La Cuártica de Klein como Superficie de Hurwitz

KATHERIN LISETH MORA DELGADO
JUAN DAVID MENESES VIVEROS

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca

2019

La Cuártica de Klein como Superficie de Hurwitz

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad investigación, presentado como requisito parcial
para optar al título de Matemático.

KATHERIN LISETH MORA DELGADO
JUAN DAVID MENESES VIVEROS

DIRECTORA:
PhD. MARTHA JUDITH ROMERO

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca

2019

Notaciones

$\mathbb{C}$	Campo de los números complejos
$\mathbb{Z}$	Conjunto de números enteros
$\mathbb{C}^n$	Conjunto de vectores de dimensión n de números complejos
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\mathbb{F}_p$	Grupo cociente $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$	Atlas complejos
$\mathcal{D}$	Atlas maximal
T	Función de transición entre dos cartas
$\frac{\partial f}{\partial x}$	Derivada parcial de la función f respecto a x
$\mathbb{C}[z:w]$	Anillo de polinomios con entradas en $\mathbb{C}^2$
$\sim$	Relación de equivalencia
π	Proyección natural
Id	Función Identidad
$\mathbb{CP}^1$	Línea proyectiva compleja
$[z:w]$	Coordenadas en $\mathbb{CP}^1$
$\mathbb{CP}^2$	Plano proyectivo de los complejos
$[x:y:z]$	Coordenadas en $\mathbb{CP}^2$
$\mathcal{O}_X(W)$	Conjunto de funciones holomorfas en $W \subset X$
$mult_p(F)$	Multiplicidad de la función F en el punto p
$deg(F) = d_y(F)$	Grado del polinomio F
$F\|_{U_i}$	La función $F : X \to Y$ restringida a $U_i \subset X$
$g(X)$	Género de la superficie de Riemann X
$G.p$	Órbita del punto p
G_p	Estabilizador del punto p
$Ker(\varphi) = K$	El núcleo o kernel del homomorfismo φ
r_i	Multiplicidad de y_i mediante $\pi : X \to X/G$
$\|.\|$	Se refiere al orden o cardinalidad
ζ	Raíz primitiva séptima de la unidad
$\langle . \rangle$	Generado
$\trianglelefteq$	Denota cuando un subgrupo es normal en el grupo

$GL(n,\mathbb{F}_p)$	Grupo lineal general
I_n	Matriz identidad
$SL(n,\mathbb{F}_p)$	Grupo lineal especial
Z_0	Centro del grupo $GL(n,\mathbb{F}_p)$
$Z(SL(n,\mathbb{F}_p))$	Centro del grupo $SL(n,\mathbb{F}_p)$
$PSL(n,\mathbb{F}_p)$	Grupo lineal proyectivo
n_p	Número de $p-$subgrupos de Sylow
$Syl_p(G)$	Conjunto de los $p-$subgrupos de Sylow de G
$\square$	Culminación de una demostración.

Índice general

INTRODUCCIÓN

En las ciencias matemáticas se estudian distintas áreas del conocimiento, que se encuentran relacionadas de distintas maneras, desarrollando así nuevas teorias. Un ejemplo particular de este hecho son las superficies de Riemann que surgen con la necesidad de extender el dominio de las funciones analíticas. Estas hacen uso de herramientas de variable compleja, topología, álgebra, análisis, entre otros. El desarrollo de la teoría referente a las superficie de Riemann inicia a mediados del siglo XIX con el matemático Bernard Riemann y a finales de este siglo ya se habian obtenido resultados bastante importantes; Schwarz logró probar que el grupo de automorfismos de una superficie de Riemann compacta X, de género $g \geq 2$, es finito. Poco tiempo despues Hurwitz logró establecer una cota para el orden de dichos grupos utilizando el género de la superficie.Mas precisamente, Hurwitz probó que $Aut(X) \leq 84(g(X) - 1)$, además garantizó que existen superficies de Riemann donde el orden del grupo de automorfismos alcanza dicha cota. A éstas superficie se les llama superficies de Hurwitz.

Gracias al trabajo realizado por Alexander M. Macbeart(ver [7]) se sabe que existen infinitas Superficies de Hurwitz, sin embargo se conocen pocas y existe muy poca teoría acerca de ellas, una de las mas importantes es la Cuártica de Klein que además es la superficie de menor género con esta característica, con un grupo de automorfismos de orden 168 el cual es isomorfo al grupo lineal proyectivo $PSL(2, \mathbb{F}_7)$.

En el presente trabajo se propone realizar un estudio detallado de la Cuártica de Klein y su grupo de automorfismos, para lo cual en el primer capítulo se definen las superficies de Riemann, se dan a conocer algunos ejemplos y se demuestran algunas de sus propiedades; en el segundo capítulo se realiza un estudio de acciones de grupos y se muestra el teorema de Hurwitz. Finalmente en el tercer capítulo se define la Cuártica de Klein y se prueba que su grupo de automorfismos es isomorfo al grupo lineal proyectivo $PSL(2, \mathbb{F}_7)$.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se presenta la definición de superficies de Riemann y se muestran algunos ejemplos. Con el fin de estudiar el grupo de automorfismo de la Cuártica de Klein se describe el plano proyectivo y se establece la estructura compleja del subconjunto formado por los ceros de un polinomio denominado Curva Proyectiva. Para la realización de las pruebas se hace uso de conceptos básicos de topología, variable compleja y álgebra.

1.1. Superficies de Riemann

Definición 1.1. *Una superficie de Riemann es un espacio topológico X segundo contable, conexo y Hausdorff, que posee una colección de homeomorfismos $\phi_\alpha : U_\alpha \mapsto V_\alpha$ con $\alpha \in I$, donde tanto $U_\alpha \subseteq X$ como $V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$ son abiertos y satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $X = \bigcup U_\alpha$.
2. *Para dos cualesquiera $\phi_\alpha,\ \phi_\beta$ con $\alpha \neq \beta$ se tiene :*

    a) $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ *o*

    b) $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \mapsto \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *es holomorfa.*

Los homeomorfismos ϕ_α, descritos anteriormente, se denominan cartas complejas, la condición 2 se conoce como propiedad de compatibilidad y la colección de cartas compatibles $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$ se denomina atlas complejo. Si además X es compacto, la superficie de Riemann se dice compacta.

Un atlas en una superficie de Riemann no es necesariamente único, si para una superficie se pueden definir dos o más atlas complejos, se puede determinar si son o no equivalentes. Dos atlas complejos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se consideran equivalentes si y sólo si cada carta de $\mathcal{A}$ es compatible con cada carta de $\mathcal{B}$. Al unir $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ también se obtiene un atlas complejo para X, de está forma se puede construir un atlas $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}$ para cualquier atlas $\mathcal{H}$ de X, su existencia se garantiza usando el lema de Zorn. Dicho atlas $\mathcal{D}$ se llama atlas maximal.

Observación 1.2. *Se dice que una carta $\phi : U \to V$ está centrada en $p \in U$ si $\phi(p) = 0$. Además la función $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ se llama función de transición entre dos cartas, su inversa $T^{-1} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa y también es una función de transición. Como consecuencia, está definición es simétrica.*

En adelante siempre se considera un atlas maximal para las superficies de Riemann, y cuando sea necesario las cartas se consideraran centradas.

1.2. Ejemplos de superficies de Riemann

A continuación se presentan algunos ejemplos de superficie de Riemann.

1.2.1. Curva suave afín

Una curva suave afín es el lugar de ceros en $\mathbb{C}^2$ de un polinomio $f(z, w)$

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}.$$

Si $f(z, w)$ es irreducible y no singular, es decir, que para todo $p \in X$, $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ o $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$, se puede definir una carta en cualquier punto de la curva afín, para ello se usa el siguiente teorema:

Teorema 1.3. ***(Teorema de la Función implícita)***

Sea $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio y sea $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}$ el conjunto de ceros del polinomio. Sea $p = (z_0, w_0)$ un punto de X, tal que $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$. Entonces existe una función $g(z)$ holomorfa definida en una vecindad de z_0, tal que, en un entorno de p, X es igual a la gráfica de la función g.

Considere $p \in X$, sin pérdida de generalidad se supone $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$ con $p = (z_0, w_0)$. El Teorema 1.3 garantiza la existencia de una función $g(z)$, tal que en un entorno $U \subset X$ de $p = (z_0, w_0)$ y $U_0 \subset \mathbb{C}$ de z_0, X es la gráfica de la función $g(z)$, esto es $U = (z, g(z)$ para $z \in U_0$. Así se define una carta como $\pi_z : U \mapsto V \subset \mathbb{C}$ por $\pi_z((z, w)) = z$ que es un homeomorfismo de U sobre su imagen $V \subset \mathbb{C}$, con inversa $\pi_z^{-1}((z)) = (z, g(z))$. La condición de no singularidad garantiza que en cualquier punto $p \in X$ se puede definir al menos una carta, luego la unión de todos los dominios de las cartas recubren a X.
Como los dominios de las cartas pueden tener intersección no vacía, se muestran dos posibles casos para verificar la condición de compatibilidad.

1. Si ambas cartas son de la forma π_z entonces sea $p \in X$ un punto de la intersección de los dominios de las dos cartas, la función de transición $T = \pi_z \circ \pi_z^{-1} = Id$ es holomorfa. De igual manera se demuestra para las cartas obtenidas por la proyección π_w.

2. Si una carta se obtuvo por la proyección π_z y la otra por π_w, sea $p = (z_0, w_0)$ un punto en el dominio común U, si en un entorno $U_1 \subset U$ de p, X es de la forma $w = g(z)$ para alguna función holomorfa g en un entorno de z, entonces $T = \pi_w \circ \pi_z^{-1}(z) = \pi_w(z, g(z)) = g(z)$ que es una función holomorfa en z. Así el conjunto de proyecciones es un atlas complejo para X.

X hereda de $\mathbb{C}^2$ las propiedades Hausdorff y segundo contable. La conexidad de X se garantiza puesto que f es irreducible (ver [7]).
De este modo se ha demostrado que la curva suave afín es una superficie de Riemann.

1.2.2. Línea proyectiva

El espacio $\mathbb{CP}^1$ denominado línea proyectiva compleja, es el conjunto cociente $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}/\sim$ donde la relación de equivalencia en $\mathbb{C}^2$ está definida por

$$(z, w) \sim (z', w') \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 : z' = \lambda z, w' = \lambda w$$

y sus elementos se denotan $[z : w]$ con $z \neq 0$ ó $w \neq 0$.

Note que el espacio $\mathbb{CP}^1$ está formado por el conjunto de subespacios 1-dimensionales de $\mathbb{C}^2$.

$\mathbb{CP}^1$ hereda la topología de $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$, es decir, la topología cociente o final, inducida por la proyección $\pi : \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{CP}^1$. Más precisamente un subconjunto $U \subset \mathbb{CP}^1$ es abierto en $\mathbb{CP}^1$ si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$.

Para verificar que $\mathbb{CP}^1$ es Hausdorff se utilizará el hecho de que las funciones φ_i con $i = 0, 1$ dadas a continuación son homeomorfismos.

Para definir cartas en $\mathbb{CP}^1$, se consideran los subconjuntos abiertos en $\mathbb{CP}^1$,

$$U_0 = \{[z_0 : z_1] : z_0 \neq 0\}, U_1 = \{[z_0 : z_1] : z_1 \neq 0\} \tag{1.2.1}$$

y los homeomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi_0 : U_0 &\mapsto \mathbb{C} \\ [z_0 : z_1] &\mapsto \frac{z_1}{z_0} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\mapsto \mathbb{C} \\ [z_0 : z_1] &\mapsto \frac{z_0}{z_1} \end{aligned}$$

Acontinuación se verifica que φ_0 y φ_1 son homeomorfimos.

Claramente φ_0 y φ_1 son biyectivos y sus inversas son $\varphi_0^{-1}(z) = [1 : z]$ y $\varphi_1^{-1}(z) = [z : 1]$, respectivamente. Para demostrar que φ_0 y φ_1 son continuos se utilizará el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Sean $\pi : X \mapsto (X/\sim)$ la aplicación cociente, Y un espacio topológico, y $f : (X/\sim) \mapsto Y$ una aplicación. Entonces f es continua si y sólo si $f \circ \pi$ es continua.*
Demostración ver [9].

Sean $\varphi_0 : U_0 \mapsto \mathbb{C}$ y $\pi : \mathbb{C}^2/\{(0, x_1)\} \mapsto U_0$ entonces $(\varphi_0 \circ \pi) : \mathbb{C}^2/\{(0, x_1)\} \mapsto \mathbb{C}$, está dado por $(\varphi_0 \circ \pi)(x, y) = \frac{y}{x}$ que es una función continua y por Teorema 1.4 se obtiene la continuidad de φ_0. De igual manera se muestra que $\varphi_0^{-1}, \varphi_1$ y φ_1^{-1} son continuas. Por tanto se verifica que φ_0 y φ_1 son homeomorfismos.

Para verificar la compatibilidad de las cartas considere $p \in U_0 \cap U_1$, entonces $\varphi_0(p)$ y $\varphi_1(p)$ son diferentes de cero simultáneamente. Así, si $z \in \varphi_0(U_0 \cap$

U_1), entonces

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z) = \varphi_1([1 : z]) = \frac{1}{z}$$

la cual es una función holomorfa en el dominio $\varphi_0(U_0 \cap U_1)$.

Ahora se demostrará que $\mathbb{CP}^1$ es Hausdorff, sean $p, q \in \mathbb{CP}^1$ dos elementos cualesquiera. Si $p, q \in U_0$ (ver 1.2.1) se pueden separar con abiertos, pues U_0 es Hausdorff (por ser homeomorfo a $\mathbb{C}$), de manera análoga se cumple para $p, q \in U_1$ (ver 1.2.1). Resta ver que pasa si $p \in U_0/U_1$ y $q \in U_1/U_0$, esto implica que $p = [1 : 0]$ y $q = [0 : 1]$. Claramente $p \in {\varphi_0}^{-1}(B_1(0))$ y $q \in {\varphi_1}^{-1}(B_1(0))$ que son dos conjuntos abiertos en U_0 y U_1 respectivamente, $[z : w] \in {\varphi_0}^{-1}(B_1(0)) \cap {\varphi_1}^{-1}(B_1(0))$ entonces existen $a, b \in B_1(0)$ tal que ${\varphi_0}^{-1}(a) = [z : w] = {\varphi_1}^{-1}(b)$, es decir, $\varphi_0([z : w]) = \frac{w}{z} = a$ y $\varphi_1([z : w]) = \frac{z}{w} = b$ por tanto $a = \frac{1}{b}$ lo cual contradice el hecho de que $a, b \in B_1(0)$. Entonces ${\varphi_0}^{-1}(B_1(0)) \cap {\varphi_1}^{-1}(B_1(0)) = \emptyset$ y $\mathbb{CP}^1$ es Hausdorff.

Los homeomorfismos φ_0, φ_1 definidos anteriormente, también sirven para garantizar que U_0 y U_1 son conexos, puesto que ellos son homeomorfos a $\mathbb{C}$. Además, como la intersección $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$, entonces $\mathbb{CP}^1 = U_0 \cup U_1$ es un conjunto conexo y en consecuencia la línea proyectiva $\mathbb{CP}^1$ es una superficie de Riemann.

El siguiente ejemplo permite abordar con mayor facilidad el estudio de la Cuártica de Klein que es una curva proyectiva y en la cual se enfoca el trabajo.

1.2.3. Curvas proyectivas

Antes de describir una curva proyectiva se introducirá el concepto de plano proyectivo complejo $\mathbb{CP}^2$, este se define como el conjunto cociente $\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \iff \text{existe } \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0 : x' = \lambda x, y' = \lambda y, z' = \lambda z$$

Como en el caso de $\mathbb{CP}^1$, $\mathbb{CP}^2$ hereda la topología de $\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$ mediante la proyección natural (llamada topología cociente o final), por tal razón $\mathbb{CP}^2$ es Hausdorff y segundo contable. $\mathbb{CP}^2$ es además compacto, en efecto, considere los conjuntos abiertos

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{CP}^2 : x_i \neq 0\}, \tag{1.2.2}$$

y los homeomorfismos φ_i con $i = 0, 1, 2$,

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_0 : & U_0 & \mapsto & \mathbb{C}^2 \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & \left(\dfrac{x_1}{x_0}, \dfrac{x_2}{x_0}\right) \end{array} \qquad \begin{array}{rlcl} \varphi_1 : & U_1 & \mapsto & \mathbb{C}^2 \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & \left(\dfrac{x_0}{x_1}, \dfrac{x_2}{x_1}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_2 : & U_2 & \mapsto & \mathbb{C}^2 \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & \left(\dfrac{x_0}{x_2}, \dfrac{x_1}{x_2}\right) \end{array}$$

Los U_i forman un recubrimiento para $\mathbb{CP}^2$ y cada abierto U_i es homeomorfo al plano afín $\mathbb{C}^2$, puesto que cada φ_i es un homeomorfismo, como se verá a continuación. Para empezar se verifica que φ_0 es biyectivo.

1. φ_0 es inyectivo, ya que si $\varphi_0([z_0 : z_1 : z_2]) = \varphi_0([w_0 : w_1 : w_2])$ entonces $\frac{z_1}{z_0} = \frac{w_1}{w_0}$ y $\frac{z_2}{z_0} = \frac{w_2}{w_0}$, luego $[1 : \frac{z_1}{z_0} : \frac{z_2}{z_0}] = [1 : \frac{w_1}{w_0} : \frac{w_2}{w_0}]$, lo cual prueba que φ_0 es inyectivo.
2. Sea $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Entonces, como $[1 : z : w] \in U_0$ y $\varphi_0[1 : z : w] = (z, w)$, se concluye que φ_0 es sobreyectivo.

Notar que $\varphi_0^{-1}(a, b) = [1 : a : b]$. De igual forma se verifica que φ_1 y φ_2 son biyectivos con inversas $\varphi_1^{-1}(a, b) = [a : 1 : b]$ y $\varphi_2^{-1}(a, b) = [a : b : 1]$, respectivamente.

Acontinuación se prueba que φ_0 es continua.
Para $x_0 \neq 0$ se cumple que $\varphi_0 : U_0 \mapsto \mathbb{C}^2$ es continua en $\mathbb{CP}^2$ puesto que, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{array}{rlcc} \varphi_0 \circ \pi : & \mathbb{C}_3 - (0, x_1, x_2) & \mapsto & \mathbb{C}^2 \\ & (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & \left(\dfrac{x_1}{x_0}, \dfrac{x_2}{x_0}\right) \end{array}$$

la cual es continua, ya que cada una de sus componentes lo es. Luego, por Teorema 1.4, la función $\varphi_0 : U_0 \mapsto \mathbb{C}^2$ es continua.

Además, la aplicación $\varphi_0{}^{-1}$ es continua. De hecho,

Si $h : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$ está definida por $h(x,y) = (1,x,y)$, h es continua, y $\varphi_0^{-1} = \pi \circ h$ donde $\pi : \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}^3/\sim$ es la aplicación cociente. Así φ_0^{-1} es continua.

De igual forma se prueba la continuidad de φ_1 y φ_2 y sus inversas, así φ_0, φ_1 y φ_2 son homeomorfismos.

Ahora utilizando lo probado anteriormente es fácil verificar que $\mathbb{CP}^2$ es compacto, puesto que es la unión finita de compactos ($\mathbb{CP}^2 = \varphi_0^{-1}(K) \cup \varphi_1^{-1}(K) \cup \varphi_2^{-1}(K)$, donde $K = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 / |a|^2 + |b|^2 \leq 2\}$).

Definición 1.5. *Un polinomio F es homogéneo si todos sus monomios tienen el mismo grado, en general se cumple que*

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda)^d F(x,y,z) \text{ donde } d \text{ es el grado de } F.$$

Definición 1.6. *Un polinomio homogéneo $F(x,y,z)$ es no singular si el sistema*

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{1.2.3}$$

no tiene solución en $\mathbb{CP}^2$.

Note que la condición es equivalente a pedir que el sistema de ecuaciones no tenga solución en $\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$.

Si existe un punto (x_0, y_0, z_0) que satisface el sistema 1.2.3 se dice que el punto es singular en F y el polinomio F es denominado singular.

Definición 1.7. *Una curva proyectiva suave es un conjunto de la forma*

$$X = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : F(x,y,z) = 0\},$$

donde F es un polinomio homogéneo y no singular de grado d.

Es de gran importancia que el polinomio asociado a la curva sea homogéneo y las clases a evaluar sean raíces de dicho polinomio, a continuación se muestran algunas inconsistencias resultantes de infringir alguna de las condiciones de la definición.

Note que si se considera un polinomio no homogéneo $x_0 + x_1 + x_2 - 1 = 0$, la coordenada homogénea $[1 : 0 : 0]$ cumple la ecuación, sin embargo la coordenada homogénea $[2 : 0 : 0]$ corresponde a la misma clase, pero no satisface la ecuación, es decir dos elementos de la misma clase tienen imágenes distintas. Para el otro caso se considera el polinomio homogéneo $f[x : y : z] = x^2 + y^2 + z^2$, la imagen de $[1 : 1 : 1]$ es $f[1 : 1 : 1] = 3$ y la imagen de $[2 : 2 : 2]$ es $f[2 : 2 : 2] = 12$. Nuevamente las imágenes de una misma clase son distintas. Por tal motivo F debe ser un polinomio homogéneo y la clase o coordenada homogénea a evaluar debe ser una raíz.

Así, si F es un polinomio homogéneo y (x, y, z) es una raíz de F entonces para $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ se tiene

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda)^d F(x, y, z) = 0 \text{ donde } d \text{ es el grado de } F.$$

Por lo descrito anteriormente se garantiza que $X = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}_2 : F(x, y, z) = 0\}$ está bien definida.

Para poder definir cartas en X, es importante tener en cuenta que X se puede expresar como la unión de los conjuntos $X_i = X \cap U_i$, con $i = 0, 1, 2$, donde los U_i son los abiertos definidos (ver página anterior). De manera particular se tiene $X_0 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : f(a, b) = F([1 : a : b]) = 0\}$. Note que X_0 es la curva afín descrita por el polinomio $f(a, b) = F([1 : a : b])$, y se puede probar que cada X_i descrito, es una curva afín.
Note que cualquier polinomio homogéneo F en las variables x_i satisface la fórmula de Euler

$$F = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \text{ donde } d \text{ es el grado de} F.$$

Lema 1.8. *Sea $F(x, y, z)$ un polinomio homogéneo de grado d. Entonces F es no singular si y sólo si cada X_i es una curva suave afín en $\mathbb{C}^2$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sin pérdida de generalidad se supone que la curva afín X_0, definida por el polinomio $f(a, b) = F([1 : a : b])$, contiene un elemento (a_0, b_0) que satisface la ecuación

$$f(a_0,b_0)=\frac{\partial f}{\partial a}(a_0,b_0)=\frac{\partial f}{\partial b}(a_0,b_0)=0$$

A continuación se prueba que $[1:a_0:b_0]$ es un punto singular de F.

$F([1:a_0:b_0])=f(a_0,b_0)=0$

$\frac{\partial F}{\partial y}([1:a_0:b_0])=\frac{\partial f}{\partial a}(a_0,b_0)=0$

$\frac{\partial F}{\partial z}([1:a_0:b_0])=\frac{\partial f}{\partial b}(a_0,b_0)=0$

$\frac{\partial F}{\partial x}([1:a_0:b_0])=(dF-a_0\frac{\partial F}{\partial y}-b_0\frac{\partial F}{\partial z})([1:a_0:b_0])=0.$

Siendo esta última igualdad consecuencia de la fórmula de Euler. Así $[1:a_0:b_0]$ es un punto singular de F.

$\Leftarrow$) Si F es singular existe una solución $[x_0,y_0,z_0]\neq[0:0:0]$ que satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$F([x_0,y_0,z_0])=\frac{\partial F}{\partial x}([x_0,y_0,z_0])=\frac{\partial F}{\partial y}([x_0,y_0,z_0])=\frac{\partial F}{\partial z}([x_0,y_0,z_0])=0.$$

Sin pérdida de generalidad se supone que $x_0\neq 0$. Para $f(a,b)=f(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=F([1:\frac{y}{x}:\frac{z}{x}])$ que es el polinomio correspondiente a X_0, se tiene

$f(a_0,b_0)=F([1:a_0:b_0])=0,$

$\frac{\partial f}{\partial a}(a_0,b_0)=\frac{\partial F}{\partial y}([1:a_0:b_0])=0,$

$\frac{\partial f}{\partial b}(a_0,b_0)=\frac{\partial F}{\partial z}([1:a_0:b_0])=0,$

de donde existe un punto $(a_0,b_0)=(\frac{y_0}{x_0},\frac{z_0}{x_0})$ singular en X_0. Así está curva afín no es suave.

De igual manera se muestra que X_1 y X_2 son curvas afines.

□

El polinomio homogéneo no singular $F(x,y,z)$ asociado a la curva proyectiva X es irreducible ver [11], luego cada uno de los tres subconjuntos abiertos X_i de X son curvas del plano afín definidas por un polinomio irreducible y, por lo tanto, son superficies de Riemann por lo demostrado en el Ejemplo 1.2.1.

A continuación se muestran las cartas en la curva proyectiva afín plana

$$X = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : F([x : y : z]) = 0\}.$$

Sea $[x : y : z] \in X$ y $g(\omega)$ la función holomorfa garantizada por el Teorema 1.3 (X es localmente la gráfica de $g(\omega)$).

1. Si $x \neq 0$ entonces existen dos opciones:

   $\phi_0\left(\left[1 : \frac{y}{x} : \frac{z}{x}\right]\right) = \frac{y}{x}$ con inversa $\phi_0^{-1}(\omega) = [1 : \omega : g(\omega)]$,

   $\phi_1\left(\left[1 : \frac{y}{x} : \frac{z}{x}\right]\right) = \frac{z}{x}$ con inversa $\phi_1^{-1}(\omega) = [1 : g(\omega) : \omega]$.

2. Si $y \neq 0$ entonces existen dos opciones:

   $\phi_2\left(\left[\frac{x}{y} : 1 : \frac{z}{y}\right]\right) = \frac{x}{y}$ con inversa $\phi_2^{-1}(\omega) = [\omega : 1 : g(\omega)]$,

   $\phi_3\left(\left[\frac{x}{y} : 1 : \frac{z}{y}\right]\right) = \frac{z}{y}$ con inversa $\phi_3^{-1}(\omega) = [g(\omega) : 1 : \omega]$.

3. Si $z \neq 0$ entonces existen dos opciones:

   $\phi_4\left(\left[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right]\right) = \frac{x}{z}$ con inversa $\phi_4^{-1}(\omega) = [\omega : g(\omega) : 1]$,

   $\phi_5\left(\left[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right]\right) = \frac{y}{z}$ con inversa $\phi_5^{-1}(\omega) = [g(\omega) : \omega : 1]$.

Por lo tanto, para mostrar que las estructuras complejas dadas en cada X_i $i = 1, 2, 3$ son compatibles, es necesario verificar lo siguiente: considere un punto $p = [x : y : z] \in X$ que está tanto en X_0 como en X_1, así $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Suponga que para p estan definidas las cartas $\phi_0(p) = \frac{y}{x}$ en X_0 y $\phi_3(p) = \frac{z}{y}$ en X_1. Por lo tanto $\phi_3 \circ \phi_0^{-1}(\omega) = \phi_3([1 : \omega : g(\omega)]) = g(\omega)$ que es holomorfa. Similarmente se verifica para todas las posibles combinaciones, luego las cartas definidas en X_i son todas compatibles e inducen una estructura compleja en X.

Lo probado anteriormente permite fórmular y probar la siguiente proposición:

Proposición 1.9. *Sea $F(x, y, z)$ un polinomio homogéneo no singular. Entonces la curva plana proyectiva X, que es el lugar geométrico de los ceros de F en $\mathbb{CP}^2$, es una superficie de Riemann compacta.*

Demostración. Anteriormente se ha demostrado que el plano proyectivo $\mathbb{CP}^2$ es compacto y que la curva plana proyectiva X es una superficie de Riemann. Como X es cerrado en $\mathbb{CP}^2$, ya que es la imagen inversa de un subconjunto cerrado $\{0\}$ mediante una función continua F, entonces es un subconjunto compacto. □

1.3. Funciones holomorfas

Después de presentar algunos conceptos básicos sobre las superficies de Riemann y algunos ejemplos, es natural establecer relaciones entre ellas, por tal motivo en está sección se definen los conceptos de función holomorfa y meromorfa entre superficies de Riemann.

Definición 1.10. *Sea X una superficie de Riemann. Se dice que $F : X \mapsto \mathbb{C}$ es holomorfa en $p \in X$, si existe una carta $\phi : U \mapsto V$ con $p \in U$, tal que la función compuesta $F \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$.*

Además se dice que F es holomorfa en X si es holomorfa en cada punto de X. Note que $F \circ \phi^{-1}$ es una función compleja (valor y variable compleja).

Proposición 1.11. *Sean $W \subset X$ una superficie de Riemann y $F : W \mapsto \mathbb{C}$ una función de valor complejo definida sobre una vecindad $W \subset X$ de p, entonces:*

1. *F es holomorfa en p si y sólo si para cada carta $\phi : U \mapsto V$ con $p \in U$ se tiene que la función compuesta $F \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$.*
2. *F es holomorfa en W si y sólo si existen cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \mapsto \mathbb{C}$ con $W \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ y $F \circ \phi_\alpha^{-1}$ holomorfa en $\phi_\alpha(W \cap U_\alpha)$ para cada α.*
3. *Si F es holomorfa en p, entonces F es holomorfa en una vecindad de p.*

Demostración. ver[11]

Definición 1.12. *Sean X, Y superficies de Riemann y $F : X \mapsto Y$. Se dice que F es holomorfa en $p \in X$ si existen cartas $\phi_1 : U_1 \mapsto V_1$ en X con $p \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \mapsto V_2$ en Y con $F(p) \in U_2$ tales que*

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} \ \text{ es holomorfa en } \phi_1(p).$$

Se dice que F es holomorfa en $W \subseteq X$ si es holomorfa en cada punto de W.

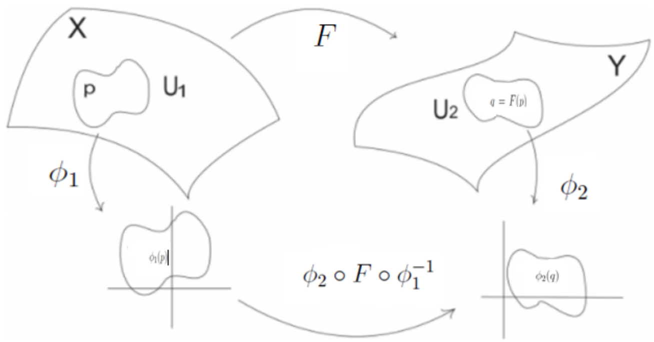


Figura 1.1: Función holomorfa.

Observación 1.13. *La definición anterior es independiente de la escogencia de las cartas ϕ_1 y ϕ_2 para demostrarlo se utiliza la siguiente proposición.*

Ahora se suponen $\phi_1' : U_1' \mapsto V_1'$ en X con $p \in U_1'$ y $\phi_2' : U_2' \mapsto V_2'$ en Y con $F(p) \in U_2'$, suponiendo que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$ como en la Definición 1.16, entonces por la propiedad de compatibilidad $\phi_2' \circ {\phi_2}^{-1}$ es holomorfa en $\phi_2(F(p))$ y $\phi_1 \circ {\phi_1'}^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1'(p)$, luego por ser composición de funciones holomorfas de valor complejo

$$\phi_2' \circ {\phi_2}^{-1} \circ \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1 \circ {\phi_1'}^{-1} = \phi_2' \circ F \circ {\phi_1'}^{-1}$$

es holomorfa en $\phi_1'(p)$. Por tanto la Definición 1.16 es independiente de la escogencia de las cartas.

El conjunto de funciones holomorfas sobre $W \subset X$ se denotará como

$$\mathcal{O}_X(W) := \mathcal{O}(W) := \{F : W \mapsto \mathbb{C},\ F \text{ es holomorfa}\}$$

Proposición 1.14. *Si $f : X \mapsto Y$ y $g : Y \mapsto Z$ son funciones holomorfas entre superficies de Riemann, entonces $(g \circ f) : X \mapsto Z$ es holomorfa.*
Demostración. Ver[11]

Proposición 1.15. *Sea $F : X \mapsto Y$ una aplicación entre superficies de Riemann.*

1. *F es holomorfa en p si y sólo si para cada par de cartas $\phi_1 : U_1 \mapsto V_1$ en X con $p \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \mapsto V_2$ en Y con $F(p) \in U_2$, la función compuesta*
$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$$
es holomorfa en $\phi_1(p)$.

2. *F es holomorfa en W si y sólo si existen colecciones de cartas $\{\phi_1^i : U_1^i \mapsto V_1^i\}$ en X con $W \subseteq \bigcup_{i \in I} U_1^i$ y $\{\phi_2^i : U_2^i \mapsto V_2^i\}$ en Y con $F(W) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_2^i$ tales que*
$${\phi_2}^j \circ F \circ \left({\phi_1}^i\right)^{-1}$$
es holomorfa para todo i, j donde esté definido.

3. *Si F es holomorfa en p entonces F es holomorfa en un entorno de p.*

Demostración. Ver[11]

1.3.1. Isomorfismos entre superficies de Riemann

La siguiente definición permite estudiar propiedades de una superficie de Riemann desde el punto de vista del álgebra, usando tópicos de teoría de grupos y teoría de cuerpos.

Definición 1.16. *Un isomorfismo entre superficies de Riemann es una función $F : X \mapsto Y$ holomorfa y biyectiva. Si $F : X \mapsto X$ es un isomorfismo entonces F se dice un automorfismo de X.*

El conjunto de automorfimos de una superficie de Riemann, junto con la composición de funciones, tiene estructura de grupo y este grupo se denota por $Aut(X)$.

Ejemplo 1.17. *Una función es holomorfa en $\mathbb{C}$, en el sentido de la definición anterior (Definición 1.16) si es holomorfa en $\mathbb{C}$ en el sentido usual.*

Ejemplo 1.18. *Sea X la curva proyectiva definida por el polinomio $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ y $\pi : X \mapsto \mathbb{CP}^1$ dada por $\pi([x : y : z]) = [x : y]$ es una función holomorfa.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad se supone que $[x:y:z] \in X$ con $x \neq 0$, luego $[x:y:z] \in U_0$ (ver Ecuación 1.2.2) y sus cartas son π_0 o π_1 (ver Ejemplo 1.2.3). Ahora por Ejemplo 1.2.2 se sabe que en los puntos $\pi \circ \phi_0^{-1}(s)$ o $\pi \circ \phi_1^{-1}(\omega)$ existe la carta φ_0 de la Linea Proyectiva $\mathbb{CP}^1$, así:

$$\varphi_0 \circ \pi \circ \phi_0^{-1}(s) = \varphi_0(\pi([1:s:g(s)])) = \varphi_0[1:s] = s \text{ holomorfa},$$

$$\varphi_0 \circ \pi \circ \phi_1^{-1}(\omega) = \varphi_0(\pi([1:g(\omega):\omega])) = \varphi_0[1:g(\omega)] = g(\omega) \text{ holomorfa},$$

en consecuencia, las funciones $\varphi_0 \circ \pi \circ \phi_0^{-1} : \phi_0(U_0) \mapsto V_0$ con $V_0 \subset \mathbb{C}$ y $\varphi_0 \circ \pi \circ \phi_1^{-1} : \phi_0(U_0) \mapsto V_1$ con $V_1 \subset \mathbb{C}$ son holomorfas.

De igual forma se muestra para $[x:y:z] \in U_1$ y $[x:y:z] \in U_2$, por tanto la función π es holomorfa en X.

$\square$

1.4. Funciones meromorfas

Antes de introducir el concepto de función meromorfa se darán a conocer algunos conceptos previos.

Definición 1.19. *Sean X y Y superficies de Riemann y $F : W - \{p\} \mapsto Y$ una función holomorfa en una vencindad perforada de $p \in X$. Se dice que:*

1. *F tiene una singularidad removible en p si y sólo si existen cartas $\phi_1 : U_1 \mapsto V_1$ con $p \in U_1$ en X y $\phi_2 : U_2 \mapsto V_2$ con $F(p) \in U_2$, tal que la función compuesta $\phi_2 \circ F \circ {\phi_1}^{-1}$ tiene una singularidad removible en $\phi_1(p)$*

2. *F tiene un polo en p si y sólo si existen cartas $\phi_1 : U_1 \mapsto V_1$ con $p \in U_1$ en X y $\phi_2 : U_2 \mapsto V_2$ con $F(p) \in U_2$, tal que la función compuesta $\phi_2 \circ F \circ {\phi_1}^{-1}$ tiene un polo en $\phi_1(p)$*

3. *F tiene una singularidad esencial en p si y sólo si existen cartas $\phi_1 : U_1 \mapsto V_1$ con $p \in U_1$ en X y $\phi_2 : U_2 \mapsto V_2$ con $F(p) \in U_2$, tal que la función compuesta $\phi_2 \circ F \circ {\phi_1}^{-1}$ tiene una singularidad esencial en $\phi_1(p)$*

Definición 1.20. *Una función $F : X \mapsto Y$ se llama meromorfa en un punto $p \in X$ si F es holomorfa o tiene una singularidad removible en p, o bien tiene un polo en p.*

El conjunto de funciones meromorfas sobre $W \subset X$ se denota como

$$\mathcal{M}_X(W) := \mathcal{M}(W) := \{F : W \mapsto \mathbb{C},\ F \text{ es meromorfa}\}$$

El siguiente es un ejemplo de función meromorfa.

Ejemplo 1.21. *Si $p(z,w)$ y $q(z,w)$ son polinomios en $\mathbb{C}[z:w]$ homogéneos del mismo grado no nulos, primos entre sí, entonces $r : \mathbb{CP}^1 \mapsto \mathbb{CP}^1$, dado por $r[z:w] = [p(z,w) : q(z,w)]$, define una función meromorfa en $\mathbb{CP}^1$.*

Demostración. Como los polinomios $p(z,w)$ y $q(z,w)$ son homogéneos del mismo grado, la función $r[z:w]$ está bien definida y como son primos entre si no se pueden anular simultáneamente.

Sea $[z_0 : w_0] \in U_0$ la carta correspondiente al punto es φ_0 [ver: Ejemplo 1.2.2].

Si se supone que $p(z_0, w_0) \neq 0$, entonces $r[z_0 : w_0] \in U_0$ y la carta correspondiente a dicho punto es φ_0. Así,

$$\varphi_0 \circ r \circ {\varphi_0}^{-1}(s) = \frac{q(1,s)}{p(1,s)}$$

que es una función meromorfa en un entorno de $\varphi_0[z_0 : w_0] = \frac{w_0}{z_0}$, pues $p(1,s) \neq 0$ en un entorno del punto.

Si $p(z_0, w_0) = 0$, entonces $r[z_0 : w_0] = [0 : 1]$ y la carta correspondiente a dicho punto es φ_1 [ver Ejemplo 1.2.2], entonces:

$$\varphi_1 \circ r \circ {\varphi_0}^{-1}(s) = \frac{p(1,s)}{q(1,s)}$$

que es una función meromorfa en un entorno de $\varphi_1[z_0 : w_0] = \frac{z_0}{w_0}$, pues $q(1,s) \neq 0$ en un entorno del punto.

Para el caso $[z_0 : w_0] \in U_1$ se realiza de manera análoga y siempre se obtiene una función racional. $\square$

A continuación se introduce el concepto de series de Laurent en superficies de Riemann.

1.5. Series de Laurent

Sea $F : X \mapsto \mathbb{C}$, donde X es una superficie de Riemann, una función holomorfa en una vecindad perforada de p y sea $\phi : U \mapsto V$ una carta en X donde $p \in U$. Se puede construir la serie de Laurent para $F \circ \phi^{-1}$ en un entorno de $z_0 = \phi(p)$.

$$F \circ \phi^{-1}(z) = F(\phi^{-1}(z)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n.$$

Proposición 1.22. *Sea $F : X \mapsto Y$ una aplicación no constante y holomorfa, las siguientes propiedades se cumplen:*

1. *F es una aplicación abierta.*
2. *Si X es compacto entonces Y es compacto y F es sobreyectiva.*

Demostración. Ver [11]

La siguiente proposición es muy importante en el desarrollo de este trabajo puesto que describe el comportamiento local de una función holomorfa.

1.6. Forma local normal

Proposición 1.23. *Sea $F : X \mapsto Y$ una función holomorfa no constante y $p \in X$. Entonces existe un único entero $m \geq 1$ el cual satisface la siguiente propiedad: para cada carta $\phi_2 : U_2 \mapsto V_2$ en Y centrada en $F(p)$, existe una carta $\phi_1 : U_1 \mapsto V_1$ en X centrada en p tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.*

Demostración. Se considera una carta $\phi_2 : U_2 \mapsto V_2$ en Y centrada en $F(p)$ tal que $\phi_2(F(p)) = 0$. Entonces existe $\phi_1 : U_1 \mapsto V_1$ en X centrada en p tal que $\phi_1(p) = 0$

$$T = \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$$

es holomorfa y satisface $T(0) = \phi_2(F(\phi_1^{-1}(0))) = \phi_2(F(p)) = 0$, sin embargo T no es nulo pues si existiera una vecindad U tal que $T(U) = 0$ para todo $w \in U$ como ${\phi_2}^{-1}(0) = F(p)$ entonces se tiene que para todo $q \in U_1$ $F(q) = F(p)$; como F es una función holomorfa no constante, entonces F es abierta y $F(U) = F(p)$ es abierto en Y que es conexo, esto no es posible ya que $F(p)$ es cerrado en Y.

El desarrollo en serie de Taylor para T es de la forma

$$T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i,$$

con $c_i \neq 0$ y $m \geq 1$ ya que $T(0) = 0$. Así

$$T(w) = w^m S(w)$$

donde

$$S(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^{i-m}$$

es holomorfa y cumple con $S(w) \neq 0$ $\forall w \in \mathbb{C}$. De esta manera se puede garantizar la existencia de una función $R(w)$ holomorfa en un entorno de 0 tal que

$$S(w) = (R(w))^m$$

(por la existencia de la raíz $m-$ésima) lo cual implica que

$$T(w) = w^m (R(w))^m = (wR(w))^m$$

Al llamar $n(w) = wR(w)$ se tiene que

$$n'(w) = R(w) + wR'(w) \;\text{ y }\; n'(0) \neq 0.$$

En consecuencia, se puede garantizar que la función n es invertible y holomorfa en un entorno de cero (Teorema de la función inversa). Por otro lado se tiene que la función $\phi = \; n \circ \phi_1$ es una carta centrada en p y

$$\phi(p) = \; n(\phi_1(p)) = n(0) = 0R(0) = 0.$$

Ahora sea n como nueva coordenada z ($z = n(w)$). Entonces

$$\phi_2(F(\phi^{-1}(z))) = \phi_2(F(\phi_1^{-1}(n^{-1}(z))) = T(n^{-1}(z)) = T(w) = (wR(w))^m = z^m$$

La unicidad de m se tiene puesto que en un entorno de p , hay exactamente m preimágenes de puntos cercanos a $F(p)$, entonces este exponente m queda determinado por las propiedades topológicas de la aplicación en un entorno de p, y es independiente de las cartas elegidas. $\square$

La propiedad anterior permite introducir la siguiente definición:

Definición 1.24. *Sea $F : X \mapsto Y$ una función holomorfa, la multiplicidad de F en p o el índice de ramificación de F en p, denotado por $mult_p(F)$, es el único entero m tal que existen cartas locales en entornos de p y $F(p)$ donde F tiene la forma $z \mapsto z^m$.*

Ejemplo 1.25. *Sean X una superficie de Riemann y $\phi : U \mapsto V \subset \mathbb{C}$ una carta local en X, entonces ϕ tiene multiplicidad uno en cada punto de U. Sea $p \in U$, por la proposición de forma local normal se tiene que para toda carta en $V \subset \mathbb{C}$ existe una carta en U, de manera particular se toma la carta $Id : V \mapsto V$ para la cual existe la carta $\phi : U \mapsto V$ tal que $(Id \circ \phi \circ \phi^{-1})(z) = z$; por tanto la multiplicidad de ϕ en $p \in U$ es 1.*

Definición 1.26. *Sea $F : X \mapsto Y$ una función no constante y holomorfa entre superficies de Riemann y $p \in X$ p se llama **punto de ramificación** de F si la multiplicidad de F en p es mayor o igual que 2 ($mult_p(F) \geq 2$). Un punto $y \in Y$ es un **punto rama** de F si es imagen mediante F de un punto de ramificación.*

Proposición 1.27. *Sea $F : X \mapsto Y$ una función holomorfa entre superficies de Riemann en un punto $p \in X$. Entonces, $mult_p(F) = 1$ si y sólo si F es un isomorfismo local desde un entorno U de p hasta un entorno V de $F(p)$.*

Demostración. Por la proposición de forma local normal existen cartas ϕ_1 centrada en $p \in X$ y ϕ_2 centrada en $F(p) \in Y$ tal que $(\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})(z) = z^d$.

$\Rightarrow$ Si la $mult_p(F) = 1$ entonces $(\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})(z) = z$ es holomorfa e inyectiva, luego F es un isomorfismo local.

$\Leftarrow$ Sea $F : U \mapsto V$ un isomorfismo local en p con $F(p) = q$, entonces al componer F con las cartas ϕ_1 en X centrada en p y ϕ_2 en Y centrada en q se obtiene una función $(\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})(z) = z^d$. Pero como F es biyectiva entonces $d = 1$ y así la mulplicidad $mult_p(F) = 1$. □

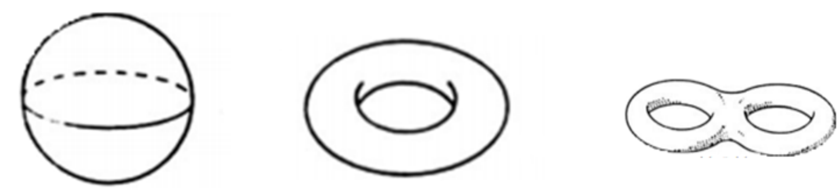
Proposición 1.28. *Sea $F : X \mapsto Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces para cada $y \in Y$ la suma de la multiplicidad de sus preimágenes mediante F, denotada por $d_y(F)$,* *es constante e independiente de y. Esto es*

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} mult_p(F).$$

Demostración. ver [11].

Definición 1.29. *Sea $F : X \mapsto Y$ una función no constante y holomorfa entre superficies de Riemann compactas. El grado de F denotado por $deg(F)$, es el entero $d_y(F)$ para cualquier $y \in Y$.*

De manera intuitiva el género de una superficie compacta, denotado por $g(X)$ es el número de azas o huecos que tiene.



El género de la esfera es cero   El género del toro es uno   El género del 2-toro es dos

Las definiciones anteriores son usadas para comprender la fórmula de Hurwitz.

1.6.1. Fórmula de Hurwitz.

En [11] aparece la prueba del siguiente teorema, el cual permitirá demostrar la ecuación de Hurwitz la cual es de gran utilidad cuando se estudian superficies de Riemann desde el punto de vista algebraico, en particular en este trabajo.

Teorema 1.30. *Sea $F : X \mapsto Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces*

$$2g(X) - 2 = deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1].$$

donde $g(X)$ y $g(Y)$ son el género de X y Y respectivamente.

Observación 1.31. *Haciendo uso de la fórmula de Hurwitz, en el caso particular de una curva proyectiva suave X definida por un polinomio homogéneo de grado d no singular, es posible encontrar de manera sencilla* *su género* $g(X)$, *el cual está dado por*

$$g(X) = \frac{(d-2)(d-1)}{2}.$$

Capítulo 2

Acciones de Grupos

La definición de acción de grupo aparece con los trabajos de Lagrange y Galois. El desarrollo de está teoría ha sido de gran importancia para distintas áreas de las matemáticas, en particular se ha podido aplicar en la teoría de superficies de Riemann, permitiendo conocer características de éstas a través del estudio de sus grupos de automorfismos y crear, a partir de las ya conocidas, nuevas superficies de Riemann (realizando el cociente por la acción de un grupo). En este capítulo se dan a conocer algunos conceptos básicos de está teoría.

Definición 2.1. *Sea G un grupo y X una superficie de Riemann, una acción de G en X es una aplicación $G \times X \mapsto X$, denotada por $(g, p) \mapsto g.p$, que satisface:*

1. $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ *para* $g, h \in G$ *y* $p \in X$.
2. $e \cdot p = p$ *para* $p \in X$, *donde* $e \in G$ *es la identidad.*

La acción de G en X induce una aplicación biyectiva, pues si se fija $g \in G$, la aplicación $\varphi_g(p) = g \cdot p$ es una biyección en X y su inversa es la aplicación $\varphi_{g^{-1}}$.

Definición 2.2. *Sea G un grupo que actúa en X, se define la órbita de un punto $p \in X$ como el conjunto*

$$G \cdot p = \{g \cdot p \in X : g \in G\}$$

Si $A \subset X$, se tiene que el conjunto de órbitas de puntos de A, denotado por $G \cdot A$, está dado por

$$G \cdot A = \{g \cdot a \in X : g \in G \text{ y } a \in A\}.$$

Definición 2.3. *Sea G un grupo que actúa en X, se define el estabilizador de un punto $p \in X$ como el conjunto*

$$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$$

G_p es un subgrupo de G, también llamado subgrupo de isotropía de p. Se puede ver que los puntos que pertenecen a la misma órbita tienen estabilizadores conjudados esto es, si p y q pertenecen a la misma órbita existe $g \in G$ tal que $g \cdot p = q$ y

$$G_q = G_{g.p} = gG_p g^{-1}.$$

Definición 2.4. *El núcleo o kernel de la acción es el subgrupo*

$$K = \{g \in G : g \cdot p = p \quad \text{para todo } p \in X\}.$$

Observación 2.5. *K se puede ver como la intersección de todos los estabilizadores, esto es $K = \bigcap_{p \in X} G_p$ y es un subgrupo normal. Cuando $K = \{e\}$ se dice que la acción es efectiva.*

Definición 2.6. *Una acción de G en X es holomorfa, si para todo $g \in G$ la función biyectiva $\varphi_g(p) = g \cdot p$ es holomorfa.*

Las funciones $\varphi_g(p)$ son automorfismos de X.

La aplicación $\pi : X \mapsto X/G$ definida por $\pi(p) = G \cdot p$ induce la topología final en X/G y es continua, dado que $U \subset X/G$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X.
Si el grupo G actúa en la superficie de Riemann X, entonces el conjunto de órbitas , X/G, es una superficie de Riemann, para realizar la demostración primero se dan a conocer algunas proposiciones que serán de utilidad.

Proposición 2.7. *Sea G actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X. Si $p \in X$ tiene estabilizador G_p finito, entonces G_p es un grupo cíclico.*

Demostración. Sea ϕ una carta local centrada en $p \in X$ entonces para todo $g \in G_p$ se tiene la serie de potencia

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) z^n$$

Como g es un isomorfismo de X , $a_1 \neq 0$, ya que $g(p) = p$.
Ahora se considera la aplicación $a_1 : G_p \mapsto \mathbb{C}^*$ dada por $a_1(g) = a_1 \cdot g$, y se verifica que es un homomorfismo de grupos. En efecto, si
$g, h \in G_p$, entonces

$g(h(z)) = g(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h)z^n)$

$g(h(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_m(g)(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h)z^n)^m$

$g(h(z)) = a_1(g)a_1(h)z+$ términos de orden superior.

Por otro lado,

$$g(h(z)) = g \circ h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(g \circ h)z^j,$$

así $a_1(g)a_1(h) = a_1(gh)$. Además, si se logra probar que a_1 es inyectivo , G_p será isomorfo a un subgrupo finito de $\mathbb{C}$ y en consecuencia debe ser cíclico. Para tal fin, se supone que el núcleo del homomorfismo a_1 no es trivial; sea $g \neq e$ un elemento del núcleo de a_1 y $m \geq 2$ el primer exponente de los términos de orden superior que es distinto de cero en $g(z)$. Entonces

$$g(z) = z + bz^m + \text{términos de orden superior.}$$

Así se tiene que

$$g(z)^k = z + kbz^m + \text{ términos de orden superior.}$$

Luego por la finitud de G_p se tiene $g(z)^k$ es la función identidad para algún $k \in Z^+$, es decir $kb = 0$, de donde $b = 0$ lo cual es una contradicción. En consecuencia a_1 es un homomorfismo inyectivo. □

Proposición 2.8. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X. Entonces el conjunto de todos los $p \in X$ con estabilizador no trivial es un conjunto discreto.*

Demostración. Se usa el método de contradicción, se supone que existe una sucesión $\{p_n\}$ en X que converge a $p \in X$ tal que para cada p_i existe $g_i \neq e$ en G_{p_i}.
Como G es finito entonces se puede extraer una subsucesión $\{p_{n_k}\}$ de p_n

tal que cada elemento queda fijo por la acción del mismo $g \neq e \in G$. Por la continuidad de g se tiene

$$g(p) = \lim_{k \to \infty} g(p_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} p_{n_k} = p$$

Como g es un automorfismo de X, el teorema de la identidad (ver [11]) garantiza que g es la función identidad, lo cual es una contradicción. Por tanto el conjunto de puntos con estabilizador no trivial no puede tener un punto de acumulación y en consecuencia el conjunto de puntos con estabilizador no trivial es discreto.

$\square$

Proposición 2.9. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X. Dado $p \in X$, existe una vecindad U de $p \in X$ tal que.*

1. *U es invariante bajo el estabilizador G_p, es decir $g.u \in U$ para todo $g \in G_p$ y $u \in U$.*
2. *$U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ para todo $g \notin G_p$.*
3. *la aplicación natural inducida por $\alpha : U/G_p \mapsto X/G$ es aquella que envía a cada $q \in U$ a su órbita $G \cdot q$, es un homeomorfismo sobre un conjunto abierto de X/G.*

Demostración. 1) Sea $A = G - G_p = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ como X es Hausdorff para cada $i = 1, ..., n$ existen entornos V_i de p y W_i de $q_i = g.p$ con $V_i \cap W_i = \emptyset$. Además $g_i{}^{-1}(W_i)$ es un entorno abierto de p para cada i ya que la acción de G en X es holomorfa y por ende continua, se considera ahora:

$$R_i = V_i \cap (g_i{}^{-1} W_i) \quad R = \bigcap_{i=1}^{n} R_i \quad U = \bigcap_{g \in G_p} gR$$

los R_i son entornos abiertos de p, al igual que R y U, ya que g es abierta (la acción es continua), asi: $g \cdot U = U$ para todo $g \in G_p$.
2) Se observa que $R_i \cap (g \cdot R_i) \subset V_i \cap W_i = \emptyset$, luego $R \cap (g \cdot R) = \emptyset$ y $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ para todo $i = 1, 2, 3, ..., n$.
3) El conjunto U/G_P está bien definido, ya que U es invariante con respecto a G_p.
La aplicación $\alpha : U/G_p \mapsto X/G$ está bien definida.

Si $q_1, q_2 \in U$ tales que $q_1 \cdot G_p = q_2 \cdot G_p$ entonces existe $h \in G_p$ tal que $q_1 = h \cdot q_2$, y así,

$$q_1 \cdot G = (h \cdot q_2)G = \{y \in X : y = g \cdot (h \cdot q_2) \text{ donde } g \in G\} = \\ \{y \in X : y = g_1 \cdot q_2) \text{ donde } g_1 \in G\} = q_2.G$$

Luego la aplicación α es inyectiva.
Suponer ahora que $q_1 \cdot G = q_2 \cdot G$ para algunos $q_1, q_2 \in U$, luego

$$q_1 \cdot G = \{g \cdot q_1 : g_p\} \cup \{h \cdot q_1 : h \notin G_p\} = q_1 \cdot G \cup q_2 \cdot A$$

de igual forma

$$q_2 \cdot G = q_2 \cdot G_p \cup q_2 \cdot A$$

□

Utilizando la proposición anterior se puede construir las cartas en el conjunto X/G, usando las cartas ya existentes en U/G_p y trasladándolas mediante α a X/G.

Sea $\overline{p} \in X/G$ la órbita del punto $p \in X$,

1. para el primer caso se supone $|G_p| = 1$, luego por proposición 2.9 existe un entorno U de p tal que $\pi|_U : U \mapsto W \subset X/G$ es un homeomorfismo sobre un entorno W de $\overline{p}$. Reduciendo a U, si es necesario, se supone que es el dominio de una carta $\phi : U \mapsto \Omega$ en X, así se construye a $\psi = \phi \circ (\pi|_U)^{-1} : W \mapsto \Omega$ como $\pi|_U$ y ϕ son homeomorfismos entonces ψ es una carta en X/G.

2. En el segundo caso $|G_p| = m \geq 2$, la proposición 2.9 garantiza la existencia de un entorno U de p que es invariante por G_p, tal que la aplicación $\alpha : U/G_p \mapsto W \subset X/G$ es un homeomorfismo sobre un entorno W de $\overline{p}$. Por otra parte, se supone que φ es una carta en X centrada en p, con U como dominio y se define una aplicación $h : U \mapsto \mathbb{C}$
$$h(q) = \prod_{g \in G_p} \varphi(g \cdot q),$$
La aplicación h cumple con las siguientes propiedades:

   - h está bien definida, ya que el entorno U es invariante con respecto a G_p.

- h es holomorfa por ser producto de funciones holomorfas.
- $h(\varphi^{-1}(z)) = \prod_{g\in G_p} \varphi(g\cdot\varphi^{-1}(z))$ donde cada aplicación $\psi_g(z) = \varphi(g\cdot\varphi^{-1}(z))$ es biyectiva y el índice de ramificación en $z=0$ es 1, entonces h tiene un índice de ramificación igual a m en el punto p.
- h es G_p invariante $h(g\cdot q) = h(q)$ para $g\in G_p$.

Se considera la aplicación $\overline{h} : U/G \mapsto \mathbb{C}$ definida como

$$\overline{h}(G_p\cdot q) = h(q), \text{es decir } h = \overline{h}\circ\pi_U,$$

$\overline{h}$ es continua, abierta e inyectiva, ya que h y π_U son continuas y abiertas, la inyectividad se tiene ya que si $\overline{h}(G_p\cdot q_1) = \overline{h}(G_p\cdot q_2)$ donde $q_1, q_2 \in U$, suponiendo que $h(q_1) = z_1 \in \mathbb{C}$ se tiene que $h^{-1}(z_1) = \{g\cdot q_1 \text{ donde } g\in G_p\}$ y como $|h^{-1}(z_1)| = m$ y $h(g\cdot q_1) = h(q_1)$ para todo $g\in G_p$ entonces las órbitas $G_p\cdot q_1$ y $G_p\cdot q_2$ coinciden.

Así, la función $\overline{h}$ es un homeomorfismo sobre su imagen y realizando la composición de está función y la inversa de α se obtiene una carta ϕ sobre W. Se observa en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\phi"'] & U/G_p \arrow[d, "\bar{h}"] \\
 & \Omega\subset\mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Por tanto existen cartas en el cociente X/G, en el primer caso se describe las cartas de tipo $m=1$ y en el segundo caso se encuentran las cartas de tipo $m\geq 2$.

Teorema 2.10. *Sea G un grupo finito con acción holomorfa y efectiva en una superficie de Riemann X. Entonces la anterior construcción de las cartas complejas sobre X/G, dota a X/G de una estructura de superficie de Riemann. Además la aplicación cociente $\pi : X\mapsto X/G$es holomorfa de grado $|G|$, y $mult_p(\pi) = |G_p|$ para cualquier punto $p\in X$.*

Demostración. El dominio de las cartas complejas cubren a X/G, para probar que X/G es una superficie de Riemann se debe verificar que las cartas son compatibles, así:

Como los puntos con estabilizador no trivial forman un conjunto discreto, se puede suponer que dos cartas en el caso de $m \geq 2$ no se interceptan.

1. Sea ϕ_1 y ϕ_2 dos cartas en X, así las cartas complejas del tipo $m = 1$ en X/G son de la forma $\varphi_i = \phi_i \circ \pi_U^{-1}$ para $i = 1, 2$. A continuación, se prueba que son compatibles:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = (\phi_2 \circ \pi_U^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \pi_U^{-1})^{-1} = \phi_2 \circ \pi_U^{-1} \circ \pi_U \circ \phi_1^{-1} = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$$

   Como los ϕ_i son cartas de X entonces $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa, por tanto $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es holomorfa.

2. Sea $\varphi_1 : \overline{U_1} \mapsto V_1$ una carta en p_1 de X/G del caso $m = 1$ y $\varphi_2 : \overline{U_2} \mapsto V_2$ una carta en p_2 de X/G del caso $m \geq 2$; y sean U_1 y U_2 dos conjuntos abiertos de X que fueron usados para construir las cartas en X/G, en el caso que U_1 y U_2 no se corten, se realiza un traslado de tal forma que ambos conjuntos posean intersección.
   Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos cartas en X con dominio en U_1 y U_2 respectivamente. Sea $\varphi_1 = \phi_1 \circ \pi_{|U_1}^{-1}$,

$$\begin{tikzcd} U_2 \arrow[r, "\pi_{U_2}"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & U_2/G_{p_2} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\bar{h}"'] & \bar{U}_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ \Sigma_2 & & \Omega_2, \end{tikzcd}$$

   La carta local en $\overline{U_2}$ es $\overline{h} \circ \alpha^{-1}$. Entonces,

$$\varphi_1^{-1}(z) = (\pi_{|U_1} \circ \phi_1^{-1})(z) = \pi_{|U_1}(\phi_1^{-1}(z))$$
$$\varphi_2(G \cdot q) = (\overline{h} \circ \alpha^{-1})(G \cdot p) = \overline{h}(\alpha^{-1}(G \cdot p)) = h(q) = \prod_{g \in G_{p_2}} \phi_2(g \cdot q)$$

   y

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z) = \varphi_2(G \cdot \varphi_1^{-1}(z)) = \prod_{g \in G_{p_2}} \phi_2(g \cdot \varphi_1^{-1}(z)) = \prod_{g \in G_{p_2}} (\phi_2 \circ \varphi_g \circ \varphi_1^{-1})(z)$$

   de donde $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z)$ es holomorfa por ser producto de funciones holomorfas.

Debido a que G es finito y X es Hausdorff, se tiene que X/G también lo es, en efecto, sean $G \cdot q_1 \neq G \cdot q_2$ órbitas distintas, dado que se componen de elementos finitos se puede separarlos y como π es abierta se obtienen abiertos en X/G que no se intersectan.

X/G es conexo pues $\pi : X \mapsto X/G$ es continua y X es conexo.

Para verificar que π es holomorfa, se tiene dos casos :

- Sea ϕ una carta en X y $\varphi_1 = \phi_1 \circ \pi^{-1}_{|U_1}$ una carta en X/G del tipo $m = 1$, así:

  $(\varphi_1 \circ \pi \circ \phi^{-1})(z) = (\phi_1 \circ \pi^{-1}_{|U_1} \circ \pi \circ \phi^{-1})(z) = (\phi_1 \circ \phi^{-1})(z)$ que es holomorfa

- Ahora se considera el caso en donde la carta en X/G es de tipo $m \geq 2$, entonces ϕ es una carta en X y $\varphi_2(G \cdot q) = (\overline{h} \circ \alpha^{-1})(G \cdot p) = h(q)$ una carta en X/G, así:

  $(\varphi_2 \circ \pi \circ \phi^{-1})(z) = \varphi_2(G \cdot (\phi^{-1}(z))) = \prod_{g \in G_{p_2}} \phi_2(g \cdot (\phi^{-1}(z)))$

  $= \prod_{g \in G_{p_2}} (\phi_2 \circ \varphi_g \circ \phi^{-1})(z)$

  que es holomorfa por ser producto de holomorfas.

  Además la $mult_p \pi$ es igual a la multiplicidad de h, por lo tanto $mult_p \pi = m = |G_p|$

$\square$

2.1. Ramificación de la aplicación cociente

Sea G un grupo finito con acción holomorfa y efectiva actuando sobre la superficie de Riemann compacta X. Se considera la proyección natural $\pi : X \mapsto X/G$ y un punto rama de π, sea $y \in X/G$ entonces:

$$\pi^{-1}(y) = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_s\}$$

Para algún $i = 1, 2, 3, ..., s$, x_i es un punto de ramificación, además todas las preimágenes de y mediante π están en la misma órbita $G \,.\, x_i =$

$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_s\}$, luego sus subgrupos estabilizadores son conjugados, en particular todos estos estabilizadores tienen el mismo número de elementos $|G_{x_i}| = r$; por último el número s de puntos de la órbita es igual al índice del grupo estabilizador $|G_p||G \cdot p| = |G|$ así $s = \frac{|G|}{r}$, luego por las condiciones anteriores se tiene que $mult_{x_i}(\pi) = |G_{x_i}| = r$.

Corolario 2.11. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta X, y $\pi : X \mapsto X/G$ la aplicación cociente. Si existen k puntos rama $\{y_1, y_2, y_3, ..., y_k\}$ en X/G con multiplicidad $mult_{y_i}\pi = r_i$ y $|\pi^{-1}(y_i)| = \frac{|G|}{r_i}$. Entonces:*

$$2g(X) - 2 = |G| \left(2g(X/G) - 2 + \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) \right)$$

Demostración. Aplicando la fórmula de Hurwitz se obtiene:

$$2g(X) - 2 = deg(\pi)(2g(X/G) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(\pi) - 1]$$

$$2g(X) - 2 = |G| \left(2g(X/G) - 2\right) + \sum_{i=1}^{k} (r_i - 1) \frac{|G|}{r_i}$$

$$2g(X) - 2 = |G| \left(2g(X/G) - 2 + \sum_{i=1}^{k} (r_i - 1) \frac{1}{r_i} \right)$$

$$2g(X) - 2 = |G| \left(2g(X/G) - 2 + \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) \right)$$

□

El siguiente lema facilita la búsqueda de los r_i incluidos en la fórmula de Hurwitz.

Lema 2.12. *Sean k enteros $r_1, r_2, r_3, ..., r_k$ con $r_i \geq 2$, y se considera $R = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right)$.*

a) $$R < 2 \Leftrightarrow k, \; \{r_i\} = \begin{cases} k = 1, & \textit{para todo} \;\; r_1 \\ k = 2, & \textit{para todo} \;\; r_1, \; r_2 \\ k = 3, & \{r_i\} = \{2, 2, \; \textit{para todo} \;\; r_3\}; \; \textit{o} \\ k = 3, & \{r_i\} = \{2, 3, 3\}, \; \{2, 3, 4\}, \; \textit{o} \; \{2, 3, 5\}. \end{cases}$$

b) $R = 2 \Leftrightarrow k,\ \{r_i\} = \begin{cases} k = 3, & \{r_i\} = \{2,3,6\}\ \{2,4,4\},\ o\ \{3,3,3\};\ o \\ k = 4, & \{r_i\} = \{2,2,2,2\}. \end{cases}$

c) $R > 2 \Rightarrow R \geq 2 + \frac{1}{42}$, *que se alcanza en* $k = 3, \{r_i\} = \{2,3,7\}$

Definición 2.13. *Sea* $\pi : X \mapsto X/G$ *la proyección canónica. El vector* $(g(X/G) : r_1, r_2, ..., r_k)$ *donde* r_i *es la multiplicidad de los puntos que pertenecen a* $\pi^{-1}(\{y_i\})$ *con* y_i $i = 1, 2, ..., k$ *un punto rama, se denomina* ***vector de datos de ramificación de G en X***.

Definición 2.14. *Un arreglo* $(a_1, a_2, ..., a_{g(X/G)}, b_1, b_2, ..., b_{g(X/G)}, c_1, c_2, ..., c_k)$ *de elementos de* G *es llamado un vector de datos de ramificación* $(g(X/G) : r_1, r_2, ..., r_k)$ *si se satisface:*

1. *G es generado por los elementos* $(a_1, a_2, ..., a_{g(X/G)}, b_1, b_2, ..., b_{g(X/G)}, c_1, c_2, ..., c_k)$.
2. $|c_i| = r_i$
3. $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}[a_i, b_i]\prod_{j=1}^{k} c_j = 1$

donde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.

Cuando $g(X/G) = 0$ *el vector generador es simplemente* $(c_1, c_2, ..., c_k)$ *con vector de datos de ramificación* $(0 : r_1, r_2, ..., r_k)$.

El siguiente teorema permite abordar un problema geométrico desde el punto de vista del álgebra y viceversa.

2.2. Teorema de Existencia de Riemann

Teorema 2.15. *Un grupo finito* G *actúa en la superficie* X *de género* g*, con vector de datos de ramificación* $(g(X/G) : r_1, r_2, ..., r_k)$ *si y sólo si se satisface la fórmula de Riemann Hurwitz y* G *tiene vector generador* $(a_1, a_2, ..., a_{g(X/G)}, b_1, b_2, ..., b_{g(X/G)}, c_1, c_2, ..., c_k)$.

Un resultado importante sobre la teoría de superficies de Riemann compactas de género $g \geq 2$ es el orden finito del grupo de automorfismos de dichas superficies, a continuación se da a conocer una cota para el orden de dicho grupo.

2.3. Desigualdad de Hurwitz

Teorema 2.16. *Si G es un grupo finito actuando de manera holomorfa y efectiva en una superficie de Riemann compacta X de género de $g \geq 2$ entonces*

$$|G| \leq 84(g-1).$$

Esto implica que $|Aut(X)| \leq 84(g-1)$. Las superficies de Riemann Compactas X de género $g \geq 2$ que alcanzan la cota $(|Aut(X)| = 84(g-2))$ se denominan superficies de Hurwitz.

A continuación se introducirá el grupo $PSL(2, \mathbb{F}_7)$ que es el segundo grupo simple no abeliano más pequeño con 168 elementos, después del grupo alternante A_5 que tiene orden 60. Este grupo es de gran importancia para este trabajo, pues como se verá más adelante corresponde al grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein.

2.4. Grupo Lineal General $GSL(n, \mathbb{F}_p)$

Definición 2.17. *Sea $\mathbb{F}_p$ el cuerpo con p elementos, donde p es un número primo, se llama **grupo lineal general**, $GL(n, \mathbb{F}_p)$, al grupo de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{F}_p$ con la operación de multiplicación de matrices, es decir:*

$$GL(n, \mathbb{F}_p) = \{A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}_p^{n \times n} : det(A) \in \mathbb{F}_p^*\}$$

Proposición 2.18. *El número de elementos del grupo lineal general $GL(n, \mathbb{F}_p)$*

$$|GL(n, \mathbb{F}_p)| = \prod_{k=0}^{n-1} (p^n - p^k)$$

Demostración. Para obtener el orden del grupo $GL(n, \mathbb{F}_p)$, se calcula el número de matrices de $n \times n$ cuyas filas son linealmente independientes. Para ello se tiene que una matriz cumple con está característica, si la primera fila es cualquier vector con entradas en $\mathbb{F}_p$ a excepción del vector cero, así pues hay $p^n - 1$ posibilidades, para la siguiente fila teniendo en cuenta que debe ser linealmente independiente de la primera y se tienen p

múltiplos de la primera fila entonces las posibilidades para la segunda fila son $p^n - p$.

En la $i-$ésima fila deben haber términos independientes de las $i-1$ filas anteriores, como existen p^{i-1} combinaciones lineales de las primeras $i-1$ filas entonces existen $p^n - p^{i-1}$ posibilidades para la i-ésima fila.

Luego la cantidad de matrices invertibles son $(p^n-1)(p^n-p)...(p^n-p^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1}(p^n - p^k)$. $\square$

Un subgrupo importante de $GL(n, \mathbb{F}_p)$ es conocido como grupo lineal especial denotado por $SL(n, \mathbb{F}_p)$, este subgrupo corresponde al núcleo del homomorfismo de grupos.

$$det : GL(n, \mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p^*$$

$SL(n, \mathbb{F}_p) = ker(det) = \{A \in GL(n, \mathbb{F}_p) : \ det(A) = 1\}$ es un subgrupo normal de $GL(n, \mathbb{F}_p)$ y dado que el determinante es un epimorfismo de grupo.

$$|SL(n, \mathbb{F}_p)| = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(p^n - p^k)}{p-1}$$

Observación 2.19. *El centro Z_0 de $GL(n, \mathbb{F}_p)$ está formado por todas las matrices escalares de la forma λI_n donde $\lambda \in \mathbb{F}_p^*$ e I_n es la matriz identidad. Así el centro de $SL(n, \mathbb{F}_p)$ es igual a $Z_0 \cap SL(n, \mathbb{F}_p)$ y se obtiene como resultado a las matrices escalares λI_n donde $\lambda^n = 1$.*

El **grupo lineal especial proyectivo** $PSL(n, \mathbb{F}_p)$ es el grupo cociente entre $SL(n, \mathbb{F}_p)$ y su centro, es decir:

$$SL(n, \mathbb{F}_p)/Z(SL(n, \mathbb{F}_p)) = PSL(n, \mathbb{F}_p)$$

Note que el orden de este grupo es igual a $|PSL(n, \mathbb{F}_p)| = \frac{|SL(n, \mathbb{F}_p)|}{|Z(SL(n, \mathbb{F}_p))|}$, además para $p > 3$ se tiene que el grupo es simple.

2.5. Grupo Lineal Proyectivo $PSL(2,\mathbb{F}_7)$

Utilizando la propiedad anterior se tiene que $|SL(2,\mathbb{F}_7)| = \frac{(7^2-1)(7^2-7)}{7-1} = \frac{2016}{6} = 336$ y ya que el centro del grupo de $SL(2,\mathbb{F}_7)$ está formado por las matrices escalares λI_2, donde I_2 es la matriz identidad, entonces, el grupo $PSL(2,\mathbb{F}_7)$ el cual está definido por el cociente $SL(2,\mathbb{F}_7)/_{\{I_2,-I_2\}}$ tiene orden igual a 168.

$$|PSL(2,\mathbb{F}_7)| = \frac{|SL(2,\mathbb{F}_7)|}{|\{I_2,-I_2\}|} = \frac{336}{2} = 168.$$

Proposición 2.20. *El grupo lineal especial proyectivo $PSL(n,\mathbb{F}_p)$ es un grupo simple.*

Demostración. Se supone por contradicción que el grupo $G = PSL(2,\mathbb{F}_7)$ no es simple, así existe un subgrupo N normal no trivial maximal, note que $|G| = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Por propiedad se tiene que G/N es simple y a lo más su orden es $\frac{168}{2} = 84$; y ya que el único grupo no abeliano simple con orden menor a 84 es A_5 y el orden $|A_5| = 60$ no divide a $|G| = 168$, entonces el grupo simple G/N es abeliano; por lo tanto sus posibles órdenes son 2, 3 y 7 y así el grupo es cíclico.

Por otra parte, si $M \in SL(2,7)$ entonces $[M]$ es la clase $MZ(SL(2,\mathbb{F}_7))$ correspondiente en $PSL(2,\mathbb{F}_7)$.
Los elementos $x, y \in PSL(2,\mathbb{F}_7)$ dados por
$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, para los cuales se verifica, $x^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $y^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$ tienen orden 7.
Mediante un cálculo sencillo se puede probar que $u = xy^2x$ es un elemento de orden 3

$$u = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Se observa que $|\langle x\rangle| = |\langle y\rangle| = 7$ y $y \notin \langle x\rangle$ luego $G = PSL(2,\mathbb{F}_7)$ tiene al menos dos $7-$subgrupos de Sylow.

- Se supone que $|G/N| = 2$ entonces N es un subgrupo normal de orden $|N| = \frac{|G|}{2} = \frac{168}{2} = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ e índice 2. Por teorema de Sylow el número n_7 de $7-$ subgrupos de Sylow es 1, así como $N \trianglelefteq G$ entonces los conjugados de los $7-$ subgrupos de Sylow de G están en el subgrupo N. Luego G tendría un único $7-$ subgrupos de sylow lo cual no es posible por la observación realizada anteriormente.
- Si $|G/N| = 3$ se tiene que $|N| = \frac{|G|}{2} = \frac{168}{3} = 56 = 2^3 \cdot 7$ y como $N \trianglelefteq G$ entonces contiene a todos los $7-$subgrupos de Sylow de G, luego x y y pertenecen a alguno de estos, con lo cual $x, y \in N$, así $u \in N$ pero esto no es posible pues $|u| = 3$ no divide a $|N| = 56$.
- El último caso es $|G/N| = 7$ entonces $|N| = \frac{|G|}{7} = \frac{168}{7} = 24 = 2^3 \cdot 3$, por teorema de Sylow N tiene 1 ó 3 - $2-$subgrupos de Sylow en N y son los únicos en G ya que $N \trianglelefteq G$.

  Si se supone que G tiene un único $2-$subgrupos de Sylow S, entonces como $S \trianglelefteq G$ y $|G/S| = 21 = 3 \cdot 7$ tiene un único $7-$subgrupos de Sylow P con índice en G/S igual a $[G/S : P] = \frac{21}{7} = 3$, entonces P da lugar a un subgrupo normal de G con índice 3, pero ya se ha descartado está posibilidad.

  Así G debe tener tres $2-$subgrupos de Sylow, sea Q un $2-$subgrupos de Sylow de G, el índice del $N_G(Q)$ es 3 ya que $[G : N_G(Q)] = |Syl_3(G)|$ como se ha descartado la existencia de subgrupos normales de índice 3, $N_G(Q)$ no es normal en G, sin embargo se sabe que la acción de G en $N_G(Q)$ induce un homomorfismo ϕ de G en S_3. Por el primer teorema de isomorfismo para grupos existe un isomorfismo entre G y $Im \leq S_3$, lo cual no es posible pues $|S_3| = 6$ y $|G| = 168$.

Por lo tanto, el supuesto es falso y $G = PSL(2, \mathbb{F}_7)$ es simple como se quería probar. $\square$

Capítulo 3

Cuártica de Klein

La Cuártica de Klein es una superficie de Riemann (curva proyectiva suave, ver [Ejemplo 1.2.3]) la cual ha sido estudiada en diferentes áreas de la matemática como variable compleja, álgebra, teoría de números, entre otras. Está es una superficie de Riemann compacta de género $g = 3$, entonces el orden de su grupo de automorfismos es finito, además alcanza la cota de Hurwitz. Existen infinitas superficies que alcanzan la cota para el orden del grupo (llamadas superficies de Hurwitz). La Cuártica de Klein es la superficie de Hurwitz de menor género y es también la que ha sido más estudiada. Motivados por las distintas características de la Cuártica de Klein y en particular porque su grupo de automorfismos alcanza el mayor orden posible, se estudiará su grupo de automorfismos el cual es isomorfo al grupo $PSL(2, \mathbb{F}_7)$ de orden 168.

La Cuártica de Klein X es una curva proyectiva contenida en $\mathbb{CP}^2$ definida por el polinomio homogéneo de grado $d = 4$, $F((x, y, z)) = x^3y + y^3z + z^3x$, esto es,

$$X = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : F([x : y : z]) = x^3y + y^3z + z^3x = 0\}$$

X es conexa ya que F es irreducible en $\mathbb{C}[x, y, z]$ (ver [7]).
X es una curva proyectiva suave puesto que su polinomio asociado es no singular, ya que

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = F(x, y, z) = 0$$

No tiene solución en $\mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, en efecto, si se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x^3y + y^3z + z^3x = 0 & (1) \\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 3x^2y + z^3 = 0 & (2) \\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 3y^2z + x^3 = 0 & (3) \\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 3z^2y + y^3 = 0 & (4) \end{cases}$$

de (2) y (3) se obtiene $z^3 = -3x^2y$, $y^2z = -\frac{x^3}{3}$ reemplazando en (1) se tiene:

$$x^3y + y(-\frac{x^3}{3}) + (-3x^2y)x = 0$$

$$x^3y - \frac{x^3y}{3} - 3x^3y = 0$$

$$3x^3y - x^3y - 9x^3y = 0$$

$$-7x^3y = 0$$

Luego existen dos posibilidades $x = 0$ ó $y = 0$.

- Si $x = 0$ entonces reemplazando en (2) se obtiene $z = 0$ y de (3) se obtiene $y = 0$, lo cual no es posible pues se busca una solución en $\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$.
- Si $y = 0$ entonces reemplazando en (2) se obtiene $z = 0$ y de (3) se obtiene $x = 0$ nuevamente la única solución es $(0,0,0)$.

Así se concluye que el sistema de ecuaciones no tiene solución en $\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$, por lo tanto X es una curva proyectiva suave.

3.1. Estructura compleja de la Cuártica de Klein

Considere la Cuártica de Klein definida por el conjunto:

$$X = \{[x:y:z] \in \mathbb{CP}^2 : F([x:y:z]) = x^3y + y^3z + z^3x = 0\}$$

En el Ejemplo 1.2.3 se describen en $\mathbb{CP}^2$, los abiertos que lo recubren $U_0 = \{[x:y:z] : x \neq 0\}$, $U_1 = \{[x:y:z] : y \neq 0\}$, $U_2 = \{[x:y:z] : z \neq 0\}$ y las curvas afines $X_i = X \cap U_i$, definidas de la siguiente manera:

$X_0 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : f(a,b) = F([1:a:b]) = a + a^3b + b^3 = 0\}$

$X_1 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : f(a,b) = F([a:1:b]) = a^3 + b + b^3 a = 0\}$

$X_2 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : f(a,b) = F([a:b:1]) = a^3 b + b^3 + a = 0\}$

Además los homeomorfismos φ_i $i = 0,1,2$ de U_i $i = 0,1,2$, en $\mathbb{C}^2$ están dados por:

$\varphi_0([x:y:z]) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ con inversa $\varphi_0^{-1}(a,b) = [1:a:b]$,

$\varphi_1([x:y:z]) = \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$ con inversa $\varphi_1^{-1}(a,b) = [a:1:b]$,

$\varphi_2([x:y:z]) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ con inversa $\varphi_2^{-1}(a,b) = [a:b:1]$.

Haciendo uso de lo anterior, para cualquier punto de la Cuártica de Klein $p \in X$ se podrá definir al menos una carta, así,

1. Sea $p = [x:y:z] \in X$ con $z \neq 0$ luego $p \in X_2$ asociada al polinomio $f(a,b) = F([a:b:1]) = a^3 b + b^3 + a = 0$ donde $a = \frac{x}{z}$ y $b = \frac{y}{z}$ con $\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}$ o $\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}$, no nulas simultáneamente en X_2.

   - Suponga que $\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = a^3 + 3b^2 \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita existe una función holomorfa

     $$g_p(\omega) = \sqrt[3]{\frac{-\omega}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \frac{\omega^9}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-\omega}{2} - \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \frac{\omega^9}{27}}}$$

     en un entorno U_p de a tal que $b = g_p(a)$.

     luego se establece una carta ϕ_p en $p = [x:y:z] \in X$ como

     $\phi_p\left(\left[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right]\right) = \frac{x}{z}$ con inversa $\phi_p^{-1}(\omega) = [\omega : g_p(\omega) : 1]$.

   - Por otra parte, si $\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 3a^2 b + 1 \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita existe una función holomorfa

     $$g_p^{'}(\omega) = \sqrt[3]{\frac{-\omega^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4} + \frac{\omega}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-\omega^2}{2} - \sqrt{\frac{\omega^4}{4} + \frac{\omega}{27}}}$$

     en un entorno $U_p^{'}$ de b tal que $a = g_p^{'}(b)$.
     Así se establece una carta $\phi_p^{'}$ en $p = [x:y:z] \in X$ como

$$\phi'_p\left(\left[\frac{x}{z}:\frac{y}{z}:1\right]\right)=\tfrac{y}{z}\ \text{ con inversa } {\phi'_p}^{-1}(\omega)=[g'_p(\omega):\omega:1].$$

2. Para $z=0$ se tiene $F[x:y:0]=x^3y=0$, luego $x=0$ o $y=0$ obteniendo los puntos $[1:0:0]$ o $[0:1:0]$.

- Sea $p=[1:0:0]\in X_0=X\cap U_0$ asociada al polinomio $f(a,b)=F([1:a:b])=a+a^3b+b^3=0$ donde $a=\frac{y}{x}$, $b=\frac{z}{x}$ y

  $\frac{\partial f(p)}{\partial a}=1+3a^2b\neq 0$, pues $\frac{\partial f(0,0)}{\partial a}=1$.

  $\frac{\partial f(p)}{\partial b}=a^3+3b^2=0$, pues $\frac{\partial f(0,0)}{\partial b}=0$.

  Así, por el teorema de la función implícita se puede garantizar la existencia de una función holomorfa

  $$h_1(\omega)=\sqrt[3]{\frac{-\omega^2}{2}+\sqrt{\frac{\omega^4}{4}+\frac{\omega}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-\omega^2}{2}-\sqrt{\frac{\omega^4}{4}+\frac{\omega}{27}}}$$

  holomorfa en una vecindad de b tal que $a=h_1(b)$. Por lo tanto la carta en el punto $p=[1:0:0]\in X_0$ está dada por:

  $$\phi_1\left[1:\frac{y}{x}:\frac{z}{x}\right]=\tfrac{z}{x}\ \text{ con inversa } \phi_1^{-1}(\omega)=[1:h_1(\omega):\omega].$$

- En el punto $p=[0:1:0]\in X_1=X\cap U_1$, que es la curva afín asociada al polinomio $f(a,b)=F([a:1:b])=a^3+b+b^3a=0$, se tiene:

  $\frac{\partial f(p)}{\partial a}=3a^2+b^3=0$, pues $\frac{\partial f(0,0)}{\partial a}=0$,

  $\frac{\partial f(p)}{\partial b}=1+3b^2a\neq 0$, pues $\frac{\partial f(0,0)}{\partial b}=1$.

  El teorema de la función implícita garantiza la existencia de una función holomorfa

  $$h_2(\omega)=\sqrt[3]{\frac{-\omega^2}{2}+\sqrt{\frac{\omega^4}{4}+\frac{\omega}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-\omega^2}{2}-\sqrt{\frac{\omega^4}{4}+\frac{\omega}{27}}}$$

  en un entorno de a tal que $b=h_2(a)$, luego la carta definida en $p=[0:1:0]$ es:

  $$\phi_2\left[\frac{x}{y}:1:\frac{z}{y}\right]=\tfrac{x}{y}\ \text{ con inversa } \phi_2^{-1}(\omega)=[\omega:1:h_2(\omega)].$$

El conjunto definido por las cartas descritas anteriormente forman un atlas complejo para X.

3.2. Grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein

El género de las curvas proyectivas suaves fue descrito en la observación 1.31 y depende únicamente del grado del polinomio homogéneo, así el género de la Cuártica de Klein es,

$$g(X) = \frac{(4-2)(4-1)}{2} = 3.$$

Por otra parte, la desigualdad de Hurwitz establece una cota para el orden del grupo de automorfismos, a saber $|Aut(X)| \leq 84(g(X)-1)$ y dado que $g(X) = 3$ entonces $|Aut(X)| \leq 168$. En este capítulo se muestra que el orden del grupo de automorfismos de X es 168, que es isomorfo a $PSL(2, \mathbb{F}_7)$ y se exhiben generadores geométricos del mismo grupo.

Se consideran algunos ejemplos de automorfismos de la Cuártica de Klein que serán de gran importancia para encontrar el grupo de automorfismos $Aut(X)$.

Ejemplo 3.1. *Sea $\zeta = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ una raíz primitiva séptima de la unidad, $[x : y : z] \in X$ y la aplicación $\delta : X \mapsto X$ dada por $\delta([x : y : z]) = [\zeta x : \zeta^4 y : \zeta^2 z]$ tiene orden 7, dado que, $\delta^7([x : y : z]) = [x : y : z]$ como $\delta \neq 1$ y 7 es primo entonces $|\delta| = 7$ (esto permite verificar que δ es biyectivo con $\delta^{-1} = \delta^6$).*

δ es un automorfismo de X, puesto que se puede verificar que es holomorfa, en efecto,
sea $p = [x : y : z] \in X$ tal que $z \neq 0$ entonces existen ϕ_p y $\phi_p^{'}$ posibles cartas en un entorno de p. Además las posibles cartas definidas en $\delta(p)$ son $\phi_{\delta(p)}$, $\phi_{\delta(p)}^{'}$. Algunas de las posibles combinaciones son :

1. *$(\phi_{\delta(p)} \circ \delta \circ \phi_p^{-1})(\omega) = \phi_{\delta(p)}(\delta([\omega : g_p(\omega) : 1])) = \phi_{\delta(p)}([\zeta\omega : \zeta^4 g_p(\omega) : \zeta^2] = \zeta\omega$, una función holomorfa en $\phi_p(p)$.*

2. $(\phi'_{\delta(p)} \circ \delta \circ \phi_p^{-1})(\omega) = \phi'_{\delta(p)}(\delta([\omega : g_p(\omega) : 1])) = \phi'_{\delta(p)}([\zeta\omega : \zeta^4 g_p(\omega) : \zeta^2]) = \zeta^4 g_p(\omega)$, *una función holomorfa en* $\phi_p(p)$.

Para $z = 0$ *se tienen los puntos* $p_1 = [1 : 0 : 0] = \delta(p_1)$ *y* $p_2 = [0 : 1 : 0] = \delta(p_2)$ *donde se han definido las cartas* ϕ_1 *y* ϕ_2, *respectivamente,así las posibles combinaciones son*

1. $(\phi_1 \circ \delta \circ \phi_1^{-1})(\omega) = \phi_1(\delta([1 : h_1(\omega) : \omega])) = \phi_1([\zeta : \zeta^4 h_1(\omega) : \zeta^2\omega] = \zeta^2\omega$, *función holomorfa en* $\phi_1(p_1)$.

2. $(\phi_2 \circ \delta \circ \phi_2^{-1})(\omega) = \phi_2(\delta([\omega : 1 : h_2(\omega)])) = \phi_2([\zeta\omega : \zeta^4 : \zeta^2 h_2(\omega)] = \zeta\omega$, *función holomorfa en* $\phi_2(p_2)$.

En todos los casos siempre se obtiene una función holomorfa, por lo tanto δ *es un automorfismo de orden* 7.

Ejemplo 3.2. *La aplicación* $U : X \mapsto X$ *dada por* $U([x : y : z]) = [y : z : x]$ *tiene orden* 3, *ya que* $U^3([x : y : z]) = [x : y : z]$ *y como* 3 *es un número primo entonces* $|U| = 3$, *(esto permite verificar que* U *es biyectivo con* $U^{-1} = U^2$*).*

U *es un automorfismo de* X, *en efecto, sea* $p = [x : y : z] \in X$ *con* $z \neq 0$, ϕ_p *y* ϕ'_p *son las posibles cartas definidas en un entorno de* p *y* $\phi_{U(p)}$, $\phi'_{U(p)}$, ϕ_2 *son las posibles cartas definidas en un entorno de* $U(p)$*; algunas de las posibles combinaciones son:*

1. $(\phi_{U(p)} \circ U \circ \phi_p'^{-1})(\omega) = \phi_{U(p)}(U([g'_p(\omega) : \omega : 1])) = \phi_{U(p)}([\omega : 1 : g'_p(\omega)] = \omega$ *una función holomorfa en* $\phi'_p(p)$.

2. $(\phi_2 \circ U \circ \phi_p'^{-1})(\omega) = \phi_2(U([g'_p(\omega) : \omega : 1])) = \phi_2([\omega : 1 : g'_p(\omega)]) = \omega$ *una función holomorfa en* $\phi'_p(p)$.

Para $z = 0$ *se tiene los puntos* $p_1 = [1 : 0 : 0]$ *y* $p_2 = [0 : 1 : 0]$ *en donde están definidas las cartas* ϕ_1, ϕ_2 *respectivamente,* $\phi'_{U(p)}$ *y* ϕ_1 *son las cartas definidas en* $U(p_1)$, $U(p_2)$ *respectivamente.*

Si $p_1 = [1 : 0 : 0]$ *entonces*

$(\phi'_{U(p_1)} \circ U \circ \phi_1^{-1})(\omega) = \phi'_{U(p_1)}(U([1 : h_1(\omega) : \omega])) = \phi'_{U(p_1)}([h_1(\omega) : \omega : 1]) = \omega$ *una función holomorfa en* 0.

Si $p_2 = [0 : 1 : 0]$ *entonces*

$(\phi_1 \circ U \circ \phi_2^{-1})(\omega) = \phi_1(U([\omega : 1 : h_2(\omega)])) = \phi_1([1 : h_2(\omega) : \omega]) = \omega$ *una función holomorfa en* 0.

Obteniendo en todos los casos posibles una función holomorfa, entonces se concluye que U *es un automorfismo de orden* 3 *de la Cuártica de Klein .*

Ejemplo 3.3. *Sea* $\zeta = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ *una raíz primitiva séptima de la unidad. La matriz* $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$

$$A = \frac{i}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 \\ \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 \\ \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal, en efecto la norma de cada vector formado por las columnas de la matriz es 1, *pues*

$(\zeta - \zeta^6)^2 + (\zeta^2 - \zeta^5)^2 + (\zeta^4 - \zeta^3)^2$

$= \zeta^2 - 2\zeta^7 + \zeta^5 + \zeta^4 - 2\zeta^7 + \zeta^3 + \zeta - 2\zeta^7 + \zeta^6$

$= \zeta^2 - 2 + \zeta^5 + \zeta^4 - 2 + \zeta^3 + \zeta - 2 + \zeta^6$

$= 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 - 7$

$= \frac{1-\zeta^7}{1-\zeta} - 7 = -\frac{0}{1-\zeta} - 7 = -7$

Y el producto punto de dos vectores diferentes es

$(\zeta - \zeta^6)(\zeta^2 - \zeta^5) + (\zeta^2 - \zeta^5)(\zeta^4 - \zeta^3) + (\zeta^4 - \zeta^3)(\zeta - \zeta^6)$

$= \zeta^3 - \zeta^6 - \zeta + \zeta^4 + \zeta^6 - \zeta^5 - \zeta^2 + \zeta + \zeta^5 - \zeta^3 - \zeta^4 + \zeta^2 = 0$

La matriz $A \cdot A^T = I$ *pero dado que* $A = A^T$ *entonces* $A^2 = I$, *esto es* A *es una matriz de orden* 2.

Luego, la aplicación $\tau[x:y:z] = A(x,y,z) = [ax+by+cz : bx+cy+az : cx+ay+bz]$ *donde* A *es la matriz anterior, tiene orden* 2 *con* $a = \zeta - \zeta^6$, $b = \zeta^2 - \zeta^5$ *y* $c = \zeta^4 - \zeta^3$ *(esto permite verificar que* τ *es biyectivo con* $\tau^{-1} = \tau$*).*

τ *es un automorfismo ya que es una función biyectiva y holomorfa, en efecto, para* $p = [x:y:z] \in X$ *con* $z = 0$ *, se tiene* $p_1 = [1:0:0]$ *o* $p_2 = [0:1:0]$ *en los cuales están definidas las cartas* ϕ_1, ϕ_2 *respectivamente y en* $\tau(p_1)$, $\tau(p_2)$ *estan definidas las cartas* $\phi_{\tau(p_1)}$, $\phi_{\tau(p_2)}$,$\phi'_{\tau(p_1)}$ *y* $\phi'_{\tau(p_2)}$, *algunas posibles combinaciones son:*

1. $(\phi_{\tau(p)} \circ \tau \circ \phi_1^{-1})(\omega) = \phi_{\tau(p)}(\tau([1:h_1(\omega):\omega])) = \phi_{\tau(p)}([a+bh_1(\omega)+c\omega : b+ch_1(\omega)+a\omega) : c+ah_1(\omega)+b\omega] = a+bh_1(\omega)+c\omega$ *se obtiene una función holomorfa en* $\phi_1(p)$

2. $(\phi'_{\tau(p)} \circ \tau \circ \phi_2^{-1})(\omega) = \phi'_{\tau(p)}(\tau([\omega:1:h_2(\omega)])) = \phi'_{\tau(p)}([a\omega+b+ch_2(\omega) : b\omega+c+ah_2(\omega) : c\omega+a+bh_2(\omega)]) = b\omega+c+ah_2(\omega)$ *que es una función holomorfa en* $\phi_2(p)$.

De forma análoga se realizan las demás posibles combinaciones para $z \neq 0$ *obteniendo siempre una función holomorfa, por lo tanto la aplicación* τ *es un automorfismo de orden dos.*

Existen características importantes acerca de los automorfimos δ, τ y U, que se muestran en el siguiente lema las cuales son de gran utilidad para este trabajo.

Lema 3.4. *Sean* τ, U *y* δ *los automorfismos de la Cuártica de Klein dados por* $\delta([x:y:z]) = [\zeta x : \zeta^4 y : \zeta^2 z]$, $U([x:y:z]) = [y:z:x]$ *y* $\tau([x:y:z]) = [ax+by+cz : bx+cy+az : cx+ay+bz]$ *donde* $a = \zeta - \zeta^6$, $b = \zeta^2 - \zeta^5$ *y* $c = \zeta^4 - \zeta^3$, *con* $\zeta = e^{\frac{2\pi}{7}i}$

Entonces verifican las siguientes propiedades:

1. $\tau U \tau^{-1} = U^2$

   Demostración. Sea $[x:y:z] \in X$ entonces

$\tau U\tau^{-1}([x:y:z]) = \tau(U([[ax+by+cz:bx+cy+az:cx+ay+bz]]))$

$= \tau(\frac{i}{\sqrt{7}}[bx+cy+az:cx+ay+bz:ax+by+cz])$

$= \frac{-1}{7}[abx+acy+a^2z+c^2x+acy+bcz+a^2x+aby+acz:bcx+c^2y+acz+acx+a^2y+abz+abx+b^2y+bcz:bcx+c^2y+acz+acx+a^2y+abz+abx+b^2y+bcz]$

$= \frac{-1}{7}[ab(x+y)+ac(x+y)+bc(x+y)+(a^2+b^2+c^2)z:bc(y+z)+ab(y+z)+ac(y+z)+(a^2+b^2+c^2)x:bc(x+z)+ac(x+z)+ab(x+z)+(a^2+b^2+c^2)y]$

$= \frac{-1}{7}[(ab+ac+bc)(x+y)+(a^2+b^2+c^2)z:(bc+ab+ac)(y+z)+(a^2+b^2+c^2)x:(bc+ac+ab)(x+z)+(a^2+b^2+c^2)y]$

Realizando las siguientes operaciones se obtiene

$ab+ac+bc = (\zeta-\zeta^6)(\zeta^2-\zeta^5)+(\zeta-\zeta^6)(\zeta^4-\zeta^3)+(\zeta^2-\zeta^5)(\zeta^4-\zeta^3)$
$ab+ac+bc = \zeta^3-\zeta^6-\zeta+\zeta^4+\zeta^5-\zeta^4-\zeta^3+\zeta^2+\zeta^6-\zeta^5-\zeta^2+\zeta = 0$

$a^2+b^2+c^2 = (\zeta-\zeta^6)^2+(\zeta^2-\zeta^5)^2+(\zeta^4-\zeta^3)^2 = \zeta^2-2+\zeta^5+\zeta^4-2+\zeta^3+\zeta-2+\zeta^6$
$a^2+b^2+c^2 = 1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4+\zeta^5+\zeta^6-7 = \frac{1-\zeta^7}{1-\zeta}-7 = -7$

Así, $\tau U\tau^{-1}([x:y:z]) = \frac{-1}{7}[-7z:-7x:-7y] = [z:x:y]$, además $U^2[x:y:z] = U(U[x:y:z])) = U([y:z:x]) = [z:x:y]$.

Por lo tanto al comparar los resultados se obtiene

$$\tau U\tau^{-1}([x:y:z]) = U^2([x:y:z]).$$

$\square$

2. *$U\delta U^{-1} = \delta^4$*

   Demostración. Sea $[x:y:z] \in X$ entonces

   $U\delta U^{-1}([x:y:z]) = U(\delta([z:x:y])) = U([\zeta z:\zeta^4 x:\zeta^2 y]) = [\zeta z:\zeta^4 x:\zeta^2 y].$

   $\delta^4([x:y:z]) = \delta^3([\zeta x:\zeta^4 y:\zeta^2 z]) = \delta^2([\zeta^2 x:\zeta y:\zeta^4 z]) = \delta([\zeta^3 x:\zeta^5 y:\zeta^6 z]) = [\zeta z:\zeta^4 x:\zeta^2 y]$.

   Al comparar los resultados se obtiene

$$U\delta U^{-1}([x:y:z]) = \delta^4([x:y:z])$$

$\square$

3. *Los 49 elementos $\delta^a\tau\delta^b$ con $0 \le a, b \le 6$ son todos distintos.*

   Demostración. Sea $H = \{\delta^i\tau\delta^j : 0 \le i, j \le 6\}$, en H se define la relación $\sim$ de la siguiente manera

$$\delta^k\tau\delta^m \sim \delta^s\tau\delta^n \text{ si sólo si } k = s$$

Esta relación es reflexiva puesto que, $\delta^k\tau\delta^m \sim \delta^k\tau\delta^m$ ya que $k = k$.

La relación es simétrica, dado que, si $\delta^k\tau\delta^m \sim \delta^s\tau\delta^n$ entonces $k = s$ y $\delta^s\tau\delta^n \sim \delta^k\tau\delta^m$

La relación es transitiva, ya que, $\delta^k\tau\delta^m \sim \delta^s\tau\delta^n$ y $\delta^s\tau\delta^n \sim \delta^t\tau\delta^p$, entonces $k = s$ y $s = t$ luego $k = t$, así, $\delta^k\tau\delta^m \sim \delta^t\tau\delta^p$.

Por lo tanto, la relación $\sim$ es de equivalencia. La clase del elemento $\delta^k\tau\delta^s$ en H se denotará por $B_k = \{\delta^k\tau\delta^i \ , \ \ 0 \leq i \leq 6\}$ con $k = 0, 1, 2, ..., 6$ fijo, esta clase posee 7 elementos distintos, es decir, $|B_k| = 7$, en efecto, si $\delta^k\tau\delta^i, \delta^k\tau\delta^j$ son dos elementos de B_k y $\delta^k\tau\delta^i = \delta^k\tau\delta^j$ entonces $\delta^i = \delta^j$ e $i = j$.

Los B_k forman una partición de H, luego $B_k \cap B_s = \emptyset$ para $k \neq s$, y dado que $|B_k| = 7$ para todo $k = 0, 1, 2, ..., 6$ entonces se tiene que $|H| = 49$. $\square$

Las propiedades que satisfacen los automorfismos mencionados conllevan al siguiente lema.

Lema 3.5. *El subgrupo cíclico generado por δ no es normal en $G = \langle \delta, \tau, U \rangle$.*

Demostración. Si $\langle \delta \rangle \trianglelefteq G$ entonces $\tau\delta\tau \in \langle \delta \rangle$ lo que implica que para algún $i \in \mathbb{N}$ se tiene:

$\tau\delta\tau = \delta^i$ entonces $\tau\delta = \delta^i\tau$

Luego $\delta^a\tau\delta^b = \delta^a(\delta^i\tau)\delta^{b-1} = ... = \delta^{a+bi}\tau$ lo cual contradice el hecho de que hay 49 elementos de la forma $\delta^a\tau\delta^b$ para $0 \leq a, b \leq 6$(Lema 3.4 item 3). Por lo tanto, el supuesto es falso y $\langle \delta \rangle$ no es normal en G. $\square$

Proposición 3.6. *Sea $X = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : F([x : y : z]) = x^3y + y^3z + z^3x = 0\}$ el orden del grupo de automorfismos de X, $Aut(X)$, es* 168.

Demostración. Es claro que $G = \langle \delta, \tau, U \rangle$ tiene elementos de orden $2, 3$ y 7 esto implica que 42 divide a $|G|$, luego los posibles valores de $|G|$ son $42, 84, 126$, o 168. Sin embargo los tres primeros casos se puede descartar, usando los teorema de Sylow, si el número de $7-$subgrupos de Sylow de G es n_7 entonces $n_7|_{|G|}$ y $n_7 \cong 1 \ mod \ 7$ de donde $n_7 = 1$; esto es existe un único $7-$ subgrupo de Sylow P normal en G el cual coincide con $\langle \delta \rangle$, esto contradice el lema 3.5 por lo tanto $|G| = 168$. Como $G \leq Aut(X)$, y $|Aut(X)| \leq 168$ entonces $Aut(X) = G = \langle \delta, \tau, U \rangle$.

□

Como se vio en el capítulo 2 el grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein $Aut(X)$ actúa en la Cuártica de Klein X produciendo una nueva superficie $X/Aut(X)$ de género 0, en efecto, sea $G = Aut(X)$, por la fórmula de Riemann Hurwitz,

$$2g(X) - 2 = |G| \left(2g(X/G) - 2 + \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) \right)$$

Si $R = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right)$ y $g(X/G) \geq 1$ entonces

$$4 = 168(2g(X/G) - 2 + R) \geq 168R,$$

de donde $R \leq \frac{1}{42}$ lo cual es imposible. Por lo tanto $g(X/G) = 0$.

Así la ecuación Riemann Hurwitz queda

$$4 = 168 \left(-2 + \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) \right)$$

$$\frac{1}{42} + 2 = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right)$$

$$\frac{85}{42} = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right)$$

$r_i | 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, es claro que $k > 2$ y $k \leq 4$ pues si $k \geq 5$

$$\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) \geq 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} > \frac{85}{42}$$

Si $k=4$ entonces $2+\dfrac{1}{42}=4-\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}+\dfrac{1}{r_4}\right)$ esto es,

$$\frac{83}{42}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}$$

Así $r_i=2$ para todo i no es posible pues $2>\frac{83}{42}$, si $r_1=r_2=r_3=2$ y $r_4=3$ entonces

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{9+2}{6}=\frac{11}{6}<\frac{83}{42}$$

De modo que $k\neq 4$. Si $k=3$, entonces $\frac{85}{42}-3=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$, esto es

$$\frac{41}{42}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$$

es claro que $r_i=2$ para todo i o $r_i=3$ para todo i no se tiene, de igual forma $r_i\geq 4$ para todo i no es posible, así al menos un r_i tiene que ser menor que 4.

Si $r_1=2$ entonces $r_2\neq 2$ y $r_3\neq 2$ y

$$\frac{41}{42}-\frac{1}{2}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$$

$$\frac{20}{42}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$$

nuevamente si $r_2\geq 4$ y $r_3\geq 4$ entonces no se cumple la igualdad, de modo que $r_2=3$ y $r_3=7$.

Por lo tanto, el grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein $Aut(X)$, actúa en X, con vector de ramificación $(0,2,3,7)$

Por otro lado por el teorema de existencia de Riemann 2.15 existe un vector generador de $Aut(X)$, de la forma (a,b,c) tal que $|a|=2$, $|b|=3$ y $|c|=7$. En efecto, si se consideran los automorfismos
τ, $V=(\delta\tau)^{-1}$ de orden 3 y δ, el vector (τ,V,δ), es tal que:

$$G=Aut(X)=\left\langle \delta,\tau,V:\delta^7=\tau^2=V^3=1 \text{ donde } \tau V\delta=1\right\rangle.$$

Hasta aquí se conoce el orden del grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein y la descripción geométrica mediante un vector generador, en lo que sigue se determina la estructura del grupo.

3.2.1. El grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein es simple

Teorema 3.7. *El grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein, es un grupo simple.*

Demostración. Suponga que H es un subgrupo propio normal en $G = Aut(X)$. Entonces como $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ y $|H| |_{|G|}$, se consideraran los posibles divisores del orden de H.
Si el orden de H es divisible por 7, entonces H tiene un subgrupo P de orden 7, si P es el único subgrupo de H de orden 7 entonces $P \trianglelefteq G$ puesto que $H \trianglelefteq G$ contiene todos los subgrupos de Sylow de G. Así $P = \langle \delta \rangle \trianglelefteq G$ lo cual contradice el Lema 3.5.

Así H contiene más de un $7-$subgrupo de Sylow de G de hecho, el número de $7-$subgrupo de Sylow de H(o de G) debe ser 8 y $|H| = 2^3 \cdot 7 = 56$ o $|H| = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

- Si $|H| = 56 = 2^3 \cdot 7$, entonces el número de $2-$subgrupo de Sylow de H es 1, sea $Q \trianglelefteq H$ y $|Q| = 2^3$ como H contiene a todos los $2-$subgrupos de Sylow de G, $Q \trianglelefteq G$ luego $\tau \in Q$ subgrupo de H y $U\tau U^{-1} \in H$, luego $U \in H$, dado que, por el lema 3.4 item 1 se tiene $\tau U \tau U^{-1} = U^2 U^{-1} = U$. Pero $|U| = 3$ lo cual es una contradicción puesto que 3 no divide a $|H| = 56$.
- Para el siguiente caso se supone que $|H| = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ como $H \trianglelefteq G$ contiene a todos los $3-$subgrupos de Sylow de G y los $7-$subgrupos de Sylow de G, luego U y $\delta \in H$, $V \in H$, así mediante la combinación entre δ y V se forma el automorfismo τ, luego $\tau \in H$ y H coincide con G pues contiene a sus generadores, lo cual no es posible pues H es subgrupo propio de G.

Con lo anterior se ha demostrado que H no contiene un elemento de orden 7.

Ahora se supone que 3 divide al orden de H, entonces como H es normal en G contiene a todos los $3-$subgrupos de Sylow de G, en particular $U \in H$ y $\delta^{-1}U\delta \in H$ (1).
Por otra parte, se sabe que por el lema 3.4 item 2, $U\delta U^{-1} = \delta^4$, reemplazando en (1) se obtiene:
$\delta^{-1}U\delta = \delta^{-1}\delta^4 U = \delta^3 U \in H$ esto es $\delta^3 U = h_1$ para algún $h_1 \in H$, $\delta^3 = h_1 U^{-1} \in H$ esto implica que $(\delta^3)^5 = \delta \in H$, lo cual es una contradicción pues H no contiene elementos de orden 7.
Por último, se supone que $|H| = 2^k$ con $k = 1, 2,$ ó 3 así el grupo cociente $|G/H| = 2^a \cdot 3 \cdot 7$ con $a \leq 2$, utilizando el teorema de Sylow se obtiene que $n_7 = 1$ en G/H, es decir existe un $7-$subgrupo de Sylow, W, normal en G/H, luego WH es un subgrupo normal de G, pero el orden de $|WH|$ es divisible por 7 lo cual es una contradicción.
De 1), 2) y 3) se concluye que G no contiene ningún subgrupo propio normal, por lo tanto G es simple. $\square$

3.3. Los $p-$subgrupos de Sylow del grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein

Algunas propiedades del grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein $G = Aut(X)$ de orden $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ son:

1. El número de $7-$subgrupos de Sylow de G es 8. Se sabe que n_7 es un divisor de $\frac{168}{7}$ y $n_7 \equiv 1 mod(7)$, es decir $n_7 = 1$ ó $n_7 = 8$. Si fuera $n_7 = 1$ habría un único $7-$subgrupo de Sylow de G y, por lo tanto, sería normal en G. Pero esto no puede ser, porque G es un grupo simple, luego hay 8 subgrupos de Sylow en G cada uno con 6 elementos de orden 7.

2. El número de $3-$subgrupos de Sylow de G es 28. Como G es simple es claro que puede tener 7 o 28 $3-$subgrupos de Sylow, a continuación se descarta $n_3 = 7$.

   Para ello, sea P un 7-subgrupo de Sylow de G, se sabe que $|N_G(P)| = 21 = 3 \cdot 7$. Así existe un $x \in N_G(P)$ con $|x| = 3$, este elemento debe estar en algún 3-subgrupo de Sylow Q de G. Entonces Q normaliza a P en G.

Se supone ahora que $n_3 = 7$ entonces $|N_G(Q)| = 24 = 2^3 \cdot 3$. Sea T un 2-subgrupo de Sylow de $N_G(Q)$, entonces para todo $t \in T$, $tQt^{-1} = Q$ y si $q \in Q$

$$(tqt^{-1})(tPt^{-1})(tqt^{-1})^{-1} = tq(t^{-1}t)P(t^{-1}t)q^{-1}t^{-1} = tqPq^{-1}t^{-1} = tPt^{-1}$$

Luego Q normaliza a tPt^{-1} para todo $t \in T$.

Ahora se considera el subgrupo T actuando por conjugación en el conjunto de los 7-subgrupos de Sylow de G, se verifica que cada $t \in T$ asigna a P un 7-subgrupo de Sylow distinto de G. En efecto, t_1,$t_2 \in T$ con $t_1 \neq t_2$ distintos de la identidad, entonces, si se supone por contradicción que $t_1Pt_1^{-1} = t_2Pt_2^{-1}$ se tiene que

$$t_2^{-1}t_1Pt_1^{-1}t_2 = P$$

lo que implica que $t_2^{-1}t_1 \in N_G(P)$, pero esto no es posible, ya que ningún elemento de T distinto de la identidad puede normalizar a un 7-subgrupo de Sylow de G (Se supone que existe un elemento de $t \in T$ que normaliza a P, así $t \in N_G(P)$ pero $|t| = 2^a$ con $a \leq 3$ y 2^a no divide a $|N_G(P)| = 21$). Luego dado que $n_7 = 8 = |T|$ entonces la acción de T por conjugación en el conjunto de los 7-subgrupos de Sylow de G da como resultado todos estos. Por lo tanto Q normaliza a todos los 7-subgrupos de Sylow de G. Así, Q es un subgrupo de la intersección de los normalizadores de los 7-subgrupos de Sylow de G. Así $\bigcap_{P \in Syl_7(G)} N_G(P) \neq \emptyset$ y dado que $\bigcap_{P \in Syl_7(G)} N_G(P) \trianglelefteq G$ se tiene una contradicción y la única opción es que $n_3 = 28$ es decir existen 28-3-subgrupos de Sylow en G.

3. El número de $2-$subgrupos de Sylow de G es igual a 21 esto se demuestra utilizando teoría de grupos. Ver [12].

Por lo demostrado anteriormente se obtiene la siguiente tabla acerca de los $p-$subgrupos de Sylow del grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein:

Primo	$\|P\|$	$\|Syl_p(G)\|$	$\|N_G(P)\|$
2	8	21	8
3	3	28	6
7	7	8	28

3.4. El grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein es isomorfo a $PSL(2, \mathbb{F}_7)$

Sabiendo que el grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein es simple de orden 168, la búsqueda de un grupo no abeliano conocido al cual sea isomorfo se dirige al grupo de matrices, el artículo some observations on Klein Quartic, group and geometry muestra como el candidato, a ser isomorfo al grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein, al grupo lineal proyectivo $PSL(2, \mathbb{F}_7)$ (isomorfo a $GL(3, 2)$) descrito en la sección 2.5. Este es el segundo grupo simple no abeliano más pequeño con 168 elementos, después del grupo alternante A_5 que tiene orden 60.

Teorema 3.8. *Si G y H son grupos simples de orden* 168 *entonces G es isomorfo a H.(Demostración [6]).*

Con lo anterior se ha garantizado que el grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein es isomorfo al grupo lineal proyectivo $PSL(2, \mathbb{F}_7)$, cumpliendo así con el objetivo principal del trabajo.

Conclusiones

- Estudiando algunos conceptos asociados a las superficies de Riemann, acciones de grupos en dichas superficies y abordando un problema geométrico mediante la teoría de grupos se logró describir el grupo de automorfismos de una superficie de Riemann compacta llamada Cuártica de Klein. Se mostró la estructura compleja de dicha superficie y se describieron algunas características de su grupo de automorfismos como por ejemplo el orden de los $p-$subgrupos de Sylow que contiene, los automorfismos que generan al grupo incluyendo el vector de ramificación y la propiedad de ser un grupo simple.

- Con el desarrollo de este trabajo se obtiene como resultado un texto de fácil lectura, que permitirá a algunos estudiantes que poseen conocimientos básicos de topología, variable compleja y álgebra, comprender la definición de superficies de Hurwitz y profundizar sobre algunas características especiales del grupo de automorfismos de la Cuártica de Klein.

- El trabajo se enfoca en describir el grupo de automorfismos de la superficie de Hurwitz de menor género llamada Cuártica de Klein (género tres). Existen infinitas superficies de Hurwitz, sin embargo se sabe muy poco acerca de ellas, por tal motivo se considera que un estudio futuro podría realizarse entorno a la descripción del grupo de automorfismos de superficies de Hurwitz de género mayor que tres. (Curva de Fricke-Macbeath de género siete, con el grupo de automorfismos isomorfo a $PSL(2, \mathbb{F}_8)$ [7]).

Bibliografía

[1] A. M. Macbeath. *Hurwitz groups and surfaces.* Cambridge, 1999.

[2] Atsushi Matsuura.*The automorphism group of the Klein curve in the mapping class group of genus 3.* The Japan Academy, 1996.

[3] Argarwal.R,P,Pereira,k, and Pinelas. *An Introduction to complex analysis.*Springer, 2011.

[4] Bolaños, Marby.*Grupo de Automorfismos de las Curvas Proyectivas de Fermat*, Universidad del Cauca, 2014.

[5] Farkas Hershell M.*Riemann Surface vol 71 of Graduate texts in Mathematics.*Springer,1980.

[6] Geoff Smill y Tabachnikova Olga.*Topics in Group Theory.*Springer, 2000.

[7] I.R Shafarevich.*Basic Algebraic Geometry.*Springer,1977.

[8] J.Javier y Gamba J.M. *Curvas algebraicas reales y superficies de Klein.*Revista de la Real Academia de ciencias exactas, fisica y naturales, 1984.

[9] James J. Munkres. *Topología.*Pearson educación SA, 2002.

[10] Jose J.Grzegorz Gromadzki. *Automorphism Group of Compact Bordered Klein.*Springer,1980.

[11] Miranda R. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces,vol 5 of gaduate Studies in Mathematics.* American Matematical society,1995.

[12] Timothy L. Vis. *The Existence and uniqueness of a simple group of order 168.*Springer,1980.