ACTIVIDADES COGNITIVAS SEMIÓTICAS IDENTIFICADAS EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICO INDUSTRIAL, AL OPERAR NÚMEROS RACIONALES EN SU REPRESENTACIÓN FRACCIONARIA

Leidy Johana Ortiz Daza

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2019

ACTIVIDADES COGNITIVAS SEMIÓTICAS IDENTIFICADAS EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICO INDUSTRIAL, AL OPERAR NÚMEROS RACIONALES EN SU REPRESENTACIÓN FRACCIONARIA

Trabajo de grado para optar al título de Licenciada en Matemáticas

LEIDY JOHANA ORTIZ DAZA

DIRECTOR

MG. ÁNGEL HERNÁN ZÚÑIGA SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2019

Nota de aceptación

____

____

____

____

Director: ____________________________________

Mg. Ángel Hernán Zúñiga

Jurado: ____________________________________

Mg. Yenny Leonor rosero

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 11 de abril de 2019

Tabla de contenido

Tabla de figuras

Lista de Tablas

Resumen

El presente trabajo es el resultado de la sistematización de la práctica pedagógica titulada: "Actividades cognitivas semióticas identificadas en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Técnico Industrial, al operar números racionales en su representación fraccionaria" realizada en la Institución Educativa Técnico Industrial (IE-TI) de Popayán, con los estudiantes del grado 7E en el año 2016. La práctica se desarrolló en cuatro fases: fundamentación, Proyecto de Intervención Pedagógica en el Aula (PIPA), ejecución del proyecto y finalmente, la sistematización de la experiencia. El proyecto de intervención reflexiona acerca de las actividades cognitivas semióticas que se pueden identificar cuando los estudiantes operan con números racionales en su representación fraccionaria, además de analizar la congruencia (o no) de unidades significantes entre las representaciones realizadas.

Palabras clave: Práctica pedagógica, actividad cognitiva, semiótica, números racionales.

Abstract

The present work is the result of the systematization of the pedagogical practice entitled: "Semiotic cognitive activities carried identified in the seventh-grade students of the Industrial Technical Educational Institution, by operating rational numbers in their fractional representation" carried out in the Industrial Technical Educational Institution (IE-TI) of Popayan, with the 7E students. The practice was developed in four phases: foundation, Pedagogical Intervention Project in the Classroom (PIPA), project execution and finally, the systematization of the experience. The intervention project reflects on the semiotic cognitive activities can be identified when students operate with rational numbers in their fractional representation, besides analyzing the congruence (or not) of significant units among the representations made.

Keywords: Pedagogical practice, cognitive activity, semiotics, rational numbers.

Introducción

El desarrollo de la práctica pedagógica realizada[1], tiene como objetivo acercar al estudiante de Licenciatura en Matemáticas a la realidad educativa del país, a través de la realización de una docencia directa con una perspectiva crítica, reflexiva y propositiva, en instituciones de educación formal. Este objetivo se alcanza mediante un proceso, el cual se sistematiza en un documento dividido en 4 capítulos, en los cuales se evidencia el desarrollo de la práctica pedagógica desde la fase de planeación hasta la fase de ejecución y conclusiones.

En el primer capítulo se realiza una descripción de las características de la Institución Educativa Técnico Industrial, lugar donde se llevó a cabo la intervención en el aula. Además, a través del PIPA, se conoce el plan de estudios, se esclarecen las unidades didácticas que van a ser desarrolladas y se presentan las consideraciones matemáticas, didácticas y metodológicas que van a ser tenidas en cuenta para la intervención en el aula.

En el segundo capítulo se establecen las condiciones para el funcionamiento del sistema didáctico, además se hace una descripción de la secuencia de enseñanza llevada a cabo; y finalmente se evidencian los criterios de evaluación tenidos en cuenta de acuerdo al sistema de evaluación propuesto por la institución.

En el tercer capítulo denominado reflexión desde la perspectiva semiótica, se analizan las actividades cognitivas de los estudiantes en el aprendizaje de la unidad didáctica trabajada. Estas actividades pueden ser analizadas desde distintas perspectivas, en este caso, la perspectiva semiótica, que consiste en el manejo de los signos y símbolos en el trabajo matemático.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presenta una mirada retrospectiva del conjunto de aprendizajes en la práctica pedagógica; aprendizajes que hacen referencia a lo pedagógico y a lo investigativo.

[1] Teniendo en cuenta lo señalado por Díaz (2006), entendemos la práctica pedagógica como “la actividad diaria que desarrollamos los docentes en las aulas, laboratorios u otros espacios, orientada por un currículo y que tiene como propósito la formación de nuestros alumnos” (p. 90).

Capítulo 1

Contexto institucional y proyecto de intervención pedagógica en el aula

El presente capitulo tiene como objetivo contextualizar las generalidades que enmarcan la práctica pedagógica desarrollada, estructurando su contenido en tres aspectos: el lugar de trabajo donde se desarrolla la práctica, plan de estudios institucional y actividades de nuestra participación al interior del aula. La importancia de realizar este ejercicio es lograr exponer y reflexionar los principales resultados de la docencia, donde aspectos como identificar y contextualizar el lugar de trabajo, son fundamentales.

1.1.Generalidades de la institución educativa.

La Institución Educativa Técnico Industrial (IE-TI) está ubicada en la carrera 2 norte # 6-45 de la ciudad de Popayán, municipio del Cauca; es la principal de 6 sedes y se caracteriza por ofrecer varias modalidades académicas para que sus estudiantes tengan una formación vocacional. Estas modalidades son: metalistería, mecánica industrial, ebanistería, electricidad, mecánica automotriz, dibujo técnico, sistemas y desarrollo de sistemas.

Figura 1. Escudo de la IE-TI

Fuente: Archivo personal

La misión de la IE-TI es formar personas respetuosas, autónomas, responsables y competentes, capaces de liderar procesos de cambio fundamentados en el bien común.

La visión va encaminada a ser reconocidos nacionalmente por su propuesta educativa, centrada en la formación del ser y el desarrollo de competencias que responden a altos estándares de calidad, mediante procesos pedagógicos que reconocen la individualidad y promueven la autonomía del estudiante; apoyados por una comunidad educativa comprometida con el mejoramiento institucional y el de su entorno.

Figura 2. Estudiantes de la IE-TI en actividad institucional
Fuente: Archivo personal

Figura 3. Fachada de la IE-TI.
Fuente: Archivo personal

1.2. Currículo y plan de estudios de matemática.

El ambiente curricular correspondiente al área de matemáticas de la IE-TI tiene como misión formar personas íntegras capaces de desarrollar el pensamiento lógico, a través de la solución de problemas; lo cual facilita el ingreso a la educación superior y el desempeño en el sector productivo. Además, busca que los estudiantes se destaquen en el medio local, regional y nacional.

De acuerdo a un estudio realizado por los docentes del área de matemáticas, se evidenció que los estudiantes tienen un nivel académico bajo, debido a la heterogeneidad de los cursos; para ello los docentes piensan llevar a cabo acciones como: realización de olimpiadas internas, participación en olimpiadas externas, evaluación con preguntas tipo pruebas saber y aplicación de actividades donde el estudiante desarrolle el pensamiento lógico a través de sudokus, acertijos, mategramas, entre otros.

Así mismo, con base en el rendimiento académico de los últimos tres años, los docentes plantean una propuesta de mejoramiento e intervención en el aula la cual consta de las siguientes estrategias: lecturas biográficas de matemáticos famosos con el objetivo de enfatizar en la comprensión lectora, implementación de preguntas tipo pruebas Saber en los exámenes, participación de los estudiantes en pruebas externas, organización de olimpiadas matemáticas internas en todos los niveles y el uso de TIC para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los docentes también se comprometen a realizar jornadas de capacitación continuas que sirvan para mantener la actualización y el mejoramiento del área.

Sin embargo, en los últimos tres años los resultados en las pruebas SABER han mejorado a tal punto que la institución se encuentra clasificada en el país **en un nivel alto**, lo cual implica el reto que tienen los docentes de mantener o mejorar esta clasificación.

Por otra parte, el plan de estudios de la IE-TI en el área de matemáticas está estructurado de la siguiente forma:

- Los logros que los estudiantes deben alcanzar y adquirir al finalizar cada uno de los períodos del año escolar.
- Los indicadores de logro que, al ser confrontados con el logro propuesto, aportan información que permite valorar los resultados del proceso educativo.
- La organización e identificación de los contenidos, temas y problemas de acuerdo al grado escolar, señalando las correspondientes actividades pedagógicas.
- La metodología donde predominan actividades como: la clase magistral, los talleres, la sustentación, la evaluación y la recuperación.

La fase de planeación de la práctica pedagógica se llevó a cabo a través de un PIPA, en el cual se consideró el plan de estudios específico de los distintos niveles de la educación básica secundaria y media que atiende la IE-TI; con base a esto, se eligió el grado séptimo y se determinaron las temáticas a enseñar.

La secuenciación de temas se realizó a través de planes de estudio elaborados de acuerdo al modelo pedagógico elegido, teniendo en cuenta consideraciones didácticas y metodológicas.

1.3.Proyecto de intervención pedagógica en el aula (PIPA).

La planeación de la docencia directa se llevó a cabo a través del PIPA, en el documento elaborado se tuvo en cuenta el contexto institucional y el plan de estudios de diferentes Instituciones Educativas ubicadas en la ciudad de Popayán; de las cuales se eligió la IE-TI para desarrollar la docencia directa.

El PIPA se elaboró en la práctica pedagógica II, antes de la intervención en el aula, y en él se establecieron las consideraciones matemáticas que contemplan el número racional como: parte todo, fracción, decimal, cociente y operador; y, además, las consideraciones didácticas y metodológicas que permitieron plantear estrategias para llevar a cabo la docencia directa. También, se tuvo en cuenta el plan de estudios correspondiente al grado 7 planteado por la IE-TI, del cual se seleccionaron las temáticas que iban a ser desarrolladas y se realizó la planeación de la secuencia didáctica con ayuda de los planes de clase.

A continuación, se detalla el plan de estudios del grado séptimo correspondiente al primer periodo académico, realizado por el Profesor Titular (PT) Rodrigo Ordoñez en el cual se observa que las temáticas están planeadas para ser desarrolladas semanalmente.

PROGRAMACIÒN DE AULA – PRIMER PERIODO DEL AÑO LECTIVO 2016

Asignatura: Matemáticas.

Grado: Séptimo E

Docente: Rodrigo Ordoñez

SEM.	TEMA(S)	ACTIVIDADES (Clase magistral – Taller – Sustentación – Evaluación – Recuperación – Otros.)
1.	Concepto de números enteros, los enteros en la recta, algunos usos, valor absoluto, orden y coordenadas cartesianas.	Trabajo individual: Solución de taller.
2.	Operaciones con números enteros. Propiedades.	Trabajo en grupo: Solución de taller.
3.	Otras operaciones con enteros. Propiedades.	Trabajo individual: solución de taller.
4.	Ecuaciones con números enteros. Solución de problemas.	Trabajo en grupo: Solución de taller.
5.	Concepto de número racional. Los racionales en la recta, orden.	Clase magistral, solución de taller.
6.	Adición y sustracción en los números racionales. Propiedades.	Trabajo individual: solución de taller.
7.	Multiplicación, división y potenciación en los números racionales.	Solución de taller.
8.	Ecuaciones en los números racionales. Solución de problemas.	Evaluación.
9.	Planteo y solución de problemas cotidianos.	Recuperación.

Tabla 1. Programación semanal de aula año lectivo 2016

Fuente: Elaboración propia

Del plan de estudios expuesto en la tabla, se seleccionaron las temáticas relacionadas a los números racionales, las cuales se llevaron a cabo en un período comprendido de 7 semanas establecido desde abril 13 hasta mayo 29 de 2016, adicional a ello y antes de iniciar la docencia directa, se realizó durante 3 semanas un acompañamiento al profesor titular (PT) en el aula. Las temáticas fueron:

- Concepto de número racional.
- Los racionales en la recta, orden.
- Adición y sustracción en los números racionales. Propiedades.
- Multiplicación y división en los números racionales.
- Potenciación y radicación en los números racionales.

1.3.1 Consideraciones matemáticas

En este apartado, propongo evidenciar la necesidad de acercarnos a la historia de un concepto matemático fundamental como es el *número racional*, al ser un *concepto* que repercute en toda la investigación. Teniendo en cuenta lo anterior, iniciaré con una perspectiva histórico-epistemológica del número racional ya que este ejercicio permite, tal como menciona Obando (2003)

> Identificar elementos conceptuales claves en el proceso de consolidación de los números racionales como objetos matemáticos a través de la historia de la humanidad; tales elementos tienen que ver con el papel social de las prácticas de medición y con los cambios conceptuales en torno a la noción de unidad. (p. 159)

Así, inicio esta retrospectiva mencionando que los números racionales, al igual que casi todos los procesos organizacionales de la sociedad surgieron como una *necesidad* (Bauman, 2000; Escorza, 2005; Flores, 2008; Stewart, 2007). Para el caso de las matemáticas, la *insuficiencia* de expresar algunas magnitudes con mayor exactitud fue el gran catalizador. Los antiguos necesitaban medir áreas, tiempos, longitudes, pesos, al punto que los números naturales no *proveían* lo suficiente para realizar tantas operaciones (López, 2013; Collete, 1985, Valdéz, 2008).

Un claro ejemplo de ello se puede observar al realizar la división entre 5 y 7 que, dentro del conjunto de los enteros *no tiene sentido*. Al presentarse constantemente situaciones como esta, se reflexiona que ya no se puede contar solamente con los números naturales para efectuar operaciones de forma exacta, pues dichas operaciones eran susceptibles de divisiones más pequeñas que la unidad o incluso, divisiones mayores (Valdéz, 2008; Obando, 2003). Bajo esta *necesidad*, es que surgen los números racionales. "Al llegar a este punto, se pensó en crear un conjunto numérico en el cual ciertas operaciones se hicieran válidas, este conjunto hoy en día se conoce como el conjunto de los números racionales denotado con la letra $\mathbb{Q}$." (Valdez,2008, p. 16).

Consecuentemente, los primeros textos matemáticos de los que hay registro de los números racionales, nos llevan al famoso Papiro Rhind de Egipto, procedido hacia 1.650 a.C. y que pasa por ser "La mayor fuente de conocimiento de la matemática egipcia" (Flores, 2008, p. 5). No por nada, los egipcios perfeccionaron un sistema de numeración jeroglífica, denominando cada uno de los números clave con símbolos y el resto, serian modificaciones de ese símbolo. De acuerdo con Mankiewicz (2005) "Los Egipcios […] desarrollaron las fracciones, pero solo las que tienen a uno como numerador. El resto se expresaban como combinaciones de estas" (p. 105)

Otro gran registro data de la civilización mesopotámica, específicamente del pueblo babilonio, ya que aportaron a la creación del sistema sexagesimal, complementando de manera eficaz un sistema de notación fraccionaria. Valdéz (2008) nos expone mejor lo anterior al decir que

> Los datos encontrados fueron en tablillas provenientes de la dinastía Hammurabi que datan de una antigüedad del año 1800-1600 a.C. Allí se pueden apreciar el sistema posicional usado, que se extiende a las fracciones. Realizaban las operaciones de forma parecida a hoy, la división multiplicando por el inverso (para lo que utilizaban su tabla de inversos) en la tabla de inversos faltan los de 7 y 11 que tienen una expresión sexagesimal infinitamente larga. Si están 1/59=; 1, 1,1 (nuestro 1/9=0.111…) y 1/61=; 0, 59, 0,59 (nuestro 1/11=0,0909…) pero no percibieron el desarrollo periódico. (p, 20).

La antigua civilización china, también aportó con un sistema de numeración decimal jeroglífica, estableciendo que para la adición de fracciones, es indispensable la previa reducción a común denominador. Al respecto, Valdéz agrega que "Precisamente en

China e India también tenían conocimiento sobre las fracciones ordinarias. Realizaban el cálculo del mínimo común denominador de varias fracciones" (2008, p. 21)

La cultura helénica, creadora de un imperio invisible y que perdura hasta nuestros días llamado matemáticas descubrió, de manera taxativa, los números irracionales. Lograron demostrar, por ejemplo, la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 por reducción al absurdo. Se elaboró la teoría de la divisibilidad, preludio de los números racionales (Ifrah, 2001; Aponte, 2016).

Los griegos retomaron elementos de los babilonios y los egipcios, empero; los griegos no consideraban a las fracciones como entidades únicas, "sino como la razón o relación entre dos números enteros" (Stewart, 2007, p. 75) A su vez, es de destacar que la innovación más importante en la cultura Helénica, tal como concluyen Muñoz y Franco

(…) fue la invención de las matemáticas abstractas basadas en una estructura lógica de definiciones, axiomas y demostraciones. Según los cronistas griegos, este avance comenzó en el siglo VI a.C. con Tales de Mileto y Pitágoras de Samos. Este último enseñó la importancia del estudio de los números para poder entender el mundo. Algunos de sus discípulos hicieron importantes descubrimientos sobre la teoría de números y la geometría, que se atribuyen al propio Pitágoras. (2009, p. 44)

Otra gran contribución, sin lugar a dudas viene por parte de los árabes, que, a partir del siglo VIII, comenzaron el proceso de traducción de las obras griegas conocidas en un momento de silencio científico en el resto del mundo y profundizaron en lo que, posteriormente, se conoció como álgebra (Meneses, 2001; stewart, 2007), desarrollo que abarca, según Dávila (2003) aproximadamente desde el año 650 d.C hasta alrededor de 1750.

> En este lapso surgieron las condiciones que permitieron darle al álgebra un estatus independiente dentro de las matemáticas y se desarrolló una notación adecuada, lo cual preparó el camino para el advenimiento del álgebra simbólica y propició el desarrollo del álgebra moderna, tal y como se le concibe actualmente (Dávila, 2003a, p. 27)

De esta forma, el álgebra moderna o álgebra abstracta - como también se le conoce - tiene un papel tan importante dentro de las matemáticas contemporáneas que, algunos investigadores lo comparan con

(…) la función que la matemática, en general, desempeña en las ciencias, en las que ha probado ser de gran utilidad. Nos referimos a sus aplicaciones a la física, a la química, a la biología, a la economía, etcétera, para las cuales, la matemática es parte fundamental de sus desarrollos modernos, en algunos de los cuales, las nuevas teorías algebraicas han tenido un papel protagónico (*et al.* 2003, p. 28)

Hasta finales del siglo XIX, y principios del XX, no se formalizó la Teoría de Conjuntos de Georg Cantor y, por tanto, no se produjo tampoco la formalización del conjunto de los números racionales basada en ella.

1.3.2 Consideraciones didácticas y metodológicas

Para desarrollar las consideraciones metodológicas es necesario entender el funcionamiento del sistema didáctico, es decir establecer las condiciones bajo las cuales se crea un ambiente de trabajo adecuado. Conocer el plan de estudios de la institución, hizo posible tener una idea de los conocimientos previos de los estudiantes, lo cual facilitó planear la secuencia de enseñanza de los Números Racionales, y constituir la evaluación de los aprendizajes.

Las estrategias metodológicas usadas durante el desarrollo de la práctica pedagógica fueron:

1. Clase magistral en la cual se explica a los estudiantes los diferentes conceptos matemáticos que abarcan la unidad temática.
2. Interacción entre profesor y estudiante a través de ejemplos que permitan aclarar el concepto matemático determinado y resolver dudas.
3. Ejercicios posteriores al desarrollo de cada tema, propuestos con el objetivo de que los estudiantes participen, mejoren su capacidad de razonamiento y agilidad mental, esto se lleva a cabo a través de las “Bonificaciones”, estrategia que consiste en dar puntos adicionales a los primeros 10 estudiantes que entreguen los ejercicios propuestos durante el desarrollo de la clase.

4. Escoger 5 estudiantes aleatoriamente al finalizar la clase y solicitar su cuaderno para revisar los ejercicios trabajados durante el transcurso de la misma. Esta estrategia tiene como objetivos: primero, evidenciar el trabajo realizado por los estudiantes en clase lo cual representa para ellos una nota adicional; segundo, observar los temas en que los estudiantes presenten mayor dificultad, estas serán abordadas en clases posteriores modificando el plan de estudios inicial.

Capítulo 2

Docencia Directa

2.1. Modelo de enseñanza.

Para el desarrollo de la docencia directa, el modelo de enseñanza escogido fue el conocido con el nombre de paradigma del ejercicio, que consistió en las siguientes etapas:

1. Definir un concepto matemático con el fin de dar a conocer al estudiante el objeto que se propone para ser aprendido, esto, se realiza usando como estrategia metodológica la clase magistral.
2. Plantear una serie de ejemplos con el objetivo de que el estudiante interprete el concepto definido, esto a través de la interacción entre profesor y estudiante.
3. Proponer una serie de ejercicios como práctica que fortalece la asimilación del concepto, estos ejercicios fueron calificados a través de talleres, participación en el tablero, pruebas escritas, revisión de cuaderno y bonificaciones.

2.2. Desarrollo de la docencia.

La docencia directa se llevó a cabo teniendo en cuenta la planeación de la intervención en el aula desarrollada durante la práctica II. En esta práctica, se diseñaron una serie de planes de clase descritos de acuerdo al modelo pedagógico escogido, los cuales incluyen las temáticas a enseñar, los ejemplos y los ejercicios propuestos, además de talleres y evaluaciones. Cabe recalcar que los planes fueron elaborados considerando el texto guía “Proyecto Aprender Juntos Matemáticas 7” de la editorial Ediciones SM, que fue facilitado por el PT, de él se tomaron todas las definiciones y observaciones descritas a lo largo del capítulo.

Otro aspecto relevante en el desarrollo de la docencia directa, fue el acompañamiento del Profesor Titular (PT) durante cada clase, con el objetivo de verificar el desarrollo de la unidad temática, evidenciar la metodología y servir como guía para el practicante en el inicio de su experiencia docente. Cabe recalcar que al finalizar cada clase el practicante y el PT se reunían para analizar tanto aciertos como desaciertos presentados en el desarrollo de la clase.

En el desarrollo de la docencia directa se trabajó con 37 estudiantes los cuales serán descritos a lo largo del capítulo usando las etiquetas $E_{1,}$ $E_{2,}$ ..., además para las parejas de estudiantes se usará la etiqueta PE1, PE2…. Cabe mencionar que de los registros fotográficos se tomaron aquellos de mayor relevancia en el transcurso de las actividades realizadas.

Ahora bien, las clases se iniciaron con la introducción del conjunto de los números racionales, definido así:

$$Q = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}; \text{ con } b \neq 0 \};$$

Donde los números a y b son enteros y b debe ser diferente de cero. Se realizaron ejemplos de representación numérica de racionales tales como: $\frac{2}{9}, \frac{4}{3}, -\frac{3}{2}\ y - \frac{9}{12}$, en los cuales se explicó la fracción como parte de un todo.

Siguiendo el modelo de enseñanza elegido, se plantearon los siguientes números: $+\frac{4}{7}, -\frac{23}{42}, \frac{14}{-24}\ y \frac{5}{0}$, y se pidió a los estudiantes verificar si los números propuestos pertenecen o no, al conjunto de los racionales.

Los estudiantes presentaron confusión respecto al número $\frac{5}{0}$; pues 15 afirmaron que pertenecía al conjunto porque su forma era $\frac{a}{b}$, mientras que 10 argumentaron que b era igual a 0 y la división entre cero no existe. Después de escuchar las opiniones, se aclaró que el número por definición no pertenece al conjunto ya que el denominador es cero.

Posteriormente se pide a los estudiantes ejemplos de números racionales obteniendo como resultado solo números positivos, razón por la cual, se recuerda la definición de número racional y se hace énfasis en que **a, b**$\boldsymbol{\epsilon\mathbb{Z}}$ **y** pueden tomar valores positivos o negativos.

Luego, se explicó que los números racionales aparte de representarse numéricamente también se pueden representar gráficamente, teniendo en cuenta lo siguiente: en el número racional $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$, **b** se conoce como denominador e indica en cuantas partes se divide la unidad, y **a** se conoce como numerador e indica el número de partes que se toman en la unidad. Además, se definieron las fracciones propias como aquellas cuyo numerador es menor que su denominador, ejemplo: $-\frac{3}{8}$ y las fracciones impropias cuyo numerador es mayor que el denominador, ejemplo: $\frac{13}{5}$.

A continuación, se representaron en el tablero los siguientes números racionales: $\frac{4}{9}, \frac{2}{8}\ y\ \frac{1}{4}$ como fracciones propias, $\frac{4}{4}$ como fracción unitaria y $\frac{15}{7}$ como fracción impropia. (Ver figura 4).

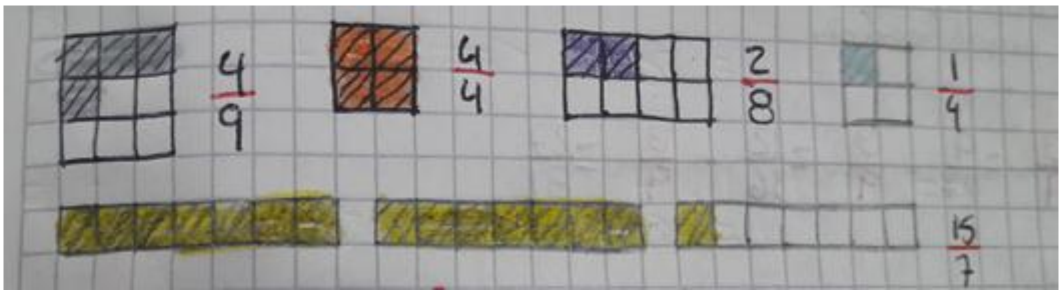

Figura 4. Representación gráfica de números fraccionarios tomada del cuaderno de un estudiante.

Fuente: Archivo personal

Siguiendo el modelo pedagógico, se planteó como ejercicio representar gráficamente los siguientes números: $\frac{39}{4}, \frac{12}{13}, \frac{25}{9}\ y\ \frac{15}{7}$.

La solución planteada por un E_1 indica la correcta representación de las fracciones tanto propias como impropias, debido a que identifica tanto numerador como denominador (ver figura 5).

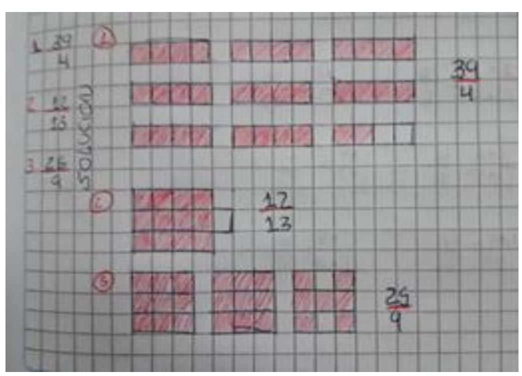

Figura 5. Solución de E_1 a la actividad # 1.

Fuente: Archivo personal

En la solución planteada por E_2 se pudo evidenciar que presentó una correcta representación de las fracciones $\frac{12}{13}, \frac{25}{9}\ y\ \frac{15}{7}$; sin embargo, respecto a la representación de la fracción $\frac{39}{4}$ el estudiante dibujó 4 unidades cada una de ellas dividida en 10 partes iguales y luego, del total tomó 39 partes (ver figura 6).

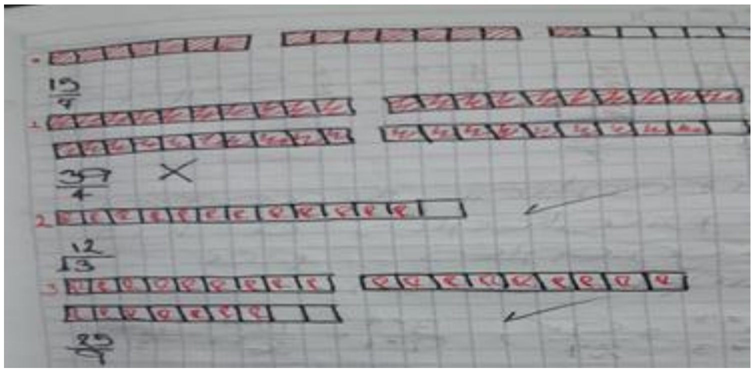

Figura 6. Solución de E_2 a la actividad #1.
Fuente: Archivo personal

En el desarrollo del ejercicio al revisar las soluciones planteada por los estudiantes, se evidenció que 27 presentaron dificultades para representar $\frac{39}{4}$, motivo por el cual se decidió realizar la representación gráfica en el tablero. Se explicó que se debían graficar 10 unidades cada una de ellas dividida en 4 partes iguales ya que es el número que indica el denominador, finalmente de las partes graficadas se pintaron 39 que es el número que indica el numerador, de esta forma se aclaran las confusiones respecto a la representación gráfica de fracciones.

Se preguntó a los estudiantes acerca de lo que son fracciones equivalentes asignándoles un tiempo oportuno para que respondieran, al no obtener resultados, se definieron las fracciones equivalentes así: "dos fracciones equivalentes son aquellas que representan la misma parte de una unidad o de una cantidad". Para que los estudiantes entendieran mejor la definición se realizó un ejemplo gráfico representando las fracciones $\frac{4}{8}\ y\ \frac{1}{2}$ (ver figura 7).

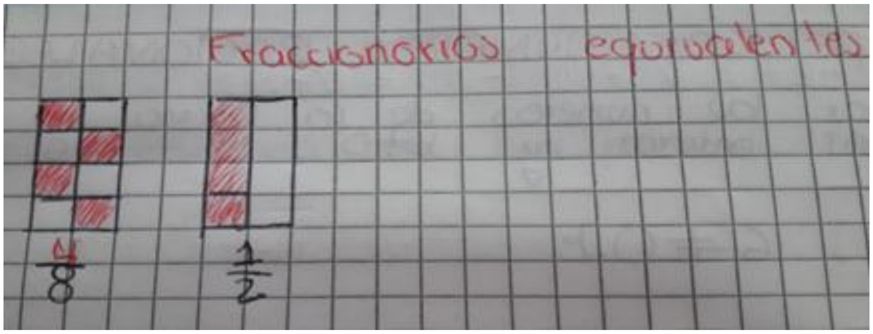

Figura 7. Ejemplo de representación gráfica de fracciones equivalentes, copiada del tablero.
Fuente: Archivo personal

Del ejemplo trabajado anteriormente se explicó a los estudiantes que las fracciones coincidían en sus partes sombreadas, es decir, tanto de la figura que representa $\frac{4}{8}$ como de la que representa $\frac{1}{2}$ se tomaron las mismas unidades.

Además, se explicó que para identificar fracciones equivalentes no siempre es necesario representarlas gráficamente, sino que se pueden realizar a través del producto cruzado de fracciones, esto es, si se tienen dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ y se cumple el siguiente producto: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, se puede decir que las fracciones son equivalentes. Al mismo tiempo, se realizó una ejemplificación a través de las siguientes fracciones $\frac{-18}{36}$ y $\frac{6}{-12}$:

Realizando el producto cruzado tenemos que: $(-18) \times (-12) = -216$ y $(36) \times (-6) = -216$, por lo tanto, las fracciones son equivalentes.

Siguiendo con el modelo de enseñanza, se plantearon parejas de fracciones y se pidió al estudiante verificar a través de producto cruzado si son o no equivalentes. Los ejercicios planteados fueron:

1. Verifique si $\frac{2}{9}$ es equivalente a $\frac{7}{2}$
2. Verifique si $\frac{3}{6}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$
3. Verifique si $\frac{6}{12}$ es equivalente a $\frac{3}{6}$
4. Verifique si $-\frac{18}{36}$ es equivalente a $-\frac{6}{12}$
5. Verifique si $-\frac{7}{9}$ es equivalente a $-\frac{56}{72}$

En la figura 8, se pudo observar la solución de un E_3 al ejercicio propuesto, en ella se evidenció que realizó el producto cruzado entre fracciones y luego comparó los resultados obtenidos, respondiendo “si” (equivalentes) o “no” (no equivalentes).

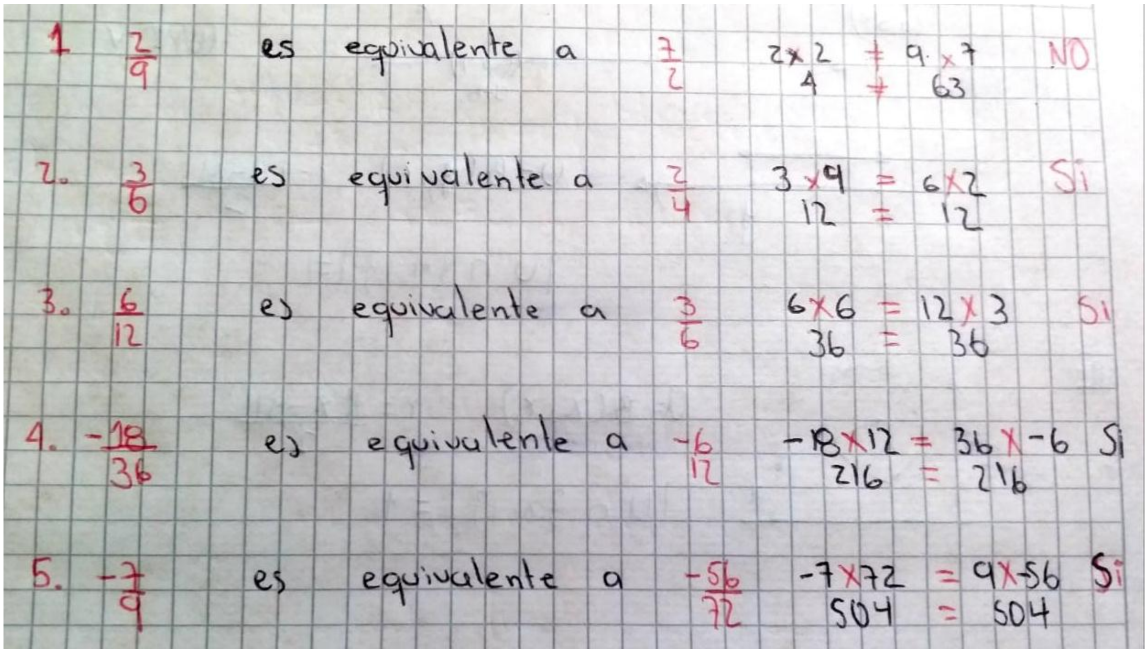

Figura 8. Fracciones equivalentes por producto cruzado realizado por E_3.

Fuente: Archivo personal

En el desarrollo de la actividad se evidenció que los estudiantes presentaron dos tipos de dificultades: una relacionada con el desconocimiento de las tablas de multiplicar, por lo cual se les pide que repasen en casa; y otra relacionada con la regla de los signos para la multiplicación, por lo cual se les recordó que para multiplicar dos números enteros se multiplican sus valores absolutos; si los dos factores tienen igual signo, el producto es positivo, y si los dos factores tienen distinto signo, el producto es negativo. Además, se realizó la siguiente tabla de la regla de la multiplicación de números enteros:

×	+	-
+	+	-
-	-	+

Después del recordatorio se pidió multiplicar los siguientes números enteros:

1. (-10)x(-3)
2. (-20)x(+9)

A continuación, se dio un tiempo oportuno para que resolvieran el ejercicio, luego se escogieron dos estudiantes al azar para que realizaran la solución en el tablero; los cuales no presentaron dificultad alguna. Finalmente se pidió repasar este tema y realizar más ejercicios en casa.

Enseguida se inició el tema de representación de los números racionales en la recta numérica mediante la siguiente definición:

> Para representar un número racional en la recta numérica, se divide cada unidad en las partes que indica el denominador, y, a partir de cero, se cuentan tantas partes como indique el numerador para ubicar el punto correspondiente. Los números racionales positivos se ubican a la derecha de cero, y los negativos, a la izquierda.

A continuación, se explicó la ubicación de los números racionales en la recta numérica a través de los siguientes ejemplos: $\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{2}$, $-\frac{7}{3}$, $\frac{3}{9}$. A medida que se realizó la explicación en el tablero se resolvieron dudas como:

- ¿A qué lado de la recta van los números negativos?

- ¿Es necesario poner el cero?

- ¿Se debe dividir la unidad en partes iguales?

Posteriormente, se pidió a los estudiantes representar los siguientes números racionales en la recta: $\frac{5}{6}, -\frac{9}{4}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{7}, -\frac{5}{4}, -\frac{2}{3}$ y $\frac{12}{5}$. Cabe aclarar que mientras resolvían los ejercicios, algunos se acercaron para que se les aclararan dudas o se les repitiera la explicación. Durante el desarrollo de la clase se pudo observar que de manera común se presentaron las siguientes dificultades:

-División de la unidad en partes no iguales (ver figura 9).

-Confusión del denominador con el numerador.

-Ubicación de números negativos a la derecha de cero (ver figura 10, primer punto).

-Ubicación del cero y después de eso no tomar unidades de referencia (ver figura 10, puntos 2 y 3).

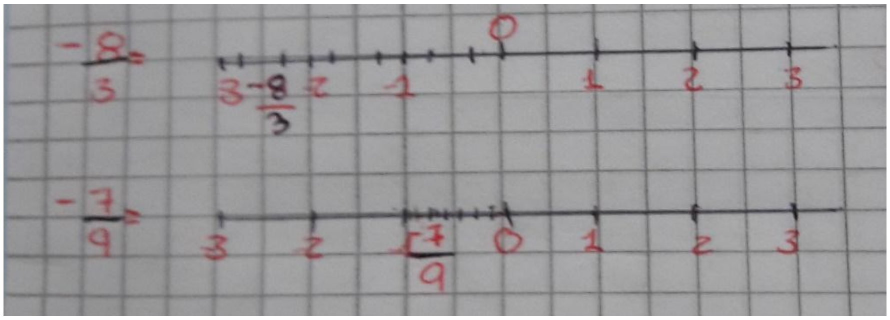

Figura 9. División de la unidad en partes no iguales.

Fuente: Archivo personal

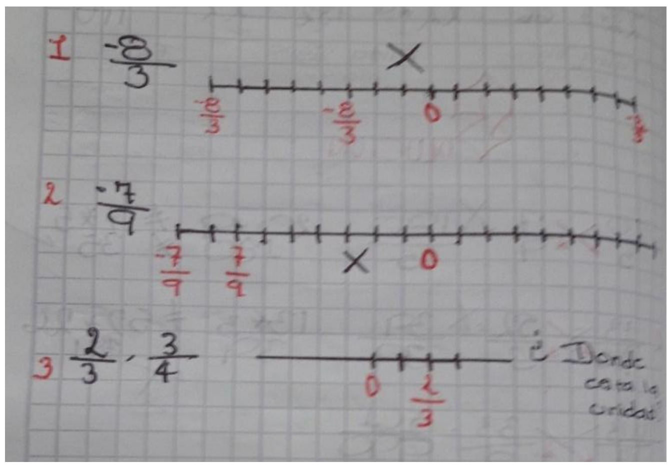

Figura 10. Ubicación del cero sin tomar unidades de referencia a partir de ahí.

Fuente: Archivo personal

De acuerdo a las dificultades evidenciadas anteriormente se aclaró: primero que se debe tomar un sistema de referencia, segundo la ubicación del cero y tercero la ubicación de los números positivos y negativos con respecto a este. En segunda instancia se ubicaron en la recta numérica los siguientes fraccionarios $-\frac{9}{4}\ y\ \frac{2}{7}$. Para el primer caso vemos que es un número negativo, por lo cual empezamos a dividir las unidades a la izquierda de cero en 4 partes iguales, al ser 9 partes es necesario dividir 3 unidades de las cuales se toman 9 siendo este el número que indica el numerador. Análogamente se explicó para la otra fracción y se escogieron estudiantes al azar para que resolvieran los demás ejercicios planteados.

Al llegar a este punto se propuso un taller para ser desarrollado en parejas, este abarcaba temas como: concepto de número racional, representación gráfica y numérica, fracciones equivalentes y amplificación y simplificación de fracciones. El tiempo estimado para el desarrollo fue de 2 horas. Al organizarse se formaron 17 parejas de estudiantes que en este caso serán nombradas como PE1, PE2,...,PE17.

El taller propuesto fue el siguiente:

1. Indicar si los siguientes números pertenecen al conjunto de los números racionales. Explicar.

   a. $\frac{-3}{-9}$ b. $\frac{-7}{4}$ c. $\frac{5}{5}$ d. $\frac{9}{0}$

   e. $\frac{0}{1}$ f. $-\frac{120}{504}$ g. $\frac{7}{-9}$

2. ¿Qué número racional se representa en las siguientes figuras? (Ver figura 11)

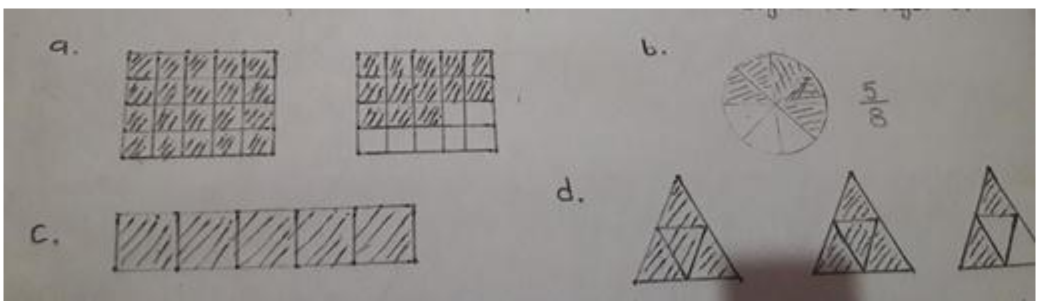

Figura 11. Ejercicio 2 propuesto en el taller.

Fuente: Archivo personal

3. Determinar si las fracciones dadas en cada caso son equivalentes o no.

   a. $\frac{6}{2}\ y\ \frac{30}{8}$
   b. $\frac{-56}{72}\ y - \frac{7}{9}$
   c. $\frac{18}{-36}\ y\ \frac{6}{-12}$

4. Amplificar o simplificar las siguientes fracciones según corresponda.

   a. $\frac{5}{16} \times -$
   b. $\frac{-9}{2} \times -$
   c. $\frac{24}{18} \div -$

d. $-\frac{30}{120} \div -$

En la solución del primer taller se evidenciaron los siguientes aspectos:

En el primer punto 7 parejas de estudiantes justificaron la clasificación de los números de acuerdo a si se podían o no ubicar en la recta numérica, pero sin realizar la respectiva ubicación. Por ejemplo: en los puntos D y E se pudo observar que PE1 no tomó la fracción como parte de un todo si no que ubicó numerador y denominador como números independientes (ver figura 12).

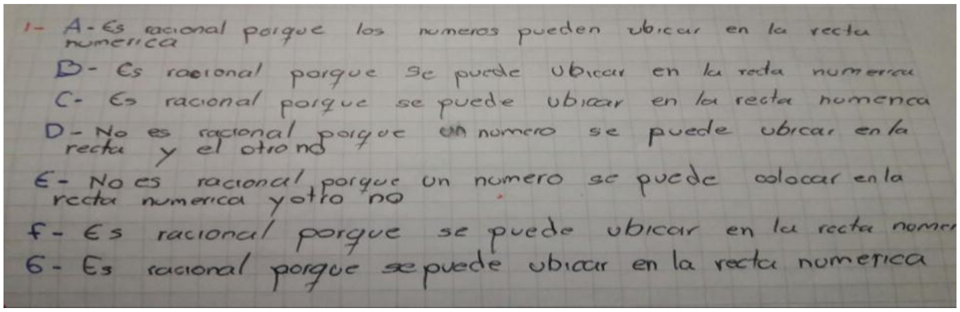
1- A- Es racional porque los numeros pueden ubicar en la recta numerica
D- Es racional porque se puede ubicar en la recta numerica
C- Es racional porque se puede ubicar en la recta numerica
D- No es racional porque un numero se puede ubicar en la recta y el otro no
E- No es racional porque un numero se puede colocar en la recta numerica y otro no
F- Es racional porque se puede ubicar en la recta numer
G- Es racional porque se puede ubicar en la recta numerica

Figura 12. Solución de PE1 al primer punto del taller.

Fuente: Archivo personal

Por otro lado, la PE2 argumentó que los números racionales son aquellos que se pueden ubicar en la recta y que además no llevan cero (ver figura 13).

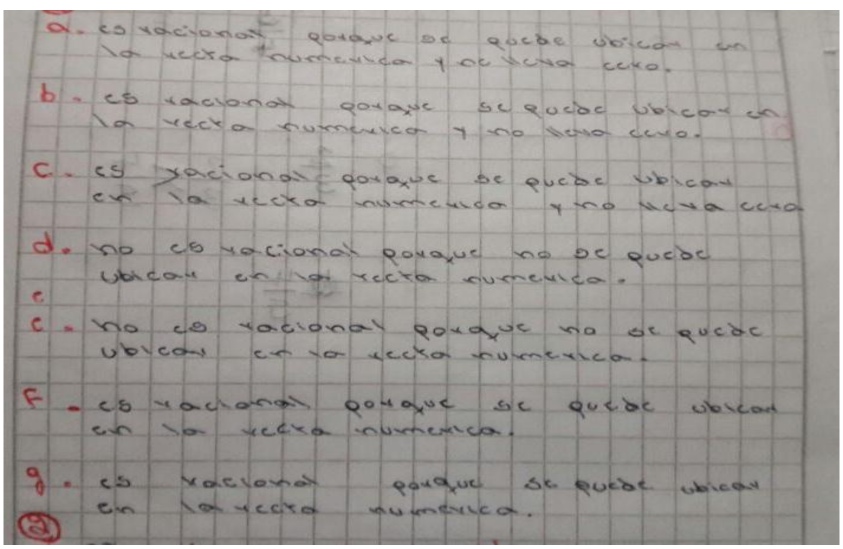
a. es racional porque se puede ubicar en la recta numerica y no lleva cero.
b. es racional porque se puede ubicar en la recta numerica y no lleva cero.
c. es racional porque se puede ubicar en la recta numerica y no lleva cero
d. no es racional porque no se puede ubicar en la recta numerica.
e. no es racional porque no se puede ubicar en la recta numerica.
f. es racional porque se puede ubicar en la recta numerica.
g. es racional porque se puede ubicar en la recta numerica.

Figura 13. Solución de PE2 al primer punto del taller.

Fuente: Archivo personal

Del mismo modo, 10 parejas intentaron clasificar los números de acuerdo a la definición de numero racional dada en el conjunto Q. Por ejemplo, la PE3 hizo referencia a que los números planteados en a, b, c, f y g son racionales debido a que los números son positivos y negativos; mientras que con los numerales d y e, plantearon que no son racionales ya que no pertenecen a cero (ver figura 14).

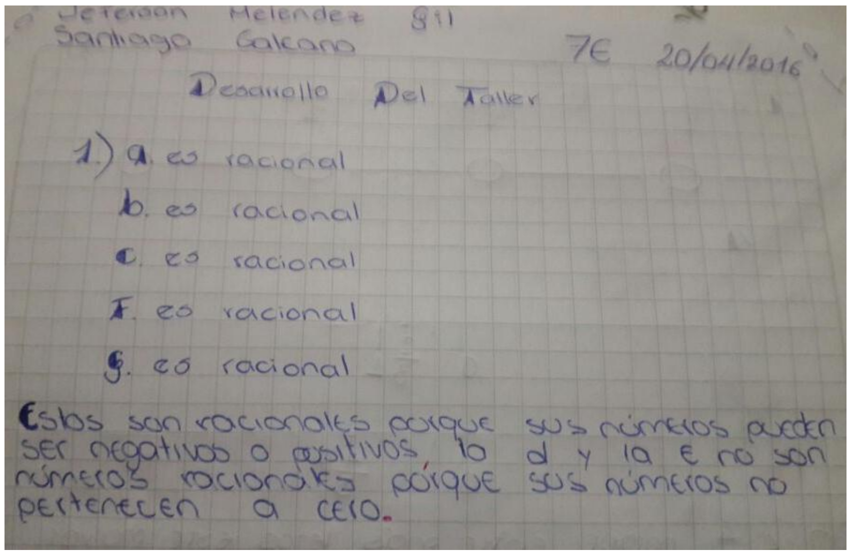

Figura 14. Solución de PE3 al primer punto del taller.

Fuente: Archivo personal

Así mismo la PE4 clasificó los números de acuerdo a la definición de número racional en relación al denominador, es decir, si este es diferente de cero o es igual a cero (ver figura 15).

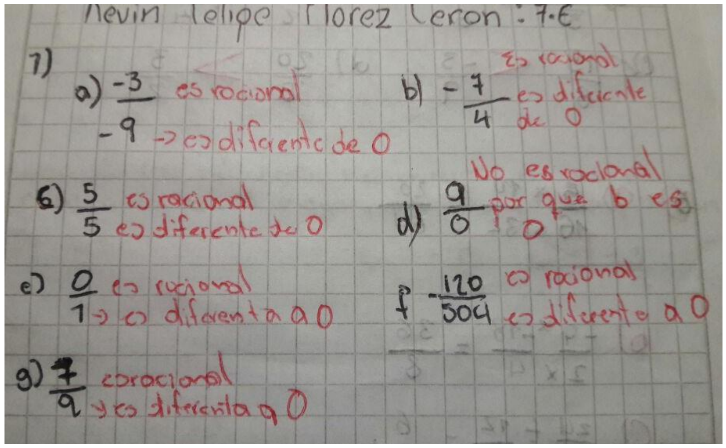

Figura 15. Solución de PE4 al primer punto del taller.

Fuente: Archivo personal

Y la PE5 identificó tanto numerador como denominador y verificó si el denominador era distinto de cero. Particularmente en el numeral **d** escribieron que $b \neq 0$, lo cual no es cierto ya que la fracción es $\frac{9}{0}$, concluyendo que el número no pertenece al conjunto de los números racionales (ver figura 16).

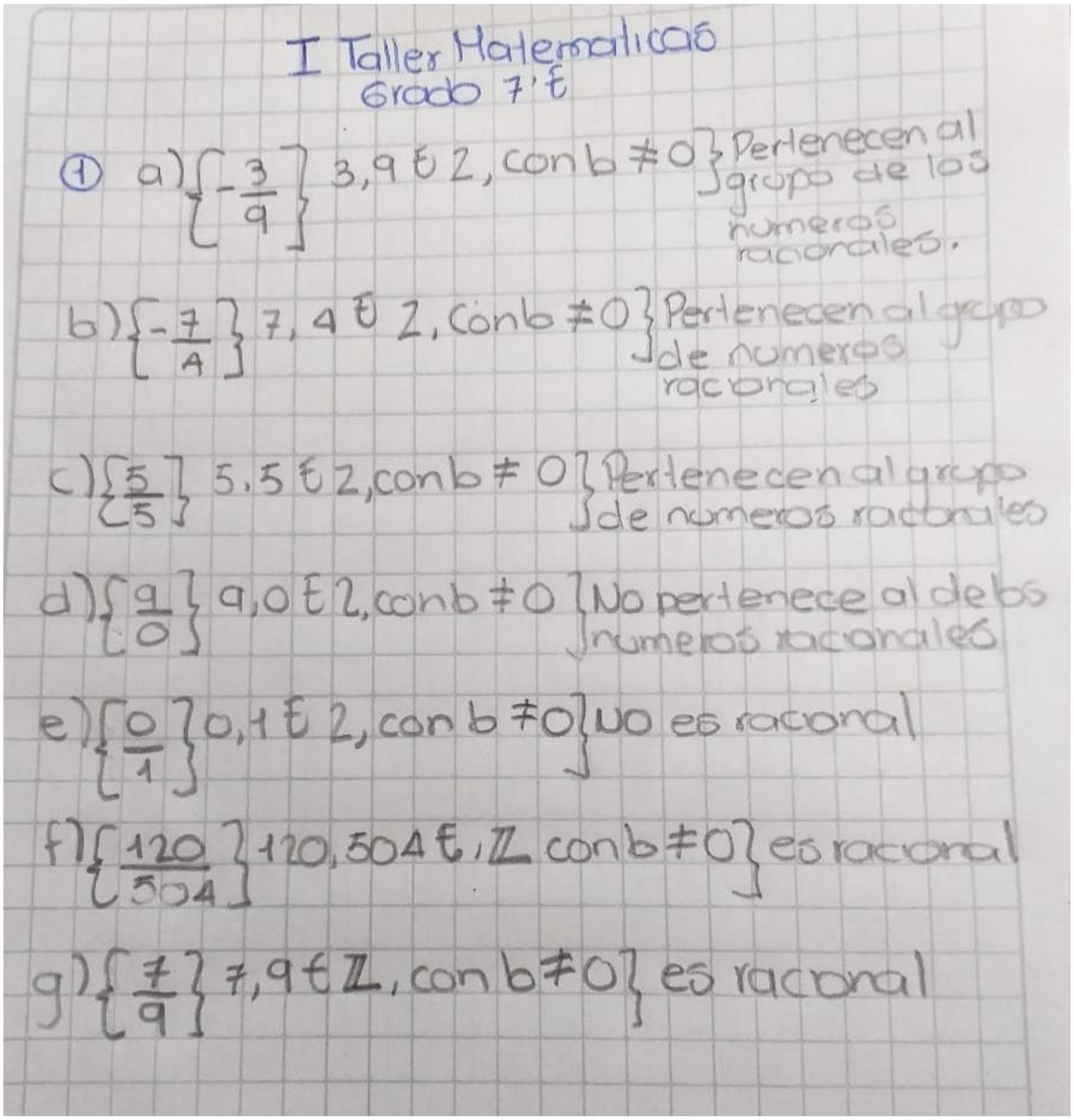

Figura 16. Solución de PE5 al primer punto del taller.

Fuente: Archivo personal

En el segundo punto del taller 13 parejas presentaron dificultades en identificar los números racionales que representaban las figuras de los numerales **a** y **d,** debido a que son fracciones impropias. A continuación, se detallan algunos casos:

Se tomó como referencia la PE6 que no presentó dificultades con la identificación de las fracciones representadas en cada figura, ya que reconocieron correctamente tanto numerador como denominador (ver figura 17).

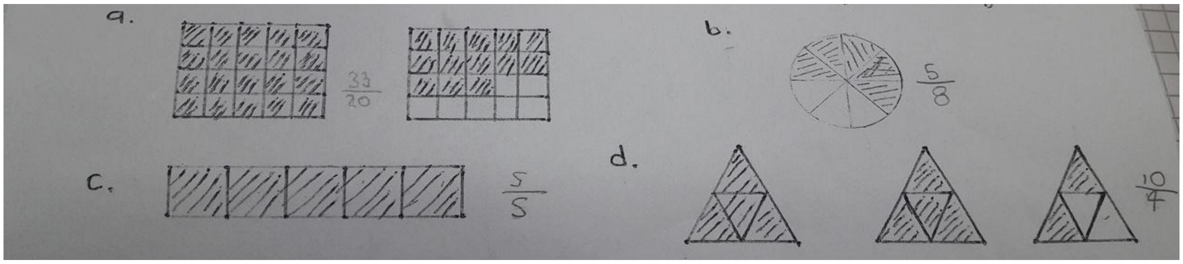

Figura 17. Solución de PE6 al segundo punto del taller.
Fuente: Archivo personal

En un primer aspecto la PE5 tomó cada figura de forma independiente y no como parte de un todo, es decir, para el numeral **a** marcaron $\frac{20}{20}$ y $\frac{13}{20}$ respectivamente. Algo similar ocurrió en el numeral **d** en el cual les da un resultado de $\frac{4}{4}, \frac{4}{4}$ y $\frac{2}{4}$ respectivamente (ver figura 18).

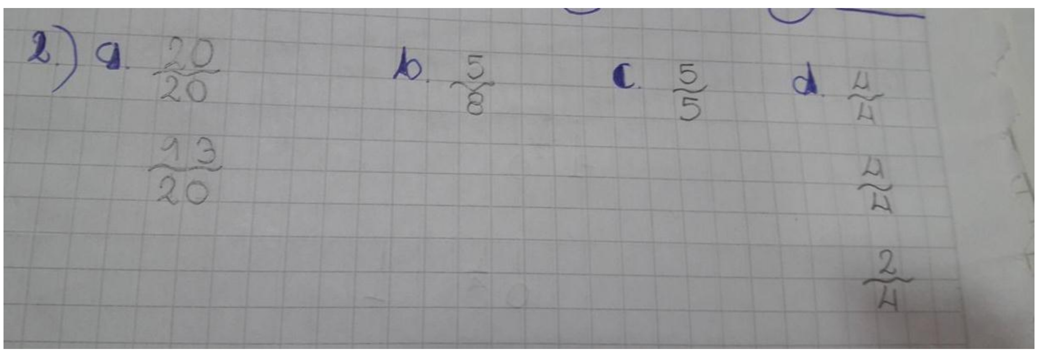

Figura 18. Solución de PE5 al segundo punto del taller.
Fuente: Archivo personal

Por el contrario, la PE7 en el numeral **a** observó la figura como parte de un todo, es decir, que identificaron el numerador representado en las partes sombreadas, sin embargo, con relación al denominador no llegaron al resultado esperado (ver figura 19).

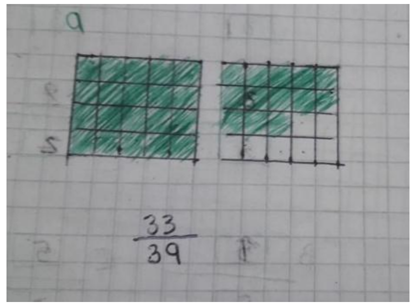

Figura 19. Solución de PE7 al segundo punto del taller.

Fuente: Archivo personal

En el tercer punto del taller los estudiantes clasificaron las fracciones en equivalentes o no, haciendo uso del producto cruzado entre fracciones, así:

En la figura 20 la PE8 realizó el producto cruzado de fracciones y comparó si los resultados eran iguales o diferentes, para este caso las fracciones expresadas en el numeral **a** no son equivalentes, mientras que las expresadas en **b** si lo son.

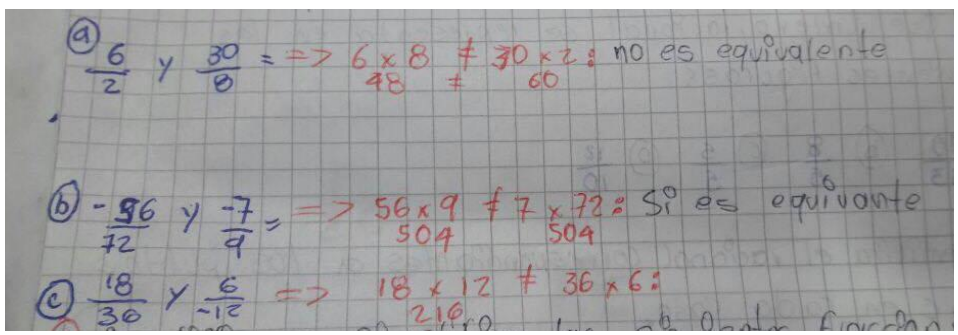

Figura 20. Solución de PE8 al tercer punto del taller.

Fuente: Archivo personal

En la figura 21 se evidenció que una PE9 clasificó las fracciones en equivalentes o no, sin mostrar el producto cruzado entre ellas o la representación gráfica de cada una.

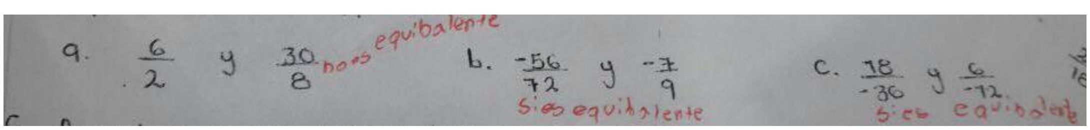

Figura 21. Solución de PE9 al tercer punto del taller.

Fuente: Archivo personal

Con respecto al punto cuatro del taller 9 parejas manifestaron dificultades en cuanto a la multiplicación o división, puesto que no dominaban las tablas de multiplicar, así como operaciones con fracciones unitarias; motivos que dificultaron el trabajo.

Esto se pudo notar en la PE8 que intentó amplificar las fracciones representadas en los numerales **a** y **b,** para el numeral **a** multiplicó $\frac{5}{16}$ por $\frac{4}{7}$, sin tener en cuenta que esta debía ser multiplicada por una fracción unitaria para que el resultado sea equivalente a la inicial, cabe recalcar que las multiplicaciones no se hicieron de forma correcta. Referente al numeral **b,** amplificaron la fracción multiplicando inicialmente por $\frac{5}{5}$, luego el resultado obtenido por $\frac{7}{7}$ y finalmente el resultado obtenido por $\frac{7}{7}$. En este caso las multiplicaciones se realizaron de forma correcta y la fracción fue equivalente a la inicial. (Ver figura 22).

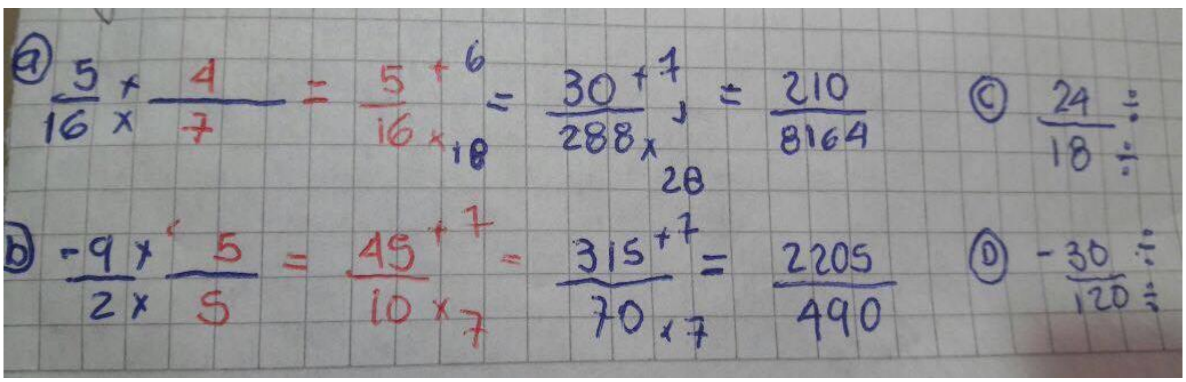

Figura 22. Solución de PE8 al cuarto punto del taller.

Fuente: Archivo personal

Por otro lado, la PE10 realizó amplificación y simplificación a cada una de las fracciones dadas, teniendo en cuenta que estas se deben multiplicar o dividir por fracciones unitarias para obtener como resultado una fracción equivalente a la inicial. En el numeral **a** presentaron dificultades con respecto a la multiplicación 16×3 lo que les dio como resultado 38 lo cual es incorrecto; en el numeral **b** no se presentaron dificultades; en cuanto al numeral **c** dividieron por la fracción $\frac{5}{5}$ sin tener en cuenta las reglas de divisibilidad, terminaron multiplicando las fracciones sin obtener buenos resultados; en el numeral **d** se dividió la fracción por $\frac{2}{2}$, en este caso se tuvieron en cuenta las reglas de divisibilidad, sin embargo las fracciones terminaron siendo multiplicadas. (Ver figura 23).

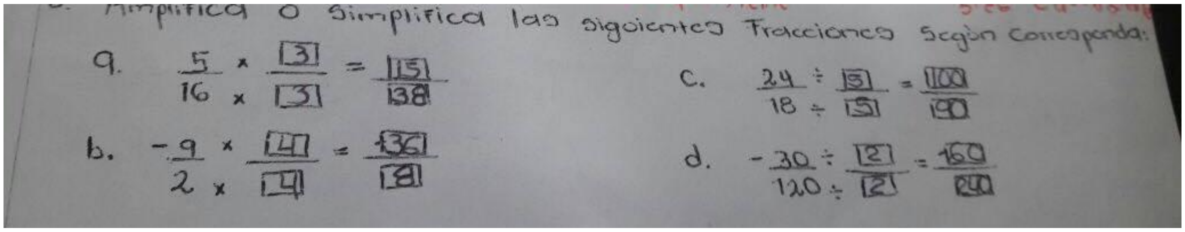

Figura 23. Solución de PE10 al cuarto punto del taller.

Fuente: Archivo personal

Para terminar, se revisó, calificó y entregó el taller a los estudiantes; teniendo en cuenta las dificultades que presentaron se resolvieron dudas y realizaron correcciones de forma colectiva. También se hizo énfasis en: repaso de tablas de multiplicar, ley de signos para la multiplicación y reglas de divisibilidad.

En cuanto a los números racionales se explicó que estos además de ubicarse en la recta numérica, se pueden comparar a través de ella y decidir si uno es mayor, menor o igual a otro. La explicación se realizó a través de la siguiente observación: "dados dos números racionales $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ y $\boldsymbol{\frac{c}{d}}$, se establece su orden de la siguiente forma:

1. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, si en la recta numérica $\frac{a}{b}$ está a la izquierda de $\frac{c}{d}$.
2. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, sí en la recta numérica $\frac{a}{b}$ está a la derecha de $\frac{c}{d}$.
3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si en la recta numérica están en el mismo punto".

Como ejemplo se ubicaron en la recta numérica las siguientes parejas de números racionales: $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{2}$, y $\frac{-3}{5}$ y $\frac{6}{7}$, realizando la comparación entre cada una de ellas. Seguidamente realizaron ejercicios desarrollados en clase, en los cuales debían ubicar parejas de números racionales en la recta numérica y determinar cuál número era mayor, menor o igual. Los ejercicios propuestos fueron: $\frac{-2}{3}$ y $\frac{-5}{3}$, $\frac{-7}{9}$ y $\frac{-3}{7}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$, $\frac{-2}{5}$ y $\frac{-3}{7}$. De lo anterior, E_4 ubicó cada pareja de números en una recta numérica e hizo la respectiva comparación (ver figura 24).

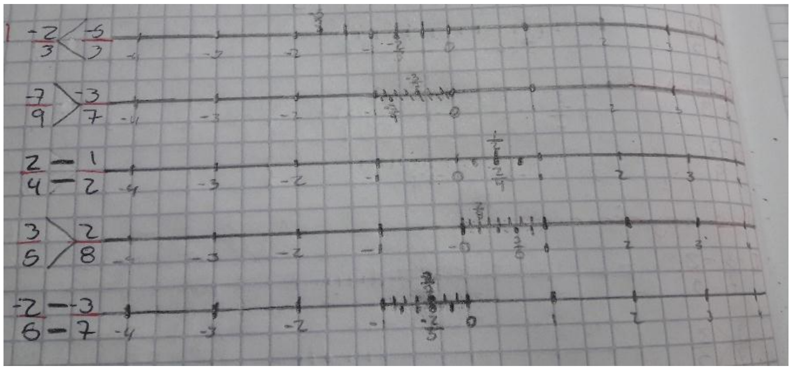

Figura 24. Desarrollo de E_4 al ejercicio propuesto en clase.
Fuente: Archivo personal

Por otro lado, E_5 dibujó una recta numérica para cada una de las fracciones, las ubicó respectivamente pero no realizó la comparación entre cada pareja (ver figura 25).

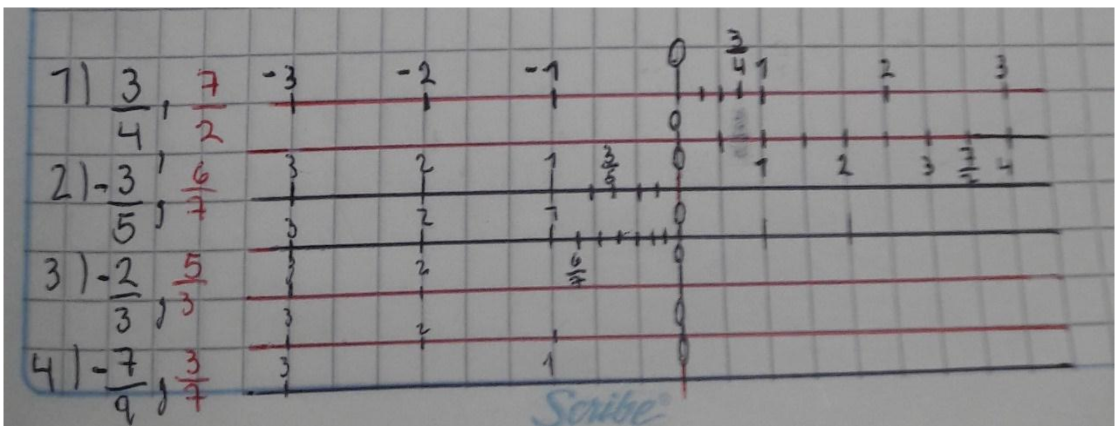

Figura 25. Desarrollo de E_5 al ejercicio propuesto en clase.
Fuente: Archivo personal

Por otra parte, E_6 ubicó cada número en una recta numérica distinta, pero sin conservar la misma unidad de medida entre ellas, aun así, realizó la comparación entre cada pareja de fracciones (ver figura 26).

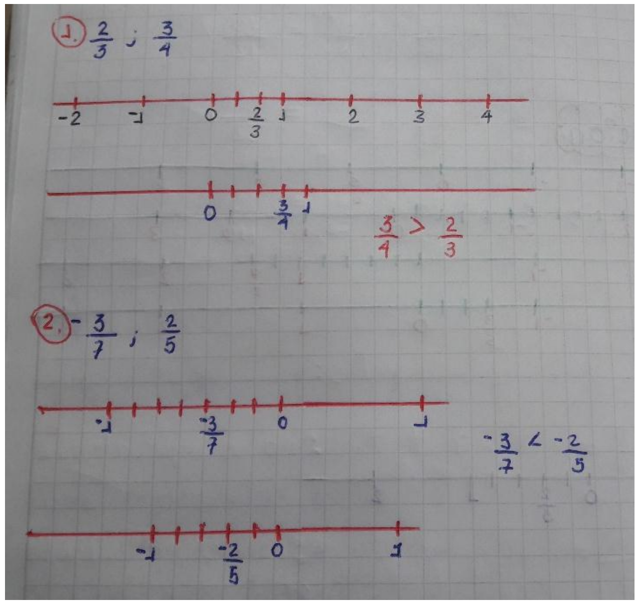

Figura 26. Desarrollo de E_6 al ejercicio propuesto en clase.

Fuente: Archivo personal

Por último, se solucionó en el tablero el ejercicio planteado $\frac{-2}{5}$ y $\frac{-3}{7}$ donde se aclaró que si los números se van a representar usando dos rectas numéricas, estas deben conservar la misma unidad de medida; pues de esta forma se pueden comparar las fracciones.

Otro punto a desarrollar fue la suma de números racionales con igual denominador, inicialmente se realizó una explicación a través de los siguientes ejemplos, cabe resaltar que se recordó que debían tener en cuenta: ley de los signos para sumar o restar números enteros y simplificación de fracciones.

1. $\frac{3}{9}+\frac{7}{9}=\frac{3+7}{9}=\frac{10}{9}$

2. $\frac{-4}{7}+\frac{10}{7}=\frac{-4+10}{7}=\frac{6}{7}$

3. $\frac{-7}{4}+\frac{13}{4}=\frac{-7+13}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Luego, se estableció la observación: "para sumar dos números racionales con igual denominador, conservamos el denominador y sumamos los numeradores". Seguidamente se plantearon tres ejercicios para ser desarrollados en el transcurso de la clase, además se eligieron estudiantes al azar para trabajarlos en el tablero (ver figura 27).

1. $\frac{-120}{9}+\frac{204}{9}$

2. $\frac{238}{4}+\frac{329}{4}$

3. $\frac{1020}{12}+\frac{240}{12}$

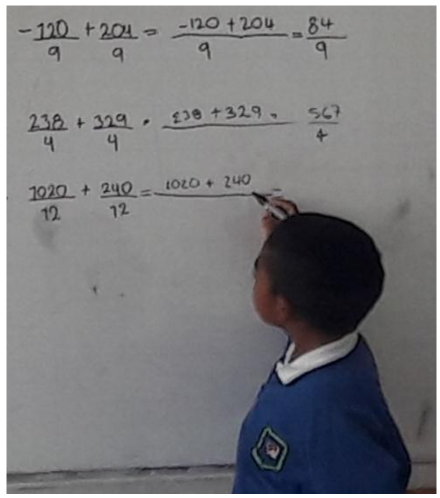

Figura 27. Estudiante sumando fracciones de igual denominador.

Fuente: Archivo personal

En la solución del ejercicio 3 se observó que E_7 realizó la respectiva operación obteniendo como resultado $\frac{1260}{12}$, con este ejercicio se aprovechó para recordar la simplificación de fracciones y se redujo el número hasta su fracción irreducible $\frac{105}{1}$ (ver figura 28). Los estudiantes no presentaron dificultades al resolver los ejercicios.

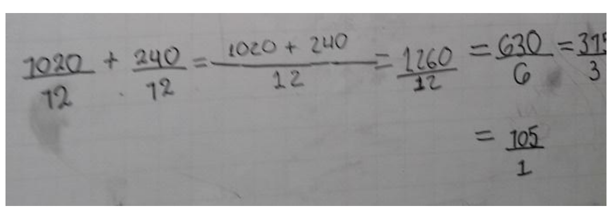

Figura 28. Simplificación de fracciones.

Fuente: Archivo personal

En segunda instancia se explicó a través de dos ejemplos que la resta de números racionales con igual denominador es un proceso análogo a la suma, es decir, que se conserva el denominador y se restan los numeradores. Se dejó un taller en clase que constaba de 6 ejercicios, a los 10 primeros estudiantes que lo resolvieron se les dio una bonificación, es decir, puntos adicionales a sus notas. Luego de esto se resolvieron colectivamente en el tablero eligiendo voluntarios (ver figura 29).

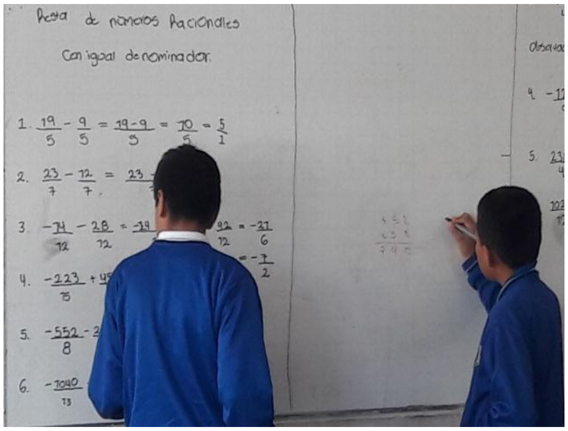

Figura 29. Estudiantes en el tablero resolviendo restas de fracciones con igual denominador. Fuente: Archivo personal

En el desarrollo de la clase se observó que 18 estudiantes realizaron de forma correcta los ejercicios propuestos, entendiendo las reglas matemáticas que se deben aplicar para restar fracciones con igual denominador; a diferencia de otros que presentaron dificultades en cuanto a los signos (ver figuras 30 y 31).

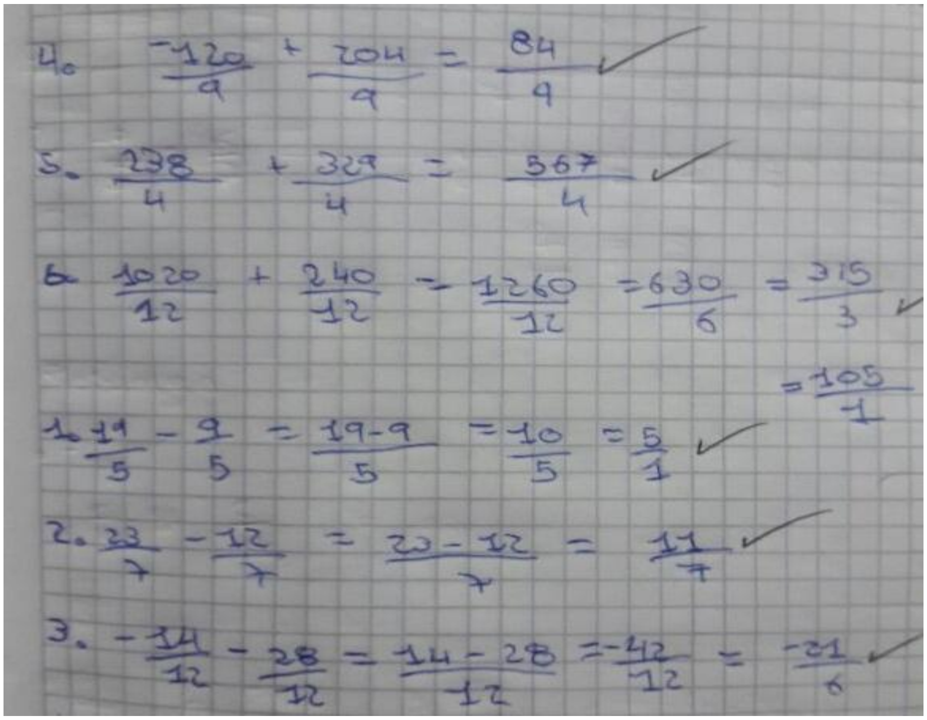

Figura 30. Sumas y restas con igual denominador realizadas por un estudiante.

Fuente: Archivo personal

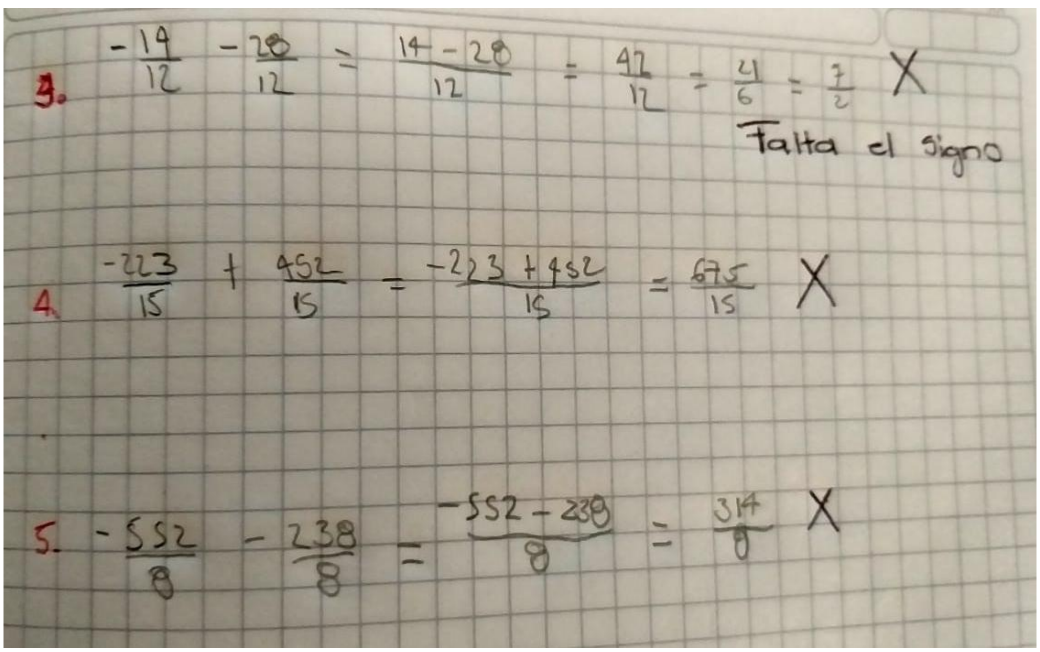

Figura 31. Desarrollo de un ejercicio planteado por un estudiante.

Fuente: Archivo personal

Cabe mencionar que también se explicó la suma y resta de fracciones a través de la recta numérica, esto se hizo con los siguientes ejemplos:

1. Sumar y restar $\frac{7}{3}$ y $\frac{9}{3}$, usando la recta numérica.
2. Sumar y restar $\frac{4}{5}$ y $\frac{9}{5}$, usando la recta numérica.

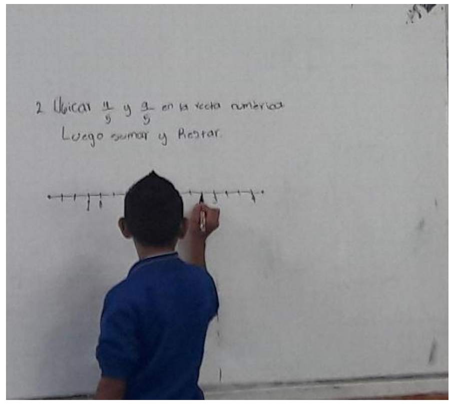

Figura 32. Estudiante sumando y restando números racionales en la recta numérica.

Fuente: Archivo personal

En un segundo taller planteado de forma individual, se enunciaron 3 problemas expresados en lenguaje natural con el objetivo de que los estudiantes interpretaran el problema, identificaran los números racionales, resolvieran el problema usando la recta numérica y corroboraran el resultado realizando las operaciones de suma y resta. Los problemas fueron:

1. Ana María compra veintiún tercios de cartulinas, les regala once tercios a Paula y siete tercios a Andrés. ¿Qué parte de cartulina le queda a Ana María?
2. Soledad tejió un poncho para el invierno, uso un total de veinticuatro octavos de lana café, roja y amarilla. Primero uso once octavos de lana café, y luego cinco octavos de lana amarilla; si el resto de lana era roja, ¿Cuánto de lana roja uso Soledad?
3. Para construir un escenario de títeres, los estudiantes usaron un total de treinta y dos sextos de metros de tela para hacer la cortina, el techo y la falda del escenario. Usaron siete sextos de metros para la cortina y diecisiete sextos de metros para la falda. ¿Cuántos metros de tela usaron para el techo?

Al respecto conviene decir que 32 estudiantes identificaron los números racionales expresados en lenguaje natural, sin embargo, algunos presentaron dificultades a la hora de realizar las operaciones, así como las sumas y restas en la recta numérica.

Por ejemplo, E_8 resolvió el primer problema usando la recta numérica, para ello, definió un sistema de referencia y a partir del cero ubicó números negativos y positivos a izquierda y derecha respectivamente. Luego, ubicó $\frac{21}{3}$ que es el total de cartulinas, después contó 11 unidades a la izquierda y representó con un punto donde termino la cuenta, siguiendo el orden del problema a partir del punto ubicado se corrió 7 unidades a la izquierda y donde le dio el resultado simbolizó con otro punto; el resultado obtenido coincidió con $\frac{3}{3}$. Al lado de ello, realizó las operaciones para verificar el resultado obtenido, es decir, $\frac{11}{3}+\frac{7}{3}=\frac{18}{3}$ y $\frac{21}{3}-\frac{18}{3}=\frac{3}{3}$ que representa la parte de cartulina que le quedó a Ana María (ver figura 33).

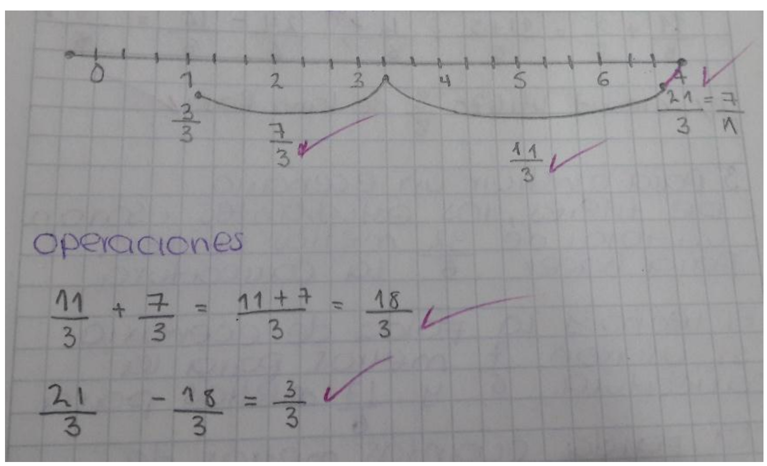

Figura 33. Desarrollo del primer problema realizado por E_8.

Fuente: Archivo personal

Para el tercer problema un E_9 ubicó los números en la recta numérica, la primera unidad la dividió en 7 partes iguales y el resto en 6 que son las partes que indicó el denominador, luego ubicó la fracción $\frac{32}{6}$ que por las divisiones tomadas quedó mal ubicada en la recta numérica. El resultado que obtiene el estudiante al operar en la recta es $\frac{17}{6}$. Luego, verifica el resultado a través de la suma $\frac{17}{6}+\frac{7}{6}$, y la resta $\frac{32}{6}-\frac{24}{6}$. Al realizar las operaciones coincide con el resultado obtenido en la recta, aunque este se encuentre mal ubicado (ver figura 34).

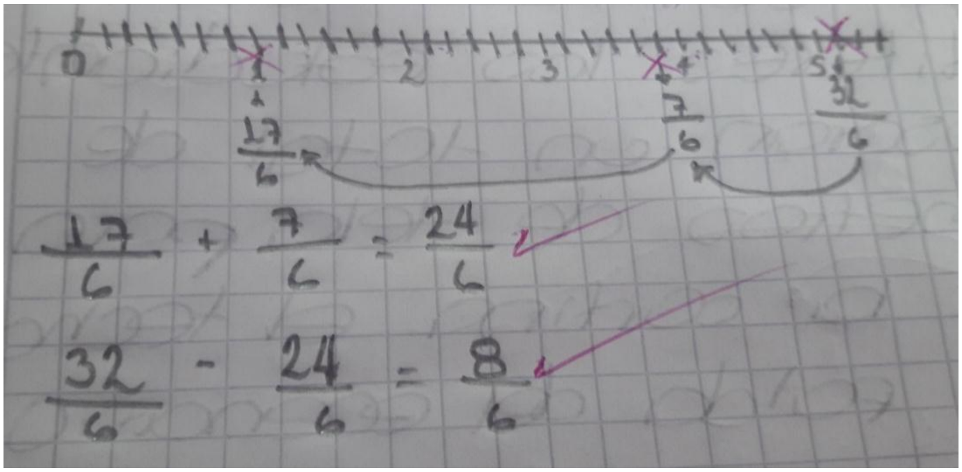

Figura 34. Desarrollo del tercer problema realizado por E_9.

Fuente: Archivo personal

Respecto a la suma de números racionales con diferente denominador, se explicó a través de la suma $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$ que se debe hallar el mínimo común múltiplo, es decir, hallar los múltiplos de cada uno de los denominadores dados, así:

Múltiplos de 5=$\{5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$

Múltiplos de 3=$\{3, 6, 9, 12, 15, \ 18, \ldots\}$

Se identificó el menor múltiplo común que en este caso es el 15, luego se realizó una división entre el m.c.m. y cada denominador, así: $15 \div 5 = 3$ y $15 \div 3 = 5$. El resultado obtenido se multiplicó con cada respectivo numerador, es decir, $3 \times 4 = 12$ y $5 \times 2 = 10$. Una vez obtenidos los resultados, el m.c.m se ubica en el denominador y los resultados obtenidos se suman en el numerador, así:

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{3}=\frac{12+10}{15}=\frac{22}{15}$$

En este caso la fracción obtenida es una fracción irreducible.

A continuación, se realizó un proceso análogo para sumar $\frac{7}{4}+\frac{3}{2}$.

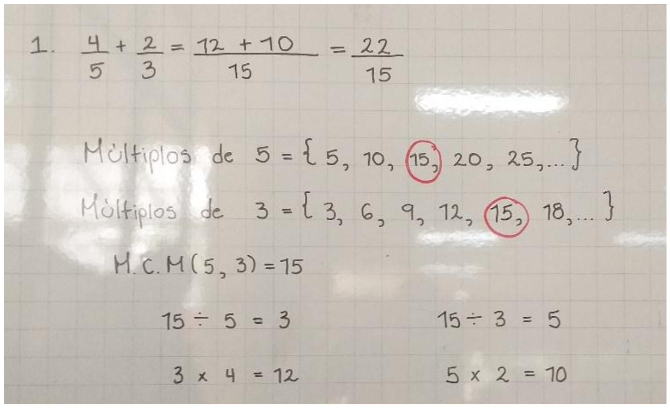

Figura 35. Suma con diferente denominador. Explicación docente.

Fuente: Archivo personal

Después de realizar la explicación, se aclararon dudas y se propusieron los siguientes ejercicios:

1. $\frac{3}{2}+\frac{7}{6}$
2. $\frac{7}{8}+\frac{3}{24}$
3. $\frac{7}{4}+\frac{12}{8}$

E_1 realizó las tres operaciones de forma correcta puesto que, aplicó adecuadamente las reglas de la matemática que se deben tener en cuenta para sumar fracciones (ver figura 36).

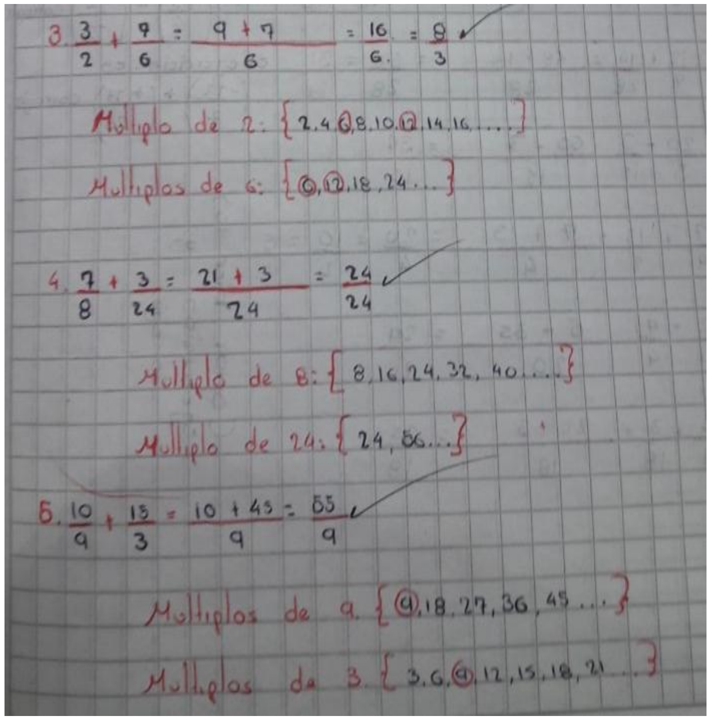

Figura 36. Desarrollo de E_1 a los ejercicios planteados.

Fuente: Archivo personal

25 estudiantes presentaron ciertas dificultades a la hora de sumar, multiplicar y dividir números enteros. En el numeral 5 de la figura 37 se observa que un E_{10} identificó el mínimo común múltiplo, realizó las respectivas operaciones de división y multiplicación obteniendo resultados acertados, pero a la hora de sumar los enteros 10 y 35 obtuvo un resultado no acorde.

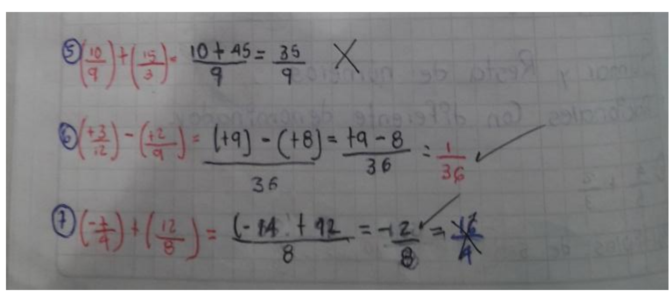

Figura 37. Desarrollo de E_{10} a los ejercicios planteados.

Fuente: Archivo personal

Se recordó a través de ejemplos como sumar y restar números enteros con diferente o igual signo, debido a que seguían presentando dificultades en dicho aspecto. Con todo y lo anterior, los estudiantes se organizaron en 16 parejas para desarrollar la primera prueba escrita en un tiempo estimado de 50 minutos, esta consistía en la suma de números racionales con diferente denominador, los ejercicios propuestos fueron los siguientes:

1. $\left(-\frac{3}{9}\right)+\left(-\frac{29}{27}\right)$
2. $\left(+\frac{5}{30}\right)+\left(-\frac{8}{6}\right)$
3. $\left(+\frac{7}{6}\right)+\left(+\frac{8}{12}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$
4. $\left(-\frac{13}{12}\right)+\left(+\frac{8}{24}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$
5. $\left(+\frac{12}{9}\right)+\left(-\frac{5}{9}\right)+\left(-\frac{20}{9}\right)$

Por ejemplo, una pareja de estudiantes resolvió los ejercicios de la prueba de acuerdo a lo visto en clases anteriores, es decir, halló el mínimo común múltiplo de las fracciones y procedió a realizar las respectivas operaciones entre denominadores y numeradores, además simplificó los resultados obtenidos (ver figura 38).

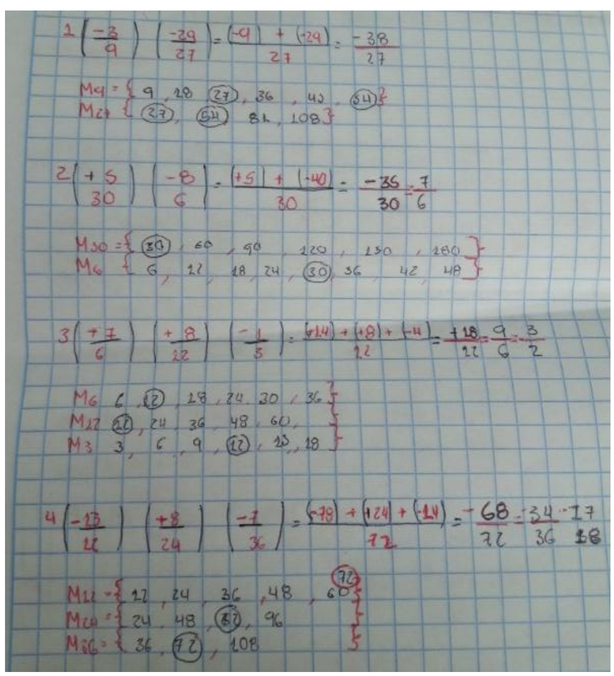

*Figura 38.*Resultado prueba escrita #1 desarrollada por una pareja de estudiantes.

Fuente: Archivo personal

Acerca de la resta de números fraccionarios con diferente denominador, se explicó que era un proceso semejante a la suma de fracciones con diferente denominador, pero en este caso, al primer número fraccionario se le suma el opuesto del segundo fraccionario. La aclaración se realizó a través del siguiente ejemplo: $\left(-\frac{7}{9}\right)-\left(+\frac{2}{18}\right)$, teniendo en cuenta lo anterior, quedó planteado así: $\left(-\frac{7}{9}\right)+\left(-\frac{2}{18}\right)$ (ver figura 39).

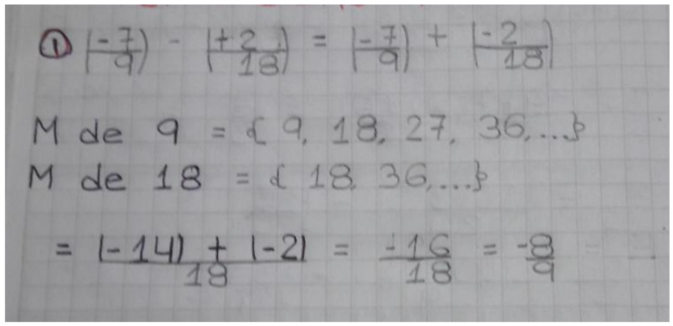

Figura 39. Registro del cuaderno de un estudiante con la explicación del profesor.

Fuente: Archivo personal

Enseguida, se enunciaron los siguientes ejercicios para ser trabajados en el transcurso de la clase; cabe aclarar que los estudiantes que resolvieron los cuatro primeros ejercicios de forma correcta, recibieron bonificaciones, un ejemplo de ello se puede observar en la figura 40.

1. $\left(-\frac{12}{7}\right)-\left(+\frac{9}{14}\right)$
2. $\left(+\frac{12}{15}\right)-\left(+\frac{13}{30}\right)$
3. $\left(-\frac{9}{12}\right)-\left(-\frac{7}{6}\right)$
4. $\left(-\frac{7}{36}\right)-\left(+\frac{15}{6}\right)$
5. $\left(+\frac{8}{49}\right)-\left(-\frac{12}{7}\right)$
6. $\left(-\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{9}{4}\right)-\left(+\frac{7}{20}\right)$
7. $\left(-\frac{2}{12}\right)-\left(+\frac{8}{24}\right)-\left(+\frac{7}{6}\right)$

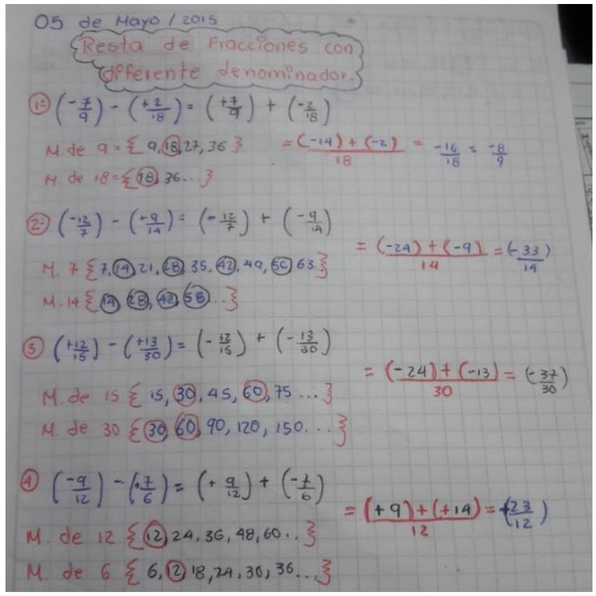

Figura 40. Desarrollo de un estudiante a los ejercicios planteados.

Fuente: Archivo personal

Al respecto conviene decir que entendieron las reglas matemáticas que se deben tener en cuenta para restar fracciones con diferente denominador, sin embargo, siguen presentando dificultades a la hora de operar números enteros; por lo cual se realizó un breve repaso.

En relación con la suma de números racionales con distinto denominador se enunciaron ciertas propiedades que facilitan la operabilidad dentro del conjunto, a petición del PT estas no fueron ejemplificadas. Dichas propiedades son enunciadas a continuación:

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\ y\ \frac{e}{f}$ números racionales, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Propiedad Clausurativa: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$
2. Propiedad conmutativa: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$
3. Propiedad distributiva: $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$
4. Inverso aditivo: $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$
5. Propiedad modulativa: $\left(\frac{a}{b}\right) + 0 = \frac{a}{b}$

En cuanto al producto de números racionales representados en forma fraccionaria, se definió lo siguiente: "*el producto de dos números racionales se halla multiplicando los numeradores entre sí y los denominadores entre sí",* adicional a ello se aclaró que, si se puede, simplificamos el resultado. Teniendo en cuenta lo anterior se trabajaron los ejemplos:

1. $\left(+\frac{2}{3}\right)x\left(-\frac{3}{9}\right)$
2. $\left(-\frac{6}{4}\right)x\left(-\frac{3}{6}\right)$
3. $\left(-\frac{12}{5}\right)x\left(+\frac{2}{6}\right)$

Para el primer ejemplo se recordó la simplificación de fracciones con el objetivo de que resultara más fácil multiplicar después, la fracción simplificada quedó expresada así: $\left(+\frac{2}{3}\right)x\left(-\frac{3}{9}\right)=\left(+\frac{2}{3}\right)x\left(-\frac{1}{3}\right)$; luego, se multiplicaron los numeradores y los denominadores entre sí, obteniendo como resultado $\left(-\frac{2}{9}\right)$.

Mientras que en el segundo ejemplo se indicó que también pueden realizar las respectivas multiplicaciones y luego simplificarlas, es decir, $\left(-\frac{6}{4}\right)x\left(-\frac{3}{6}\right)=\left(+\frac{18}{24}\right)=$ $(+\frac{9}{12})=(+\frac{3}{4})$. Al mismo tiempo se recordó aplicar la ley de los signos para la multiplicación de números enteros. Al llegar a este punto, se plantearon una serie de ejercicios para ser resueltos en clase:

1. $\left(\frac{3}{27}\right)\times\left(-\frac{5}{1}\right)$
2. $\left(-\frac{2}{9}\right)\times\left(-\frac{7}{8}\right)$
3. $\left(\frac{712}{7}\right)\times\left(-\frac{5}{4}\right)$

Respecto a la multiplicación entendieron la técnica matemática para operar, pero 22 estudiantes presentaron dificultades en cuanto a las tablas de multiplicar, y a la ley de los signos, por lo cual se les recomendó repasar en casa. Por el contrario, un E_{10} resolvió los ejercicios sin problema alguno (ver figura 41).

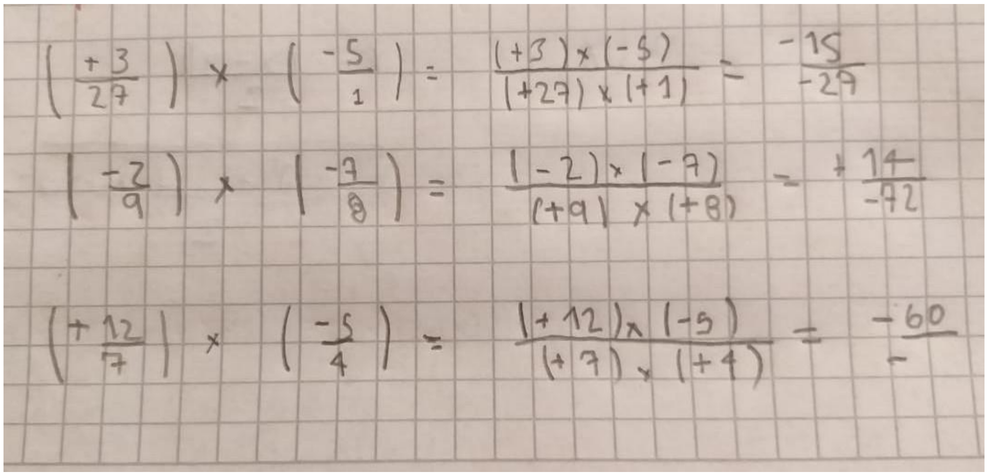

Figura 41. Ejercicio de multiplicación realizado por E_{10}.

Fuente: Archivo personal

Adicional a los ejercicios anteriores se plantearon otros, con el objetivo de que los estudiantes repasaran las tablas de multiplicar y participaran de las bonificaciones, estos fueron:

1. $\left(\frac{+3}{9}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{7}{2}\right)$
2. $\left(-\frac{10}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{6}{7}\right)$
3. $\left(\frac{-12}{23}\right) \times \left(\frac{-7}{-9}\right) \times \left(\frac{+9}{4}\right)$

Posteriormente, se explicó la definición de inverso multiplicativo de un número racional, a través de lo siguiente: ***"****El inverso multiplicativo de un número racional* $\frac{a}{b}$*, es otro número racional* $\frac{b}{a}$*, tal que* $\left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{b}{a}\right) = 1$*"*. Esto se puede notar en los siguientes ejemplos:

1. $\left(+\frac{2}{5}\right) \times \left(+\frac{5}{2}\right) = 1$
2. $\left(\frac{-3}{2}\right) \times \left(\frac{2}{-3}\right) = 1$
3. $\left(+\frac{4}{5}\right) \times \left(+\frac{5}{4}\right) = 1$

Una vez que los estudiantes entendieron el concepto de inverso multiplicativo, se explicó la división de números racionales a través de la siguiente definición: *"Para realizar el cociente de dos números racionales, se multiplica el dividendo por el inverso* *multiplicativo del divisor".* Se plantearon algunos ejemplos y ejercicios para ser trabajados en el transcurso de la clase; estos son:

Ejemplos:

1. $\left(+\frac{2}{3}\right) \div \left(+\frac{4}{5}\right) = \left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{5}{4}\right) = \left(+\frac{10}{12}\right) = \left(+\frac{5}{6}\right)$
2. $\left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(+\frac{2}{6}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(+\frac{6}{2}\right) = \left(-\frac{18}{10}\right) = \left(-\frac{9}{5}\right)$

Ejercicios:

3. $\left(+\frac{12}{5}\right) \div \left(-\frac{1}{3}\right)$
4. $\left(-\frac{9}{20}\right) \div \left(-\frac{3}{2}\right)$
5. $\left(+\frac{7}{6}\right) \div \left(-\frac{3}{4}\right)$
6. $\left(\frac{+7}{10}\right) \div \left(\frac{+5}{12}\right)$
7. $\left(\frac{-9}{5}\right) \div \left(\frac{-3}{7}\right)$
8. $\left(-\frac{10}{4}\right) \div \left(\frac{-8}{9}\right)$

En la figura 42 se pudo observar la solución de E_{11} a algunos de los ejercicios propuestos, la cual evidenció que no presentó dificultades para entender la forma que tiene el inverso multiplicativo de un número, a causa de esto, pudo realizar las operaciones aritméticas correspondientes a la división de fracciones.

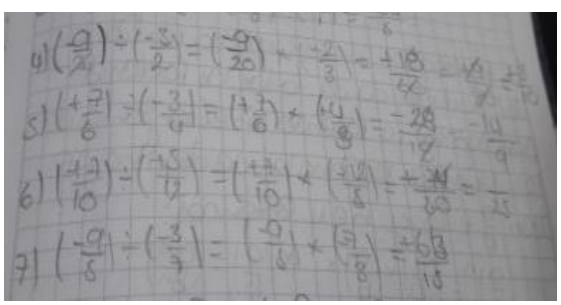

Figura 42. Ejercicios de cociente desarrollados por E_{11}.

Fuente: Archivo personal

Se realizó una segunda prueba escrita en la cual se plantearon ejercicios con operaciones combinadas de suma, resta, multiplicación y división de números racionales, con el objetivo de que los estudiantes vinculen dichas operaciones. La prueba escrita fue la siguiente:

1. 1.$\left\{\left(-\frac{3}{9}\right)+\left(-\frac{5}{8}\right)\right\}\times\left(\frac{12}{9}\right)$
2. 2.$\left(\frac{20}{5}\right)\div\left\{\left(\frac{7}{8}\right)-\left(+\frac{2}{6}\right)\right\}$
3. 3.$\left\{\left(\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{6}\right)\right\}+\left(\frac{1}{4}\right)$

En el desarrollo de esta prueba se presentaron dificultades en cuanto a las tablas de multiplicar, los signos y al procedimiento que se debía realizar para cada operación.

E_{12} realizó la solución del tercer punto teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, primero realizó la multiplicación de las fracciones $\left(\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{6}\right)=\left(\frac{+8}{18}\right)$, cabe mencionar que no tuvo en cuenta que una de las fracciones es negativa. Seguidamente, realizó la suma entre las fracciones $\left(\frac{+8}{18}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)=\left(+\frac{25}{36}\right)$ (ver figura 43).

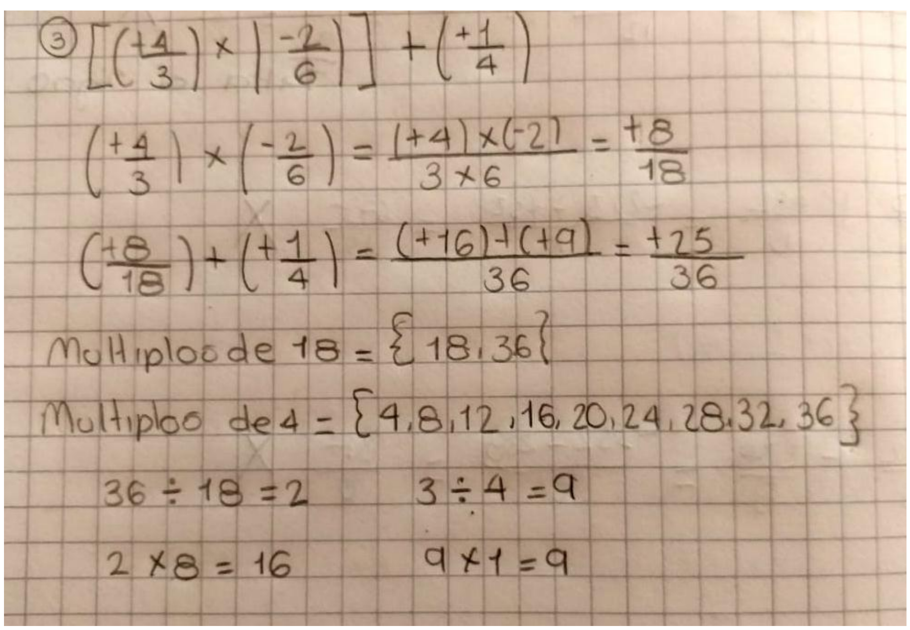

Figura 43. Tercer punto desarrollado por E_{12}.

Fuente: Archivo personal

Por otro lado E_{13} para desarrollar el ejercicio #2 inició con la operación de las fracciones que se encuentran dentro del paréntesis, después realizó las respectivas técnicas matemáticas que le permitían sumar fracciones de distinto denominador, sin embargo, en el ejercicio planteado se pedía hacer una resta. Una vez terminada la operación realizó la división entre $\left(\frac{20}{5}\right)$ y el resultado obtenido, y finalmente simplificó dicho número (ver figura 44).

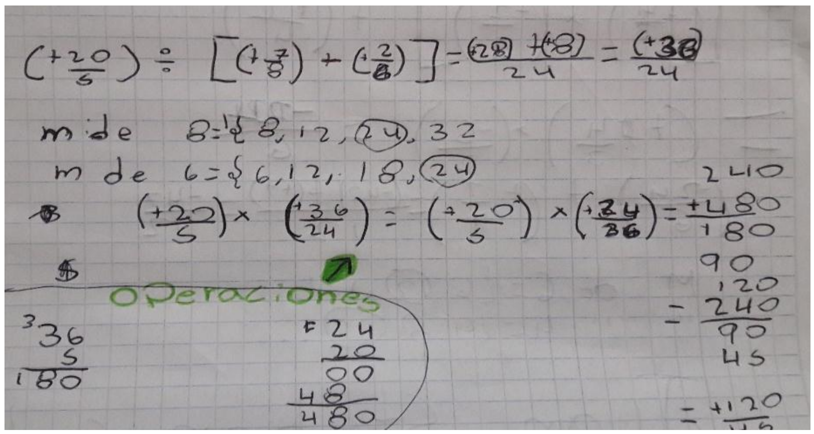

Figura 44. Primer punto desarrollado por E_{13}.

Fuente: Archivo personal

El siguiente punto trata de la potenciación, que se explicó como un caso particular del producto donde todos los factores son iguales, el anterior concepto se definió en el conjunto de los números racionales así: sean $\frac{a}{b} \epsilon \mathbb{Q}$ y n$\epsilon\mathbb{Z}$**,** entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right) x \left(\frac{a}{b}\right) x \left(\frac{a}{b}\right) x \ldots x \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a^n}{b^n}\right)$$

En un principio se acudió a los siguientes ejemplos para recordar la potenciación en números enteros y la ley de los signos en la multiplicación:

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) x \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(+\frac{4}{9}\right)$
2. $\left(+\frac{5}{6}\right)^2 = \left(+\frac{5}{6}\right) x \left(+\frac{5}{6}\right) = \left(+\frac{25}{36}\right)$

En seguida se plantearon los siguientes ejercicios para ser desarrollados en clase:

1. $\left(-\frac{3}{2}\right)^3$
2. $\left(+\frac{7}{5}\right)^3$
3. $\left(-\frac{5}{3}\right)^4$

De forma general se observó que los estudiantes no presentaron dificultad a la hora de identificar la base y el número de veces que esta debía ser multiplicada, es decir, el exponente. Lo anterior se evidenció con el E_{14} quien realizó las multiplicaciones de forma correcta (ver figura 45).

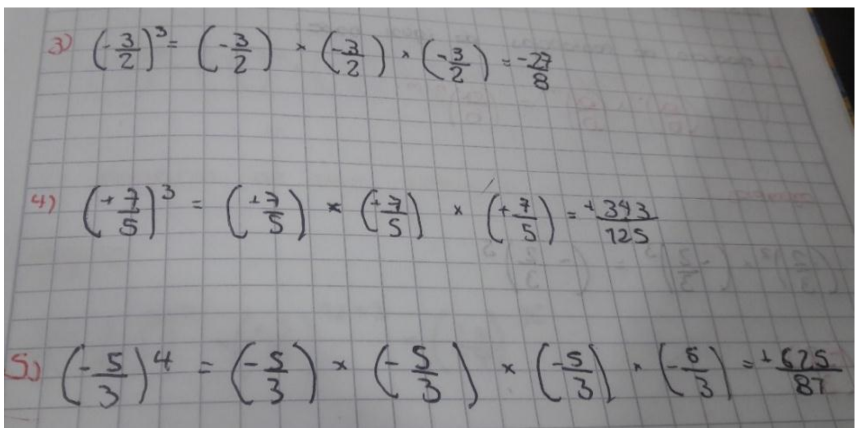

Figura 45. Ejercicios de propiedades de potenciación desarrollados por E_{14}.
Fuente: Archivo personal

En segunda instancia, se continuó con el tema de propiedades de la potenciación para números racionales las cuales fueron desarrolladas de la siguiente forma: enunciado, ejemplo y ejercicios propuestos. Dichas propiedades son descritas a continuación:

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \epsilon \mathbb{Q}$, y m,n$\epsilon\mathbb{N}$, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. Producto de potencias de igual base: $\left(\frac{a}{b}\right)^n \times \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$

Ejemplo:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^5$$

Ejercicios:

1. $\left(+\frac{7}{4}\right)^3 \times \left(+\frac{7}{4}\right)^5$
2. $\left(-\frac{5}{9}\right)^{10} \times \left(-\frac{5}{9}\right)^3$
3. $\left(-\frac{7}{5}\right)^1 \times \left(-\frac{7}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{7}{5}\right)^7$
4. $\left(+\frac{12}{3}\right)^6 \times \left(+\frac{12}{3}\right)^3 \times \left(+\frac{12}{3}\right)^4 \times \left(+\frac{12}{3}\right)^7$

En el ejercicio 4 se les recordó la simplificación de fracciones.

2. Potencia de una potencia: $[\left(\frac{a}{b}\right)^n]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{nxm}$

Ejemplo:

$$\left[\left(-\frac{8}{9}\right)^2\right]^4 = \left(-\frac{8}{9}\right)^{2\times 4} = \left(-\frac{8}{9}\right)^8$$

Ejercicios:

1. $\left[\left(\frac{+3}{5}\right)^3\right]^2$
2. $\left[\left(+\frac{7}{9}\right)^{12}\right]^3$
3. $\left\{\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^3\right\}^4$

Al llegar a este punto y con el objetivo de verificar si los estudiantes comprendieron las dos propiedades vistas, se plantearon los siguientes ejercicios que las combinaban:

1. $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^4 \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^5$
2. $\left\{\left(-\frac{2}{6}\right)^2\right\}^7 \times \left(-\frac{2}{6}\right)^3$

Respecto al primer ejercicio E_{15}, lo resuelve sin mostrar evidencia de las propiedades aplicadas ni de las operaciones realizadas. El resultado obtenido no es correcto (ver figura 46).

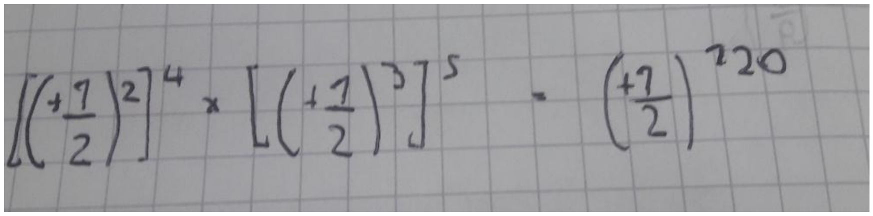

Figura 46. Solución de E_{15} a ejercicios planteados en clase.
Fuente: Archivo personal

Por otro lado, E_{16} desarrolló cada uno de los ejercicios sin que se hicieran evidentes las propiedades aplicadas, ya que en el primero obtuvo el resultado esperado, mientras que en el segundo no (ver figura 47).

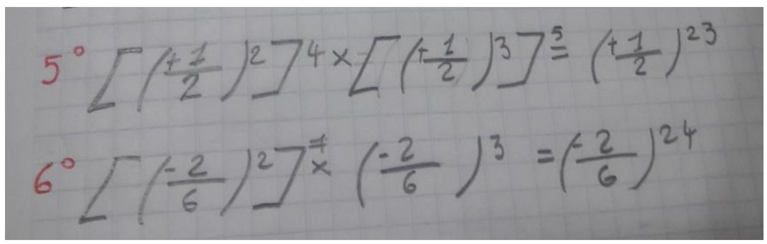

Figura 47. Solución de E_{16} a ejercicios planteados en clase.
Fuente: Archivo personal

Puede agregarse que antes de continuar con las demás propiedades de la potenciación, se recordaron y ejemplificaron las vistas anteriormente, puesto que hubo dificultades al momento de desarrollarlas de forma combinada.

3. Cociente de potencias de igual base: $\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$

Ejemplos:

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{4-2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^2$
2. $\left(-\frac{3}{2}\right)^8 \div \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{8-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^5$

Ejercicios:

1. $\left\{\left(+\frac{1}{4}\right)^2\right\}^6 \div \left\{\left(+\frac{1}{4}\right)^2\right\}^2$

2. $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{6} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{1}\right] \div \left(-\frac{2}{5}\right)^{3}$

3. $\left(+\frac{7}{6}\right)^{20} \div \left\{\left(+\frac{7}{6}\right)^{3}\right\}^{3}$

Es importante dejar claro que para el desarrollo de los ejercicios se eligieron estudiantes al azar para realizarlos en el tablero.

4. Producto de potencias de igual exponente: $\left(\frac{a}{b}\right)^{n} \times \left(\frac{c}{d}\right)^{n} = \left[\left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{c}{d}\right)\right]^{n}$

Ejemplo:

1. $\left(-\frac{2}{4}\right)^{2} \times \left(+\frac{3}{2}\right)^{2} = \left[\left(-\frac{2}{4}\right) \times \left(+\frac{3}{2}\right)\right]^{2} = \left(-\frac{6}{8}\right)^{2} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{2}$

Ejercicios:

1. $\left(-\frac{5}{7}\right)^{3} \times \left(+\frac{3}{2}\right)^{2}$
2. $\left(+\frac{7}{8}\right)^{4} \times \left(-\frac{2}{6}\right)^{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{4}$
3. $\left\{\left(+\frac{1}{2}\right)^{2}\right\}^{3} \times \left(-\frac{9}{12}\right)^{6}$
4. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{10} \times \left\{\left(+\frac{12}{5}\right)^{2}\right\}^{5}$

Los ejercicios 3 y 4 fueron planteados con relación a las propiedades 1 y 2, el tercer ejercicio se resolvió en el tablero con la propiedad potencia de una potencia; con esta explicación los estudiantes pudieron desarrollar el cuarto ejercicio sin ningún inconveniente (ver figura 48).

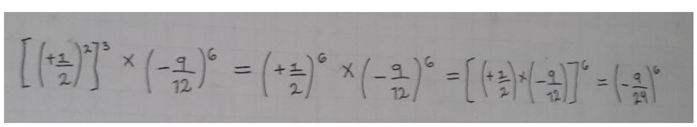

Figura 48. Ejercicios propuestos propiedad 4 de potenciación.

Fuente: Archivo personal

5. Cociente de potencia de igual exponente: $\left(\frac{a}{b}\right)^{m} \div \left(\frac{c}{d}\right)^{m} = \left[\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right)\right]^{m}$

Ejemplo:

$$\left(+\frac{2}{9}\right)^3 \div \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left[\left(+\frac{2}{9}\right) \div \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^3 = \left[\left(+\frac{2}{9}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^3 = \left[\left(-\frac{4}{27}\right)\right]^3$$

Ejercicios:

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \div \left(\frac{7}{-6}\right)^4$
2. $\left(+\frac{12}{13}\right)^5 \div \left(-\frac{9}{4}\right)^5$
3. $\left(\frac{-7}{9}\right)^3 \div \left(\frac{3}{10}\right)^3$

13 estudiantes resolvieron los ejercicios de forma correcta, mientras que otros presentaron dificultades en cuanto a: tablas de multiplicar y división de números racionales, ya que no recordaban la regla matemática que se debía aplicar para dividir fracciones.

Se debe agregar que para las tres propiedades presentadas a continuación, por petición del PT solo se realizó la respectiva ejemplificación.

6. Exponente cero: $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1, si\ \frac{a}{b} \neq 0$

Ejemplos: $\left(\frac{10}{-3}\right)^0 = 1,\quad \left(\frac{-7}{4}\right)^0 = 1,\quad \left(-\frac{100}{23}\right)^0 = 1$

7. Exponente uno: $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$

Ejemplos: $\left(\frac{9}{5}\right)^1 = \frac{9}{5},\quad \left(-\frac{3}{7}\right)^1 = -\frac{3}{7}$

8. Potencia con exponente negativo: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Ejemplos: $\left(\frac{6}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{6}\right)^3,\quad \left(\frac{3}{-8}\right)^{-2} = \left(\frac{-8}{3}\right)^2$

De esta forma se concluyeron las propiedades de la potenciación, solicitando a los estudiantes repasarlas y realizar ejercicios en casa.

Con todo y lo anterior, se realizó una prueba escrita donde se combinaron las propiedades de la potenciación, la prueba consistió en desarrollar los siguientes ejercicios:

1. $[\left(+\frac{3}{4}\right)^2]^0 \times \left(+\frac{3}{4}\right)^5$
2. $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 x \left(-\frac{2}{7}\right)^3$
3. $\left(-\frac{2}{5}\right)^5 \div \left(+\frac{7}{2}\right)^5$
4. $[\left(-\frac{10}{3}\right)^{-5}]^2 \times \left(-\frac{10}{3}\right)^3$

El día de la prueba escrita asistieron a clase 29 estudiantes, de los cuales 10 presentaron confusión entre las propiedades producto de potencias de igual base y potencia de una potencia, por ejemplo, un E_{17} no sumo los exponentes si no que realizó una multiplicación (ver figura 49).

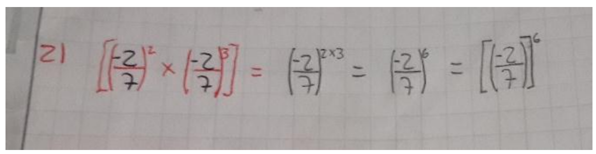

Figura 49. Ejercicio 2 desarrollado por E_{17} en la prueba escrita 3.
Fuente: Archivo personal

Por otra parte, 11 estudiantes no aplicaron las propiedades de producto de potencias de igual base y exponente cero, un ejemplo de lo anterior se puede notar en las soluciones propuestas al primer ejercicio por E_{18} (ver figura 50) y E_{19} (ver figura 51).

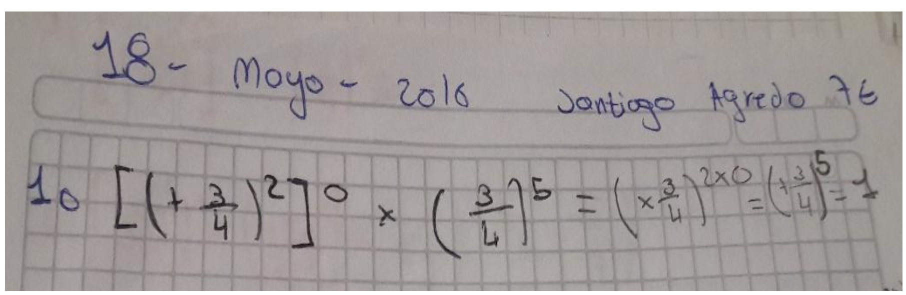

Figura 50. Primer punto de la prueba escrita #3 desarrollado por E_{18}.
Fuente: Archivo personal

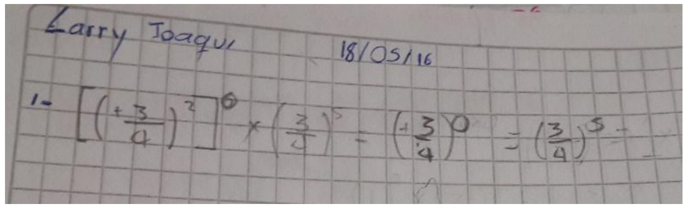

Figura 51. Primer punto de la prueba escrita #3 desarrollado por E_{19}.
Fuente: Archivo personal

Así mismo, 15 estudiantes no usaron de forma correcta la propiedad cociente de potencias de igual exponente, ni tampoco efectuaron la división de números fraccionarios de forma correcta. Por ejemplo, E_{20} realizó la división de las fracciones sin multiplicar la primera fracción por el inverso multiplicativo de la segunda y luego multiplicó los exponentes, dejando indicado el resultado obtenido (ver figura 52).

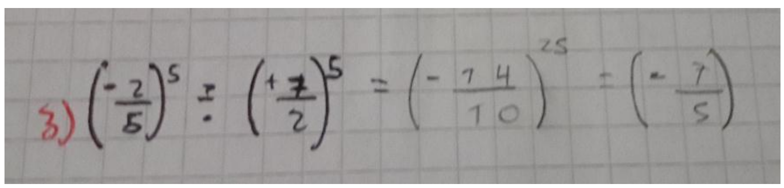

Figura 52. Tercer punto de la prueba escrita #3 desarrollado por E_{20}.
Fuente: Archivo personal

En cuanto a la radicación de números racionales, se explicó como esta es un proceso inverso a la potenciación, donde se conocen la base y el exponente, es decir:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c}{d}\right) \text{ entonces } \sqrt[n]{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)$$

Posteriormente se explicó el procedimiento a partir de los siguientes ejemplos:

1. $\left(+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(+\frac{4}{9}\right)$ entonces $\sqrt[2]{\left(+\frac{4}{9}\right)} = \left(+\frac{2}{3}\right)$
2. $\left(+\frac{4}{5}\right)^2 = \left(+\frac{16}{25}\right)$ entonces $\sqrt[2]{\left(+\frac{16}{25}\right)} = \left(+\frac{4}{5}\right)$

Finalmente se plantearon los siguientes ejercicios para que los estudiantes desarrollaran en el transcurso de la clase.

1. $\left(+\frac{2}{9}\right)^3$
2. $\left(+\frac{5}{7}\right)^2$
3. $\left(+\frac{3}{5}\right)^3$
4. $\left(+\frac{4}{3}\right)^3$
5. $\left(+\frac{2}{3}\right)^4$
6. $\left(-\frac{8}{5}\right)^3$
7. $\left(+\frac{6}{4}\right)^2$
8. $\left(+\frac{3}{4}\right)^3$

Es necesario recalcar que los estudiantes entendieron el proceso que se debe realizar para expresar la radicación a través de la potenciación, a medida que iban trabajando se resolvieron dudas y dificultades.

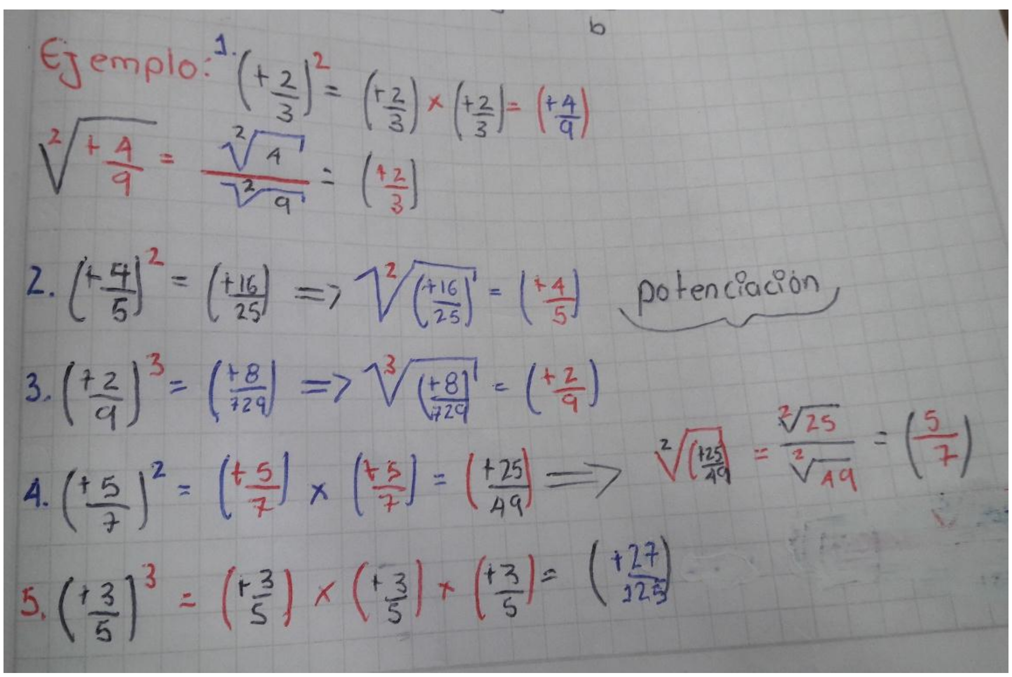

Figura 53. Ejercicio resuelto por un estudiante.

Fuente: Archivo personal

El desarrollo de la docencia directa concluyó con la radicación como proceso inverso a la potenciación, el PT solicitó realizar un respectivo repaso y la evaluación del tema visto.

2.3. Evaluación y resultados curriculares obtenidos.

2.3.1 Evaluación.

El sistema de evaluación se llevó a cabo de acuerdo al decreto 1290 de 2009 por el cual, el gobierno nacional otorga la facultad a los establecimientos educativos para definir el Sistema Institucional de Evaluación de los Estudiantes, en este caso, conservando el sistema institucional de evaluación de la IE-TI; que cuenta con una escala de calificaciones que va de 1 a 5. Es necesario recalcar que no se intervino en la consolidación de la nota total de los estudiantes, ya que el PT se encargó de ello, considerando aspectos disciplinarios, puntualidad, así como las notas resultantes de las pruebas escritas, los talleres y participaciones en clase.

Con la evaluación se pretendió que los estudiantes alcanzaran en el proceso de aprendizaje los siguientes objetivos:

1. Apropiación de los conocimientos y saberes.
2. Adquisición de habilidades y destrezas mediante la resolución de problemas, que se proponen en el desarrollo de cada tema.
3. Aplicación práctica de los conocimientos y saberes en determinado contexto.

Por otro lado, en el desarrollo de la docencia directa se tuvieron en cuenta los siguientes criterios de evaluación:

1. Da las respuestas correctamente a los ejercicios planteados en las pruebas escritas.
2. Participa activamente en los ejercicios propuestos en el transcurso de las clases.
3. Realiza correctamente cálculos con números racionales, aplicando las reglas de prioridad de las cuatro operaciones elementales, la potenciación y la radicación.
4. Elige las operaciones adecuadas en la resolución de problemas y analiza la solución obtenida y su significado.

5. Simplifica un número racional hasta su fracción irreducible.
6. Realiza representaciones graficas de números racionales.
7. Realiza los cálculos de forma clara y ordenada.
8. Representa y compara números racionales a través de la recta numérica.
9. Reconoce las propiedades de adición y potenciación para números racionales.
10. Identifica los números racionales.
11. Resuelve problemas que involucren números racionales.
12. Reconoce un número racional representado en el lenguaje natural.

En otro sentido, los instrumentos de evaluación empleados con los estudiantes fueron:

1. Observar el trabajo realizado por los estudiantes en talleres, pruebas escritas y participación en el tablero.
2. Revisar en los cuadernos de los estudiantes los ejercicios y tareas propuestas para desarrollar tanto en la clase como en la casa.
3. Valorar el trabajo de los estudiantes y el interés en los temas vistos, a través de la participación y los resultados obtenidos en pruebas escritas y talleres.

2.3.2 Resultados curriculares.

Para el presente estudio se tuvo en cuenta una muestra de 37 estudiantes correspondientes al grado 7E, a la cual se le realizó la evaluación de acuerdo a los aspectos cognoscitivos, los resultados obtenidos fueron:

1. De los ejercicios realizados en el cuaderno 24 estudiantes cumplieron con los criterios de: evaluación, orden, claridad, respuestas correctas y trabajo en clase.

2. Del primer taller realizado 23 estudiantes cumplieron con los criterios de evaluación de: identificación de números racionales, representación en la recta numérica y simplificación.

3. Del segundo taller 32 estudiantes identificaron correctamente los números racionales expresados en lenguaje natural, de igual forma 26 realizaron la

representación de los números en la recta numérica y 32 ejecutaron correctamente la suma y resta de números racionales.

4. De la primera prueba escrita 27 estudiantes realizaron cálculos correctos con la suma de números racionales con diferente denominador.

5. De la segunda prueba escrita 21 estudiantes realizaron cálculos de la forma esperada usando las cuatro operaciones básicas.

6. De la tercera prueba escrita 13 estudiantes realizaron cálculos de manera adecuada aplicando las propiedades de la potenciación en números racionales.

Capítulo 3

Reflexión desde la perspectiva semiótica

3.1. Objetivo y pregunta.

- **Objetivo:** Identificar las actividades cognitivas realizadas por los estudiantes de la Institución Educativa Técnico Industrial (IE-TI) al realizar operaciones con números racionales en su representación fraccionaria, desde la perspectiva semiótica establecida por Raymond Duval.

- **Pregunta:** ¿Qué actividades cognitivas realizan los estudiantes al operar números racionales en su representación fraccionaria?

3.2. Marco Conceptual y Unidades de Análisis del Estudio

A lo largo de la historia, el binario *enseñanza-aprendizaje* de la matemática ha sido creador de múltiples enfoques teóricos y metodológicos (Hernándes, 2017, D´Amore, 2016) donde la dificultad de la comprensión, sumado a la necesidad de recurrir a otro tipo de representaciones que constituyen el lenguaje de la matemática, fueron los puntos clave para fundar el enfoque semiótico en la enseñanza-aprendizaje donde, la propuesta teórica de **registros de representaciones semiótica** creada por Duval R., es el principal referente teórico y conceptual de esta investigación.

¿Por qué Raymond Duval? Específicamente, porque es el autor que ofrece un panorama mundial y más completo acerca de las investigaciones sobre semiótica en Matemática educativa en la actualidad (D´Amore, 2016). Además, las indagaciones de Duval sobre los hechos didácticos y pedagógicos, permiten abordar el problema central de investigación con una reflexión desde la perspectiva semiótica, específicamente: en la docencia directa desarrollada. También, el enfoque teórico propuesto por Duval, permite ver cómo las actividades cognitivas que los estudiantes realizan al dar significado al concepto de número racional, son entendidas a través de la representación fraccionaria.

> Duval (1999) refiere en su texto “semiosis y pensamiento humano” que el problema de la semiótica, como eje articulador para poder realizar los diferentes cambios de representación de un objeto a otro, permite observar desde esta rama de la ciencia el

nivel de comprensión que los estudiantes presentan al realizar un cambio de representación y lo que ello significa. (p, 99)

De igual forma, Duval aporta desde la *teoría semiótica de las representaciones* una comprensión hacia la conceptualización de los *objetos matemáticos*, ya que, en matemáticas se estudian *preferiblemente* objetos y no conceptos (D´Amore, 2012), es decir, que la actividad matemática privilegia trabajar con los objetos matemáticos para luego cuestionarse sobre las condiciones de validez del significado que se le da a los mismos. De esta forma, Duval explica que “La noción de objeto es una noción que no se puede utilizar desde el momento en el que nos cuestionamos acerca de la naturaleza, de las condiciones de validez o del valor del conocimiento” (Duval citado por D´Amore, 2012b, p. 55)

Con lo anterior, es pertinente resaltar que “no se puede confundir un objeto matemático con su representación, debido a que este puede tener otras tantas representaciones diferentes de las que uno ve” (Tozany, 2001, p. 880) pues “a mediano o largo plazo, esta confusión provoca una pérdida de comprensión” (Duval, 1998, p.173)

En este punto (Objeto matemático/ representación) es importante definir dos conceptos clave: Semiosis y Noesis. El primero, “hace referencia a la actividad ligada a la producción de representaciones, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas” (Duval citado por Moreno, 2017, p. 15). Por otro lado, la Noesis, es “la actividad ligada a la aprehensión conceptual de los objetos representados incluyendo las diferentes actividades y procesos cognitivo desarrollados por el sujeto” (Duval citado por *at al*, 2017, p. 15)

En síntesis, la semiosis y la Noesis terminan siendo “los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia” (Duval citado en D´Amore, 2012b, p. 20) Esta perspectiva (Semiosis y Noesis) permite ingresar al campo teórico una serie de *representaciones semióticas* que usualmente son requeridas en matemáticas, pero no por ello son producidas de manera aislada sino, al contrario: “forman sistemas de representación que tienen una estructura interna propia y se evidencian a través de tres actividades cognitivas" (Tozany, 2001, p 882) que son inherentes a toda representación (Duval, 2006, Tozany, 2001, Valdéz, 2013).

Las tres *actividades cognitivas* corresponden a las siguientes[2]:

1. Formulación: construir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
2. Tratamiento: transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
3. Conversión: convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

La siguiente tabla resume dichas actividades:

Actividad 1	Denominada "formulación de una representación en un registro dado"
Actividad 2	llamada "tratamiento de una representación"
Actividad 3	designada "conversión de una representación"

Tabla 2. Las tres actividades cognitivas

Fuente: Tomado de Tozany (2001) según Duval (2006)

Estas tres contribuciones cognitivas no surgen de manera inconexa, es decir, que en el proceso de aprehensión conceptual estas se relacionan de forma permanente y sin un

[2] Las tres *actividades cognitivas* fueron extraídas de Moreno A, Hernández. (2017). *Teorías de registros de representaciones semiótica*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/315814323_TEORIA_DE_REGISTROS_DE_REPRESENTACIONES_SEMIOTICA

orden determinado, aunque se presenten dificultades al transitar entre representaciones. Tal razón llevo a Duval a plantear, que, dentro de los sistemas semióticos de representación de un mismo objeto, pueden existir fenómenos de congruencia y de no-congruencia. Esta *complejidad* aparece, según Duval (2016) a través de dos fenómenos cuya variación depende

> … de la naturaleza de los dos registros movilizados para una transformación de representación: la variabilidad de congruencia/no congruencia para representaciones del mismo objeto de conocimiento y la no reversibilidad. En efecto, en cualquier nivel y en cualquier área, las conversiones no congruentes son para muchos estudiantes una barrera infranqueable en su comprensión de las matemáticas y, por tanto, para su aprendizaje (Duval, 2016, p. 85)

Empero, para abordar los fenómenos congruencia- no congruencia, es necesario aclarar el término de unidad significante[3], el cual hace alusión

> …Al significado que el sujeto le da a cada elemento de una representación, de allí una unidad significante en un registro de representación puede subdividirse en unidades significantes elementales, de tal manera que puedan ser puestas en correspondencia; entonces se puede ver si las unidades significantes son, en cada uno de los dos registros, unidades simples o combinaciones de unidades simples. (Duval,1999, pp. 74-75)

Una vez aclarado el término de unidad significante, hablamos del fenómeno de congruencia

> …cuando se cumplen tres condiciones: igual orden posible de aprehensión de las unidades, correspondencia en el orden de arreglo de las unidades y correspondencia semántica entre las unidades significantes. Cuando una de estas condiciones no se cumple se dice entonces que las representaciones no son congruentes. (Duval,1999, p. 99)

[3] "Se considera como unidad significante elemental toda unidad que depende del 'léxico' de un registro" (Duval, 1999, p. 50). Duval (1999, pp. 74-75) considera como unidades significantes aquellas componentes de la representación cuya variación (dejando el resto de variables fijas) produce variaciones observables en la representación del objeto en otro registro.

De otra forma, para establecer la congruencia o no congruencia entre diferentes registros de representación se deben considerar los criterios expuestos en la siguiente tabla:

Se considera como unidad significante elemental todo lo que proviene del léxico de un registro. El primer criterio de congruencia consiste en disponer, para la representación unidades significantes elementales en el registro de llegada que corresponden a las unidades significantes elementales de la representación a convertir.
La univocidad semántica terminal. Es decir que a cada unidad significante elemental de la representación de partida le corresponde una única unidad significante elemental en el registro de llegada
El orden de organización de las unidades significantes en la representación de salida se conserva o no en la representación de llegada. Se trata de reconocer si se constituye o no igual orden posible de aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones. Ahora bien, en las lenguas naturales el sujeto gramatical constituye un anclaje cognitivo natural, pero no así en las escrituras literales y simbólicas.

Tabla 3. Criterios congruencia-no congruencia

Fuente: Elaboración propia a partir de Valencia (2001, p 56)

3.3. Análisis de los Registros.

El análisis de los registros se realizó por temáticas teniendo en cuenta la secuencia de la docencia directa, además, los registros analizados provienen de talleres, pruebas escritas, tareas, cuadernos y actividades desarrolladas en clase.

En clase se propuso a los estudiantes representar gráficamente los siguientes números racionales expresados en las fracciones: $\frac{39}{4}, \frac{12}{13}, \frac{25}{9}$.

Figura 54. Representación gráfica de fracciones realizada por E_{21}

Fuente: Archivo personal

E_{21} frente a cada fracción realizó lo siguiente (ver figura 54):

En la fracción $\frac{39}{4}$ reconoció que el numerador es mayor que el denominador y que necesita más de una unidad para realizar la representación gráfica, en este caso estableció que requiere de nueve unidades y parte de una décima; por lo cual representó 10 unidades en forma cuadrada y cada una la dividió en 4 partes iguales (basado en la cuadricula del cuaderno), luego sombreó 9 unidades completas y en la décima solo 3 partes de ella.

De forma análoga representó la fracción $\frac{25}{9}$, en este caso representó 3 unidades en forma rectangular, dividiendo cada uno en 9 partes iguales (de acuerdo a la cuadricula del cuaderno); luego sombreó dos unidades completas y de la tercera solo 7 partes.

Respecto a la fracción $\frac{12}{13}$ E_{21} identificó que el numerador es menor que el denominador por lo tanto solo necesitó una unidad para realizar su representación gráfica, la dividió en 13 partes iguales y sombreó 12 de ellas.

En el trabajo realizado por E_{21} hubo congruencia de unidades significantes, puesto que, para la representación gráfica de las fracciones, las unidades fueron divididas en tantas partes como indicó el denominador de cada fracción y se relacionó el numerador con las partes sombreadas; es decir, que en cada caso la fracción se tomó como parte todo.

Por otro lado, E_{21} hizo una transformación del objeto matemático, pasando del sistema numérico en representación fraccionaria a la representación gráfica a través de figuras cuadradas, además, los dos registros se ponen en correspondencia a través del signo "igual". Con todo y lo anterior, además de la congruencia de unidades significantes, se puede afirmar que, cumpliendo con el objetivo de la reflexión en la docencia, la acción cognitiva identificada es de conversión.

Como actividad en el aula se planteó a los estudiantes verificar si dos fracciones dadas son o no equivalentes mediante el producto cruzado entre ellas, las parejas de fracciones dadas son: $\frac{110}{17}$ y $\frac{33}{9}$, $\frac{2}{9}$ y $\frac{7}{2}$, $\frac{3}{6}$ y $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{12}$ y $\frac{3}{6}$.

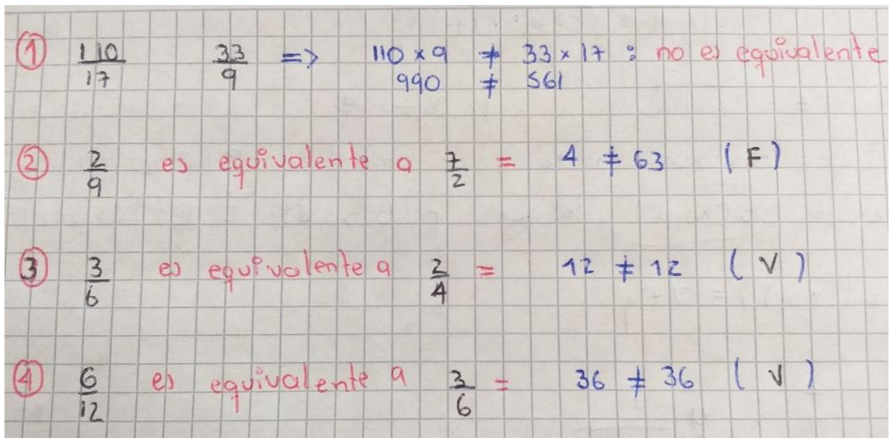

Figura 55. Fracciones equivalentes a través del producto cruzado realizada por E_{22}.
Fuente: Archivo personal

E_{22} realizó lo siguiente para cada pareja de fracciones dada (ver figura 55):

Para el primer ejercicio realizó las multiplicaciones 110x9 y 33x17, obteniendo como resultado 990 y 561 respectivamente, luego expresó 990≠561 y concluyó "no es equivalente". Así mismo, para el segundo ejercicio, obtuvo los resultados 4≠63 acompañados de (F) con lo cual indicó que las fracciones no eran equivalentes.

Por otro lado, en el tercer ejercicio obtuvo como resultado 12≠12 y manifestó (V) indicando que las fracciones eran equivalentes, es decir que relaciono dos cantidades iguales a través del signo "distinto de", y a partir de ello concluyo la equivalencia de estas. Del mismo modo, ocurrió con $\frac{6}{12}$ y $\frac{3}{6}$, expresó 36≠36 y (V) denotando que las fracciones eran equivalentes.

E_{22} comparó los resultados obtenidos del producto cruzado entre el primer numerador y el segundo denominador, y el primer denominador y el segundo numerador, luego los comparó y decidió si las fracciones eran o no equivalentes. Por ejemplo, en los ejercicios 1 y 2 concluyó que las fracciones no eran equivalentes, ya que, los resultados obtenidos eran diferentes. Lo anterior, en términos semióticos indica que hubo congruencia de unidades significantes, puesto que, se relacionó el producto cruzado con el resultado obtenido y lo que ello significa, es decir, su no equivalencia.

Mientras que, con los ejercicios 3 y 4, E_{22} obtuvo resultados numéricos iguales en cada una de las operaciones, manifestó que estos eran diferentes y concluyó que las fracciones eran equivalentes. Debido a esto, en términos semióticos no hay una congruencia de unidades significantes puesto que, se presentó una contradicción cuando relacionó los números a través del signo "distinto de" y concluyó que estos eran equivalentes.

Con todo y lo anterior y cumpliendo con el objetivo de la reflexión en la docencia, la acción cognitiva identificada es tratamiento, puesto que: en primer lugar se plantearon dos números en representación fraccionaria y una pregunta en torno a ellos, en segundo lugar se realizaron dos productos cruzados, en tercer lugar se obtuvieron unos resultados y finalmente se realizó una comparación entre ellos; todas las operaciones matemáticas se realizaron conservando el sistema de representación numérica. En los ejercicios 3 y 4 el resultado de los productos cruzados se simbolizó de forma incorrecta y se relacionó con la el hecho de que las fracciones fueran equivalentes, relación que desde la perspectiva semiótica no significa que los estudiantes analizados hayan realizado una acción cognitiva de conversión.

En una actividad en clase, se pidió a los estudiantes ubicar en la recta numérica los siguientes números: $\frac{13}{6}$, $\frac{20}{9}$ y $-\frac{12}{6}$.

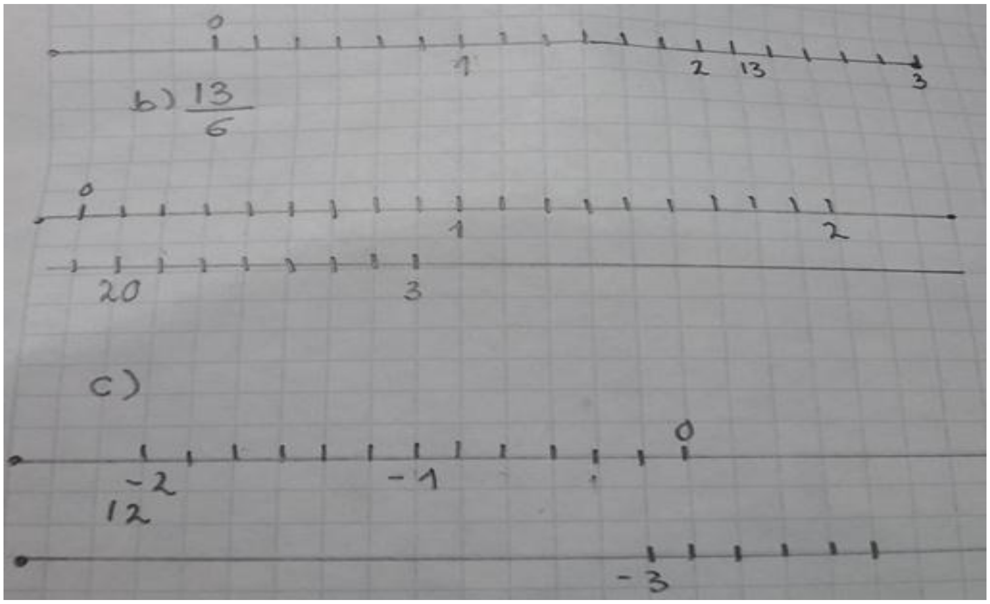

Figura 56. Ubicación de números en la recta numérica realizada por E_8

Fuente: Archivo personal

E_8 realizó lo siguiente (ver figura 56): para ubicar $\frac{13}{6}$ dibujó una recta, estableció una unidad de medida (guiándose en la cuadrícula del cuaderno) y dividió cada unidad en 6 segmentos iguales, posteriormente, contó a partir de cero y tomó hacía la derecha dos unidades completas y una sexta parte de la tercera, en este punto ubicó el número 13, así quedó representada la fracción $\frac{13}{6}$. Análogamente, ubicó $\frac{20}{9}$ dibujando dos rectas (una como prolongación de la otra), tomó la unidad de medida y dividió cada unidad en 9 segmentos iguales, a continuación, tomó dos unidades completas y dos novenas partes de la tercera.

De forma similar, ubicó $-\frac{12}{6}$ dibujó dos rectas (una como prolongación de la otra), dividió cada unidad en 6 segmentos iguales y a la izquierda de cero tomó dos unidades completas, en este punto ubicó el número 20.

En vista de lo anterior, hubo congruencia de unidades significantes debido a que, las unidades se dividieron en segmentos iguales teniendo en cuenta el denominador y se tomaron correctamente el número de partes indicadas en el numerador. Sin embargo, cuando escribió el número fraccionario representado no hubo congruencia de unidades significantes puesto que, solo escribió el número que indicaba el numerador lo cual permitió evidenciar que E_8 no está viendo la representación $\frac{a}{b}$ como parte de un todo, sino como dos números distintos.

Desde la perspectiva semiótica y en cumplimiento del objetivo de la reflexión en la docencia, no se realizó la acción cognitiva de conversión puesto que, al transitar entre la representación fraccionaria y la representación en la recta numérica, E_8 no realizó un proceso de reversibilidad que le permitiera encontrar la expresión inicial del registro de partida en el registro de llegada, en este sentido, se puede hablar de una “perdida” del objeto matemático que inicialmente era un número fraccionario y terminó siendo un número natural.

Se planteó un taller en clase para ser resuelto en parejas, uno de los puntos consistió en determinar si una serie de números de la forma $\frac{a}{b}$ pertenecían o no, al conjunto de los números racionales. Los números fueron: $-\frac{3}{9}, -\frac{7}{4}, \frac{5}{5}, \frac{9}{0}, \frac{0}{1}, -\frac{120}{504}$.

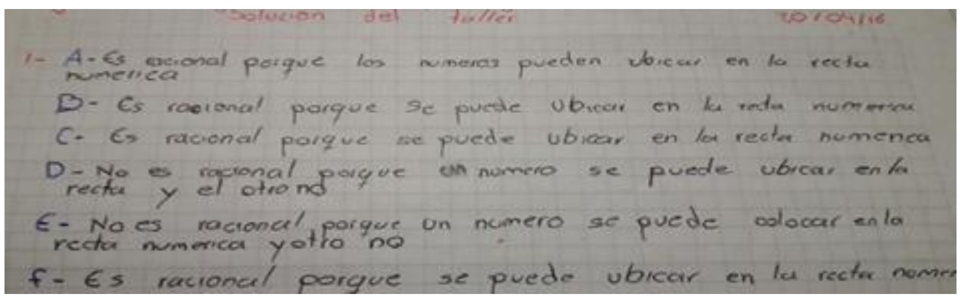

Figura 57. Identificación de números racionales realizada por PE1.
Fuente: Archivo personal

PE1 justificó que los números $-\frac{3}{9}, -\frac{7}{4}, \frac{5}{5}$ y $-\frac{120}{504}$ eran racionales porque se podían ubicar en la recta numérica, sin embargo, no realizaron su respectiva ubicación. Mientras que, los números $\frac{9}{0}$ y $\frac{0}{1}$ no eran racionales ya que un número de la fracción (sin especificar cuál de los dos), se podía ubicar en la recta numérica y el otro no (ver figura 57).

De acuerdo a la respuesta que planteó PE1 se dedujo que no hay congruencia en las unidades significantes, ya que, la representación $\frac{a}{b}$ se interpretó como dos números diferentes y no como un solo número cuyas cantidades se relacionan como parte de un todo, el cual consta de ***a*** como numerador y ***b*** como denominador.

Por otra parte, PE4 clasificó cada número de acuerdo al denominador, es decir, argumentó que los números: $-\frac{3}{9}$, $-\frac{7}{4}$, $\frac{5}{5}, \frac{0}{1}$ $y - \frac{120}{504}$ eran racionales puesto que el denominador era distinto de cero, mientras que $\frac{9}{0}$ no era racional ya que su denominador coincide con cero (ver figura 58).

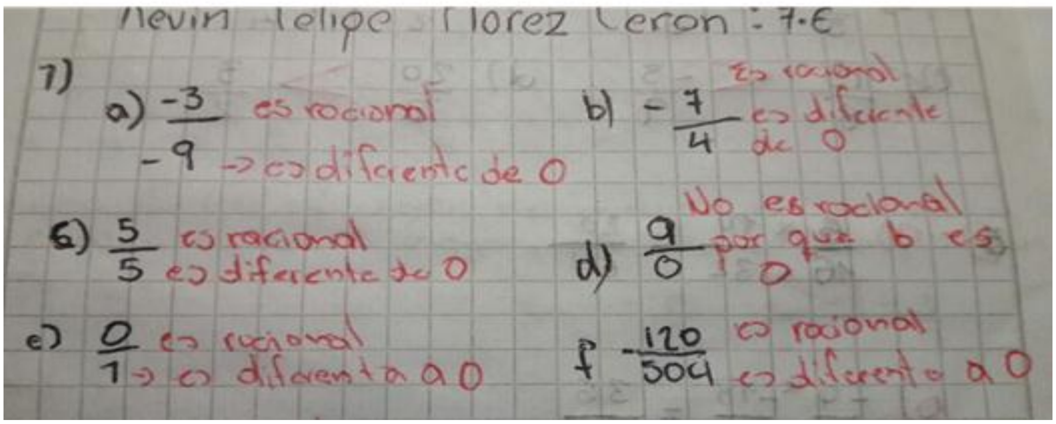

Figura 58. Identificación de números racionales realizada por PE4.
Fuente: Archivo personal

De lo anterior, se afirma que en términos semióticos hay congruencia de unidades significantes, debido a que: a primera vista PE4 reconoció la forma $\frac{a}{b}$ como un representante del conjunto de los números racionales, posteriormente relacionó la representación del número con la condición de que el denominador sea distinto de cero y finalmente, de acuerdo a su análisis concluyó si el número pertenecía o no al conjunto de los números racionales.

Ahora bien, cumpliendo con el objetivo de la reflexión en la docencia la actividad cognitiva identificada es formulación, puesto que, en el registro analizado se encuentran marcas perceptibles como son las expresiones: “es diferente a 0”, “porque b es 0”, “es racional” y “no es racional”, las cuales permiten hacerse una idea del análisis que PE4 realizó para determinar si un número dado pertenece o no al conjunto de los racionales.

Como actividad en clase, se pidió a los estudiantes comparar a través de la recta numérica unas parejas de números fraccionarios y determinar el mayor, el menor o si eran iguales. Las parejas de números dadas fueron: $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{7}$ y $-\frac{2}{5}$.

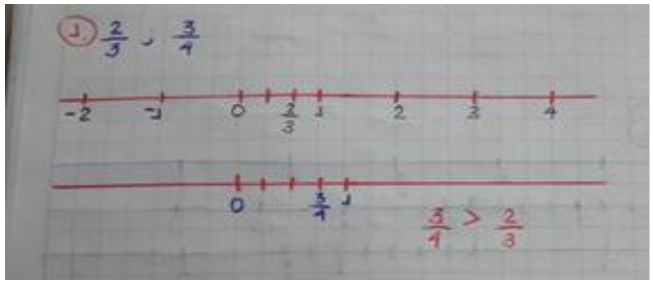

Figura 59. Comparación de racionales en la recta numérica realizada por E_6.

Fuente: Archivo personal

E_6 realizó lo siguiente (ver figura 59):

Para comparar la pareja $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ trazó dos rectas numéricas con el objetivo de ubicar un número en cada una, en la primera tomó una unidad de medida y la dividió en 3 segmentos iguales, luego tomó dos partes de la primera unidad a la derecha de cero y en ese punto ubicó la fracción $\frac{2}{3}$. De manera afín, en la segunda recta determinó una unidad de medida y la dividió en 4 segmentos iguales, después tomó 3 partes de la unidad a la derecha de cero y ubicó $\frac{3}{4}$. Teniendo en cuenta lo anterior concluyó que $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

De acuerdo a lo desarrollado por E_6 hubo congruencia de unidades significantes, en el sentido que realizó la ubicación de los números expresados de la forma $\frac{a}{b}$ en la recta numérica, conservando lo que significa en cada fracción el numerador y el denominador, es decir hizo una interpretación de las fracciones como parte todo. Pero, no hubo congruencia de las unidades significantes, debido a que E_6 comparó la ubicación de cada fracción, sin tener en cuenta que las dos rectas trazadas no conservaban la misma unidad de medida.

Respecto a la ubicación de los números fraccionarios en la recta numérica, la actividad cognitiva identificada desde la perspectiva semiótica es de conversión, debido a que E_6 pasó del registro de representación fraccionaria al registro de representación en la recta numérica. Al mismo tiempo, si se hace una conversión inversa se puede notar que el objeto matemático en el registro de llegada coincide con el registro inicial, en este sentido, se puede hablar de la conservación del objeto matemático al transitar entre sistemas de representación. De lo anterior, se evidencia el cumplimiento del objetivo de la reflexión en la docencia directa.

Como ejercicio para desarrollar en clase, se pidió a los estudiantes realizar la suma de los siguientes números fraccionarios con igual denominador: $\frac{204}{3}\ y\ \frac{30}{3}$.

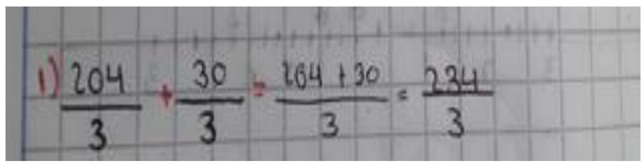

Figura 60. Suma de racionales con igual denominador realizada por E_{23}.
Fuente: Archivo personal

E_{23} operó los números conservando el 3 como denominador y sumando los numeradores 204 y 30, obteniendo como resultado $\frac{234}{3}$ (ver figura 60).

En el desarrollo del ejercicio hubo congruencia de unidades significantes dado que, E_{23} después de aplicar correctamente las reglas matemáticas requeridas para la suma de fracciones homogéneas, obtuvo un resultado de la forma $\frac{a}{b}$ con b≠0. Se afirma que, cumpliendo con el objetivo de la reflexión en la docencia, la actividad cognitiva identificada es de tratamiento puesto que, E_{23} transformó la representación al interior del registro, es decir, que partió de la adición de dos fracciones y llegó a una fracción equivalente que las representa.

En un segundo taller desarrollado de forma individual se propusieron tres problemas expresados en lenguaje natural, con el objetivo de que los estudiantes realizarán la interpretación, lo resolvieran usando la recta numérica y verificarán el resultado mediante la suma y resta con igual denominador. Uno de los problemas fue: Soledad tejió un poncho para el invierno, usó un total de veinticuatro octavos, de lana café, roja y amarilla. Primero usó once octavos de lana café, y luego cinco octavos de lana amarilla; si el resto de lana era roja, ¿Cuánto de lana roja uso Soledad?

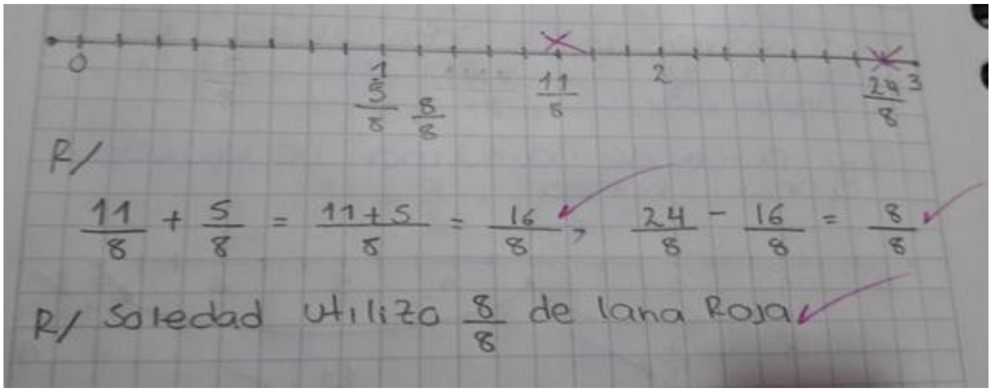

Figura 61. Solución de E_8 a un problema planteado en clase.

Fuente: Archivo personal

E_8 dibujó la recta numérica, tomó una unidad de medida y la dividió en 8 segmentos iguales, luego se desplazó hacia la derecha de cero tomando dos unidades completas y 7 partes de la tercera, en este punto se desplazó hacia la izquierda 11 unidades y ubicó $\frac{11}{8}$. De forma análoga, se desplazó 5 unidades a la izquierda de $\frac{11}{8}$ y ubicó $\frac{5}{8}$ (ver figura 61).

Después realizó la suma entre las fracciones $\frac{11}{8}+\frac{5}{8}=\frac{16}{8}$ y restó $\frac{24}{8}-\frac{16}{8}=\frac{8}{8}$.

De lo anterior, hubo congruencia de unidades significantes: inicialmente cuando E_8 tomó la unidad de medida en la recta numérica y la dividió en 8 segmentos iguales, conservando el significado del denominador en su interpretación como parte todo y finalmente, cuando realizó las operaciones tanto de suma como de resta y obtuvo números de la forma $\frac{a}{b}$ que cumplían la condición de $b \neq 0$, además, al operar reconoció la fracción $\frac{a}{b}$ como parte de un todo. Por el contrario, no hay congruencia de unidad significante respecto al numerador, ya que no hay relación entre las partes que se deben tomar y su ubicación en la recta numérica.

Durante el desarrollo de este problema, se evidencia el cumplimiento del objetivo de la reflexión en la docencia puesto que, las actividades cognitivas identificadas fueron: en primer lugar, conversión cuando E_8 pasó del lenguaje natural a la representación fraccionaria, cambiando el registro de representación y conservando el objeto matemático; segundo lugar, conversión al ubicar los números en la recta numérica, es decir, pasando del registro de representación fraccionaria al registro de representación en la recta; y en tercer lugar, tratamiento cuando realizó operaciones de suma y resta obteniendo un resultado de la forma $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$.

Respecto a una actividad en clase, se pidió a los estudiantes realizar operaciones combinadas de suma, resta, multiplicación y división, los ejercicios propuestos fueron los siguientes:

a. $\left[\left(\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{5}{8}\right)\right]\times\left(\frac{12}{9}\right)$

b. $\left(\frac{20}{5}\right)\div\left[\left(\frac{7}{8}\right)-\left(\frac{2}{6}\right)\right]$

E_{24} resolvió los ejercicios así (ver imagen 62):

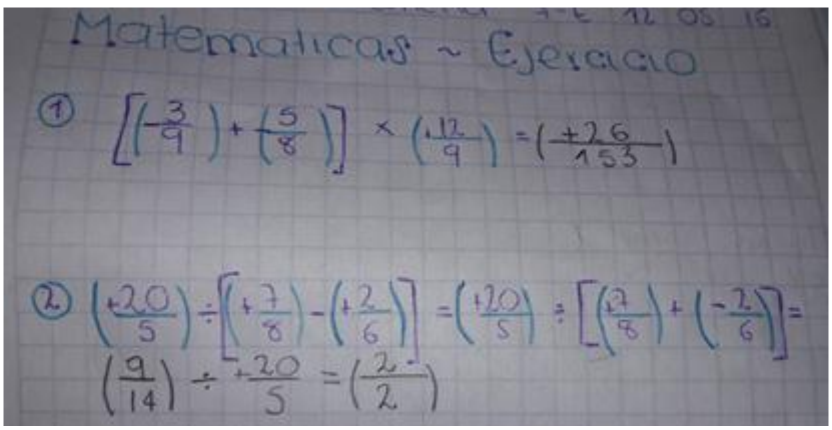

Figura 62. Operaciones combinadas realizadas por E_{24}.
Fuente: Archivo personal

Para el ejercicio $\left[\left(\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{5}{8}\right)\right]\times\left(\frac{12}{9}\right)$, dice que el resultado es $\frac{26}{153}$.

Para el ejercicio $\left(\frac{20}{5}\right)\div\left[\left(\frac{7}{8}\right)-\left(\frac{2}{6}\right)\right]$, realiza primero la resta obteniendo un resultado de $\left(\frac{9}{14}\right)$, y ese resultado lo divide entre $\left(\frac{20}{5}\right)$. Finalmente, el resultado de toda la operación es $\left(\frac{2}{2}\right)$.

En el desarrollo de las operaciones combinadas, no hay congruencia de unidades significantes, ya que al operar no se tiene en cuenta la interpretación del numerador y el denominador como parte todo.

Cumpliendo con el objetivo de la reflexión en la docencia, la actividad cognitiva que se presenta desde la perspectiva semiótica es el tratamiento, ya que E_{24} conservó el sistema de representación numérica, aunque en los resultados obtenidos no se haga evidente las operaciones matemáticas que realizó.

Capítulo 4

Reflexión en la práctica pedagógica y recomendaciones

4.1 Reflexión en la práctica pedagógica

- El acompañamiento del profesor titular durante la docencia directa fue pertinente, ya que sus permanentes observaciones después de cada clase, me permitieron ir perfeccionando poco a poco mi primer ejercicio de docencia directa en condiciones reales.

- La implementación de la estrategia “Bonificaciones” fue acertada, puesto que los estudiantes se interesaban por desarrollar los ejercicios propuestos en las clases, esto contribuía en puntos adicionales a su nota final. Además, ayudaba a mejorar su agilidad mental y aumentaba el interés por atender a cada explicación.

- La metodología de recoger los cuadernos al final de cada clase para calificar los ejercicios desarrollados por los estudiantes, fue oportuna ya que contribuyó a que estos se interesaran por aprender el tema y trabajar en cada clase. Además, sirvió como medio para identificar las dificultades que se presentaban en cuanto a un tema y buscar las estrategias para subsanarlas.

- La actividad cognitiva de formulación fue la más difícil de identificar, puesto que en algunos registros los estudiantes no dejaban marcas perceptibles que permitieran analizar cómo se plasmó, construyó o representó un objeto matemático concreto. Esto se puede notar, en los análisis de registros, cuando PE1 y PE4 se les pidió identificar que números de la forma $\frac{a}{b}$ pertenecen al conjunto de los números racionales.

- La conversión de las representaciones semióticas es una actividad cognitiva que un grupo de estudiantes no logra desarrollar, puesto que, al transitar entre registros el objeto matemático de partida no coincidía con el objeto matemático de llegada, es decir, no hubo reversibilidad entre representaciones semióticas. Un ejemplo de lo anterior, se observa específicamente cuando E_8 pasa del registro numérico al registro de representación en la recta numérica, debido a que, del número fraccionario como objeto matemático de partida se llega a un número natural como objeto matemático de llegada.

- A la hora de pasar del registro numérico al pictórico, los estudiantes privilegiaron el uso de formas rectangulares o cuadradas, puesto que, para ellos era más fácil realizar una correspondencia que les permitiera dividir con mayor exactitud las partes del denominador. Cabe mencionar, que los estudiantes presentaron mayor dificultad al tratar de representar fracciones impropias.

- En los registros analizados se observó que la actividad cognitiva identificada con mayor frecuencia fue la de tratamiento, debido a que, los estudiantes realizaron operaciones básicas junto con la potenciación y la radicación. Cabe aclarar, que esta actividad cognitiva requiere de la aplicación de ciertas reglas matemáticas que se usan al interior del registro de representación y que no alteran su forma numérica.

- El uso de distintas representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, permite que, durante los procesos de enseñanza y aprendizaje los estudiantes transiten de un registro de representación a otro y puedan tener una mejor aprehensión conceptual de los objetos representados.

En consecuencia, el conjunto de conclusiones planteadas anteriormente permite afirmar que se ha cumplido el objetivo de la investigación, dado que, durante el análisis de los registros se identificaron actividades cognitivas de formulación, tratamiento y conversión.

4.2 Recomendaciones

- Proponer una reflexión a los estudiantes de licenciatura en matemáticas, acerca de la comprensión de los diferentes significados del número racional desde la perspectiva Duvalista, es decir, no sólo abordar el significado fraccionario, sino también el decimal, la fracción como operador y la fracción como cociente.

- Es importante que, en el rol como docentes se haga uso de las distintas representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, realizando traducciones ya sea en un mismo registro (tratamiento) o de un registro a otro (conversión).

Bibliografía

Aponte, Jhon A. (2016). *Un estudio de la relación de divisibilidad en subconjuntos de Z.* (Tesis de pregrado). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/12016/1/Gomez2016Un.pdf

Bauman, Zygmund (2000) *Modernidad líquida.* Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Editorial Alianza Editorial

Collette, Jean P. (1985) *Historia de las Matemáticas*. 1ª edición, Madrid: Editorial Siglo XXI de España Editores

Corrosa, N. (2006) *El trabajo social en el área educativa. Desafíos y perspectivas*. Buenos Aires. Editorial Espacio

D´Amore. Bruno. (2012). *El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: la posición "ingenua" en una teoría "realista" vs. el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática"*. Recuperado de http://welles.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/789%20testo%20libro%20enfasis%20n.pdf

D´Amore. Bruno. (2012). *El debate sobre conceptos y objetos matemáticos*. Recuperado de http://welles.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/.pdf

D´Amore. Bruno. (2016) *Una reflexión sobre los textos de Raymond Duval aquí presentados.* Recuperado de https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2016/07/893-Presentaz-Duval-en-espanol.pdf

Dávila R. Guillermo. (2003) El desarrollo del Algebra moderna. *Apuntes de la Historia de la matemática, Número (1) Volumen (2*), 27-58. Recuperado de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-1-4-algebra.pdf

Díaz, V. (2006). *Formación docente, práctica pedagógica y saber pedagógico*. Laurus. Revista de Educación, 12, 88-103. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/761/76109906.pdf

Duval, R. (1999) *Semiosis y pensamiento humano.* Cali: editorial Universidad del Valle

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en matemática educativa II, (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fandiño, Martha. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Editorial Magisterio

Flores, Luis Francisco. (2008) *Historia y didáctica de los numero racionales e irracionales*. España: Ittakus edtores

Kline, Morris. (1981). *El fracaso de la matemática moderna.* Madrid: Editorial Siglo XXI.

Konic, P y Godino, J. (2010). *Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto*. Revista de didáctica de las matemáticas. España.

Mankiewicz, R. (2005): Historia de las matemáticas. Madrid. Paidós.

Moreno A, Hernández. (2017). *Teorías de registros de representaciones semiótica*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/315814323_teoria_de_registros_de_representaciones_semiotica

López, Jorge M. (2013) *Las fracciones y los números racionales.* Universidd de Puerto Rico. Recuperado de file:///C:/Users/User/Downloads/Losnmerosracionales.pdf

Palomino V.R. (s.f.). *Matemáticas. Plan de área I.E.T.I Popayán*. Recuperado de http://rodrivelp.blogspot.com/p/plan-de-area.html

Stewart, Ian. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* Recuperado de:http://www.librosmaravillosos.com/historiadelasmatematicasenlosultimos10000anos/pdf/Historia%20de%20las%20matematicas%20-%20Ian%20Stewart.pdf

Tozany, Paola. (2001) E*l uso de manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales y cuadráticas, y de sistemas de ecuaciones lineales en la escuela secundaria*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27, México.

Valdez, Verónica. (2008) *Los conjuntos numéricos a través de la historia.* Buenos Aires, Editorial Taxis.