ESTRATEGIAS PARA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA BÁSICA EN ESTUDIANTES DE DECIMO GRADO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA TOMAS CIPRIANO DE MOSQUERA DE POPAYÁN

Experiencias derivadas de una práctica pedagógica

EDWIN YAMITH MUÑOZ GÓMEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, NATURALES Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

POPAYÁN, 2018

ESTRATEGIAS PARA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA BÁSICA EN ESTUDIANTES DE DECIMO GRADO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA TOMAS CIPRIANO DE MOSQUERA DE POPAYÁN

Experiencias derivadas de una práctica pedagógica

EDWIN YAMITH MUÑOZ GÓMEZ

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

GABRIELA ARBELÁEZ ROJAS

Directora

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, NATURALES Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

POPAYÁN, 2017

Nota de aceptación:

El presente trabajo de grado fue aprobado por el asesor y el evaluador respectivo

Vo. Bo. WILMER MOLINA

Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Gabriela Arbeláez

Asesora

Vo. Bo. YILTON RIASCOS

Evaluador

DEDICATORIA

A Rosa María, mi señora madre

AGRADECIMIENTOS

Presento los más sinceros agradecimientos:

A Dios por darme la oportunidad de vida y permitir que se unieran las fuerzas, el conocimiento y la voluntad para llevar a cabo el presente trabajo de grado.

A mi familia, especialmente a mi señora madre Rosa María Gómez y mis hermanos Luis Gabriel Yasnó, Liceth Muñoz, amigos incondicionales

A la Universidad del Cauca y a mis profesores, quienes me brindaron apoyo a través de sus enseñanzas, conocimientos y experiencias, permitiendo adquirir nuevos conocimientos para la formación personal y profesional en la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación.

A la Comunidad Educativa de la Institución Educativa Tomás Cipriano de Mosquera, especialmente a mis estudiantes del grado décimo, por permitirme realizar mi práctica pedagógica desde la cual se deriva el presente trabajo de grado.

A todas aquellas personas que de una u otra manera colaboraron para llevar a feliz término el presente trabajo.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE IMAGENES

INTRODUCCIÓN

Esta experiencia es el resultado de una práctica pedagógica investigativa –PPI- desarrollada en la Institución Educativa Tomás Cipriano de Mosquera –IETCM- del Municipio de Popayán. Surge tras la necesidad de contribuir con los procesos de aprendizaje y mejoras en el desempeño en el área de matemáticas en estudiantes del grado décimo de la Sede Manuela Beltrán de la mencionada institución. La PPI se implementó en 22 niñas del grado décimo.

La práctica comienza por tratar de entender el porqué de la apatía hacia la geometría como área de la matemática. En este trabajo se pretende hacer un esfuerzo por despertar en los estudiantes las capacidades de comprensión y razonamiento por medio de la metodología de resolución de problemas.

La experiencia pedagógica desarrollada en la IETCM es un ejercicio que vincula a la universidad (como principal generadora de nuevo conocimiento) con las instituciones educativas en el quehacer académico en tanto es un mecanismo que promueve la interacción entre estudiantes de educación media vocacional y los docentes en formación. En este propósito es clave entender que es un trabajo que "incorpora nuevas formas de enseñar, investigar y actuar". (Universidad del Cauca, 2010) y que está encaminado no solo para mejorar las calificaciones, sino como un instrumento de aporte sobre los aprendizajes de una población estudiantil necesitada de estrategias de dominio de las matemáticas.

Esperamos que con esta práctica pedagógica los estudiantes logren reconocer el valor del conocimiento matemático en la vida cotidiana del ser humano, debido a que cada día involucra al menos un concepto u operación. Es una experiencia que brinda estrategias tendientes a brindar capacidades de apropiación de los conceptos y aplicación de los mismos, con lo cual puede disminuir la apatía de algunos estudiantes hacia esta área y el temor y rechazo cuando deben presentar exámenes o pruebas. Particularmente en el caso de la geometría analítica, donde existen determinadas figuras como las elipses, parábolas, círculos etc., que, por la complejidad de sus conceptos, los estudiantes no alcanzan a percibir el alcance de los mismos, ni lo que representa el objeto y sus diversas representaciones. Por tal motivo se pretende establecer ese vínculo entre la imagen de un objeto y sus propiedades algebraicas.

En atención a los propósitos que persigue la práctica pedagógica, este trabajo encamina al estudiante hacia la búsqueda de estrategias para resolver problemas y lo involucra de una manera activa en el aprendizaje de las matemáticas, pues en la geometría analítica intervienen elementos que se presentan en la cotidianidad. Además, contribuye a entender esta asignatura no con un carácter netamente teórico sino como una rama de las matemáticas que ayuda a resolver problemas concretos del mundo que nos rodea.

Para la implementación de la práctica pedagógica se ha usado la metodología de resolución de problemas propuesta por (Pólya, 1990) para la resolución de problemas. Este permite estructurar la propuesta de aula por medio de unos parámetros para llegar al descubrimiento de la solución de un problema. Así, mediante una situación común, como lo es partir de las figuras existentes en la naturaleza se pueda formular una secuencia de actividades en el que se puedan deducir propiedades alrededor de las figuras geométricas en juego. Es posible formular un proceso en el que se busquen algunas propiedades o elementos de las figuras geométricas en juego. A partir de este ejercicio, la propuesta de introducir la geometría analítica conlleva momentos de reflexión y trabajo en común

Bajo este enfoque, en un principio se trata de adquirir conocimiento mediante la intuición inicial que tienen las estudiantes. Es decir, se pueden descubrir propiedades geométricas en los objetos del medio ambiente que por lo general pasan inadvertidas y se puede usar esa intuición previa para construir un objeto de la geometría analítica. Esto es, perfilar esas figuras y sus propiedades con la parte teórica y establecer vínculos de conocimientos concretos. Para ello se instauran cinco etapas de trabajo, a saber: etapa de acoplamiento, etapa de sondeo, etapa de aclaración, etapa de complejidad y etapa de reflexión; que se especifican posteriormente.

De acuerdo con los anteriores lineamientos, este documento se divide en cuatro partes. En la primera parte se especifican algunos aspectos asociados al problema y la justificación de la Práctica, aspectos de tipo teórico y conceptual, tales como el papel que desempeñan las prácticas pedagógicas, los referentes teóricos y algunos antecedentes. También se define el objeto de estudio: las cónicas y sus elementos conceptuales. En la segunda parte se establecen los elementos de tipo metodológico, así como las formas de intervención en el aula. La tercera parte muestra los resultados más relevantes en cuanto a los procesos de aprendizaje y desarrollo de este proyecto de aula sobre el aprendizaje y dominio de las cónicas. Para ello se parte de un diagnóstico inicial que indaga sobre algunos conocimientos básicos sobre los lugares geométricos. Finalmente, se muestran los resultados logrados después de hecha la intervención en el aula de acuerdo con cada cónica.

CAPÍTULO I. ASPECTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

1.1. Planteamiento del problema

A medida que se interviene la realidad con objetos matemáticos se instauran métodos o formas de concebir ese conocimiento matemático y aplicarlo en las diferentes situaciones del común, es por tal hecho que se permite generar estructuras mentales que a la par de encontrar relaciones más frecuentes con el medio ambiente que nos rodea, encamina al estudiante a poder clarificar los conceptos que encierra. El problema entonces es, cómo se puede desde el punto de vista de (Duval, 2004) permitir que el estudiante razone y aplique teorías de geometría en cualquier objeto que esté en su entorno. Desde allí se propone al estudiante que interprete distintos conceptos de geometría analítica en los objetos físicos de su interés. Durante las últimas décadas se han hecho diferentes trabajos que, tanto desde una perspectiva teórica como experimental, han intentado sacar a la luz los factores que inciden en el aprendizaje de las matemáticas. Una parte del trabajo en la didáctica de las ciencias y en particular de las matemáticas, se ha ocupado en la identificación, explicación y mejora de las dificultades de los estudiantes en la comprensión de conceptos.

Cuestionamientos relacionados con: ¿qué tipos de problemas seleccionar para desarrollar el interés de los alumnos y favorecer la adquisición de conocimientos matemáticos? ¿cómo organizar la secuencia de actividades en clase? o, ¿cómo organizar una progresión de los aprendizajes en el currículo?; han llevado a priorizar los problemas con que los profesores se encuentran en sus clases. Esto es una tendencia que se ha visto reforzada por el desafío institucional de la formación del profesorado (Duval, 2006, p. 143).

Es así como los profesores deben identificar las necesidades de adaptación, de conocimientos requeridos y de cómo se aplicarán dichos conocimientos cuando el estudiante se ponga en contacto con la realidad. Es aquí donde estas metodologías activas entendidas como aquellas que pretenden “alcanzar el desarrollo de las capacidades del pensamiento crítico y del pensamiento creativo (Urbina, 2013, p. 38, cobran vigencia; no obstante, del elevado grado de compromiso por parte de los estudiantes que requiere para su aplicación. Dentro de estas metodologías, puede destacarse, la resolución de problemas de (Pólya, 1990), que se catalogaría como una necesidad para aportar en los aprendizajes significativos.

Conforme a las anotaciones anteriores, las estudiantes de la Sede Manuela Beltrán de la Institución Educativa Tomas Cipriano de Mosquera –IETCM- de Popayán, presentan dificultades en el aprendizaje de la asignatura de matemáticas, principalmente en el área de la geometría analítica que se imparte en el grado décimo. Estas dificultades están evidenciadas en los reportes académicos de evaluaciones (boletines de notas y logros). Ante estas situaciones, presentadas para la resolución de problemas matemáticos dentro del proceso educativo; cabe formularse la siguiente pregunta:

¿Cómo contribuir con la mejora de los procesos y dificultades que presentan los estudiantes al enfrentar problemas geométricos relacionados principalmente con las cónicas y sus diferentes representaciones?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Contribuir con la conceptualización y apropiación de la geometría analítica en las estudiantes de grado décimo de la Sede Manuela Beltrán de la IETCM del Municipio de Popayán para enfrentar problemas relacionados con las cónicas y sus diferentes representaciones.

1.2.2. Objetivos Específicos

Analizar aquellos aspectos teóricos de la educación en matemática que se adecúen para dar soporte a una propuesta de práctica pedagógica.

Diseñar e implementar una metodología de aprendizaje y de aplicación de la geometría analítica basada en la resolución de problemas de Polya (1990).

Analizar los resultados logrados de la práctica pedagógica implementada en al IETCM Sede Manuela Beltrán.

1.3. Justificación

Las matemáticas son importantes en muchos aspectos de la vida. Desde las mismas aplicaciones que tiene en la cotidianidad, hasta las formas de razonamiento y su relación con las otras ciencias y con el arte. En el campo de la geometría analítica, los conceptos conducen a formar estructuras matemáticas en cada objeto que se encuentre en nuestro medio y su enseñanza para el aprendizaje es de suma importancia. En este sentido, mediante la práctica pedagógica se puede contribuir a desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes de educación media, aportando desde la condición de docentes de matemáticas en formación.

Se puede observar que, en los estándares básicos de competencias, se propone la matemática como una actividad humana insertada y condicionada por la cultura y su historia, destacando cada uno de sus componentes como el lenguaje, las técnicas, reglas y las soluciones a los problemas que surgen a través del tiempo.

La geometría analítica es un área que en consideración de (Camargo y Acosta, 2012), “es una rama multifacética de las matemáticas. Su riqueza, producto de la estrecha relación con otros dominios matemáticos, las ciencias naturales y sociales y la vida cotidiana, abarca varias dimensiones”. Además, “en su dimensión aplicada, se constituye en una herramienta de representación e interpretación de otras ramas del conocimiento” (p.4).

Esto da pie a la formulación de una metodología para su enseñanza, donde los objetos geométricos puedan formularse algebraicamente para proporcionar una visión más precisa a su significado, puesto que la relación que existe entre las figuras y sus alrededores nos dan distinciones mediante lo que ellas dejan ver y como las miramos.

A esto se refiere Poincaré como “la intuición geométrica”, en donde la distinción de esas “propiedades puramente cualitativas” constituye el primer umbral crítico para el aprendizaje de la geometría (Poincaré, citado en Duval y Sáenz, 2016). Pero en nuestro sistema de educación, usualmente los contenidos de geometría no son tenidos en cuenta o se presentan como productos acabados de la actividad matemática dejando de lado los procesos de construcción y apropiación de este conocimiento.

Ante esto, se propone el tema de la geometría analítica mediante la resolución de problemas, en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.

Razones como estas son las que motivan la estructuración de una propuesta metodológica, encaminada a abordar el entorno educativo de la IETCM partiendo de objetos de la geometría analítica como la recta, la parábola, y la elipse.

Este ejercicio, entendido como una Práctica Pedagógica Investigativa –PPI- desarrollará un cambio de representaciones semióticas capaces de aportar en el aprendizaje de la geometría analítica con ayudas visuales de sus propiedades tangibles, llevar mediante trazos y aproximaciones lineales a descubrir propiedades aritméticas a fin de propiciar en el estudiante la vinculación a procesos de interpretación y observación de objetos conocidos y representativos. Con ello el aporte fundamental de la propuesta es facilitar el aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos.

1.4. Algunos referentes teóricos

Frente a estos ejercicios, autores como (Almeida, 2002; citado por Gamboa & Ballestero, 2009), señala que:

> Existen algunos objetivos generales que todo ciudadano debería alcanzar durante su formación básica: tener una cultura geométrica con visión histórica e interdisciplinaria, aplicar conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas reales, usar los diferentes lenguajes y representaciones, entre otros (p. 114).

La geometría parece tener una pérdida progresiva de su posición formativa central en la enseñanza de las matemáticas de la mayoría de nuestro sistema de educación, pues es ignorada en estas sociedades, imponiendo más la formación en ciertos aspectos de la matemática, tal como lo afirman (Camacho y Morales, 1994), al referirse al hecho de que la escuela tradicional relegó a la geometría a los aspectos métricos y una introducción a la trigonometría. Afirman además que se dio especial énfasis a la solución de ecuaciones y sistemas más que al interés por los aspectos geométricos.

Siendo así, las áreas de geometría son poco valoradas, pues se asignan tiempos muy cortos o sesiones reducidas para abarcar todas las temáticas que en ella encierra, con lo cual este proyecto se desarrolla en ciertos objetos geométricos, con el fin de retomar ciertos aspectos de estos temas, ya que solo los problemas se reducen a “casos particulares” o simples para desarrollar estas temáticas, quedando un pobre desempeño en el estudio de los mismos.

Recientemente ha tenido lugar un acercamiento hacia contenidos curriculares que dan prioridad sobre cómo ver estos espacios e indicadores de matemáticas, con un énfasis en distribuir esta enseñanza sobre actividades de planteamientos cercanos a ellos, principalmente a través de los “juegos lógicos o de destrezas mentales” que generan mejores resultados en sus conocimientos en estas temáticas. Conforme a estos nuevos enfoques curriculares es que se abre la posibilidad de brindar a los estudiantes una aproximación a las teorías y la influencia de las herramientas disponibles en situaciones de enseñanza y de aprendizaje (desde la regla y compás, así como otros materiales concretos, hasta calculadoras con funciones).

Estas herramientas pueden articularse a la propuesta de Polya (1995) Para este proceso se usa el método general de los cuatro pasos que plantea este autor para la resolución de problemas en relación a la geometría euclidiana y a lo algebraico: *Entender el problema, Diseñar un plan, Ejecutar el plan, Mirar hacia atrás. Con ello, es posible lograr que los niños aprendan sobre las cónicas* (Polya 1995, p. 41-42)*.*

Desde (Duval, 1993), también puede rescatarse elementos que orientan una metodología para desarrollarse sobre un objeto con ciertas cualidades con lo que es posible definir unos puntos claros de su configuración. Es decir que, permite distinguir con formas, reglas o propiedades que lo simbolizan o facilitan una comprensión del mismo. Sin embargo, "es esencial no confundir jamás los objetos matemáticos, o sea, los números, las funciones, las rectas, etc.; con sus representaciones" (p. 38). De acuerdo con estos elementos, las reglas o símbolos pueden denominarse representaciones semióticas. Luego, las diversas representaciones del objeto permiten dar fundamento a distintos campos de estudio. Así, al diferenciar estas representaciones y el objeto se lograría profundizar el aprendizaje

Es relevante notar que los objetos matemáticos no son en realidad objetos reales o tangibles a los sentidos. Por ello, la pretensión de la presente propuesta es dar una percepción objetiva al estudiante sobre su entorno para que pueda manipular y abstraer principios básicos, algunos objetos que permitan tener una idea o en el mejor caso una primera representación semiótica de algún objeto matemático, y al jugar con estos objetos matemáticos sumergirse en la llamada paradoja del pensamiento matemático, o sea que: las representaciones semióticas posibilitan la actividad sobre los objetos matemáticos pero el aprendizaje de los objetos matemáticos es un aprendizaje conceptual. El aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, por el otro, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo, sujetos en fase de aprendizaje, podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas, si ellos únicamente pueden tener relación con las representaciones semióticas?

La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, más allá de cualquier representación semiótica, hace la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden los estudiantes adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen el domino conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas. (Duval, 1993, p. 38). Visto así, como los elementos abordados en esta PPI se inscriben en el área de las matemáticas, los fundamentos teóricos parten de comprender que la geometría analítica es un campo de conocimiento que combina la geometría y el álgebra, como lo señalan (Engler, Müller, Vrancken, & Hecklein, 2005, pág. 66) citados en (Santacruz, 2016).

En esta combinación aparece un constructo fundamental: el plano cartesiano. “Este permite generar las ecuaciones algebraicas de todas las curvas y como caso particular, las ecuaciones de la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola” (p.25).

1.5. Las cónicas

1.5.1. La línea recta

Es el lugar geométrico entre puntos, tales que, tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente *m* resulta siempre constante (UNAM, 2012). “Las coordenadas de un punto cualesquiera en el plano cartesiano permiten, además de conocer su ubicación, usar una representación como P(x,y) donde P es el nombre del punto que por convención siempre son letras mayúsculas, x la coordenada sobre el eje X e y la coordenada sobre el eje Y” (Santacruz, 2016, p.26).

La propuesta de (Lehmann, 1989) es un poco más compleja y consiste en un formalismo descrito por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, siendo A y B dos puntos cualesquiera sobre el plano, por lo que la distancia entre estos dos puntos, viene dada por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ^{1} \quad (1)$$

Así mismo, es posible obtener las coordenadas del punto medio $M(\bar{x}, \bar{y})$ de aquel segmento que determinan dos puntos A y B. Esto es

$$\bar{x} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ldots (2)$$

y

$$\bar{y} = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \ldots (3)$$

Como lo propone (Lehmann C. H., 1989). Por lo tanto, el punto medio del segmento AB es $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. De este modo y

> considerando un conjunto infinito de puntos colineales, se obtiene una línea recta y teniendo en cuenta las coordenadas de sus puntos, también es posible obtener su ecuación algebraica. Es conveniente empezar considerando en primera medida una recta horizontal seguida de una recta vertical y obtener su ecuación a partir de la observación de las coordenadas de sus puntos. Es así como se concluye que una recta horizontal tiene por

[1] La fórmula se obtiene mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras.

ecuación $y = b$; y para una recta vertical, su ecuación es $x = a$. (Santacruz, 2016; p. 26)

Ahora, cuando se trata de una línea recta que no es horizontal ni vertical., se debe recurrir al concepto de *pendiente* de una recta, definida como la tangente de su ángulo de inclinación respecto al eje horizontal (Lehmann, 1989). Su notación más común es, m, o sea:

$$m = \tan \alpha \quad (4)$$

Donde α es el ángulo que forma la recta con el eje horizontal.

Siguiendo a (Lehmann 1989), es posible obtener dicha pendiente a partir de dos puntos que pertenecen a la recta, es decir, $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos diferentes cualesquiera que pertenecen a una recta. Así, la pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \;\; x_1 \neq x_2 \ldots (5)$$

Hecha esta consideración, en (Lehmann, 1989, p. 23) es posible determinar si dos rectas son horizontales o perpendiculares, así:

Dos rectas no verticales y distintas, son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales. Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a -1. Luego, si se conocen un punto que pertenece a la recta y la pendiente de la misma, la ecuación de la recta, estará dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (6)$$

Con,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2 \quad (7)$$

Dado que una recta está determinada por dos puntos, entonces la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, como se muestra en (Lehmann C. H., 1989, pág. 60), es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), x_1 \neq x_2 \quad (8)$$

La línea recta es fundamental como elemento introductorio para los siguientes conceptos matemáticos que hacen parte de las cónicas. Y entre estos, merece especial atención el de lugar geométrico.

1.5.3. Lugar geométrico

Según (Becerra, 2012), un lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen una determinada condición. Luego, la solución de un problema de lugares geométricos es una ecuación, la ecuación de todos los puntos que cumplen dicha condición. En (Gómez-Chacón, Botana, Escribano, y Abánades, 2016), se define como:

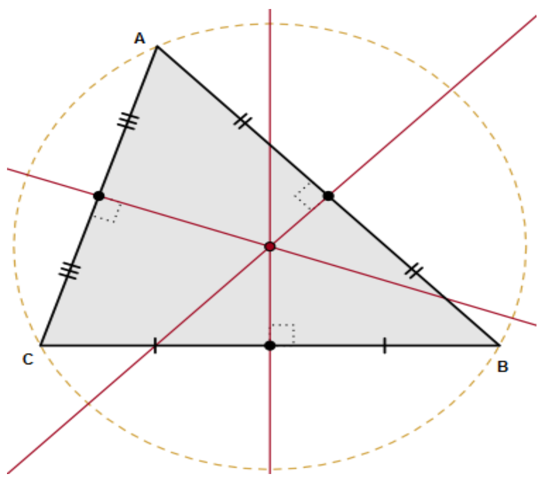
> el conjunto de puntos que satisfacen una determinada propiedad expresable a partir de una construcción geométrica realizada con regla y compás. La expresión "con regla y compás" puede ser un poco difusa, pero denota una forma de construcción y dicha propiedad se enuncia habitualmente en términos de distancias a puntos, rectas o circunferencias fijas en el plano y/o en términos del valor de un ángulo. Esta se conoce como la aproximación "clásica" (p. 69)

(Laorga y Urosa, 2014), citado en (Santacruz, 2016) plantea que es el conjunto de puntos (x, y) en el plano que cumplen con una misma propiedad o condición geométrica. Dada esta aproximación del lugar geométrico, es evidente que habrá multiplicidad de puntos que cumplirán una misma propiedad o condición, lo que a su vez da lugar a diferentes formas de lugar geométrico, tales como la mediatriz, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

1.5.2.1. La mediatriz

Se refiere al lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento (Moise, 1986). Así mismo, “dados dos puntos A, B afínmente independientes, su mediatriz coincide con el hiperplano perpendicular a (A, B) que pasa por su punto medio C”. (Moyano y Rubio, 2005 P. 178), tal como se muestra en la Ilustración 1, las mediatrices de los segmentos que determina los puntos A y B, B y C o A y C.

Figura 1. Representación de la mediatriz de los segmentos AB, BC y AC

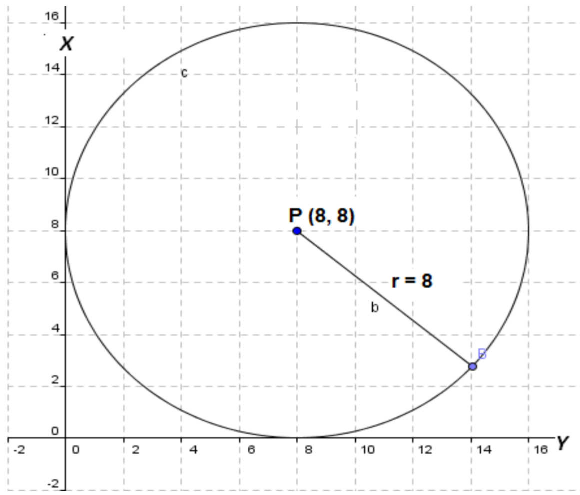


Fuente: www.mindmeister.com. 2018

1.5.2.2. La circunferencia

Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo en el mismo plano llamado centro de la circunferencia (Oteyza, 2005) y a la distancia de cada punto al centro se le llama radio de la circunferencia (Escobar, 2015) y (Becerra, 2012).

Figura 2. La circunferencia



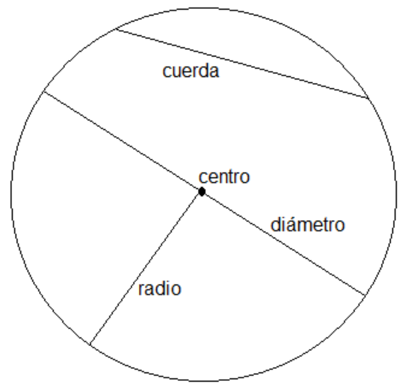
Fuente: Ing. Sistemas U. A. Tamaulipas. 2018

En consecuencia, (Lehmann, 1989) plantea que la forma matemática de la circunferencia se denota por:

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 \quad (9)$$

Donde r es el radio de la circunferencia, y (h, k) es el centro de la misma. Esta ecuación, recibe el nombre de *ecuación canónica o ecuación ordinaria de la circunferencia* (Santacruz, 2016; p. 30) *y* (Alvarez, 2015; p. 42). Entre los elementos de la circunferencia está el *radio*, que es la longitud del segmento de recta que une el centro con cualquier punto de la misma y que es una medida constante; la *cuerda* que es un segmento que une dos puntos de la circunferencia y puede variar de acuerdo con los puntos desde donde se trace y el *diámetro* que es una cuerda que al unir dos puntos de la circunferencia tiene como punto intermedio el centro. Corresponde al doble del radio, de ahí que su fórmula esté dada por $2r$ y es a su vez la cuerda de mayor longitud (Rojas, 2015, p. 34).

Figura 3. La Circunferencia y sus elementos

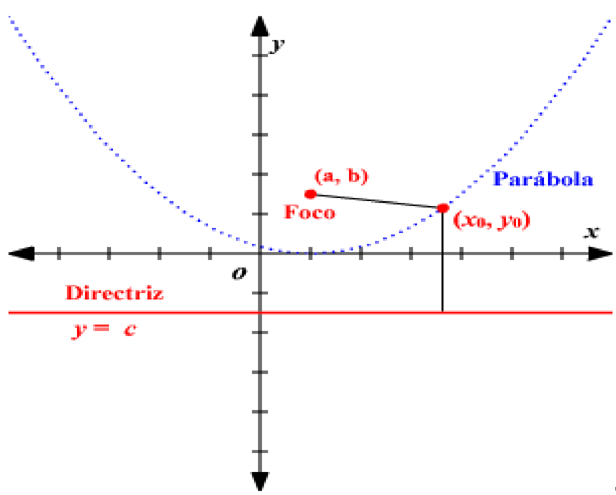


Fuente: elaboración propia

1.5.2.3. La parábola

Se le denomina al lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado *foco* y a una *directriz*, cuya definición ya se hizo.

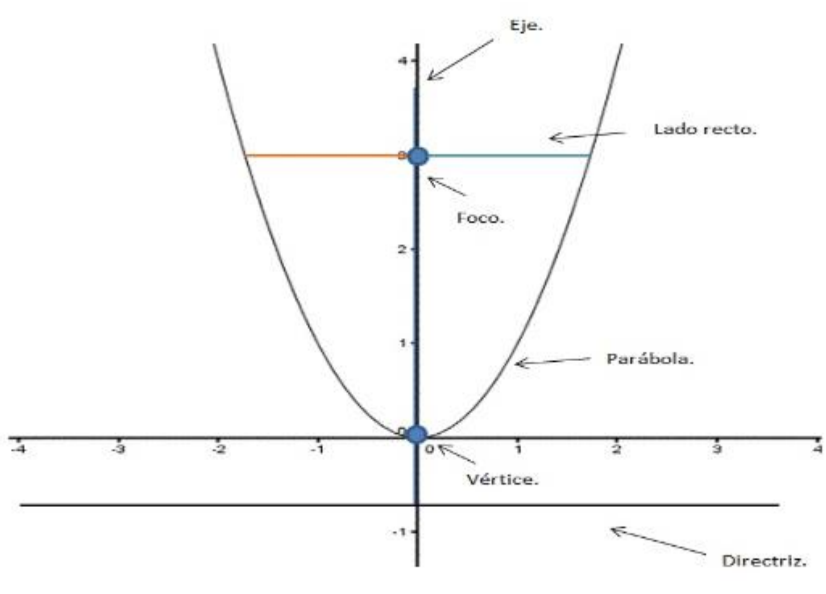
Figura 4. La parábola



Fuente: www.varsitytutors.com. 2018

Son elementos de la parábola, el ***foco***, que se refiere a un punto fijo dado que equidista de otros dos puntos, uno que se encuentra en la parábola, y el otro en la directriz (cabe tenerse en cuenta que una parábola sólo puede tener un foco); ***directriz***, que es la línea que determina las condiciones de generación de otra línea; ***vértice***, que corresponde al punto de la parábola, o sea, el punto medio de un segmento perpendicular a la directriz que se traza a partir del foco hasta aquella recta; ***el eje de la parábola***, referido a la **r**ecta perpendicular a la directriz, y que divide en dos partes iguales a la parábola; ***el lado recto (LR)**, que es el* segmento perpendicular al eje de la parábola, pasa por el foco, y une dos puntos de la misma, llamados uno "***L***" y el otro "***R***"; por último el ***parámetro (p)***, que es la distancia del foco al vértice ***FV***, la misma que se encuentra del vértice al punto de intersección la directriz con el eje de la parábola (Benítez, Sánchez, & Morales, 2007) citado en (Santacruz, 2016)

Figura 5. La parábola y sus elementos



Fuente: www.slidesharecdn.com. 2018

Asumiendo que el eje de la parábola es paralelo al eje Y, la ecuación de la parábola vendría dada por:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \quad (10)$$

Donde las coordenadas del centro y el foco son (h,k) y $(h,k+p)$ respectivamente y la ecuación de la recta directriz es

$$y = k - p \quad (11)$$

De acuerdo con la fórmula, siendo p de valor positivo, la parábola abrirá hacia arriba, por el contrario abrirá hacia abajo si p es de valor negativo.

1.5.2.4. La elipse

Según (Zegarra, 2016) y (Pérez, Caro, y Obonaga, 1985), se llama elipse, al lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos del mismo plano es constante. Los puntos fijos se acostumbra llamárseles focos.

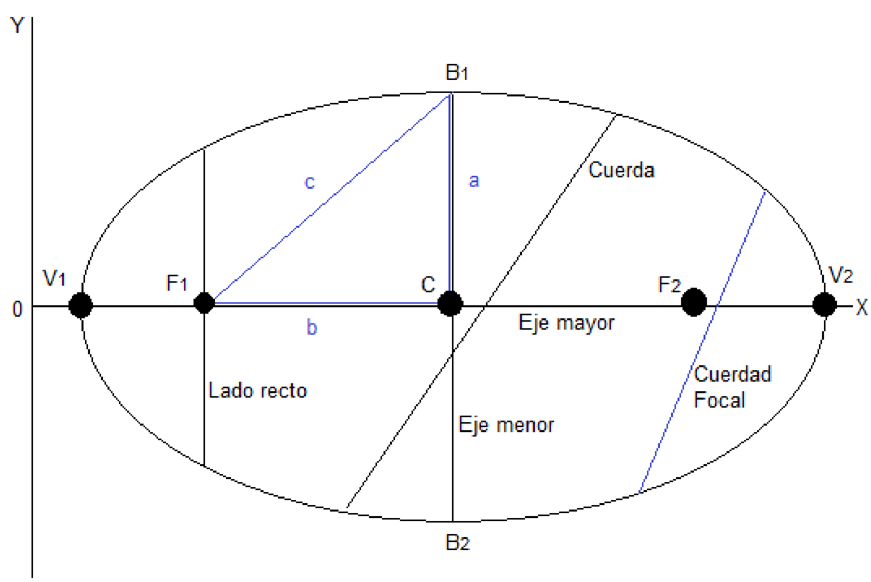
Siguiendo a (Lehmann, 1989; pp. 173-174), los elementos de la elipse son: los ***focos***, o sea los dos puntos fijos; ***eje focal***, que es una recta que pasa por los dos focos; ***vértices****,* que corresponden a puntos en los cuales el eje focal corta a la elipse. El ***eje mayor***, es un segmento de recta entre los dos vértices. Si la distancia del centro de la elipse a un vértice es, a, entonces la distancia del eje mayor será $2a$; el ***centro***, que es el punto medio del segmento que une los focos. El ***eje normal*** es la recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro de la elipse, donde b es la distancia desde el centro de la elipse a cualquiera de sus puntos de corte, lo que a su vez hace que el ***eje menor*** sea el segmento de recta comprendido entre los dos puntos de corte de la elipse con el eje normal, cuya longitud es $2b$. En la elipse también se encuentra la ***cuerda***, que es el segmento de recta que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, cuando este segmento pasa por alguno de los focos, se denomina ***cuerda focal***. Y también se encuentra el ***lado recto***, que es una cuerda focal perpendicular al eje focal, cuya longitud es $LR = \frac{2b^2}{a}$

De este modo, si se asume una elipse con centro $C(h,k)$, eje mayor de longitud $2a$, eje menor de longitud $2b$, $2c$ la distancia entre los focos donde c es la distancia desde el centro de la elipse a cualquiera de sus focos y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse. Si se asume además que el eje mayor es paralelo al eje X, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (12)$$

Donde, $C(h,k)$ son las coordenadas del centro, $V(h \pm a, k)$ las coordenadas de los vértices y $F(h \pm c, k)$ las coordenadas de los focos. Una forma que se ajusta a estos parámetros es la ilustración 6.

Figura 6. La elipse y sus elementos



Fuente: elaboración propia

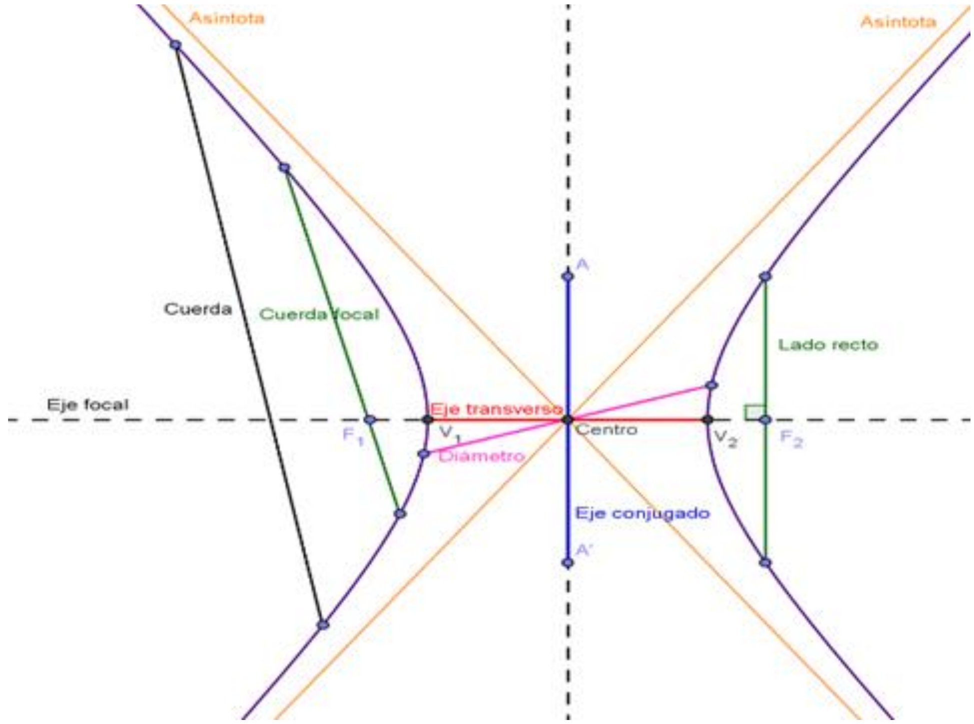
1.5.2.5. La hipérbola

En (Pérez, Caro, y Obonaga, 1985; p. 396) y (Villena, 2014) es el lugar geométrico de los puntos F_1 y F_2, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano (focos), es siempre constante que se representa por $2a$, es decir:

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a \quad (13)$$

Según (Lehmann, 1989, p. 192), el autor que se ha tomado como referente para describir estos lugares geométricos, los elementos de la hipérbola son: **focos**, como puntos fijos; **eje focal**, que es la recta que pasa por los focos; donde **C**, es la distancia desde el centro a cualquiera de los focos. Los **vértices**, son los puntos en los que el eje focal corta a la hipérbola. Como ocurre con la elipse, a, es la distancia desde el centro de la hipérbola hasta cualquiera de los vértices, lo que significa que el **eje transverso** es el segmento comprendido entre los vértices, cuya longitud es $2a$. El **centro**, es el punto medio del eje transverso y el **eje normal**, que es la recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro. Luego, sea b, la distancia desde el centro de la hipérbola hasta cualquiera de los puntos de corte del eje normal con la hipérbola, lo que a su vez implica que el **eje conjugado** sea el segmento del eje normal comprendido entre los puntos A y A' como se muestra en la siguiente imagen y cuya longitud es $2b$. La **cuerda**, que también se presenta en la hipérbola es el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la hipérbola, los cuales pueden ser de la misma rama. Si la cuerda pasa por un foco, se denomina cuerda focal. El **lado recto**, es una cuerda focal perpendicular al eje focal; el **diámetro**, también es una cuerda que pasa por el centro y las **asíntotas**, corresponden a rectas auxiliares que permiten la construcción de la cónica. La curva jamás toca la recta. La siguiente ilustración muestra una forma se ajusta a los elementos planteados.

Figura 7. La Hipérbola y sus elementos



Fuente: (Santacruz, 2016)

Formalmente, la hipérbola responde a la siguiente ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (14)$$

Donde, las coordenadas del centro son $C(h, k)$, las de los vértices son $V(h \pm a, k)$, las de los focos son $F(h \pm c, k)$. Luego, la ecuación de las asíntotas es:

$$y = k \pm \frac{b}{a}(x - h) \quad (15)$$

A estos lugares geométricos es a los que se les conoce como las cónicas y aquí se han planteado algunas nociones generales de las mismas. Todos estos elementos y notaciones siguen la propuesta de (Lehmann, 1989, p. 193)

CAPITULO 2. ASPECTOS METODOLÓGICOS E INTERVENCIÓN EN EL AULA

Esta PPI se ha implementado en cinco etapas claramente definidas Con estas se ha procurado que en las estudiantes se desarrollen actividades que además de diagnosticar han permitido orientar de una mejor manera las sesiones de clase. Estas etapas se describen así:

2.1. Etapas de la práctica pedagógica

2.1.1. Etapa de acoplamiento

Para agotar esta etapa se proponen ejemplos de interés del estudiante, en los cuales se vean reflejadas diferentes situaciones que encierra el concepto a estudiar. Es la primera forma para entusiasmar al estudiante con actividades de observación y visualización que existe en su entorno, en donde se haga uso de ejemplos, gráficas y objetos que estén al alcance del estudiante.

Un primer acercamiento se hará por medio de graficas que permitirá involucrar algunas propiedades de las figuras geométricas, por ejemplo, un ojo permite visualizar una circunferencia, su pupila una circunferencia concéntrica, esto es, que permita desarrollar una forma geométrica mediante su composición natural de los objetos. La idea es que los estudiantes hagan uso de su intuición y se atrevan a exponer conjeturas de acuerdo a la percepción que tengan del objeto de estudio.

En la geometría es necesario tener una observación detallada de las figuras geométricas y las s propiedades que ellas tienen, es así que para facilitar esta observación se proponen actividades como los son: realizar dibujos libres, de tal forma que se puedan representar por medio de líneas rectas, parábolas, elipses o circunferencias, las cuales serán un punto de partida para seguir introduciendo los conceptos y propiedades que se quieren establecer.

Es posible que la primera observación o visualización de los objetos a graficar no permitan ilustrar muchas propiedades como otros, como ejemplo una mesa rectangular para hacer trazos de elipses, de tal forma se puede generar una discusión sobre estos objetos matemáticos, como por ejemplo “el saltarín” o cuerda para saltar, la cual forma una parábola, el sol forma una circunferencia, el nailon que utiliza el maestro de construcción para cuadrar un terreno da lugar de ver una línea recta.

2.1.2. Etapa de sondeo

Parte de proponer preguntas tales como:

¿Observa usted alguna figura geométrica? ¿Existe una figura geométrica que se destaque más que las otras? ¿El tamaño del objeto define la figura? ¿Puede representar la figura?

Estas se plantean con el objetivo que cada estudiante exponga sus conocimientos previos sobre un tema específico que se trabajará en la sesión. Se espera en esta etapa que el estudiante sea capaz de conectar el aprendizaje de la etapa de acoplamiento con el nuevo conocimiento que será puesto en juego.

En este momento se crea un espacio de confrontación y discusión, donde los estudiantes expondrán sus dificultades para acceder a ciertos conceptos y de esta manera tener un diagnóstico de las falencias y debilidades en determinado tema. Es decir que con cada gráfica que se trazó en la etapa anterior, las estudiantes determinen las figuras geométricas que en ellas se puedan observar, con lo que permite tener un primer registro semiótico de la figura, e incluso si se puede con solo figuras geométricas realizar dibujos de nuestro entorno.

Esta etapa consta de actividades de trabajo manual, es decir que identificando la figura a trabajar se emplea esta figura para rellenar, colorear o delinear los dibujos.

Así se logra que las estudiantes se familiaricen con las figuras, que logren observar algunas propiedades como distancias, centros, focos y relaciones entre las curvas y los focos. Es decir, con esta primera representación, se pretende visualizar algunas propiedades de los objetos. Por ejemplo, al rellenar el sol con círculos concéntricos se observa que la distancia entre ellos cambia, lo cual indica que el radio tiene una distancia distinta en cada círculo y los puntos que la conforman.

2.1.3. Etapa de aclaración

En esta se realizan ejemplos que sean netamente ilustrativos de la falencia encontrada anteriormente, basado en inquietudes de los estudiantes. Además de precisar cada concepto y se propicia un salto cualitativo hacia un nivel más complejo en la comprensión de las figuras.

Esto permite encaminar a las estudiantes hacia el propósito planteado en las anteriores etapas, facilita el acceso a un conocimiento más amplio y de mayor profundidad. En esta etapa se logra conducir a las estudiantes a poner en práctica resultados logrados, además de realizar comparaciones entre éstos.

Aquí, el rol del docente será el de apoyar y aclarar paso a paso las inquietudes de cada estudiante, logrando que cada una participe activamente en la comprensión de las preguntas formuladas.

Se implementarán actividades en la cuales se podrá acceder a teorías donde se acercará al concepto matemático, es decir que el docente lleve la orientación de los conceptos geométricos en forma más teórica, dando lugar a que cada estudiante se aproxime desde su práctica, en su propia gráfica realizada anteriormente, a las teorías en cuestión.

2.1.4. Etapa de complejidad

Está diseñada para que los estudiantes fortalezcan el concepto de las figuras geométricas.

Esto es, que con ayuda de las anteriores etapas puedan visualizar un poco más fácil las teorías fundamentales de las figuras geométricas, es así que propone indicar el uso de herramientas como el libro de geometría analítica para tal fin, es decir se establecerá de manera magistral una clase que introduzca los fundamentos y propiedades que encierran estos temas.

Aunque esta etapa está limitada por un enfoque de educación tradicional se pretende establecer que los fundamentos básicos requieren rigor a la hora de abordar un tema, de tal forma que en la búsqueda de interiorizar conocimientos se pueda, sin temor ni rechazo, hacerlo debido a que en anteriores etapas se ha establecido un vínculo más cercano con los conceptos.

De manera formal y participativa se introduce un conocimiento matemático, debido a que los trabajos anteriores permiten aportar ideas que ayudan a formar definiciones y propiedades.

Al final de esta etapa, se proponen ejercicios con los que se pretende la aplicación de las teorías anteriores, teniendo en cuenta que esos resultados serán fundamentales para poder evaluar lo visto.

Además de encontrar soluciones, se introducen actividades lúdicas, donde aquellas soluciones son indispensables para poder desarrollar este tipo de juegos, por ejemplo se introduce un sudoku con figuras, y cada figura corresponde a una propiedad de una de las figuras geométricas las cuales dicha propiedad debe haberse trabajado con los conocimientos ya adquiridos, de tal manera que ayude a evitar un poco el estrés, ya que los juegos lógicos ayudan a desarrollar el pensamiento de manera más lúdica.

2.1.5. Etapa de reflexión

Aquí se verifica la conceptualización de los conocimientos, es decir, que las estudiantes logran establecer conceptos a partir de la observación de figuras y de ejercicios matemáticos. Con esto se logra proponer y desarrollar una reflexión discursiva y grupal para asimilar enteramente esta temática, llevando así nuevos indicadores de conocimiento puro y verdadero, ya que asimilar y entender aspectos comunes en un grupo fortalece ese vínculo entre saber y aprendizaje.

Las actividades que se proponen están dirigidas para que de manera grupal se divulgue el trabajo que ellas realizaron en el trascurso de las anteriores etapas, es decir que se pone en juicio el trabajo individual frente a las demás estudiantes, lo cual ayudara a interiorizar el conocimiento.

2.2. Desarrollo de sesiones

Una sesión está encaminada a desarrollar las etapas descritas para abordar los temas en geometría y cada sesión corresponde al tiempo establecido de acuerdo con el horario habitual de clase.

En el desarrollo de estas sesiones se implementaron cuatro temáticas, las cuales tienen por objetivo acercar a las estudiantes al conocimiento de estos cuatro temas de la geometría analítica, incorporando en cada tema las cinco etapas antes mencionadas y reforzándolos con “juegos lógicos o de destrezas mentales”. Con esto será posible que las alumnas logren realizar conversiones en los distintos registros semióticos. Además, se fortalecerá el concepto con el juego lógico a fin de motivarlas en el desarrollo de este proyecto de aula.

Las actividades se desarrollan en grupos, cada uno con un máximo de tres integrantes donde se relaciona la temática por conocer y su secuenciación de contenidos explícitos, empezando por destacar las ideas de cada alumno (intuición), pasando por la formalidad entre lo que enseñamos (contenidos), los objetivos de enseñanza (lo que queremos conseguir) y los criterios de evaluación (en lo que el estudiante es competente). Desde la práctica habitual y específicamente cada estructura teórica de las ciencias, es imprescindible poder acercarse al conocimiento, por medio de diferentes instancias de transposición, como lo propone (Chevalard, 1997), sea cual sea la que se adopte.

También encausa este hecho a resolver problemas cercanos, lo que constituye un instrumento para conseguir el desarrollo de las competencias básicas, que no sólo se alcanzan con el trabajo en las áreas y materias, sino que precisan de otros espacios de generalización. Además, se realiza a través de la construcción de unidades de trabajo (didácticas), en las que se definen los procesos de enseñanza y de aprendizaje a desarrollar. En este sentido, se propone un espacio de observación por medio del estudiante para que visualice objetos que acerque la estructura del objeto físico con el objeto geométrico en cuestión, esto es de tal manera que se alcance a tener un primer acercamiento a una primera representación semiótica del objeto matemático, quedando así, en primera instancia un punto de inicio con el cual pueda poner en contacto dicho objeto, es decir puede manipular y detallar algunas propiedades que en ellas se encuentran, de tal manera como propone Duval (1993), que se construya un concepto cognitivamente por medio de diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático.

Un ejemplo que podría ilustrar esta propuesta es el siguiente:

Suponiendo que a si se le pregunta a un niño pequeño: ¿qué es “el número tres” ?, él mostrará tres dedos, alzando la mano derecha. La pregunta tiene que ver con el objeto matemático “tres” pero tiene como respuesta una representación semiótica de dicho objeto, normalmente sólo una. Ahora, si se le plantea la misma pregunta a un niño que está terminando la escuela primaria, él seguramente escribirá con un lápiz en una hoja de papel la cifra 3. Cambia la representación, pero el problema de la diferencia entre objeto matemático y su representación permanece. Sin duda, la pregunta va más allá de la capacidad de los sujetos: una pregunta con esta carga epistemológica no puede tener otra respuesta por parte de los niños, y las cosas no cambian con el pasar del tiempo. (D’Amore, Fandiño, Lori y Matteuzzi, 2015, p. 181). Es un acto inicial en su cambio de representación, sus dedos representaran el mismo objeto matemático que el símbolo escrito en el papel, pero su transformación y/o cambio de representación, esto es que el proceso de la conversión de otro registro semiótico comprende desde su visualización, pasando por un proceso de agrupamiento y hasta desarrollar el concepto de número tres.

El desarrollo de este proceso en poner en juego diferentes representaciones semióticas sobre un objeto matemático que indica según Duval dos situaciones “tratamiento y conversión” (Duval, 1999, p. 1), los cuales permiten reflexionar si realmente son necesarios los cambios de representación semiótica o si en definitiva es un cambio de una representación por otra, un ejemplo común es cuando se realiza una suma y se utilizan los dedos para dar una respuesta del numero como concepto. En definitiva, es preciso que se deban mantener una constante acción con sus registros semióticos y que por cual sea su preferencia den razón del ejercicio o actividad matemática, es decir que para la actividad matemática se debe ejercitar la capacidad mental para poder involucrar y coordinar dos o más representaciones semióticas que den solución a algún problema en particular y que al final no se de alguna ambigüedad y se hable de dos objetos distintos. Es conveniente poder explorar las diferentes formas de abordar un problema matemático, con lo cual se observa que implica un análisis cognitivo de este y con lo cual con lleva a desarrollar una “conversión” y un “tratamiento” para enfrentarse a dicho ejercicio” Duval, 1999, p. 3). Según Duval “La actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de las representaciones semióticas en la perspectiva de elaborar nuevas representaciones. Todo progreso de conocimientos en matemáticas pasa por este trabajo de transformación. Ahora bien, hay dos grandes tipos de transformación en una representación semiótica: los tratamientos y las conversiones” (Duval, 2004, p. 44)

Tratamiento: se refiere a la transformación de una representación en otra representación de un mismo registro. Es decir, que se realiza al interior de un mismo registro, y solo bajo las reglas de ese sistema en particular. El tratamiento es la transformación más importante desde el punto de vista matemático.

Conversión: esta es una transformación de la representación de un objeto en un registro, en otra representación del mismo objeto, pero en otro registro, es el paso de un registro a otro. Se conserva el mismo objeto, pero se explicita de otra manera. El siguiente es un ejemplo con el cual se puede tener un acercamiento a esta teoría

Tabla 1. Proceso de transformación

TRANSFORMACIÓN	
Dar una representación semiótica en otra a partir de: Juan es 3 años mayor que Pedro. Juntos tienen 23 años de edad. ¿Qué edad tienen?	
CONVERSIÓN	TRATAMIENTO
Cambiando el sistema semiótico (el registro) usado sin cambiar los objetos indicados	Manteniendo el mismo sistema semiótico
↓	$x + (x + 3) = 23$ ↓
$x + (x + 3) = 23$	$2x + 3 = 23$ ↓
	$2x = 23 – 3$ ↓
	$x= 20/2$ ↓

Fuente: elaboración propia

En particular se tiende a enfatizar en el “tratamiento” que en su “conversión” debido a que se estipula un directo resultado y a nivel de funciones recibe más estructura el álgebra de funciones que las gráficas que ellas representan.

Esta propuesta de aula tiene como objetivo implementar métodos o procedimientos, que permitan tener un acercamiento entre sus representaciones semióticas de algunas figuras geométricas como la elipse, parábola y circunferencia y se plantee a través del trabajo de Polya (1995). Esto es con una breve inducción de temas como la recta, la hipérbola, la elipse, desarrollemos juegos lúdicos con los cuales los estudiantes involucren las propiedades de estos elementos en aquellos juegos, de tal manera se identifiquen más con su manera deseable de aprender, sin tener que ser tan dispendioso o común a lo que nos ha llevado la historia de la educación. El proceso se describe así:

Entender el problema: es necesario primero entender el problema y explorarlo, es decir, tenemos que tener en claro cada parte del problema, cada palabra, lo que nos pide hallar, entre otras cosas; para esto es necesario trazar dibujos, hacer uso de la intuición, trabajar con casos íniciales y especiales, casos concretos, reconocer las partes íniciales de nuestro problemas ya sea un problema por resolver (datos e incógnita) o un problema por demostrar (hipótesis y conclusión), además también es importante pensar en problemas o teorías resueltas con anterioridad que nos ayuden o que se relacionen al nuestro para poder encontrar diferentes formas de solucionarlo.

Diseñar un plan: una vez entendido el problema y de haber explorado un poco acerca de sus términos, preguntas y las distintas relaciones que podemos encontrar con nuestro conocimientos previos, será necesario empezar a diseñar un plan, para esto podemos empezar a descomponer el problema en sus partes más importantes y descartar las que no lo son, descomponerlo en casos, asignar valores y nombres con los cuales sea más fácil identificar los términos a utilizar en nuestro problema, claro aunque se debe de utilizar la notación adecuada en términos matemáticos.

Ejecutar el plan: teniendo en cuenta el plan a ejecutar, ahora hay que ponerlo en marcha, estar convencidos de que va a funcionar y nunca perderlo de vista. Para esto hay que chequearlo paso a paso, justificando bien y claramente cada paso, argumentando y asegurándose de que la lógica utilizada sea la correcta. Siendo problemas de la vida cotidiana pueden presentar varias posibles soluciones según el contexto en que este el estudiante.

Mirar hacia atrás: ya habiendo ejecutado el plan, es necesario siempre hacer una mirada retrospectiva y reflexiva, y realizarse finalmente la siguiente pregunta: ¿Qué ha aprendido usted de la solución del problema?

CAPITULO 3. INTERVENCIÓN EN EL AULA

3.1. Intervención en el Aula

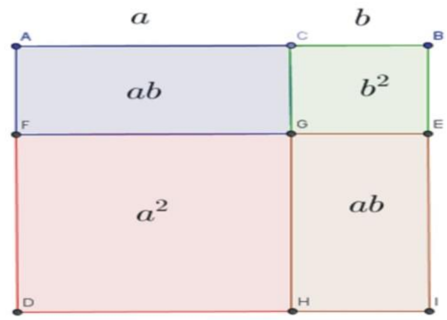
Al trabajar con diferentes registros semióticos o sus diferentes representaciones de algún objeto matemático, se destaca que la primera posición objetiva del estudiante es un lenguaje gráfico, con lo cual al ver o representar figuras abstractas, se interrumpe un acercamiento a tal objeto, dando así una primera dificultad, ya que no es un proceso tan natural, como lo es observar un árbol o en consecuencia contar arboles dentro de la naturaleza, es decir que al momento que puede llegar a acercarse con sus sentidos ha logrado su primera representación del objeto matemático. no obstante, se observa generalmente, existe un trabajo enfocado a desarrollar estudios que van ligados más con un predominio algebraico y a veces acompañado con algunos pensamientos geométricos, de tal manera que se ha posicionado a una matemática “direccionada”, es decir que al tener este tipo de enfoque se está limitando el estudio a una sola representación, lo cual queda el campo abierto a buscar entre las diferentes representaciones semióticas un cierto hilo articulador para llegar a comprender de manera clara un concepto matemático.

“La articulación entre registros hace referencia a la discriminación y coordinación significantes de dos representaciones de diferente registro” (Duval, 2004, p. 153). se refiere que al aplicar un registro inicial se podrá direccionar ese registro para desarrollar un nuevo registro que con el cual me permita solventar una respuesta a una situación o ejercicio planteado, es decir el alumno estará dirigido a dar una solución partiendo de un registro inicial, por otro lado permite ver el cambio de registro mediante un proceso de conversión, el cual puede establecer un primer razonamiento y darle correspondencia a otro registro, es tal el caso cuando se trabaja en procedimientos lógicos o algebraicos, es por tal motivo que he presentado unas ideas principales que tienen el fin de encontrar algunas relaciones entre sus registros semióticos y su capacidad de hacer conversiones en otros registros, dado que según Duval (2004), permite generar un buen proceso en el aprendizaje , es decir que la conversión es una actividad que rige una amplia coordinación en cada registro semiótico, de tal forma que la conversión es "fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos (matemáticos)" (Duval 1999, p. 176), y en razón "en una fase de aprendizaje la conversión juega un papel esencial en la conceptualización" (Duval, 1999, p. 181).

Cada situación en el mundo real el estudiante permite al estudiante tener un acercamiento con su forma de tener un primer registro semiótico, además de poder identificar, en términos de Duval las conversiones o tratamientos que permitan elaborar una transformación que permitan ese cambio de registro, es determinante en este trabajo aclarar que más se ha trabajado con la conversión debido a que en geometría se trabaja con un primer registro gráfico ,con lo cual ha permitido tener una relación estable entre sus registros semióticos , es decir entre el registro grafico – registro verbal, gráfica y su continuidad, gráfica y escalas, etc., esto es , permite una gran variedad de registro para la correspondencia de dichas representaciones del objeto matemático

Se presentan deficiencias desde un registro verbal a un registro algebraico debido a la falta de comprensión lectora y además a una falta de correspondencia semántica este estos registros veamos un ejemplo en la geometría plana euclidiana. Presentado de tal manera nos permite estudiar la proposición algebraica. Expresada en los siguientes términos: "si una línea recta es cortada al azar, el cuadrado sobre todo el igual a los cuadrados sobre los segmentos y dos veces el rectángulo contenido por los segmentos". Proposición 4 libro II Euclides entonces a veces permite ver una falta de congruencia entre los registros semióticos como el algebraico y su registro verbal

Imagen 1. Proposición 4 de Euclides



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Fuente: elaboración propia

El registro grafico permite un buen desarrollo en el trabajo de pasar o realizar conversiones a otros registros, ya que es un registro que permite interactuar visualmente con sus propiedades y elementos que no se podría ver en otros registros por su alto contenido de con más alto índice de abstracción

Se resalta que la teoría de Duval (2004) tiene un alto valor de validez debido a que permitan involucrar varias representaciones las cuales tengan una relación que faciliten un proceso de conversión se tendrá una mejor comprensión para el estudio del objeto matemático, logrando que se diferencie cada una de sus representaciones semióticas del objeto matemático y su concepto en general.

Se puede notar que al reconocer un objeto matemático en el mundo natural y su conversión arrancando desde ese punto, permite que la actividad cognitiva sea de un gran interés para el estudiante. Mediante la formulación de talleres y/o trabajos para relacionar el concepto aprendido, se puede determinar que al aplicar juegos lógicos se puede desarrollar una intervención más atractivas y aceptadas con facilidad por los estudiantes que las encuentran novedosas, además de este planteamiento se refuerza un estado crítico debido a que se formaran estrategias, ideas, la capacidad de resolver y plantear problemas e incluso favorece el trabajo en equipo, aun ,as cuando permite establecer un cierto rigor en los procesos y cálculos para terminar con fases de los juegos lógicos que motivan a desarrollar algún proceso heurístico en los alumnos. Como producto de la intervención en el aula, se muestran las siguientes bitácoras que evidencian la aplicación de las etapas agotadas para lograr el aprendizaje de la geometría

3.2. Actividades de la intervención del aula

Las actividades se describen de acuerdo a una temática o serie de juegos que luego se registrarán bajo una bitácora. Así, en cada juego se describen los enunciados, los instructivos y el desarrollo de los mismos.

Tabla 2. Actividades del proceso de intervención de aula

Etapa de intervención	Actividades o juegos
Nociones básica	Llegar a 100 parte 1 Llegar a 100 parte 2 Llegar a 100 parte 3 Elige tu paga Sin tiempo para la escuela De esquina a esquina
Conociendo el espacio euclidiano	Representación de cónicas: circunferencia y elipse (a) Representación de cónicas: circunferencia y elipse (b) Representación línea recta (horizontal y vertical) Representación línea recta (inclinada) Sopa matemática
Identificando lugares geométricos	Representación de la parábola (a) Representación de la parábola (b) Representación de la parábola (c) Realización de taller lúdico 1
Las elipses y las hipérbolas	Representación de la elipse (a) Representación de la elipse (b) Representación de la elipse (c) Taller lúdico 2

Fuente: elaboración propia

3.3. Implementación de las actividades y juegos

El desarrollo de las actividades propuestas se describe a partir de una serie de bitácoras en las cuales se evidencia el proceso de intervención de aula.

3.3.1. Bitácora 1. Nociones básicas

Desde muy pequeños, nuestros padres empiezan a enseñarnos el nombre de las cosas y personas que nos rodean, luego iniciamos una formación en la escuela, donde se pretende crear ambientes de aprendizaje. La escuela y hogar buscan la manera más sencilla de dar a conocer los temas a tratar, relacionando el concepto con algún evento, objeto, persona o cosa que sea familiar al niño, inclusive en matemáticas se habla de conjuntos, (visto como la colección de objetos), números (que en realidad son números naturales). En nuestra etapa inicial como lo es el preescolar empezamos viendo los conceptos de número, conjuntos y aspectos relacionados con las matemáticas o pre-matemáticas en este caso, por esta razón es importante afianzar cada vez más a las personas en el ámbito matemático, teniendo en cuenta que ella contribuyen de gran forma en el desarrollo y el desempeño en la sociedad, sin olvidar que se debe orientar ejercicios que agilicen el pensar lógico y de paso se refuerzan los conocimientos matemáticos básicos. Todo esto contribuye en el desarrollo de la agilidad, en el razonamiento, el pensamiento, la rapidez, la creatividad y lo más importante ayuda en el momento de afrontar la vida ya que los conocimientos han sido adquiridos de forma significativa. Es importante tener en cuenta que todo tiene resultados si las estrategias de enseñanza –aprendizaje se hacen adecuadamente y frecuentemente, es decir la practica influye mucho, pero una realización de ejercicios sencillos, pero de gran relevancia ya que de eso depende el interés y la dedicación que se le dé a los ejercicios matemáticos, porque es una ciencia un poco compleja de entenderla.

Por todas las anteriores razones son muy importantes las estrategias pedagógicas que se implementen para orientar las matemáticas, ya que para ejercitar la mente se deben crear algunos mecanismos y algunos ejercicios íníciales para que a los estudiantes les llame la atención y puedan continuar en un proceso de aprendizaje. El trabajo que desarrollado está enfocado en la implementación y desarrollo de estrategias pedagógicas que motiven en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, es decir que con ejercicios planeados estratégicamente los estudiantes inicien en su pensamiento lógico y matemático desarrollando agilidad y destrezas, pero de forma significativa y que sientan el gusto y puedan continuar aprendiendo cada día más. Para despertar la aptitud matemática en las niñas se procedió con los siguientes juegos:

3.3.1.1. Llegar a 100 (parte 1)

Este juego, se trata de que los grupos de estudiantes por turnos escojan un número del 1 al 10 y se vaya sumando consecutivamente, aunque el propósito de este juego es llevar al contrincante y obligarlo a que diga 100. Luego, gana el equipo que no llegue a 100. Al final del juego se deberán de responder preguntas como las del anterior problema, lo valioso de este juego es el encontrar otra estrategia diferente a la anterior puesto que el propósito de este juego es contrario al del primero. Con mis compañeros se puedo ver que el diseñar una estrategia ganadora es esencial para poder tener mayor probabilidad de ganar. Se llena de expectativa al encontrar una competencia entre los grupos, disfrutando cada juego y generando una posible estrategia que sea ganadora e invencible lo que se puso a prueba su ingenio, invención y artificio, mostrando un importante avance para lo que significa la lógica en cada paso del juego. Dentro de cada estrategia se intuye que el próximo número a descubrir no es el 100 si no el número 99 que dejaba sin opción al grupo contrincante, dando lugar a varias estrategias para llegar a este número, como, por ejemplo;

- Estrategia grupo 1: iniciar con números pequeños
- Estrategia grupo 2: iniciar de primero
- Estrategia grupo 3: iniciar de segundo
- Estrategia grupo 4: sumar de 10 en 10
- Estrategia grupo 5: iniciar de segundo e ir en un múltiplo de 10

3.3.1.2. Llegar a 100 (parte 2)

Ubicados en grupos de tres estudiantes, estableciendo un orden, cada estudiante escogerá un número del 1 al 10 en su turno, se irán sumando los números hasta llegar a 100, el estudiante que logre sumar 100 gana. Al finalizar el juego, se analizarán las estrategias utilizadas en el juego anterior por cada grupo, tratando de describir si funcionan. Los grupos uno, dos, tres y cuatro decidieron continuar con sus estrategias. El grupo cinco por el contrario formulo que el número ahora a llegar es el 89 para que al finalizar el juego el grupo contrincante no tuviese oportunidad de llegar a 100

3.3.1.3. Llegar a 100 (parte 3)

Ubicados en grupos de tres estudiantes, estableciendo un orden, cada estudiante escogerá un número del 1 al 9 en su turno, se irán sumando los números hasta llegar a 100, el estudiante que logre sumar 100 gana. Al finalizar el juego, se analizarán las estrategias utilizadas en el juego anterior por cada grupo, tratando de describir si funcionan.

El primer grupo, al cambiar la condición final, supuso que su estrategia debía ser modificada, luego utilizarían números grandes para iniciar y terminarían con números pequeños. Los grupos dos, tres y cinco, decidieron defender sus estrategias. El grupo cuatro transformó su estrategia, en la cual el estudiante que inicia el juego, dirá un número cualquiera, el siguiente estudiante deberá sumar un número talque dé como resultado diez, la idea de este proceso es que, entre los participantes se vayan completando múltiplos de diez hasta llegara a cien.

3.3.1.4. Elige tu paga

Supongamos que tienes un nuevo empleo, y el jefe te ofrece elegir entre:

a) 4.000 pesos por tu primer año de trabajo, y un aumento de 800 pesos por cada año subsiguiente.

b) 2.000 pesos por los primeros seis meses y un aumento de 200 pesos cada seis meses subsiguientes.

¿Cuál oferta aceptarías y por qué?

“No todo es lo que parece” dijo una estudiante a enfrentarse a este problema el cual siguiendo paso a paso los planteamientos de Polya no obtuvo ningún problema y todos coincidieron en la solución, aunque al momento de ser coherente en sus pensamientos y facilidades de acertar correctamente un problema, no significa que esta posible solución no esté acompañada de un cierto razonamiento.

3.3.1.5. Sin tiempo para la escuela

Este es un ejercicio que puede contribuir a entender los procesos de raciocino matemático. El ejercicio parte del siguiente enunciado:

"Pero no tengo tiempo para la escuela", explicaba Eddie al preceptor. "Duermo ocho horas diarias que, sumadas, dan 122 días por año, suponiendo que cada día es de 24 horas. No hay clases los sábados ni los domingos, que suman 104 días por año. Tenemos 60 días de vacaciones de verano. Necesito tres horas diarias para comer... esto es más de 45 días al año. Y necesito al menos dos horas diarias de recreación... que suman más de 30 días al año."

Eddie escribió estas cifras mientras hablaba, después sumó todos los días. La suma daba 361.

- Sueño (8 horas diarias) 122
- Sábados y domingos 104
- Vacaciones de verano 60
- Comidas (3 horas diarias) 45
- Recreación (2 horas diarias) 30
- Total 361 días

"Ya ve", continuó Eddie; "eso me deja tan sólo cuatro días para estar enfermo y en cama, y ni siquiera he tomado en cuenta los siete feriados escolares que tenemos cada año". El preceptor se rascó la cabeza. "Algo no anda bien aquí", murmuró. Pero por más que se esforzó, no pudo encontrar nada equivocado en las cifras de Eddie. ¿Puedes explicar dónde está el error?

En este ejercicio se obtuvo gran ganancia puesto que no se podía enfrentar el problema. Siguiendo cada paso de Polya y exponiéndolo paso a paso se daba una luz a su resolución

Estrategia grupo 1: empezó primero por dar lugar a descifrar, cada día por cada semana, por cada mes del año, luego evaluando con sus experiencias el significado del resultado obtenido, quedando así una nueva discusión si aún era coherente las nuevas horas de estudio, aunque la respuesta no era exclusiva y eficaz, la simpleza de la pregunta, llevo a cuestionar por qué sobre sus datos diarios, quedando así expuestos cada día y hora del año.

Estrategia grupo 2, 3: acondicionaron una tabla en forma de calendario para dar respuesta a los días de estudio, de vacaciones, festivos, etc., ¿Cómo solucionar las horas sin poner en contradicción lo propuesto por el problema?, así pues construir una tabla con días y horas, lo cual fue un proceso muy engorroso, pero un camino es un camino de solución.

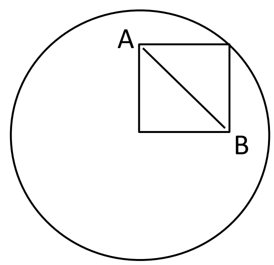
Estrategia grupo 4,5: Distribuyeron en una tabla los días de una semana normal atribuyéndole a cada día sus horas empleadas en el ejercicio, deduciendo que, “en realidad lo que sucedía era que la relación entre los días se determinaba por semanas del año y no por acuerdos de vacaciones ni nada de eso” solo dependía de los verdaderos días de aquella semana de prueba

3.3.1.6. De esquina a esquina

Muchas veces un problema geométrico es terriblemente difícil si se lo enfoca de manera equivocada. Se lo enfoca de otra manera y resulta absurdamente simple. Este problema es un caso clásico. Dadas las dimensiones (en centímetros) que muestra la ilustración, ¿con qué rapidez puedes calcular la longitud de la diagonal del rectángulo que va de la esquina A la esquina B?

Se presentó el ejercicio para que tuviera una idea de cómo resolver el problema después de un periodo de tiempo se aclaró ideas de los grupos, entre las cuales se encontraba las siguientes:

Figura 8. Cálculo de distancia



Fuente: elaboración propia

- Pitágoras
- Propiedades de seno y coseno

Un grupo de estudiantes sugirió una solución, causando gran entusiasmo por parte de ellos y garantía de que si se puede resolver los problemas por medio de conocimientos adquiridos anteriormente. Al presentar la solución y ver su simpleza, el asombro fue inmediato y no llenaba las expectativas de la solución del problema, dando duda al valor numérico de la diagonal del cuadrado. Luego de especificar que la diagonal dependía de la circunferencia dada. Es importante señalar que dentro del aprendizaje se denotara como importante aquellas formas de dar un conocimiento, es decir que las destrezas lógicas de las alumnas se pondrán en un continuo ir y venir dentro del sistema de juegos con el cual promueve la acción e interacción de estos conocimientos y además la participación de cada una de ellas. Por lo que es probable que se alcance a generar una dinámica estructura en el pensamiento lógico-matemático que a la prostre será el inicio de una mejor visión de la matemática.

3.3.2. Bitácora 2. Conociendo el espacio euclidiano

En el conocimiento del espacio euclidiano, la línea es el elemento básico de algunas axiomáticas por no decir en casi todas, de tal forma que esta se relacione en cualquier contexto dado que las ideas del espacio son meramente inducidas por líneas, y en especial y a nuestro estudio en matemática. Es así pues de gran importancia y tan esencial en este estudio dado que se da tan natural como la letra en un texto, ya que esta representa la forma de expresión más sencilla y usada en cada dirección entre el acercamiento a la realidad ya que, conduce a ilustrar y resaltarlas figuras, sin desconocer que ella posee distintas formas lo cual se puede construir cualquier objeto con un conjunto de líneas y su posición en ella, luego esta se hace así la más dinámica y variada. De esta forma nos permite indagar y enfrentarnos de algún modo en una fuente de conocimiento euclidiano, ya que podemos por medio de ella estructurar un cimiento articulado y eficiente para afrontar nuevos conceptos que envuelven esta temática, como por ejemplo, tangentes, rectas, y curvas en general, pero además tenemos un acercamiento preciso que definirá este proyecto de aula , lo cual es de encaminar al estudiante a tener ideas y conocimiento de nuevas formas de estudiar tipos de relación entre las figuras y la ecuación que la describe. Así pues, nos centraremos en primer lugar al campo de estudio de esta, como ejemplo:

Etapa de acoplamiento: se sitúa al estudiante a que realice gráficos interlineados con cualquier tipo de líneas vistas de tal forma que pueda relacionar propiedades tales como, está formada por la unión de varios puntos en sucesión, pudiéndose asimilar a la trayectoria seguida por un punto en movimiento, etc.

3.3.2.1. Representación de la circunferencia y la elipse

Ahora consideramos en observación cualidades de la línea, no como ente meramente matemático, si no más como una expresión más familiar que indique o ayude a comprender y apoyarse en ese camino de descubrir algunas propiedades analíticas de ésta, el cual es mi propósito en mi proyecto de aula. Veamos unos puntos donde se enfrenta más comúnmente en este tema. Las propiedades de la línea son:

- Tiene extensas formas gráficas.
- Expresa movimiento y dirección.
- Crea separación de espacios en el plano.
- La repetición de líneas próximas genera planos y texturas.

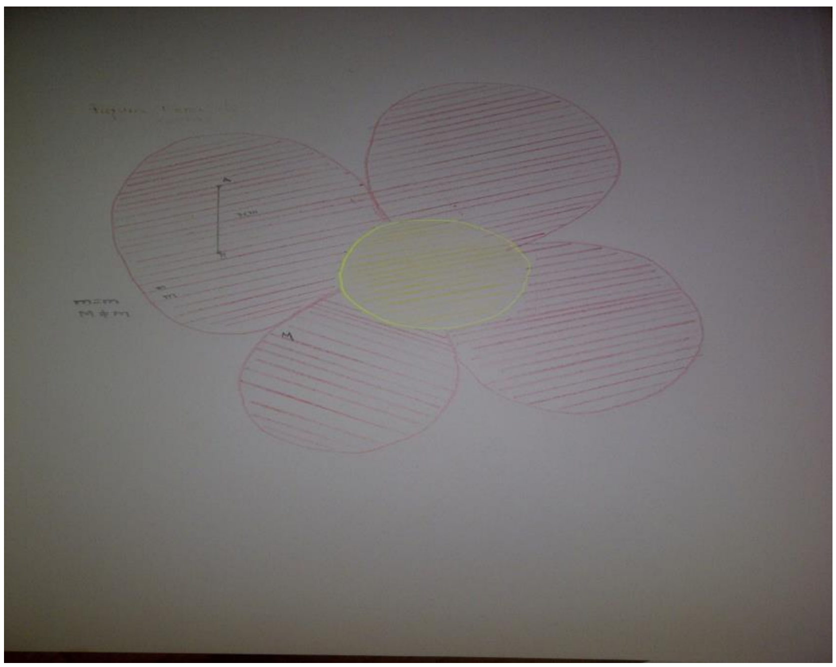
Imagen 2. Representación de cónicas (circunferencia y elipse)

Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

Etapa de sondeo: Es un trabajo que nunca terminará de ser totalmente completo para acentuar un concepto que está aferrado en un pensamiento euclídeo y a llevarlo a hacer referencia a nuevas propiedades distintas.

Pero no menos importantes, como lo es distancias, pendientes, direccionamiento, y las ecuaciones que ella representan y que estará más estipulado por propiedades esenciales en la teoría de la geometría analítica, de la cual mi interés de ver la línea recta como el foco de estudio de esta geometría, y además así de aquellas líneas que cerca de ellas están, es decir, ver cuantas más líneas y líneas paralelas haya alrededor de un punto o línea. Esta cualidad se puede usar para dirigir la atención en una dirección concreta y fácil de intuir figuras en el plano o aún más en el espacio tridimensional, haciendo que el estudiante observe el lugar adecuado, como, por ejemplo, una línea divide o circunda un área, expresa separación de planos, permitiendo al usarla como elemento delimitador de niveles y áreas. Es así como retomo la figura antes llena de líneas arbitrarias, a intervenir solo con líneas de nuestro interés, es decir líneas rectas, quedando como libre extensión de ellas en sus gráficos.

Imagen 3. Representación de cónicas (circunferencia y elipse)

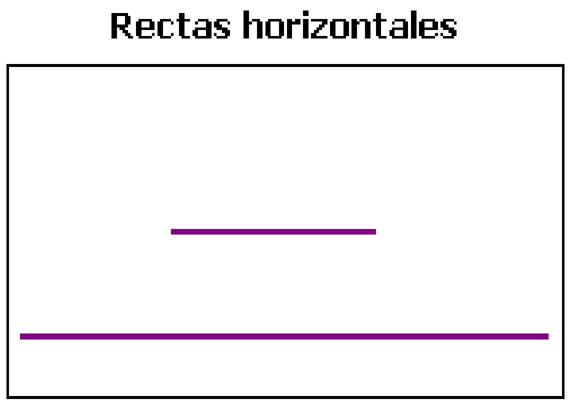


Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

De esta forma se llevó a cabo las dos primeras etapas de mi proyecto de aula. Dando al estudiante libertad de construir líneas y gráficos, los cuales por medio de dibujos hechos con líneas rectas paralelas se funden las propiedades de las cuales me intereso en dejar al descubierto, como lo es la distancia, pendiente, paralelas, perpendiculares, y ecuaciones de ellas.

Etapa de aclaración: En este proceso de iniciar a relucir estos conceptos ilustré que Línea recta Define el camino más corto entre dos puntos. Es poco frecuente en la naturaleza, donde predominan las líneas curvas (el universo en su totalidad es curvo).

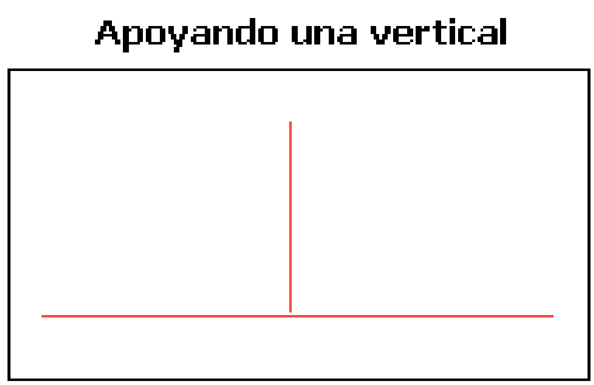
Imagen 4. Representación línea recta



Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

La línea recta horizontal expresa equilibrio estable. El cual nos sugiere por condición de equilibrio una forma de referencia de un movimiento recto, pero en sentido horizontal, induciendo, así que nuestro plano de desplazamiento es horizontal. La línea recta vertical sugiere movimiento ascendente.

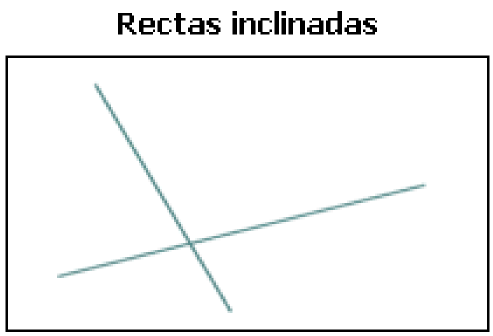
Imagen 5. Representación línea recta (vertical)



Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

La línea recta inclinada, por el contrario, expresa informalmente un punto de desequilibrio donde parecen que están a punto de caerse.

Imagen 6. Representación línea recta (inclinada)



Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

En esta introducción me he centrado en aquellas propiedades de una línea las cuales vendrán definidas por su longitud, su orientación (dirección), su ubicación (posición) en el plano cartesiano, su forma (recta) y además tener su forma su profundidad y hasta la particularidad de su color, que entre otras cosas en mi contexto fue bien recibido, dado que el alumnado es meramente femenino. Estas propiedades se verán afectadas también por el número de líneas que haya en la composición, es decir de sus propiedades de las líneas que en ella se relacionan, como lo es rectas paralelas, rectas perpendiculares, su proximidad y la orientación relativa entre ellas y el plano cartesiano. A continuación, se presentó una clase, que intervino a acentuar los conocimientos que de alguna forma estaban dichos, pero no sustentados, es decir levar a cabo la clase que direccionara las propiedades mencionadas y llevarlas a involucrarla en nuestro estudio de la línea recta como ente geométrico-analítico

Etapa de complejidad: luego se presentó el siguiente taller para que lo trabajaran individualmente y así reforzar los conceptos adquiridos en nuestra introducción primaria, estos talleres ya totalmente encaminado a realizar problemas y tales soluciones que en ellos se encuentre se pueda atraer la atención de las estudiantes para que realicen los ejercicios con un cierto placer en ello, esto es que por medio del juego lógico encerrar el conocimiento en forma más lúdica:

3.3.2.2. Sopa matemática

En el siguiente cuadro hay 23 sumas dispuestas horizontalmente de izquierda a derecha y verticalmente de arriba abajo.

1) Encontrar la suma correspondiente a las pendientes de las rectas dadas

$$3y-6x-12=0 \text{ y } 3y-21x-30=0$$

$$5y-15x-3=0 \text{ y } 4y-16x-20=0$$

2) Encontrar la suma correspondiente con los puntos de corte con el eje Y de las anteriores rectas

3) Encontrar la suma correspondiente a las pendientes de las rectas dadas que pasan por los puntos:

a) (2,2) y (3,6)

b) (2,-4) y (5,2)

4) Encontrar la suma correspondiente a las pendientes de las rectas perpendiculares a las rectas dadas:

a) $y=(-x+8)/5$ y $y=(-100x-1)/1000$

b) $y=(-16x+8)/2$ y $y=(-64x-3)/8$

5) Encontrar la suma correspondiente a las pendientes de las rectas paralelas a las rectas dadas:

a) $y=6x+9$ y $y=6x+20000$

b) $y=2x+10$ y $y=10x+2$

Imagen 7.Sopa matemática

2	1	10 +	6 =	16	7	2	10	12
7	9	6	9	15	7	1	1	3
9	9	9	3	12	14	5	5	6
8	8	9	1	10	3	4	6	9
8	17	7	6	10	6	8	7	3
16	5	9	6	4	9	12	3	8
7	1	16	12	14	3	7	10	8
4	6	10	3	4	7	10	9	16
5	10	15	3	6	9	6	2	8

Fuente: propia de la investigación

En el primer punto la forma que se presentó la ecuación de la recta fue un impedimento a su busca de la suma dado que relacionaban la pendiente al coeficiente que acompaña a la X, sin encontrar su respectiva suma en la sopa matemática quedando así la búsqueda a la exitosa solución. Siendo un problema común precedí a dar una pista en la cual consistía en observar uno de los pasos de Polya (¿Qué es la incógnita? Un plan) llevando a trabajar nuevamente sobre ese punto, y reluciendo la solución y llevando a observar la ecuación canoníca de la recta.

En los puntos cuatro y cinco se reprograma el sentido de cómo ver una paralela o una perpendicular teniendo en cuenta la ecuación de una cierta recta dada e indicando la existencia de muchas perpendiculares o paralelas existentes a ella, incluyendo en particular la que se está pidiendo para la solución del taller además la certificación con una gráfica.

Así como es necesario impartir temas de gran relevancia como lo es las operaciones básicas, sistema de ecuaciones, etc., encerramos la geometría analítica en un lugar donde se guarda algo que no se utiliza, pero se necesita muy poco, quedando así una reflexión sobre este hecho. Ahora bien, es preciso adjuntar un tiempo más a esta rama de la matemática pues está por demás que se puede iniciar un trabajo divertido y esencial para el aprendizaje de geometría analítica.

Al momento de intercambiar conocimientos encontramos que desde el primer acercamiento del objeto de estudio motiva a trabajar en este, es tanto así que toda figura observada en el aula le querían sacar sus propiedades y así se tiene que cada vez que miraban una línea recta se interesaban por diferenciarle las propiedades y cualidades que en ellas se determinaban y la relación que producía con las líneas de sus gráficas, lo cual fue agradable pues después de que cada una tenia distintas formas y representaciones en su hoja de trabajo tenia por consiguiente resultados distintos, así considera que intervenir abiertamente sobre un trabajo es gratificante tanto ´para el alumno como para el maestro.

3.3.3. Bitácora 3. Identificando lugares geométricos

Cada persona tiene de manera intuitiva una cierta ilustración de figuras geométricas, de las cuales se puede ser más practico verlas en actividades de la vida cotidiana, o en el mejor de los casos una relación conceptual en la forma que estas se presentan o se relacionan cuando se ponen en interacción con otras formas físicas que en ellas se encierran.

Es importante reconocer que al mezclarse modelos de parábolas se obtendrá una caracterización probable de ver una línea curva que se incrementara o descenderá de manera muy exponencial, es decir que subirá o bajara demasiadamente rápido, de los cuales un punto volverá a un valor similar en la otra parte de que ella se establece (simetría en el plano).

De allí que cabe recalcar como reconocer su forma, su estructura y su potencia de adquirir valores “positivos o negativos” según el punto donde se encuentre el observador.

Etapa de acoplamiento: Al igual que las rectas, entrelazar lo real y físico centrara más al estudiante a desarrollar ese paso de identificar, manejar e interpretar sus características, quedando sujeto a poner en consideración el uso y relación de esta con su medio. Es así que dar un “espejo” de la realidad será importante para la elaboración de este proyecto de aula.

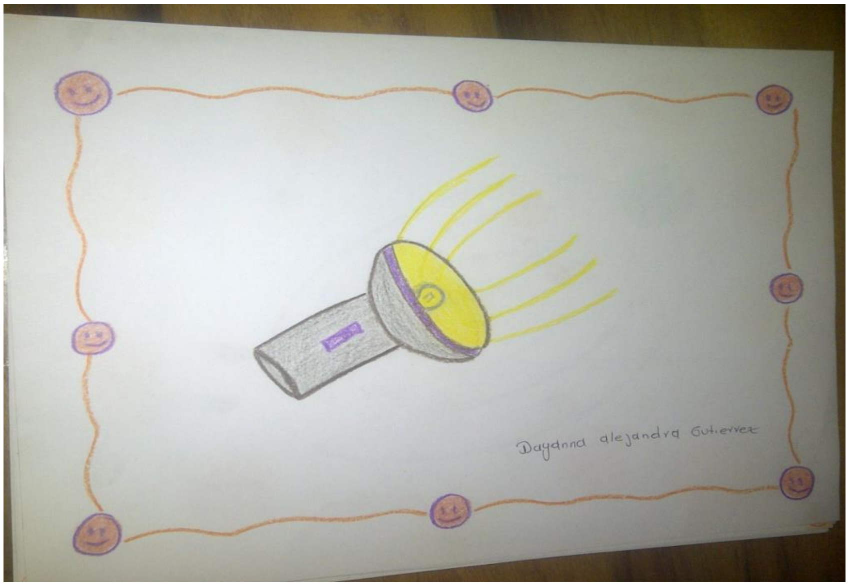
3.3.3.1. Representación de la parábola

Para esta representación, se implementó inicialmente su estructura geométrica en base a lo que las alumnas interpretan mediante su intuición de la parábola, y empezar a distinguir su funcionamiento de esta, procurando que se desarrollen las propiedades de la parábola.

Imagen 8. Representación de la parábola (a)

Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

Imagen 9. Representación de la parábola (b)



Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

Etapa de sondeo: Ahora con la fase anterior se permitirá dibujar, por la misma propiedad de las parábolas, antenas parabólicas, el arco de parábolas que se presentan en algunos deportes, e incluyendo labores de ejercicio para desarrollar en clase, tales como, las parábolas tienen una propiedad si se coloca una bombilla encendida en el foco de la parábola (el faro de una linterna), e intuir lo que sucede con el chorro de luz.

Cabe resaltar que la intuición y los ejemplos reales tienden a mostrar en ellas una oportunidad de irse imaginando a las propiedades de la parábola.

"Los rayos de luz son reflejados por la parábola y todos estos rayos serán dirigidos a un punto". Esta propiedad es usada en los faros de los automóviles estos están formados por una parábola y una bombilla que para su efecto actuara como el foco de esta parábola. En algunas lámparas se puede mover la bombilla del foco y los rayos de luz se distorsionarán o se acumularán. Este principio funciona también en las antenas parabólicas. Un satélite envía información a la Tierra, estos rayos serán perpendiculares a la directriz por la distancia a la que se encuentra el satélite. Al reflejarse en el plato de la antena, los rayos se acumulan en el foco en donde se encuentra un receptor que decodifica la información. También en los telescopios se usa esta propiedad.

Etapa de aclaración: en esta se establece entonces como se observaron ciertas características.

- Propiedades geométricas
- Diferentes elementos de una parábola.

Aunque la definición original de la parábola es la relativa a la sección de un cono recto por un plano paralelo a su directriz, actualmente es más común definir la parábola como un lugar geométrico:

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta dada, llamada directriz, y un punto fijo que se denomina foco. De esta forma, una vez fija una recta y un punto se puede construir una parábola que los tenga por foco y directriz de acuerdo a la siguiente construcción. Sea T un punto cualquiera de la recta directriz. Se une con el foco dado F y a continuación se traza la mediatriz (o perpendicular por el punto medio) del segmento TF. La intersección de la mediatriz con la perpendicular por T a la directriz da como resultado un punto P que pertenece a la parábola. Repitiendo el proceso para diferentes puntos T se puede aproximar tantos puntos de la parábola como sea necesario.

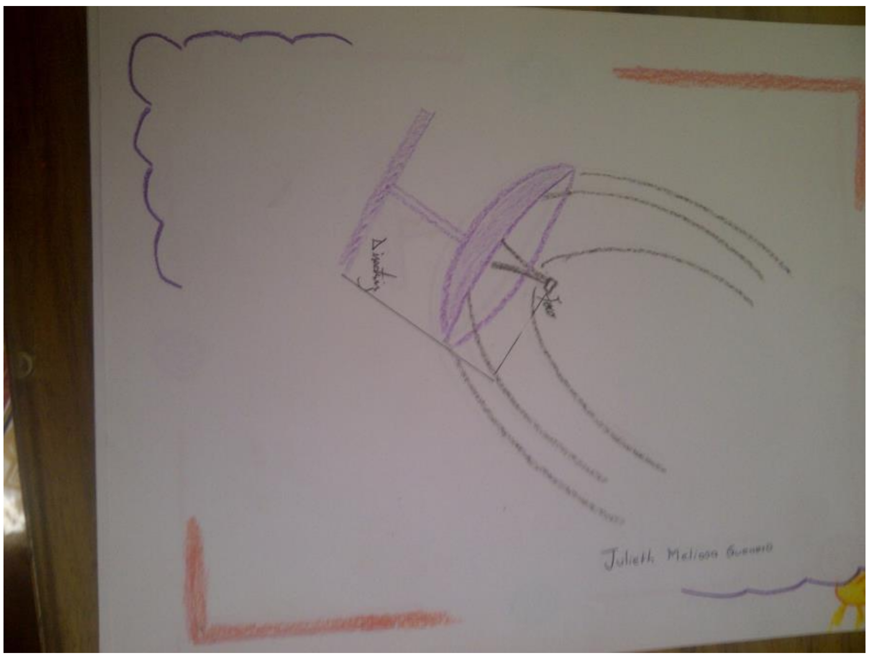
A partir de esta construcción anterior se puede probar que la parábola es simétrica respecto a la línea perpendicular a la directriz y que pasa por el foco. Al punto de intersección de la parábola con tal línea (conocida como eje de la parábola) se le conoce como vértice de la parábola y es el punto cuya distancia a la directriz es mínima. La distancia entre el vértice y el foco se conoce como distancia focal o radio focal.

- Los puntos de la parábola están a la misma distancia del foco F y de la recta directriz.

- Construcción de puntos en una parábola.
- Lado recto
- El lado recto mide 4 veces la distancia focal
- Al segmento de recta comprendido por la parábola, que pasa por el foco y es paralelo a la directriz, se le conoce como lado recto.
- La longitud del lado recto es siempre 4 veces la distancia focal.
- Semejanza de todas las parábolas

Todas las parábolas son similares, es únicamente la escala la que crea la apariencia de que tienen formas diferentes.

Imagen 10. Representación de la parábola (c)



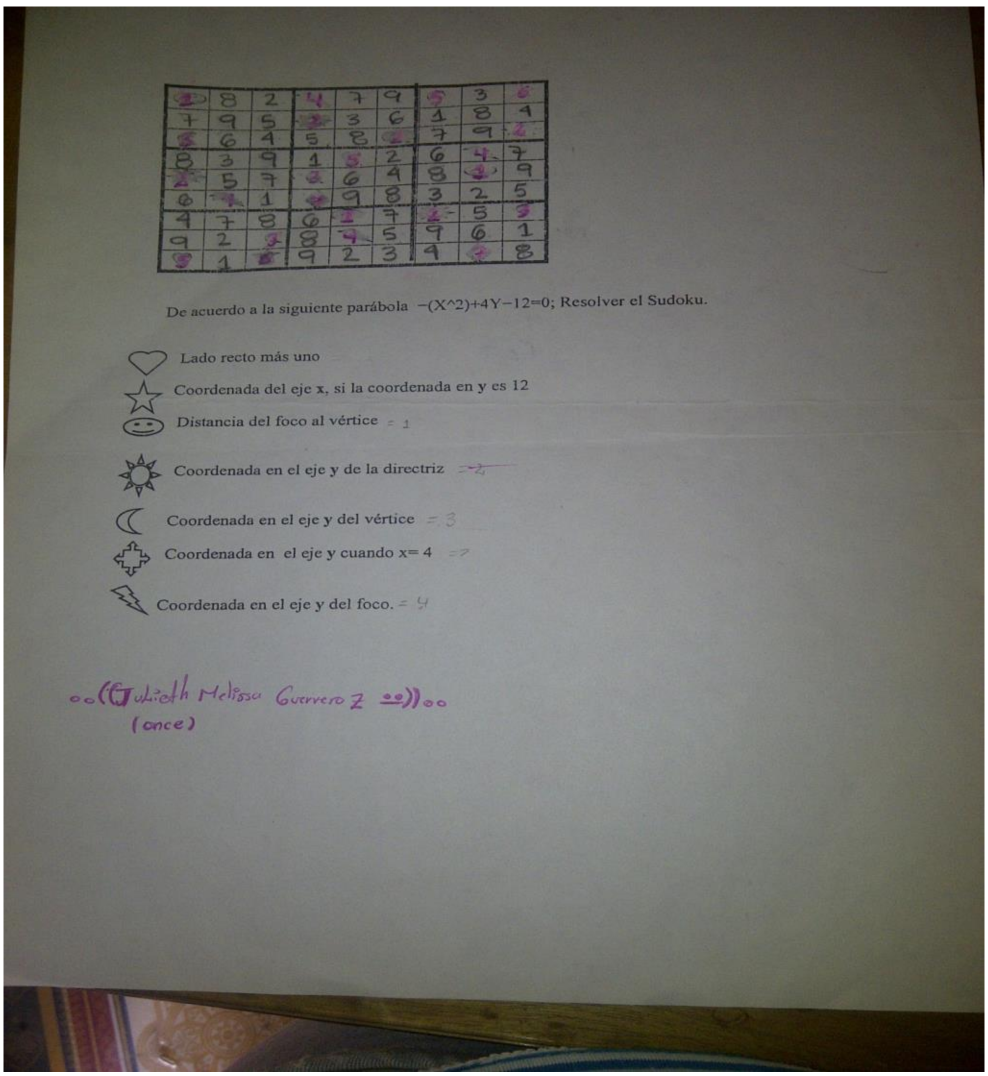
Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

Etapa de complejidad: Es indispensable después de una temática un poco complicada se tienda a caer en el deseo de no seguir con lo mismo es por ello que se pretende con el siguiente taller apreciar el conocimiento adquirido con las novedades de poner en juego las respuestas de los ejercicio con juegos lógicos, que e independiente de la manera como se maneje en el cálculo de propiedades de la parábola se instaure un “relax” en medio de la clase, claro está que los juegos también buscan una mejora en su pensamiento lógico.

3.3.3.2. Realización de taller lúdico 1

Este consistió en el desarrollo de unos ejercicios con base las figuras y las sopas matemáticas.

Imagen 11. Realización de taller lúdico 1



Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

Etapa de reflexión: Desafortunadamente, al estudiar analíticamente las parábolas (basándose en ecuaciones), se suele afirmar erróneamente que los parámetros de la ecuación cambian la forma de la parábola, haciéndola más ancha o estrecha. La verdad es que todas las parábolas tienen la misma forma, pero la escala crea la ilusión de que hay parábolas de formas diferentes. Para tal fin se hace estructuralmente el conocimiento, dado que el trabajo hecho por las estudiantes es colaborativo y constructivo, pues con la intuición que ellas manejan se puede formular mejor el conocimiento geométrico dado que en muchos casos la parábola tiende a ser un objeto desconocido y más con sus propiedades que nunca se logran utilizar en la vida cotidiana de alumnos que no se interesen realmente por tal materia, esto es una idea muy favorable además de incentivar tener en juego las ideas y el conocimiento. Para poder desarrollar lo aprendido se interviene con un taller para acentuar lo aprendido, este taller va dado con el ánimo de recrear ese conocimiento con juegos lógicos que al final hacen la diferencia en aplicar los temas vistos en clase

3.3.4. Bitácora 4. Las elipses y las hipérbolas

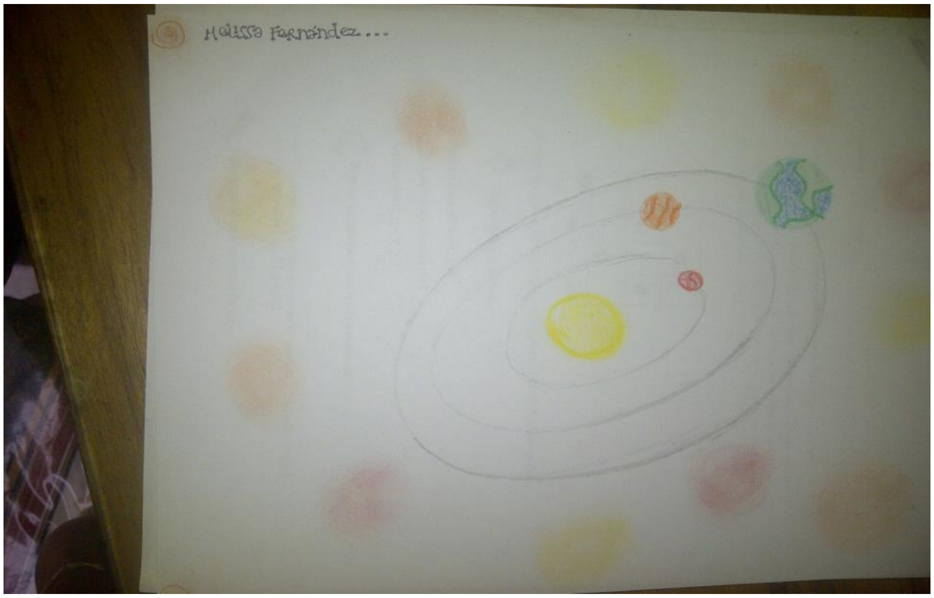
Las estudiantes no poseen un buen conocimiento ni de las formas ni de las propiedades de las elipses o las hipérbolas. En la presente bitácora se mostrará a los estudiantes una perspectiva de ver esta figura, donde aprenderán algunas propiedades básicas de estas curvas, dibujándolas luego para familiarizarse con las mismas.

Las elipses y los círculos están presentes a lo largo de nuestra vida, y reconocemos que sin importar hacia dónde vamos o hacia donde volvemos estaremos de alguna manera siempre dando vueltas. Es por ello que la realidad de ese ir y venir por un mismo lugar, aunque se simbolice que un camino, este concepto también puede encerrar ciertos momentos de reflexión, ya que da ideas de pensamientos, deseos o ideas, puesto que la idea de estar encerrado en una infinitud del pensamiento nos lleva a suponer que en realidad esta rueda y sigue rodando por nuestra mente. Es decir que Las personas van por la curva infinita porque en la elipse (mas particularmente el círculo ya que este es un caso particular de la elipse dado que cumple con las propiedades con focos en igual punto) no es más que alejarse por curiosidad, intuición, especulación, etc.; y volver por miedo, dolor, nostalgia, etc. Es decir que el círculo puede ser un aprendizaje cualquiera, conocer a alguien o tratar de cambiar el mundo. Uno se aleja de un estado inicial para volver al mismo punto de partida, los cuales son teóricos.

Etapa de acoplamiento: se tiende a ilustrar una elipse por medio de ejemplos muy puntuales, pero con gran tendencia de iniciar sus pre -concepciones de estas curvas. Es así como la simple figura de un huevo o la curva que describe el planeta tierra alrededor del sol simbolizan el tenue concepto de esta figura, pero no menos importante pues en realidad este acercamiento es que interesa en este trabajo. Luego de asociar las figuras con el concepto matemático que ilustra estos ejemplos derrama asombro las propiedades que en el podrían hallarse, es decir que los ejemplo relacionados con esta curva serian un poco errados pues realmente no aplica de manera exacta estas propiedades, pero si ejemplifica de manera puntual esta curva. Es así que en primera instancia se pide resolver gráficamente este desarrollo intuitivo de esta figura.

3.3.4.1. Representación de la elipse

Imagen 12. Representación de la elipse (a)

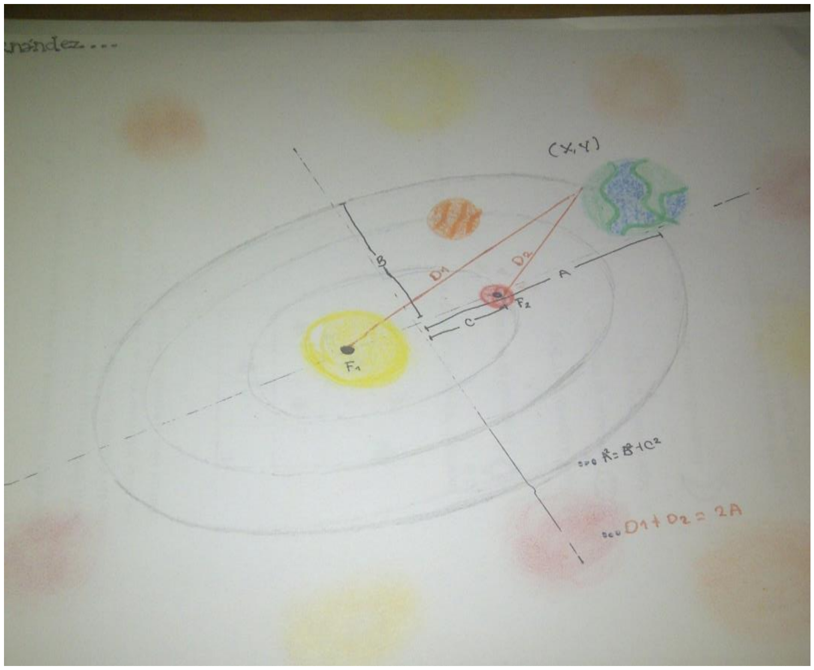


Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

Esta es una relevante figura puesto que en ella se aprecia la figura y además se tendrá en cuenta para seguir instaurando el conocimiento de sus propiedades.

Etapa de sondeo: se considera como relevante las gráficas, es decir, que por más destrezas que exista en las figuras se podrá entender y extender la intuición que ella se obtenía, y además aclara con más profundidad las propiedades incluidas en el gráfico, esto es que a medida que se emplee gráficos más parecidos a la curva se podrá acercar más a este conocimiento. Es claro que la capacidad visual ayuda mucho a entender y formular teorías, para una buena enseñanza de estas.

Imagen 13. Representación de la elipse (b)

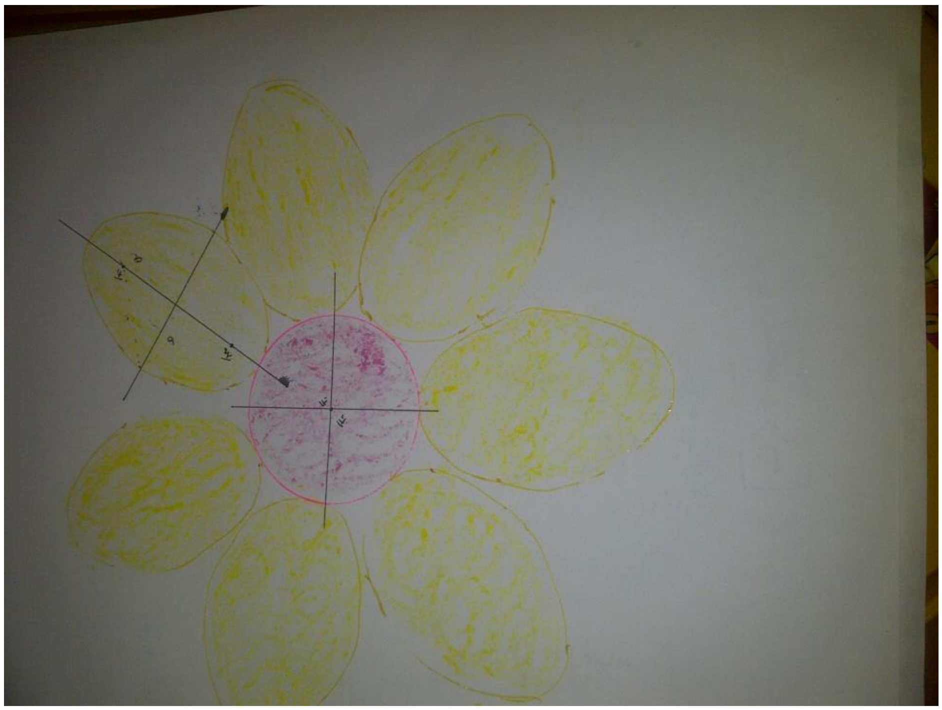


Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

Etapa de aclaración: como se pretende en este proyecto se debe realizar una etapa de conocimiento neto, que ayudar a acceder al conocimiento matemático o científico, es decir que existen momento donde se deberá dar total atención a la teoría que en ella se envuelve, lo que indica que una clase magistral se deberá ofrecer después de que el conocimiento haya sido introducido de manera lúdica e intrigante para las alumnas, aunque esto no conlleve a ser un docente tradicional, sino más bien que con el trabajo de ellas(figuras) se mezclen con la teoría que se impartirá. Como por ejemplo La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante, a estos puntos fijos se les llama focos de la elipse. El uso de la misma permite, entre muchas otras, explicar el movimiento de los planetas. En este material el alumno podrá reafirmar el método analítico al obtener las ecuaciones de la elipse y avance en el reconocimiento de formas y estructuras, en la formulación de conjeturas y en la resolución analítica de problemas de corte euclidiano. El propósito de este material es:

Reafirmar el método analítico al obtener las ecuaciones de la elipse a través de la aplicación, reconocimiento y utilización de los elementos esenciales de esta y resolver problemas.

Imagen 14. Representación de la elipse (c)

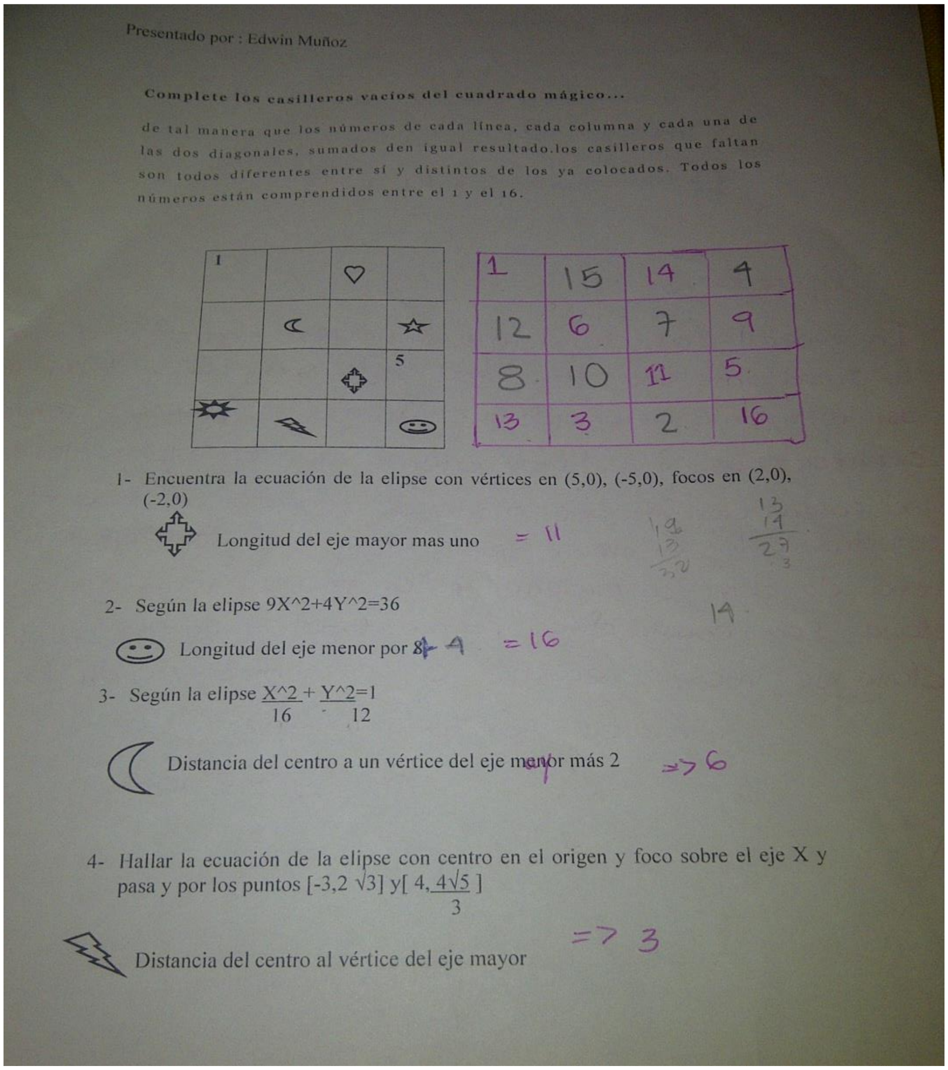


Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

Etapa de complejidad: es sutil en este trabajo desarrollar talleres que intervengan los saberes adquiridos y los juegos que en los resultados se pondrán, esto ayudara sistemáticamente a que cada solución se encaminara a filtra información suficiente que permita luego resolver el juego que con el que resulta una clase más amena para el alumnado y gratificante para el docente, es así que se presentó el siguiente taller:

3.3.4.2. Realización de taller lúdico 2

Imagen 15. Taller lúdico 2



Presentado por : Edwin Muñoz

Complete los casilleros vacíos del cuadrado mágico...

de tal manera que los números de cada línea, cada columna y cada una de las dos diagonales, sumados den igual resultado.los casilleros que faltan son todos diferentes entre sí y distintos de los ya colocados. Todos los números están comprendidos entre el 1 y el 16.

1		♡	
	☾		☆
		✥	5
✹	⚡		☺

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

1- Encuentra la ecuación de la elipse con vértices en (5,0), (-5,0), focos en (2,0), (-2,0)

✥ Longitud del eje mayor mas uno = 11

2- Según la elipse 9X^2+4Y^2=36

☺ Longitud del eje menor por 8 4 =16

3- Según la elipse $\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{12}=1$

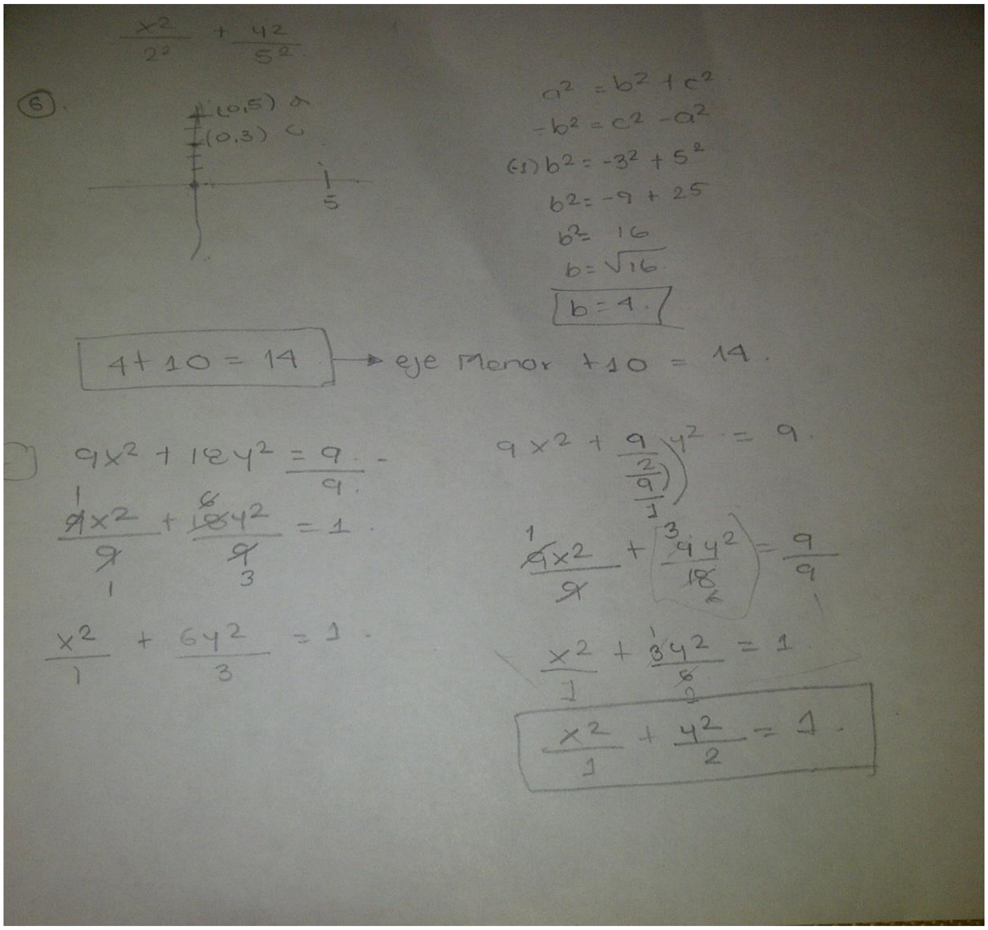
☾ Distancia del centro a un vértice del eje menor más 2 => 6

4- Hallar la ecuación de la elipse con centro en el origen y foco sobre el eje X y pasa y por los puntos [-3,2 √3] y[4, $\frac{4\sqrt{5}}{3}$]

⚡ Distancia del centro al vértice del eje mayor => 3

Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

Imagen 16. continuación taller lúdico 2 (solución)



Etapa de reflexión: singularmente cada paso que se permite explorar, comprende de un cierto sentido por ponerlo en juego con lo explorado, es decir que las alumnas le dan cierto significado a los acontecimientos y procesos en el contexto donde se encuentre. Es así como la elipse ha venido explorándose a partir de una cierta intuición de sus figuras y acercándolas más hasta llegar a incluirlas dentro del trabajo, esto indica que cada vez sus figuras deberían ser más perfectas para encontrar ese espacio geométrico al cual se quiere llegar.

Aunque no es muy común reconocer en cierta medida este tipo de curvas se intenta que descubran o al menos identifiquen este espacio geométrico en la vida cotidiana.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados que se muestran a continuación corresponden a los hallazgos antes (*ex ante*) y después (ex post) de las intervenciones en el aula.

4.1. Evaluación ex ante

Al inicio de la práctica se plantearon algunas preguntas relacionadas con la línea recta y con las cónicas. Los resultados permitieron tener un acercamiento sobre las deficiencias que presentaban las niñas en cuanto a conocimientos sobre estos lugares geométricos. La tabla 2 muestra los hallazgos.

Tabla 3. Diagnóstico previo

Categoría	Descripción	% estudiantes
C1. Identificación de la línea recta.	Identifica con facilidad una línea recta.	100%
C2. Conocimientos de sobre la línea recta.	Identifica las características básicas de la línea recta.	8%
C3. Reconocimiento de las cónicas.	Reconoce la mediatriz	0%
	Reconoce la circunferencia	100%
	Reconoce la parábola	30%
	Reconoce la elipse	5%
	Reconoce la hipérbola	0%
C4. Conocimientos sobre características de las cónicas	Identifica los elementos de la mediatriz	0%
	Identifica los elementos de la circunferencia	0%
	Identifica los elementos de la parábola	0%
	Identifica los elementos de la elipse	0%
	Identifica los elementos de la hipérbola	0%

Fuente: propia de la investigación

4.2. Evaluación ex post

Una vez realizadas las intervenciones en el aula, se han extractado los aspectos más relevantes de los hallazgos durante la práctica. Esto es,

4.2.1. Resultados de la primera intervención: la línea recta

En este primer punto, se pide escribir los nombres de las representaciones usadas generalmente para designar un punto, una recta y el plano. Las categorías encontradas se describen en la siguiente tabla.

Tabla 4. Resultados de intervención en línea recta

Categoría	Descripción	% estudiantes
C1. Uso de Términos geométricos adecuados	Utiliza términos geométricos de forma adecuada para representar los objetos presentados	92%
C2. Uso de Términos geométricos no adecuados	Utiliza términos geométricos de forma inadecuada para representar los objetos presentados	85%
C3. Uso de otros Términos	Utiliza otros términos para representar los objetos presentados	5%
C4. Omisión	No se atreve a representar los objetos presentados	0%

Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

El 92% de las estudiantes utilizan términos geométricos como: punto, origen o punto, origen o vértice para la representación de punto; recta, línea, línea recta, línea infinita, línea indefinida, semirrecta, línea semirrecta para la representación de recta. Una vez hecha la intervención los datos han mejorado ostensiblemente, pues menos del 10% presentan deficiencias en las tres primeras categorías. Y todas las estudiantes pueden representar los elementos de la línea recta.

4.2.2. Resultados de la segunda intervención: la mediatriz

En este punto, se pide ubicar ocho puntos sobre el plano cartesiano (dos por cada cuadrante), donde cuatro de los puntos propuestos corresponden a puntos con coordenadas enteras y los cuatro restantes corresponden a puntos con coordenadas racionales. Las categorías encontradas se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 5. Resultados intervención en mediatriz

Categoría	Descripción	% estudiantes
C1. Identificación de la naturaleza de $A(x,y)$ y asocia con los ejes coordenados	Reconocen el signo de las coordenadas del punto o tipo de coordenada y ubica el punto en el plano cartesiano.	88%
C2. Conocimiento del plano cartesiano.	Reconoce las características del plano cartesiano.	82%
C3. Conocimiento de la naturaleza de la mediatriz.	Logra trazar la mediatriz en las figuras geométricas	85%
	Reconoce las características de la mediatriz según las figuras geométricas.	70%

Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

Más del 80% de las estudiantes lograron afianzar sus conocimientos sobre el plano cartesiano, la ubicación y signo de los pares ordenados y el trazo de la mediatriz. Sin embargo, en el reconocimiento de las características de esta última, aún persiste un 30% que presenta dificultades.

4.2.3. Resultados de la tercera intervención: la circunferencia

Tabla 6. Resultados intervención en circunferencia

Categoría	Descripción	% estudiantes
C1. Conocimientos básicos de la circunferencia.	Identifica los elementos de la circunferencia	90%
C2. Trazo y representación de circunferencia	Logra trazar la circunferencia	95%
C3. Conocimiento de ecuación de circunferencia	Aplica la ecuación de la circunferencia con facilidad.	60%
C4. Identificación de formas en la naturaleza o el entorno.	Identifica formas en la naturaleza y el entorno que representen la circunferencia	100%

Fuente: propia de la investigación (estudiantes de IETCM)

Solo en la aplicación de la ecuación de la circunferencia se presentan dificultades, pues 40% de las estudiantes no logran apropiar el formalismo matemático.

4.2.4. Resultados de la cuarta intervención: la parábola

Tabla 7. Resultados intervención en la parábola

Categoría	Descripción	% estudiantes

C1. Conocimientos básicos de la parábola.	Identifica los elementos de la parábola	90%
C2. Trazo y representación de la parábola	Logra trazar la parábola	75%
C3. Conocimiento de ecuación de parábola	Aplica la ecuación de la parábola con facilidad.	60%
C4. Identificación de formas en la naturaleza o el entorno.	Identifica formas en la naturaleza y el entorno que representen la parábola	50%

Fuente: propia de la investigación

El 75% de las estudiantes lograron trazar una parábola y el 60% mostró capacidades para utilizar la ecuación. Sin embargo, solo el 50% logró identificar representaciones de esta cónica en el entorno.

4.2.5. Resultados de la Intervención 5: la elipse

Los resultados si se comparan con el breve diagnóstico inicial tienen aspectos favorables, de avances en el aprendizaje y dominio sobre esta cónica. Sin embargo, son datos que evidencian la necesidad de reforzar procesos destinados a la enseñanza de estas. La tabla 8 evidencia esta situación.

Tabla 8. Resultados intervención de la elipse

Categoría	**Descripción**	**% estudiantes**
C1. Conocimientos básicos de la elipse.	Identifica los elementos de la elipse	80%
C2. Trazo y representación de la elipse	Logra trazar elipse	60%

C3. Conocimiento de ecuación de la elipse	Aplica la ecuación de la elipse con facilidad	60%
C4. Identificación de formas en la naturaleza o el entorno.	Identifica formas en la naturaleza y el entorno que representen la elipse	35%

Fuente: elaboración propia

Después de la intervención sobre las estudiantes para esta cónica se evidencia progresos, sin embargo, aún se presentan dificultades por buena parte de la población estudiantil objeto de práctica. El 60% de las niñas lograron trazar y aplicar la ecuación de esta con facilidad. Al momento de evaluar las posibles representaciones en el entorno, solo el 35% lograron identificar a la elipse.

4.2.6. Resultados de la Intervención 5: la hipérbola

Si en la elipse se evidencian algunas dificultades, en la hipérbola estas son aún más pronunciadas, al menos así lo demuestra la tabla 9.

Tabla 9. Resultados de intervención en la hipérbola

Categoría	Descripción	% estudiantes
C1. Conocimientos básicos de la hipérbola.	Identifica los elementos de la hipérbola	70%
C2. Trazo y representación de la hipérbola	Logra trazar hipérbola	40%
C3. Conocimiento de ecuación de la hipérbola	Aplica la ecuación de la hipérbola con facilidad	20%
C4. Identificación de formas en la naturaleza o el entorno.	Identifica formas en la naturaleza y el entorno que representen la hipérbola	10%

Fuente: propia de la investigación

Esta cónica es la que mayor dificultad para su aprendizaje presenta en las estudiantes. El trazo de esta, solo lo hacen con buen dominio el 40% de las niñas, la aplicación de la ecuación solo la quinta parte y encontrar representaciones en el entorno se le dificulta al 90%.

CONCLUSIONES

La práctica ha permitido detectar que la percepción de los estudiantes hacia las matemáticas difiere de la que tienen los docentes, razón por la cual a ellos poco les interesan todos los detalles matemáticos que hay detrás de la deducción de una fórmula matemática o de una representación geométrica.

En la actualidad buena parte de los currículos sobre el área de las matemáticas está enfocada sobre el abordaje de fórmulas o sistemas de ecuaciones que limitan la concepción semiótica de lo que representan estos formalismos matemáticos y por consiguiente genera la apatía de los estudiantes sobre estos constructos matemáticos.

Según la experiencia, las cónicas se han visto normalmente como elementos de la geometría que guardan una esteticidad exacta de ciertas representaciones, más no como formas funcionales de la naturaleza o del entorno, inclusive de las tecnologías que los mismos estudiantes usan (ejemplo: las señales de radio de sus teléfonos, los rayos de luz de una linterna o bombilla, entre otros)

Los ejercicios ya sean individuales como grupales realizados en clase, permiten al docente tener una mejor interacción con los estudiantes y se convierten en adecuado mecanismo para observar sus debilidades y al mismo tiempo diseñar e implementar soluciones para el aprendizaje.

La práctica permitió detectar que es posible afianzar los conocimientos sobre cónicas a partir de ejercicios prácticos que muestren la existencia de este tipo de lugares geométricos en cualquier objeto de la naturaleza y que como tal puede entenderse mejor a través de los elementos de cada una de estas.

Los rendimientos escolares, sobretodo en el área de las matemáticas lograron buenos resultados, al punto que las estudiantes manifestaron perder un poco de “miedo” ante la temática de esta área de conocimiento.

RECOMENDACIONES

Se debe enfatizar entre las situaciones, problemas, conceptos, variables, una cierta dependencia de uno o más registros semióticos para que ayuden a una mejor conceptualización, además permitirá que se alcance a involucrar nuevas variables con lo que con lleva a mejorar su pensamiento variacional.

Por su alcance de abstracción en los objetos matemático, se debe fortalecer aún más la investigación en torna a la teoría de Duval (2016) y sus representaciones semióticas

Desde la academia (universidad) se debe promover de manera intensiva este tipo de prácticas, ya que se establecen sinergias institucionales en educación, lo cual articula de manera adecuada la educación básica primaria y secundaria con la educación superior.

Se necesario realizar estudios que tengan un proceso desde lo general a lo particular, es decir, que a partir de un concepto establecido por relacionar el cambio de registro hasta llegar a su registro más básico o que no sea el usual que es el verbal o grafico en particular

Para lograr un mayor aprendizaje, sería interesante realizar este tipo de estudios en el tratamiento de funciones con más nivel de dificultad y desde grados un poco más tempranos, octavo o noveno, por ejemplo.

BIBLIOGRAFÍA

Almeida, M. (2002). Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de Formación a Distancia. Memoria de la tesis doctoral. Barcelona: Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas.Universidad de Barcelona.

Alvarez, J. (2015). Geometría Analítica. La Circunferencia. Pachuca: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Arribas, M. Á., & Arteaga, M. J. (s.f.). IX olimpiada matemática de Cuenca para secundaria. Recuperado el septiembre de 2011, de http://www.cepcuenca.com/olimpiada/secundaria.htm

Becerra, J. (2012). Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado el 12 de junio de 2018, de http://132.248.164.227/publicaciones/docs/apuntes_matematicas/18.%20Lugares%20Geometricos.pdf

Benítez, D., Sánchez, F., & Morales, C. (2007). Desarrollo de competencias Matemáticas III: Geometría Analítica y Estadistica. Saltillo: Instituto Politécnico Nacional -IPN-.

Camacho, M., & Morales, A. (1994). Algunas características del curriculum de geometría en la enseñanza secundaria obligatoria. Sugerencias didácticas. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado(21), 83-94.

Camargo, L y Acosta, M. (jul-dic, 2012), La geometría, su enseñanza y su aprendizaje Rev. Facultad Ciencia Tecnológica. No. 32. Bogotá. Recuperado de: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001

Chevallard, Y. La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires. Aique Grupo Editor

D'Amore, B.; Fandiño P.; Iori, M.; y Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". evista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Vol. 18 (2)

Departamento de Matemáticas. (11 de 06 de 2010). Universidad del Cauca. Recuperado el 22 de agosto de 2017, de Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca: http://www.unicauca.edu.co/matematicas/ContenidosProgramaticos/PracticaPedagogica1234.pdf

Duval, R y Sáenz, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Duval, R. (1993). Registres de Représentation Sémiótique et Fonctionnement cognitif de la Pensée. Annales de Didactiques et Sciences Cognitives. (pp. 37 –65). Strasbourg, France: IREM.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Vega, M (Trad.). Universidad del Valle. original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.

Duval, R. (2004) Semiosis y el Pensamiento humano. Registros Semióticos y aprendizajes intelectuales. Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. Revista La Gaceta de la RSME Vol. 9.1

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2005). Geometría Analítica. Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral. México.

Escobar, J. (2015). Universidad de Antioquia. Recuperado el 12 de junio de 2018, de http://matematicas.udea.edu.co/~jescobar/Geometria/pdf/Capitulo6GE.pdf

Gamboa, R., & Ballestero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática(5), 113-136.

Gómez-Chacón, I., Botana, F., Escribano, J., & Abánades, M. (2016). Concepto de Lugar Geométrico. Génesis de Utilización Personal y Profesional con Distintas Herramientas. Bolema, Rio Claro, 30(54), 67-94.

Laorga, R., & Urosa, M. E. (2014). Matemáticas: Ciclos Formativos. Pruebas Acceso Grado Superior:. (Editex, Ed.) España: Editex.

Lehmann, C. H. (1989). Geometría analítica. México, D.F: Editorial Limusa.

Martínez F. (2004) ¿Qué resultados obtuvieron las entidades federativas en las pruebas nacionales de comprensión lectora y matemáticas? [Documento de www] URL http://multimedia.ilce.edu.mx/inee/publicaciones1.2htm

Moise, E. (1986). Geometría Moderna. Adisson-Wesley, Iberoamericana, S.A.

Moyano, A., & Rubio, R. (2005). Sobre el concepto de mediatriz y sus generalizaciones. Lecturas Matemáticas, 26, 177 - 182.

Oteyza, E. e. (2005). Geometria Analitica. México: Pearson Educación.

Pérez, J., Caro, V., & Obonaga, E. (1985). Matemática 5: Trigonometría y Geometría Analítica. PIME Editores Ltda.

Polya, G. (1965). Cómo Plantear y Resolver Problemas. (pp. 41-42). Ciudad de México, México: Trillas

Pólya, G. (1990). How to solve It. México: Trillas S.A.

Rojas, C. (2015). Introducción a la geometría. (U. d. Norte, Ed.) Barranquilla: Universidad del Norte.

Santacruz, M. (2016). Enseñanza de la Geometría Analítica en Grado 10º: Una experiencia de práctica pedagógica investigativa. Popayán, Cauca: Universidad del Cauca.

UNAM. (2012). Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado el 16 de junio de 2018, de https://gauss.acatlan.unam.mx/pluginfile.php/566/mod_resource/content/0/RECTA/PDFs_Recta/UNIDAD_12_Guia.pdf

Urbina, J. (2013). La metodología activa y su influencia en la enseñanza de las matemáticas de los niños (as) del quinto, sexto y séptimo grados de la escuela particular “Carlos María de la Condamine”. Ambato, Ecuador: Universidad Técnica de Ambato.

Villena, M. (2014). Escuela Superior Politécnica del Litoral. Recuperado el 15 de Junio de 2018, de https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/781/3/1487.pdf

Zegarra, L. (2016). Luiz Zegarra. Recuperado el 13 de junio de 2018, de http://www.luiszegarra.cl/moodle/pluginfile.php/152/mod_resource/content/1/cap12.pdf