4x^2 - 1$
4. $x^2 - 9$
5. $x^2 + 4x + 4$
6. $4x^2 - 9$
7. $9x^2 - 18x$
8. $9x^2 - 24x + 16$
9. $9x^2 - 1$
10. $5x^2 - 25x$

TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 6.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $3x^2 - 8x$
2. $9x^2 - 9$
3. $x^2 - 25$
4. $4x^2 - 16x + 16$
5. $4x^2 - 9$
6. $x^2 - 16$
7. $3x^2 - 8x$
8. $x^2 - 10x + 25$
9. $9x^2 - 4$
10. $2x^2 - 3x$

TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 7.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $3x^2 - 4x$
2. $9x^2 - 4$
3. $4x^2 - 16$
4. $9x^2 - 12x + 4$
5. $4x^2 - 4$
6. $10x^2 - 16x$
7. $4x^2 - 25$
8. $x^2 - 6x + 9$
9. $4x^2 - 1$
10. $9x^2 - 9$

TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 8.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $9x^2 - 4$
2. $x^2 - 25$
3. $x^2 - 7x$
4. $9x^2 - 18x + 9$
5. $4x^2 - 25$
6. $10x^2 - 14x$
7. $x^2 - 1$
8. $4x^2 - 16x + 16$
9. $9x^2 - 9$
10. $9x^2 - 18x$

TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 9.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $10x^2 - 16x$
2. $4x^2 - 25$
3. $9x^2 - 1$
4. $4x^2 - 4x + 1$
5. $9x^2 - 9$
6. $x^2 -4$
7. $4x^2 - 5x$
8. $4x^2 - 16x + 16$
9. $4x^2 - 4$
10. $3x^2 + 2x$

TALLER 2 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 10.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - 10x + 25$
2. $4x^2 - 9$
3. $x^2 - 1$
4. $9x^2 - 18x$
5. $4x^2 - 4$
6. $9x^2 - 1$
7. $4x^2 - 12x + 9$
8. $8x^2 - 16x$
9. $9x^2 - 4$
10. $5x^2 - 8x$

Evaluación.

Cada grupo deberá entregar en una hoja de cuadernillo los 10 ejercicios solucionados mediante la caja de polinomios, dibujando la figura obtenida al factorizar cada uno de los polinomios.

Actividad 12.

Tema: Prueba escrita: de Trinomio Cuadrado Perfecto, Diferencia de Cuadrados y Trinomios Cuadrado Perfecto por Adición y Sustracción.

Objetivo: Resuelve los ejercicios presentados en la prueba escrita.

Tiempo estimado: 1 hora.

Consideraciones matemáticas:

- Trinomio Cuadrado Perfecto.
- Diferencia de Cuadrados.
- Trinomios Cuadrado Perfecto por Adición y Sustracción.

Método y actividad.

Para cada octavo los exámenes fueron diferentes:

EXAMEN 2.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º-1.

25 DE AGOSTO DE 2017

Nombre:

Factorizar:

1. $16x^4 - 25x^2y^2 + 9y^4$
2. $144 + 23x^6 + 9x^{12}$
3. $4 - 108x^2 + 121x^4$
4. $49x^8 + 76x^4y^4 + 100y^8$
5. $121a^4 - 133a^2b^4 + 36b^8$

EXAMEN 2.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º2

15 DE AGOSTO DE 2017

Nombre: ____

- Factorizar:

1) $4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4$
2) $x^8 - 9x^4 + 16$
3) $64m^4 + 76m^2 + 49$
4) $4m^8 - 53m^4n^4 + 49n^8$
5) $144 + 23n^6 + 9n^{12}$

Evaluación:

En este caso, a cada ejercicio se le asigna un valor numérico entre 0.0 y 1.0

Actividad 13.

Tema: Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Objetivo: Resuelve ejercicios y problemas aplicando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Tiempo estimado: 1 hora.

Consideraciones matemáticas:

Una expresión cuadrática para ser un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ debe cumplir con las siguientes condiciones:

- El coeficiente del primer término debe ser igual a 1.
- El primer término debe estar elevando al cuadrado (x^2).
- El segundo término debe tener la misma letra (variable) que el primero pero con exponente igual 1 (bx).
- El tercer término debe ser independiente de la letra (variable) común en el primer y segundo término (c)

$x^2 + bx + c$ Es una expresión que resulta del producto: $(x + m)(x + n)$ siendo m y n números reales, tales que: $mn = c \;\; m + n = b$

* Se descompone en dos factores: $(x + m)(x + n)$

* Se buscan dos números m y n de manera que $m + n = b$ y $mn = c$, teniendo en cuenta los signos de b y c.

El procedimiento para resolver el trinomio es el siguiente:

1. El trinomio de la forma se resuelve de la siguiente manera, se abre un par de paréntesis se extrae la raíz cuadrada del primer término

2. El signo del primer binomio vendrá dado por el signo del segundo término del trinomio y el signo del segundo binomio será igual a la multiplicación entre los signos del segundo y tercer término del trinomio.

3. se busca dos números que multiplicados den el tercer término y su suma algebraica den el segundo término.

Método y actividad.

Inicialmente se mostrara a los estudiantes como resolver mediante ejemplos los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Ejemplos 1:

$x^2 + 14x + 40$

Multiplicación de los 2 signos

$= (x + 4)(x + 10)$

Para el primer ejemplo se realizará una lista de los pares de factores de 40: 1 y 40; 2 y 20; 4 y 10; 5 y 8.

Suma de los factores:

1 + 40 = 41

2 + 20 = 22

4 + 10 = 14

5 + 8 = 13

Encontramos los factores cuya suma sea 14, 4 y 10.

Luego se obtendrá la factorización del trinomio como: $x^2 + 14x + 40 = (x + 4)(x + 10)$

Ejemplo 2:

$x^2 - 1x - 20$

Para el segundo ejemplo se realizará una lista de los factores de -20, escribiéndolos o revisándolos mentalmente: -1 y 20; 1 y -20; 2 y -10; 4 y -5; -4 y 5.

Luego encontramos los pares de los factores que suman -1 que son 4 y -5

Por lo tanto, factorizamos el trinomio escribiendo:

$x^2 - 1x - 20 = (x - 5)(x + 4)$

Se les propondrá como ejercicio a los estudiantes que resuelvan en la clase:

$x^2 + 10x + 24$

$x^2 - 17x + 66$

$x^2 - x - 110$

Evaluación

Se tendrá en cuenta la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas en clase y el buen comportamiento ante la actividad a realizar.

Actividad 14.

Tema: Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Objetivo: llevar un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ a la forma $x^2 + bx + c$ para factorizarlo.

Tiempo estimado: 1 hora.

Consideraciones matemáticas.

Los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ tienen como coeficiente del término x^2 un número real diferente de 1, las demás características las conserva del trinomio de la forma:

$$x^2 + bx + c.$$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, es necesario llevarlo a la forma ya conocida y una estrategia es seguir siguiente proceso:

- Multiplicamos y dividimos el trinomio por a:

$$\frac{a(ax^2 + bx + c)}{a} = \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}$$

- Ya hemos convertido el trinomio en uno de la forma $x^2 + bx + c$, luego podemos seguir el mismo procedimiento para poder factorizarlo.

Método y/o Actividad:

Inicialmente se introducirá la parte teórica anterior, y se ilustrara el proceso mencionado para factorizar polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ mediante los siguientes ejemplos:

Ejemplo: factorizar $6x^2 - 7x - 3$

- Multiplicamos y dividimos el trinomio por 6, esto es:

$$\frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6} = \frac{36x^2 - 6(7x) - 18}{6} = \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6}$$

- Factoricemos ahora: $(6x)^2 - 7(6x) - 18$ el cual es de la forma $x^2 + bx + c$ siguiendo el siguiente proceso:
    - primero hallando la raíz cuadrada del primer término obtenemos $(6x)$.

- Hallando dos números que multiplicados den como resultado -18 y sumados den -7, obtenemos -9 y 2
- Luego $(6x)^2 - 7(6x) - 18 = (6x - 9)(6x + 2)$

- Así, tenemos:

$$\frac{(6x)^2-7(6x)-18}{6} = \frac{(6x-9)(6x+2)}{6} = \frac{3(2x-3)2(3x+1)}{6} = \frac{6(2x-3)(3x+1)}{6}$$

- Por tanto, el trinomio factorizado nos queda:

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$$

Ejemplo 2: factorizar $8a^2 - 14a - 15$

- Multiplicando y dividiendo por 8 tenemos:

$$8a^2 - 14a - 15 = \frac{8(8a^2 - 14a - 15)}{8} = \frac{(8a)^2 - 14(8a) - 120}{8}$$

- Factorizando $(8a)^2 - 14(8a) - 120$ obtenemos $(8a - 20)(8a + 6)$

- Luego:

$$\frac{(8a)^2 - 14(8a) - 120}{8} = \frac{(8a - 20)(8a + 6)}{8} = \frac{4(2a - 5)2(4a + 3)}{8}$$
$$= \frac{8(2a - 5)(4a + 3)}{8} = (2a - 5)(4a + 3)$$

- Por tanto, la factorización del trinomio es:

$$8a^2 - 14a - 15 = (2a - 5)(4a + 3)$$

Finalmente, Como última actividad se pedirá a los estudiantes que realicen los siguientes ejercicios en clase:

1. $4x^2 + 15x + 9$
2. $20n^2 - 9n - 20$

Evaluación.

En esta clase se tendrá en cuenta el comportamiento de los estudiantes en el aula, además mediante los dos ejercicios que se les planteara en clase se observara si aplican el método de factorización de la mejor manera lo cuas a la vez nos ayudara a ver las dificultades que tienen para poder hacerles un acompañamiento y buscar la manera de dirimir los obstáculos que encuentran los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

Actividad 15.

Tema: factorización combinando casos.

Objetivo: Aplica los métodos de factorización vistos anteriormente para factorizar un polinomio completamente.

Tiempo estimado: 1 hora.

Consideraciones matemáticas.

En algunos casos para factorizar completamente un polinomio es necesario emplear más de un método de factorización. Así, se puede tener en cuenta los siguientes pasos para factorizar un polinomio:

- Obtener un factor común si lo hay.
- Buscar un trinomio cuadrado perfecto.
- Buscar una diferencia de cuadrados.
- Si un trinomio no es cuadrado perfecto, buscar un par de factores aplicando la factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ o $ax^2 + bx + c$
- Si un polinomio tiene cuatro o más términos, agruparlos en pares o en grupos de tres términos que puedan factorizarse.
- Asegurarse de que cada polinomio esta factorizado al máximo.
- Verificar la factorización efectuando los productos.

Método y actividad.

Inicialmente se indicará a los estudiantes que en muchos casos para factorizar un polinomio completamente no es suficiente con emplear un único método, por lo cual habrá que inspeccionar que otros aplicar. En este sentido este método combina todos los anteriores con el fin de factorizar completamente un polinomio. Así, se presentará el procedimiento para anterior con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Factorizar completamente: $x^4 - 2x^2 + x^3$

- Lo primer que debe hacerse es mirar si el polinomio tiene un factor común, y si lo hay, sacar dicho factor común. Para este polinomio tenemos que el factor común es x^2, asi obtenemos:

$$x^4 - 2x^2 + x^3 = x^2(x^2 - 2 + x)$$

Ordenando el segundo factor obtenemos:

$$x^4 - 2x^2 + x^3 = x^2(x^2 + x - 2)$$

- Observemos que el segundo factor es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$; luego lo podemos factorizar como:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

Luego:

$$x^4 - 2x^2 + x^3 = x^2(x^2 + x - 2) = x^2(x + 2)(x - 1)$$

- Finalmente obtenemos el polinomio completamente factorizado de la siguiente manera:

$$x^4 - 2x^2 + x^3 = x^2(x + 2)(x - 1)$$

Ejemplo 2:

Factorizar completamente: $m^4 + m^2n^2 + n^4$

- Inspeccionemos si este polinomio es un trinomio cuadrado perfecto, esto es:
  - Extraemos la raíz cuadrada del primer término y tercer término, obteniendo m^2 y n^2 respectivamente.
  - Hallando el doble producto de las raíces obtenemos $2m^2n^2$, pero este no coincide con el segundo término del polinomio, así que el trinomio cuadrado no es perfecto.

Sin embargo podemos lograr el trinomio cuadrado perfecto, convirtiendo el segundo término del polinomio en $2m^2n^2$. Esto se logra usando el método de sumar y restar al trinomio dado m^2n^2 (se suma y se resta la misma cantidad para no afectar el trinomio), así obtenemos:

$$\begin{array}{r} m^4+m^2n^2+n^4 \qquad\quad \\ +m^2n^2 \qquad -m^2n^2 \\ \hline m^4+2m^2n^2+n^4-m^2n^2 \end{array}$$

Asociando los tres primeros términos del polinomio tenemos:

$$(m^4+2m^2n^2+n^4)-m^2n^2$$

A continuación factorizamos $(m^4+2m^2n^2+n^4)=(m^2+n^2)^2$

Luego:

$$(m^4+2m^2n^2+n^4)-m^2n^2=(m^2+n^2)^2-m^2n$$

Aquí, tenemos una diferencia de cuadrados, así:

$$(m^2+n^2)^2-m^2n^2=(m^2n^2+mn)(m^2+n^2-mn)$$

Así que finalmente el polinomio completamente factorizado que obtenemos es el siguiente:

$m^4+m^2n^2+n^4=(m^2n^2+mn)(m^2+n^2-mn).$

Finalmente, en esta clase se pedirá a los estudiantes que realicen el siguiente ejercicio:

Factorizar completamente:

$$a^2-2ab+b-36.$$

Evaluación.

En esta clase, se tendrá en cuenta la actitud y participación activa de los estudiantes en las actividades que se van a realizar. Ya que en general este método recoge todos los vistos anteriormente se espera que recuerden y apliquen los métodos adecuadamente para lograr factorizar un polinomio completamente.

Actividad 16.

Tema: Taller - Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y Combinación de Casos.

Objetivo: Aplica adecuadamente los métodos de Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y Combinación de Casos, para factorizar polinomios.

Tiempo estimado: 2 horas.

Consideraciones matemáticas:

- Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
- Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
- Combinación de Casos.

Método y actividad.

Inicialmente para la resolución del siguiente taller se organizará a los estudiantes en grupos de 2 personas:

TALLER
I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.
Grado 8º

Factorizar:

1. $6x^2 + 7x + 2$
2. $8ax^2 - 2a$
3. $25a^4 + 54a^2b^2 + 49b^4$
4. $x^2 - 4x - 320$
5. $a^2x - 4b^2x + 2a^2y - 8b^2y$
6. $12x^2 - x - 6$
7. $x^3 - 6x^2 - 7x$
8. $144 + 23n^6 + 9n^{12}$
9. $30a^2 - 55a - 50$
10. $m^3 + 3m^2 - 16m - 48$
11. $x^2 + 17x + 72$
12. $20y^2 + y - 1$
13. $64a^4 - 169a^2b^4 + 81b^8$

14. $x^2 + 15x + 54$
15. $a^3b + 2a^2bx + abx^2 - aby^2$
16. $28x^3y - 7xy^3$
17. $m - 6 + 15m^2$
18. $70x^4 + 26x^3 - 24x^2$
19. $25x^4 - 139x^2y^2 + 81y^4$
20. $44n + 20n^2 - 15$
21. $a^2 + 7a - 60$
22. $2x^2 + 29x + 90$
23. $x^4 - 5x^3 - 24x^2$
24. $3x^3 - x^2y - 3xy^2 + y^3$
25. $m^2 - 20m - 300$
26. $x^2 + 33 - 14x$
27. $2a^3 + 6a^2 - 8a$
28. $21x^2 + 11x - 2$

Evaluación.

Se valorará el comportamiento y actitud del estudiante en el aula frente a la actividad. Respecto al desarrollo del taller, al finalizar la actividad los estudiantes deberán entregar una hoja de cuadernillo con los ejercicios resueltos. La nota más alta se le asignara al grupo que más realice ejercicios y de acuerdo a ello se calificara a los demás grupos.

Actividad 17.

Tema: Factorización de Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ y Combinación de Casos, por medio de la caja de polinomios.

Objetivo: Representar por medio de la caja de polinomios la factorización de Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ y Combinación de Casos, por medio de la caja de polinomios.

Tiempo estimado: 1 hora.

Consideraciones matemáticas.

- Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.
- Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.
- Combinación de Casos.
- Caja de polinomios.

Método y/o actividad.

Seguidamente se les pedirá a los estudiantes que realicen el siguiente taller utilizando la caja de polinomios. Se conformaran 10 grupos de trabajo, cada grupo trabajara en un taller distinto a los demás:

TALLER 3 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 1.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 + 9x + 18$
2. $4x^2 - 10x + 6$
3. $4x^2 - 14x + 12$
4. $2x^2 - 16x + 24$
5. $x^2 - 11x + 30$
6. $6x^2 - 4x - 10$
7. $9x^2 - 6x - 15$
8. $9x^2 - 27x + 20$
9. $x^2 - 12x + 32$
10. $3x^2 + 2x - 8$

TALLER 3 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 2.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $3x^2 - 15x + 12$
2. $6x^2 - 23x + 20$
3. $x^2 - 7x + 6$
4. $4x^2 - 2x - 6$
5. $9x^2 - 27x + 20$
6. $x^2 - 9x + 18$
7. $2x^2 - 16x + 24$
8. $6x^2 - 4x - 10$
9. $x^2 - x - 20$
10. $9x^2 - 6x - 15$

TALLER 3 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 3.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $9x^2 - 24x + 15$
2. $x^2 - 7x + 12$
3. $6x^2 - 23x + 20$
4. $4x^2 - 14x + 12$
5. $6x^2 - x - 15$
6. $x^2 + 9x + 18$
7. $3x^2 - 22x + 24$
8. $3x^2 + 2x - 8$
9. $3x^2 - 18x + 15$
10. $x^2 - 12x + 35$

TALLER 3 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 4.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $4x^2 - 10x + 6$
2. $2x^2 - 7x + 6$
3. $x^2 - 7x + 12$
4. $2x^2 + 11x + 12$
5. $6x^2 - 23x + 20$
6. $9x^2 - 6x - 15$
7. $9x^2 - 27x + 20$
8. $x^2 + 9x + 18$
9. $3x^2 + x - 10$
10. $x^2 - 12x + 35$

TALLER 3 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 5.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - 9x + 18$
2. $4x^2 - 14x + 12$
3. $3x^2 - 15x + 12$
4. $2x^2 - 16x + 24$
5. $x^2 - 9x + 20$
6. $3x^2 - 17x + 10$
7. $3x^2 + 2x - 8$
8. $9x^2 - 6x - 15$
9. $9x^2 - 24x + 15$
10. $x^2 - 11x + 28$

TALLER 3 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 6.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - 8x + 12$
2. $2x^2 - 7x + 6$
3. $6x^2 - 23x + 20$
4. $3x^2 - 22x + 24$
5. $x^2 - 7x + 12$
6. $4x^2 - 4x - 8$
7. $6x^2 - x - 15$
8. $x^2 + 11x + 28$
9. $9x^2 - 27x + 20$
10. $9x^2 - 21x + 12$

TALLER 3 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 7.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $2x^2 + 11x + 12$
2. $x^2 + 9x + 18$
3. $4x^2 - 18x + 20$
4. $3x^2 - 18x + 15$
5. $3x^2 + 2x - 8$
6. $9x^2 - 9x - 10$
7. $x^2 - 12x + 32$
8. $6x^2 - 4x - 10$
9. $3x^2 - 19x + 20$
10. $x^2 - 6x + 8$

TALLER 3 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 8.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - x - 20$
2. $3x^2 - 15x + 12$
3. $3x^2 - 17x + 10$
4. $9x^2 - 6x - 15$
5. $x^2 - 7x + 12$
6. $2x^2 - 8x + 6$
7. $4x^2 - 18x + 20$
8. $4x^2 - 2x - 6$
9. $x^2 + 7x + 12$
10. $9x^2 - 3x - 12$

TALLER 3 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 9.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $6x^2 - 23x + 20$
2. $4x^2 - 2x - 6$
3. $x^2 + 7x + 12$
4. $9x^2 - 9x - 10$
5. $4x^2 - 20x + 24$
6. $x^2 - 12x + 35$
7. $4x^2 - 4x - 8$
8. $6x^2 - x - 15$
9. $x^2 - 11x + 28$
10. $9x^2 - 24x + 15$

TALLER 3 – CAJA DE POLINOMIOS.

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º.

Nombres:

Grupo 10.

Usando la caja de polinomios factorizar:

1. $x^2 - 8x + 12$
2. $4x^2 - 10x + 6$
3. $6x^2 + 18x + 12$
4. $4x^2 - 20x + 24$
5. $x^2 - 12x + 32$
6. $3x^2 - 22x + 24$
7. $4x^2 - 4x - 8$
8. $x^2 - x - 20$
9. $9x^2 - 27x + 20$
10. $6x^2 - 4x - 10$

Evaluación.

Cada grupo deberá entregar en una hoja de cuadernillo los 10 ejercicios solucionados mediante la caja de polinomios, dibujando la figura obtenida al factorizar cada uno de los polinomios.

Actividad 18.

Tema: Prueba escrita: Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ y Combinación de Casos

Objetivo: Resuelve los ejercicios presentados en la prueba escrita.

Tiempo estimado: 1 hora.

Consideraciones matemáticas:

Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

Combinación de Casos.

Método y actividad.

Para cada octavo los exámenes fueron diferentes:

EXAMEN 3

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

01 DE SEPTIEMBRE DE 2017

GRADO 8º-1.

Nombre:

Factorizar al máximo cada uno de los siguientes polinomios:

1. $3a^3 - a^2b - 12ab^2 + 4b^3$
2. $2x^5 + 14x^4 - 120x^3$
3. $30x^2 - 55x - 50$
4. $25m^4 - 139m^2n^2 + 81n^4$
5. $70x^4 + 26x^3 - 24x^2$

EXAMEN 3

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

GRADO 8º-2

8 DE SEPTIEMBRE DE 2017

Nombre: ____

- Factorizar al máximo cada uno de los siguientes polinomios mostrando el proceso:

1) $x^5 + 17x^4 + 72x^3$
2) $m^2 - 6m + 15m^3$
3) $3a^3 - a^2b - 12ab^2 + 4b^3$
4) $20n^2 + 44n - 15$
5) $25a^4 + 54a^2b^2 + 49b^4$

Evaluación:

En este caso, a cada ejercicio se le asigna un valor numérico entre 0.0 y 1.0

Actividad 19.

Tema: Taller de recuperación.

Objetivo: Sustenta la solución de dos ejercicios del taller propuesto.

Tiempo estimado: 4 horas.

Consideraciones matemáticas:

- Factor Común
- Factor Común por Agrupación
- Factorización de Trinomios Cuadrados Perfectos
- Diferencia de Cuadrados
- Trinomios cuadrado perfecto por adición y sustracción
- Trinomio de la Forma $x^2 + bx + c$
- Trinomio de la Forma $ax^2 + bx + c$
- Factorización Combinando Casos

Método y actividad.

Para la resolución del siguiente taller se organizará a los estudiantes en grupos de 2 personas:

TALLER DE RECUPERACIÓN

I.E LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT.

Grado 8º.

1. $64a^4 - 169a^2b^4 + 81b^8$
2. $x^2 + 15x + 54$
3. $a^3b + 2a^2bx + abx^2 - aby^2$
4. $28x^3y - 7xy^3$
5. $m - 6 + 15m^2$
6. $70x^4 + 26x^3 - 24x^2$
7. $25x^4 - 139x^2y^2 + 81y^4$
8. $44n + 20n^2 - 15$
9. $a^2 + 7a - 60$
10. $2x^2 + 29x + 90$

11. $x^4 - 5x^3 - 24x^2$
12. $3x^3 - x^2y - 3xy^2 + y^3$
13. $m^2 - 20m - 300$
14. $x^2 + 33 - 14x$
15. $2a^3 + 6a^2 - 8a$
16. $21x^2 + 11x - 2$
17. $6x^2 + 7x + 2$
18. $49x^8 + 76x^4y^4 + 100y^8$
19. $25a^4 + 54a^2b^2 + 49b^4$
20. $169x^2 + 286x + 121$
21. $a^2x - 4b^2x + 2a^2y - 8b^2y$
22. $12x^2 - x - 6$
23. $x^3 - 6x^2 - 7x$
24. $144 + 23n^6 + 9n^{12}$
25. $30a^2 - 55a - 50$
26. $m^3 + 3m^2 - 16m - 48$
27. $x^2 + 17x + 72$
28. $20y^2 + y - 1$
29. $121x^4 - 133x^2y^4 + 36y^8$
30. $4 - 108x^2 + 121x^4$
31. $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$
32. $(2x - 3)^2 - (x - 5)^2$

Evaluación.

Se valorará el comportamiento y actitud del estudiante en el aula frente a la actividad. Respecto al desarrollo del taller, al finalizar la actividad los estudiantes deberán entregar una hoja de cuadernillo con los ejercicios resueltos. La nota más alta se le asignara al grupo que más realice ejercicios y de acuerdo a ello se calificara a los demás grupos.