# Estrategias en la Solución de Ecuaciones Lineales de Primer Grado con una Incógnita

Gilber Arbey Chocué Collazos

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación

Licenciatura en Matemáticas

Popayán

2019

# Estrategias en la Solución de Ecuaciones Lineales de Primer Grado con una Incógnita

Trabajo de grado para optar el título de Licenciado en Matemáticas

Gilber Arbey Chocué Collazos

**Director**

Mg. Eruin Alonso Sánchez Ordoñez

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación
Licenciatura en Matemáticas

Popayán
2019

## Tabla de contenido

## RESUMEN

Este trabajo presenta resultados de actividades que fueron propuestas a quince estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Los Comuneros, sede José Antonio Galán Nº 1 sobre la modelación y resolución de ecuaciones de primer orden con una incógnita. Entre los datos obtenidos se destacan algunas estrategias que los estudiantes aplicaron para resolver cada situación problema, así mismo, un análisis de los datos registrados donde de evidenciaron errores, obstáculos didáctico, obstáculos epistemológicos, además de algunas dificultades con las operaciones entre números enteros, aplicación incorrecta de la propiedad distributiva respecto de la suma, comprensión lectora, entre otros.

**Palabras clave:** Ecuación lineal de primer grado con una incógnita, modelo histórico cultural, obstáculos, dificultades, error.

# 1. INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las matemáticas es un reto que el educador matemático se propone cuando enseña las matemáticas, en particular cuando enseña los objetos matemáticos del algebra para la resolución de ecuaciones de primer orden con una incógnita, ya que este es el inicio de una nueva temática donde se manipulan variables, ecuaciones, entre otros. En este sentido, es interesante reflexionar acerca de los métodos que aplican los estudiantes cuando se enfrentan a una situación problema relacionada con la resolución de ecuaciones lineales de primer grado, así mismo, los métodos que el docente enseña cuando se encuentra en un contexto educativo real.

De esta manera, el presente escrito pretende revisar las estrategias que los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Los Comuneros, sede José Antonio Galán Nº 1 aplicaron para resolver ecuaciones lineales usando modelización algebraica, por lo que fue necesario determinar los saberes previos de cada uno de ellos acerca de lo objetos algebraicos y aritméticos, pero además fue necesario reconocer los obstáculos didácticos y epistemológicos para lograr alcanzar los objetivos propuestos en la experiencia pedagógica.

Para alcanzar lo anterior fue necesario abordar este trabajo desde **cinco momentos:**

El **primer momento** considera la práctica desarrollada, en él se menciona el modelo que fundamenta la propuesta pedagógica que adopta la Institución Educativa y además las relaciones e interacciones generadas entre el practicante-estudiante.

El **segundo momento** aborda aspectos relevantes en la estructura del proyecto pedagógico como son: planteamiento del problema, objetivos y finalmente la justificación de este proyecto. Es aquí donde se encuentran los elementos que dan sentido a este trabajo pedagógico y posterior ejecución. En el **tercer momento** se encuentran los elementos del marco teórico, es decir todos los objetos matemáticos y definiciones acerca de la temática en discusión, así como de la educación matemática. En el **cuarto momento** se lleva a cabo la metodología de la investigación donde se describen las fases y ejecución de la misma, consideradas en el proyecto con los estudiantes del grado noveno, además del método. Así mismo, en este momento se realiza un análisis de los resultados que se obtuvieron de las actividades. Finalmente, en el **quinto**

**momento** se consideran las conclusiones y recomendaciones acerca de este proyecto pedagógico.

## 2. REFLEXIÓN PEDAGÓGICA DE LA PRÁCTICA DESARROLLADA EN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LOS COMUNEROS, SEDE: JOSÉ ANTONIO GALÁN Nº 1

La sede José Antonio Galán Nº.1 de la Institución Educativa Los Comuneros fue el escenario de aprendizaje donde se llevó a cabo la intervención como docente del grado noveno, fue sin lugar a dudas una experiencia maravillosa y gratificante compartir con la "*familia Galán"*, desde los que cuidan en la portería, los que preparan los alimentos, los estudiantes, docentes y el coordinador de la sede. La calidad humana de esta familia es increíble pues todos fueron muy cordiales y respetuosos durante el tiempo que duró la experiencia.

La institución educativa se guía bajo una propuesta pedagógica fundamentada en el modelo pedagógico *histórico cultural* de Lev Vygotsky, el cual concibe la pedagogía y la educación como motor del desarrollo socio cultural desde el contexto local, es decir, la prioridad de la institución son los procesos de construcción de conocimiento de los estudiantes a partir de la convivencia y la interacción con los demás, así mismo brindarle condiciones dignas de estudio a toda la población estudiantil.

Durante la práctica pedagógica se logró evidenciar, cómo la propuesta pedagógica implementada en la institución ha traído consigo resultados positivos, dado que, dentro de las instalaciones se vive un ambiente bastante agradable, de esta manera, se fomenta la convivencia no solo dentro de la institución, sino también en su contexto, es decir, en la comuna seis de la capital Caucana. Es claro que la institución educativa y en particular la sede José Antonio Galán Nº 1 tiene un compromiso social con la comuna seis y en general con el país, pues la institución incluye jóvenes que quieren y ven una salida en la educación, jóvenes que viven y están rodeados por diferentes problemáticas internas pero que finalmente son jóvenes con ganas de aprender y mejorar la calidad de vida de su barrio, comuna y por ende la ciudad de Popayán.

Así mismo, durante la experiencia pedagógica la interacción entre **estudiante-maestro** en el aula de clases de la sede Galán se construyó a partir de la "base", es decir desde la convivencia, la disciplina y la responsabilidad. Tal como lo plantea la misión de la institución en su libro “Educación para Nutrir la Vida”. Formar personas fortaleciendo su pensamiento, para facilitarles el acceso al conocimiento de la ciencia, la tecnología y el arte, de tal manera que participe en la generación de oportunidades para vivir mejor como individuos y como sociedad (Gaviria, Velasco, Castaño, Chávez, Cerón, Guevara, 2007 P. 42).

De esta manera, la relación **estudiante–maestro** se empezó a tejer desde el primer momento en que me dirigí a los estudiantes del grado noveno de la sede Galán dado que el primer día establecimos el contrato didáctico. Esta sesión me sirvió para tener un acercamiento con los estudiantes, conocer sus nombres y de alguna manera ser objeto de motivación para ellos, dándoles a conocer mi formación académica y también por el hecho de ser oriundo de un resguardo indígena.

Durante mi experiencia en la institución los estudiantes tuvieron un trato muy respetuoso hacia mí y jamás se presentó una situación fuera de lo normal al interior del aula, en lo que me corresponde jamás le falté el respeto a alguno de mis alumnos, por el contrario, siempre me puse a su disposición para escucharlos y también para inculcarles la importancia de afrontar con responsabilidad su etapa de formación en la Institución Educativa. Actualmente existen muchos medios de distracción para un adolescente y eso genera una posible falta de interés hacia el estudio, sin embargo, tener una buena interacción con los estudiantes permitió que las clases fueran participativas y siempre se generó un buen ambiente al interior del aula.

Durante el proceso de aprendizaje se construyó una comunicación interesante porque la metodología establecida generalmente involucró la participación del 90% de los estudiantes en diferentes actividades, en algunas ocasiones salieron voluntariamente al tablero para afrontar un ejercicio propuesto. Así mismo, junto con el docente Hermes Palomino, titular en la materia, resolvimos diferentes talleres y actividades para fortalecer tres de los cinco pensamientos considerados en el documento Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas: el pensamiento numérico, el pensamiento espacial y el pensamiento variacional (Ministerio de Educación Nacional, 2006, P. 56). Así mismo, se discutieron preguntas en el aula como: ¿Cuál es el perímetro de una figura plana? ¿Cuál es el concepto del inverso multiplicativo y aditivo de un número entero y racional? ¿Qué es una variable? ¿Cuál es el consecutivo de un número? Etc.

Lo anterior permitió una amplia interacción con los alumnos pues estuvieron en constante comunicación conmigo para resolver cualquier inquietud acerca de las actividades.

Por otra parte, fue enriquecedor compartir en el aula con el docente Hermes Ángel, sin duda fue de gran apoyo para construir mi proceso de aprendizaje y encaminarme así, hacia las sendas de un verdadero educador matemático. Él realizó un acompañamiento permanente al proceso de la práctica pedagógica, de esta manera entablamos una buena comunicación y relación para trabajar en equipo, siempre fue muy atento ante cualquier inquietud y respetuoso con la metodología de trabajo que se llevó a cabo durante la experiencia.

Finalmente, es importante destacar la disciplina[1] en la gran mayoría del grupo escolar, pues dentro del aula se generó un ambiente de respeto mutuo entre **estudiante-estudiante**, además, pude notar la estrecha relación y el compañerismo de algunos estudiantes pues en el momento de abordar las actividades siempre había tres o cuatro estudiantes que conceptualizaban rápido y luego le explicaban a sus compañeros. En general, se logra percibir una buena relación entre los demás estudiantes de la sede Galán como consecuencia del modelo pedagógico *histórico cultural* implementado en la Institución Educativa Los Comuneros, y que pone como eje central la construcción del conocimiento a partir de la interacción con el otro sujeto. La responsabilidad sin duda, es otro valor importante en el aprendizaje de los alumnos, pues la gran mayoría entregó los talleres y presentó las evaluaciones en las fechas establecidas por el contrato didáctico[2]. En Comuneros se le llama acuerdos de convivencia (Gaviria y otros, 2007, p. 61).

Cada estudiante vive una realidad diferente, quizás algunos por el contexto viven bajo condiciones más vulnerables que otros, sin embargo, nuestro oficio, el oficio de ser maestro debe seguirle contribuyendo a la comuna seis a continuar formando personas que tienen toda la capacidad de pensar y actuar racionalmente generando un buen ambiente y una sana convivencia en el sector.

---

[1] El libro de "***Educación para nutrir la vida***" escribe al respecto: "la disciplina es sinónimo de responsabilidad", por lo tanto es una acto de autonomía ejercido por el individuo capaz de tomar sus propias decisiones, sin que se le esté controlando desde su exterior (Gaviria y otros, P.52)

[2] Theory of didactical situations in mathematics. (Brousseau, 1986, p.25)

## 3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La baja calidad de la educación colombiana es una realidad que hoy no podemos negar, en comparación con otros países latinoamericanos, nuestro país se encuentra entre los más destacados por su bajo nivel educativo. Barrera (2014) menciona al respecto: "En materia de calidad, las evaluaciones nacionales e internacionales muestran que, aunque ha habido algunas mejoras, los resultados académicos de los estudiantes son bajos en general y se distribuyen de manera inequitativa entre grupos sociales y entre las poblaciones urbana y rural" (p. 33). Actores políticos han causado un detrimento de nuestro sistema educativo a lo largo de todos estos años, prueba de ello son las pruebas PISA que nos sitúan en el puesto 57 así como lo menciona la revista colombiana *el país* (2016): Hay que llegar hasta el puesto 44 para encontrar el primer país de esa región: Chile, con 447 puntos en ciencias, 46 puntos menos que el promedio de la OCDE. Le sigue Uruguay (47º, 435), Costa Rica (55º, 420), Colombia (57º, 416). (p.3)

Un factor que incide en la problemática anterior es que, la baja calidad de la educación también está arraigada al nuevo estatuto docente (decreto 12-78 de 2012), el cual permite que profesionales no licenciados ejerzan la labor de docentes, igualmente la existencia de licenciados en matemáticas que no tienen vocación para enseñar y comunicar las matemáticas. Sin embargo, el reto de los educadores matemáticos es proponer estrategias de aprendizaje para la construcción de un verdadero proceso de enseñanza significativo de los objetos matemáticos, ya que el docente con las características anteriores pierde precisión del significado de los objetos matemáticos cuando los enseña, eso conlleva al origen de errores, dificultades, obstáculos didácticos y epistemológicos.

Por otra parte, la enseñanza del algebra, y en particular la enseñanza de la resolución de ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita ha generado dificultades en el aprendizaje de los estudiantes ya que muchas veces los alumnos no comprenden el significado de incógnita, ecuación, etc. Por tanto, el alumno empieza a considerar las ecuaciones y en general el álgebra como una manipulación de símbolos que no representa nada para ellos. Sin embargo, es claro que la modelización matemática contribuye en resolver problemas matemáticos y problemas de la vida cotidiana gracias a la solución de ecuaciones lineales.

Godino (2004) menciona que: La modelización algebraica de los problemas proporciona nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas. Permite además reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución. (p. 388).

En particular, las dificultades que presentaron los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Los Comuneros, sede José Antonio Galán Nº 1, fueron entre otras el manejo de las operaciones algebraicas, el cual implica el conocimiento de las operaciones y propiedades de los números enteros y números racionales, la operación de algún número con su inverso aditivo o inverso multiplicativo, aplicar la propiedad distributiva de un numero respecto a la suma de dos racionales, operar con objetos de la misma naturaleza ($4n + n = 5n$), entre otros. Los elementos mencionados anteriormente fueron "problemas" que el practicante pudo determinar en la intervención dentro del aula.

Durante el proceso de despejar la incógnita tradicionalmente el profesor le dice al alumno "el que está sumando pasa al otro lado de la igualdad a restar", "el que está dividiendo pasa al otro lado de la igualdad a multiplicar" y por eso, este último no comprende los procesos matemáticos que allí se realizan, como por ejemplo; operar con inversos aditivos o inversos multiplicativos en una igualdad para despejar la incógnita, aplicar las propiedades de los números (Conjunto de los números enteros), entre otros.

Por eso es conveniente iniciar en la Institución Educativa Los comuneros, sede José Antonio Galán Nº 1 y en particular en el área de las matemáticas, un proceso de enseñanza que se fundamente en la teoría de situaciones didácticas a partir de actividades que desarrollen el pensamiento variacional y, además, reflexionar sobre la construcción de sus procesos de aprendizaje. De esta manera, se plantea la siguiente pregunta investigativa. <u>¿Qué estrategias implementan los estudiantes del grado noveno de la Institución Los Comuneros, sede José Antonio Galán Nº 1 en la resolución de ecuaciones de primer orden con una incógnita?</u>

## 4. OBJETIVOS

### 4.1 OBJETIVO GENERAL

Determinar las estrategias que utilizan los estudiantes del grado noveno de la sede Galán Nº 1 para resolver ecuaciones de primer orden con una incógnita presentes en una secuencia didáctica.

### 4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar las dificultades que presentan los estudiantes de la sede Galán No 1 en la solución de ecuaciones de primer grado.

- Determinar los saberes previos de los estudiantes antes de abordar la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

- Reconocer los obstáculos didácticos y epistemológicos de los alumnos durante la secuencia didáctica.

## 5. JUSTIFICACIÓN

La enseñanza del álgebra deja en evidencia las dificultades y los obstáculos (didácticos y epistemológicos) que emergen en el aprendizaje de este campo. La manipulación de variables y las operaciones algebraicas generan dificultades en el aprendizaje del alumno. Malisani (1999) comenta al respecto:

En los últimos quince años se han realizado numerosas investigaciones sobre los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del álgebra; muchos trabajos tratan temas relativos a la detección y a la clasificación de errores y, en general, a las dificultades y obstáculos que encuentran los alumnos que comienzan a estudiar el álgebra. (P.2)

Podemos notar que en la actualidad se presentan fenómenos[3] didácticos en las aulas de muchas instituciones, de esta manera, el trabajo busca brindar apoyo a los estudiantes del grado noveno de la sede José Antonio Galán No 1 a partir de la resolución de ecuaciones de primer grado, además puede ser una herramienta didáctica para futuros maestros en formación.

Este trabajo hace hincapié en el diseño y la resolución de ecuaciones de primer orden con una incógnita, así mismo, reconoce los obstáculos (didácticos y epistemológicos) que surgen durante el desarrollo de las actividades, además pretende aproximarse a una propuesta metodológica para ahondar en el aprendizaje de las ecuaciones de primer orden con una incógnita, de igual manera, pretende desarrollar el pensamiento[4] variacional.

[3] Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas (Brousseau, 1986, p.25)
[4] Estándares Básicos de Competencias (2006, p.66)

## 6. MARCO TEÓRICO

En seguida se presentan algunos elementos de la disciplina de la educación matemática, así como objetos matemáticos que fueron importantes para el desarrollo de este trabajo.

### 6.1 Disciplina Matemática

A continuación, se presentarán algunas definiciones de objetos matemáticos que se abordaron en este trabajo.

#### 6.1.2 Ecuación

En el grado octavo y noveno una de las prioridades de los educadores matemáticos es el desarrollo del pensamiento variacional. En particular, el grado noveno hace hincapié en la construcción de actividades que favorezcan un aprendizaje significativo acerca de las ecuaciones. Al respecto Sáenz (2014) menciona: Una ecuación es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas lados o miembros, y están separadas por el signo igual (=). Los lados o miembros a su vez están formados por términos dependientes que son combinaciones de constantes e incógnitas, y términos independientes que son solo constantes. (p.44)

Por ejemplo: $x + 24(x + 1) + 30 = x$

#### 6.1.3 Ecuación Lineal

Las ecuaciones lineales son combinaciones lineales de números reales (o imaginarios) y objetos llamados "*variables*" igualados a un número real (o imaginario). Lay (2001) menciona que: Una ecuación lineal en las variables $x_1, x_2, \ldots., x_n$ es una ecuación que puede escribirse de la forma $a_1x_1,\ a_2x_2, \ldots., a_nx_n = b$, donde $b$ y los coeficientes $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ son reales o complejos por lo general conocidos. El subíndice n puede ser cualquier número entero positivo. (p. 3)

Por ejemplo: $\pi x + 45y = 9.7$

### 6.1.4 Ecuación lineal de primer grado con una incógnita

Las ecuaciones lineales permiten solucionar problemas que se presentan en la cotidianidad, modelar situaciones de la vida real a partir de “llevar” proposiciones a un lenguaje algebraico y posteriormente solucionarlo. Godino (2004) afirma que: En la secundaria se suelen definir las ecuaciones de primer grado con una incógnita como una igualdad en la que hay un número desconocido, normalmente representado por la letra x, llamada incógnita, que no está elevado al cuadrado, ni al cubo, etc. Por ejemplo: $2x + 6 = 8$ . Una expresión del tipo $2x^2 + 3 = 2$ no es una ecuación de primer grado con una incógnita porque la incógnita está elevada al cuadrado, mientras que una ecuación del tipo $2x + 4 + y = 3$ tampoco lo es porque la expresión tiene dos incógnitas: la x y la y (p.398).

### 6.1.5 Solución de ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita

Los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje relacionados con la solución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita han causado muchas dificultades para su comprensión, Godino (2004) propone un método para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita a partir de realizar unas transformaciones hasta llegar a una ecuación equivalente de la forma $Ax = b$.

> *Ecuación inicial:* $4x - 13 + 2x = 3x - 4$
>
> Trasponemos, con el signo cambiado, los términos que tienen $\boldsymbol{x}$ a un lado $\boldsymbol{y}$ los que no tienen al otro: $4x + 2x - 3x = -4 + 13$
>
> Efectuamos las operaciones indicadas: $3x = 9$
>
> Despejamos la incógnita: $x = 9/3$
>
> La solución es: $x = 3$ (p. 398).

Cabe resaltar que, en problemas de aplicación, es decir, en problemas donde se debe modelar o plantear una proposición, el estudiante debe interpretar el enunciado a partir de una buena comprensión lectora y posteriormente transformar el enunciado en una expresión algebraica para solucionar el problema, sin embargo, también se puede solucionar el problema operando con los inversos (aditivos y multiplicativos) a ambos lados para despejar la incógnita.

### 6.1.6 Variables

Algunas de las dificultades que se presentan en la enseñanza y en el aprendizaje de las ecuaciones están basadas en la comprensión de las "*variables*", las que a su vez están relacionadas con la "*incógnita*" y muy comúnmente genera ambigüedades didácticas en el estudiante. Trigueros y Ursini (1999) comentan al respecto: El concepto de variable es multifacético, e incluye como un todo, distintos aspectos. Los aspectos considerados como más relevantes para un manejo competente del álgebra elemental y que han sido destacados en otras investigaciones son: el uso de variable como incógnita, como número general y en una relación funcional. La variable como incógnita requiere que el alumno pueda reconocer y determinar un valor desconocido en un problema. Así mismo, la variable como número general implica que el estudiante reconozca patrones y reglas en secuencias numéricas. Por otra parte, la variable como relación funcional establece la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquier tipo de representación (p. 28).

Por otra parte, Godino (2004) en su proyecto denominado "Matemáticas *para maestros*" afirma que: Una variable es un símbolo (habitualmente una letra) que puede ponerse en lugar de cualquier elemento de un conjunto, sean números u otros objetos (p. 395).

### 6.1.7 Lenguaje algebraico

Muchas culturas fueron participes de la construcción de las matemáticas a través de los siglos. En particular, matemáticos como René Descartes, François Viète, entre otros, ayudaron a sintetizar la geometría con el álgebra dando pie a construir un nuevo lenguaje. El lenguaje algebraico. Sáenz (2014) comenta al respecto que:

El lenguaje algebraico es una generalización de la aritmética, este nos permite expresar relaciones entre variables de una manera general. Para ello, utiliza letras, números y signos de operaciones; a fin de representar una situación planteada. Estas generalizaciones se hacen asignando letras a algunas expresiones variables o desconocidas. Por ejemplo: el enunciado "el triple de un número", puede ser representado por 3x; y la expresión "un número aumentado en cinco", puede ser simbolizado por $y + 5$. (p. 47)

### 6.1.8 Igualdad

Una igualdad es una equivalencia de dos expresiones o cantidades. Al respecto Godino (2004) afirma que: El signo "=" (igual) indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo, primer miembro de la igualdad, y lo que se encuentra a la derecha de este signo, llamado el segundo miembro de la igualdad, son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo (P. 397).

## 6.2 Disciplina Educación Matemática

En este apartado se presentarán aspectos importantes acerca de la educación matemática, así mismo, algunos elementos de la teoría de las situaciones didácticas del investigador francés Guy Brousseau.

### 6.2.1 Contrato didáctico

El contrato didáctico es un escrito donde se establecen las “reglas” dentro del triángulo[5] didáctico para llevar a cabo una buena comunicación y crear mejores condiciones de aprendizaje. Al respecto Brousseau (1986) afirma que: El contrato didáctico es la regla del juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro para ponerla en escena. Pero la evolución de la situación modifica el contrato que permite entonces la obtención de situaciones nuevas. De la misma manera, el conocimiento es lo que se expresa por la regla de la situación a-didáctica y por las estrategias. La evolución de esas estrategias requiere producciones de conocimientos que permitan a su vez la concepción de nuevas situaciones a-didácticas. (p.12)

### 6.2.3 Situación didáctica

La situación didáctica es un conjunto de relaciones entre los tres actores de la didáctica matemática (maestro - saber - alumno) en un ambiente adecuado preparado por el maestro para que el estudiante se enfrente a algún problema y pueda construir su propio conocimiento. Brousseau (1986) afirma que: En la concepción más general de la enseñanza, el saber es una asociación entre las buenas preguntas y las buenas respuestas. El enseñante plantea un problema

[5] Tomado de: un acercamiento analítico al “triángulo didáctico” (Brousseau y Fandiño, 2002).

que debe saber el alumno: si el alumno responde, muestra con ello que sabe, si no, se manifiesta una necesidad de saber que requiere una información, una enseñanza. A priori, todo método que permita memorizar las asociaciones favorables es aceptable. (p.10)

### 6.2.4 Situación a-didáctica

Es el proceso donde solo está presente el docente, el medio y un saber. Al respecto Brousseau (1986) afirma que: El alumno no distingue de golpe, en la situación que vive, lo que es de esencia a-didáctico y lo que es de origen didáctico. La situación a-didáctica final de la referencia, la que caracteriza el conocimiento, puede estudiarse de manera teórica, pero, en la situación didáctica, tanto para el maestro como para el alumno hay una especie de ideal hacia el que se trata de converger, el enseñante debe incesantemente ayudar al alumno a despojar lo más posible la situación de todos sus artificios didácticos para dejarle el conocimiento personal y objetivo. (p.12)

### 6.2.5 Obstáculo didáctico

Este obstáculo acuñado por Brousseau hace referencia a los métodos de enseñanza, es decir, menciona que un obstáculo es un conocimiento. Al respecto Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallencillos (2014) comentan: resultan de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza. Por ejemplo, la introducción de un nuevo simbolismo tal como: $(\sum xi)/n$ (p. 3)

### 6.2.6 Obstáculo epistemológico

Este obstáculo hace hincapié a los saberes que se adaptan mal y que el estudiante se resiste a cambiar. Al respecto Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallencillos (2014) comenta: los obstáculos epistemológicos están relacionados intrínsecamente con el propio concepto y conteniendo parte del significado del mismo. (p. 3)

### 6.2.8 Error

Cuando el estudiante proporciona una respuesta que no se considera válida o “verdadera”, se le conoce como error. Al respecto Del puerto y Minnaard (2004) menciona: El análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático; por otro lado, constituye una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos, imprescindible a la hora de realimentar procesos de enseñanza-aprendizaje con el fin de mejorar los resultados. (p. 4)

## 7. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Este apartado hace referencia a la metodología que se utilizó en la intervención del proyecto durante la experiencia con los estudiantes del grado noveno de la institución educativa Los comuneros sede José Antonio Galán Nº 1.

La resolución de problemas y la implementación de diferentes situaciones problema contribuyeron en la aproximación del aprendizaje significativo por parte de los alumnos. A partir de las actividades propuestas se buscaba que el estudiante participara haciendo uso de la lectura de los enunciados y seguidamente transformar las proposiciones en expresiones algebraicas, finalmente resolver la ecuación lineal de primer grado con una incógnita. Así mismo, con la propuesta pedagógica fundamentada en el modelo pedagógico histórico cultural es importante que los estudiantes sean el centro de atención porque con la participación de ellos se establece una buena comunicación e interacción mutua entre alumno, profesor y el saber.

### 7.1 Población de la investigación

La experiencia pedagógica se llevó a cabo con los 15 estudiantes del grado noveno de la institución educativa Los comuneros, sede José Antonio Galán Nº 1. El 90% de los alumnos vive en la comuna 6 de la ciudad de Popayán, y el diez por ciento restantes proviene de municipios y comunas vecinas.

### 7.2 Investigación de intervención

La experiencia de la práctica pedagógica en la institución educativa los Comuneros sede: José Antonio Galán Nº 1, fue el escenario para construir pilares que permitan aproximarse a un verdadero educador matemático, pero sobre todo el lugar donde se ejecutó la propuesta pedagógica con la población mencionada. A partir de la experiencia pedagógica, se logró determinar las dificultades y los obstáculos (didácticos y epistemológicos) que presentaba cada uno de ellos. Gran parte de estas dificultades eran por falta de conocimiento acerca de las operaciones y propiedades de los números enteros, o también porque el estudiante no se acordaba de manipular las expresiones algebraicas, con lo cual, fue pertinente hacer "alto en el camino" para resolver las dudas y así poder avanzar hacia los objetivos, ya que toma más fuerza el carácter de educador matemático que el de investigador.

Es por eso que el autor ve la necesidad de realizar una investigación en el aula desde la práctica profesional con el fin de enriquecer su oficio como futuro maestro, pero además para reflexionar acerca del *que hacer* docente. Ponte (2011) menciona que: La investigación, pensada como la forma por excelencia de construcción de conocimiento, cuando está orientada a los problemas de la práctica profesional, puede ayudar a identificar estrategias de resolución de estos problemas y, a su vez, asumir un efecto formativo de gran alcance sobre los respectivos participantes. (P.12)

Sin embargo, la investigación no solo puede quedarse en la inmersión y la observación dentro del aula y el contexto académico. El educador matemático debe construir una relación con cada estudiante para intervenir adecuadamente en cada situación que él lo necesite, es decir, debe innovar las estrategias de enseñanza y aprendizaje para que estas contribuyan a contrarrestar las falencias y dificultades que presentan los alumnos. Esta investigación con los puntos de vista anteriores es denominada investigación de intervención y fue adoptada en este trabajo.

### 7.3 Método

El método que se empleó para este trabajo investigativo está basado en el enfoque cualitativo, a partir de las observaciones dentro del aula y del análisis de datos. Sampieri (2004) comenta al respecto: El enfoque cualitativo, por lo común, se utiliza primero para descubrir y refinar preguntas de investigación. A veces, pero no necesariamente, se prueban hipótesis (Grinnell, 1997). Con frecuencia se basa en métodos de recolección de datos sin medición numérica, como las descripciones y las observaciones. (2004, P. 10)

El enfoque anterior permite analizar y reflexionar acerca de nuestro oficio[6] como maestros. El practicante es un sujeto que está en constante observación, de esta manera puede determinar las dificultades y obstáculos que presentan los estudiantes en la resolución de ecuaciones de primer orden con una incógnita, así mismo, con los instrumentos para la recolección de datos como los diarios de campo se pretende hacer una reflexión y análisis acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la unidad temática en cada una de las actividades propuestas.

De otra parte, el método anterior nos permite reconocer aspectos relevantes en las estrategias que desarrollan los estudiantes cuando se enfrentan a una situación problema.

### 7.4 Instrumentos para la recolección de datos

La recolección de la información se registra a partir del acompañamiento que se realizó con cada uno de los estudiantes, la prueba diagnóstica que se propuso al inicio de la práctica, las preguntas a cada uno de los alumnos acerca de los objetos matemáticos previos a la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, por ejemplo: operaciones entre números enteros, clasificación de los triángulos, entre otros. Además, las evidencias se recogieron en cada una de las situaciones a través de imágenes, hojas de talleres, evaluaciones y posteriormente se realizaron los análisis en cada uno de los procedimientos realizados por los 15 alumnos de la institución educativa los Comuneros sede: José Antonio Galán Nº 1.

### 7.5 Fases de investigación

A continuación, se presentan las dos fases de la investigación tenidas en cuenta para el desarrollo de este trabajo.

#### 7.5.1 Diagnóstico

En la primera fase se propuso una evaluación tipo diagnóstico para identificar los saberes previos de cada estudiante. El objetivo era identificar el desarrollo de los procesos de aprendizaje de los 15 estudiantes del grado noveno de la sede José Antonio Galán No 1 en el área de matemáticas,

[6] Recuperado de: EL MAESTRO Y SU OFICIO (Takashi, 1991)

además, reconocer las competencias matemáticas para empezar a construir estrategias de enseñanza que faciliten el aprendizaje y reconocimiento de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

La evaluación estaba constituida de la siguiente manera:

- Operaciones algebraicas.
- Operaciones entre números enteros. **(suma**, **producto**, **diferencia** y **división**)
- Ubicar distintos puntos en el plano cartesiano.

El autor consideró que la temática anterior era importante para la introducción a las ecuaciones lineales de primer orden con una incógnita.

### 7.5.2 Ejecución de las actividades

Para esta fase se propusieron las siguientes actividades para los 15 estudiantes del grado noveno de la institución educativa Los comuneros, sede José Antonio Galán Nº 1.

#### 7.5.2.1 Actividad No I

El análisis reflexivo del diagnóstico determinó que los 15 estudiantes necesitaban reforzar las operaciones algebraicas y operaciones con números enteros para poder reconocer y solucionar ecuaciones de primer orden, por tanto, en esta actividad se propuso resolver algunas operaciones algebraicas:

Hallar el resultado de operar las siguientes expresiones:

- $25m + 3 =$
- $2x(4x + 7) =$
- $5m(m - 6) =$
- $(2a + 5)(5a - 20) =$

### 7.5.2.2 Actividad No II

El objetivo de esta actividad es que cada estudiante del grado noveno transforme un enunciado en lenguaje común a un lenguaje simbólico, es decir modelar algebraicamente una proposición. De esta manera, la actividad consistía en:

Representar algebraicamente las siguientes proposiciones.

- El doble de un número
- La séptima parte de algún número
- La suma de un número más su consecutivo
- La mitad de un número
- La séptima parte de un número menos él mismo
- Un número par
- Un número impar

### 7.5.2.3 Actividad No III

Siguiendo con la modelización algebraica, El objetivo de esta actividad se centra en la modelización de proposiciones del lenguaje común y en resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, es decir, se pretende que el estudiante modele algebraicamente la proposición y posteriormente la resuelva.

Representar algebraicamente las siguientes proposiciones y resolverlas.

- La suma de un número con 2 es 6.
- Sabiendo que un número más su consecutivo es 61. Hallar dicho valor numérico.
- Si el perímetro de un triángulo equilátero es de 165 metros. Entonces ¿Cuánto equivale cada lado del triángulo?
- Cada lado de un triángulo mide 5 metros más que el anterior. Si el perímetro mide 37.5 ¿Cuánto mide cada uno de los lados?
- Si en un triángulo rectángulo, uno de los ángulos mide 45 grados. ¿Cuántos grados mide el ángulo faltante?
- Dos veces dos veces $1/x$ más cinco es igual a doce. Encontrar el valor de la incógnita.

## 8. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Con base en los talleres, evaluaciones y actividades que se llevaron a cabo durante la práctica pedagógica, se logró reunir las evidencias e información que contribuyera a determinar las estrategias que utilizan los estudiantes del grado noveno de la sede José Antonio Galán Nº 1 en la resolución de ecuaciones de primer orden con una incógnita.

En este apartado se revisarán las dificultades y los obstáculos (didácticos y epistemológicos) que el practicante observó en la experiencia pedagógica con los 15 alumnos del grado noveno de la sede José Antonio Galán Nº 1 dentro y fuera del aula.

### 8.1 Resultados del diagnóstico

Los datos de la fase diagnóstica se registraron en hojas de cuaderno de cada uno de los 15 estudiantes, sin embargo, en algunas ocasiones el alumno prefería escribir sobre la hoja de evaluación. El material escrito se recopilaba con el objetivo de hacer un análisis, para determinar los saberes previos de los estudiantes antes de abordar la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Aquí algunos de los puntos de la evaluación diagnóstica.

#### 8.1.1 Obstáculo 1

En la **gráfica 1** se observa un obstáculo epistemológico que presenta un estudiante cuando se pide hallar el resultado de la siguiente expresión algebraica.

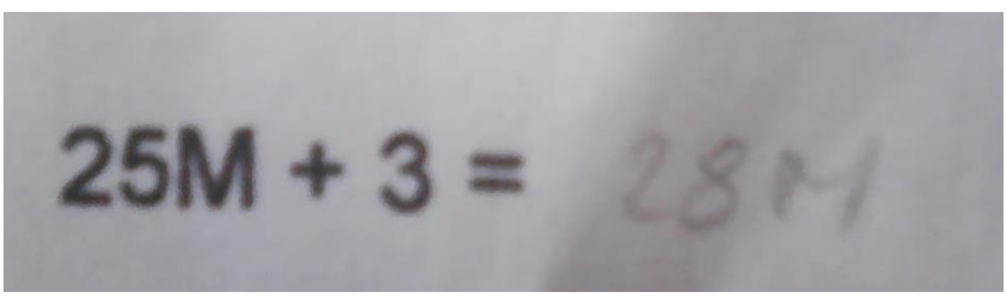



**Imagen 1.**

En la imagen 1 se puede observar que el estudiante suma el monomio $25m$ con el número entero 3 cuyo resultado es para él $28m$, es decir, no ha logrado comprender la suma algebraica, y en general la suma de elementos de cualquier conjunto, donde la operación (+) esté definida y solo sea posible con objetos de la misma naturaleza.

Cabe resaltar que cuando se aplicó la evaluación diagnóstica, el 90% de los alumnos del grado noveno de la sede José Antonio Galán Nº 1 padecieron este obstáculo epistemológico.

El análisis de este resultado pudo determinar la estrategia que usó el estudiante para escribir la respuesta incorrecta. En la siguiente tabla se describe una interpretación de su razonamiento.

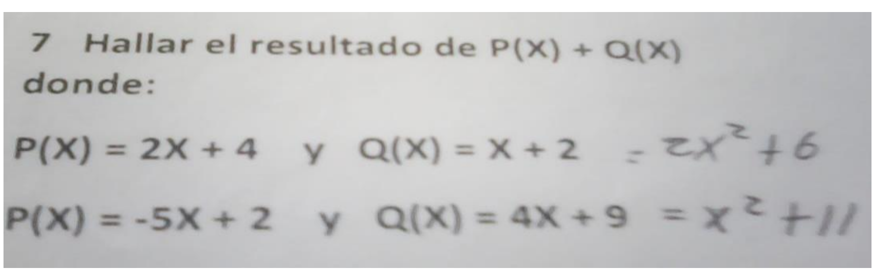
Tabla 1

| **Procedimiento** | **Justificación** |
|---|---|
| $25m + 3 =$ | Ejercicio propuesto |
| $= (25 + 3)m$ | Error encontrado |
| $= 28m$ | Respuesta incorrecta |

### 8.1.2 Obstáculo 2

En la **imagen 2** se pueden evidenciar dos resultados que escribió un estudiante cuando se pide hallar la suma de expresiones algebraicas.

En el primer caso, el estudiante obtiene $(2x + 4) + (x + 2) = 2x^2 + 6$. Se podría interpretar mediante la observación, que el alumno está multiplicando los términos $2x * x$ y por otra parte, está sumando $4 + 2$, sin embargo, este inconveniente parece indicar que para el estudiante el resultado de la expresión $x + x$ es $x^2$ y no $2x$


7 Hallar el resultado de P(X) + Q(X) donde:

P(X) = 2X + 4 y Q(X) = X + 2 $= 2x^2 + 6$

P(X) = -5X + 2 y Q(X) = 4X + 9 $= x^2 + 11$

**Imagen 2.**

En el segundo caso $(-5x+2)+(4x+9)$, el resultado obtenido es $x^2+11$. Esta deducción es interesante dado que el estudiante opera $-5x+4x = x^2$. Nuevamente aparece la dificultad de considerar la suma $x+x$ como $x^2$, pero además, se puede observar que también presenta dificultades en operar con números enteros, dado que él obtiene como resultado al realizar la suma de coeficientes lo siguiente $-5+4=1$.

Esta última apreciación permite deducir que, en el primer caso el estudiante no multiplicó $2x * x$, sino que, posiblemente sí supuso la suma $2x+x$, sin embargo, como el coeficiente de uno de los términos es uno y no hay un número acompañando a la variable $(\_\_x)$ tal vez el estudiante consideró que se sumaba con $0x$, de esta manera, obtiene el resultado errado:

$$2x+0x=2x^2$$

El análisis del resultado anterior permite concluir que el alumno procedió de la siguiente manera.

Tabla 2

| Procedimiento | Argumento |
|---|---|
| $(2x+4)+(x+2)$ | Ejercicio propuesto |
| $=(2x+x)+(4+2)$ | Agrupo correctamente los términos. |
| $=(2x+0x)+6$ | Considera 0 a uno de los coeficientes de $x$. |
| $=\{(2+0)(x+x)\}+6$ | Asocia mal para operar los objetos |
| $=2x^2+6$ | Considera $x+x=x^2$. |
| | Resultado errado. |

**8.1.3 Obstáculo 3**

En la gráfica 3 se puede observar que el estudiante aplica perfectamente la propiedad distributiva de los números enteros para "eliminar los paréntesis", es decir, opera correctamente el producto entre los binomios $(2x+2)$ y $(5x+6)$ para obtener el resultado correcto $10x^2+12x+10x\ +$

12, sin embargo, se observa que el estudiante escribe como resultado final $44x^4$. El inconveniente de este ejercicio para el estudiante radica en la dificultad de operar con términos semejantes, pero lo interesante en este caso, es que aquí están implícitos los dos obstáculos anteriores (1 y 2).

El análisis de este resultado permitió reconocer 3 aspectos importantes que llevaron al estudiante a conseguir el resultado final errado:

- ✓ El primer aspecto es acerca de la dificultad con la suma de los términos semejantes $12x + 10x$, dado que el alumno considera $x + x = x^2$. (**obstáculo 2**).

- ✓ El segundo aspecto es acerca de la dificultad con la suma algebraica $10x^2 + 12x$. Cabe resaltar que este error se deriva del aspecto anterior.

- ✓ Finalmente, el tercer aspecto es acerca de la dificultad con la suma $10x + 12$, pues el estudiante considera esa suma como $22x$ (**Obstáculo 1**).

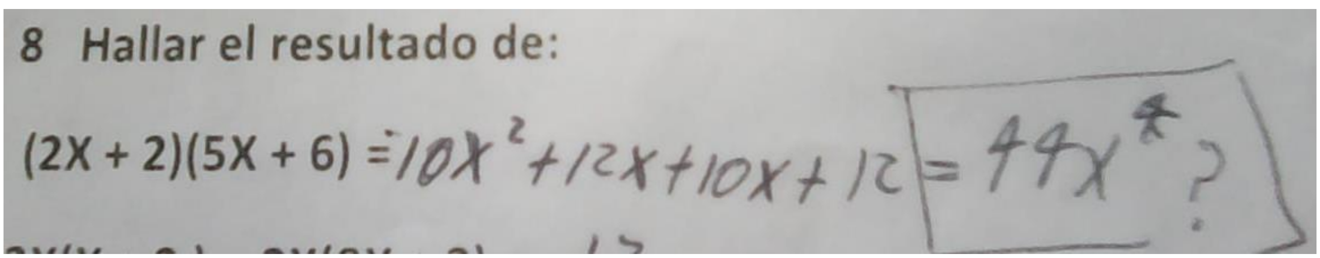



**Imagen 3.**

Los aspectos que se describieron anteriormente permiten concluir los procedimientos que usó el estudiante para obtener el resultado final.

Tabla 3

| Procedimiento | Argumento |
|---|---|
| $(2x+6)(5x+6) =$ | Planteamiento del ejercicio. |
| $= \{(2x \times 5x) + (2x \times 6) + (2 \times 5x) + (2 \times 6)\}$<br>$= \{(2 \times 5) + (x \times x) + 12x + 10x + 12\}$ | Realiza bien el producto de dos factores aplicando correctamente la propiedad distributiva. |
| $= 10x^2 + 12x\ 10x + 12$ | Propiedad de los exponentes en el producto. |
| $= (10 + 12 + 10 + 12)(x^2 + x + x)$<br>$= 44x^4$ | Dificultad encontrada en el ejercicio.<br>Respuesta incorrecta |

Un aspecto interesante que se encontró en el análisis de los datos es que, el resultado anterior fue único entre los 15 estudiantes del grado noveno, es decir, fue la única respuesta con el resultado ($44x^4$), sin embargo, las dificultades que aquí se describen, se encontraron en la mayoría de los estudiantes.

**8.2 Resultados de la actividad Nº I**

El análisis de los resultados de la fase diagnóstica determinó que la mayoría de los estudiantes del grado noveno de la sede José Antonio Galán Nº 1, presentó dificultades en la manipulación correcta de las operaciones algebraicas, de esta manera, fue necesario desde el papel del practicante, reforzar todas estas ideas para avanzar hacia la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. En las clases se propusieron ejercicios para operar con el inverso aditivo y multiplicativo de algún número, así mismo, problemas para aplicar las dos propiedades multiplicativas.

Un aspecto importante por destacar, es que algunos obstáculos que presentaron los 15 estudiantes del grado noveno en la fase diagnóstica, fueron superándose a medida que se implementaron las actividades, sin embargo, algunos obstáculos aún seguían apareciendo en esta actividad.

Algunos de los resultados son presentados a continuación.

### 8.2.1 Superación I

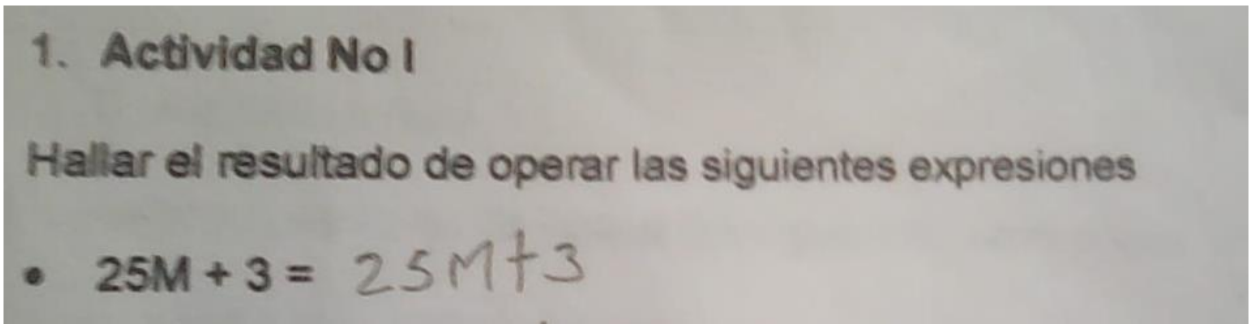



**Imagen 4**

En la imagen 4 se puede observar el resultado correcto que escribió el estudiante durante la actividad I. Este resultado evidencia la superación del **obstáculo I** que apareció en la fase anterior (diagnóstico).

Por otra parte, el análisis de este resultado deja en evidencia el procedimiento que realizó el chico para dar la respuesta correcta $25m + 3$, sin embargo, lo interesante es la interpretación que el chico obtiene del signo igual (=) ya que, este aplica el principio de identidad[7] de manera natural.

Un aspecto relevante, es que cerca del 80% de los alumnos del grado noveno superaron este obstáculo, es decir, empiezan a comprender que "si el término no es semejante al otro", entonces no se puede "sumar".

O sea, entienden que: $ax + b \neq (a + b)x$

[7] . Al respecto, Zamudio (2008) menciona que:
algo no puede ser y no ser. Este es el llamado "principio de identidad": A=A. (P. 25)

### 8.2.2 Superación II

Otros resultados obtenidos de la actividad I se observan en la **Imagen 5**, en la imagen se puede apreciar la **superación I** en otro estudiante del grado noveno, pero, además, en este resultado deja en evidencia dos aspectos importantes en su aprendizaje:

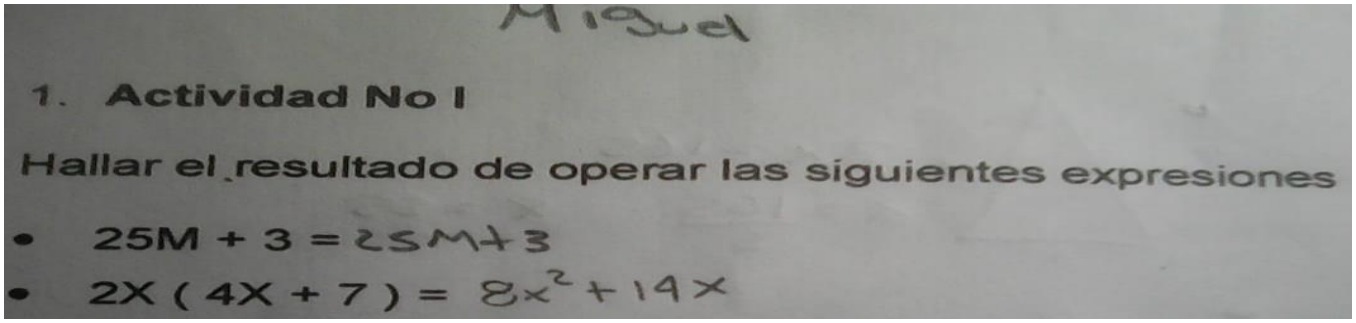



**Imagen 5**

1. Aplicación correcta de la propiedad distributiva respecto a la suma.

$$(2x * 4x) + (2x * 7)$$

2. Opera correctamente el producto de polinomios.

$$\{(2 * 4)(x * x) + (2 * 7)(x)\}$$

El análisis de los resultados obtenidos pudo determinar el proceso correcto que desarrolló el estudiante para “eliminar” los paréntesis. A continuación, se describe la interpretación del estudiante en la siguiente tabla.

Tabla 4

| Procedimiento | Justificación |
|---|---|
| $2x(4x + 7) =$ | Ejercicio propuesto |
| $= (2x * 4x) + (2x * 7)$ | Aplica la propiedad distributiva correctamente |
| $= \{(2 * 4)(x * x) + (2 * 7)(x)\}$ | Realiza bien las multiplicaciones de números enteros y también el producto de polinomios |
| $= 8x^2 + 14x$ | Resultado correcto |

Los dos anteriores resultados fueron positivos para los alumnos, porque empiezan a dejar en evidencia un mejoramiento en su aprendizaje y en la manipulación de expresiones algebraicas en comparación con los resultados de la fase diagnóstica, sin embargo, en esta actividad todavía se siguen presentando algunos obstáculos.

### 8.2.3 Obstáculo 4

En la imagen se puede ver la dificultad que tuvo el estudiante con el desarrollo de este ejercicio. En este resultado particular, se observa que él desarrolló incorrectamente la distribución de $-2x$ respecto a la suma $8x + 3$ y además se olvidó de operar con el monomio $3x$.

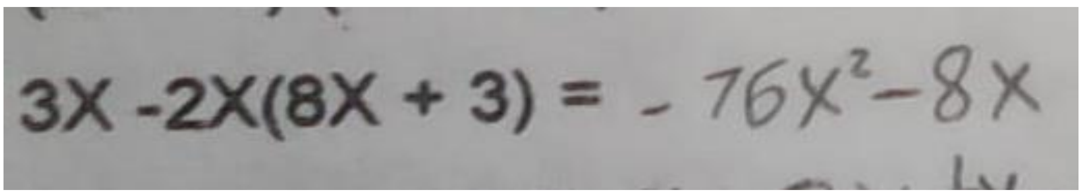



**Imagen 6**

El análisis de los datos permitió determinar los posibles procedimientos que aplicó el estudiante en el momento de resolver el ejercicio. A continuación, se presenta una interpretación de dichos procedimientos en la siguiente tabla.

Tabla 5

| Procedimiento | Argumento |
| --- | --- |
| $3x - 2x(8x + 3) =$ | Ejercicio Propuesto |
| $= 3x + \{(-2x * 8x) + (-2x * 3\ )\}$ | Comienza aplicando incorrectamente la propiedad distributiva respecto a la suma. |
| $= 3x + (-16x^2\ - 8x)$ | No aplica correctamente la multiplicación de números enteros, y el producto de monomios, y luego no suma $3x$. |
| $= -16x^2$- 8x | Respuesta incorrecta |

La reflexión anterior permite concluir que la dificultad del estudiante radica en la dificultad para multiplicar dos números enteros, así mismo en abordar mal el ejercicio, es decir, el estudiante empezó operando los objetos de derecha a izquierda y eso lo llevó a olvidar el monomio $3x$.

### 8.3 Resultados de la actividad Nº II

A continuación, se describen algunos resultados de los estudiantes del grado noveno de la sede José Antonio Galán Nº 1 que se obtuvieron de la actividad II y estrategias que utilizaron los estudiantes para modelizar algebraicamente enunciados del lenguaje común.

#### 8.3.1 Dificultad 1

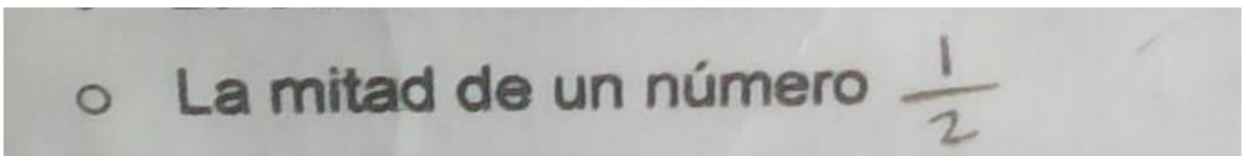



**Imagen 7**

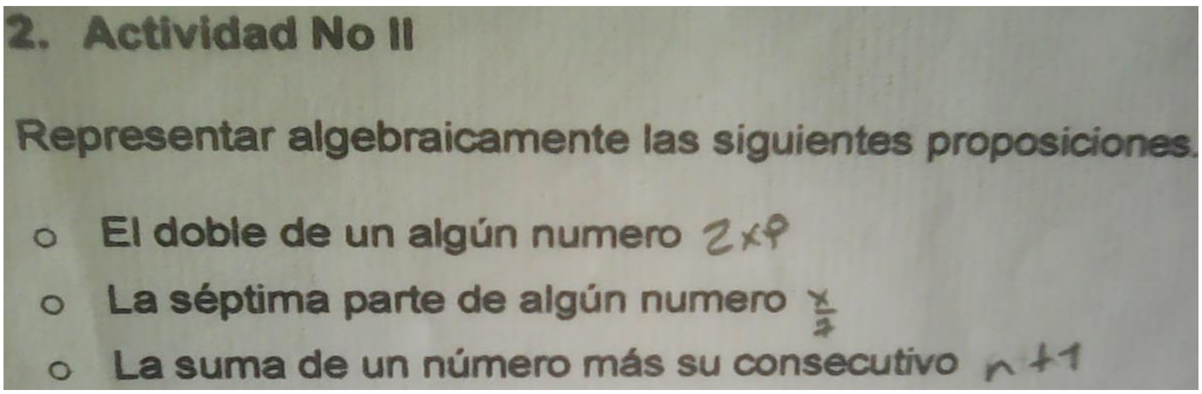
En este resultado se puede ver la interpretación que hizo el estudiante acerca del enunciado, sin embargo, aunque la respuesta no lo representa correctamente, se encuentran aspectos interesantes por destacar.

a. Lo interesante y positivo de este caso es que él comprende el concepto de *mitad*, y lo representa correctamente con $\frac{1}{2}$, aunque su respuesta en este caso representa "*la mitad de uno"*.

b. Desde el punto de vista del autor, la dificultad en el desarrollo de este ejercicio parece radicar en la identificación de las expresiones **"*mitad*"** y **"un número"**, sin embargo, dicha dificultad parece centrarse en concebir la frase ***"un número"*** con ***"número uno"*** y por tanto, concluir la respuesta $\frac{1}{2}$.

### 8.3.2 Dificultad 2

En la gráfica 8 se puede observar la interpretación que realiza y que escribe el estudiante para representar algebraicamente tres proposiciones, dos proposiciones están correctamente expresadas, sin embargo, se puede evidenciar que el estudiante tuvo dificultades para modelar la tercera proposición. La respuesta $n + 1$ que escribió él, representa la proposición "*consecutivo de un número*" que está implícita en el enunciado, sin embargo, no está representada completamente.




**Gráfica 8**

A continuación, abordaremos aspectos acerca de la interpretación que hizo el alumno para resolver cada uno de los problemas en mención.

1. "*El doble de algún número".* Se puede observar que la respuesta $2 * p$ expresa correctamente lo que se pide en la proposición. Lo interesante de la respuesta es que, el estudiante simboliza bien la palabra ***doble*** con el número 2, y además, representa correctamente la proposición ***algún número***, con cualquier variable (en este caso con la letra ***p*** del abecedario).
2. "*La séptima parte de algún número*". La respuestas $\frac{x}{7}$ y $\frac{1}{7}x$ representan correctamente la proposición expuesta, sin embargo, lo interesante del resultado radica en que, el chico interpreta bien la primera parte del enunciado ***(séptima parte)*** y lo asocia al concepto de división, pero además, comprende que ese ***(algún número***) se debe multiplicarlo por $\frac{1}{7}$.

3. “*la suma de un número más su consecutivo”*. Se puede observar que la respuesta $n + 1$ no representa algebraicamente la proposición en cuestión, sin embargo, la dificultad en este problema parece radicar en no identificar las expresiones del enunciado que tiene que modelizar. Por ejemplo, para este problema se pueden identificar dos expresiones; “**un número**” y “**consecutiv**o”, junto con la operación suma (+).

Así mismo, otra dificultad del estudiante para comprender el enunciado parece estar en la forma como está escrito *(la suma de un número más su consecutivo)*, es decir, le faltó ser más preciso al docente en su escritura para que el chico reconociera las expresiones y la operación suma (+) que están implícitos en la proposición. Por ejemplo; “algún número más su consecutivo” o “la suma de un número cualquiera y su consecutivo”.

Es importante realizar esta apreciación, dado que, la lectura influye mucho para resolver este tipo de problemas, y si la proposición no está bien redactada, esta puede influir negativamente en la comprensión del estudiante y así, frenar el aprendizaje significativo de la unidad temática.

### 8.3.3 Dificultad 3

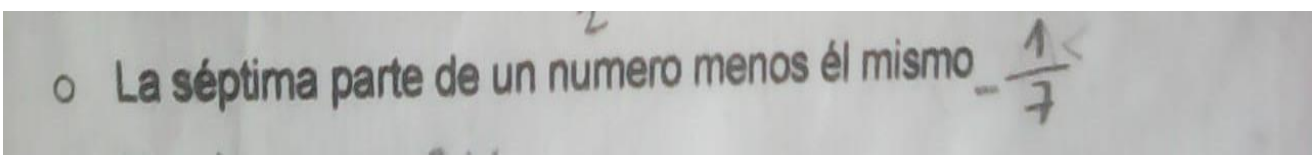



**Imagen 9**

En esta imagen se puede observar el resultado que escribió un estudiante del grado noveno acerca de la proposición mencionada, se aprecia que esta respuesta es parecida al tercer problema que se estudió en la **Dificultad 2**, sin embargo, aquí se presentan otros elementos interesantes que vale la pena mencionar. Nuevamente la dificultad del estudiante, en este caso, parece residir en no reconocer las expresiones y la operación que se deben modelizar, en este caso; “la séptima parte”, “algún número”, “el mismo”, junto con la operación suma (+).

A continuación, se presenta un análisis del resultado obtenido por parte del estudiante acerca de la modelización de la expresión: ***La séptima parte de un número menos el mismo.***

Tabla 5

| Lenguaje común | Expresión simbólica | Justificación |
|---|---|---|
| Séptima parte de un número | $\frac{1}{7}$ | Aquí se puede reconocer el primer obstáculo que tiene el estudiante cuando quiere representar esta frase. La dificultad parece radicar en confundir *"un número"* con *"´número uno"*. |
| Menos el mismo | $-\frac{1}{7}$ | Este aspecto es interesante, pues la palabra ***menos*** le lleva a intuir la negatividad, y de esa manera representarlo con el símbolo (-), sin embargo, debido a la interpretación anterior incorrecta, le lleva a obtener este resultado. |
| La séptima parte de un número menos el mismo | $-\frac{1}{7}$ | La respuesta finalmente no representa el modelo algebraico del lenguaje común. |

Es importante destacar que el 80% de los estudiantes presentaron dificultades en modelizar algebraicamente distintos enunciados que se propusieron en las diferentes actividades dentro del aula.

## 8.4 Resultados de la actividad Nº III

En este apartado se revisarán los resultados que se obtuvieron en la ejecución de la actividad Nº III, estos se recogen para tener la evidencia de las actividades y, además, para realizar un análisis reflexivo acerca de las estrategias que aplicaron los estudiantes del grado noveno en la resolución de ecuaciones lineales de primer orden con una incógnita. A continuación, se presentan algunos obstáculos y dificultades que dejaron en evidencia los alumnos luego de realizarse un análisis de los resultados.

### 8.4.1 Dificultad 4

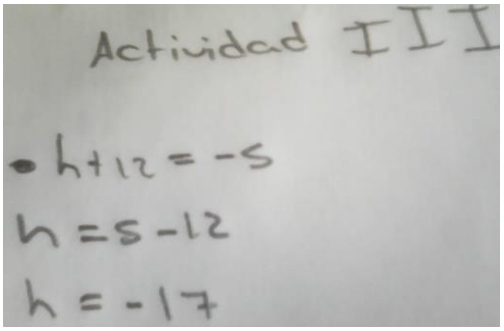



**Imagen 10**

La imagen anterior muestra el procedimiento que realizó un estudiante del grado noveno cuando se disponía a despejar la incógnita $h$ de la ecuación $h + 12 = -5$, allí se pueden ver las estrategia que usó para resolver el ejercicio, sin embargo, en este caso la dificultad radica en la mala operación (suma) que realizó con los números $-5$ y $-12$ dado que, en uno de los pasos que realiza parece olvidar el signo (-) que acompaña al número -5.

En la siguiente tabla, se presenta un análisis del resultado descrito, en ella se muestra una aproximación por parte del practicante acerca del procedimiento que consideró el estudiante.

Tabla 6

| **Procedimiento** | **Argumento** |
|---|---|
| $h + 12 = -5$ | Ecuación lineal propuesta |
| $h = 5 - 12$ | Error: El estudiante transpone correctamente el número 12 al otro lado del igual con signo opuesto y parece olvidar que el número cinco es negativo. |
| $h = -17$ | Esta dificultad se presenta porque el alumno no ha comprendido la suma de números enteros, sin embargo, se puede intuir que el estudiante colocó el signo que acompaña al número más grande entre ambos. En este caso, entre $5$ y $-12$, él ha escrito $-17$. |

Es importante destacar que, 7 estudiantes del grado noveno presentaron esta dificultad.

### **8.4.2** Error **1**

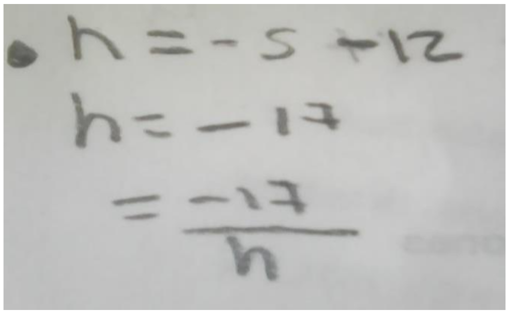


**Imagen 11**

En la imagen se puede observar el mismo ejercicio anterior, es decir, se pide que el estudiante despeje la incógnita $h$, de la ecuación anterior, sin embargo, este resultado es aún más interesante dado el resultado final $= \boldsymbol{-17/h}$, pues como se puede notar en este caso, ha pasado la incógnita $h$ a dividir el número entero $\boldsymbol{-17}$. El análisis de este resultado se muestra en la siguiente tabla

Tabla 7

| **Procedimiento** | **Argumento** |
|---|---|
| $h + 12 = -5$ | Ecuación lineal propuesta |
| $h = -5 - 12$ | Pasó correctamente el número doce positivo al otro lado de la igualdad y dejo el número -5 “quieto”, es decir, agrupa correctamente los términos semejantes. |
| $h = -17$ | Opera correctamente la suma de números enteros entre $-5$ y $-12$. |
| $= -17/h$ | Aunque en el paso anterior el ejercicio ya concluye, el estudiante no ha comprendido “despejar la incógnita”. |

Claramente, se puede ver que el resultado final no es una tautología, por eso como docente encargado de su aprendizaje, fue importante corregirle y explicarle que el ejercicio concluye cuando “se despeja la incógnita”. Un aspecto relevante de este ejercicio en particular es que, este resultado $= -17/h$ fue el único que resulto luego de hacer el análisis general de los alumnos del grado noveno.

### 8.4.3 Dificultad 5

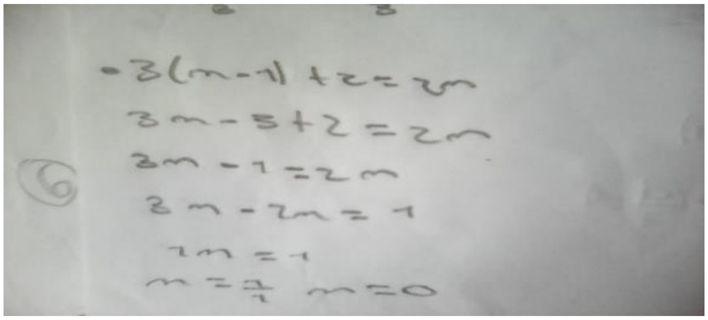


**Imagen 11**

En la imagen anterior se puede ver el resultado que escribió un estudiante cuando se le pide encontrar el valor de la incógnita en la ecuación $3(m-1)+2=2m$. Este ejercicio es un poco más complejo que el anterior pues le exige al joven manipular más términos algebraicos, aunque el joven resolvió el ejercicio, este concluye incorrectamente. En seguida se presenta un análisis del resultado (ver tabla IX) expuesto por el alumno del grado noveno donde desarrolla estrategias para resolver la ecuación lineal en cuestión.

Tabla 8

| Procedimiento | Argumento |
|---|---|
| $3(m-1)+2=2m$ | Ecuación expuesta |
| $3m-3+2=2m$ | Elimina bien el paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva respecto a la suma de número enteros. |
| $3m-1=2m$ | Opera bien sumando los números enteros $-3$ y 2. |
| $3m-2m=1$ | Agrupa bien los términos semejantes, es decir, traspone el $2m$ con signo contrario al otro lado de la igualdad, así mismo con el número 1. |
| $1m=1$ | Este paso es importante resaltarlo pues el estudiante comprende la suma algebraica, el cual fue un obstáculo al principio de la experiencia pedagógica, sin embargo él no se percata de que ya encontró el valor de la incógnita, tal vez esto se debe a que el alumno no comprende que $1m=m.$, eso le lleva a la necesidad de seguir despejando. |
| $m=\frac{1}{1}=0$ | Dificultad: Éste radica en la dificultad que tiene para dividir $\frac{1}{1}$, y en general que todo número dividido entre el mismo tiene como valor el número 1. |

### 8.4.4 Obstáculo 6

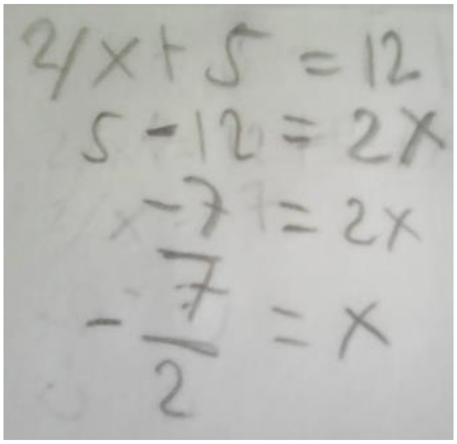


**Imagen 12**

En la imagen 12 se muestra el resultado que escribió una estudiante cuando se pide modelar y encontrar el valor de la incógnita que satisface la proposición "*dos veces* $1/x$ *más cinco es igual a doce*". El dato obtenido deja en evidencia la estrategia que aplicó la joven para resolver el ejercicio, se puede observar que no tuvo problema para pasar del lenguaje habitual al lenguaje simbólico, sin embargo, se aprecian algunas dificultades que tuvo para encontrar el valor numérico que le corresponde a la incógnita.

Luego de recopilar las evidencias y hacer un análisis de los datos, se puede observar que la estudiante ha superado las dificultades de los **resultados 7.3,** es decir, traspuso el enunciado a símbolos, pues modeló correctamente "*Dos veces* $1/x$ *más cinco"*, transformando la primera parte de la proposición como, "$2/x + 5$", pero además es importante destacar la comprensión que empieza a adquirir la estudiante acerca del símbolo igual[8] (=), ya que interpreta bien la otra parte de la proposición "*es igual a doce"* como, "$= 12$" y finalmente obtiene $2/x + 5 = 12$ para encontrar el respectivo valor numérico y resolver el ejercicio.

A continuación, se presenta en la siguiente tabla una aproximación de lo que el practicante considera, "una estrategia del estudiante para resolver el problema".

[8] Godino (2004) menciona que: Muchos de los problemas que han de resolver los alumnos de primaria consisten en hallar un número desconocido que cumpla ciertas condiciones. La formulación de esta pregunta suele ser en forma de enunciado, pero también se utiliza un lenguaje simbólico del tipo: 7 + = 20. (P.397)

Tabla 9

| Procedimiento | Argumento |
|---|---|
| *Dos veces* $1/x$ *más cinco es igual a doce* | Proposición expuesta. |
| $2/x + 5 = 12$ | Como se mencionó anteriormente, la estudiante modela la proposición correctamente usando elementos del lenguaje simbólico como: $5,\ 12,\ 2/x,\ =, +$ |
| $5 - 12 = 2x$ | En este paso, cabe destacar que la joven agrupa bien los términos pasando el número doce positivo al otro de la igualdad con signo contrario, sin embargo el error en este problema radica en que ella consideró $2/x$ como $2x$. El aspecto anterior resulta interesante pues el practicante interpreta lo escrito en dos puntos.<br>1. Se puede observar que la estudiante pasa el doce al otro lado del igual con signo contrario.<br>2. Del punto anterior, se puede observar que el término $2/x$, el cual es una división, fue traspuesto al otro lado del igual como el producto entre 2 y $x$. |
| $-7 = 2x$ | Por lo mencionado en el paso inmediatamente anterior, el problema no fue resuelto, pero desde el papel de practicante es importante analizar cada uno de los procedimientos usados. De esta manera, asumiendo el error del problema $5 - 12 = 2x$ como un nuevo problema, se puede ver que suma correctamente los números enteros 5 y $-12$. |
| $x = -\frac{7}{2}$ | La respuesta es incorrecta para el problema inicial, sin embargo, es correcta para el "nuevo problema" ya que el término 2 que multiplica a $x$ pasa al otro lado de la igualdad a dividir a $-7$ obteniendo como resultado $-\frac{7}{2}$. |

Finalmente un aspecto interesante que se pudo rescatar del análisis es el hecho de que, el estudiante despeja la incógnita hacia el lado derecho de la igualdad, que no es habitual en los chicos, sin embargo aunque no lo hace adecuadamente, resalta el hecho de que comprende que la igualdad funciona en cualquiera de los dos lados.

### 8.4.5 Dificultad 6

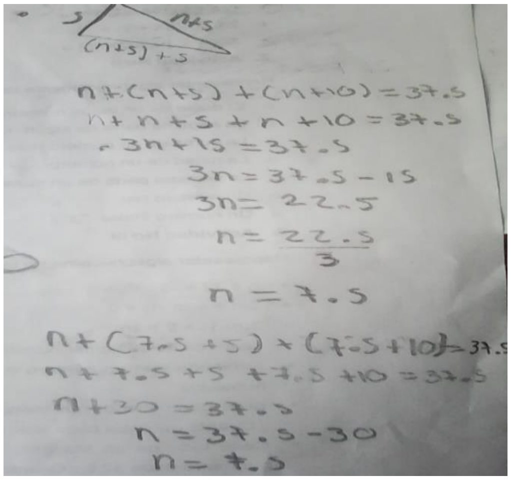



**Imagen 13**

En esta imagen se observan los procedimientos que aplicó para resolver el problema, *Cada lado de un triángulo mide 5 metros más que el anterior. Si el perímetro mide 37.5 ¿Cuánto mide cada uno de los lados?* La estrategia que usa inicialmente para abordar el problema es plasmar un triángulo con las características mencionadas, seguidamente plantea el enunciado a un lenguaje simbólico para resolver el problema, pero, además, en este caso particular el estudiante pretende comprobar que la respuesta es correcta y es ahí donde aparece la dificultad.

La observación y posterior análisis de los procedimientos que aplicó el estudiante se presentan en los siguientes tres puntos:

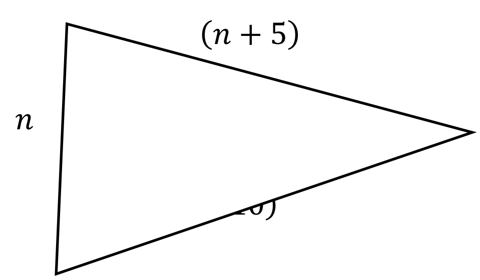
- Un aspecto interesante que se puede observar en el resultado descrito es la competencia matemática del estudiante para comprender el enunciado y posteriormente trasladarlo al sistema geométrico mediante el dibujo de un triángulo escaleno

- Otro aspecto que cabe mencionar es que, en este problema, el estudiante supero la dificultad (**7.4.5)** anterior, ya que traslado la proposición "*Cada lado de un triángulo mide 5 metros más que el anterior. Si el perímetro mide 37.5"* al lenguaje simbólico $n + (n + 5) + (n + 10) = 37.5$, se puede observar que aunque en este problema no se menciona la palabra "igual", el chico asume que la suma de lados del triángulo deber ser igual al perímetro, en clase el practicante precisó lo que es el perímetro de una figura geométrica plana, para de esta manera, encontrar el valor de la incógnita $n$ cuyo valor es correcto.

- Por otra parte, un procedimiento que realiza el estudiante es comprobar que el valor de la incógnita es solución del problema, sin embargo la dificultad radica en no reemplazar el valor encontrado en todas las “$n$”.

En seguida se presenta un análisis de los datos obtenidos mediante una tabla para revisar las estrategias que aplicó el estudiante para resolver el problema propuesto.

Tabla 10

| **Procedimiento** | **Argumento** |
|---|---|
| *Cada lado de un triángulo mide 5 metros más que el anterior. Si el perímetro mide 37.5 ¿Cuánto mide cada uno de los lados?* | Problema propuesto. |
|   | Se puede observar que el estudiante uso como estrategia para resolver el problema, dibujar el triángulo escaleno con las características descritas, lo que considera Vergnaud como un aprendizaje significativo. |
| $n+(n+5)+(n+10)=37.5$ | Aquí se pude observar que el estudiante no tuvo dificultades para modelar la proposición, sin embargo, fue necesario precisar el significado de perímetro de un triángulo y en general, lo que es el perímetro de una figura geométrica plana. |
| $n+n+5+n+10=37.5$ | En este paso se puede ver que el chico comprende, que los paréntesis no afectan la suma de términos semejantes y los quita. |

| | |
|---|---|
| $3n + 15 = 37.5$ | Aquí se puede observar que el alumno sumó correctamente los términos semejantes $n + n + n$ y los enteros 10 con 15. |
| $3n = 37.5 - 15$ | En el proceso de despejar la incógnita, el estudiante pasa el 15 al otro lado del igual con signo contrario y deja sumando el 37.5. |
| $3n = 22.5$ | Aquí se puede observar que joven opera correctamente los .números reales 37.5 con $-15$. |
| $n = \frac{22.5}{3}$ | Se puede ver que no tuvo problema para pasar el número 3 que multiplica a $n$, al otro lado del igual para dividir el número 22.5 |
| $n = 7.5$ | Respuesta correcta. |

A continuación, se realiza un análisis de la prueba descrita en **Imagen 13.**

| | |
|---|---|
| $n + (7.5 + 5) + (7.5 + 10) = 37.5$ | Error: Se puede observar que el error aparece cuando el estudiante quiere hacer la prueba del problema para verificar que en efecto $n = 7.5$ es la solución, sin embargo, la dificultad radica en no reemplazar el valor encontrado en todas las $n$. |
| $n + 7.5 + 5 + 7.5 + 10 = 37.5$ | Por el paso anterior la prueba no se puede concluir correctamente, pero dentro del papel de practicante, es necesario revisar todos los procedimientos. De esta manera, se dejará en consideración la ecuación $n + 7.5 + 5 + 7.5 + 10 = 37.5$ como un nuevo problema. |
| $n + 30 = 37.5$ | Aquí, el estudiante no tuvo dificultades para sumar los números reales $7.5 + 5 + 7.5 + 10$. Obteniendo como resultado 30. |

| | |
|---|---|
| $n = 37.5 - 30$<br>$n = 7.5$ | En este paso se puede observar que opera correctamente $37.5$ con $30$ para obtener el resultado correcto del "nuevo problema". |

## 9. CONCLUSIONES

En este apartado se presentan algunas conclusiones obtenidas en la experiencia como practicante en la enseñanza de las matemáticas, con estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Los Comuneros, sede José Antonio Galán Nº 1. En primera instancia, destacar el comportamiento de los alumnos al momento de llevar a cabo esta experiencia, su participación y respeto en el aula son valores que aprenden a partir de los principios formativos de la institución y con seguridad serán la generación que le aporte positivamente a la sociedad cuando se desempeñen en sus roles dentro de la misma. Así mismo, se logró reconocer algunos obstáculos didáctico-epistemológicos y dificultades presentadas por los alumnos al aplicar estrategias en la modelación y resolución de ecuaciones de primer orden con una incógnita.

Entre ellos se destacan:

- **Suma y producto de números enteros**. Se encontró que la mayoría de los estudiantes cometían errores cuando operaban dos números enteros de diferente signo, es decir, no sumaban bien dos números enteros. Como se muestra a continuación.

  *Caso 1.* $5 - 12 = -17$ *Caso 2.* $-5 + 4 = 1$

- **Capacidad de interpretación lectora**. Los resultados pudieron dar cuenta de la importancia que sugiere la lectura al momento de modelar una proposición, dado que, como se puedo observar en los resultados de la actividad II, los estudiantes dejaron evidenciar en los datos que escribieron de talleres, actividades y evaluaciones, las dificultades para interpretar los enunciados y luego modelarlos algebraicamente.
- **Operar con el inverso aditivo o inverso multiplicativo.** Todos los estudiantes del grado noveno presentaron este obstáculo epistemológico acerca del inverso multiplicativo o inverso aditivo de algún número racional, ya que ellos no comprendían cómo "funcionaban" las propiedades de los inversos en cada caso, y esto generó dificultades para despejar las ecuaciones lineales.

- **Reconocer el concepto de igualdad como una relación de equivalencia**. En las actividades de resolver las ecuaciones de primer orden algunos estudiantes usaron como estrategia, operar con los inversos multiplicativos y aditivos para despejar la incógnita en cada caso, sin embargo, cuando operaban con el inverso aditivo de algún número entero al lado derecho de la igualdad, posteriormente se olvidaban de operarlo al lado izquierdo, por esta razón se presentó un obstáculo epistemológico acerca de la comprensión del símbolo igual por parte de ellos, no obstante, el resto de estudiantes decidió resolver las ecuaciones de la forma tradicional, es decir, "aquel que está sumando pasa al otro lado a restar" y "el que está multiplicando pasa al otro lado a dividir", este proceso usado por los alumnos afloró errores, dado que en muchos casos la incógnita o el número pasaba al otro lado con error de signo, y de esa manera se operaba erróneamente. Lo anterior se debe a que educadores matemáticos y no educadores matemáticos enseñan a despejar ecuaciones diciendo que al pasar de un lado a otro cambia el signo, algo que no es correcto. Por otro lado, no se enseña a despejar ecuaciones aplicando la propiedad uniforme.

De esta manera, dentro del papel de educador matemático y guía en sus procesos de aprendizaje, fue pertinente reforzar las falencias mediante actividades, talleres y evaluaciones, esto con el fin de avanzar hacia los objetivos propuestos. Lo que Sánchez (2011) llama: una investigación de intervención (p. 83). En la ejecución de las actividades I, II y III, se encontraron resultados interesantes donde se pudo observar aprendizajes significativos y la integración de conocimientos previos reforzados en la fase anterior (diagnóstica) tales como: suma y producto de números enteros-racionales, aplicación de la propiedad distributiva respecto a la suma de dos números racionales, precisar sobre los tipos de triángulos (escaleno, isósceles y rectángulo), así mismo, sumar o multiplicar por el de algún número entero o racional, perímetro de una figura plana, entre otros.

Los resultados en la fase diagnóstica dejaron en evidencia dificultades en las cuales, la mayoría de los alumnos no comprendían conceptos como las operaciones en la estructura de los números enteros, así mismo la manipulación de expresiones algebraicas, sin embargo, la dificultad que se presenta en cuanto al aprendizaje de las matemáticas parece radicar en la implementación de nuestro sistema educativo, ya que, las políticas educativas no tienen en cuenta a la población estudiantil, sus necesidades socio-económicas, las cuales influyen en el mejoramiento y la calidad de la educación, en particular en la educación matemática, es por esto que, los futuros educadores matemáticos debemos hacer una reflexión acerca de los procesos de enseñanza para lograr desarrollar estrategias de enseñanza que aproximen un verdadero aprendizaje en los estudiantes.

Por otra parte, a lo largo de la experiencia pedagógica se pudo observar las falencias que traen los estudiantes con temáticas de grados anteriores, por lo que es pertinente cuestionarse: ¿el PEI de la institución está implementado acorde a la población estudiantil de la sede José Antonio Galán Nº 1? , ¿Influyen las condiciones sociales y el contexto de los estudiantes en su aprendizaje?, ¿Los DBA limitan los tiempos para enseñar la temática en cuestión?

## 10. RECOMENDACIONES

A partir de este trabajo, se pudieron observar algunas consideraciones para tener en cuenta en la enseñanza de las ecuaciones de primer orden con una incógnita:

- ✓ Como educadores matemáticos tenemos la responsabilidad de buscar estrategias de enseñanza desde los grados inferiores para que el aprendizaje de los objetos matemáticos sea un proceso constructivo y por ende su aprendizaje sea más asequible.

- ✓ Es importante que los PEI de las instituciones educativas consideren la población estudiantil haciendo un estudio de sus condiciones socio-económicas.

- ✓ Este trabajo muestra algunos errores y dificultades que presentan la mayoría de estudiantes en el aprendizaje del Algebra, y por eso sirve como material de apoyo a maestros en formación.

- ✓ Es importante que los maestros sean precisos en las definiciones de los objetos matemáticos para no generar ambigüedades en los estudiantes.

- ✓ Es importante que el docente de la sede José Antonio Galán No 1 detecte tempranamente las dificultades de sus alumnos para llevar a cabo un apoyo pertinente a su ritmo de aprendizaje.

- ✓ Llevar a cabo un desarrollo del currículo, por parte de los docentes de la institución que promueva a todos los estudiantes un conocimiento sólido de los contenidos, así mismo, adquirir competencias básicas y valores para su formación integral.

## 10. BIBLIOGRAFÍA

Barrera M. (2014). *LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA EN COLOMBIA: RETOS EN EQUIDAD Y CALIDAD.* FEDESARROLLO. 1- 40. Recuperado de: https://www.repository.fedesarrollo.org.co/bitstream/handle/11445/190/La%20educaci%C3%B3n%20b%C3%A1sica%20y%20media%20en%20Colombia%20retos%20en%20equidad%20y%20calidad%20-%20KAS.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Batanero C. (2014). *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology.* 1- 17. Recuperado desde: file:///C:/Users/PAJA-07/Downloads/erroresestadis.pdf

Batanero C, Godino J, Green R, Holmes P. y Vallencillos A. (1994). *ERRORES Y DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS ESTADÍSTICOS ELEMENTALES.* Academia.edu. 1-17. Recuperado de: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/33982022/Batanero__C_Errores_y_dificultades_en_la_comprension_de_los_conceptos_estadisticos.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1543687764&Signature=fCGNRIcifXbPFl99egjRbracWA4%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DERRORES_Y_DIFICULTADES_EN_LA_COMPRENSION.pdf

Brousseau G. (1986). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des mathématiques.* United States of America. Kluwer. Recuperado de: https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=1VK1BwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR13&dq=Brousseau+G.+(1986).+Theory+of+Didactical+Situations+in+Mathematics&ots=2yMvTL2kcm&sig=2S7-ab8Y_PM9KmKaiOTyaFPwjrs#v=onepage&q&f=false

Del Puerto S y Minnaard C. (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas.* Universidad CAECE, Argentina. Buenos Aires-Argentina. Revista Iberoamericana de Educación. Vol. 38 No. Recuperado de: https://digital.cic.gba.gob.ar/handle/11746/4668

D'Amore B. y Fandiño M. (2001). *Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica".* Educación matemática Vol. 14 No. 49-61. Recuperado desde: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol14/04Amore.pdf

El país. (06 de diciembre de 2016). *Colombia mejoró sus resultados en las pruebas Pisa pero sigue por debajo de la media. E*l país. Recuperado desde: https://www.elpais.com.co/colombia/mejoro-sus-resultados-en-las-pruebas-pisa-pero-sigue-por-debajo-de-la-media.html

Gaviria W, Velasco E, Castaño R, Chávez M, Cerón A y Guevara J, (2007). *Educación para nutrir la vida, acuerdos para la convivencia.* Santiago de Cali-Colombia: Editorial FERIVA.

Godino J. (2004). MATEMÁTICAS PARA MAESTROS. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada 18071 Granada. 1-21.

Hernández R., Fernández C. y Baptista P. (2004). *METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.* McGraw-Hill Interamericana. 1- 533. Recuperado de: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/38911499/Sampieri.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1543701962&Signature=ymuI1%2Bu87tcKDJIP9rHmAZHTHzw%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DSampieri.pdf

Lay D. (2007). *ÁLGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES.* México D.F. 1- 584. Recuperado de: https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=lTIVrKT9CMIC&oi=fnd&pg=PR13&dq=David+Lay+Una+ecuaci%C3%B3n+lineal+en+las+variables+x_1,x_2,%E2%80%A6.,x_n+++es+una+e

cuaci%C3%B3n+que+puede+escribirse+de+la+forma+%E3%80%96a_1+x%E3%80%97_1,%E3%80%96a_2+x%E3%80%97_2,%E2%80%A6.,%E3%80%96a_n+x%E3%80%97_(n+)%3Db,+donde+b+y+los+coeficientes+a_1,+a_2,%E2%80%A6,a_n+son+reales+o+complejos&ots=NyZWpTnAv8&sig=B9S1-UjPXGjWReKiHbU7bJf-dcg#v=onepage&q&f=false

Malisani, E. (1999). *LOS OBSTACULOS EPISTEMOLOGICOS EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO VISION HISTORICA.* 1- 26. Recuperado de: http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

Ministerio de Educación Nacional, 2006. *Estándares Básicos de Competencias.* Santa Fe de Bogotá- Colombia: Editorial Escribe y Edita.

Sáenz, J. (2014). *DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA BASADA EN MÉTODOS INFORMALES PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.* Universidad Nacional. 1- 138. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/18960/1/2806944-2014.pdf

Sánchez E. (2011) RAZONES, PROPORCIONES Y PROPORCIONALIDAD EN TÉRMINOS DE VARIACIÓN Y CORRELACIÓN ENTRE MAGNITUDES: UNA POSIBLE FORMA PARA COMPRENDER LA CONSTRUCCIÓN DE DICHOS OBJETOS MATEMÁTICOS. Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación. UNIVERSIDAD DEL CAUCA. 1 – 205.

Trigueros M. y Ursini S. (1999). *La conceptualización de la variable en la enseñanza media.* Instituto Tecnológico Astronómico de México. Ciudad de México-México. 27-48. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/10214/1/Conceptualizacion2000Trigueros.pdf

Villalba M y Hernández V. *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas*. 1-56. Recuperado desde: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/34037997/FundamentosBrousseau.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1543602842&Signature=HxMH6oK

%2F0iTYlaamvFN8d9aqk0M%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DFundamentos_Brousseau.pdf

Zamudio G. (2008). *Los tres principios de la lógica aristotélica: ¿son del mundo o del hablar?* Universidad Pedagógica Nacional. Folios, Segunda época No 27. 24- 30. Recuperado de: http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/RF/article/view/6091/5050