ALGUNAS PROPIEDADES Y CARACTERÍSTICAS DEL SEMIGRUPO ASOCIADO A LA ECUACIÓN LINEAL DE SCHRÖDINGER

JUAN DAVID SAMBONÍ CHICANGANA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2017

ALGUNAS PROPIEDADES Y CARACTERÍSTICAS DEL SEMIGRUPO ASOCIADO A LA ECUACIÓN LINEAL DE SCHRÖDINGER

TRABAJO DE GRADO
EN MODALIDAD DE SEMINARIO, PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

JUAN DAVID SAMBONÍ CHICANGANA

DIRECTORA: DRA. AIDA PATRICIA GONZÁLEZ NIEVA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2017

Nota de aceptación

____

____

____

____

Directora: ________________________

Dra. Aida Patricia González N.

Jurado: ________________________

Dr. Ramiro Miguel Acevedo M.

Jurado: ________________________

Dr. Alex Manuel Montes P.

Fecha de sustentación: 24 de Julio de 2017

Agradecimientos

A Dios, por brindarme salud y bienestar físico y espiritual.

A mi familia: ellos siempre me han brindado su amor y apoyo incondicional en el transcurso de mi formación personal y profesional. A mi mamá, en especial, quiero agradecerle por brindarme todo lo necesario para haber llegado a este punto de mi formación académica, por ser un modelo excelente de persona y, sobre todo, por ser esa fuente de cariño que todo hijo quiere. Lo que soy hasta ahora, y lo que puedo llegar a ser, todo es gracias a ella.

A mis profesores: por brindar su guía y conocimientos para el desarrollo de mi carrera y de este trabajo. Quisiera agradecer en especial, a mi directora, la profesora Aida, por ser toda una mentora para mi, tanto en lo académico como en lo personal.

Y, por último pero no menos importante, a mis amigos: gracias por acompañarme en este camino y por ser una fuente confiable de ánimo y apoyo para mi.

Índice general

Introducción

La teoría de semigrupos de operadores lineales juega un papel muy importante en el estudio de una gran variedad de problemas comúnmente conocidos como ecuaciones de evolución. Este tipo de ecuaciones aparecen en muchas disciplinas; como por ejemplo en física, química, biología, ingenería, economía, entre otras.

Estos problemas usualmente son descritos por un problema de valor inicial (PVI) de ecuaciones diferenciales, que bien puede ser ordinaria o parcial. Hay ocasiones en las que podemos enfrentar el PVI directamente usando "métodos clásicos"de resolución de ecuaciones, pero también hay circunstancias donde estos métodos no son los indicados para proceder y es aquí donde se ve necesaria una teoría alternativa: la teoría de Semigrupos. Podemos estudiar el semigrupo asociado a la ecuación evolutiva en cuestión.

Por ejemplo veamos de forma muy resumida resultados obtenidos del estudio de una ecuación evolutiva en particular mediante el uso de teoría de semigrupos. La ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u &= 0; \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

es llamada ecuación del calor y, como su nombre lo indica, modela la distribución del calor (o variaciones de temperatura) en una región a lo largo del transcurso del tiempo. Mediante la teoría de semigrupos, junto con teoría de algunos espacios especiales de funciones, se puede demostrar que la solución a (0.0.1) viene dada por la expresión:

$$u(x,t) = e^{t\triangle} u_0(x),$$

donde la familia $\{e^{t\triangle}\}_{t\geq 0}$ es lo que hemos llamado un semigrupo y está definido, dada $f \in L^p$ con $1 \leq p \leq \infty$, por:

$$e^{t\triangle} f(x) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy & si \quad t > 0 \\ \\ f(x) & si \quad t = 0 \end{cases} \tag{0.0.2}$$

Conociendo al semigrupo, se deducen algunas propiedades de la solución de (0.0.1). Por ejemplo:

1. La solución u de (0.0.1) es infinitamente diferenciable, esto es, $u \in C^\infty$ (*Efecto regularizante fuerte*).

2. La ecuación (0.0.1) es irreversible en el tiempo.

3. Si u_0 tiene soporte compacto, $u(x,t)$ es no nula en todo $\mathbb{R}^n$.

4. Si $u_0 \geq 0$ entonces $e^{t\triangle} u_0 \geq 0$ para todo $t \geq 0$ (*Propiedad de conservación de signo*).

Para ver con mayor detalle los estudios realizados en la ecuación del calor, demostraciones y/o comentarios de las afirmaciones mencionadas anteriormente pueden remitirse a [Kesavan, capítulo 4, sección 6] y [Muñoz-Livio, capítulo 3].

En este trabajo se realizará un estudio teórico del semigrupo asociado a una ecuación de vital importancia en física, mas específicamente en mecánica cuántica, que describe la evolución, respecto al tiempo, de una particula subatómica de naturaleza ondulatoria no-relativista. Esta ecuación, aunque similar a la ecuación del calor en cuanto a, podríamos decir, "apariencia" es muy diferente tanto en su significado físico como en los aspectos matemáticos que hay tras de ella. La ecuación en cuestión es conocida como la Ecuación Lineal de Schrödinger:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} - i \triangle \psi &= 0; \qquad x \in \mathbb{R}^n, \\ \psi(x,0) &= \psi_0(x). \end{aligned}$$

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Transformada de Fourier

Una herramienta muy útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, pues permite cambiar la ecuación en cuestión a una, por lo general, más sencilla para estudiar es la transformada de Fourier. Hablaremos, de manera introductoria, un poco sobre esta herramienta: como está definida y algunas propiedades importantes. La teoría desarrollada en esta sección puede encontrarse en [Kesavan, capítulo 1, sección 1.8] y en [Linares-Ponce, capítulo 1, sección 1.1]

Definición 1.1.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La **transformada de Fourier** de f, denotada por $\widehat{f}$, es una función definida en $\mathbb{R}^n$ por la fórmula

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx. \tag{1.1.1}$$

Como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, es inmediato que $\widehat{f}(\xi)$ está bien definida para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. De hecho, tenemos que $|\widehat{f}(\xi)| \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier en L^1 vienen enlistadas en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1 (Propiedades de la Transformada de Fourier). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces:*

1. *$f \mapsto \widehat{f}$ define una transformación lineal de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1$.*
2. *La función $\widehat{f}$ es continua.*
3. *Si $\tau_h f(x) = f(x-h)$ entonces*
$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-2\pi i h\cdot\xi}\widehat{f}(\xi),$$
y
$$\tau_h(\widehat{f})(\xi) = (\widehat{e^{2\pi i h\cdot x}f})(\xi).$$
4. ***(Lema de Riemann-Lebesgue)** $\widehat{f}(\xi) \to 0$ cuando $|\xi| \to \infty$.*
5. *Si $\lambda > 0$ y $g(x) = f(x/\lambda)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, entonces*
$$\widehat{g}(\xi) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda\xi).$$
6. *Si $f * g$ denota la convolución de las funciones f y g entonces*
$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

Demostración. Las propiedades 1, 3 y 5 se obtienen fácilmente de la definición de transformada de Fourier. Demostraremos 2, 4 y 6.

2. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De (1.1.1) y aplicando el Teorema de convergencia dominada tenemos que:
$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)}f(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}f(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}(e^{-2\pi i x\cdot h}-1)dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||e^{-2\pi i x\cdot h}-1|dx \xrightarrow{h\to 0} 0.
\end{aligned}$$

Esto muestra que, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{h \to 0} \widehat{f}(\xi + h) = \widehat{f}(\xi);$$

o, equivalentemente, que $\widehat{f}$ es continua.

4. De la propiedad 3 sabemos que:

$$e^{2\pi i h \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x+h) dx.$$

Para un ξ fijo, tomemos $h = \xi / 2|\xi|^2$ y así $e^{-2\pi i h \cdot \xi} = e^{-i\pi} = -1$. Luego,

$$\widehat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x+h) dx.$$

Sumando esta ecuación a (1.1.1) obtenemos:

$$2\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} (f(x) - f(x+h)) dx.$$

Así,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+h)| dx.$$

Note que $|h| = (2|\xi|)^{-1}$, de donde, si $|\xi| \to \infty$ entonces $h \to 0$. Por lo tanto, debido a la continuidad de la traslación en la norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$ (vea [Jones, capítulo 7, sección D]), se concluye que $\widehat{f}(\xi) \to 0$ cuando $|\xi| \to \infty$.

6. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $h = f * g$. Como $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y h está bien definida. Ahora bien:

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right) dx.$$

Aplicando el teorema de Fubini:

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} g(x-y) dx \right) dy.$$

Finalmente, por la propiedad 3:

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{g}(\xi) dy = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).$$

■

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier es su relación con la diferenciación, descrita en este resultado.

Teorema 1.1.2. *Suponga* $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *donde* x_j *denota la* j*-ésima coordenada de* x. *Entonces* $\widehat{f}$ *es diferenciable con respecto a* ξ_j *y*

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = (\widehat{-2\pi i x_j f}(x))(\xi).$$

Demostración. Sea $\{e_j\}_{j=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Tenemos que:

$$\frac{1}{h}(\widehat{f}(\xi + he_j) - \widehat{f}(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x) \left(\frac{e^{-2\pi i h x_j} - 1}{h} \right) dx.$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada se sigue que:

$$\frac{1}{h}(\widehat{f}(\xi + he_j) - \widehat{f}(\xi)) \xrightarrow{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)(-2\pi i x_j)dx = (\widehat{-2\pi i x_j f}(x))(\xi).$$

■

Teorema 1.1.3. *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *continuamente diferenciable en* $\mathbb{R}^n$ *tal que su derivada parcial respecto a la* j*-ésima coordenada está en* $L^1(\mathbb{R}^n)$, *y que además, para todo entero* $k \geq 0$, *la función* $(1 + |x|^2)^k f(x)$ *es acotada. Entonces:*

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi).$$

Demostración. Aplicando integración por partes [Evans, apéndice C, sección C.2, teorema 2] tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{B(0,R)} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} 2\pi i \xi_j \int_{B(0,R)} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx + \frac{1}{R}\int_{|x|=R} f(x)e^{-2\pi i x\xi} x_j dS_R.$$

Pero, note que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{R}\int_{|x|=R} f(x)e^{-2\pi i x\xi}x_j dS_R\right| &\leq \frac{1}{R}\int_{|x|=R} |f(x)||x_j|(1+|x|^2)^k(1+|x|^2)^{-k}dS_R \\
&\leq \frac{C_k}{R}\int_{|x|=R} |x_j|(1+|x|^2)^{-k}dS_R \\
&= \frac{C_k}{R}\int_{|x|=R} |x_j|(1+R^2)^{-k}dS_R.
\end{aligned}$$

Finalmente, haciendo el cambio de variable $y = \frac{1}{R}x$, obtendremos que:

$$\left|\frac{1}{R}\int_{|x|=R} f(x)e^{-2\pi i x\xi}x_j dS_R\right| \leq \frac{C_k R^{n-1}}{(1+R^2)^k}\int_{|y|=1} |y_j|dS_1 \xrightarrow{R\to\infty} 0;$$

si elegimos k lo suficientemente grande. Así, de lo anterior se concluye que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx = 2\pi i\xi_j\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}f(x)dx = 2\pi i\xi_j\widehat{f}(\xi).$$

■

A pesar de que la definición de la transformada de Fourier viene dada para un espacio de funciones en concreto, podemos definir la transformada de Fourier en espacios "más generales", pero esto lo haremos en la siguiente sección junto con la presentación de un espacio de funciones en particular: el espacio de Schwartz $\mathscr{S}$.

1.2. El Espacio de Schwartz $\mathscr{S}$

Cuando estudiamos ecuaciones algebráicas, las incógnitas de dichas ecuaciones son números y por tal razón es importante el análisis en espacios numéricos ($\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$). Sin embargo, en ecuaciones diferenciales las incógnitas son funciones y es por eso que, en forma análoga a lo que hacemos en ecuaciones algebráicas, es necesario realizar análisis en espacios de funciones. En la sección anterior se definió la transformada de Fourier en el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$, el cual es un ejemplo de espacio de funciones. En esta sección, hablaremos del espacio de Schwartz: un subespacio de $L^1(\mathbb{R}^n)$ (y por tal un espacio de funciones) que es invariante bajo la transformada de Fourier.

1.2.1. Distribuciones

En primer lugar, hablaremos un poco sobre las distribuciones, o funciones generalizadas. Como su nombre lo indica, las distribuciones buscan generalizar la noción clásica de función bajo la necesidad de dar soporte matemático a ideas pensadas en la física en el contexto de las aplicaciones.

Definición 1.2.1. El conjunto de funciones de clase C^∞ definidas en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con soporte compacto contenido en Ω es un espacio vectorial llamado **espacio de funciones de prueba**, que denotaremos $\mathscr{D}(\Omega)$ (si $\Omega = \mathbb{R}^n$, escribimos $\mathscr{D}$).

Definición 1.2.2. Una sucesión de funciones (ϕ_m) en $\mathscr{D}(\Omega)$ se dice que converge a 0, notado $\phi_m \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, si existe un compacto fijo $K \subset \Omega$ tal que $supp(\phi_m) \subset K$ para todo m y ϕ_m y todas sus derivadas convergen uniformemente a 0 en K.

Definición 1.2.3. Un funcional lineal T en $\mathscr{D}(\Omega)$ se dice que es una **distribución** en Ω si siempre que $\phi_m \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, tenemos que $T(\phi_m) \to 0$. El espacio de distribuciones, el cual es el espacio dual del espacio de funciones de prueba, es denotado por $\mathscr{D}'(\Omega)$ (si $\Omega = \mathbb{R}^n$, escribimos $\mathscr{D}'$).

Para nuestro trabajo es importante mostrar las distribuciones "inducidas" por funciones en L^p, $p \geq 1$. Primero, recordemos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) se dice que es **localmente integrable** en Ω si para cada compacto $K \subset \Omega$,

$$\int_K |f| < \infty,$$

en cuyo caso escribimos $f \in L_{loc}(\Omega)$.

Dada $f \in L_{loc}(\Omega)$, defina $T_f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) como sigue:

$$T_f(\phi) := \int_\Omega f\phi.$$

Puede verificarse fácilmente que T_f está bien definida.

Ahora bien, claramente T_f es un funcional lineal en $\mathscr{D}(\Omega)$. Veamos que, en efecto, T_f es una distribución. Sea (ϕ_m) una sucesión de funciones en $\mathscr{D}(\Omega)$ tal que $\phi_m \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$. Luego, existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $supp(\phi_m) \subset K$ y $\phi_m \to 0$ uniformemente en K. Es claro que

$$T_f(\phi_m) = \int_\Omega f\phi_m = \int_K f\phi_m,$$

para todo m, pues $supp(\phi_m) \subset K$. Así:

$$|T_f(\phi_m)| \leq \int_K |f||\phi_m| \leq \int_K |f| \sup_{x\in K} |\phi_m| \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Esto muestra que T_f es una distribución.

Por otro lado, note que si $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, dado $K \subset \Omega$ compacto, se cumple que

$$\int_K |f| = \int_K |f|(1) \leq \left(\int_K |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_K 1^q\right)^{1/q} = \left(\int_K |f|^p\right)^{1/p} (\mu(K))^{1/q} < \infty;$$

donde $\mu(K)$ denota la medida del conjunto K. De igual manera, si $p = 1$

$$\int_K |f| \leq ||f||_{L^1(\Omega)} < \infty.$$

Finalmente, si $p = \infty$

$$\int_K |f| \leq (\mu(K))||f||_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

De aquí, $f \in L_{loc}(\Omega)$ y se sigue que cualquier función en L^p, $p \geq 1$, genera una distribución.

Como las distribuciones son una generalización de las funciones y estas son importantes en el contexto de las ecuaciones diferenciales, es natural pensar en definir la derivada para distribuciones. Antes de ello, presentaremos algunos aspectos de notación.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ multi-índices. Asociados a estos multi-índices tenemos los siguientes definiciones:

$$\begin{array}{ccl} |\alpha| & := & \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \\ \alpha! & := & \alpha_1! \ldots \alpha_n!, \\ x^\alpha & := & x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \\ \alpha \leq \beta & \text{si y sólo si} & \alpha_j \leq \beta_j \text{ para todo } 1 \leq j \leq n. \end{array}$$

Para las derivadas parciales usaremos la notación

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

A manera de introducción del concepto de derivada en $\mathscr{D}'$, primero consideremos $f \in C^1(\mathbb{R})$ y T_f la distribución inducida por f. Se tiene que f' es localmente integrable y así, para $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, por integración por partes se sigue que:

$$T_{f'}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f'\phi = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' = -T_f(\phi').$$

Generalizando esto, se define para cualquier $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$

$$T'(\phi) := -T(\phi')\ ,\ \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Note que T' es lineal debido a la linealidad de T y de la derivada, además dada una sucesión (ϕ_m) en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $\phi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, de la definición de convergencia en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, se sigue que la sucesión de derivadas (ϕ'_m) también converge a 0. Luego, $T'(\phi_m) = -T(\phi'_m) \to 0$, y así $T' \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Repitiendo el proceso:

$$T''(\phi) = -T'(\phi') = T(\phi''),$$

y de manera inductiva obtendríamos:

$$T^{(k)}(\phi) = (-1)^k T(\phi^{(k)}).$$

Generalizamos este concepto en la siguiente definición.

Definición 1.2.4. Sea $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Se define, para cualquier multi-índice α, la distribución derivada $D^\alpha T$ como sigue:

$$(D^\alpha T)(\phi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi)\ ,\ \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Finalizaremos esta sección introduciendo el concepto de multiplicación de una distribución por una función de clase C^∞.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $\psi \in C^\infty(\Omega)$ fija y (ϕ_m) una sucesión en $\mathscr{D}(\Omega)$ que converge a 0. De la fórmula de Leibniz para derivadas y la definición de convergencia en $\mathscr{D}(\Omega)$ se tiene que $\psi\phi_m \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$. Luego, para cualquier distribución T, se cumple que $T(\psi\phi_m) \to 0$. Lo anterior justifica la siguiente definición:

Definición 1.2.5. Sea $\psi \in C^\infty(\Omega)$ y $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Se define la distribución producto ψT como sigue:

$$(\psi T)(\phi) := T(\psi\phi)\ ,\ \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Observación 1.2.1. Note que si en la definición anterior, T es inducida por una función ($T = T_f$), entonces $\psi T = T_{\psi f}$.

1.2.2. El Espacio de Schwartz, $\mathscr{S}$

El espacio de Schwartz es un subespacio de $L^1(\mathbb{R}^n)$ el cual es invariante bajo la transformada de Fourier. Este consiste de funciones C^∞, que junto con sus derivadas, decrecen rápidamente en el infinito, esto es, decrecen a cero en el infinito más rápido que cualquier potencia de $|x|^{-1}$. Dicho de forma más precisa:

Definición 1.2.6. El **espacio de Schwartz**, o el espacio de **funciones que decrecen rápidamente**, $\mathscr{S}$, se define como sigue:

$$\mathscr{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \lim_{|x|\to\infty} |x^\beta D^\alpha f(x)| = 0\ ;\ \text{para todo multi-índice } \alpha \text{ y } \beta \right\}.$$

El espacio $\mathscr{S}$ es un espacio topológico, cuya topología describiremos mediante sus sucesiones convergentes.

Definición 1.2.7. Decimos que una sucesión f_m converge a 0 en $\mathscr{S}$, notado $f_m \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, si

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f_m(x)| = 0$$

para todo multi-índice α, β.

Definición 1.2.8. Un operador lineal de $\mathscr{S}$ a un espacio vectorial topológico se dirá continuo si es secuencialmente continuo.

De la definición de $\mathscr{S}$, es claro que cualquier función $\phi \in \mathscr{D}$ está trivialmente en $\mathscr{S}$, de hecho $\mathscr{D}$ está contenido continuamente en $\mathscr{S}$. Se mencionarán ahora unas cuantas propiedades y definiciones relacionadas con este espacio.

Propiedades. Sean $f, g \in \mathscr{S}$, α un multi-índice, L un operador diferencial con coeficientes constantes y $P(x)$ cualquier polinomio. Entonces:

1. $$D^\alpha f \in \mathscr{S}, P(\cdot)f(\cdot) \in \mathscr{S}, L(P(\cdot)f(\cdot)) \in \mathscr{S}, P(\cdot)Lf(\cdot) \in \mathscr{S}, fg \in \mathscr{S}.$$

2. El operador
$$f \mapsto L(P(\cdot)f(\cdot))$$
es continuo de $\mathscr{S}$ en sí mismo.

3. Para cada entero $k \geq 0$, la función
$$(1+|x|^2)^k D^\alpha f(x)$$
es acotada en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.1. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $\mathscr{D}$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Ver [Kesavan, capítulo 1, sección 1.5, teorema 1.5.6]. ■

Teorema 1.2.2. *$\mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ y la inclusión es continua.*

Demostración. Sea $f \in \mathscr{S}$. Entonces, para cualquier entero $k \geq 0$, existe una constante $C_k > 0$ tal que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)(1+|x|^2)^k| \leq C_k.$$
Para $k > n/2$ se tiene que $(1+|x|^2)^{-k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y así:
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|^2)^k(1+|x|^2)^{-k}dx \leq C_k \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-k} < \infty.$$
Esto muestra que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ahora bien, sea (ϕ_m) una sucesión en $\mathscr{S}$ tal que $\phi_m \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$. De lo anterior se tiene que:
$$||\phi_m||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-k}\right) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi_m(x)(1+|x|^2)^k| \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$
Esto muestra la continuidad de la inclusión. ■

De hecho, se cumple que para cualquier p tal que $1 \leq p \leq \infty$,
$$\mathscr{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n).$$

En particular para $1 \leq p < \infty$, de los teoremas anteriores y el hecho de que $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$, se sigue que $\mathscr{S}$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

La utilidad del espacio $\mathscr{S}$ se deriva de como se comportan sus elementos mediante la transformada de Fourier.

Teorema 1.2.3. *Sea $f \in \mathscr{S}$. Entonces $\widehat{f} \in \mathscr{S}$ y el operador $f \mapsto \widehat{f}$ de $\mathscr{S}$ a sí mismo es un operador lineal continuo.*

Demostración. Como $f \in \mathscr{S}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y la transformada de Fourier de f está bien definida. De las propiedades de $\mathscr{S}$, se tiene que $x_j f(x) \in \mathscr{S}$, para cualquier $1 \leq j \leq n$, y por tal razón es integrable. Luego, por el teorema 1.1.2:

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = (\widehat{-2\pi i x_j f}(x))(\xi).$$

Iterando se sigue que, para cualquier multi-índice α:

$$D^\alpha \widehat{f}(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|}(\widehat{x^\alpha f(x)})(\xi). \tag{1.2.1}$$

La expresión (1.2.1) es la transformada de Fourier de una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$, y por tanto es continua. Así, tenemos que $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Por otro lado, ya que $f \in \mathscr{S}$, se verifican todas las hipótesis del teorema 1.1.3 y se cumple entonces que:

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi).$$

Iterando se deduce que para cualquier multi-índice β:

$$(\widehat{D^\beta f})(\xi) = (2\pi i \xi)^\beta \widehat{f}(\xi). \tag{1.2.2}$$

Si combinamos (1.2.1) y (1.2.2), obtendremos:

$$[D^\beta \widehat{(x^\alpha f(x))}](\xi) = \frac{(2\pi i)^{|\beta|}}{(-2\pi i)^{|\alpha|}} \xi^\beta D^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Así, por el Lema de Riemann-Lebesgue:

$$|\xi^\beta D^\alpha \widehat{f}(\xi)| = \left| \frac{(-2\pi i)^{|\alpha|}}{(2\pi i)^{|\beta|}} [D^\beta \widehat{(x^\alpha f(x))}](\xi) \right| \xrightarrow{|\xi| \to \infty} 0.$$

Por lo tanto, $\widehat{f} \in \mathscr{S}$.

Ahora bien, sea (ϕ_m) una sucesión en $\mathscr{S}$ tal que $\phi_m \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ con $k > n/2$. De lo anterior:

$$|\xi^\beta D^\alpha \widehat{\phi_m}(\xi)| \leq \frac{(2\pi)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{|\beta|}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |D^\beta(x^\alpha \phi_m(x))|(1+|x|^2)^{-k} dx.$$

Luego,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha \widehat{\phi_m}(\xi)| \leq \left(\frac{(2\pi)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{|\beta|}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-k} dx \right) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |D^\beta(x^\alpha \phi_m(x))| \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Esto muestra que $\widehat{f_m} \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$ y, por tanto, que la transformada de Fourier define un operador lineal continuo en $\mathscr{S}$. ■

Los siguientes resultados nos muestran que la transformada de Fourier no solo envía al espacio de Schwartz $\mathscr{S}$ en sí mismo, sino que además es invertible en $\mathscr{S}$.

Lema 1.2.1 (Relación Débil de Parseval). *Sean $f, g \in \mathscr{S}$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

Demostración. Ver [Kesavan, capítulo 1, sección 1.10, lema 1.10.1]. ■

Teorema 1.2.4 (Fórmula Inversa de Fourier). *Sea $g \in \mathscr{S}$. Entonces*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} \widehat{g}(\xi) d\xi.$$

Demostración. Sea $\phi \in \mathscr{S}$ cualquiera y $\lambda > 0$. Defina $f(x) = \phi(x/\lambda)$. Luego, $f \in \mathscr{S}$ y además

$$\widehat{f}(\xi) = \lambda^n \widehat{\phi}(\lambda\xi).$$

Aplicando el lema anterior a f y g obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \lambda^n \widehat{\phi}(\lambda\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x) \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx,$$

o equivalentemente

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\widehat{\phi}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x)\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx.$$

Cuando $\lambda \to \infty$, $g(\xi/\lambda) \to g(0)$ y $\phi(x/\lambda) \to \phi(0)$. Luego, como $\widehat{g}, \widehat{\phi} \in \mathscr{S}$, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada y obtener que

$$g(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(\xi)d\xi = \phi(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x)dx.$$

Tomando $\phi(x) = e^{-|x|^2}$, entonces

$$\widehat{\phi}(\xi) = (\pi)^{n/2}e^{-\pi^2|\xi|^2},$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(\xi)d\xi = 1\ ,\ \phi(0) = 1.$$

Se concluye que

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(\xi)d\xi.$$

Esto prueba la fórmula para $x = 0$. Para $x \neq 0$, basta aplicar lo anterior reemplazando g con $\tau_{-x}g$ y usar las propiedades de transformada de Fourier. ■

De lo anterior se sigue que la transformada de Fourier es un isomorfismo (topológico) de $\mathscr{S}$ en sí mismo (ver [Kesavan, capítulo 1, sección 1.10, corolario del teorema 1.10.1]).

Observación 1.2.2. El uso del término “isomorfismo (topológico)” es debido a que hemos demostrado que, en $\mathscr{S}$, la transformada de Fourier es lineal, biyectiva y además es continua, con inversa continua, con la topología definida mediante las sucesiones convergentes.

Lema 1.2.2 (Relación Fuerte de Parseval). *Sean $f, g \in \mathscr{S}$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\widehat{\overline{g}}.$$

Demostración. Ver [Kesavan, capítulo 1, sección 1.10, lema 1.10.2]. ■

Luego, para $f \in \mathscr{S}$, se cumple que $||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\widehat{f}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Esto nos lleva a una primera extensión de la transformada de Fourier a una clase más grande de funciones dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.2.5 (Plancherel). *Existe una única isometría*

$$\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

la cual es sobre y tal que, para todo $f \in \mathscr{S}$

$$\mathscr{F}(f) = \widehat{f}.$$

Demostración. Ver [Kesavan, capítulo 1, sección 1.10, teorema 1.10.2]. ■

1.2.3. Distribuciones Temperadas

Previamente mencionamos que $\mathscr{D}$ está contenido de manera continua en $\mathscr{S}$, esto implica que $\mathscr{S}'$, el espacio dual de $\mathscr{S}$, está contenido en el espacio de distribuciones $\mathscr{D}'$.

Definición 1.2.9. El espacio dual de $\mathscr{S}$, es decir el conjunto de funcionales continuos definidos en $\mathscr{S}$, es llamado el espacio de **distribuciones temperadas**.

Sabemos que las funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, inducen distribuciones. Mostraremos ahora que, más precisamente, estas funciones inducen distribuciones temperadas.

Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y definamos

$$T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} f\phi \ , \ \phi \in \mathscr{S}.$$

Es claro que T_f es lineal. Veamos que T_f es continua. Sea (ϕ_m) una sucesión en $\mathscr{S}$ tal que $\phi_m \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$.

Si $p = 1$,

$$|T_f(\phi_m)| \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}||\phi_m||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Si $1 < p < \infty$, sea q su exponente conjugado. Luego, si definimos

$$g(x) = (1 + |x|^2)^{-k} \ , \ k > \frac{n}{2q} \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

se tiene que $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y así, por desigualdad de Hölder

$$|T_f(\phi_m)| \leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |\phi_m(x)| \right) ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}||g||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

De igual manera, si $p = \infty$

$$|T_f(\phi_m)| \leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |\phi_m(x)| \right) ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} ||g||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

donde g es definida como en el caso anterior, pero con $k > n/2$. Lo anterior muestra la continuidad de T_f y, por tanto, T_f es una distribución temperada.

Definición 1.2.10. Sea (ψ_m) una sucesión en $\mathscr{S}'$. Decimos que ψ_m converge a cero en $\mathscr{S}'$, notado $\psi_m \xrightarrow{\mathscr{S}'} 0$, si para cualquier $\varphi \in \mathscr{S}$ se tiene que $\psi_m(\varphi) \to 0$.

Ahora, procederemos a definir la transformada de Fourier para distribuciones temperadas. A manera de motivación, sea $f \in \mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Luego $\widehat{f} \in \mathscr{S}$ y, dada $\phi \in \mathscr{S}$ cualquiera, de la relación débil de Parseval se sigue

$$T_{\widehat{f}}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\phi = \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{\phi} = T_f(\widehat{\phi}).$$

Generalizamos lo anterior con la siguiente definición:

Definición 1.2.11. Sea $T \in \mathscr{S}'$. Definimos la transformada de Fourier de T, $\widehat{T} \in \mathscr{S}'$, como sigue:

$$\widehat{T}(\phi) := T(\widehat{\phi}) \ , \ \phi \in \mathscr{S}.$$

Observación 1.2.3.

- Como el operador $\phi \mapsto \widehat{\phi}$ es continuo en $\mathscr{S}$, se sigue que $\widehat{T} \in \mathscr{S}'$ y por tanto está bien definido.

- De los cálculos presentados en la motivación, se tiene que la transformada de Fourier en el sentido clásico coincide con esta nueva definición (en el sentido de las distribuciones temperadas).

- De igual manera puede mostrarse que esta definición coincide también con la extensión de la transformada de Fourier dada por el teorema de Plancherel (ver [Kesavan, capítulo 1, sección 1.11, página 45]).

- Dado que la transformada de Fourier define un isomorfismo de $\mathscr{S}$ en sí mismo, se tiene que el operador transformada de Fourier en $\mathscr{S}'$ es una biyección en sí mismo.

De las propiedades de $\mathscr{S}$ tenemos que si P es un polinomio y α cualquier multi-índice, entonces para cualquier $T \in \mathscr{S}'$, se cumple que $PT \in \mathscr{S}'$ y $D^\alpha T \in \mathscr{S}'$. Luego, tiene sentido pensar en la derivada de la transformada de Fourier y en la transformada de la derivada en el sentido de las distribuciones temperadas, tal y como en el sentido clásico.

Teorema 1.2.6. *Sea $T \in \mathscr{S}'$ y α un multi-índice. Entonces*

$$\begin{aligned} D^\alpha \widehat{T} &= (-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha T} \\ \widehat{D^\alpha T} &= (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{T}. \end{aligned}$$

Demostración. Ver [Kesavan, capítulo 1, sección 1.11, teorema 1.11.1]. ■

Finalizamos esta sección presentando la definición de convolución entre una distribución temperada y una función en $\mathscr{S}$, junto con una propiedad importante de esta, relacionada con la transformada de Fourier.

Teorema 1.2.7. *Sea $\varphi \in \mathscr{S}$ y $\psi \in \mathscr{S}'$. Se define:*

$$(\psi * \varphi)(\phi) := \psi(\tilde{\varphi} * \phi),$$

donde $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Entonces $(\psi * \varphi) \in \mathscr{S}'$ y

$$\widehat{\psi * \varphi} = \widehat{\psi}\widehat{\varphi}.$$

Demostración. Sea $\phi \in \mathscr{S}$. Dado que $\mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{\varphi} * \phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y su transformada de Fourier viene dada por:

$$\widehat{\tilde{\varphi} * \phi} = \widehat{\tilde{\varphi}}\widehat{\phi}.$$

Como el producto de funciones es cerrado en $\mathscr{S}$, se tiene que $\widehat{\tilde{\varphi}}\widehat{\phi} \in \mathscr{S}$ y así, de la fórmula inversa de Fourier, se concluye que $\tilde{\varphi} * \phi \in \mathscr{S}$. Esto muestra que $\psi * \varphi$ está bien definido.

La linealidad de $\psi * \varphi$ se tiene gracias a la linealidad de ψ y a la linealidad de la convolución (respecto a ϕ). Mostremos que $\psi * \varphi$ es continua.

Sea (ϕ_m) una sucesión en $\mathscr{S}$ tal que $\phi_m \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$. Debido a la continuidad en $\mathscr{S}$ del operador transformada de Fourier, se tiene que $\widehat{\phi_m} \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$. Así, dados α y β multi-índices cualesquiera, de la fórmula de Leibniz para derivadas se sigue que

$$|\xi^\beta D^\alpha(\widehat{\tilde{\varphi} * \phi_m})(\xi)| = |\xi^\beta D^\alpha(\widehat{\tilde{\varphi}}(\xi)\widehat{\phi_m}(\xi))| \leq \sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}|D^\gamma \widehat{\tilde{\varphi}}(\xi)||\xi^\beta D^{\alpha-\gamma}\widehat{\phi_m}(\xi)|.$$

Luego,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha(\widehat{\tilde{\varphi} * \phi_m})(\xi)| \leq \sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}||D^\gamma \widehat{\tilde{\varphi}}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^{\alpha-\gamma}\widehat{\phi_m}(\xi)| \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Esto muestra que $\widehat{\tilde{\varphi} * \phi_m} \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$ y, en consecuencia de la continuidad en $\mathscr{S}$ del operador transformada inversa de Fourier, se obtiene que $\tilde{\varphi} * \phi_m \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$. Luego, de la continuidad de ψ,

$$(\psi * \varphi)(\phi_m) = \psi(\tilde{\varphi} * \phi_m) \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

En consecuencia, $\psi * \varphi \in \mathscr{S}'$.

Ahora bien, dada $\phi \in \mathscr{S}$, se tiene que:

$$\widehat{\psi}\widehat{\varphi}(\phi) = \widehat{\psi}(\widehat{\varphi}\phi) = \psi(\widehat{\widehat{\varphi}\phi}).$$

De las propiedades de la transformada de Fourier y la relación débil de Parseval tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\widehat{\widehat{\varphi}\phi})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi}\widehat{\varphi}(y)\phi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\tau_\xi \varphi})(y)\phi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_\xi \varphi)(y)\widehat{\phi}(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y-\xi)\widehat{\phi}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\xi-y)\widehat{\phi}(y)dy = (\tilde{\varphi} * \widehat{\phi})(\xi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\widehat{\psi}\widehat{\varphi}(\phi) = \psi(\tilde{\varphi} * \widehat{\phi}) = (\psi * \varphi)(\widehat{\phi}) = (\widehat{\psi * \varphi})(\phi).$$

■

1.3. Introducción a la Teoría de Semigrupos

En esta sección hablaremos de otro elemento importante para el desarrollo del trabajo: la teoría de semigrupos. Se hablará de manera introductoria sobre ella, se darán algunas definiciones, ejemplos sencillos y propiedades importantes. Pero antes de ello, recordemos algunos aspectos sobre operadores lineales. Sean V, W espacios de Banach y A un operador lineal de V a W. Denotaremos por $D(A)$ al dominio de A, $R(A)$ al rango de A y $N(A)$ al espacio nulo de A.

Definición 1.3.1.

1. Un operador lineal $A : D(A) \subset V \to W$ se dice que es **acotado** si existe una constante $C > 0$ tal que

$$||Au||_W \leq C||u||_V \ , \forall u \in D(A).$$

   De lo contrario se dirá que es **no acotado**.

2. A es **densamente definido** si $\overline{D(A)} = V$.

3. A es **cerrado** si el gráfico

$$G(A) = \{(u, Au)|u \in D(A)\} \subseteq V \times W$$

   es cerrado como subespacio de $V \times W$. Es decir, si dada una sucesión (v_n) en V tal que $v_n \to v$ y $Av_n \to w$, para algún $v \in V$ y algún $w \in W$, entonces se cumple que $v \in D(A)$ y $Av = w$.

A manera de motivación del concepto de semigrupo, hablemos antes un poco de un operador que de seguro es familiar para los matemáticos: el operador exponencial. Consideremos V un espacio de Banach, $A : V \to V$ un operador lineal acotado y la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad , \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \quad , \quad u_0 \in V. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

El PVI anterior tiene solución única para todo tiempo t (en consecuencia del Teorema de Picard) y dicha solución puede describirse explícitamente. En primer lugar, consideremos la serie:

$$e^A := I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Note que, dado que A es acotado se tiene que:

$$||I|| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{||A^k||}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!} = e^{||A||} < \infty.$$

Esto muestra que la serie en cuestión es absolutamente convergente y por tanto, puesto que el espacio de operadores lineales acotados de V en V es un espacio de Banach al V serlo, la serie es convergente. Luego e^A está bien definido. Teniendo en cuenta esto, podemos definir el siguiente operador lineal acotado

$$u(t) := e^{tA} u_0. \tag{1.3.2}$$

Veamos que, en efecto, $u(t)$ es solución de (1.3.1). Es claro que $u(0) = u_0$. Ahora bien, note que, para $t, h \in \mathbb{R}$, tA y hA conmutan. De donde, por la fórmula binomial

$$[(t+h)A]^k = [tA + hA]^k = k! \sum_{j+m=k} \frac{(tA)^j (hA)^m}{j!m!}.$$

Luego,

$$e^{tA} e^{hA} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tA)^j}{j!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(hA)^m}{m!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j+m=k} \frac{(tA)^j (hA)^m}{j!m!} = e^{(t+h)A}.$$

Hemos usado el hecho de que el producto de dos series absolutamente convergentes es una serie absolutamente convergente la cual es dada por su producto de Cauchy (ver [Rudin, capítulo 3, teorema 3.50]).

Por otro lado

$$\frac{e^{hA} u_0 - u_0}{h} = \frac{1}{h} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \right) u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} A^k u_0 = A u_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} A^k u_0.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}}{k!}A^k u_0\right|\right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|h|^{k-1}}{k!}||A||^k||u_0|| \\
&\leq |h|||A||^2||u_0||\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}||A||^k \\
&= |h|||A||^2||u_0||e^{|h|||A||} \\
&\xrightarrow{|h|\to 0} 0.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{hA}u_0-u_0}{t}=Au_0.$$

Así, de lo anterior se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{(t+h)A}u_0-e^{tA}u_0}{h} \\
&= e^{tA}\lim_{h\to 0}\frac{e^{hA}u_0-u_0}{h} = e^{tA}Au_0 = Au(t).
\end{aligned}$$

Con esto hemos mostrado que (1.3.2) es la solución al PVI (1.3.1). Es de importancia resaltar que la manera en que es definido el operador exponencial e^A es gracias al hecho de que A es acotado. Pero, en ecuaciones diferenciales no siempre se trabaja con operadores acotados. Existen muchas ecuaciones diferenciales parciales evolutivas las cuales podrían escribirse de la forma (1.3.1) pero con A no acotado. Por ejemplo, la ecuación del calor (0.0.1) tiene la forma (1.3.1) con A siendo el operador laplaciano, el cual es *no acotado* (ver [Kesavan, capítulo 4, sección 4.1, ejemplo 4.1.2]). En estas situaciones, la teoría anterior no podría aplicarse y, en vista de esto, sería necesaria una "generalización" del operador exponencial. Esto motiva la definición de semigrupo.

Definición 1.3.2. Sea V un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ una familia de operadores lineales acotados en V. Se dice que la familia es un **semigrupo** si se cumple que:

1. $S(0)=I$, siendo I el operador identidad en V.

2. $S(t+s)=S(t)S(s)$; $\forall t,s\geq 0$.

Observación 1.3.1.

- Estas familias de operadores no reciben el nombre de semigrupo solo porque sí. En álgebra, un conjunto no vacío dotado de una operación binaria se dice un semigrupo si la operación es asociativa. En nuestra definición, la operación binaria es la composición de funciones y la asociatividad viene dada por la propiedad 2.

- De los cálculos mostrados como motivación, se tiene que dado A un operador acotado en un espacio de Banach V, la familia $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ define un semigrupo.

Hablemos ahora de una clase importante de semigrupo:

Definición 1.3.3. Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo tal que para cada $u \in V$

$$\lim_{t\to 0^+} S(t)u = u,$$

entonces decimos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un **semigrupo-C_0**.

Veamos algunos ejemplos sencillos de esto.

Ejemplo 1.3.1. Hemos visto que la familia de operadores $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo. Pero, note que dado $u \in V$

$$||e^{tA}u - u|| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!}||A||^k||u|| \leq |t|||A||||u||\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!}||A||^k = |t|||A||||u||e^{|t|||A||} \xrightarrow{t\to 0+} 0$$

Esto muestra que la familia de operadores $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo-C_0.

Ejemplo 1.3.2. Sea V el espacio de funciones acotadas y uniformemente continuas en $\mathbb{R}$ con la norma uniforme. Consideremos el operador traslación,

$$S(t)f(s) := f(t+s).$$

Se cumple que:

1. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g \in V$

$$S(t)[f+\alpha g](s) = [f+\alpha g](t+s) = f(t+s) + \alpha g(t+s) = S(t)f(s) + \alpha S(t)g(s).$$

   Esto muestra que $S(t)$ es lineal.

2. $S(t)$ es acotado, ya que:

$$||S(t)f(s)|| = \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(t+s)| = \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s)| = ||f||.$$

3. $S(0) = I$ puesto que $S(0)f(s) = f(0+s) = f(s)$.

4. Dados $t, r \in \mathbb{R}$ cualesquiera

$$S(t+r)f(s) = f((t+r)+s) = f(t+(r+s)) = S(t)f(r+s) = S(t)S(r)f(s).$$

Esto muestra que $S(t+r) = S(t)S(r)$.

5. Dada $f \in V$ cualquiera, por continuidad uniforme se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $|t| < \delta$ se cumple que

$$|f(t+s) - f(s)| < \epsilon.$$

Luego, para $|t| < \delta$

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} |f(t+s) - f(s)| < \epsilon.$$

Esto muestra que $S(t)f \xrightarrow{t\to 0+} f$.

De lo anterior se sigue que la familia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ define un semigrupo-C_0.

Veamos ahora algunas propiedades de los semigrupos.

Teorema 1.3.1. *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo-C_0 en V. Entonces existe $M \geq 1$ y ω tal que*

$$||S(t)|| \leq Me^{\omega t} \ , \forall t \geq 0.$$

Demostración. Ver [Kesavan, capítulo 4, sección 4.3, teorema 4.3.1]. ∎

Corolario 1.3.1. *Para todo $u \in V$, el operador $t \mapsto S(t)u$ es un operador continuo de $[0, \infty)$ a V. Escribimos que para $u \in V$ fijo, $S(\cdot)u \in C([0, \infty); V)$.*

Demostración. Ver [Kesavan, capítulo 4, sección 4.3, corolario del teorema 4.3.1]. ∎

Los anteriores resultados motivan la definición de otra clase de semigrupo.

Definición 1.3.4. Si $M = 1$ y $\omega = 0$, es decir que $||S(t)|| \leq 1$ para todo $t \geq 0$, entonces decimos que $\{S(t)\}$ es un **semigrupo de contracción.**

Ejemplo 1.3.3. Sea $\{S(t)\}$ como en el ejemplo 1.3.2. Vimos que $||S(t)f|| = ||f||$ para todo $f \in V$. Luego, se sigue que $||S(t)|| = 1$ y $\{S(t)\}$ es un semigrupo de contracción.

Previamente vimos que, dado A un operador lineal acotado en un espacio de Banach V, para cualquier $u \in V$ se cumple que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{tA}u - u}{t} = Au. \tag{1.3.3}$$

Este hecho motiva un concepto importante en la teoría de semigrupos: el generador infinitesimal.

Definición 1.3.5. Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo-C_0 en V. El **generador infinitesimal** del semigrupo es un operador lineal A dado por

$$\left.\begin{array}{rcl} D(A) & := & \left\{ u \in V \,\middle|\, \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{S(t)u - u}{t} \text{ existe} \right\} \\ \\ Au & := & \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{S(t)u - u}{t}\ ,\ u \in D(A). \end{array}\right\}$$

Ejemplo 1.3.4. Si A es un operador lineal acotado en un espacio de Banach V, (1.3.3) nos dice que el generador infinitesimal de $\{e^{tA}\}$ es el operador A.

Ejemplo 1.3.5. Para un ejemplo que involucre un operador no acotado, consideremos {S(t)} como en el ejemplo 1.3.2 y hallemos su generador infinitesimal A. Supongamos que el límite en la definición de generador infinitesimal existe. Entonces

$$\lim_{t \to 0+} \frac{S(t)f(s) - f(s)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} = D^+ f(s),$$

donde $D^+ f$ es la derivada a derecha de f.

Luego, si $f \in D(A)$ entonces D^+f existe para todo punto, además es acotada y uniformemente continua. Por otro lado, de la fórmula de Taylor y la continuidad de D^+f, se tiene que

$$\frac{f(s)-f(s-t)}{t} = D^+f(s-t) + \frac{o(t)}{t} \xrightarrow{t\to 0+} D^+f(s).$$

Esto muestra que, para todo $s \in \mathbb{R}$

$$D^-f(s) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(s)-f(s-t)}{t} = D^+f(s).$$

Se concluye entonces que f debe ser diferenciable en todo punto. Luego

$$\left.\begin{array}{rcl} D(A) & = & \{f \in V | f' \text{ existe en todo punto y } f' \in V\} \\ Af & = & f', \end{array}\right\}$$

¡y este operador es no-acotado!

Veamos ahora un teorema que relaciona a los semigrupos con las ecuaciones diferenciales.

Teorema 1.3.2. *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo-C_0 y A su generador infinitesimal. Sea $u \in D(A)$. Entonces*

$$S(t)u \in C^1([0,\infty);V) \cap C([0,\infty);D(A))$$

y

$$\frac{d}{dt}\{S(t)u\} = AS(t)u = S(t)Au. \tag{1.3.4}$$

Demostración. Sea $u \in D(A)$. Entonces de la definición de generador infinitesimal

$$\frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} = S(t)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right) \xrightarrow{h\to 0^+} S(t)Au$$

Lo anterior muestra que $S(t)u \in D(A)$ y que $AS(t)u = S(t)Au = D^+S(t)u$. Ahora bien

$$\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right).$$

Así

$$\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au = S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right) + (S(t-h)-S(t))Au.$$

Pero, notemos que

$$\left|\left|S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}-Au\right)\right|\right| \leq Me^{\omega t}\left|\left|\frac{S(h)u-u}{h}-Au\right|\right| \xrightarrow{h\to 0^+} 0,$$

y que, por el corolario 1.3.1

$$||(S(t-h)-S(t))Au|| \xrightarrow{h\to 0^+} 0.$$

Luego, se sigue que $D^-S(t)u = S(t)Au = D^+S(t)u$, y así

$$\frac{d}{dt}\{S(t)u\} = AS(t)u = S(t)Au.$$

Observe que, también por el corolario 1.3.1, $S(\cdot)Au \in C([0;\infty),V)$. De aquí, $S(\cdot)u \in C^1([0;\infty),V)$. Note también que, en el transcurso de la prueba, se mostró que dado $t \geq 0$ se cumple que $S(t)u \in D(A)$ y por tanto, de la continuidad en V, se sigue que $S(\cdot)u \in C([0;\infty),D(A))$. ■

Observación 1.3.2. El teorema anterior nos dice que si A es el generador infinitesimal de un semigrupo-C_0 $\{S(t)\}$ entonces la función $u(t) = S(t)u_0$ define la solución al PVI

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) &= Au(t)\ ;\ t \geq 0 \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

siempre que el dato inicial esté en $D(A)$. Dicha solución es única. En efecto, si $v(t)$ es otra solución, defina $w(s) = S(t-s)v(s)$. Derivando obtenemos:

$$\frac{dw}{ds}(s) = -AS(t-s)v(s) + S(t-s)Av(s) = 0.$$

De aquí, w es constante. Luego, $w(t) = w(0)$; esto es $v(t) = S(t)v(0) = S(t)u_0 = u(t)$.

Veamos ahora algunas propiedades del generador infinitesimal de un semigrupo-C_0.

Lema 1.3.1. *Para todo $u \in V$*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\,d\tau = S(t)u.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)ud\tau - S(t)u\right|\right| &= \left|\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)ud\tau - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t)ud\tau\right|\right| \\
&= \left|\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (S(\tau) - S(t))ud\tau\right|\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} ||S(\tau)u - S(t)u||d\tau.
\end{aligned}$$

Como $\{S(t)\}$ es C_0 se cumple que $S(\eta)S(t)u \xrightarrow{\eta\to 0^+} S(t)u$, esto es, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|\eta| < \delta$ entonces $||S(\delta)S(t)u - S(t)u|| < \epsilon$. Es decir,

$$||S(t+\delta)u - S(t)u|| < \epsilon, \text{ si } 0 < \eta < \delta = h.$$

Luego, si $\tau = t + \eta$ se tiene que $0 < \tau - t = \eta < h$, o equivalentemente $|t - \tau| < h$ con h lo suficientemente pequeño, tendremos que $||S(\tau)u - S(t)u|| < \epsilon$. Así,

$$\left|\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)ud\tau - S(t)u\right|\right| < \epsilon,$$

de donde se sigue el resultado. ■

Teorema 1.3.3. *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo-C_0 $\{S(t)\}$ en V. Entonces, para cualquier $u \in V$,*

$$\int_0^t S(\tau)ud\tau \in D(A) \;\; y \;\; A\left(\int_0^t S(\tau)ud\tau\right) = S(t)u - u.$$

Demostración. Ver [Kesavan, capítulo 4, sección 4.3, teorema 4.3.3]. ■

Corolario 1.3.2. *Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo-C_0 $\{S(t)\}$, entonces A debe ser cerrado y densamente definido.*

Demostración.

1. Sea $u \in V$. Del teorema anterior
$$\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)ud\tau \in D(A);$$
y así, por el lema 1.3.1
$$\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)ud\tau \xrightarrow{h\to 0^+} S(0)u = u.$$
Esto muestra que $D(A)$ es denso en V.

2. Ahora bien, sea (u_k) una sucesión en $D(A)$ tal que $u_k \to u$, para algún $u \in V$, y $Au_k \to v$, para algún $v \in V$. Note que
$$\frac{S(h)u - u}{h} = \lim_{k\to\infty} \frac{S(h)u_k - u_k}{h}.$$
Pero, por (1.3.4)
$$S(h)u_k - u_k = \int_0^h S(\tau)Au_k d\tau.$$
Luego,
$$\frac{S(h)u - u}{h} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Au_k d\tau = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)vd\tau \xrightarrow{h\to 0^+} S(0)v = v.$$
Esto muestra que $u \in D(A)$ y que $Au = v$. Por lo tanto, A es cerrado.

■

El corolario anterior nos muestra que para que un operador no acotado genere a un semigrupo-C_0, este debe ser necesariamente cerrado y densamente definido.

Teorema 1.3.4. *Si dos semigrupos-C_0 $\{S_1(t)\}$ y $\{S_2(t)\}$ tienen el mismo generador infinitesimal A, entonces son iguales.*

Demostración. Definamos para $u \in D(A)$
$$F(s) = S_1(t - s)S_2(s)u.$$

Derivando

$$\frac{dF}{ds}(s) = -AS_1(t-s)S_2(s)u + S_1(t-s)AS_2(s)u = 0.$$

Esto muestra que F es constante. Luego, $F(t) = F(0)$; esto es

$$S_1(t)u = S_2(t)u$$

para todo $t \geq 0$. El resultado para todo $u \in V$ se generaliza gracias a la densidad de $D(A)$ en V. ■

Gracias a este teorema se obtiene un resultado que resume la teoría de semigrupos para todo semigrupo acotado.

Corolario 1.3.3. *Si $\{S(t)\}$ es un semigrupo-C_0 cuyo generador infinitesimal A es acotado, entonces*

$$S(t) = e^{tA}.$$

Capítulo 2

La Ecuación Lineal de Schrödinger

En este capítulo se realizará una deducción formal del semigrupo de Schrödinger, el cual obtendremos a partir de estudiar la EDP:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} - i\,\triangle\psi &= 0; \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \psi(x,0) &= \psi_0(x). \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

Inicialmente supondremos a las soluciones $\psi(x,t)$ en los espacios de Schwartz $\mathscr{S}$. Aplicando transformada de Fourier, respecto a la variable espacial $x \in \mathbb{R}^n$, en (2.0.1) obtenemos la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial t} + 4\pi^2|\xi|^2 i\widehat{\psi} &= 0; \\ \widehat{\psi}(\xi,0) &= \widehat{\psi_0}(\xi). \end{aligned} \tag{2.0.2}$$

Tratando a ξ como parámetro, resolvemos la EDO resultante en t para obtener:

$$\widehat{\psi}(\xi,t) = \widehat{\psi_0}(\xi)\exp(-4\pi^2|\xi|^2 it). \tag{2.0.3}$$

En haras de la resolución del problema, es deseable poder expresar a (2.0.3) como

$$\widehat{\psi}(\xi,t) = C\widehat{\psi_0}(\xi)\widehat{g}(\xi,t),$$

con C una constante (real o compleja) y g alguna función con transformada de Fourier bien definida. Dicha función existe: sea g definida, para $x \in \mathbb{R}^n$ y fijado $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, como sigue

$$g(x) := \exp\left(i\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Note que $g \notin L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$, pues la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\exp\left(i\frac{|x|^2}{4t}\right)\right|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} dx$$

no es convergente. Luego, no podemos pensar en la transformada de Fourier de g en el sentido clásico. Pero, como

$$\left|\exp\left(i\frac{|x|^2}{4t}\right)\right| = 1;\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

se tiene que $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. De aquí, podemos identificar a g con una distribución $T_g \in \mathscr{S}'$ y considerar su transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones temperadas. Como $T_g \in \mathscr{S}'$, es claro que $\widehat{T_g} \in \mathscr{S}'$, además cabe resaltar que si llega a existir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $T_f = \widehat{T_g}$ entonces podríamos afirmar que $f = \widehat{g}$ en el sentido de las distribuciones.

Ahora bien, para hallar a $\widehat{g}$ consideremos en $\mathscr{S}'$ la sucesión

$$\left\{\exp\left(\left[\frac{i}{4t} - \frac{1}{m}\right]|x|^2\right)\right\}^\wedge(\xi);\ \ m \in \mathbb{Z}^+.$$

Esta sucesión está bien definida, ya que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\exp\left(\left[\frac{i}{4t} - \frac{1}{m}\right]|x|^2\right)\right| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{m}\right) dx < \infty,$$

lo cual muestra que

$$\exp\left(\left[\frac{i}{4t} - \frac{1}{m}\right]|x|^2\right) \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

y de aquí se sigue que las transformadas de Fourier en consideración existen.

Supongamos por ahora que $n = 1$. Luego

$$\left\{\exp\left(\left[\frac{i}{4t} - \frac{1}{m}\right]x^2\right)\right\}^\wedge(\xi) \ \ = \ \ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i x\xi)\exp\left(\left[\frac{i}{4t} - \frac{1}{m}\right]x^2\right) dx$$

Ahora bien,

1. $\exp(-2\pi i x\xi)\exp\left(\left[\frac{i}{4t} - \frac{1}{m}\right]x^2\right) \xrightarrow{m\to\infty} \exp(-2\pi i x\xi)\exp(i\frac{x^2}{4t})$ puntualmente.

2. $\left|\exp(-2\pi i x\xi)\exp\left(\left[\frac{i}{4t} - \frac{1}{m}\right]x^2\right)\right| \leq \exp(-x^2)$.

Se sigue entonces, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i x\xi) \exp\left(\left[\frac{i}{4t} - \frac{1}{m}\right] x^2\right) dx \xrightarrow{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i x\xi) \exp\left(i\frac{x^2}{4t}\right) dx. \tag{2.0.4}$$

De otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i x\xi) \exp\left(i\frac{x^2}{4t}\right) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i}{4t}(x^2 - 8\pi t x\xi)\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i}{4t}(x^2 - 8\pi t x\xi + 16\pi^2 t^2 \xi^2)\right) \exp(-4t\pi^2\xi^2 i) dx \\
&= \exp(-4t\pi^2\xi^2 i) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i}{4t}(x - 4t\pi\xi)^2\right) dx \\
&= \sqrt{4\pi t i}\, \exp(-4t\pi^2\xi^2 i).
\end{aligned}$$

Así, de (2.0.4), hemos obtenido que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i x\xi) \exp\left(\left[\frac{i}{4t} - \frac{1}{m}\right] x^2\right) dx \xrightarrow{m\to\infty} \sqrt{4\pi t i}\, \exp(-4t\pi^2\xi^2 i). \tag{2.0.5}$$

De (2.0.4) y (2.0.5) podemos generalizar para cualquier $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\left\{\exp\left(\left[\frac{i}{4t} - \frac{1}{m}\right] |x|^2\right)\right\}^{\wedge}(\xi) \quad &\xrightarrow{m\to\infty} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i x\cdot\xi) \exp\left(i\frac{|x|^2}{4t}\right) dx \\
&= \quad \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{i}{4t}(|x|^2 - 8\pi t x\cdot\xi)\right) dx \\
&= \quad \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{i}{4t}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 8\pi t x_j \xi_j\right)\right) dx \\
&= \quad \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i}{4t}\left(x_j^2 - 8\pi t x_j \xi_j\right)\right) dx_j \\
&= \quad (4\pi t i)^{n/2} \exp(-4\pi^2|\xi|^2 t i).
\end{aligned}$$

Se concluye entonces que

$$\widehat{g}(\xi,t)=\lim_{m\to\infty}\left\{\exp\left(\left[\frac{i}{4t}-\frac{1}{m}\right]|x|^2\right)\right\}\widehat{\ }(\xi)=(4\pi ti)^{n/2}\exp(-4\pi^2|\xi|^2ti). \tag{2.0.6}$$

Retomando en (2.0.3) nuestro problema original

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(\xi,t) &= \widehat{\psi_0}(\xi)\exp(-4\pi^2|\xi|^2it)\\ &= \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}}\widehat{\psi_0}(\xi)(4\pi it)^{n/2}\exp(-4\pi^2|\xi|^2it)\\ &= \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}}\widehat{\psi_0}(\xi)\widehat{g}(\xi,t).\end{aligned}$$

Así, la solución de (2.0.1) vendrá dada por la expresión

$$\psi(x,t)=\frac{1}{(4\pi it)^{n/2}}(\psi_0 * g_t)(x)$$

siempre que la convolución esté bien definida.

A partir de lo anterior, y teniendo en cuenta que, según los axiomas de la mecánica cuántica, la solución ψ a la ecuación de Schrödinger debe satisfacer que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\psi|^2=1,$$

(vea [Ward-Volkmer]), definiremos en $L^2(\mathbb{R}^n)$ los operadores:

$$S_tf(x):=\begin{cases}\dfrac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}}f(y)dy & \text{si}\quad t\neq 0\\ \\ f(x) & \text{si}\quad t=0\end{cases} \tag{2.0.7}$$

Nuestro objetivo ahora es mostrar que la familia $\{S_t\}$ en efecto define un semigrupo y realizar un estudio de este.

2.1. El Semigrupo de Schrödinger

En la sección anterior para la construcción del candidato a solución de (2.0.1), para $t\neq 0$, consideramos la función

$$g_t(x)=e^{i\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Para mayor facilidad en los cálculos por venir, definimos a partir de ella la función

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} g_t(x),$$

y con esto podemos escribir al candidato a solución como sigue:

$$\psi(x,t) = (K_t * \psi_0)(x).$$

Denotaremos por $\mathscr{F}$ al operador transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$, definido por el teorema de Plancherel. Note que, dado $t \in \mathbb{R}$, el operador S_t definido en (2.0.7) puede escribirse también de la siguiente manera:

$$S_t f(x) = \mathscr{F}^{-1}\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\mathscr{F}\{f\}\}(x). \tag{2.1.1}$$

Recordemos que para siquiera considerar a los operadores S_t como miembros de un semigrupo, estos deben ser operadores lineales y acotados de un espacio de Banach V en sí mismo. Note que, dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, si $t = 0$, de (2.1.1) se sigue que:

$$S_0 f = \mathscr{F}^{-1}\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 i0}\mathscr{F}\{f\}\} = \mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}\{f\}\} = f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Note que esto muestra la equivalencia de (2.0.7) y (2.1.1) en el caso $t = 0$. Ahora bien, para $t \neq 0$, como $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, del teorema de Plancherel, se tiene que $\mathscr{F}\{f\} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\mathscr{F}\{f\}|^2(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}\{f\}|^2(\xi)d\xi < \infty.$$

De aquí, $e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\mathscr{F}\{f\} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y por tanto, de nuevo por el teorema de Plancherel, $S_t f = \mathscr{F}^{-1}\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\mathscr{F}\{f\}\} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Esto muestra que $S_t : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ está bien definida.

Observación 2.1.1. Hemos visto que la expresión (2.1.1) define una función en $L^2(\mathbb{R}^n)$. De hecho, los cálculos realizados en la introducción de este capítulo nos dicen que, para $t \neq 0$,

$$\mathscr{F}\{S_t f\} = e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\mathscr{F}\{f\} = \mathscr{F}\{K_t * f\}.$$

Al tomar transformada inversa obtendremos la equivalencia de las expresiones (2.0.7) y (2.1.1) para $t \neq 0$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, es claro que S_t es lineal. Veamos ahora que S_t es acotado. Esto es consecuencia de que $\mathscr{F}$ es una isometría en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Tenemos que, dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$||S_t f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\mathscr{F}\{S_t f\}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\mathscr{F}\{f\}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\mathscr{F}\{f\}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Observación 2.1.2. Lo anterior también nos muestra que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $||S_t|| = 1$.

Luego, los operadores S_t cumplen con los requisitos para ser miembros de un semigrupo. En realidad, no solo de un semigrupo. ¡Tenemos más que eso!

Teorema 2.1.1 (Grupo de Schrödinger). *La familia de operadores $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, con cada S_t definido por (2.1.1), define un **grupo**-C_0 unitario en $L^2(\mathbb{R}^n)$, cuyo generador infinitesimal es $i\triangle$.*

Demostración. Paso 1. Veamos que la familia $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo de operadores.

Observación 2.1.3.

- Hemos usado la expresión *grupo de operadores*. La definición de este concepto es exactamente igual que la de semigrupo de operadores, con la ligera diferencia de que le permitimos al parámetro t ser cualquier número real, en lugar de solo tomar valores no negativos. Recibe el nombre de grupo ya que, al permitirle a t tomar valores negativos, es claro que todo elemento S_t en la familia tendrá su respectivo inverso S_{-t}.

- Las definiciones de grupo-C_0 y generador infinitesimal para un grupo son iguales que en el caso de semigrupos, con la diferencia de que los límites que aparecen en estas definiciones ahora se toman cuando $t \to 0$ en lugar de $t \to 0^+$.

Es claro que $S_0 = I$. Ahora bien, dados $t, s \in \mathbb{R}$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$S_{t+s}f(x) = \mathscr{F}^{-1}\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 i(t+s)}\mathscr{F}\{f\}\}(x) = \mathscr{F}^{-1}\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}e^{-4\pi^2|\xi|^2 is}\mathscr{F}\{f\}\}(x).$$

Por (2.1.1), $e^{-4\pi^2|\xi|^2 is}\mathscr{F}\{f\} = \mathscr{F}\{S_s f\}$. Luego,

$$S_{t+s}f(x) = \mathscr{F}^{-1}\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\mathscr{F}\{S_s f\}\}(x) = S_t S_s f(x).$$

Paso 2. Veamos que $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es C_0.

Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego,

$$\begin{aligned}
||S_t f - f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= ||\mathscr{F}\{S_t f - f\}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= ||e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\mathscr{F}\{f\} - \mathscr{F}\{f\}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-4\pi^2|\xi|^2 it} - 1|^2|\mathscr{F}\{f\}|^2 d\xi \\
&\xrightarrow{t\to 0} 0 \text{ ; por el teorema de convergencia dominada.}
\end{aligned}$$

Esto muestra que $S_t f \to f$ cuando $t \to 0$.

Paso 3. Veamos que $i\triangle$ es el generador infinitesimal del grupo.

Observación 2.1.4. Teniendo en cuenta lo afirmado en la observación anterior, si A es el generador infinitesimal de un grupo-C_0 de operadores $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, es claro que A será el generador infinitesimal de un semigrupo-C_0 $\{S^+(t)\}_{t\geq 0}$, donde, para $t \geq 0$, $S^+(t) = S_t$. De igual manera, se tendrá que $-A$ será el generador infinitesimal del semigrupo-C_0 $\{S^-(t)\}_{t\geq 0}$, donde, para $t \geq 0$, $S^-(t) = S_{-t}$. Recíprocamente, si A es un operador lineal que satisface que $-A$ sea el generador infinitesimal de un semigrupo-C_0 $\{S^-(t)\}_{t\geq 0}$ y que A sea el generador infinitesimal de un semigrupo-C_0 $\{S^+(t)\}_{t\geq 0}$, entonces obtendremos que A es el generador infintesimal del grupo-C_0 $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, donde S_t viene dado por:

$$S_t = \begin{cases} S^+(t) & \text{si} \quad t \geq 0 \\ S^-(t) & \text{si} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Consideremos el semigrupo $\{S^+(t)\}_{t\geq 0}$ como en la observación anterior. Sea A_1 su generador infinitesimal. Por el teorema 1.3.2, sabemos que A_1 satisface que para todo $u \in D(A_1)$ se cumple la igualdad (1.3.4). Esto es:

$$\frac{d}{dt}\{S^+(t)u\} = A_1 S^+(t)u = S^+(t)A_1 u.$$

Ya que el operador $i\triangle : D \to L^2(\mathbb{R}^n)$ puede definirse en el conjunto $D = H^2(\mathbb{R}^n)$ (donde $H^m(\mathbb{R}^n)$ denota el conjunto de funciones f en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $D^\alpha f$ es también una función en $L^2(\mathbb{R}^n)$, para $|\alpha| \leq m$), sea $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Note que:

$$i\triangle S^+(t)f = i\triangle(K_t * f) = K_t * i\triangle f = S^+(t)i\triangle f. \tag{2.1.2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} K_t * i\triangle f &= \mathscr{F}^{-1}\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\{i\triangle f\}\} \\ &= \mathscr{F}^{-1}\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}(-4\pi^2|\xi|^2 i)\,\mathscr{F}\{f\}\} \\ &= \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{d}{dt}\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\{f\}\}\right\} \\ &= \frac{d}{dt}\{S^+(t)f\}. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

De (2.1.2) y (2.1.3), se sigue que $i\triangle$ también satisface (1.3.4). Luego, por unicidad del generador infinitesimal, se sigue que $A_1 = i\triangle$. Análogamente, se tiene que el operador $-i\triangle$ es el generador infinitesimal del semigrupo $\{S^-(t)\}_{t\geq 0}$, definido como en la observación anterior. De estos dos hechos, se sigue el resultado deseado.

Paso 4. Veamos que cada S_t es unitario.

Recordemos que un operador lineal y acotado A de un espacio de Hilbert H en sí mismo se dice que es unitario si preserva el producto interno del espacio. Esto es:

$$\langle u, v\rangle = \langle Au, Av\rangle\ ;\ \forall u, v \in H.$$

Así pues, sean $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $t \in \mathbb{R}$. Note que de la relación fuerte de Parseval, el operador transformada de Fourier es unitario en $L^2(\mathbb{R}^n)$. En efecto, para $u, v \in \mathscr{S}$ se tiene que

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} u\overline{v} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}\overline{\widehat{v}} = \langle \widehat{u}, \widehat{v}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

El resultado para $L^2(\mathbb{R}^n)$ se sigue de la continuidad del producto interno y la densidad de $\mathscr{S}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \langle S_t f, S_t g\rangle &= \langle \mathscr{F}\{S_t f\}, \mathscr{F}\{S_t g\}\rangle \\ &= \langle e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\{f\}, e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\{g\}\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\{f\}\overline{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\{g\}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}\{f\}\overline{\mathscr{F}\{g\}} \\ &= \langle \mathscr{F}\{f\}, \mathscr{F}\{g\}\rangle \\ &= \langle f, g\rangle. \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene lo deseado. ■

En la siguiente sección nos proponemos enunciar y demostrar algunas propiedades de regularidad de la solución de (2.0.1) a partir de las propiedades del grupo de Schrödinger.

2.2. Propiedades de Regularidad

Como bien mencionamos al finalizar la sección anterior, el objetivo de esta nueva sección es poder enunciar y demostrar algunas propiedades de regularidad de la solución de (2.0.1) a partir del grupo asociado a dicha ecuación. Claro está que, hasta ahora, no hemos enunciado formalmente a la solución de (2.0.1) pero es evidente que el candidato está relacionado con el grupo de Schrödinger y, en efecto, la solución a (2.0.1) viene dada por la teoría de semigrupos, más específicamente por una aplicación directa del teorema (1.3.2).

Teorema 2.2.1. *Sea $\psi_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$. La ecuación (2.0.1) tiene una única solución $\psi(x,t)$ dada por:*

$$\psi(x,t) = S_t\psi_0(x),$$

y además $\psi \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}^n))$.

Demostración. Dada $\psi_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$, como $H^2(\mathbb{R}^n)$ es el dominio del operador $i\,\triangle$ que es el generador infinitesimal del grupo $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, del teorema (1.3.2) se sigue que la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} &= i\,\triangle\psi; \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \psi(x,0) &= \psi_0(x); \end{aligned}$$

es decir, la ecuación (2.0.1), tiene una única solución $\psi(x,t)$ dada por

$$\psi(x,t) = S_t\psi_0(x),$$

y además $\psi \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}^n))$. ■

Note que, las ecuaciones diferenciales (1.3.1) y (1.3.4) tienen la misma forma, salvo que en (1.3.1) el operador A es acotado mientras que en (1.3.4) es el generador infinitesimal del semigrupo, el cual no necesariamente es acotado. Pero, teniendo en cuenta que la solución u a (1.3.1) viene dada por

$$u(x,t) = e^{tA}u_0(x),$$

y que además la teoría de semigrupos generaliza al operador exponencial; usaremos de ahora en adelante la notación

$$e^{it\triangle} := S_t,$$

y así, podemos escribir la solución de (2.0.1) como sigue:

$$\psi(x,t) = e^{it\triangle}\psi_0(x).$$

Antes de entrar en materia respecto a las propiedades de regularidad, enunciaremos el teorema de interpolación de Riesz-Thorin, utilizado para la demostración de una propiedad de decaimiento en el tiempo de la solución a (2.0.1).

Teorema 2.2.2 (Riesz-Thorin). *Sean $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$, $T : L^{p_0} \to L^{q_0}$ un operador lineal con norma M_0 y $T : L^{p_1} \to L^{q_1}$ lineal con norma M_1 y definamos*

$$T : L^p \to L^q,$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \ , \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1};$$

con $0 < \theta < 1$. Se cumple, entonces, que el operador $T : L^p \to L^q$ tiene norma

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$$

La demostración del teorema anterior puede consultarse en [Bergh-Löfström, capítulo 1, sección 1.1, teorema 1.1.1].

Teorema 2.2.3. *Sean $2 \leq p \leq \infty$, $t \neq 0$ y p' el exponente conjugado de p. El operador*

$$e^{it\triangle} : L^{p'}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$$

es continuo y

$$||e^{it\triangle}\varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq (4\pi|t|)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}||\varphi||_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \ , \ \forall\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Sabemos que el operador $e^{it\triangle} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ tiene norma 1. Ahora bien, consideremos el operador $e^{it\triangle} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dada $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\left|\frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}}\varphi(y)dy\right| \leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y)|dy = (4\pi|t|)^{-n/2}||\varphi||_{L^1(\mathbb{R}^n)};$$

luego, si denotamos por M_1 la norma del operador $e^{it\triangle} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$, hemos obtenido que

$$M_1 \leq (4\pi|t|)^{-n/2}.$$

Se sigue del teorema de Riesz-Thorin que el operador $e^{it\triangle} : L^{p'}(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ tiene norma $M \leq M_1^\theta \leq (4\pi|t|)^{-n\theta/2}$, con $0 < \theta < 1$ y

$$\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}\ ,\ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty}.$$

De aquí,

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \theta + \frac{1-\theta}{2} = 1 - \theta + \theta = 1.$$

Luego, $q = p$. Por otra parte,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} \Rightarrow \theta = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right).$$

Hemos obtenido entonces que el operador $e^{it\triangle} : L^{p'}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ tiene norma $M \leq (4\pi|t|)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$. Esto es, dada $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$,

$$||e^{it\triangle}\varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq (4\pi|t|)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}||\varphi||_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

■

En el siguiente teorema veremos unas estimativas un poco más generales, pues involucran tanto a la variable temporal como a las espaciales, que son muy útiles en el estudio de las ecuaciones no-lineales y no-homogéneas de Schrödinger: las estimativas de Strichartz. Para hablar de dichas estimativas, primero necesitamos introducir la noción de parejas admisibles.

Definición 2.2.1 (**Pareja Admisible**)**.** Decimos que una pareja (q, r) es una pareja admisible si

$$\frac{2}{q} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$$

y

$$\begin{cases} 2 \leq r \leq \dfrac{2n}{n-2} & \text{si } n \geq 3 \\ 2 \leq r < \infty & \text{si } n = 2 \\ 2 \leq r \leq \infty & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Observación 2.2.1.

1. La pareja $(2, \frac{2n}{n-2})$ es admisible si $n \geq 3$.

2. La pareja $(\infty, 2)$ siempre es admisible.

3. Si (q, r) es una pareja admisible entonces $2 \leq q \leq \infty$.

Teorema 2.2.4 (Estimativas de Strichartz).

1. *Para cada $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y cada pareja admisible (q, r), la función*

$$t \mapsto e^{it\triangle}\varphi$$

pertenece a $L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$, y existe una constante C que depende de q tal que

$$||e^{i\cdot\triangle}\varphi||_{L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^n))} \leq C||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ , \forall\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{2.2.1}$$

2. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ (acotado o no), $J = \overline{I}$ y $t_0 \in I$. Si (γ, ρ) es una pareja admisible y $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^n))$, entonces para toda pareja admisible (q, r), la función*

$$t \mapsto \Phi_f(\cdot, t) = \int_{t_0}^{t} e^{i(t-s)\triangle} f(\cdot, s) ds \ , \ para\ t \in I, \tag{2.2.2}$$

pertenece a $L^q(I, L^r(\mathbb{R}^n)) \cap C(J, L^2(\mathbb{R}^n))$. Es más, existe una constante C, independiente de I, tal que

$$||\Phi_f||_{L^q(I,L^r(\mathbb{R}^n))} \leq C||f||_{L^{\gamma'}(I,L^{\rho'}(\mathbb{R}^n))} \ , \forall f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^n)). \tag{2.2.3}$$

Observación 2.2.2. Realizaremos la prueba del teorema 2.2.4 sin considerar los casos extremos en la definición de parejas admisibles, es decir supondremos $r, \rho \neq \frac{2n}{n-2}$ si $n \geq 3$ o

$r, \rho \neq \infty$ si $n = 1$, puesto que la prueba en estos casos es más complicada y está fuera de los objetivos propuestos del trabajo.

La prueba de este teorema también puede consultarse en [Cazenave, capítulo 2, sección 2.3, teorema 2.3.3] o en [Sulem, capítulo 3, teorema 3.3 y teorema 3.4]; mientras que para las pruebas de los casos extremos puede remitirse a *Endpoint Strichartz Inequalities*, Keel M. y Tao T., Amer. J. Math, 1998..

Demostración.

Prueba de (2.2.1).

Mostraremos que (2.2.1) se obtiene al probar, para $g \in L^{q'}(\mathbb{R}, L^{r'}(\mathbb{R}^n))$, las siguientes desigualdades:

$$\left|\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\triangle} g(\cdot, t)dt\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C||g||_{L^{q'}(\mathbb{R},L^{r'}(\mathbb{R}^n))}, \tag{2.2.4}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)\triangle} g(\cdot, s)ds\right|\right|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^q dt\right)^{1/q} \leq C||g||_{L^{q'}(\mathbb{R},L^{r'}(\mathbb{R}^n))}. \tag{2.2.5}$$

Recordemos que, por dualidad, se tiene que

$$||h||_{L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^n))} = \sup\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} h(x,t)w(x,t)dxdt\right| \ ; \ ||w||_{L^{q'}(\mathbb{R},L^{r'}(\mathbb{R}^n))} = 1\right\}.$$

Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. A partir de reiteradas aplicaciones del teorema de Fubini tenemos que, dada $g \in L^{q'}(\mathbb{R}, L^{r'}(\mathbb{R}^n))$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} e^{it\triangle}\varphi(x)g(x,t)dxdt &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{(4\pi it)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}}\varphi(y)dy\right)g(x,t)dxdt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\left(\frac{1}{(4\pi it)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|y-x|^2}{4t}}g(x,t)dx\right)dydt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)e^{it\triangle}g(y,t)dydt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\triangle}g(y,t)dt\right)dy.
\end{aligned}$$

Luego, por desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} e^{it\triangle}\varphi(x)g(x,t)dxdt\right| \leq ||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\left|\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\triangle}g(\cdot,t)dt\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Esto muestra que para probar (2.2.1) basta demostrar (2.2.4). Por otro lado,

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\triangle}g(\cdot,t)dt\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\triangle}g(\cdot,t)dt, \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\triangle}g(\cdot,s)ds \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle e^{it\triangle}g(\cdot,t), e^{is\triangle}g(\cdot,s)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dsdt.\end{aligned}$$

Ahora, por definición de operador adjunto de Hilbert,

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\triangle}g(\cdot,t)dt\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle g(\cdot,t), (e^{it\triangle})^* e^{is\triangle}g(\cdot,s)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dsdt.$$

Recordemos que los operadores de la familia $\{e^{it\triangle}\}_{t\in\mathbb{R}}$ son unitarios, luego, se cumple que $(e^{it\triangle})^* = (e^{it\triangle})^{-1} = e^{-it\triangle}$. Luego,

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\triangle}g(\cdot,t)dt\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle g(\cdot,t), e^{i(s-t)\triangle}g(\cdot,s)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dsdt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle g(\cdot,t), \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s-t)\triangle}g(\cdot,s)ds \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt.\end{aligned}$$

Aplicando desigualdad de Hölder, primero en la variable espacial y luego en la temporal, se tendría entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\triangle}g(\cdot,t)dt\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(||g(\cdot,t)||_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} \left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s-t)\triangle}g(\cdot,s)ds\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \right) dt \\ &\leq ||g||_{L^{q'}(\mathbb{R},L^{r'}(\mathbb{R}^n))} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)\triangle}g(\cdot,s)ds\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^q dt \right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Esto muestra que probar (2.2.4) implica demostrar (2.2.5). Luego, el problema se ha reducido a mostrar (2.2.5). Note que:

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)\triangle}g(\cdot,s)ds\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{-\infty}^{\infty} ||e^{i(s-t)\triangle}g(\cdot,s)||_{L^r(\mathbb{R}^n)}ds.$$

De aquí, al aplicar el teorema (2.2.3) y el hecho de que (q,r) es una pareja admisible, se sigue entonces que:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)\triangle}g(\cdot,s)ds\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (4\pi|s-t|)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}||g(\cdot,s)||_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}ds \\ &= (4\pi)^{-2/q}\int_{-\infty}^{\infty} |t-s|^{-2/q}||g(\cdot,s)||_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}ds. \qquad (2.2.6)\end{aligned}$$

Para continuar la prueba, tengamos en cuenta el siguiente teorema:

Teorema 2.2.5 (Hardy-Littlewood-Sobolev). *Sean* $0 < \alpha < n$ *y* $1 \leq P < Q < \infty$ *con* $\frac{1}{Q} = \frac{1}{P} - \frac{\alpha}{n}$.

1. *Si* $f \in L^P$, *la integral*
$$\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$
converge absolutamente para casi todo x.

2. *Si, además,* $1 < P$ *entonces existe una constante* $A_{P,Q}$ *tal que*
$$\left|\left|\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy\right|\right|_{L^Q} \leq A_{P,Q}||f||_{L^P}.$$

Tomando $\alpha = 1 - \frac{2}{q}$, como $1 < q' < q < \infty$, $g \in L^{q'}(\mathbb{R}, L^{r'}(\mathbb{R}^n))$ y
$$\frac{1}{q'} - \alpha = \frac{1}{q'} - 1 + \frac{2}{q} = \frac{1}{q}.$$

Se sigue del teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev que existe una constante C, que depende de q, tal que
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |t-s|^{-2/q}||g(\cdot,s)||_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}ds\right)^q dt\right)^{1/q} \leq C||G||_{L^{q'}(\mathbb{R})},$$
donde $G(s) = ||g(\cdot,s)||_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}$. Así, de (2.2.6),
$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-s)\triangle}g(\cdot,s)ds\right|\right|^q_{L^r(\mathbb{R}^n)} dt\right)^{1/q}&\\ \leq (4\pi)^{-2/q}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |t-s|^{-2/q}||g(\cdot,s)||_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}ds\right)^q dt\right)^{1/q}&\\ \leq C||G||_{L^{q'}(\mathbb{R})} = C||g||_{L^{q'}(\mathbb{R},L^{r'}(\mathbb{R}^n))}&.\end{aligned}$$

Prueba de (2.2.3).

Por conveniencia, supondremos $I = [0,T)$ para algún $T \in (0,\infty)$ y que $t_0 = 0$. La prueba en el caso general es análoga.

Sean (γ,ρ) y (q,r) parejas admisibles y $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^n))$. Luego, los puntos $(1/\rho, 1/\gamma)$ y $(1/r, 1/q)$ están en el segmento de recta que une a los puntos
$$P = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{y} \quad Q = \left(\frac{1}{p(n)}, \frac{n}{4} - \frac{n}{2p(n)}\right),$$

donde $p(n) = \infty$ si $n = 1, 2$; o $p(n) = 2n/(n-2)$ si $n \geq 3$. Así, será necesario considerar dos casos: $\rho \geq r$ y $\rho < r$.

Consideremos primero el caso $\rho \geq r$. Note que, de (2.2.5), obtenemos que

$$||\Phi_f||_{L^{\gamma}([0,T),L^{\rho}(\mathbb{R}^n))} = \left(\int_0^T \left|\left| \int_0^t e^{i(t-s)\triangle} f(\cdot, s) ds \right|\right|_{L^{\rho}(\mathbb{R}^n)}^{\gamma} dt \right)^{1/\gamma} \leq C||f||_{L^{\gamma'}([0,T),L^{\rho'}(\mathbb{R}^n))}.$$

Lo anterior demuestra la continuidad del operador

$$\Phi : L^{\gamma'}([0,T), L^{\rho'}(\mathbb{R}^n)) \to L^{\gamma}([0,T), L^{\rho}(\mathbb{R}^n)). \tag{2.2.7}$$

Por otro lado, de (2.2.4), se sigue que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} ||\Phi_f(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{t\in[0,T]} \left|\left| \int_0^t e^{i(t-s)\triangle} f(\cdot,s) ds \right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sup_{t\in[0,T]} \left|\left| \int_0^t e^{it\triangle} e^{-is\triangle} f(\cdot,s) ds \right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sup_{t\in[0,T]} \left|\left| \int_0^t \mathscr{F}^{-1}\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\, \mathscr{F}\{e^{-is\triangle} f(\cdot,s)\}\} ds \right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sup_{t\in[0,T]} \left|\left| \mathscr{F}^{-1} \left\{ e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\, \mathscr{F} \left\{ \int_0^t e^{-is\triangle} f(\cdot,s) ds \right\} \right\} \right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sup_{t\in[0,T]} \left|\left| e^{it\triangle} \int_0^t e^{-is\triangle} f(\cdot,s) ds \right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sup_{t\in[0,T]} \left|\left| \int_0^t e^{-is\triangle} f(\cdot,s) ds \right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \left(\int_0^T ||f(\cdot,t)||_{L^{\rho'}(\mathbb{R}^n)}^{\gamma'} dt \right)^{1/\gamma'} = C||f||_{L^{\gamma'}([0,T),L^{\rho'}(\mathbb{R}^n))}.
\end{aligned}$$

De lo anterior, se sigue la continuidad del operador

$$\Phi : L^{\gamma'}([0,T), L^{\rho'}(\mathbb{R}^n)) \to L^{\infty}([0,T), L^2(\mathbb{R}^n)). \tag{2.2.8}$$

Ahora bien, sea $\theta \in [0,1]$ tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{\rho} + \frac{1-\theta}{2}, \tag{2.2.9}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{\gamma} + \frac{1-\theta}{\infty} = \frac{\theta}{\gamma}. \tag{2.2.10}$$

Dado $t \in [0, T)$, se tiene que $\Phi_f(\cdot, t) \in L^\rho(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego, por desigualdad de Hölder y por (2.2.9) se sigue que

$$||\Phi_f(\cdot, t)||_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq ||\Phi_f(\cdot, t)||^{\theta}_{L^\rho(\mathbb{R}^n)} ||\Phi_f(\cdot, t)||^{1-\theta}_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Elevando a la potencia q, obtenemos ahora

$$||\Phi_f(\cdot, t)||^q_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq ||\Phi_f(\cdot, t)||^{q\theta}_{L^\rho(\mathbb{R}^n)} ||\Phi_f(\cdot, t)||^{q(1-\theta)}_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

De (2.2.10),

$$||\Phi_f(\cdot, t)||^q_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq ||\Phi_f(\cdot, t)||^{\gamma}_{L^\rho(\mathbb{R}^n)} ||\Phi_f(\cdot, t)||^{q-\gamma}_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Integrando en $[0, T)$,

$$\begin{aligned} \int_0^T ||\Phi_f(\cdot, t)||^q_{L^r(\mathbb{R}^n)} dt &\leq \int_0^T ||\Phi_f(\cdot, t)||^{\gamma}_{L^\rho(\mathbb{R}^n)} ||\Phi_f(\cdot, t)||^{q-\gamma}_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt \\ &\leq ||\Phi_f||^{q-\gamma}_{L^\infty([0,T), L^2(\mathbb{R}^n))} \int_0^T ||\Phi_f(\cdot, t)||^{\gamma}_{L^\rho(\mathbb{R}^n)} dt. \end{aligned}$$

Finalmente, elevando a la potencia $1/q$,

$$\begin{aligned} ||\Phi_f||_{L^q([0,T), L^r(\mathbb{R}^n))} &\leq ||\Phi_f||^{(q-\gamma)/q}_{L^\infty([0,T), L^2(\mathbb{R}^n))} ||\Phi_f||^{\gamma/q}_{L^\gamma([0,T), L^\rho(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq ||\Phi_f||^{1-\theta}_{L^\infty([0,T), L^2(\mathbb{R}^n))} ||\Phi_f||^{\theta}_{L^\gamma([0,T), L^\rho(\mathbb{R}^n))}. \end{aligned}$$

De (2.2.7) y (2.2.8) se sigue que

$$||\Phi_f||_{L^q([0,T), L^r(\mathbb{R}^n))} \leq C ||f||_{L^{\gamma'}([0,T), L^{\rho'}(\mathbb{R}^n))}.$$

Luego, Φ es continua de $L^{\gamma'}([0, T), L^{\rho'}(\mathbb{R}^n))$ a $L^q([0, T), L^r(\mathbb{R}^n))$.

Ahora, sea (q, r) una pareja admisible para la cual $\rho < r$ y sea $\mu \in [0, 1]$ tal que

$$\frac{1}{\gamma'} = \frac{\mu}{1} + \frac{1-\mu}{q'} \text{ y } \frac{1}{\rho'} = \frac{\mu}{2} + \frac{1-\mu}{r'}. \tag{2.2.11}$$

Usando argumentos similares a los utilizados en la prueba del ítem 1 del teorema, puede demostrarse que el operador Ψ, definido como sigue:

$$\Psi_f(\cdot, s) = \int_s^T e^{i(s-t)\triangle} f(\cdot, t) dt \ , \forall s \in [0, T),$$

es continuo de $L^{q'}([0, T), L^{r'}(\mathbb{R}^n))$ a $L^\infty([0, T), L^2(\mathbb{R}^n))$, para cada pareja admisible (q, r).

Por otro lado, sean $f \in L^1([0,T), L^2(\mathbb{R}^n))$ y $\varphi \in L^{q'}([0,T), L^{r'}(\mathbb{R}^n))$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle \Phi_f(\cdot,t), \varphi(\cdot,t)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt &= \int_0^T \left\langle \int_0^t e^{i(t-s)\triangle} f(\cdot,s)ds, \varphi(\cdot,t)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt \\
&= \int_0^T \int_0^t \langle f(\cdot,s), e^{i(s-t)\triangle}\varphi(\cdot,t)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds dt \\
&= \int_0^T \int_s^T \langle f(\cdot,s), e^{i(s-t)\triangle}\varphi(\cdot,t)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt ds \\
&= \int_0^T \left\langle f(\cdot,s), \int_s^T e^{i(s-t)\triangle}\varphi(\cdot,t)dt\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\
&= \int_0^T \langle f(\cdot,s), \Psi_\varphi(\cdot,s)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds.
\end{aligned}$$

Luego, de lo anterior y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T \langle \Phi_f(\cdot,t), \varphi(\cdot,t)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt\right| &\leq \int_0^T |\langle f(\cdot,s), \Psi_\varphi(\cdot,s)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}| ds \\
&\leq \int_0^T ||f(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||\Psi_\varphi(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds.
\end{aligned}$$

Ahora bien, como Ψ es continuo de $L^{q'}([0,T), L^{r'}(\mathbb{R}^n))$ a $L^\infty([0,T), L^2(\mathbb{R}^n))$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T \langle \Phi_f(\cdot,t), \varphi(\cdot,t)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt\right| &\leq C||\varphi||_{L^{q'}([0,T)), L^{r'}(\mathbb{R}^n)} \int_0^T ||f(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\
&= C||f||_{L^1([0,T), L^2(\mathbb{R}^n))} ||\varphi||_{L^{q'}([0,T)), L^{r'}(\mathbb{R}^n)} \qquad (2.2.12)
\end{aligned}$$

Usando un argumento de dualidad, de (2.2.12) se sigue la continuidad del operador

$$\Phi : L^1([0,T), L^2(\mathbb{R}^n)) \to L^q([0,T), L^r(\mathbb{R}^n)). \qquad (2.2.13)$$

Además, de antemano hemos demostrado la continuidad del operador

$$\Phi : L^{q'}([0,T), L^{r'}(\mathbb{R}^n)) \to L^q([0,T), L^r(\mathbb{R}^n)) \qquad (2.2.14)$$

Aplicando interpolación de operadores, se obtiene que Φ es continua de $L^\sigma([0,T), L^\delta(\mathbb{R}^n))$ a $L^q([0,T), L^r(\mathbb{R}^n))$, para toda pareja (σ, δ) tal que para algún $\theta \in [0,1]$,

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{q'}, \qquad (2.2.15)$$

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{r'}. \qquad (2.2.16)$$

El resultado deseado se sigue al tomar $\theta = \mu$. ■

Observación 2.2.3. Es natural cuestionarse si (2.2.1) o (2.2.3) se cumplen para parejas no admisibles (q, r) y (γ, ρ). Respecto a (2.2.1) la respuesta es no, la condición de ser pareja admisible es necesaria. En efecto, supongamos que para alguna pareja (q, r) con $q, r \geq 1$ se cumple que

$$||e^{i\cdot\triangle}\varphi||_{L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^n))} \leq C||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ , \ \forall\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Fijemos $\theta \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\theta \neq \mathbf{0}$, y dado $\gamma > 0$ definamos

$$\varphi(x) = \theta(\gamma x).$$

Sean $\psi(t) = e^{it\triangle}\theta$ y $u(t) = e^{it\triangle}\varphi$. Note que:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y)dy \\ &= \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} \theta(\gamma y)dy \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $w = \gamma y$ obtendremos:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(4\pi i(\gamma^2 t))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|\gamma x-w|^2}{4(\gamma^2 t)}} \theta(w)dw \\ &= \psi(\gamma x, \gamma^2 t). \end{aligned}$$

Luego, (2.2.1) implica que

$$||\psi(\gamma\cdot, \gamma^2 t)||_{L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^n))} \leq C||\theta(\gamma\cdot)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Pero,

$$||\theta(\gamma\cdot)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta(\gamma x)|^2 dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\gamma^{n/2}}||\theta||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Además,

$$\begin{aligned} ||\psi(\gamma\cdot, \gamma^2 t)||_{L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^n))} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} ||\psi(\gamma\cdot, \gamma^2 t)||^q_{L^r(\mathbb{R}^n)} dt\right)^{1/q} \\ &= \frac{1}{\gamma^{n/r}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} ||\psi(\cdot, \gamma^2 t)||^q_{L^r(\mathbb{R}^n)} dt\right)^{1/q} \\ &= \frac{1}{\gamma^{2/q+n/r}}||\psi||_{L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^n))}. \end{aligned}$$

Así,

$$\gamma^{-2/q-n/r}||\psi||_{L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^n))} \leq C\gamma^{-n/2}||\theta||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ya que lo anterior se cumple para $\gamma > 0$ arbitrario, obtenemos que

$$\frac{2}{q} + \frac{n}{r} = \frac{n}{2} \Rightarrow \frac{2}{q} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right);$$

y esta es una de las relaciones que satisfacen q y r cuando estos forman una pareja admisible. Note que $r \geq 2$, o de lo contrario se tendría $q < 0$. Las pruebas de que los casos $n = 2$ con $(q, r) = (2, \infty)$ y $n \geq 3$ con $r > 2n/(n-2)$ son imposibles pueden consultarse, respectivamente, en *Time decay for the bounded mean oscillation of solutions of the Schrödinger and wave equations*, Montgomery-Smith S.J., Duke Math. J., 1998; y en *Endpoint Strichartz inequalities*, Keel M. y Tao T., Amer. J. Math., 1998.

Respecto a (2.2.3), puede ser demostrado que dicha estimativa se cumple no solo para parejas admisibles. Un ejemplo de esto puede encontrarse en [Cazenave, capítulo 2, sección 2.4, proposición 2.4.1].

Finalizamos esta sección con la siguiente observación, enfocada a mencionarnos de forma rápida la importancia del estudio de estas propiedades obtenidas a partir de la ecuación lineal de Schrödinger.

Observación 2.2.4. Las estimativas dadas en el teorema 2.2.4 son de gran utilidad al estudiar ecuaciones de Schrödinger no-lineales o no-homogéneas. Por ejemplo, veamos muy brevemente el problema no-homogéneo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} - i\,\triangle\psi &= f; \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \psi(x,0) &= \psi_0(x); \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

con f una función en un espacio apropiado. La teoría de ecuaciones diferenciales parciales sugiere que se puede demostrar que la solución a (2.2.17) viene dada por la fórmula:

$$\psi(x,t) = e^{it\triangle}\psi_0(x) + \int_0^t e^{i(t-s)\triangle} f(\cdot, s)ds. \tag{2.2.18}$$

La fórmula (2.2.18) es conocida en la literatura como *fórmula de Duhamel*. Es claro a partir de esto que si el dato inicial, ψ_0, es una función en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y el dato no-homogéneo, la función f, satisface la hipótesis del segundo item del teorema entonces podremos dar una estimativa de la solución de (2.2.17) en términos de f y ψ_0.

2.3. Algunos Resultados de Diferenciabilidad.

Recordemos que, dado $t \in \mathbb{R}$, el operador $e^{it\triangle}$ perteneciente al grupo de Schrödinger puede definirse de dos maneras equivalentes, ya sea con (2.0.7) o con (2.1.1). Ahora veamos que a partir de (2.0.7) podemos obtener una tercera forma equivalente para definir al operador, la cual nos ayudará a ver con mayor claridad un resultado inicial de diferenciabilidad de la función $\psi = e^{it\triangle}\varphi$, con φ en un espacio apropiado.

Recordemos que para los cálculos preliminares que se realizaron para la deducción de la expresión asociada al operador $e^{it\triangle}$ se consideraron funciones en el espacio de Schwartz $\mathscr{S}$, por lo que tiene sentido considerar como actúa el operador de Schrödinger restringido a funciones en $\mathscr{S}$.

Dada $\varphi \in \mathscr{S}$ tenemos que

$$\begin{aligned} e^{it\triangle}\varphi(x) &= \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y)dy \\ &= \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{(x-y)\cdot(x-y)}{4t}} \varphi(y)dy \\ &= \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{x\cdot y}{2t}} e^{i\frac{|y|^2}{4t}} \varphi(y)dy. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Resalta a la vista que, salvo la multiplicación por una constante y una función de módulo 1, (2.3.1) nos muestra que $e^{it\triangle}$ es escencialmente una transformada de Fourier. Luego, si imitaramos las pruebas de las propiedades de la transformada de Fourier en $\mathscr{S}$ obtendríamos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1. *Dada $\varphi \in \mathscr{S}$, entonces $e^{it\triangle}\varphi \in \mathscr{S}$.*

Básicamente, (2.3.1) y el resultado anterior nos dicen que el operador de Schrödinger $e^{it\triangle}$ envía funciones que tienen un buen decaimiento cuando $|x| \to \infty$ en funciones suaves. Por supuesto, quisieramos ver si una propiedad análoga a esta se cumple para funciones no sólo en $\mathscr{S}$.

Para ver esto, inicialmente definamos, para $t \neq 0$, el operador diferencial P_j como sigue

$$P_j u(x,t) = \left(x_j + 2it\frac{\partial}{\partial x_j} \right) u(x,t).$$

Además, definimos también, para α un multi-índice, los operadores

$$P_\alpha u(x,t) = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} u(x,t).$$

Observación 2.3.1. Dada $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ suave, se tiene que:

$$\begin{aligned}
P_j u(x,t) &= \left(x_j + 2it \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u(x,t) \\
&= x_j u(x,t) + 2it \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \\
&= 2ite^{i\frac{|x|^2}{4t}} \left[-\frac{i}{2t} x_j e^{-i\frac{|x|^2}{4t}} u(x,t) + e^{-i\frac{|x|^2}{4t}} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \right] \\
&= 2ite^{i\frac{|x|^2}{4t}} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \{ e^{-i\frac{|x|^2}{4t}} \} u(x,t) + e^{-i\frac{|x|^2}{4t}} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \right].
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$P_j u(x,t) = 2ite^{i\frac{|x|^2}{4t}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ e^{-i\frac{|x|^2}{4t}} u \right\} (x,t).$$

Veamos unos resultados preliminares que involucran a estos operadores.

Lema 2.3.1. *Dada $u \in \mathscr{S}$,*

$$P_\alpha u(x,t) = e^{it\triangle} x^\alpha e^{-it\triangle} u. \tag{2.3.2}$$

Demostración. Basta demostrar que

$$P_j u(x,t) = e^{it\triangle} x_j e^{-it\triangle} u,$$

y (2.3.2) se seguirá por iteración. Esta igualdad se obtiene fácilmente de la definición del operador $e^{it\triangle}$ y las propiedades de la transformada de Fourier. En efecto

$$\begin{aligned}
e^{it\triangle}x_j e^{-it\triangle}u &= \mathscr{F}^{-1}\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\{x_j e^{-it\triangle}u\}\}\\
&= \mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{\partial}{\partial\xi_j}\{\mathscr{F}\{e^{-it\triangle}u\}\}\right\}\\
&= \mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\left(\frac{i}{2\pi}\right)\frac{\partial}{\partial\xi_j}\{e^{4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\{u\}\}\right\}\\
&= \mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\left(\frac{i}{2\pi}\right)\left[e^{4\pi^2|\xi|^2 it}(8\pi^2\xi_j it)\,\mathscr{F}\{u\}+e^{4\pi^2|\xi|^2 it}\frac{\partial\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial\xi_j}\right]\right\}\\
&= \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{i}{2\pi}\frac{\partial\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial\xi_j}-4\pi\xi_j t\,\mathscr{F}\{u\}\right\}\\
&= x_j u-\frac{4\pi t}{2\pi i}\frac{\partial u}{\partial x_j}=\left(x_j+2it\frac{\partial}{\partial x_j}\right)u.
\end{aligned}$$

■

Lema 2.3.2. *Dada $u\in\mathscr{S}$, los operadores P_α y $\frac{\partial}{\partial t}-i\triangle$ conmutan.*

Demostración. De nuevo, basta realizar la prueba del lema para los operadores P_j. Este resultado también se obtiene gracias a la definición de $e^{it\triangle}$, propiedades de la transformada de Fourier y al lema anterior.

$$\begin{aligned}
&P_j\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\triangle\right)u=e^{it\triangle}x_j e^{-it\triangle}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-i\triangle u\right)=e^{it\triangle}x_j\,\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}-i\triangle u\right\}\right\}\\
&=e^{it\triangle}x_j\,\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{4\pi^2|\xi|^2 it}\frac{\partial\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial t}+e^{4\pi^2|\xi|^2 it}(4\pi^2|\xi|^2 i)\,\mathscr{F}\{u\}\right\}\\
&=e^{it\triangle}x_j\,\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left\{e^{4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\{u\}\right\}\right\}=e^{it\triangle}x_j\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\{u\}\right\}\right\}\\
&=e^{it\triangle}x_j\frac{\partial}{\partial t}\left\{e^{-it\triangle}u\right\}=e^{it\triangle}\frac{\partial}{\partial t}\left\{x_j e^{-it\triangle}u\right\}=\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\,\mathscr{F}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left\{x_j e^{-it\triangle}u\right\}\right\}\right\}\\
&=\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathscr{F}\left\{x_j e^{-it\triangle}u\right\}\right\}\right\}=\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\left(\frac{i}{2\pi}\right)\frac{\partial^2\,\mathscr{F}\{e^{-it\triangle}u\}}{\partial t\partial\xi_j}\right\}\\
&=\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\left(\frac{i}{2\pi}\right)\frac{\partial^2}{\partial t\partial\xi_j}\left\{e^{4\pi^2|\xi|^2 it\,\mathscr{F}\{u\}}\right\}\right\}\\
&=\mathscr{F}^{-1}\left\{-4\pi\xi_j\,\mathscr{F}\{u\}-16\pi^3|\xi|^2\xi_j it\,\mathscr{F}\{u\}-4\pi\xi_j t\frac{\partial\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial t}-2\pi|\xi|^2\frac{\partial\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial\xi_j}+\frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial t\partial\xi_j}\right\}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

- $$-4\pi\xi_j\,\mathscr{F}\{u\}=2i(2\pi\xi_j i\,\mathscr{F}\{u\})=2i\,\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\};$$

- $$\begin{aligned}-16\pi^3|\xi|^2\xi_j it\,\mathscr{F}\{u\} &= -8\pi^2|\xi|^2 t(2\pi\xi_j i\,\mathscr{F}\{u\}) = 2it\left(4\pi^2|\xi|^2 i\,\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\}\right)\\ &= 2it\,\mathscr{F}\left\{-i\,\triangle\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\};\end{aligned}$$

- $$-4\pi\xi_j t\frac{\partial\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial t} = 2it\left(2\pi\xi_j i\frac{\partial\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial t}\right) = 2it\,\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial t}\right\};$$

- $$\begin{aligned}-2\pi|\xi|^2\frac{\partial\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial\xi_j} &= \frac{i}{2\pi}\left(4\pi^2|\xi|^2 i\frac{\partial\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial\xi_j}\right) = \frac{i}{2\pi}\left(4\pi^2|\xi|^2 i\,\mathscr{F}\{-2\pi i x_j u\}\right)\\ &= \mathscr{F}\{-i\,\triangle x_j u\};\end{aligned}$$

- $$\frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial t\partial\xi_j} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{i}{2\pi}\frac{\partial\,\mathscr{F}\{u\}}{\partial\xi_j}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathscr{F}\{x_j u\}\right\};$$

entonces obtendremos que

$$\begin{aligned}P_j\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\,\triangle\right)u &= 2i\frac{\partial u}{\partial x_j} + 2it\left(-i\,\triangle\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + 2it\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial t} - i\,\triangle x_j u + \frac{\partial}{\partial t}\{x_j u\}\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{2it\frac{\partial u}{\partial x_j} + x_j u\right\} - i\,\triangle\left\{2it\frac{\partial u}{\partial x_j} + x_j u\right\}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}-i\,\triangle\right)P_j u.\end{aligned}$$

■

Del lema anterior podemos concluir de inmediato que dada una solución u de la ecuación lineal de Schrödinger (2.0.1), entonces $P_\alpha u$ será también solución de (2.0.1). Así pues, si suponemos $\psi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y definimos

$$\psi(x,t) = e^{it\,\triangle}\psi_0(x),$$

entonces

$$\psi_\alpha = P_\alpha\psi$$

es solución de (2.0.1). Se sigue entonces que

$$\psi_\alpha(x,t) = e^{it\triangle} x^\alpha e^{-it\triangle}\psi(x,t) = e^{it\triangle} x^\alpha \psi_0(x).$$

Luego,

$$||\psi_\alpha||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||e^{it\triangle} x^\alpha \psi_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||x^\alpha \psi_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Así, por la observación 2.3.1

$$(2|t|)^{|\alpha|}||D^\alpha\{e^{-i|x|^2/4t}\psi\}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||x^\alpha \psi_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Por densidad se sigue el siguiente resultado:

Teorema 2.3.2. *Sean α un multi-índice, $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $x^\alpha\psi_0 \in L^2$ y $\psi(x,t) = e^{it\triangle}\psi_0(x)$. Entonces*

$$D^\alpha\{e^{-i|x|^2/4t}\psi\} \in C(\mathbb{R}\setminus\{0\}; L^2(\mathbb{R}^n))$$

y se cumple que para $t \neq 0$

$$(2|t|)^{|\alpha|}||D^\alpha\{e^{-i|x|^2/4t}\psi\}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||x^\alpha \psi_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Para finalizar este trabajo, veamos el siguiente resultado de diferenciabilidad que se obtiene del teorema anterior:

Teorema 2.3.3. *Sea $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $x^\alpha\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para cualquier multi-índice α. Entonces*

$$\psi(x,t) = e^{it\triangle}\psi_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Aplicando el teorema anterior, y teniendo en cuenta que $x^\alpha\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para cualquier multi-índice α, se tiene que $e^{-i|x|^2/4t}\psi$ tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes (respecto a la variable x). Luego, el producto

$$\psi = e^{i|x|^2/4t}e^{-i|x|^2/4t}\psi$$

también tiene derivadas parciales (respecto a la variable x) de todos los órdenes. Ahora bien, respecto a la variable t, de (2.0.1) sabemos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i \triangle \psi,$$

y la expresión $i \triangle \psi$ es infinitamente diferenciable. Luego, se sigue que ψ admite derivadas parciales (respecto a t) de todos los órdenes. $\blacksquare$

Bibliografía

[Bergh-Löfström] BERGH JÖRAN, LÖFSTRÖM JÖRGEN. *Interpolation Spaces. An Introduction.* A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Springer-Verlag, 1976.

[Cazenave] CAZENAVE THIERRY. *Semilinear Schrödinger Equations.* Courant Lecture Notes in Mathematics, 2003.

[Evans] EVANS LAWRENCE C. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics Vol. 19. American Mathematical Society, 1998.

[Grafakos] GRAFAKOS LOUKAS. *Classical Fourier Analysis (Third Edition).* Graduate Texts in Mathematics. Editorial Springer, 2010.

[Jaramillo] JARAMILLO RODNEY. *El Problema de Cauchy para la Ecuación de Schrödinger No Lineal en H^s, $s = 1, 2$.* Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia, 1997.

[Jones] JONES FRANK. *Lebesgue Integration on Euclidean Space.* Jones and Bartlett Publishers International, 2001.

[Kesavan] KESAVAN S. *Topics in Functional Analysis and Applications.* Editorial Halsted Press, 1989.

[Linares-Ponce] LINARES FELIPE, PONCE GUSTAVO. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Ediorial Springer, 2009.

[Muñoz-Livio] MUÑOZ LUZ, ANGULO LIVIO. *Los Semigrupos de las Ecuaciones del Calor y de Schrödinger*. Trabajo de Grado. Universidad del Cauca, 2012.

[Pazy] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.*

[Rudin] RUDIN WALTER. *Principles of Mathematical Analysis (3rd Edition)*. Libros McGraw-Hill, 1976.

[Salsa] SALSA SANDRO. *Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory*. Springer-Verlag Italia, Milano, 2008.

[Sulem] SULEM CATHERINE, SULEM PIERRE-LOUIS. *The Nonlinear Schrödinger Equation*. Editorial Springer, 1999.

[Ward-Volkmer] WARD DAVID, VOLKMER SABINE. (2006). *How to Derive the Schrödinger Equation*. Cornell University Library. Recuperado de https://arxiv.org/abs/physics/0610121v1

[Yosida] YOSIDA KÔSAKU. *Functional Analysis (6th Edition)*. Springer-Verlag, 1980. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.