RECONOCIMIENTO DE LAS POTENCIALIDADES DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

LEIDY VIVIANA RIVERA GORDILLO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
POPAYÁN
2019

RECONOCIMIENTO DE LAS POTENCIALIDADES DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

LEIDY VIVIANA RIVERA GORDILLO

Directora:
Mag. Yeny Leonor Rosero Rosero

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
POPAYÁN
2019

Nota de Aceptación

____

____

____

____

____

Directora____

Mag. Yeny Leonor Rosero Rosero

Evaluador____

Mag. Eruin Alonso Sánchez Ordóñez

Coordinador_______________________________________

Mag. Ángel Hernán Zúñiga Solarte

Popayán, 19 de julio de 2019

Dedicatoria

A mis padres Ary Fernán y Elvia Gordillo
y a mis hijos María Fernanda y Emilio

Agradecimientos

Primeramente quiero manifestar mi agradecimiento a la directora de esta sistematización, Mag. Yeny Leonor Rosero Rosero, por el apoyo, dedicación y comprensión brindado durante el proceso de realización de este trabajo. Su rigurosidad y respeto a mis ideas y sugerencias me permitió culminar esta etapa de la mejor manera, sobrepasando mis expectativas respecto al resultado final.

Agradezco también al Mag. Eruin Alonso Sánchez Ordóñez, por su ayuda y dirección en el inicio de la práctica pedagógica investigativa y por sus enseñanzas durante mi formación académica en la universidad.

Asimismo, expreso mi agradecimiento a todos los profesores que me orientaron durante mi formación universitaria, en especial a la Dra. Aida Patricia González, al Dr. Francisco Enríquez, a la Dra. Gabriela Arbeláez y a la Mag. Liliana Jiménez Urrea.

Gracias a mis padres por su apoyo, esfuerzo y dedicación incondicional durante toda mi vida, por los valores que me inculcaron y por darme lo mejor en la medida de sus posibilidades.

A mis hermanos, por su ayuda, apoyo y por ser parte importante de mi vida.

A mis amigos porque también han sido un apoyo moral y humano en todo momento.

Y sobre todo doy gracias a Dios por cada una de sus bendiciones, por mi familia, mis hijos, mis amigos, por todas las personas y circunstancias que ha puesto en mi vida, por ser mi fortaleza en momentos de dificultad.

Contenido

Lista de figuras

Introducción

En el presente trabajo se presenta parte del proceso de la práctica pedagógica investigativa realizada en la Escuela Normal Superior de Popayán, durante el primer periodo del año lectivo 2013 con los estudiantes del curso noveno A, y tiene como objetivo dar a conocer las potencialidades de estos estudiantes al resolver varias situaciones problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales 2x2 sin tener conocimientos previos sobre los métodos de solución.

Este documento se divide en dos partes: la primera, que se ha denominado la práctica pedagógica, contiene una descripción de los elementos de la triada didáctica que son alumno, maestro y saber, y de las relaciones que se dan entre ellos; teniendo en cuenta los planteamientos de D´Amore y Fandiño en el documento *Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica"* y los diarios de campo elaborados durante la intervención en el aula.

En la segunda parte se desarrolla una reflexión y análisis de los resultados obtenidos durante la práctica pedagógica; aquí se presentan los referentes teóricos que amparan este trabajo y lo dotan de sentido para lograr los objetivos planteados, tanto desde la educación matemática como desde la matemática. Y en lo que concierne a los análisis de resultados se examinó todo el material que se recolectó como evidencia.

Justificación

Para un espíritu científico todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no ha habido pregunta no puede haber conocimiento científico. Nada viene solo, nada es dado. Todo es construido.

BACHELARD, La formación del espíritu científico

Ronald Charnay (1993) afirma que la historia de la matemática ilustra bien esta cita, pues las matemáticas son una construcción del ser humano producto de las respuestas a una serie de preguntas que han sido traducidas en problemas; estas, variadas en sus orígenes y contextos (división de tierras, cálculo de créditos, problemas planteados en estrecha vinculación con otras ciencias como astronomía, física, entre otros), tienen sus raíces en necesidades básicas pero luego trasciende estos fines. Por tanto, se puede afirmar que la actividad de resolución de problemas ha sido el núcleo de la construcción de la ciencia matemática, pero esta construcción se ha realizado con dificultad, pues encontrar solución a problemas no es a menudo sencillo. Éstas se han logrado también, gracias a los aportes de otras personas que se han interesado y trabajado en lo mismo. Sin embargo, los resultados que se conocen son descontextualizados, ya que se deja de lado el proceso de producción de conocimiento (las conjeturas, dudas, modelos concurrentes, intuiciones brillantes y momentos de axiomatización y síntesis), que hacen parte inherente del quehacer del investigador y solo se muestran los hallazgos formales.

De lo anterior resulta la idea de presentar a los estudiantes un taller sobre sistemas de ecuaciones lineales sin que éstos tuvieran conocimientos previos de los métodos de solución, para permitirles recrear la actividad científica del matemático, esto es, darles la oportunidad de formular hipótesis, validarlas y en caso de ser necesario, reformularlas, es así como “las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje.” (Lineamientos Curriculares, 1998, pág. 24).

Así mismo, Miguel de Guzmán (1993) plantea que:

> la enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces (p. 73).

Este autor considera que lo más importante es que los estudiantes manipulen los objetos matemáticos, activen su propia capacidad mental y reflexionen sobre su propio proceso de pensamiento, con el fin de mejorarlo conscientemente. En efecto, esta modalidad de aprendizaje permite a los estudiantes desarrollar habilidades como: hacer transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental, adquirir confianza en sí mismos, divertirse con su propia actividad mental, prepararse para otros problemas de la ciencia, de la vida cotidiana y los nuevos retos de la tecnología.

Fue este trabajo lo que hizo posible resaltar la importancia de los conocimientos previos que tienen los estudiantes, pues dichos saberes son la base del proceder de los alumnos y de su aprendizaje. En la resolución de problemas, los estudiantes no solo repiten algoritmos matemáticos que conocen, sino que es necesario que hagan análisis y resignifiquen los conocimientos previos en situaciones nuevas, además, de adaptarlos y transferirlos para solucionar los problemas planteados.

I. La Práctica Pedagógica

Al describir y analizar la práctica educativa es necesario hacer alusión a las relaciones que se dan entre los estudiantes, el maestro y el saber en el aula, como elementos fundamentales en la didáctica de las matemáticas. En este sentido Chevallard, citado por D`Amore (2006), propone la reflexión del triángulo que tiene como vértices los sujetos mencionados y donde sus lados representan las múltiples relaciones que se establecen entre ellos.

Por tanto, en este trabajo se hace la reflexión y el análisis de las relaciones que se dieron en el aula durante la práctica pedagógica, a través de una caracterización de los elementos que conforman los vértices del triángulo de la didáctica y describiendo las relaciones Saber – Estudiante, Saber – Maestro y Maestro – Estudiante que conforman sus lados, de acuerdo con los planteamientos de D`Amore y Fandiño (2002)

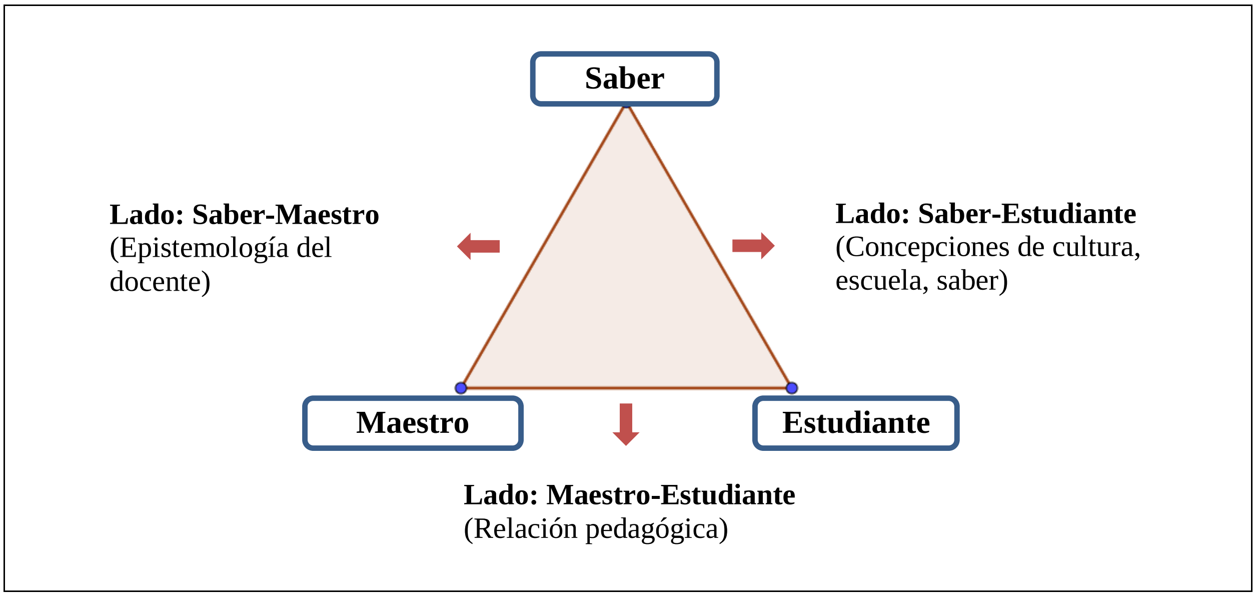


Figura 1. Triángulo: maestro, estudiante, saber.

1. Los Vértices

1.1. Saber. Para Chevallard, explicado por D`Amore (2006), el saber se entiende como el “saber sabio” y pertenece al dominio de la disciplina, en este caso, de las matemáticas, es decir, se considera el saber de la investigación matemática, el historizado, el académico.

En este sentido, el saber estudiado en la práctica lo conforman los temas: plano cartesiano, función lineal, función afín, pendiente y ecuación de la recta, posición relativa de dos rectas en el plano, lenguaje matemático y sistemas de ecuaciones lineales; de este se analizaron definiciones, teoremas, características y aplicaciones, que fueron tomados de los textos escolares: matemáticas

9 de Santillana, álgebra de Baldor, guías para enseñar y aprender matemáticas, matemáticas 1º ESO y desafíos matemáticos 9 y del texto universitario álgebra y trigonometría con geometría analítica. Algunos de los problemas de aplicación se modificaron agregando o eliminando preguntas.

Para efectos de este trabajo, el objeto de estudio es la solución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales. Las definiciones de sistemas de ecuaciones lineales y solución de un sistema de ecuaciones consideradas fueron:

Sistema de ecuaciones lineales: (Santillana, 2010)

Un sistema de ecuaciones es un conjunto formado por dos o más ecuaciones, cada una de ellas con dos o más incógnitas.

El sistema formado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{array}{c} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array} \quad \text{con } a, b, c, d, e, f \text{ números reales}$$

recibe el nombre de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Solución de un sistema de ecuaciones:

Resolver el sistema consistirá en hallar las soluciones x e y, que los satisfagan. (Socas, Camacho, Palarea, & Hernandez, 1989)

1.2. Estudiante. En este proceso participaron treinta y seis (36) estudiantes del curso noveno A, de la Escuela Normal Superior de Popayán, año lectivo 2013, de los cuales el 50% son mujeres, sus edades oscilan entre los trece (13) y dieciséis (16) años, repartidos de la siguiente manera: dos (2) estudiantes de trece (13) años, dieciocho (18) estudiantes de catorce (14) años, catorce (14) estudiantes de quince (15) años y dos (2) estudiantes de dieciséis (16) años. Lo anterior indica que se trata de un grupo de adolescentes, de acuerdo a la Ley 1098 de 2006 en su Artículo tercero.[1] (Figura 2)

---

[1]**Artículo 3°.** *Sujetos titulares de derechos*. Para todos los efectos de esta ley son sujetos titulares de derechos todas las personas menores de 18 años. Sin perjuicio de lo establecido en el artículo 34 del Código Civil, se entiende por niño o niña las personas entre los 0 y los 12 años, y por adolescente las personas entre 12 y 18 años de edad.

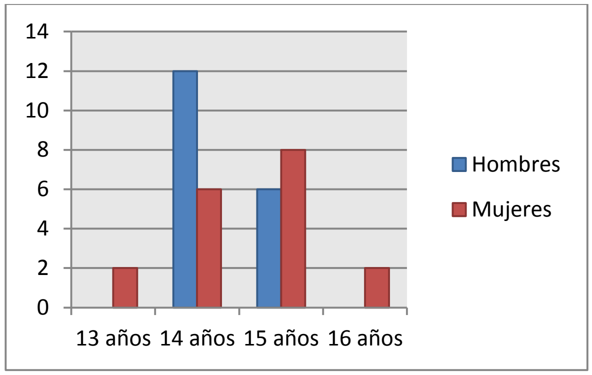


Figura 2. Diagrama de barras para las edades

De este curso, cuatro (4) pertenecen a un grupo étnico (tres (3) al grupo indígena Yanacona y uno (1) al Misak o Guambiano), los demás son mestizos. Dieciocho (18) estudiantes viven en barrios de estrato uno (1), cuatro (4) en barrios de estrato dos (2), trece (13) en barrios de estrato tres 3, y un (1) estudiante en un barrio de estrato cuatro (4). Tres (3) de ellos están en situación de desplazamiento. Además provienen de hogares de entre tres (3) y catorce (14) personas, y aproximadamente el 54% de los padres o acudientes tienen trabajos independientes, el otro 46% son empleados. (Figura 3)

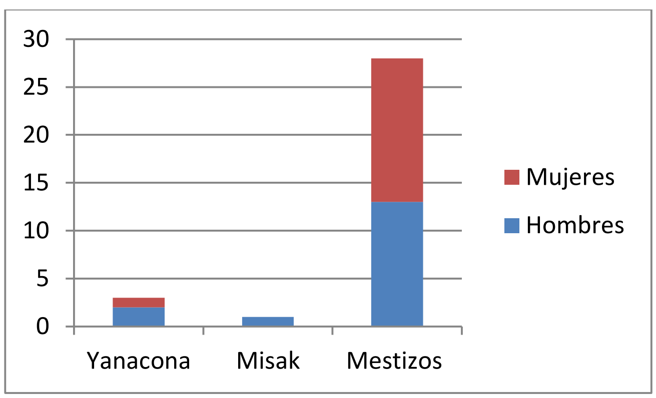


Figura 3. Distribución de pertenencia étnica

La institución cuenta con el proyecto “Mientras Cambia la Escuela”[2], en el cual participan los estudiantes de noveno y esto les permite tener la posibilidad de establecer buenas relaciones

[2] “La misión de la Normal Superior de Popayán es formar maestros para preescolar y primaria con habilidad en leer, interpretar y transformar la realidad. Enmarcados en esta misión los docentes de Mientras Cambia la Escuela recurren a los elementos conceptuales, contextuales y proyectivos propuestos por la Política Nacional de Educación Ambiental, y se aproximan a los planteamientos de escuela, currículo y maestro de la “Pedagogía Crítica” a fin de fortalecer la formación de maestros como ciudadanos comprometidos en la búsqueda de la sostenibilidad de la microcuenca río Ejido, como espacio de desarrollo local, y lograr que las futuras generaciones le den un nuevo significado a su territorio.”

entre todos los estudiantes que pertenecen a este proyecto, puesto que los profesores que lo lideran, cada año intercambian de curso a los estudiantes, para que se conozcan. En este curso, no hubo estudiantes repitentes pero sí un estudiante que ingresó de otra institución educativa.

1.3. Maestro. El profesor de matemáticas asignado para el curso es Licenciado en Matemáticas y Física, Área Mayor Matemáticas, egresado de la Universidad de Nariño, y en 1994 obtuvo el título de Especialista en Finanzas en la Universidad del Valle. Tiene treinta y tres (33) años de experiencia como docente en matemáticas y física, y durante los últimos diez (10) años ha trabajado como docente en la Escuela Normal Superior de Popayán.

Él se identifica con los modelos pedagógicos activo y conductista, prepara sus clases por unidades y en el desarrollo de estas inicia con una introducción al tema, luego explica los conceptos y establece relaciones entre ellos y deriva las fórmulas. Por último realiza aplicaciones del tema, en ocasiones utiliza las TIC mostrando videos sobre la temática que está trabajando, que posibiliten visualizar lo que no se puede hacer en el tablero, como por ejemplo, mostrar gráficas de funciones en tres dimensiones y los movimientos de traslación y rotación que se pueden hacer con ellas; emplea herramientas como geogebra para trabajar temas del álgebra, geometría y otros aspectos de las matemáticas, que permite la manipulación y construcción de distintos elementos y deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

El objetivo principal de la enseñanza de la asignatura es que el conocimiento sea útil a los estudiantes y hace referencia a tres aspectos: primero, que los estudiantes tengan bases para estudios posteriores; segundo, que puedan ver las aplicaciones del tema a corto plazo para motivarlos; y tercero, desarrollar el pensamiento en general y matemático en particular.

La estrategia para motivar a los estudiantes es que vean las matemáticas como una herramienta tanto para desenvolverse en las diferentes actividades de la vida, como en la formación personal y profesional.

En ese proceso intervienen dos estudiantes de Práctica Pedagógica del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca, quienes se identifican con un modelo pedagógico conductista y constructivista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Consideran que los estudiantes aprenden a construir, intuitivamente, el conocimiento matemático a partir de la resolución de problemas, teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y las relaciones que se pueden establecer con lo que se debe aprender.

---

http://aplicaciones2.colombiaaprende.edu.co/prae/praes/normal_superior_de_popayan

2. Los Lados

2.1. Saber – Estudiantes. Para el proceso de enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales se elaboró un taller (anexo N° 1) como actividad inicial, con el propósito de que los estudiantes reflexionaran sobre definiciones, algunas de ellas nuevas, y conocimientos previos, para así buscar estrategias que les permitieran solucionar las diferentes situaciones problema que se les presentaron. Para ello, independientemente de la estrategia elegida, era necesario que tuvieran dominio sobre los siguientes contenidos matemáticos:

- operaciones con los números reales
- transición del enunciado verbal al lenguaje algebraico
- operaciones con polinomios
- reducción de términos semejantes
- resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita y aplicación a la resolución de problemas

Por otra parte, los elementos problemáticos que podrían ser un impedimento para llegar a la solución correcta, se relacionan con la falta de comprensión de las definiciones dadas sobre sistemas de ecuaciones lineales, su solución y las posibles falencias que tuvieran los estudiantes sobre los temas que se consideran como conocimientos previos.

2.2. Saber – Maestro. Según D`Amore y Fandiño (2002), los elementos que caracterizan este lado son la transposición didáctica y las creencias del maestro sobre el aprendizaje, el alumno, el saber, la escuela y los objetivos de la educación en general y matemáticas en particular.

Sobre la transposición didáctica

El vínculo entre el saber matemático y el saber a enseñar está dado por las concepciones epistemológicas del docente "entendidas como el conjunto de expectativas, convicciones, saberes, etc. que el maestro tiene sobre el saber, la escuela, el aprendizaje, la función y el rol de la escuela en la educación, etc." (D`Amore & Fandiño, 2002)

Así, la Escuela es una institución social encargada del proceso de enseñanza y aprendizaje, creada por la necesidad de completar la acción educativa de la familia y de generar las competencias intelectivas, habilidades y destrezas para que niños (as) y jóvenes puedan incorporarse a la sociedad.

Partiendo de los planteamientos del modelo pedagógico constructivista de Ausubel, el aprendizaje del alumno no solo dependerá del conjunto de conceptos que tienen los estudiantes y su organización, sino también de la relación existente con la nueva información. Además, si esta nueva información puede interactuar con los conceptos que posee el educando de tal manera que adquieran significado y se integren en su estructura cognitiva, se dice que el aprendizaje es significativo.

Dicha integración y significado se darán con el aporte de la experiencia previa y personal de cada estudiante, por lo cual deja de ser un ente pasivo, cuyo papel en el proceso de enseñanza y aprendizaje es el de simple receptor y pasa a ser un ente activo en la construcción del propio conocimiento.

Desde el modelo constructivista de Ausubel, el profesor es un facilitador y estimulador de experiencias que permite que el aprendizaje ocurra en los estudiantes, suscitando dudas e interrogantes sobre los conocimientos previos y proporcionando oportunidades a los estudiantes para opinar y explicar los eventos que ocurren.

Por lo anterior, es importante hablar sobre el currículo, pues según Flórez (2005), este:

> es el mediador entre la teoría y la realidad de la enseñanza, es el plan de acción específico que desarrolla el profesor con sus alumnos en el aula, es una pauta ordenadora del proceso de enseñanza. Y cada teoría, cada modelo pedagógico genera una propuesta de currículo diferente. (…) Por eso un plan de estudios es apenas un esquema para distribuir contenidos, temas, materias y cursos según niveles y prerrequisitos. Pero un currículo es mucho más, pues implica una concepción acerca de los contenidos, las experiencias y la actuación y secuencia para que los alumnos alcancen las metas de formación (p.291)

Respecto a las creencias y actuaciones de la estudiante de práctica, identificada con los modelos pedagógicos conductista y constructivista, tenía como propósito para sus clases facilitar la adquisición de destrezas y el desarrollo de habilidades de pensamiento en los estudiantes del curso noveno A. El taller, que es objeto de análisis para este trabajo, se enmarca en el modelo pedagógico constructivista.

Para determinar el saber a enseñar, primero se identifica el saber, sistemas de ecuaciones lineales. Luego, teniendo en cuenta los estándares básicos de competencias en matemáticas y el plan de estudios de matemáticas de la ENSP respecto a este tema se encuentra:

- *"Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales"* (MEN M. d., 2006, pág. 87)

- *"Identificar y aplicar el concepto de la función y ecuación lineal. Desarrollar habilidades y destrezas en la resolución de sistemas de ecuaciones 2x2 y 3x3 y aplicar a la resolución de problemas"* (Escuela Normal Supeior de Popayán, 2011)

Así, el saber a enseñar es la resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

2.3. Maestro – Estudiantes. Las relaciones humanas se refieren a la interacción con las personas, aspecto esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Estos procesos están condicionados por factores neurológicos, actitudinales, aptitudinales, y por las relaciones entre los estudiantes y el maestro, de las que hacen parte fundamental los sentimientos de los aprendices hacia el maestro y viceversa. Dicha relación puede ser formal o informal, estrecha o distante, antagónica o cooperativa, individual o colectiva (Dalton, Hoyle, & Watts, 2007).

Relación estudiante – Practicante. La relación entre los estudiantes y el maestro ha ido cambiando a lo largo de la historia. En décadas pasadas los estudiantes estaban "relegados al plano de simples espectadores" (Zambrano, 2002) ahora se apuesta por darle el papel protagónico en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esto ha traído como consecuencia que los educadores sientan la necesidad de buscar ambientes propicios que mejoren su relación con los estudiantes dentro y fuera de las aulas de clase, y además que faciliten y estimulen dichos procesos.

En el inicio de la experiencia de la práctica docente, en la que se tiene a cargo un grupo de adolescentes, intervienen diversos elementos en la relación maestro-estudiante. Uno de ellos es la identificación y reconocimiento de cada uno de los estudiantes por sus nombres; otro es la identificación de aptitudes, potencialidades, virtudes, fortalezas y dificultades, referidas a aspectos tales como la participación en clase, el dominio oral y escrito de los conceptos matemáticos, la responsabilidad, la relación entre compañeros, entre otros.

Pero antes de esta identificación, está la primera impresión que tienen los estudiantes del maestro, y viceversa. Aspectos como la forma de comunicarse, los gestos, el tono de voz, el temperamento son las primeras características que observan los aprendices. Mientras tanto, el maestro advierte la reacción del curso en general, lo que le brinda una idea prematura de cómo relacionarse con los estudiantes y qué cambios debe hacer. En el aula es necesario analizar este tipo de situaciones para lograr el ambiente que se considera propicio para el desarrollo de las clases.

La experiencia demuestra que los factores sociales inciden en las relaciones, en particular en las relaciones escolares. La comunicación con los estudiantes permitió conocer aspectos de sus personalidades que se tuvieron en cuenta a la hora de interactuar con ellos. Se trató de hablar su mismo lenguaje, que vieran en el practicante un amigo o compañero y no solamente una figura de autoridad, que no tuvieran miedo de preguntar o participar en clase, y sobretodo que percibieran el aula como un espacio de enseñanzas y aprendizajes recíprocos entre maestro y estudiantes, en donde eran válidos tanto los aciertos como las equivocaciones.[3]

Por otro lado, al finalizar la intervención de la práctica se les pidió a los estudiantes que evaluaran el trabajo realizado por la profesora practicante. Las observaciones que hicieron fueron diferentes. La mayoría de los hombres manifestaron que la practicante debía ser más estricta, mientras que la mayoría de las mujeres expresaron lo contrario.

Relación estudiante – estudiante. Teniendo en cuenta que todos los estudiantes se conocían entre sí y gracias a la metodología empleada por el profesor titular de la materia, los estudiantes participaban activamente en clase, no tenían miedo de salir al tablero, preguntar, responder los interrogantes que surgían en clase, ni equivocarse, y si esto ocurría no se presentaban situaciones de burla por parte de los compañeros que se pudieran interpretar como una agresión.

Con respecto a la participación en los trabajos en grupo, se ayudaban mutuamente. Además, los grupos de trabajo los formaban ellos mismos y eran integrados, unos por hombres y mujeres, y otros solo por hombres o solo por mujeres. Vale la pena resaltar que los grupos de trabajo no siempre eran los mismos grupos de “amigos”, esto se evidenciaba más en los grupos mixtos. En algunos casos la escogencia dependía del rendimiento académico.

Relación maestro titular –practicante. El maestro titular le dio a la practicante total libertad y autonomía en la realización de las clases y evaluaciones, además de respetar, ayudar y apoyar el proceso que esta última llevaba a cabo.

Las ideas sobre el dominio de un curso y la manera de enseñar del profesor titular eran distintas a las de la practicante. El profesor titular tenía un orden establecido, primero explicaba la teoría, luego daba ejemplos y por último planteaba una serie de ejercicios. Contrario a esto y en la medida de las posibilidades, la practicante invirtió el orden. Primero se les presentaba a los

---

[3] Un aspecto problemático en esta relación se dio en lo referente a las evaluaciones escritas, pues parecía que la mayoría de los estudiantes estaban acostumbrados a no estudiar para las evaluaciones ya que tenían la posibilidad de mejorar la calificación en el examen de recuperación.

estudiantes algunos problemas, luego se les explicaba la teoría o los métodos de solución y por último se proponían problemas de aplicación. Por otra parte, el profesor titular tenía una percepción diferente sobre el comportamiento de los estudiantes dentro del aula de clase y sobre la relación existente entre el educador y el educando.

II. Reflexión de la Práctica Pedagógica

La sistematización en la práctica pedagógica.

La sistematización es aquella interpretación crítica de una o varias experiencias que, a partir de su ordenamiento y reconstrucción, descubre o explicita la lógica del proceso vivido en ellas: los diversos factores que intervinieron, cómo se relacionaron entre sí y por qué lo hicieron de ese modo. La Sistematización de Experiencias produce conocimientos y aprendizajes significativos que posibilitan apropiarse de los sentidos de las experiencias, comprenderlas teóricamente y orientarlas hacia el futuro con una perspectiva transformadora (Jara)

La sistematización de experiencias tiene varios enfoques, (Uribe, Balderrama, Barrios, & Crespo, 2008) ellos son:

- Descriptivo: reconstruye, narra una experiencia
- Investigación acción pedagógica: focaliza la práctica docente en micro procesos de clase y el desarrollo del currículo, como objeto.
- Reflexión de la práctica o de la acción: se acerca a la práctica desde conocimientos previos, para teorizar y revelar el saber tácito.
- Interpretativo: Construcción de sentido sobre la acción.
- Narrativo: Reconstruye, documenta, comprende e interpreta el saber pedagógico a través de narrar sus prácticas, por escrito.

En este trabajo, el enfoque de la sistematización será el de la reflexión de la práctica o de la acción.

1. Formulación de la Pregunta de Sistematización

¿Cómo los estudiantes del curso noveno A de la Escuela Normal Superior de Popayán, año lectivo 2013, abordan problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas sin tener conocimientos previos de los métodos de solución?

2. Objetivo de la Sistematización

2.1 Objetivo general.

Dar a conocer las potencialidades que tienen los estudiantes del curso noveno A de la Escuela Normal Superior de Popayán, año lectivo 2013, en la resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas sin tener conocimientos previos de los métodos de solución.

2.2 Objetivos específicos.

2.2.1. Identificar las estrategias de solución empleadas por los estudiantes en la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas sin tener conocimientos previos de los métodos de solución.

2.2.2. Describir las formas de representación utilizadas en la resolución de problemas.

2.2.3. Clasificar las potencialidades que tienen los estudiantes en la resolución de problemas.

3. Antecedentes

Segura (2004) manifiesta que los errores que cometen los estudiantes en el proceso de aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales se atribuyen a diferentes causas, entre ellas están las siguientes dificultades:

- Al operar números reales
- En las representaciones en el plano cartesiano
- En el cambio del lenguaje verbal al algebraico
- De interpretación de problemas

Señala que en la enseñanza tradicional son numerosos los errores en que incurren los alumnos. Por ejemplo presentan dificultades para usar las operaciones aritméticas elementales en problemas dados en registro verbal que involucran sistemas de ecuaciones. Además, no realizan correctamente el pasaje del lenguaje verbal al algebraico de un problema de sistema de ecuaciones lineales y pocas veces efectúan representaciones y resoluciones gráficas de sistema de ecuaciones lineales.

También afirma que algunas de estas dificultades están ligadas, unas a la complejidad matemática de los conceptos básicos necesarios para la adquisición de los sistemas de ecuaciones lineales, como lo son los números reales y función afín; otras al concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su solución, y otras más a la ruptura que se da entre el pensamiento aritmético y el algebraico.

En este documento se puede apreciar cómo se puede facilitar el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales planteando al estudiante actividades que lo induzcan a pasar por situaciones de acción, formulación y validación.

4. Marco teórico

Para la conceptualización de este trabajo, se presentarán varios referentes teóricos, unos relacionados con Educación Matemática y otros con Matemática, además se establece la definición de potencialidad que se adoptará en este trabajo.

4.1 Referentes teóricos desde la educación matemática.

4.2.2. ***Modelo pedagógico constructivista.*** Flórez (2005) sostiene que en este modelo pedagógico se pueden diferenciar cuatro corrientes. Ellas son:

a) Su primera corriente tiene como meta educativa que cada individuo acceda, progresiva y secuencialmente, a la etapa inmediatamente superior de su desarrollo intelectual de acuerdo a las necesidades y condiciones particulares. Para ello, el maestro debe crear un ambiente estimulante de experiencias que faciliten en el estudiante su acceso a las estructuras cognoscitivas de la etapa subsiguiente. En consecuencia, el contenido de dichas experiencias es secundario, lo importante es que este contribuya al afianzamiento y desarrollo de la capacidad de pensar, reflexionar. Dewey, Piaget y Kolhberg son inspiradores de este modelo.

b) Una segunda corriente se ocupa del contenido de la enseñanza y del aprendizaje. En esta corriente se inscriben Bruner y Ausubel. El primero propone la enseñanza por descubrimiento, en ella los alumnos realizan su aprendizaje a medida que experimentan y consultan bibliografía sobre el tema, analizan la información con la lógica del método científico y deducen sus propios conocimientos. El segundo plantea la enseñanza del contenido de la ciencia como un aprendizaje que el estudiante tornará significativo gracias al aporte de su experiencia previa y personal, pues dicho aporte lo convierte en un ente activo y constructor de su propio aprendizaje.

c) Una tercera corriente orienta la enseñanza y el currículo hacia la formación de habilidades cognitivas, consideradas más importantes que el contenido en que se desarrollan.

d) La cuarta corriente, social-cognitiva, basa los éxitos de la enseñanza en la interacción y la comunicación entre los estudiantes "y en el debate y la crítica argumentativa del grupo para lograr resultados cognitivos y éticos colectivos y soluciones a los problemas reales comunitarios mediante la interacción teórico-práctica." (p. 192)

A pesar de las diferencias existentes entre las cuatro corrientes constructivistas, ellas comparten varias características. Algunas de ellas son:

- Empeña su enseñanza en lograr que los estudiantes aprendan a pensar, se auto enriquezcan en su interioridad con estructuras, esquemas y operaciones mentales internas que les permitan pensar, resolver y decidir con éxito situaciones académicas y vivenciales.
- Los aprendizajes deben ser significativos y requieren la reflexión, comprensión y construcción de sentido. La mente no es una estructura plana sobre la cual se imprimen representaciones de las cosas; es una estructura multidimensional activa y transformadora que produce ideas y teorías a partir de su anterior experiencia y de su acción sobre ellas.
- Los aprendices no son receptores pasivos de información, lo que reciben lo reinterpretan desde su mundo interior para producir sus propios sentidos.
- La organización del conocimiento no se presenta como marcha de lo simple a lo complejo, o de la parte al todo, sino que el todo siempre está presente desde el principio de la enseñanza, aunque deba avanzarse para la comprensión a otros niveles de profundidad. El sentido es necesario desde el principio para lograr aprendizajes significativos.
- El aprendizaje significativo requiere confirmación, retroalimentación que permita corregir errores o ajustar desviaciones mediante el debate y la discusión con pares.
- La evaluación del aprendizaje significativo no se diferencia de la realimentación permanente del proceso de conocimiento del alumno desde el cual empieza a cuestionarse su saber previo. La generación del conflicto cognitivo, la formulación de nuevos sentidos o conjeturas que interpreten de manera coherente la situación problemática (incluyendo las diferentes formas de representación del problema) y las experiencias de confirmación de la hipótesis, son fases claramente diferenciadas que permiten la observación y el seguimiento del profesor, sin perder el sentido genético de los logros de aprendizaje al final del proceso y disponiendo de un marco de sentido global para interpretar los avances de cada alumno, cualquiera que sea el nivel de competencia alcanzado en el tema.

4.1.2. Teoría de aprendizaje. Las teorías del aprendizaje pretenden describir los procesos que permiten que una persona aprenda algo. Estas teorías ayudan a comprender, predecir y controlar el comportamiento de los aprendices por medio de la elaboración de estrategias que faciliten el acceso al conocimiento. Las teorías de aprendizaje que se expondrán a continuación tienen estrecha relación con el modelo pedagógico constructivista, por ello se hará un resumen de las teorías de aprendizaje propuestas por David Ausubel y Lev Vigotsky.

- ➢ *Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel.*

"Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente". Ausubel

Para Ausubel, el aprendizaje del alumno no solo dependerá del conjunto de conceptos que tienen los estudiantes y su organización, sino también de la relación existente con la nueva información. Afirma, además, que el aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial con los conocimientos que el estudiante posee. Esto significa que las ideas nuevas se deben relacionar con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición. En síntesis, Ausubel considera importante tener en cuenta lo que el estudiante sabe de tal manera que establezca una relación con lo que debe aprender. Esto ocurre si el educando tiene en su estructura cognitiva conceptos, estables y definidos, con los cuales la nueva información puede interactuar.

> El aprendizaje significativo se da cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante ("subsunsor") pre existente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras (Ausubel, s.f)

- *Aprendizaje y desarrollo según Vigotsky.* Para Vigotsky (1979) el aprendizaje y el desarrollo están interrelacionados desde el nacimiento del niño y son apoyados por personas que se consideran más capacitadas en cuanto al manejo del lenguaje, habilidades y tecnologías disponibles en el espacio cultural. En este sentido, afirma que el aprendizaje humano presupone una naturaleza social específica y un proceso, mediante el cual los niños acceden a la vida intelectual de aquellos que les rodean. Y al hablar del aprendizaje escolar, define un concepto importante en su teoría: la zona de desarrollo próximo, la cual no es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz.

¿Qué es lo que define la zona de desarrollo próximo, determinada por los problemas que los niños no pueden resolver por sí solos, sino únicamente con la ayuda de alguien? Dicha zona define aquellas funciones que todavía no han madurado, pero que se hallan en proceso de maduración, funciones que en un mañana próximo alcanzarán su madurez y que ahora se encuentran en estado embrionario. Estas funciones podrían denominarse «capullos» o «flores» del desarrollo, en lugar de «frutos» del desarrollo.

Postula también que lo que crea la zona de desarrollo próximo es un rasgo esencial de aprendizaje; es decir, que el aprendizaje despierta una serie de procesos evolutivos internos capaces de operar sólo cuando el niño está en interacción con las personas de su entorno y en cooperación con algún semejante. Una vez se han internalizado[4] estos procesos, se convierten en parte de los logros evolutivos independientes del niño.

Desde este punto de vista, aprendizaje no equivale a desarrollo; no obstante, el aprendizaje organizado se convierte en desarrollo mental y pone en marcha una serie de procesos evolutivos que no podrían darse nunca al margen del aprendizaje.

El constructivismo y el aprendizaje de los estudiantes. Según Díaz y Hernández (2002), los principios educativos asociados con una concepción constructivista del aprendizaje y la enseñanza, son los siguientes:

- El aprendizaje implica un proceso constructivo interno, autoestructurante y en este sentido, es subjetivo y personal.
- El aprendizaje se facilita gracias a la mediación o interacción con los otros, por lo tanto, es social y cooperativo.
- El aprendizaje es un proceso de (re) construcción de saberes culturales.
- El grado de aprendizaje depende del nivel de desarrollo cognitivo, emocional y social, y de la naturaleza de las estructuras de conocimiento.

---

[4]Se entiende por *internalización* a la reconstrucción interna de una operación externa. El proceso de internalización consiste en una serie de transformaciones:

a) *Una operación que inicialmente representa una actividad externa se reconstruye y comienza a suceder internamente.*
b) *Un proceso interpersonal queda transformado en otro intrapersonal.* En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero *entre* personas *(interpsicológica),* y después, en el *interior* del propio niño *(intrapsicológica).* Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones superiores se originan como relaciones entre seres humanos.
c) *La transformación de un proceso interpersonal en un proceso intrapersonal es el resultado de una prolongada serie de sucesos evolutivos.* El proceso, aun siendo transformado, continúa existiendo y cambia como una forma externa de actividad durante cierto tiempo antes de internalizarse definitivamente.

- El punto de partida de todo aprendizaje son los conocimientos y experiencias previos que tiene el aprendiz.
- El aprendizaje implica un proceso de reorganización interna de esquemas.
- El aprendizaje se produce cuando entra en conflicto lo que el alumno ya sabe con lo que debería saber.
- El aprendizaje tiene un importante componente afectivo, por lo que juegan un papel crucial los siguientes factores: el autoconocimiento, el establecimiento de motivos y metas personales, la disposición por aprender, las atribuciones sobre el éxito y el fracaso, las expectativas y representaciones mutuas.
- El aprendizaje requiere contextualización: los aprendices deben trabajar con tareas auténticas y significativas culturalmente, y necesitan aprender a resolver problemas con sentido.
- El aprendizaje se facilita con apoyos que conduzcan a la construcción de puentes cognitivos entre lo nuevo y lo familiar, y con materiales de aprendizajes potencialmente significativos.

4.1.3. Situación didáctica. La teoría de situaciones didácticas es la principal contribución de Guy Brousseau en el campo de la didáctica de las matemáticas, cuya visión sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática era la de una construcción que permite comprender las interacciones sociales entre los estudiantes, profesores y saberes matemáticos que se dan en el aula de clase y que a su vez condicionan lo que aprenden los estudiantes y cómo lo aprenden. (Brousseau, 2007)

En este sentido Gálvez (1993) afirma que el objeto de estudio de la didáctica de matemáticas es la situación didáctica, definida por Brousseau como:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (p. 42)

Estas relaciones están determinadas por la negociación entre los estudiantes y el profesor, cuyo resultado es el contrato didáctico. Este contrato define las reglas de funcionamiento, con cláusulas explícitas e implícitas, dentro de la situación: distribución de responsabilidades, asignación de plazos para la realización de tareas, permiso o prohibición para el utilizar determinados recursos de acción, etcétera.

Gálvez (1993) señala que para Brousseau, el análisis a priori de la situación es fundamental. El investigador en Didáctica debe ser capaz de prever los efectos de la situación que ha elaborado antes de ponerla a prueba en el aula, para después comparar sus previsiones con los comportamientos observados.

Por otra parte, D`Amore (2006), haciendo una interpretación sobre la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, afirma que para que el estudiante "construya" el conocimiento, este debe interesarse por la resolución del problema que se le ha planteado en la situación didáctica. El proceso de resolución del problema es análogo a un juego de estrategia o a un proceso de toma de decisiones. De las diferentes estrategias existentes sólo algunas de ellas llevan a la solución del problema y a que el alumno construya el conocimiento que se requiere para hallar la solución. Así, la teoría de situaciones es una teoría de aprendizaje constructiva en la que el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas y como teoría de resolución de problemas, asigna al resolutor un papel clave.

Añade además que, debido a que el conocimiento matemático incluye conceptos, sistemas de representación simbólica, procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas, se hace necesario considerar cuatro tipos de situaciones que facilitan el análisis de las situaciones didácticas, estas son:

- *Situaciones De Acción*: en donde el alumno explora y trata de resolver problemas; como consecuencia construirá o adquirirá nuevos conocimientos matemáticos; las situaciones de acción deben estar basadas en problemas genuinos que atraigan el interés de los alumnos, para que deseen resolverlos; deben ofrecer la oportunidad de investigar por si mismos posibles soluciones, bien individualmente o en grupos.
- *Situaciones De Formulación*: cuando el alumno pone por escrito sus soluciones y las comunica a otros niños y al profesor, esto le permite ejercitar el lenguaje matemático.
- *Situaciones De Validación*: donde a los estudiantes se les piden pruebas y por lo tanto explicaciones sobre las teorías utilizadas (desarrollar du capacidad de argumentación).
- *Situaciones De Institucionalización*: tienen el objetivo de establecer y dar un status oficial a conocimientos aparecidos durante las actividades en el salón de clase. Normalmente tienen relación con los conocimientos, símbolos, etcétera, que deben retener en vista de un trabajo sucesivo. (D`Amore, 2006) (Godino, Batanero, & Font, 2003)

Gálvez (1993) agrega también que para Brousseau es indispensable diseñar situaciones didácticas que hagan funcionar el saber, a partir de los saberes definidos culturalmente en los programas escolares. Este planteamiento se basa en la tesis de Piaget de que el aprendiz necesita construir por sí mismo sus conocimientos mediante un proceso adaptativo similar al realizado por quienes construyeron los conocimientos que se quieren enseñar. En palabras textuales de Gálves (1993):

> Se trata, entonces, de que los alumnos aprendan haciendo funcionar el saber o, más bien, de que el saber aparezca, para el alumno, como un medio de seleccionar, anticipar, ejecutar y controlar las estrategias que aplica a la resolución del problema planteado por la situación didáctica. (p. 46)

Brousseau, citado por D`Amore (2006) afirma que:

> El estudiante aprende adaptándose a un ambiente que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como la sociedad humana. Este saber fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta con las nuevas respuestas que son la prueba del aprendizaje (…). [El estudiante sabe que] (…) el problema fue seleccionado para hacerle adquirir un nuevo conocimiento pero debe saber también que este conocimiento se halla enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construir sin invocar razones didáctica.

Una situación de esta naturaleza se define como *a-didáctica:* los estudiantes se enfrentan a una situación problemática mientras que el maestro prácticamente no interviene. Las características principales de estas situaciones son:

- Los alumnos se responsabilizan de la organización de su actividad para tratar de resolver el problema propuesto, es decir, formulan proyectos personales.
- La actividad de los alumnos está orientada hacia la obtención de un resultado preciso, previamente explicitado y que puede ser identificado fácilmente por los propios alumnos. Los alumnos deben anticipar y luego verificar los resultados de su actividad.
- La resolución del problema planteado implica la toma de múltiples decisiones por parte de los alumnos, y la posibilidad de conocer directamente las consecuencias de sus decisiones a fin de modificarlas, para adecuarlas al logro del objetivo perseguido. Es decir, se permite que los alumnos intenten resolver el problema varias veces.

- Los alumnos pueden recurrir a diferentes estrategias para resolver el problema planteado, estrategias que corresponden a diversos puntos de vista sobre el problema. Es indispensable que, en el momento de plantear el problema, los alumnos dispongan al menos de una estrategia (estrategia de base) para que puedan comprender la consigna y comenzar su actividad de búsqueda de la solución.
- La manipulación de las variables de comando permite modificar las situaciones didácticas bloqueando el uso de algunas estrategias y generando condiciones para la aparición y estabilización de otras (subyacentes al conocimiento que se quiere enseñar).
- Los alumnos establecen relaciones sociales diversas: comunicaciones, debates o negociaciones con otros alumnos y con el maestro, etcétera.

En este sentido la situación didáctica también se puede concebir como el juego en el que el maestro impulsa a:

> hacer devolver al estudiante una situación a-didáctica que provoca en él una interacción lo más independiente y fecunda posible. Para esto comunica o se abstiene de comunicar, según sea el caso, informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje, heurísticas, etc. Por lo que el maestro se halla implicado, con los problemas que él pone, en un juego con el sistema de interacciones del estudiante (D`Amore, 2006).

4.1.4. Problemas y resolución de problemas. Como se ha expresado anteriormente, el objetivo de este trabajo es dar cuenta de las potencialidades que tienen los estudiantes del curso noveno A de la Escuela Normal Superior de Popayán, año lectivo 2013, en la **resolución de problemas** que involucran sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas sin tener conocimientos previos de los métodos de solución. Por ello se considera necesario establecer la postura acerca de lo que se entiende por problema.

Para Múnera y Obando (2003), una situación problema se puede interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes dinamizan su actividad matemática, al interactuar tanto con el profesor como con los demás compañeros, a través del objeto de conocimiento. De esta manera generan procesos que llevan a la construcción de nuevos conocimientos. Por lo tanto, ella debe permitir la acción, exploración, sistematización, confrontación, debate, evaluación, autoevaluación, heteroevaluación.

Respecto a lo que es una situación problema, Moreno y Waldegg (como se citó en Múnera y Obando, 2003) escriben:

(...) La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva, para que esto suceda debe tener las siguientes características:

- Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.
- Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él.
- Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores (...)

También sostienen que una situación problema debe permitir a los estudiantes desplegar su actividad matemática mediante el desarrollo explícito de una dialéctica entre la exploración y la sistematización. En consecuencia, una situación problema debe tener mecanismos que les permitan a los estudiantes desarrollar de forma autónoma, procesos de exploración, como lo son la formulación de hipótesis, su validación y su reformulación, en caso de que se requiera. Este trabajo debe proporcionar un camino que recree la actividad científica del matemático, en el ejercicio de su autonomía intelectual.

En este trabajo se entenderá un **problema** como una situación de aprendizaje concebida de tal manera que los estudiantes no puedan resolverla por simple repetición o aplicación de conocimientos o competencias ya adquiridas (D`Amore, 2006), sino que necesita procesos autónomos de formulación de hipótesis, validación y reformulación, según sea el caso.

En este documento, se define:

la resolución de problemas como una forma de pensar donde una comunidad de aprendizaje (los estudiantes y el profesor) buscan diversas maneras de resolver la situación y reconocen la relevancia de justificar sus respuestas con distintos tipos de argumentos. Es decir, la meta no es solamente reportar una respuesta sino identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar y resolver el problema. También contempla actividades que permitan extender el problema inicial y formular conjeturas y otros problemas (Santos, s.f, págs. 3-4)

4.2. Referentes teóricos desde la matemática.

4.2.1. Sistemas de ecuaciones lineales. (Lay, 2007)

Una **ecuación lineal** en las variables $x_1, \dots, x_n$ es una ecuación que puede escribirse de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

donde b y los coeficientes $a_1, \dots, a_n$ son números reales o complejos, por lo general conocidos. El subíndice n puede ser cualquier entero positivo.

Las ecuaciones

$$4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1 \quad \text{y} \quad x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3$$

son ambas lineales porque pueden reordenarse algebraicamente como en la ecuación (1):

$$3x_1 - 5x_2 = -2 \quad \text{y} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 2\sqrt{6}$$

Las ecuaciones

$$4x_1 - 5x_2 = x_1x_2 \quad \text{y} \quad x_2 = 2\sqrt{x_1} - 6$$

no son lineales debido a la presencia de x_1x_2 en la primera ecuación y $\sqrt{x_1}$ en la segunda.

Un **sistema de ecuaciones lineales** (o sistema lineal) es una colección de una o más ecuaciones lineales que involucran las mismas variables —digamos, $x_1, \ldots, x_n$. Un ejemplo es

$$(2) \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8 \\ \quad x_1 - 4x_3 = -7 \end{cases}$$

Una **solución del sistema** es una lista $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de números que hacen de cada ecuación un enunciado verdadero cuando los valores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sustituyen, respectivamente, a $x_1, \ldots, x_n$. Por ejemplo, (5, 6.5, 3) es una solución del sistema (2) porque, cuando estos valores sustituyen en (2) a x_1, x_2 y x_3 respectivamente, las ecuaciones se simplifican a 8 = 8 y −7 = −7.

El conjunto de todas las soluciones posibles se llama **conjunto solución** del sistema lineal. Se dice que dos sistemas lineales son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Esto es, cada solución del primer sistema es una solución del segundo sistema, y cada solución del segundo sistema es una solución del primero.

Determinar el conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales resulta sencillo porque consiste en localizar la intersección de dos rectas. Un problema típico es

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ \quad x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

Las gráficas de estas ecuaciones son rectas, las cuales se denotan mediante l_1 y l_2. Un par de números (x_1, x_2) satisface las dos ecuaciones de este sistema si, y sólo si, el punto (x_1, x_2) pertenece tanto a l_1 como a l_2. En el sistema anterior, la solución es el punto único (3, 2), lo cual puede verificarse con facilidad. Vea la figura 4.

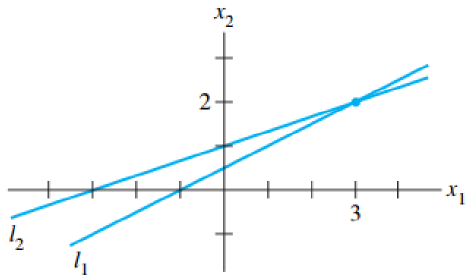


Figura 4. Exactamente una solución.

Por supuesto, la intersección de dos rectas no debe darse necesariamente en un solo punto —las rectas pueden ser paralelas o coincidir y, por lo tanto, "intersecar" en todos los puntos sobre la recta. En la figura 5 se muestran las gráficas que corresponden a los siguientes sistemas:

(a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

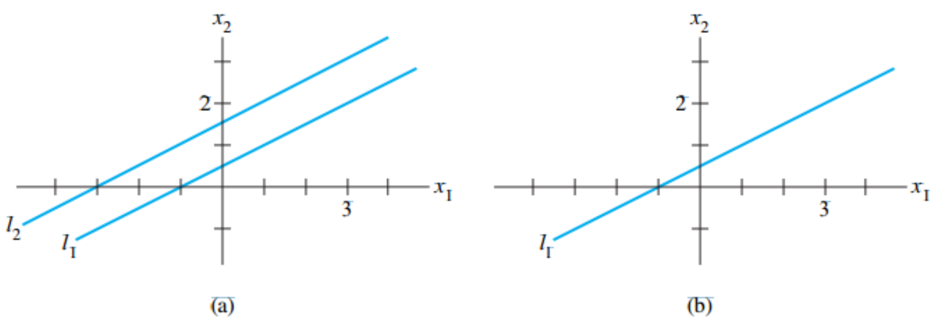


Figura 5. (a) Sin solución. (b) Con infinidad de soluciones.

Las figuras 4 y 5 ilustran los siguientes hechos generales acerca de los sistemas lineales.

Un sistema de ecuaciones lineales puede

1. no tener solución, o
2. tener exactamente una solución, o
3. tener una cantidad infinita de soluciones.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si tiene una solución o una infinidad de soluciones; un sistema es **inconsistente** cuando no tiene ninguna solución.

Notación matricial

La información esencial de un sistema lineal puede registrarse de manera compacta en un arreglo rectangular llamado **matriz**. Dado el sistema

$$(3)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

con los coeficientes de cada variable alineados en columnas, la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

se denomina **matriz coeficiente** (o **matriz de coeficientes**) del sistema (3), y

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

se denomina **matriz aumentada** del sistema. La matriz aumentada de un sistema consta de su matriz de coeficientes con una columna adicional que contiene las constantes de los lados derechos de las ecuaciones.

El **tamaño** de una matriz indica el número de filas y columnas que la integran. La matriz aumentada (4) que se presentó líneas arriba tiene 3 filas y 4 columnas y se conoce como una matriz de 3×4. Si *m* y *n* son enteros positivos, una **matriz m × n** es un arreglo rectangular de números con *m* filas y *n* columnas. (El número de filas siempre va primero.) La notación matricial simplificará los cálculos de los ejemplos que se presentan enseguida.

Resolución de un sistema lineal

La estrategia básica es reemplazar un sistema con un sistema equivalente (es decir, uno con el mismo conjunto solución) que sea más fácil de resolver. Dicho de manera sencilla, se utiliza el término x_1 que esté presente en la primera ecuación de un sistema para eliminar los términos x_1 que haya en las otras ecuaciones. Después se usa el término x_2 presente en la segunda ecuación para eliminar los términos x_2 en las otras ecuaciones, y así sucesivamente, hasta obtener un sistema de ecuaciones equivalente más sencillo. Para simplificar un sistema lineal se utilizan tres operaciones básicas: reemplazar una ecuación mediante la suma de la propia ecuación y un múltiplo de otra ecuación, intercambiar dos ecuaciones, y multiplicar todos los términos de una ecuación por una constante distinta de cero. Después del primer ejemplo, se verá por qué estas tres operaciones no cambian el conjunto solución del sistema.

Ejemplo 1. Resuelva el sistema (3).

Solución. El procedimiento de eliminación se muestra enseguida con y sin notación matricial, y los resultados se colocan uno junto al otro para compararlos:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 & (2) \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 & (3) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

Se mantiene x_1 en la primera ecuación y se elimina de las otras ecuaciones. Para hacer esto, se suma 4 veces la ecuación 1 a la ecuación 3.

$$\begin{array}{rr} 4\cdot[\text{ecuación 1}]: & 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \\ +\,[\text{ecuación 3}]: & -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \\ \hline [\text{nueva ecuación 3}]: & -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{array}$$

El resultado de este cálculo se escribe en lugar de la tercera ecuación original:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Ahora, se multiplica la ecuación 2 por 1/2 para obtener 1 como el coeficiente de x_2. (Este cálculo simplificará la aritmética del siguiente paso.)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Se utiliza x_2 en la ecuación 2 para eliminar $-3x_2$ en la ecuación 3.

$$\begin{array}{rr} 3\cdot[\text{ecuación 2}]: & 3x_2 - 12x_3 = 12 \\ +\,[\text{ecuación 3}]: & -3x_2 + 13x_3 = -9 \\ \hline [\text{nueva ecuación 3}]: & x_3 = 3 \end{array}$$

El nuevo sistema tiene una forma *triangular*:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Al final, se deseará eliminar el término $-2x_2$ de la ecuación 1, pero resulta más eficiente utilizar primero x_3 en la ecuación 3, para eliminar los términos $-4x_3$ y $+x_3$ en las ecuaciones 2 y 1. Los dos cálculos "mentales" son

$$\begin{array}{rr} 4\cdot[\text{ec. 3}]: & 4x_3 = 12 \\ +\,[\text{ec. 2}]: & x_2 - 4x_3 = 4 \\ \hline [\text{nueva ec. 2}]: & x_2 \quad = 16 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} -1\cdot[\text{ec. 3}]: & -x_3 = -3 \\ +\,[\text{ec. 1}]: & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \hline [\text{nueva ec. 1}]: & x_1 - 2x_2 \quad = -3 \end{array}$$

Es conveniente combinar los resultados de estas dos operaciones:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora, se regresa a x_2 en la ecuación 2 y se usa para eliminar el $-2x_2$ ubicado sobre la ecuación 1. Debido al trabajo previo realizado con x_3, ahora no existe ninguna operación que involucre a términos de x_3.

Se sumen dos veces la ecuación 2 a la ecuación 1 para obtener el sistema

$$\begin{cases} x_1 = 29 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La solución única del sistema original es (29, 16, 3). Sin embargo, como hay muchos cálculos involucrados, resulta una buena práctica verificar las operaciones. Para comprobar que (29, 16, 3) *es* una solución, se sustituyen estos valores en el lado izquierdo del sistema original, y se calcula:

$$29 - 2(16) + 3 = 29 - 32 + 3 = 0$$

$$2(16) - 8(3) = 32 - 24 = 8$$

$$-4(29) + 5(16) + 9(3) = -116 + 80 + 27 = -9$$

Los resultados coinciden con el lado derecho del sistema original, así que (29, 16, 3) es una solución del sistema.

En el ejemplo 1 se ilustra cómo, en un sistema lineal, las operaciones sobre ecuaciones corresponden a las operaciones sobre las filas apropiadas de la matriz aumentada. Las tres operaciones básicas mencionadas con anterioridad corresponden a las siguientes operaciones sobre la matriz aumentada.

Operaciones elementales de fila

1. (*Reemplazo*) Reemplazar una fila por la suma de sí misma y un múltiplo de otra fila[5].
2. (*Intercambio*) Intercambiar dos filas.
3. (*Escalamiento*) Multiplicar todas las entradas de una fila por una constante distinta de cero.

Las operaciones de fila pueden aplicarse a cualquier matriz, no únicamente a una que surja como la matriz aumentada de un sistema lineal. Se dice que dos matrices son

[5] Una paráfrasis común del reemplazo de una fila es “sumar a una fila un múltiplo de otra fila”.

equivalentes por filas si existe una sucesión de operaciones elementales de fila que convierta una matriz en la otra.

Es importante advertir que las operaciones de fila son *reversibles*. Si dos filas se intercambian, pueden regresarse a sus posiciones originales mediante otro intercambio. Si una fila se escala mediante una constante c distinta de cero, al multiplicar después la nueva fila por $1/c$ se obtiene la fila original. Por último, considere una operación de reemplazo que involucra dos filas —por ejemplo, las filas 1 y 2— y suponga que a la fila 2 se le suma la fila 1 multiplicada por c para producir una nueva fila 2. Si se desea "revertir" esta operación, se le suma a la nueva fila 2 la fila 1 multiplicada por $-c$ y se obtiene la fila 2 original.

Al considerar cada uno de los tipos de operaciones de fila, puede advertirse que cualquier solución del sistema original continúa siendo una solución del sistema nuevo. Asimismo, como el sistema original puede producirse mediante operaciones de fila sobre el sistema nuevo, cada una de las soluciones del sistema nuevo también es una solución del sistema original. Esta explicación justifica el hecho siguiente.

Si las matrices aumentadas de dos sistemas lineales son equivalentes por filas, entonces los dos sistemas tienen el mismo conjunto solución. (p-p 2-8)

4.2.2. Métodos de eliminación propuestos para enseñar en grado noveno. De acuerdo con el documento de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN M. d., 2006), los sistemas de ecuaciones se estudian en grado noveno. A continuación se hará una descripción de los distintos métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 de la manera como se estudian en la educación media. (Echeverri & Sombredero, 2014)

*a) Método de igualación. C*onsiste en despejar, de cada una de las ecuaciones del sistema, una de las variables y luego se igualan entre si las expresiones que se obtienen al despejar la variable, obteniendo una ecuación con una variable; luego se resuelve dicha ecuación y así se obtiene el valor de una de las variables; este valor se reemplaza en una de las expresiones obtenidas al despejar la variable, y así se halla el valor de la otra variable.

b) Método de sustitución. En este método, se despeja una de las variables de una de las ecuaciones y se reemplaza en la otra ecuación; luego, se resuelve la ecuación resultante, y se halla el valor de una de las dos variables; este valor, se reemplaza en la expresión obtenida al despejar y se encuentra el valor de la otra incógnita.

c) *Método de reducción.* Consiste en transformar las ecuaciones de manera que los coeficientes de una de las variables sean opuestos, y luego se suma ambas ecuaciones para eliminar la variable escogida; seguidamente se resuelve la ecuación resultante de la suma anterior y se halla el valor de una de las variables. Este se reemplaza en una de las ecuaciones iniciales para encontrar el valor de la otra variable.

d) *Método de determinantes.* (Santillana, 2010). Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. La cantidad $ad - bc$ se llama determinante de A, y se escribe: $det\ A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Es posible resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2 utilizando determinantes, mediante un método llamado **Regla de Cramer.** En general, para utilizar este método, el número de incógnitas debe ser igual al número de ecuaciones y el determinante de la matriz del sistema debe ser diferente de cero.

Para un sistema de ecuaciones lineales de la forma $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ el método es el siguiente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{ce-bf}{ae-bd} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{af-cd}{ae-bd}$$

e) *Método gráfico. C*onsiste en representar gráficamente las rectas que corresponden a las ecuaciones que forma el sistema, luego el punto de corte entre las dos rectas determina la solución.

Si las rectas se cortan en un solo punto el sistema tiene una única solución determinada por los valores *x, y* que corresponden a las coordenadas del punto de intersección.

Si las rectas coinciden, el sistema tiene infinitas soluciones.

Si las rectas son paralelas, ellas no tienen puntos en común, por lo tanto el sistema no tiene solución.

En este documento el método de solución dado en el apartado 4.2.1, desde el álgebra lineal, es el método que aquí nombramos como método de reducción.

4.2.3. Potencialidad. Según el diccionario de la real academia española, la potencialidad es la capacidad de la potencia, independiente del acto. Respecto a este tema, el Padre Alfonso Aguilar (2005) da la definición de acto y potencia como sigue:

Acto (fνέργεια [enérgeia], «actividad, eficacia, efecto») es ente o perfección existente; la potencia (δύναμις [dínamis], «habilidad, poder, facultad») es la capacidad para adquirir un acto o perfección. Ambos principios están presentes en un mismo sujeto.

Por lo tanto, el acto es algo determinado, actualizado, completo, perfecto, singular, concreto; mientras que la potencia indica indeterminación, posibilidad, estado incompleto, imperfección. Propiamente hablando, sólo el acto es; la potencia «es» de un modo impropio o secundario. Se dice que algo «es» en la medida en que esté en acto, no en potencia. Por ejemplo una estatua es cuando está actualmente esculpida, no cuando está potencialmente en bloque de mármol sin forma. Ser significa ser en acto. La potencia es real en la medida en que se relacione a un acto: es un «no aún» que «puede llegar a ser». La futura estatua de mármol es «algo», pero sólo en cuanto va a convertirse en estatua.

Es importante mencionar que hay distintos tipos de acto y potencia. Para efectos de este trabajo solo se hará referencia de las potencias activas que:

> son las capacidades, poderes o facultades para obrar: nutrirse, moverse, ver, pensar, etc. Se llaman «activas» porque existen y tienen cierta perfección (nutrición, locomoción, vista, inteligencia...), pero son también «potencias» porque implican imperfección o indeterminación, necesitan ser actualizadas por actos concretos u operaciones: nutrirse de algo, moverse a un lugar, ver esto o lo otro, pensar esto o aquello (Aguilar, 2005)

De acuerdo con lo anterior, se entenderá por potencialidad la capacidad de adquirir, entender, reflexionar, analizar, fortalecer los conocimientos sobre los objetos matemáticos que se estudian, como también su construcción, comunicación, representación.

Explícitamente, en este documento se entenderá por potencialidad la capacidad de:

- Encontrar estrategias apropiadas para resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales.
- Desarrollar y evaluar argumentos y pruebas en la solución de las situaciones problemas.
- Usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas.
- Crear y usar representaciones para registrar y comunicar ideas matemáticas.
- Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas.
- Construir nociones del conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas

5. Metodología.

La intervención de la práctica pedagógica se desarrolló en cuatro bloques temáticos; en el último, sobre sistemas de ecuaciones lineales se diseñó un taller (incluido en los anexos) que consta de ocho situaciones problema. Para resolverlo, los estudiantes debían hacer uso de los temas: operaciones con los números reales, transición del enunciado verbal al lenguaje algebraico, operaciones con polinomios, reducción de términos semejantes, resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita y aplicación a la resolución de problemas, función lineal y las definiciones de sistemas de ecuaciones lineales y su solución. El taller se podía resolver en grupo o de manera individual y el tiempo de resolución fue de tres horas. Éste se escribió en una hoja, se fotocopió y se entregó a los estudiantes junto con una hoja en blanco para que escribieran todas las operaciones y procedimientos que realizaran para solucionar cada problema. Al finalizar la sesión se debía regresar el taller y su solución a la practicante.

Durante la elaboración del taller se tuvo en cuenta que una de las posibles estrategias de solución empleadas por los estudiantes podía ser la de ensayo y error, por lo tanto los primeros problemas que se propusieron en el taller permitían a los estudiantes encontrar la solución por este método.

A continuación, se enuncian los posibles errores que, se consideró, podrían cometer los estudiantes al resolver el taller. Estos son:

- Realizar de forma incorrecta el pasaje del registro verbal al algebraico
- Realizar de forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico y al hacer comparaciones con los compañeros crean que están erróneos.
- Realizar de manera incorrecta operaciones de expresiones algebraicas
- Encontrar una solución para una ecuación y no para el sistema de ecuaciones

6. Análisis de Resultados

Las soluciones de las situaciones problema que se plantearon en el taller fueron analizadas a la luz de los objetivos propuestos. Además, se tuvieron en cuenta las entrevistas con algunos estudiantes y el registro de clase.

Problema 1. *Enrique tiene en su bolsillo billetes de* \$5.000 *y* \$2.000 *que suman* \$38.000. *Si se cambia el número de billetes de* \$5.000 *por el número de billetes de* \$2.000 *y viceversa, entonces suman* \$32.000. *¿Cuántos billetes tiene Enrique de cada tipo?*

Estrategia de solución. Dos estudiantes que trabajaron juntos (en adelante se identificarán como E1y E2), resolvieron el problema por el método de igualación. El hecho de que E1 y E2 hayan resuelto el problema de esta manera se puede atribuir a que el maestro titular estuvo con ellos aproximadamente durante la mitad de la sesión y aunque se le solicitó que no les diera ideas sobre cómo solucionar el taller, lo hizo en muchas ocasiones.

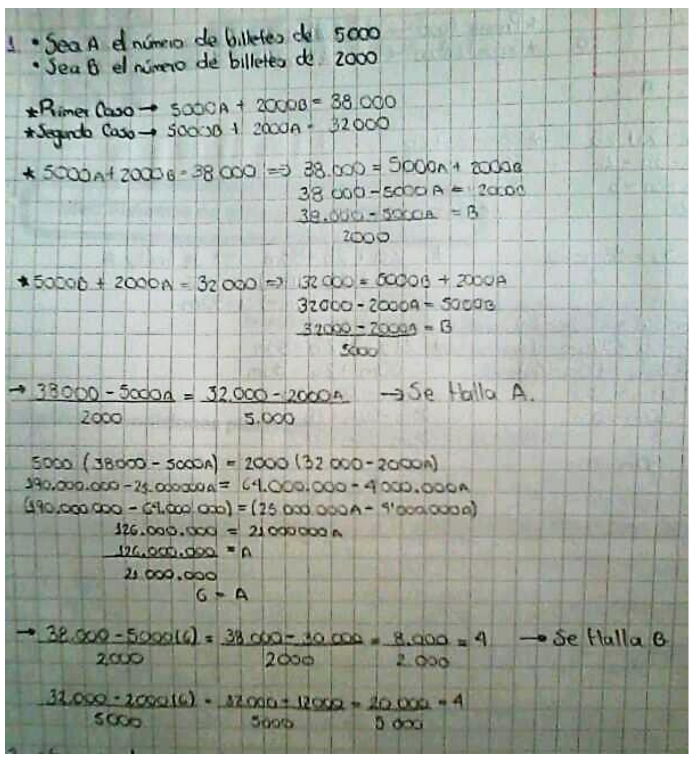


Figura 6. Solución de E1 y E2 al problema 1 por igualación.

La manera como el estudiante E1 explica lo que hicieron fue:

- *Lo primero que se hace es reemplazar términos, quiere decir que a cada pregunta se le va a colocar un literal que diga pues, que le oriente en la ecuación como va a ser el proceso.*

Entonces en esta ocasión serian que A es el número de billetes de cinco mil y B nos va a representar el número de billetes de dos mil. En el primer caso que los billetes suman 32000 la ecuación va a quedar$5000A + 2000B = 38000$*y en el segundo caso*$5000B + 2000A = 32000$. *Lo que se precede ahora, porque lo que se quiere es descubrir cuánto vale A y cuánto vale B es despejar letras.*

- ¿Por qué se les ocurrió despejar?

- *Despejar porque, o sea, necesitamos saber el valor de este* (señala A), *de A o de B para poder hacer la ecuación y tener pues como ya la forma de porque está planteado el problema. Entonces para el primer caso son* $5000A + 2000B = 38000$, *entonces vamos a despejar* (explica cómo se despeja B de la ecuación anterior). *En el segundo caso* ($5000B + 2000A = 32000$) *pues se hace el mismo procedimiento y va a quedar B despejado. Ahora lo que sigue es que se halla A, ¿de qué manera?, entonces B es igual a B, ¿cierto?, entonces* $\frac{38000-5000A}{2000} = \frac{32000-2000A}{5000}$ *y este resultado es pues A* (señala el valor de A). *Cuando ya se encuentra el valor de A luego se reemplaza esa letra y ya se busca el valor de B.*

- ¿Y en dónde reemplazamos la letra?

- *Aquí,* (señala $\frac{38000-5000A}{2000} = \frac{32000-2000A}{5000}$), *pues por ejemplo acá está*$5000A$ *¿cierto?, aquí ya encontramos A y este seis lo vamos reemplazar aquí* (señala $\frac{38000-5000A}{2000} = \frac{32000-2000A}{5000}$), *en cualquiera de las dos que despejamos y las dos nos tienen que dar igual.*

Respecto a los 34 estudiantes restantes, algunos escriben únicamente las operaciones para comprobar que los números encontrados cumplen las condiciones dadas en el problema. Otros plantean las ecuaciones y realizan las operaciones que las satisfacen, o simplemente dan el resultado.

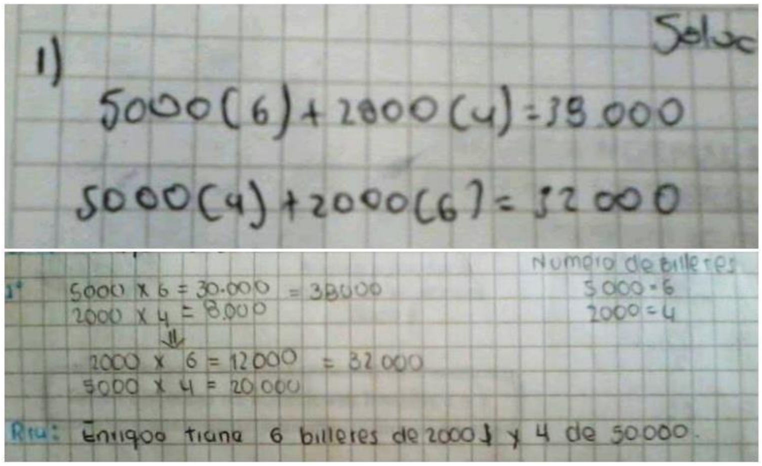


Figura 7. Operaciones como prueba.

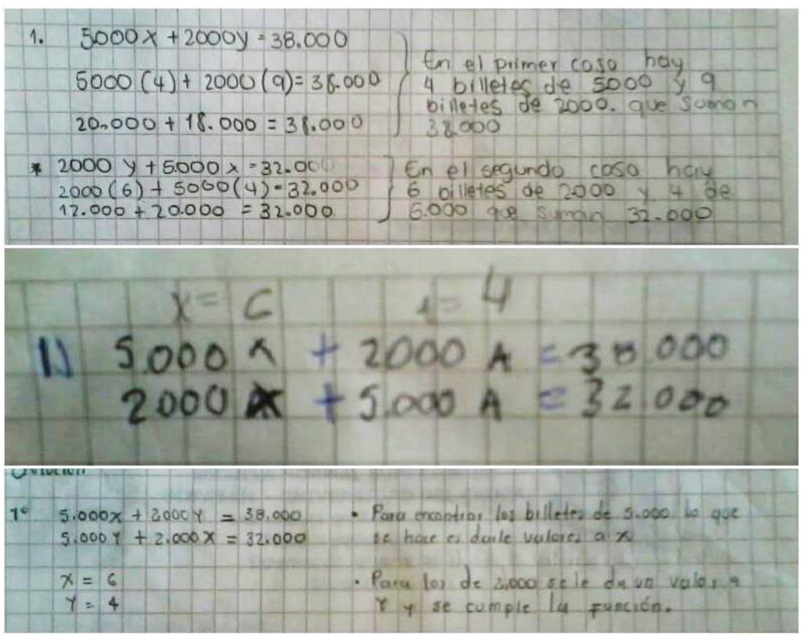


Figura 8. Planteamiento de ecuaciones y operaciones como prueba.

Resultado. Todos los estudiantes dan respuesta correcta al problema y hacen la verificación reemplazando la solución en las dos ecuaciones del sistema. Las estrategias de solución empleadas son el método de igualación y ensayo y error. No cometen errores en el pasaje de la representación verbal a la representación algebraica, y ninguno utiliza la representación gráfica como método de solución ni como método de verificación.

Problema 2. *Esteban tiene ahorrados* $\$13.000$ *en* 41 *monedas de* $\$500$ *y* $\$200$. *¿Cuántas monedas son de* $\$200$ *y cuántas de* $\$500$*?*

Estrategia de solución. Nuevamente E1 y E2 dan solución al problema propuesto haciendo uso del método de igualación.

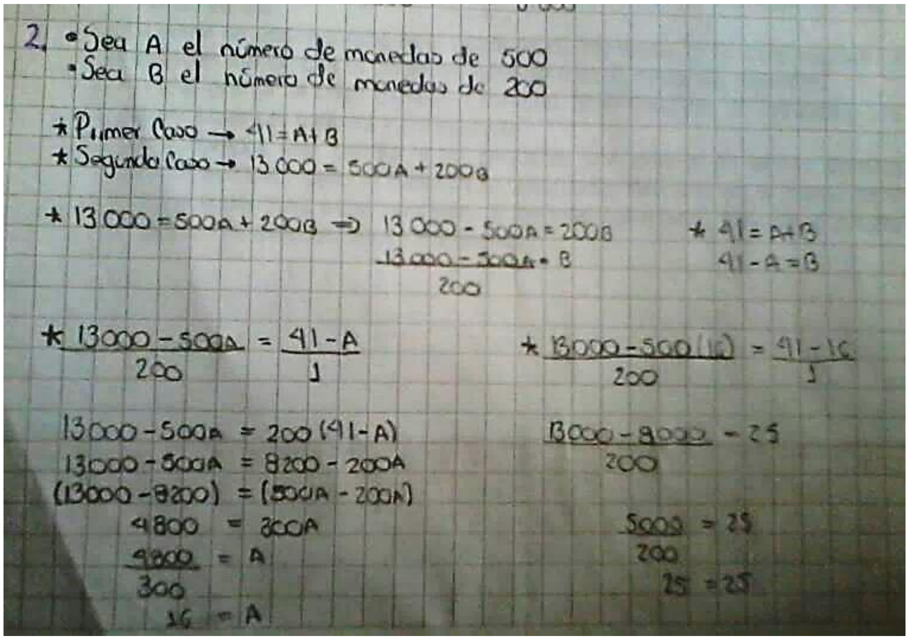


Figura 9. Solución de E1 y E2 al problema 2 por sustitución.

Los demás estudiantes hacen lo mismo que en el problema 1, unos solo escriben las operaciones que prueban las condiciones del problema, aunque la mayoría solo lo hace para una de las ecuaciones ($500x + 200y = 13000$), la otra ecuación ($x + y = 41$) no la verifican explícitamente pero se cumple. Un estudiante no llegó a la solución correcta porque solo tuvo en cuenta la primera ecuación, esto permite inferir que no reflexionó o comprendió la definición de sistemas de ecuaciones lineales o la de solución de un sistema de ecuaciones.

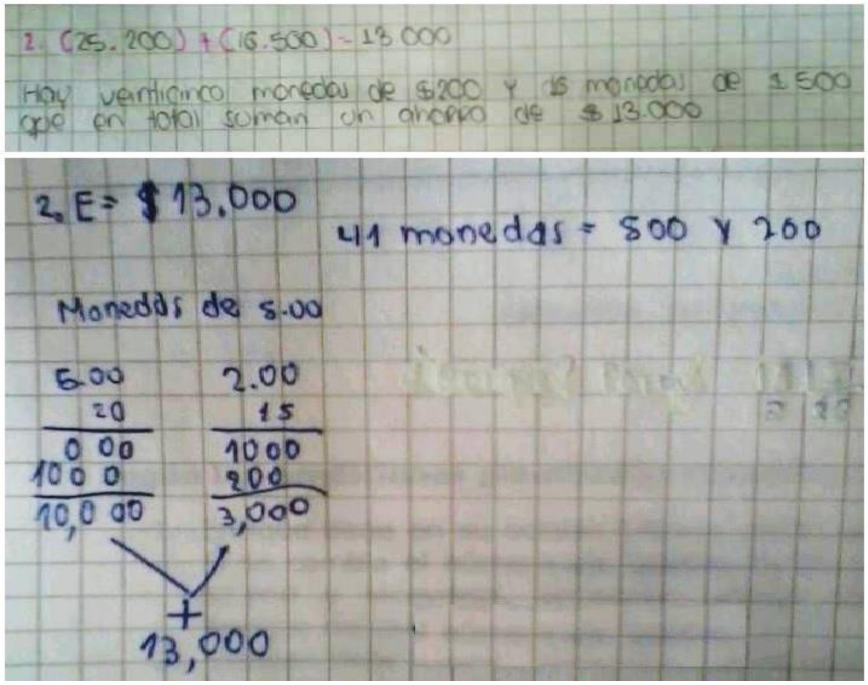
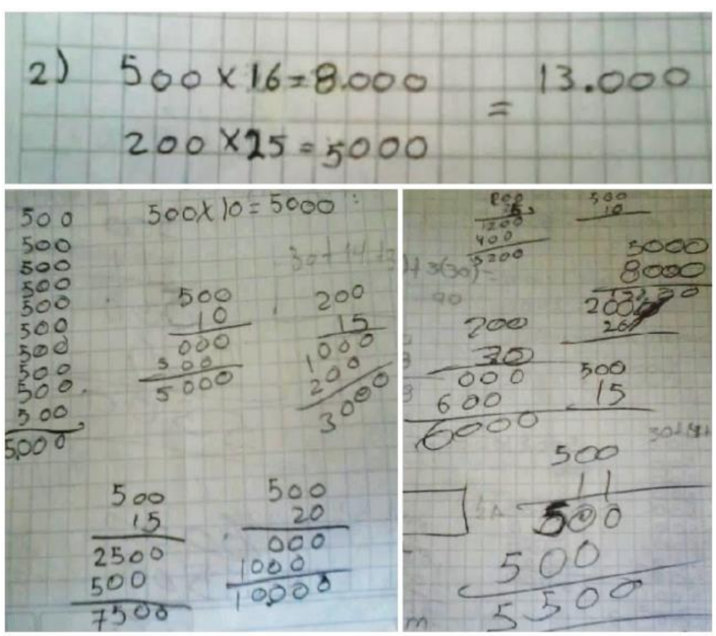


Figura 10. Operaciones como prueba

En algunos casos se evidencia que los estudiantes procedieron por ensayo y error. Unos realizaban las operaciones en hojas de borrador y en la hoja de "respuestas" escribían la solución correcta, otros escribieron el método que emplearon.



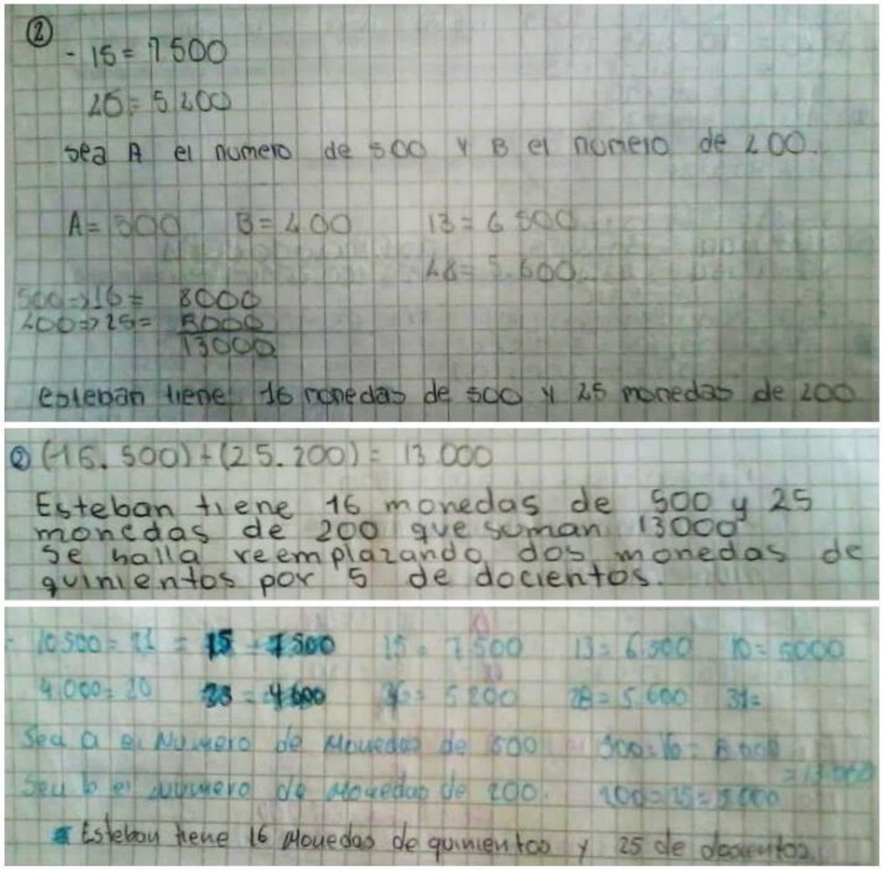


Figura 11. Solución por ensayo y error.

Resultado. Un estudiante no llegó a la solución correcta porque solo tuvo en cuenta una de las ecuaciones del sistema de ecuaciones.

Las estrategias de solución empleadas por los estudiantes son el método de igualación y ensayo y error. En este problema, veintisiete (27) estudiantes solo verifican que la solución satisface una de las ecuaciones del sistema ($500x + 200y = 13000$) pero, aunque no lo comprobaron, la otra ecuación del sistema se satisface con la solución encontrada, excepto en un caso. Realizan correctamente el paso del registro verbal al algebraico y no hacen uso de la representación gráfica como método de solución o verificación.

Problema 3. *Halla las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que su perímetro mide* $88m$ *y que el tripe del largo más el doble del ancho es* $118m$.

Estrategia de solución: E1 y E2 resuelven correctamente el problema por el método de igualación. Por su parte, el estudiante (E3) encuentra el valor de una de las dimensiones del rectángulo usando eliminación de variables. E3 inicialmente planteó las ecuaciones y luego las sumó. Al preguntarle por qué procedió de esa manera, no respondió. Se le sugirió que intentara operar las ecuaciones de una manera distinta y analizara los resultados que obtuviera, que observara lo que ocurría si las restaba. Con ello obtuvo el valor de una de las incógnitas y dio por solucionado el problema aunque le faltaba encontrar el valor de la otra incógnita.

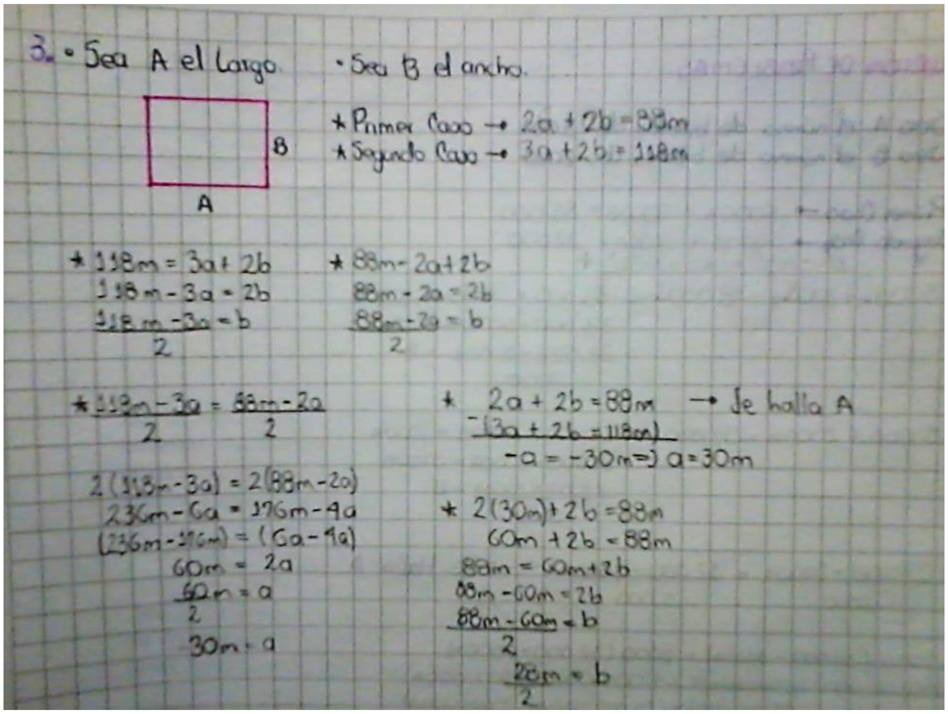


Figura 12. Solución de E1 y E2 al problema 2 por sustitución.

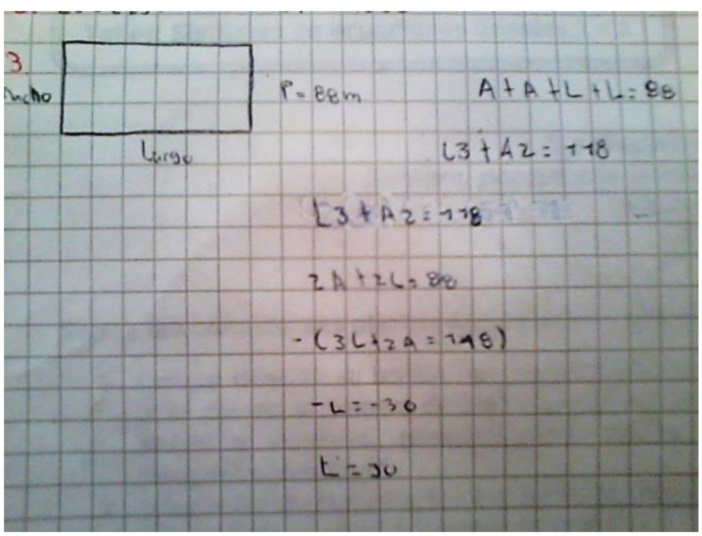


Figura 13. Método de eliminación de variables utilizado por E3.

De los demás estudiantes, treinta y uno (31) resuelven el problema por ensayo error, los dos (2) estudiantes restantes no solucionaron el problema.

En general veintidós (22) estudiantes plantean el sistema de ecuaciones, cinco (5) plantean una de las ecuaciones y ocho (8) solo realizan operaciones aritméticas para solucionar el problema. Diecisiete (17) estudiantes encuentran la solución correcta, los demás llegan a resultados erróneos por diferentes factores: hacen mal operaciones algebraicas, cambian datos, encuentran una solución que satisface únicamente una de las ecuaciones del sistema, o resuelven las ecuaciones por separado.

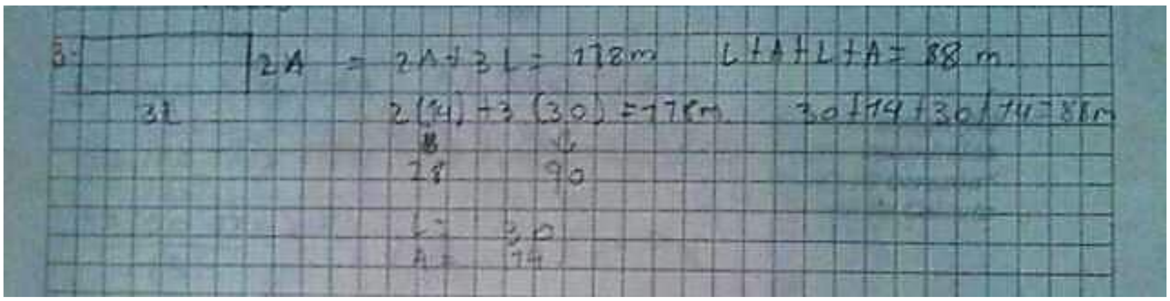


Figura 14. Solución por ensayo y error.

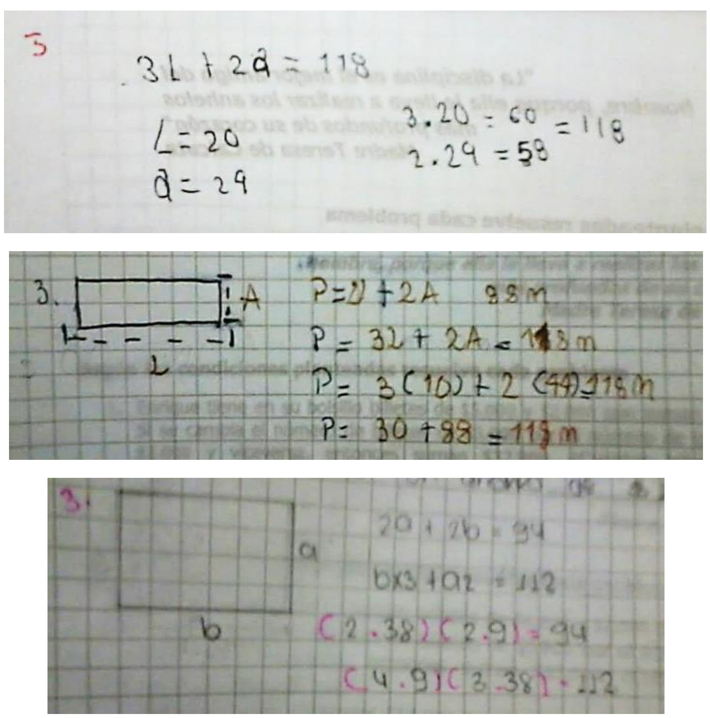


Figura 15. Errores cometidos por algunos estudiantes.

Resultado. Las estrategias de solución empleadas por los estudiantes fueron los métodos de sustitución, igualación y ensayo y error. Todos realizan de manera apropiada el paso del registro verbal al algebraico, excepto en un caso en el que cambian algunos datos dados en el problema. Ningún alumno emplea la representación gráfica como método de solución o de verificación de la respuesta.

Problema 4. *Pedro le dice a Juan: Si me das* 15 *de tus canicas tendré* 2 *veces lo que tú tienes. Y Juan le dice a Pedro: Si tú me das* 20 *de tus canicas tendré* 10 *más de lo que tú tienes. ¿Cuántas canicas tienen cada uno?*

Estrategia de solución. Cinco (5) estudiantes resolvieron el problema correctamente, E4, E5 y E6 por el método de igualación y E7 y E8 por el método de eliminación.

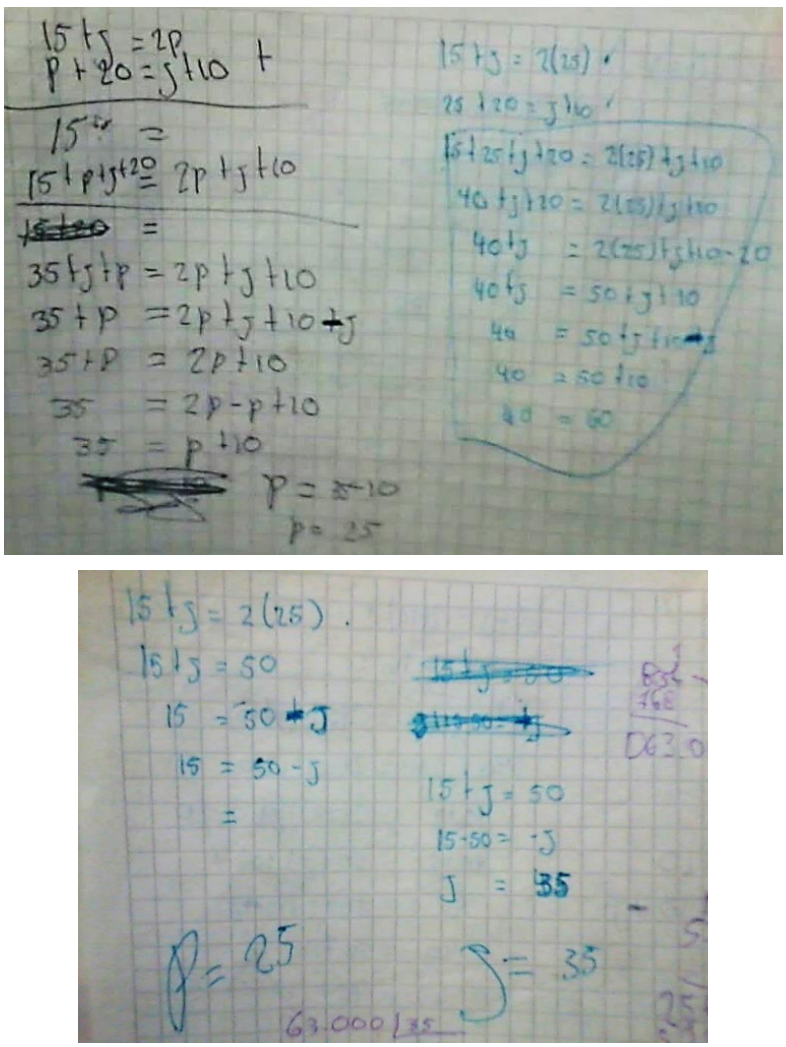


Figura 16. Solución de E7 y E8 al problema 4 por el método de eliminación.

Los estudiantes llegaron a este método de solución porque observaron la estrategia inicial utilizada por E3 para resolver el problema 3, que fue la de sumar las ecuaciones del sistema dado en el problema. Al sumar las dos ecuaciones y realizar algunos cálculos obtuvieron como resultado la eliminación de una de las incógnitas y pudieron despejar la incógnita restante ($P = 25$). Luego, reemplazaron este valor en la ecuación $15 + J = 2P$ para obtener el valor de la variable J. Este hecho E.7 lo explica de la siguiente manera:

- ¿Por qué dijiste que había que reemplazar?
- *Pues porque, o sea ya tengo el valor de P que es 25, entonces reemplazo la letra para hallar un valor determinado.*
- En este caso ¿cuál es el valor determinado?
- *J*
- ¿Para hallar J qué haces?
- *Reemplazo*
- ¿Después de reemplazar qué haces?
- *Despejo*

Ahora se presentan los registros de la estrategia de solución empleada por E4, E5 y E6.

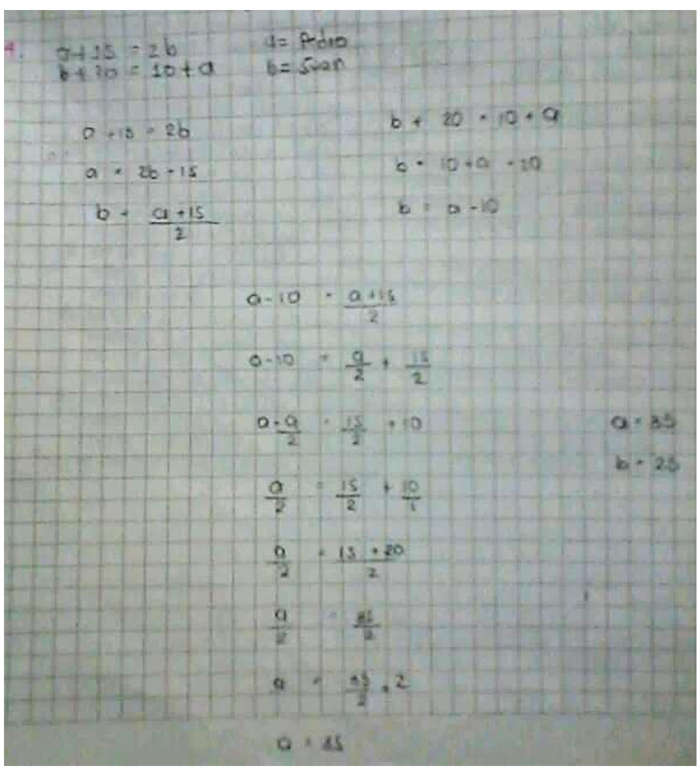


Figura 17. Solución de E4, E5 y E6 al problema 4 por el método de igualación.

E4 y E5 explican lo que hicieron de la siguiente manera (*P*: profesor):

E4: Sacamos la ecuación de Pedro y de Juan

E5: Luego tratamos de comparar pues la A no!, de igualar

E4: De igualarlas

P: ¿Qué igualaron?

E4: La ecuación de A ($A + 15 = 2B$) *y la ecuación de Juan* ($B = A - 10$)*, o sea, despejamos B y las igualamos.*

P: ¿Y después qué hicieron?

E5: Igualar las A para que nos diera un resultado

P: ¿Resultado de qué?

E5: De Pedro

P: ¿Y para hallar B qué hicieron?

E4: Con el resultado de Pedro sacamos el de Juan, o sea, restamos diez, miramos si era el doble y ya.

Ellos llegaron a este método intentando encontrar la solución por ensayo y error. Cada uno, sin darse cuenta, despejo *B* de una ecuación diferente y al darle el mismo valor a la letra *A*, el resultado de *B* no les coincidía. Se les pregunto si la *B* de una de las ecuaciones era igual a la *B* de la otra ecuación que habían despejado, ellos respondieron que sí. - *¿Y si son iguales qué se puede hacer?; si* ***B*** *es igual a* ***B*** ***¿****qué se puede hacer con esas dos ecuaciones?*- Después de dialogar un momento llegaron a la conclusión de que las dos ecuaciones se podían igualar.

Otros cinco (5) estudiantes plantearon el sistema de ecuaciones e intentaron solucionarlo por el método de igualación pero cometieron varios errores al despejar la incógnita; vale la pena mencionar que el resultado coincidió con la solución del problema.

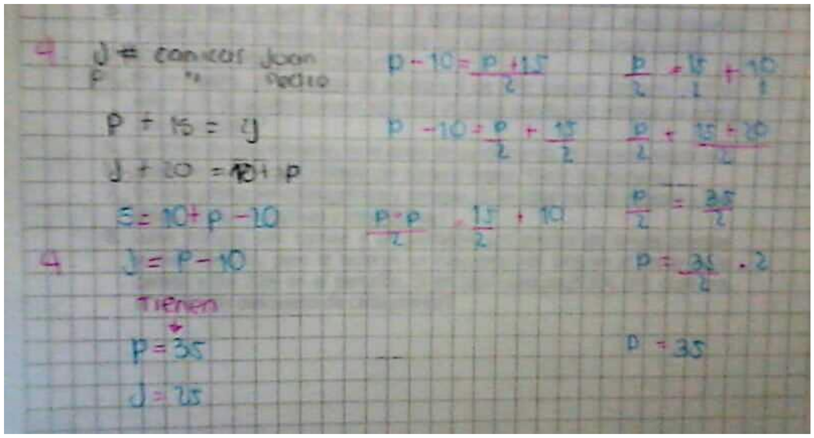


Figura 18. Errores cometidos al intentar despejar.

Catorce (14) estudiantes no resolvieron este problema, incluyendo a E1, E2 y E3, esto se puede atribuir al tiempo del que se dispuso para la realización de este trabajo.

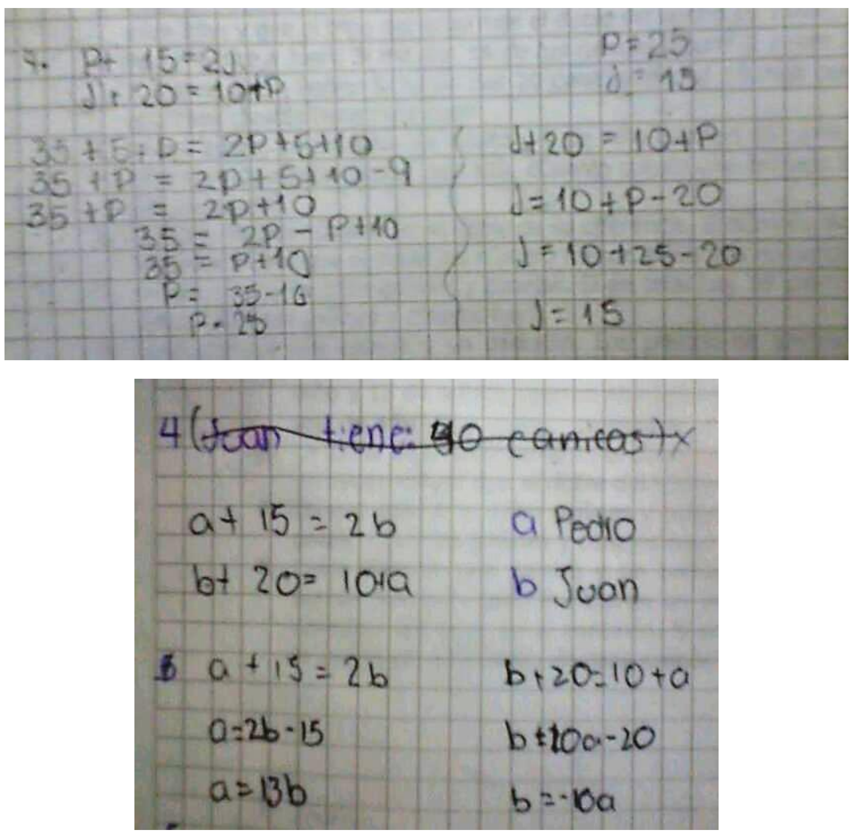


Figura 19. Errores cometidos por algunos estudiantes.

En los anteriores casos se observa que los estudiantes (cinco) plantean el sistema de ecuaciones correctamente pero cometen errores al intentar despejar las incógnitas, además en el primer caso intentan resolver el problema con ecuaciones distintas a las “dadas”.

En el último caso, ocho de ellos no plantean el sistema de ecuaciones, no hacen ningún tipo de procedimiento, solo dan respuestas erróneas que no tienen relación con la información que proporciona el problema.

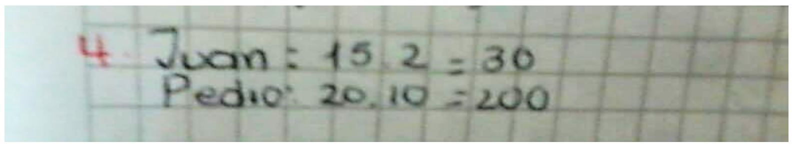


Figura 20. Respuestas erróneas.

Resultado. Cinco estudiantes dan respuesta correcta al problema. Las estrategias de solución empleadas son el método de igualación y de eliminación. La mayoría realiza bien el pasaje de la representación verbal a la representación algebraica, y ningún alumno utiliza la representación gráfica como método de solución o verificación del problema.

Problema 5. *En un teatro,* 10 *entradas de adulto y* 9 *de niño cuestan* \$51.200, *y* 17 *de niño y* 15 *de adulto cuestan* \$83.100. *¿Cuánto cuesta una entrada de niño y una de adulto?*

Estrategia de solución. Ocho (8) estudiantes resolvieron el problema correctamente, tres de ellos (E4, E5 y E6) utilizando el método de igualación, E7 y E8 por eliminación de variables y los tres alumnos restantes (E9, E10 y E11) solo escriben la respuesta y verifican que dicho resultado es la solución del sistema de ecuaciones que describe el problema.

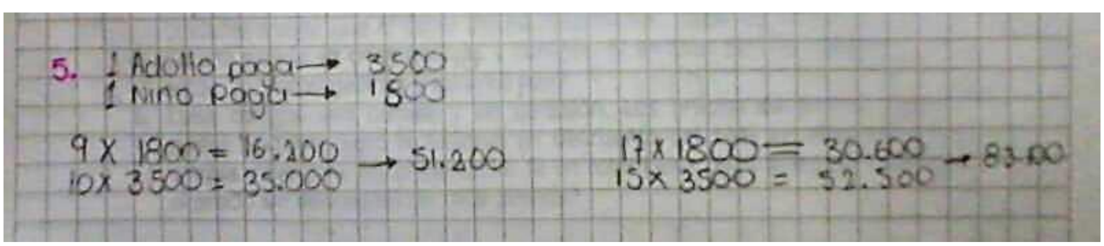


Figura 21. Solución de E9, E10 y E11.

A continuación se presenta la estrategia de solución usada por E4, E5 y E6 para resolver este problema:

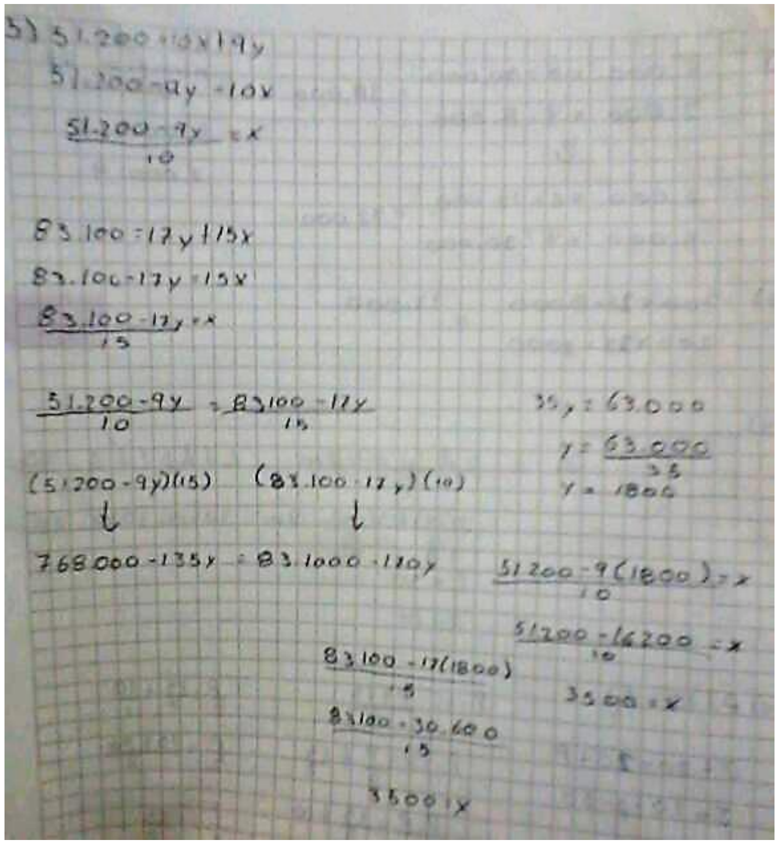
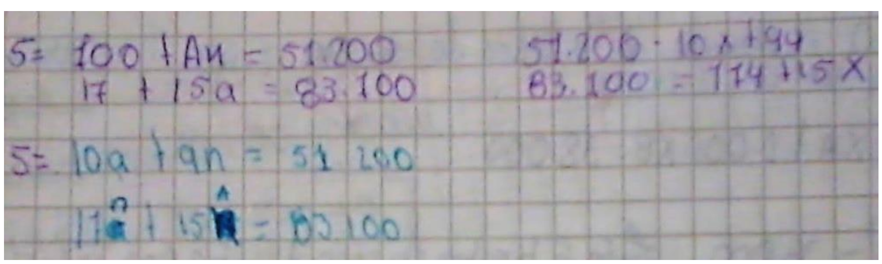


Figura 22. Solución de E4, E5 y E6 utilizando el método de igualación.

Por último se analizará la estrategia empleada por E7 y E8 para solucionar este problema:



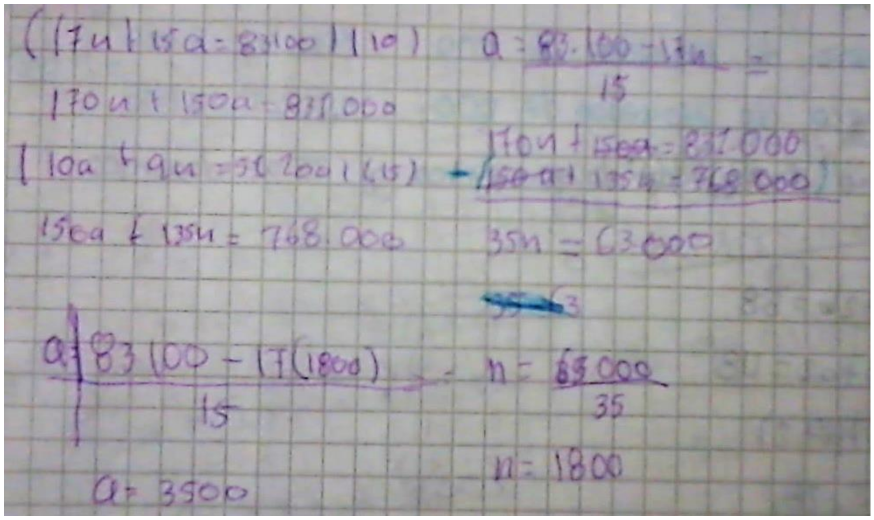


Figura 23. Solución de E7 y E8por el método de eliminación

Aunque el método empleado por estos dos alumnos para resolver los problemas 4 y 5 es el mismo, en este último problema debían hacer dos operaciones adicionales. E7 explica el procedimiento que hicieron así:

- *Lo primero que hicimos fue sumar las ecuaciones para ver si se nos cancelaba algo, pero no se pudo porque tocaba igualar términos, o sea, para cancelarlos.*
- ¿Igualar términos, cómo?
- *O sea, digamos tenía* $10A + 9N = 51200$*, tenia*$17N + 15A = 83100$ *entonces necesitamos cancelar alguno, la A o la N. En este caso multiplicamos* $10A + 9N = 51200$ *por* 15.
- ¿Para qué?
- *Para que la A tuviera un valor igual al de la otra ecuación para poderlas cancelar. Entonces después de haber hecho esto dio* $170N + 150A = 831000$*. Eso fue el resultado del* $17N + 15A = 83100$ *por* 10*. La otra es* $10A + 9N = 51200$*por* 15*, eso da* $150A + 135N = 768000$*. Ahora los resto para poder cancelar los términos, la A.* $170N + 150A = 831000$ *menos, paréntesis,* $150A + 135N = 768000$*, cierro paréntesis. Eso me da* $35N = 63000$ *porque* 150 *y* $150A$ *se cancelan. Eso me da N, o sea despejo la N para encontrar el valor,* $N = \frac{63000}{35}$*, eso me da* $N = 1800$*. Ahora acá en la A, para hallar A, eh pues, tome A ¡no!,* $A = 83100 - 17$*, como ya tengo el valor de N que era el que iba acompañando a* 17 *es* 1800*,* $A = \frac{83100-17(1800)}{15}$*, entonces hice la operación y me dio* $A = 3500$.

Otros dos estudiantes plantearon correctamente el sistema de ecuaciones, despejaron de ambas ecuaciones la misma incógnita y al intentaron resolver el problema por igualación cometieron errores despejando.

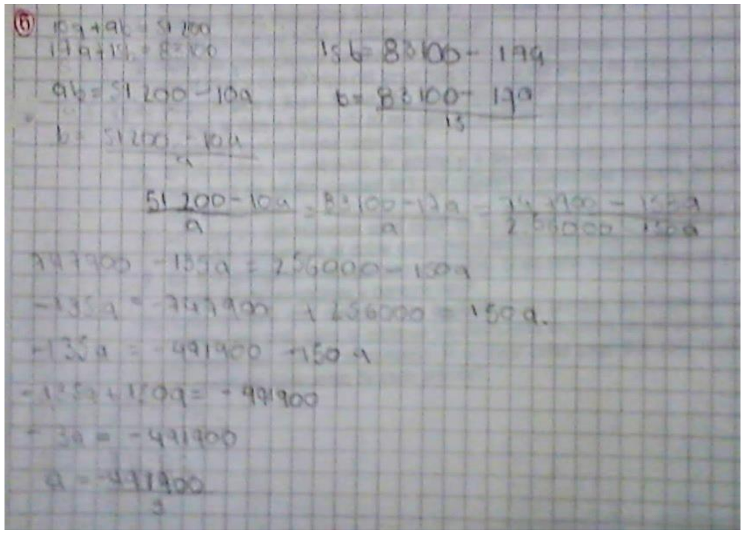


Figura 24. Solución de E7 y E8 por el método de eliminación

Los demás estudiantes (26) no resolvieron el problema, la mitad de ellos solo plantearon el sistema de ecuaciones.

Resultado. Ocho estudiantes dan respuesta correcta al problema. Las estrategias de solución empleadas son el método de igualación, eliminación y podría suponerse que otro de los métodos fue el de ensayo y error. Todos los alumnos que plantearon las ecuaciones realizaron de forma correcta el pasaje del registro verbal al registro algebraico, y ningún estudiante utiliza la representación gráfica como método de solución o verificación del problema.

De los análisis anteriores se puede afirmar que:

A pesar de que los estudiantes no tenían conocimientos previos sobre los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, estos lograron emplear estrategias de solución como: el método de igualación, eliminación de variables y ensayo y error. Para ello, primero realizaron el pasaje del registro verbal al registro algebraico y además, solo emplearon esta última representación para resolver los problemas planteados en el taller. Ningún estudiante hizo uso del método gráfico como estrategia de solución o de validación.

Según lo observado se puede decir que los estudiantes acuden a los métodos estandarizados por diferentes razones:

- Algunos por la guía del docente titular que les explicó en un principio como solucionar los problemas por el método de igualación.
- El trabajo en grupo y el dialogo entre estudiantes y profesores, donde se formularon preguntas orientadoras y reflexivas sobre lo que hacían, facilitaron que varios estudiantes entendieran y llegaran a alguno de los métodos de solución estandarizados para sistemas de ecuaciones lineales.
- Algunos estudiantes, ante la imposibilidad de resolver ciertos problemas planteados en el taller por medio de ensayo y error se vieron obligados a cambiar de estrategia, por lo que pedían explicación a otros compañeros que habían logrado entender uno de los métodos de solución estandarizados.

Esto concuerda con la tesis de que el aprendizaje es social y cooperativo, es decir, la mediación o la interacción con los otros facilita los procesos de aprendizaje.

En la interacción entre los estudiantes y, entre los estudiantes y el maestro, se evidenció que los conocimientos previos son la base para adquirir nuevos saberes, lo cual se vio reflejado cuando los estudiantes encontraron las estrategias apropiadas para solucionar las distintas situaciones problemas planteadas. Por un lado, dichos conocimientos permitieron a los alumnos usar el lenguaje matemático para expresar y comunicar ideas matemáticas, aplicar y traducir representaciones matemáticas y con ello construir nociones del conocimiento matemático, en este caso sistemas de ecuaciones lineales y su solución. Y por otro lado que los estudiantes argumentarán de manera correcta y coherente la validez de las estrategias de solución utilizadas y en algunos casos de la solución misma.

De acuerdo con lo anterior, se deduce que los estudiantes tuvieron la capacidad de reflexionar, analizar, fortalecer, adquirir, entender los conocimientos sobre los objetos matemáticos que se consideraron como conocimientos previos y las definiciones de sistemas de ecuaciones lineales y su solución, además de su comunicación, representación y construcción. Específicamente fueron capaces de:

- Encontrar estrategias apropiadas para resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales (método de igualación, eliminación y ensayo y error).
- Desarrollar y evaluar argumentos y pruebas en la solución de las situaciones problemas.
- Usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas.
- Crear y usar representaciones para registrar y comunicar ideas matemáticas.

- Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas.
- Construir nociones sobre algunos de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales por medio de la resolución de problemas.

Dentro de la teoría de situaciones didácticas, el taller propuesto es el medio utilizado con el que los estudiantes interactuaron. Esta interacción hizo posible que los estudiantes exploraran y trataran de resolver los problemas, es aquí donde ellos se hacen responsables de la actividad; toman decisiones sobre cómo proceder para obtener un resultado, y en caso de no ser correcto, replantear o modificar sus estrategias. Lo anterior hace parte de las situaciones de acción y se vio reflejado cuando leen comprensivamente los problemas y realizan el pasaje del registro verbal al algebraico, y también, al trabajar por ensayo y error o utilizando uno de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones para dar una respuesta precisa a los problemas planteados.

Por otra parte, el lenguaje que los estudiantes usaron al resolver y explicar las soluciones encontradas hace parte de las situaciones de formulación y les permitió ejercitar su lenguaje matemático. Ahora, con respecto a las situaciones de validación, los estudiantes que procedieron por ensayo y error corroboraban que las soluciones encontradas fueran correctas, pues este método lo que hace es probar qué números cumplen las condiciones dadas, en otras palabras, este es un método de validación. Por el contrario, los alumnos que resolvieron los problemas por el método de igualación o eliminación no verificaron que las soluciones encontradas fueran correctas. Por último, la situación de institucionalización no fue llevada a cabo por la practicante por cuestión de tiempo, pues la clase en la que se realizó el taller fue la última intervención que se hizo en el curso.

7. Conclusiones y Consideraciones Finales

Es importante dar a los estudiantes la oportunidad de resolver problemas sobre temas que aún no han estudiado, pues esto exige que realicen procesos de análisis y reflexión diferentes y por tanto que se apropien de los aprendizajes que están en vías de constitución, por tanto, la construcción de dichos aprendizajes será significativa.

Los estudiantes son capaces de resolver problemas sobre temas que no se han estudiado con anterioridad. Esto es posible, por un lado, si el maestro diseña un medio adecuado con el cual los estudiantes puedan interactuar y les permita relacionar lo que saben con los aprendizajes que se desean construir con la actividad. Y, por otro lado, debido a las interacciones entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor, pues ellas favorecen la forma como exploran, proceden y dan solución a los problemas plateados.

Por último, es fundamental que el profesor prepare con anterioridad los planes de clase, y asuma una postura sobre los modelos pedagógicos, las teorías de aprendizaje, realice un estudio histórico, epistemológico y conceptual del objeto matemático a enseñar. Estos aspectos ayudan a establecer los objetivos y las estrategias de trabajo y también, para realizar un proyecto de investigación o una sistematización de experiencias, tener claridad sobre ellos permite direccionar el trabajo hacia el objetivo y así mismo mejorar la práctica docente.

Referencia Bibliográfica

Aguilar, A. (27 de Septiembre de 2005). Foros: Catholic.net. Recuperado el 5 de Junio de 2015, de Catholic.net: http://es.catholic.net/op/articulos/9005/cat/426/tema-21-acto-y-potencia.html
Ausubel, D. (s.f). Teoría del aprendizaje significativo.
Barriga, F. D., & Hernández, R. G. (2002). Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. Una interpretación constructivista (Segunda Edición ed.). México: Mc Graw-Hill.
Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zarzal.
Charnay, R. (1993). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra, & I. Saiz, Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones (págs. 51-63). Buenos Aires, Argentina: Paidos.
D`Amore, B. (2006). Didáctica de la matemática. Magisterio.
D`Amore, B., & Fandiño, M. I. (2002). Un acercamiento analítico al triángulo de la didáctica. Educación Matemática, 48-61.
Dalton, M., Hoyle, D. G., & Watts, M. W. (2007). Relaciones Humanas. México: Thomson.
De Guzmán, M., & Gil, D. (26 de Septiembre de 1993). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática - Tendencias e Innovaciones.
Echeverri, G., & Sombredero, N. (2014). Dificultades en el aprendizaje de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales enseñados en grado noveno. Cali.
Flórez, R. (2005). Pedagogía del conocimiento. Bogotá: McGraw Hill.
Gálvez, G. (1993). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra, & I. Saiz, Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones (págs. 39-50). Buenos Aires: Paidos.
Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las mateáaticas para maestros. Universidad de Granada.
Jara, O. (s.f.). Orientaciones teórico-prácticas para la sistematización de experiencias.
Lay, D. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones. México: PEARSON EDUCACIÓN.
MEN, M. d. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.
MEN, M. d. (s.f.). Lineamientos Curriculares.
Múnera, J., & Obando, G. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. Educación y Pedagogía, 185-199.
Plan de estudios de matemáticas, Escuela Normal Superior de Popayán. (2011).
Santillana. (s.f.). Rutas Matemáticas 9. Santillana.
Santos, L. M. (s.f). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica.
Segura de Herrero, S. M. (Marzo de 2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7(1), 49-78.
Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernandez, J. (1989). Iniciación al álgebra. Madrid: Síntesis.
Uribe, J., Balderrama, M., Barrios, M., & Crespo, J. (2008). Manual para la sistematizción de experiencias en Fé y Alegría. Quito: Federación Internacional de Fe y Alegría, Programa de Sistematización de Experieencias (P.7).
Vigotsky, L. (1979). El desarrollo de los procesos Psicológicos superiores. Barcelona: Crítica.

Zambrano, A. (2002). Definición y pretensión de la pedagogía. En A. Zambrano, Pedagogía, educabilidad y formación de docentes (págs. 35-38). Cali: Grupo Editorial Nueva Biblioteca Pedagógica.

Anexos

Anexo N° 1.

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE POPAYÁN - UNIVERSIDAD DEL CAUCA

Licenciatura en Matemáticas

Práctica Pedagógica

Sistemas de ecuaciones

Grado 9

Taller: Sistemas de ecuaciones lineales 2×2

"La disciplina es el mejor amigo del hombre, porque ella le lleva a realizar los anhelos más profundos de su corazón"
Madre Teresa de Calcuta

Según las condiciones planteadas resuelve cada problema

1. Enrique tiene en su bolsillo billetes de \$5.000 y \$2.000 que suman \$38.000. Si se cambia el número de billetes de \$5.000 por el número de billetes de \$2.000 y viceversa, entonces suman \$32.000. ¿Cuántos billetes tiene Enrique de cada tipo?
2. Esteban tiene ahorrados \$13.000 en 41 monedas de \$500 y \$200. ¿Cuántas monedas son de \$200 y cuántas de \$500?
3. Halla las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que su perímetro mide $88m$ y que el tripe del largo más el doble del ancho es $118m$.
4. Pedro le dice a Juan: *Si me das* 15 *de tus canicas tendré*2 *veces lo que tú tienes.*
   Y Juan le dice a Pedro: S*i tú me das* 20 *de tus canicas tendré* 10 *más de lo que tú tienes.*
   ¿Cuántas canicas tienen cada uno?
5. En un teatro, 10 entradas de adulto y 9 de niño cuestan \$51.200, y 17 de niño y 15 de adulto cuestan \$83.100. ¿Cuánto cuesta una entrada de niño y una de adulto?
6. La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número mayor es 6 unidades mayor que el doble del número menor. Hallar los números.

7. En una granja se crían gallinas y conejos. Si en total hay 50 cabezas y 134 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay?
8. Luisa compra una camisa y un pantalón. Los precios de ambas prendas suman $60.000, pero le hicieron un descuento del 10% en el precio de la camisa y del 20% en el pantalón. Si en total Luisa pagó $50.150, ¿cuál era el precio sin descuento de cada prenda?

Anexo N° 2.

Maestro titular de matemáticas Esp. Carlos Cerón y estudiantes del curso noveno A de la Escuela Normal Superior de Popayán año lectivo 2013

Anexo N° 3.

Escuela Normal Superior de Popayán.

La Escuela Normal Superior de Popayán, como se estipula en el manual de convivencia, es una institución educativa mixta, de carácter público, laico, dedicada fundamentalmente a la formación de Maestros que además del conocimiento pedagógico, brindará a sus estudiantes una preparación que le permita el contacto con la ciencia y la tecnología, la cultura, el fortalecimiento de los valores y la participación en la vida pública. Esta institución está ubicada en el barrio La Ladera de la comuna seis, sector sur oriente de la ciudad de Popayán. Ofrece servicios educativos en la modalidad pedagógica, desde grado cero hasta el ciclo complementario de formación docente (cuatro semestres). Como ya se dijo anteriormente, la población escolar que atiende es mixta, con una cobertura aproximada de 1400 estudiantes, la mayoría de ellos proviene de los barrios de las comunas cinco y seis y de algunos sectores populares del municipio. (Trujillo, Molano, Gonzales, Rengifo, 2000).

Los barrios pertenecientes a estas comunas son de estratos uno, dos y tres que presentan problemas económicos y sociales. Además en algunas zonas de estas comunas, en especial de la comuna cinco, hay una alta concentración de habitantes.