

**MODELADO, CARACTERIZACIÓN Y CONTROL DE  
VELOCIDAD DE UN MOTOR NEUMÁTICO DE ALETAS**

**JOHAM FERNANDO GOMEZ  
JANN HAIDER RAMOS**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE  
LA EDUCACIÓN  
PROGRAMA DE INGENIERÍA FÍSICA  
POPAYÁN  
2017**

**MODELADO, CARACTERIZACIÓN Y CONTROL DE  
VELOCIDAD DE UN MOTOR NEUMÁTICO DE ALETAS**



Tesis presentada como requisito para optar el título de  
Ingeniero Físico

**JOHAM FERNANDO GOMEZ  
JANN HAIDER RAMOS**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE  
LA EDUCACIÓN  
PROGRAMA DE INGENIERÍA FÍSICA  
POPAYÁN  
2017**



# Agradecimientos

---

Me gustaría que estas líneas sirvieran para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización del presente trabajo, en especial al Profesor German Bacca, director de esta investigación, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa de la misma. Especial reconocimiento a Joham por haber sido un excelente compañero de tesis y amigo, este proyecto ha sido fruto de nuestro esfuerzo y dedicación, le deseo solo exitos de aquí en adelante.

También quiero dar las gracias a todos los docentes y amigos que a través de los años han hecho de mi etapa universitaria un trayecto de vivencias que nunca olvidaré. Un agradecimiento muy especial merece el apoyo, la comprensión, paciencia y el ánimo recibidos por mi familia, por los que están y por los que no, a todos ellos, muchas gracias.

**Jann Haider Ramos Andrade**

El mayor agradecimiento es a mi madre Ruby Alba Gómez, por todo su apoyo incondicional y ser la persona mas importante en mi vida, igualmente a todos los miembros de mi familia. Un agradecimiento especial al director del presente proyecto doctor German Arturo Bacca, por brindarnos su conocimiento, tiempo y apoyo.

También a los profesores del Departamento de Física por su conocimiento académico y mis amigos de la Universidad del Cauca con los que compartí momentos muy especiales.

**Joham Fernando Gómez**



# Resumen

---

En esta tesis se presenta el estudio de un sistema neumático constituido principalmente de una válvula reguladora de flujo y un motor de aletas. Parte de las leyes físicas relacionadas con la mecánica de sólidos y la neumática, el análisis de la geometría de los actuadores, es obtenido el modelo matemático y utilizando técnicas analíticas, algoritmos numéricos y junto con la caracterización del sistema, se realiza una simulación de la operación del motor y la válvula.

A partir de las características de funcionamiento del motor en conjunto con la válvula, se diseña e implementa una estrategia de control de velocidad del motor y se realizan pruebas para analizar su desempeño bajo distintas condiciones de funcionamiento.



# Abstract

---

This thesis presents the study of a pneumatic system consisting mainly of a flow regulating valve and a vane motor. Start from the physical laws related to the mechanics of solids and pneumatics, is obtained its mathematical model and using analytical techniques, numerical algorithms and together with the characterization of the system, a simulation of the operation of the motor and valve is made.

Based on the operating characteristics of the vane motor in conjunction with the valve, a motor speed control strategy is designed and implemented, tests are performed to analyze its performance under different behavior conditions.

# Índice general

---

Índice de figuras	x
Índice de tablas	xii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.2.1. Objetivo General . . . . .	3
1.2.2. Objetivos Específicos . . . . .	4
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	4
1.4. Contribuciones . . . . .	5
1.5. Estructura de la tesis . . . . .	5
<b>2. Modelo Físico y Matemático del Sistema Neumático</b>	<b>7</b>
2.1. Conceptos preliminares . . . . .	7
2.1.1. Neumática . . . . .	7
2.1.2. Fuerza . . . . .	8
2.1.3. Segunda ley de Newton . . . . .	8
2.1.4. Presión . . . . .	9
2.1.5. Caudal . . . . .	9
2.1.6. Torque . . . . .	10
2.1.7. Modelo de fricción de Coulomb, fricción viscosa y fricción estática	10
2.1.8. Ecuación de estado para gas ideal . . . . .	11
2.1.9. Proceso Politrópico Reversible en un Gas Ideal . . . . .	13
2.2. Flujo de Aire a través de un Orificio . . . . .	14
2.2.1. Presión crítica, razón de flujo máximo y velocidad crítica . . . . .	17
2.2.2. Conductancia Sónica . . . . .	19
2.3. Modelo de la Válvula de control de flujo . . . . .	20
2.3.1. Cálculo del Flujo de Masa . . . . .	20
2.4. Modelo del Motor de Aletas . . . . .	21
2.4.1. Descripción del funcionamiento . . . . .	21
2.4.2. Geometría del Motor . . . . .	22
2.4.3. Presión en las cámaras . . . . .	25
2.4.4. Torque en las aletas y torque neto en función del ángulo . . . . .	26

---

2.4.5.	Trabajo y potencia del motor . . . . .	27
2.4.6.	Flujo volumétrico y caudal en el motor . . . . .	29
2.4.7.	Dinámica del Motor . . . . .	30
2.5.	Variables de Estado . . . . .	30
<b>3.</b>	<b>Descripción del Sistema</b>	<b>32</b>
3.1.	Sistema Neumático . . . . .	32
3.1.1.	Generación del aire comprimido . . . . .	33
3.1.2.	Alimentación directa de los dispositivos neumáticos . . . . .	35
3.1.3.	Válvula Reguladora de Caudal . . . . .	37
3.1.4.	Motor de Aletas . . . . .	38
3.2.	Elementos de Entrada . . . . .	39
3.2.1.	Sensor de Presión . . . . .	40
3.2.2.	Encoder Rotativo . . . . .	40
3.2.3.	Rotámetro . . . . .	42
3.2.4.	Freno de Prony . . . . .	43
3.3.	Elementos de Salida . . . . .	43
3.3.1.	Motor Paso a Paso . . . . .	44
3.4.	Adquisición de Datos . . . . .	45
3.4.1.	Tarjeta PCI . . . . .	46
3.4.2.	Señales de Entrada . . . . .	47
3.4.2.1.	Medida de velocidad angular . . . . .	47
3.4.2.2.	Medida de Caudal . . . . .	48
3.4.2.3.	Medida de Presión . . . . .	48
3.4.2.4.	Medida de Torque . . . . .	49
3.4.3.	Señales de Salida . . . . .	51
3.4.3.1.	Accionamiento de la Válvula reguladora de flujo . . . . .	51
<b>4.</b>	<b>Caracterización del Sistema Neumático</b>	<b>53</b>
4.1.	Caracterización de Válvula reguladora de flujo . . . . .	53
4.1.1.	Evaluación del Modelo de la Válvula . . . . .	56
4.2.	Caracterización de Motor de aletas . . . . .	57
4.2.1.	Pruebas de Torque . . . . .	57
4.2.2.	Pruebas de Caudal . . . . .	59
4.2.3.	Pruebas de Presión . . . . .	60
4.2.4.	Evaluación del modelo del motor . . . . .	62
4.2.4.1.	Torque efectivo del motor . . . . .	62
4.2.4.2.	Dinámica del motor . . . . .	63
4.2.4.3.	Caudal en el motor . . . . .	64
4.2.5.	Prueba del sistema completo . . . . .	64

<b>5. Control de Velocidad</b>	<b>66</b>
5.1. Sistemas de Control . . . . .	66
5.2. Estructuras de Controladores PID . . . . .	70
5.2.1. PID no Interactivo . . . . .	70
5.2.2. PID Interactivo . . . . .	71
5.2.3. PID Paralelo . . . . .	71
5.3. Arquitecturas de Control PID . . . . .	72
5.3.1. Control PI-D . . . . .	72
5.3.2. Control I-PD . . . . .	72
5.4. Sintonización de Controladores . . . . .	73
5.5. Implementación Digital del PID . . . . .	75
5.6. Estrategia para el control de velocidad del motor neumático . . . . .	76
5.7. Diseño del controlador PID en LabView <sup>®</sup> . . . . .	77
5.7.1. Sistema en lazo abierto . . . . .	80
5.7.2. Sintonización del control PID para el motor . . . . .	81
5.7.3. Pruebas de controlador . . . . .	82
5.7.4. Pruebas del controlador ante disturbios . . . . .	84
5.7.5. Observaciones sobre el Controlador PID de velocidad . . . . .	85
<b>6. Conclusiones</b>	<b>87</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>90</b>
<b>A. Algoritmos</b>	<b>93</b>
A.1. Algoritmos en Matlab <sup>®</sup> . . . . .	93
A.1.1. Algoritmo de regresión por mínimos cuadrados para determinar parámetros de la Válvula . . . . .	93
A.1.2. Algoritmo de regresión por mínimos cuadrados para determinar parámetros del motor a partir de pruebas de torque . . . . .	95
A.2. Algoritmo en Python . . . . .	96
A.2.1. Algoritmo para ajuste de curva de la ecuación de movimiento del motor . . . . .	96
<b>B. Especificaciones de Instrumentos</b>	<b>99</b>
B.1. Especificaciones del Encoder . . . . .	99
B.2. Asignación de Pines de la DAQ PCI-6023E . . . . .	100
B.3. Especificaciones del Sensor de Presión . . . . .	101
<b>C. Demostraciones</b>	<b>102</b>
C.1. Demostración del ángulo $\beta$ . . . . .	102
C.2. Demostración del radio variable $R_v$ . . . . .	103
C.3. Cálculo analítico del área transversal barrida por una aleta . . . . .	104
<b>D. Planos del mecanismo para pruebas de torque</b>	<b>106</b>

# Índice de figuras

---

2.1. Modelo de fricción de Coulomb+fricción viscosa . . . . .	11
2.2. Procesos Politrópicos . . . . .	13
2.3. Flujo de Aire a través de un Orificio . . . . .	15
2.4. Curva de $\dot{m}$ en función de $\frac{P_2}{P_1}$ . . . . .	18
2.5. Esquema de la válvula . . . . .	20
2.6. Parámetros geométricos del interior del motor . . . . .	22
2.7. Cálculo del área transversal . . . . .	23
2.8. Sectores de trabajo en el motor . . . . .	24
2.9. Volumen de las cámaras en función del ángulo . . . . .	25
2.10. Presión en las cámaras en función del ángulo . . . . .	26
2.11. Torque en función del ángulo . . . . .	27
2.12. Relación de presión y Volumen . . . . .	28
3.1. Sistema neumático . . . . .	33
3.2. Unidad compresora . . . . .	34
3.3. Unidad de mantenimiento . . . . .	35
3.4. Filtro . . . . .	36
3.5. Regulador . . . . .	36
3.6. Lubricador . . . . .	37
3.7. Válvula Reguladora de Caudal . . . . .	38
3.8. Motor de aletas . . . . .	39
3.9. Sensor de Presion . . . . .	40
3.10. Encoder rotativo . . . . .	41
3.11. Rotámetro . . . . .	42
3.12. Freno de Prony . . . . .	43
3.13. Motor Paso a Paso . . . . .	44
3.14. Simbología de las señales . . . . .	45
3.15. Tarjeta PCI 6023E . . . . .	46
3.16. Circuito para el Encoder . . . . .	47
3.17. Diagrama de Bloques para medida de velocidad angular . . . . .	48
3.18. Circuito para el Sensor de Presión . . . . .	49
3.19. Diagrama de Bloques para medida de Presión . . . . .	50
3.20. Mecanismo para la medida del torque . . . . .	50

3.21. Diagrama de Bloques para accionamiento del Motor paso a paso . . . . .	51
3.22. Conexión del motor paso a paso . . . . .	52
4.1. Circuito Caracterización Válvula . . . . .	54
4.2. Pruebas de presurización . . . . .	54
4.3. Resultados de $\mathbf{A}_r$ , $\mathbf{C}$ y $\mathbf{b}$ . . . . .	56
4.4. Gráfica Pruebas de Torque . . . . .	57
4.5. Montaje Pruebas de Torque . . . . .	58
4.6. Parámetros del freno de Prony . . . . .	59
4.7. Gráfica Pruebas de Torque . . . . .	59
4.8. Pruebas de Caudal . . . . .	60
4.9. Pruebas de Presión . . . . .	61
4.10. Validación torque efectivo . . . . .	63
4.11. Validación del modelo dinámico . . . . .	64
4.12. función de flujo y datos experimentales . . . . .	65
4.13. Velocidad angular vs apertura de la válvula . . . . .	65
5.1. Diagrama de Bloques de un Sistema en Lazo Cerrado. . . . .	67
5.2. Control PID de una Planta. . . . .	70
5.3. PID no Interactivo. . . . .	71
5.4. PID Interactivo. . . . .	71
5.5. PID Paralelo. . . . .	72
5.6. Control PI-D . . . . .	73
5.7. Control I-PD . . . . .	73
5.8. Sistema en lazo cerrado con controlador proporcional . . . . .	74
5.9. Diagrama de bloques de etapa de arranque del motor . . . . .	77
5.10. Diagrama de bloques de etapa de ejecución del control . . . . .	78
5.11. Diagrama del PID paralelo . . . . .	79
5.12. Diagrama de bloques de etapa de apagado del sistema . . . . .	79
5.13. Panel Crontal del Programa de Control . . . . .	80
5.14. Variable de salida vs variable de entrada . . . . .	81
5.15. Respuesta de la planta en lazo abierto . . . . .	81
5.16. Prueba de sintonización del controlador PID . . . . .	82
5.17. Prueba del controlador en rango de operación . . . . .	83
5.18. Respuesta planta controlada ante entrada senoidal . . . . .	83
5.19. Accion de control en detalle . . . . .	84
5.20. Prueba del controlador ante disturbios . . . . .	85
5.21. Acción de control bajo cambios del sistema . . . . .	86
C.1. Parámetros geométricos del motor . . . . .	102

# Índice de tablas

---

4.1. Valores de Caracterización de la Válvula . . . . .	55
4.2. Valores Ajuste del torque efectivo . . . . .	62
4.3. Valores Ajuste del modelo dinámico . . . . .	63
5.1. Ecuaciones para Ajuste de Controladores . . . . .	75
5.2. Constantes del PID calculadas . . . . .	82

# Introducción

---

**L**A PALABRA NEUMÁTICA se refiere al estudio del movimiento del aire. Cuando se habla de neumática se refiere a la tecnología que utiliza el aire comprimido como medio transmisor de energía, que engloba un conjunto de técnicas para su transmisión, control y regulación. El aire comprimido es un elemento muy habitual en todo tipo de instalación industrial, normalmente se emplea para obtener trabajo mecánico lineal o rotativo, asociados a los desplazamientos de un pistón o al de un motor neumático. [18]

Un sistema es una combinación de componentes que actúan conjuntamente para alcanzar un objetivo específico. Cualquier tentativa de diseño de un sistema neumático debe empezar a partir de una predicción de su funcionamiento antes de que el sistema pueda diseñarse en detalle o construirse físicamente. Tal predicción se basa en una descripción matemática de las características dinámicas del sistema. A esta descripción matemática se le llama modelo matemático. Para los sistemas físicos, la mayoría de los modelos matemáticos que resultan útiles se describen en términos de ecuaciones diferenciales. La dinámica de sistemas trata del modelado matemático y el análisis de la respuesta de los sistemas dinámicos. Hoy en día, el diseño de ingeniería requiere de un concienzudo estudio de esa materia. Los circuitos neumáticos que convierten la energía del aire comprimido en energía mecánica gozan de un considerable uso, y se encuentran diferentes tipos de controladores mecánicos en la industria. [14]

Un problema importante en los sistemas hidráulicos y neumáticos de control es su susceptibilidad al desgaste de sus diversas partes mecánicas. Por consiguiente, para el ingeniero resulta un desafío importante ofrecer un sistema de control totalmente confiable, que pueda adaptarse con facilidad a numerosos sistemas industriales de control, con cierta cantidad de partes mecánicas o electromecánicas. [15]

## 1.1. Estado del arte

El estudio de los sistemas neumáticos esta tomando cada vez mas fuerza gracias a las ventajas y aplicaciones en las cuales están siendo utilizados. Sin embargo, no se han divulgado en gran cantidad estudios detallados sobre el funcionamiento interno de actuadores neumáticos, a diferencia de los estudios que existen sobre los actuadores hidráulicos y eléctricos. Esto se debe principalmente a factores inherentes como la compresibilidad del aire y la fricción que se presenta entre sus partes, factores que dificultan sus investigaciones pero proponen importantes retos.

Los actuadores neumáticos convierten la energía del aire comprimido en trabajo mecánico, dependiendo de la salida se pueden clasificar en dos grupos: los que generan un movimiento lineal como por ejemplos los servomotores de diafragma y los cilindros, o bien los que presentan un movimiento giratorio como los motores neumáticos. Por lo común, se tienen que las investigaciones se han orientado primordialmente al primer grupo, donde ellas se han enfocado en la caracterización, al control de posición que permita tener alta precisión para su desplazamiento y el modelado por medio de técnicas computacionales. Los cilindros neumáticos de movimiento lineal han sido los principalmente estudiados en la literatura. Los estudios adelantados en el segundo grupo son centrados fundamentalmente en la caracterización y en los posibles diseños teóricos que ayudan a mejorar su rendimiento. Dentro de los motores neumáticos los de tipo aletas son los más utilizados. Los actuadores neumáticos están entre una gran variedad de actuadores estudiados activamente por la comunidad de robótica, por las ventajas que ofrecen a través de los accionadores eléctricos convencionales ampliamente utilizados en los robots. Los motores de aire son los homólogos neumático de los motores eléctricos.

Los textos de neumática y estudio de los fluidos se presentan en [14; 15][10; 13][9; 12], los cuales son una valiosa herramienta de consulta, cuando se requiere información sobre estos temas. Además describen los actuadores neumáticos y sus principales aplicaciones en los que son utilizados. Numerosos aportes se han realizado con la intención de modelar los motores neumáticos de aletas ya sea para determinar y optimizar parámetros claves en su desempeño, para la fabricación en base a sus parámetros geométricos, para realizar mecanismos de control robustos o para integrarlos con algún otro tipo de sistema industrial. [20; 25-30; 32]

En [31] se presenta el modelo que describe las fuerzas de contacto entre la aleta, el rotor y el estator, donde se determina experimentalmente los coeficientes de fricción entre la aleta y el rotor y entre la aleta y el estator, además se determina las presiones en las cámaras. En [41] se ha desarrollado un pequeño motor neumático como alternativa a los motores eléctricos para procesos de mecanizado en pequeñas dimensiones con uso potencial en micro-máquinas y micro-fabricas. La novedad del diseño se basa principalmente en el uso de aletas auto-lubricantes y en que el eje de rotación poseen unos huecos con el fin de que el aire comprimido ingrese por ellos y no lo haga solamente por

las entradas predeterminadas y así mantener las aletas en contacto con la parte interna del estator, evitando el uso de resortes. El modelado dinámico de un sistema neumático compuesto por una válvula proporcional reguladora de caudal y de un cilindro de doble efecto, como elementos principales se presenta en [42], donde se obtienen los resultados satisfactorios a partir de simulaciones.

El uso del métodos de control por modo deslizante y backstepping se utiliza en [34] para controlar una mesa neumática X-Y, donde estos métodos bajo ciertas condiciones pueden aplicarse para lograr mejores resultados que los obtenidos con un controlador PID. En [35] se comparan los motores neumáticos y los motores eléctricos, además se consideran varios sistemas de controles para un motor de neumático de aletas, entre los que se encuentran: control de posición, control de la trayectoria, control adaptativo y control de fuerza. El diseño de un controlador robusto es implementado para controlar la velocidad de rotación de un motor neumático, el cual se presenta en [38]. Los resultados de la simulación demuestran que el controlador propuesto tiene alta viabilidad. En [36] se caracteriza brevemente un diseño de un sistema de control de un motor neumático rotativo. En este trabajo, se describe la linealización de control de dos formas diferentes. El primer método es de linealización inversa mediante la aproximación de una característica estática. El segundo método utiliza la creación de un elemento de linealización usando redes neuronales. En [37] utiliza una tarjeta FPGA para controlar el sistema de un motor de aire, a partir de los resultados experimentales el control de velocidad tiene un buen rendimiento.

El análisis dinámico y el diseño de un controlador de lógica difusa de un motor neumático de tipo aleta se presenta en [40], en este se encontró que la velocidad de rotación del motor de aire es fuertemente afectada por la presión y el caudal de aire comprimido. En [25; 32] se presenta los trabajos mas acordes a los objetivos del presente proyecto, en ellos se obtienen el modelo dinámico de un motor neumático de aletas. Además muestran la caracterización de ciertos variables del motor. En [39] se presenta el modelo matemático para motores de aire de tipo aleta con número arbitrario de aletas. Los resultados de la simulación son presentados con un conjunto típico de parámetros del motor de aire.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo General

El objetivo principal del trabajo de tesis es modelar y caracterizar un sistema neumático compuesto por una válvula reguladora de flujo y un motor de aletas, e implementar un controlador de velocidad de rotación en el motor.

### 1.2.2. Objetivos Específicos

- Obtener el modelo matemático que representa la dinámica del motor neumático como también el de la válvula de control de flujo.
- Caracterizar experimentalmente el motor con pruebas en régimen de torque, presión y de flujo de aire para la obtención de su modelo físico.
- Caracterizar la válvula reguladora de flujo con pruebas de presurización para obtener su modelo físico.
- Simular, con ayuda de técnicas numéricas, el comportamiento teórico del motor y de la válvula, para compararlos respecto a su funcionamiento real.
- Diseñar e implementar una estrategia de control de velocidad de rotación en el motor.
- Realizar pruebas del controlador en el rango de operación del motor manipulando el setpoint, además de pruebas para analizar su respuesta ante disturbios como variaciones en el suministro de aire y carga externa en el eje del motor.

## 1.3. Planteamiento del problema

Existen procesos a nivel industrial tales como las líneas de ensamblaje, accionamiento de bombas, cintas transportadoras, polipastos y aparejos, agitadores de algunas soluciones, articulaciones en la industria robótica y vehículos de energías alternativas. Donde se requieren componentes que operen a altas velocidades de rotación en un mecanismo ya sea para posicionamiento, transporte, o, par rotatorio. Si se dispone de poco espacio para un montaje y de ambientes con presencia de gases inflamables, los motores eléctricos convencionales resultan inadecuados para su implementación en estas condiciones. Cuando se requieren etapas de inversión de giro o paradas instantáneas, ciertos actuadores rotatorios suelen bloquearse o desgastarse en estas fases, lo que conlleva a constantes mantenimientos y reduce la vida útil de estos mecanismos.

Se ha observado que la velocidad de rotación y el par de un motor neumático están estrechamente relacionada con la presión del aire comprimido y velocidad de flujo, pero debido a la compresibilidad del aire y la fricción en el mecanismo, el sistema general presenta un comportamiento no lineal. A pesar de que existen varias investigaciones que han desarrollado modelos no lineales para representar la dinámica de estos actuadores, resulta complicado el diseño y desarrollo de un controlador a partir de tales modelos, así como también la simulación de estos modelos, que requieren paquetes computacionales complejos e incluso software licenciado para su desarrollo lo que conlleva a escasas propuestas de diseño para manufacturar motores con un mayor rendimiento. [19; 20]

## 1.4. Contribuciones

Este proyecto espera contribuir al sector industrial donde los actuadores neumáticos, como el motor de aletas, sean alternativa para hacer más eficiente algún proceso en particular; gracias al sistema de control de velocidad que se va a implementar, se logra que el motor gire a velocidad libre a unas revoluciones cercanas a las de potencia máxima por lo que el motor reaccionará mejor cuando se le someta a una carga inesperada, el control implementará una técnica de estrangulación que modifica fácilmente la potencia del motor manteniendo un par de arranque alto, la versatilidad de la estrategia de control permite hacer modificaciones de manera simple ante diferentes condiciones de operación.

La obtención de una representación teórica del comportamiento del sistema neumático, al ser un modelado paramétrico, mediante simulaciones será posible estudiar la repercusión de los parámetros en que se basa el diseño del motor de aletas, al rendimiento en operación, dar pautas para el diseño de dispositivos con mejor desempeño. Las técnicas de caracterización y simulación de los componentes neumáticos resultarán adaptables cuando se requiera un estudio de otros actuadores semejantes.

## 1.5. Estructura de la tesis

La tesis está compuesta por seis capítulos; siendo el capítulo 1 el que se ha cubierto hasta ahora como introducción, donde se han mencionado las generalidades de la neumática, las necesidades en el modelado físico-matemático de un sistema y las necesidades en el control de componentes neumáticos; se puntualiza en los antecedentes que tienen que ver con el modelado y control de motores neumáticos, se plantean los objetivos y motivaciones de este proyecto así como el impacto que se espera de éste.

En el capítulo 2 se expone el modelo de la válvula reguladora de flujo y el motor de aletas, partiendo de los fundamentos teóricos necesarios para desarrollarlo, se establecen las relaciones matemáticas que permitan describir la dinámica tanto de la válvula como de el motor de aletas, para finalizar con un conjunto de ecuaciones que sean base para la simulación y análisis de estos componentes neumáticos.

En el capítulo 3 se describe el sistema completo, se exponen las características de los componentes neumáticos, electrónicos y virtuales, así como también se describen las interfaces que se implementan para la obtención y el manejo de las variables más importantes del sistema, como lo son la presión y el caudal en la línea de aire, el torque y la velocidad angular en el eje del motor.

El capítulo 4 describe el proceso de caracterización de los componentes principales del

sistema neumático, para la válvula se desarrolla un procedimiento con el fin de obtener los parámetros, que combinados con su modelo teórico, permitan representar su dinámica en el rango de operación. Para el motor neumático se realizan pruebas que muestren su respuesta dentro del rango de presiones y caudal en donde opera el sistema neumático, el resultado obtenido se relaciona con el modelo matemático para la simulación y validación del modelo deducido.

En el capítulo 5 se desarrolla la estrategia de control, parte de una descripción de los sistemas de control y las características de un controlador PID, se describe el método experimental de obtención de las constantes que necesita este tipo de controlador y las modificaciones que se hacen al PID para su implementación digital. Continúa con la estrategia de control a partir del funcionamiento en lazo abierto, el rango de estabilidad del motor y las condiciones del sistema neumático que lo contiene; se describe el diseño en LabView<sup>®</sup> del controlador y se realizan distintas pruebas para analizar su comportamiento y rendimiento ante variaciones de la referencia, carga externa y cambios en las propiedades del aire comprimido de suministro.

El capítulo 6 presenta las conclusiones del proyecto; donde se destacan el análisis que soporta al modelo desarrollado, los fenómenos observados en las pruebas de caracterización y la comparación del modelo deducido con lo observado experimentalmente, también se comentan los efectos de la estrategia de control implementada, como lo son las características de operación del mecanismo de control y la respuesta del motor ante las diversas entradas aplicadas. Además, en base a lo analizado de este proyecto, se dan recomendaciones para futuros trabajos relacionados con esta área de investigación.

# Modelo Físico y Matemático del Sistema Neumático

---

**L**OS MOTORES NEUMÁTICOS funcionan transformando la energía potencial del aire comprimido en trabajo mecánico, es por esto que el análisis físico y matemático comprende tanto aspectos claves de la neumática como de la dinámica rotacional. Es importante resaltar que además de modelar el motor neumático de aletas en este proyecto, se obtendrán las expresiones que representen el comportamiento de la válvula de control de flujo o válvula de aguja, y la interacción con el motor dentro del sistema en cuestión; la fidelidad del modelo obtenido está limitada por las consideraciones que se despreciaran del análisis físico tales como; la compresibilidad del aire, las fuerzas de contacto entre las partes internas del motor, entre otras que no afectan en gran medida al comportamiento del sistema. Sin embargo, el modelo resulta en una aceptable aproximación del papel de algunos parámetros tanto de la válvula como del motor en el desempeño del sistema y así poder plantear propuestas de optimización de estos mecanismos.

## 2.1. Conceptos preliminares

La descripción físico-matemática del sistema estudiado requirió de ciertos fundamentos básicos para su deducción y comprensión, a partir de estos conceptos, se aborda el análisis de la relación entre las propiedades físicas de los mecanismos y su comportamiento dentro circuito neumático.

### 2.1.1. Neumática

La **neumática** es la disciplina que se ocupa de las propiedades mecánicas de los gases tales como presión, caudal y densidad; y aplica estos gases comprimidos como fuente de

potencia para resolver distintos problemas de la ingeniería. Los actuadores neumáticos convierten la energía del aire comprimido en trabajo mecánico generando un movimiento lineal mediante servomotores de diafragma o cilindros, o bien un movimiento giratorio con motores neumáticos. [1; 13]

### 2.1.2. Fuerza

La fuerza es una magnitud vectorial que se refiere a la interacción entre dos cuerpos y representa la intensidad del intercambio del momento lineal entre dos partículas o sistemas de partículas. Las fuerzas se pueden clasificar en ciertas clases, una de ellas son las conocidas como las **fuerzas de contacto**, los tipos comunes de estas son; la *fuerza normal* es ejercida sobre un objeto por cualquier superficie con la que está en contacto, la *fuerza de fricción* ejercida sobre un objeto por una superficie que actúa en sentido opuesto al deslizamiento. Además de las fuerzas de contacto, hay otra clase de fuerzas conocidas como **fuerzas de campo**, como ejemplo de ellas esta la *fuerza gravitacional* [6]. La unidad de fuerza en el Sistema Internacional(S.I) es el Newton(N).

### 2.1.3. Segunda ley de Newton

La **segunda ley de Newton** se puede enunciar de la manera siguiente:

*la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de la partícula.*[7]

Es decir:

$$\sum F = \frac{d}{dt}(mv) \quad (2.1)$$

Si la masa  $m$  de la partícula se supone constante la ecuación 2.1 se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sum F = m \frac{dv}{dt} = ma \quad (2.2)$$

Esta relación expresa que la magnitud de  $F$  y  $a$  son directamente proporcionales.

En sistemas neumáticos, la parte móvil del elemento de trabajo (actuador) está sometida a la acción de fuerzas de diferente naturaleza, entre otras: fuerzas de presión  $F_p$ , fuerzas de fricción  $F_f$ , y fuerzas de carga  $F_l$ . Por lo tanto, la segunda ley de Newton quedaría expresada como:

$$F_p + F_f + F_l = m\ddot{x} \quad (2.3)$$

donde  $\ddot{x}$  es la aceleración de la parte móvil. [11]

### 2.1.4. Presión

La **presión** se define como la *fuerza normal que ejerce un fluido por unidad de área*. Se habla de presión sólo cuando se trata de gas o líquido, mientras que la contraparte de la presión en los sólidos es el *esfuerzo normal*. Puesto que la presión se define como la fuerza por unidad de área, la unidad de presión en el S.I es la fuerza de 1 Newton que actúa sobre el área de un metro cuadrado, conocida como *Pascal* (Pa), es decir:  $1 Pa = 1 N/m^2$  en el sistema Internacional, adicionalmente cabe decir que existen otras unidades. La presión está íntimamente ligada a otras magnitudes físicas como la fuerza, el volumen, etc. La presión puede ser atmosférica, absoluta, negativa dinámica, etc.[9]

Cuando se habla de presión atmosférica, se refiere al peso de una columna de aire de altura igual a la atmósfera. La presión relativa hace referencia a la presión atmosférica local (manométrica), definiendo un cambio de origen de presiones según la siguiente ecuación:

$$P_{abs} = P_{manométrica} + P_{atmosférica} \quad (2.4)$$

Los instrumentos neumáticos operan a presiones normalmente entre 4 a 7 veces la presión atmosférica, estas dimensiones son más manejables si se utilizan unidades de medida correspondiente con la magnitud de presión en cuestión, como lo es el **bar** que equivale a  $10^5$  Pascales.

### 2.1.5. Caudal

Se llama Caudal, flujo o gasto de un fluido, a la porción de un fluido que pasa por una sección en una unidad de tiempo. Esta cantidad de fluido se puede expresar de dos formas, en masa o en volumen. **El flujo volumétrico** ( $q$ ) se define como el volumen de un fluido que fluye por una sección transversal por unidad de tiempo. **El flujo másico** ( $\dot{m}$ ) es la cantidad de masa que fluye por una sección transversal por unidad de tiempo. Las unidades en el sistema internacional para el caudal másico es  $kg/s$  y para el caudal volumétrico en  $m^3/s$ . [12; 23]

El caudal másico y el caudal volumétrico están relacionados a través de la densidad del fluido, que en el caso de los gases es variable con la presión y la temperatura. Si se trata de un fluido que entra o sale de un volumen de control, el flujo volumétrico se puede expresar como:

$$q = VA \quad (2.5)$$

y el caudal másico como:

$$\dot{m} = \rho q = \rho VA \quad (2.6)$$

### 2.1.6. Torque

Se sabe que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden afectar su movimiento de traslación, la medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para causar o alterar la rotación de un cuerpo se denomina **torque** o también a esta cantidad se le conoce como **momento de torsión** y se especifica por la letra griega  $\tau$ . El torque o momento de torsión es en vector y se define mediante la expresión:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.7)$$

donde  $\vec{r}$  es la distancia entre el eje de rotación O y el punto de aplicación de  $\vec{F}$ , a  $\vec{r}$  se le conoce como brazo de palanca o brazo de momento. Los físicos prefieren el término torque, mientras que los ingenieros prefieren el término momento o par de torsión. Los dos grupos usan brazo de palanca o brazo de momento para la distancia  $r$ . El torque es positivo si el giro es en el sentido opuesto a las manecillas del reloj y es negativo en el sentido de las manecillas del reloj, este giro viene descrito por la regla de la mano derecha. [6; 8]

Si dos o más fuerzas actúan sobre un objeto rígido, cada una tiende a producir rotación en torno al eje. Torsión neto en torno al eje es:

$$\Sigma\tau = \tau_1 + \tau_2 \quad (2.8)$$

La segunda ley de Newton para la componente tangencial es:

$$F_{tan} = ma_{tan} \quad (2.9)$$

El punto donde actúa la fuerza tiende a moverse en círculo, por este motivo podemos expresar la aceleración tangencial de la ecuación previa en términos de **aceleración angular**  $\alpha$ , teniendo en cuenta que  $a_{tan} = r\alpha$  con esta relación y multiplicando ambos miembros de la ecuación 2.9 por  $r$  resulta:

$$\begin{aligned} F_{tan}r &= mr^2\alpha \\ \tau &= I\alpha \end{aligned} \quad (2.10)$$

Donde  $I$  es el **momento de Inercia** del objeto en el punto de acción de la fuerza. El momento de torsión tiene unidades de fuerza por longitud (Newton metros en unidades del SI) y se debe reportar en estas unidades. No se debe confundir momento de torsión con trabajo y energía, que tiene las mismas unidades pero son conceptos muy diferentes. [6; 8]

### 2.1.7. Modelo de fricción de Coulomb, fricción viscosa y fricción estática

La idea básica del **modelo de fricción de Coulomb** consiste en considerar a la fricción como una fuerza que se opone al movimiento y su magnitud es independiente

de la velocidad y del área de contacto. Este modelo se puede expresar como:

$$F_f = F_c \operatorname{sgn}(v) \quad (2.11)$$

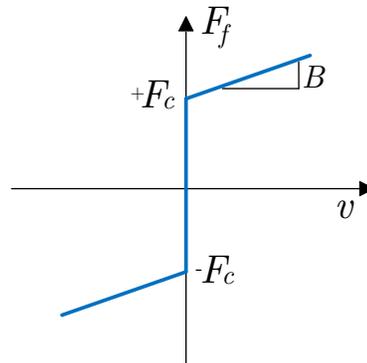
donde  $F_c$  es la fricción de Coulomb. Este modelo no tiene en cuenta la fuerza de fricción cuando la velocidad es cero, puesto que en este caso la función *signo* está definida como:

$$\operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \geq 0 \\ -1 & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

La teoría de la hidrodinámica permitió desarrollar expresiones de la fuerza de fricción causada por la viscosidad de los lubricantes. El término **fricción viscosa** se refiere a la componente de la fricción que puede ser representada por:

$$F_f = B v \quad (2.13)$$

donde  $B$  es el **coeficiente de fricción viscosa** y  $v$  es la velocidad relativa entre las dos superficies. La combinación de la fricción de Coulomb y la fricción viscosa da como resultado el comportamiento de la fricción mostrado en la figura 2.1. [11]



**Figura 2.1:** Modelo de fricción de Coulomb+fricción viscosa

### 2.1.8. Ecuación de estado para gas ideal

El estado de un sistema queda definido por el conjunto de valores que adquieren aquellas propiedades del sistema que pueden variar. Cualquier ecuación que relacione la presión, la temperatura y el volumen específico de una sustancia se denomina **ecuación de estado**. Hay varias ecuaciones de estado, algunas sencillas y otras muy complejas: la más sencilla y mejor conocida para sustancias en la fase gaseosa es la ecuación de estado de gas ideal, la cual predice el comportamiento P-v-T de un gas con bastante exactitud, dentro de cierta región elegida adecuadamente. La ecuación de estado de gas ideal es:

$$P \cdot v = R \cdot T \quad (2.14)$$

Donde  $P$  es la presión absoluta,  $T$  es la temperatura absoluta y  $v$  es el volumen específico. La ecuación anterior también se puede escribir en términos de la densidad puesto que;  $v = \frac{1}{\rho}$ , obteniendo:

$$\frac{P}{\rho} = RT \quad (2.15)$$

La constante  $R$  es diferente para cada gas y se determina a partir de:

$$R = \frac{\bar{R}}{M} \quad (2.16)$$

$M$  es la masa molar (llamada también peso molecular) del gas y  $\bar{R}$  es la **constante universal de los gases**, esta es la misma para todas las sustancias y su valor es:

$$\bar{R} = \begin{cases} 8.31447 & kJ/kmol * K \\ 8.31447 & kPa * m^3/kmol * K \\ 0.0831447 & bar * m^3/kmol * K \\ 1.98588 & Btu/lbmol * K \\ 10.7316 & psia * pie^3/lbmol * K \\ 1545.37 & pie * lbf/lbmol * K \end{cases} \quad (2.17)$$

La masa de un sistema es igual al producto de su masa molar  $M$  y el número de moles  $N$ :

$$m = MN \quad (kg)$$

La ecuación de estado del gas ideal se expresa de varias maneras diferentes:

$$V = mv \quad \longrightarrow \quad PV = mRT \quad (2.18)$$

$$mR = (MN)R = N\bar{R} \quad \longrightarrow \quad PV = N\bar{R}T \quad (2.19)$$

$$\hat{v} = \frac{V}{N} \quad \longrightarrow \quad P\hat{v} = \bar{R}T \quad (2.20)$$

Donde  $\hat{v}$  es el volumen molar específico, es decir, el volumen por unidad de mol (en  $m^3/kmol$  o  $pie^3/lbmol$ ).

Al escribir dos veces la ecuación 2.18 para una masa fija y simplificar las propiedades de un gas ideal en dos estados diferentes se relacionan entre sí por medio de:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad (2.21)$$

Experimentalmente, se ha observado que la relación de gas ideal se aproxima mucho al comportamiento  $P$ - $v$ - $T$  de los gases reales a bajas densidades, ya que bajo condiciones que implican presiones bajas y temperaturas altas, la densidad de un gas disminuye y se comporta como gas ideal. Para intereses prácticos, muchos gases familiares como el aire, nitrógeno, oxígeno, hidrógeno, helio, argón, neón, criptón e incluso algunos más pesados como el dióxido de carbono, pueden tratarse como gases ideales con un margen de error insignificante (con frecuencia menor al 1 por ciento). Sin embargo, los gases densos, como el vapor de agua en las centrales eléctricas y el vapor de refrigerante en los refrigeradores, no deben considerarse como gases ideales, por lo que es necesario usar tablas de propiedades. [12]

### 2.1.9. Proceso Politrópico Reversible en un Gas Ideal

Cuando un gas experimenta un proceso reversible con transferencia de calor, con frecuencia para tal proceso se cumple:

$$PV^n = cte \tag{2.22}$$

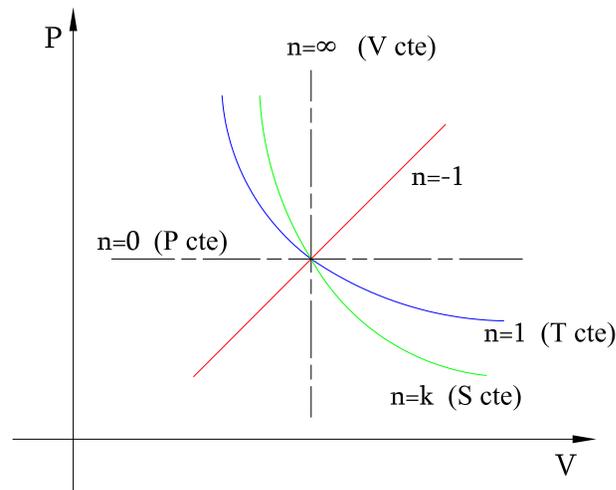
Un proceso con esta relación entre la presión y el volumen se llama proceso politrópico, donde P es la presión absoluta, V es el volumen y n es el exponente politrópico. La ecuación de un proceso politrópico es particularmente útil para describir los procesos de expansión y compresión que incluyen transferencia de calor. Esta ecuación puede caracterizar un amplio rango de procesos termodinámicos. [9]

Los valores de n para algunos procesos conocidos son:

<i>Proceso Isobárico</i>	$n = 0$	$P = cte$
<i>Proceso Isotérmico</i>	$n = 1$	$T = cte$
<i>Proceso Isentrópico</i>	$n = k = \frac{c_p}{c_v}$	$S = cte$
<i>Proceso Isocórico</i>	$n = \infty$	$V = cte$

Donde  $c_p$  es el calor específico a presión constante,  $c_v$  es el calor específico a volumen constante,  $k$  es la relación de calores específicos y S es la entropía.

En la figura 2.2 se muestran las curvas de los procesos politrópicos para los distintos valores de n sobre el diagrama P-V. Para 2 estados se puede establecer:



**Figura 2.2:** Procesos Politrópicos

$$P_1 V_1^n = P_2 V_2^n \tag{2.23}$$

A partir de esta ecuación se pueden escribir las siguientes relaciones:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n \quad (2.24)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1} \quad (2.25)$$

El trabajo en un proceso politrópico viene dado por la integral correspondiente

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_A^B p \, dV = - p_A V_A^n \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V^n} \quad (2.26)$$

Salvo en el caso  $n=1$ , el resultado de esta integral es

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= - p_A V_A^n \frac{V_B^{-n+1} - V_A^{-n+1}}{-n+1} \\ &= \frac{p_A V_A^n V_B^{-n+1} - p_A V_A}{n-1} \end{aligned}$$

haciendo uso de la relacion en 2.24,

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{p_B V_B^n V_B^{-n+1} - p_A V_A}{n-1}$$

finalmente se obtiene el trabajo como:

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{p_B V_B - p_A V_A}{n-1} \quad (2.27)$$

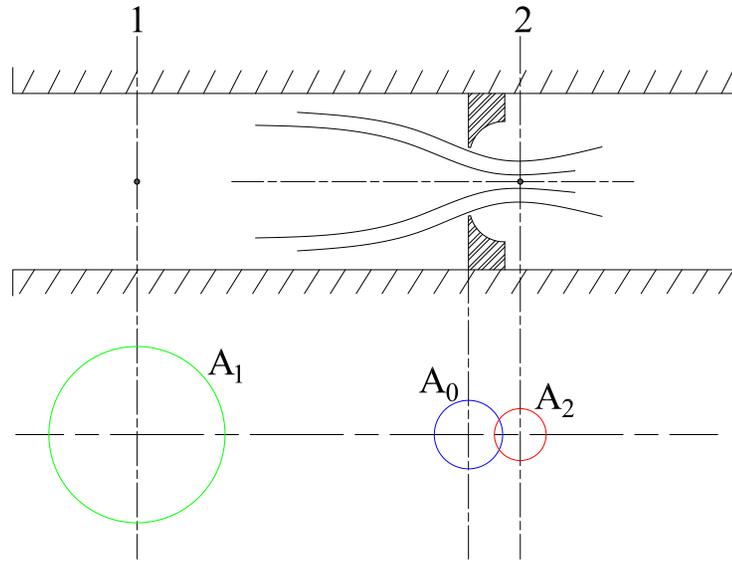
## 2.2. Flujo de Aire a través de un Orificio

El flujo de aire a través de orificios y toberas puede aproximarse mediante ciertas suposiciones necesarias que simplifican el modelo, este se deduce también a partir de las ecuaciones de Euler y de continuidad. El flujo de aire se muestra en la figura 2.3. El área de corriente  $A_2$  del chorro emitido es menor que el área del orificio  $A_0$ . La relación entre estas áreas es el coeficiente de contracción  $C_c$ . [14]

$$C_c = \frac{A_2}{A_0} \quad (2.28)$$

### Suposiciones

- Gas ideal
- Proceso politrópico  $PV^n = cte$



- $A_1$  : Area de la tubería
- $A_0$  : Area del orificio
- $A_2$  : Area vena contracta

**Figura 2.3:** Flujo de Aire a través de un Orificio

- Flujo estable e isentrópico (adiabático sin fricción)  $n=k$ ,  $k = \frac{c_p}{c_v}$ ,  $PV^k = cte$

El estado en el sector 1 está determinado por las variables termodinámicas  $P_1, v_1, T_1$  de la misma forma para el sector 2 se denotan como  $P_2, v_2, T_2$ . Las velocidades en la sección 1 y 2 están denotadas por  $\tilde{V}_1$  y  $\tilde{V}_2$  respectivamente. Tanto las presiones  $P_1$  y  $P_2$  como las temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  son absolutas.

La relación para los 2 estados es:

$$P_1 v_1^k = P_2 v_2^k = cte \quad \longrightarrow \quad P_1 \rho_1^{-k} = P_2 \rho_2^{-k}$$

$$P_1 = P_2 \rho_2^{-k} \rho_1^k \quad (2.29)$$

Tomando el diferencial, resulta:

$$dP_1 = P_2 \rho_2^{-k} k \rho_1^{k-1} d\rho_1 \quad (2.30)$$

Ahora, en base a la ecuación de Euler:

$$\frac{dP}{\rho} + \tilde{V}d\tilde{V} + gdz = 0 \quad (2.31)$$

Dado que el flujo se presenta en forma horizontal, el cambio en la altura es nulo. A consecuencia de esto la ecuación se reduce a:

$$\tilde{V} d\tilde{V} + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.32)$$

Tomando la ecuación anterior para el estado 1 y sustituyendo el diferencial de la ecuación 2.30, se tiene:

$$\tilde{V}_1 d\tilde{V}_1 + P_2 \rho_2^{-k} k \rho_1^{k-2} d\rho_1 = 0 \quad (2.33)$$

Integrando, resulta:

$$\frac{\tilde{V}_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P_1}{\rho_1} = cte \quad (2.34)$$

Para los 2 estados el resultado es:

$$\frac{\tilde{V}_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{\tilde{V}_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P_2}{\rho_2} \quad (2.35)$$

De la ecuación de continuidad se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= \dot{m}_2 = \dot{m} \\ \rho_1 \tilde{V}_1 A_1 &= \rho_2 \tilde{V}_2 A_2 \\ \tilde{V}_1 &= \frac{A_2 \rho_2}{A_1 \rho_1} \tilde{V}_2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Reemplazando  $\tilde{V}_1$  en la ecuación 2.35 y simplificando, se tiene:

$$\frac{\tilde{V}_2^2}{2} \left( \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 - 1 \right) = \frac{k}{k-1} \left( \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right), \text{ dado que } \frac{A_2}{A_1} \rightarrow 0, \text{ por } A_1 \gg A_2$$

Con estas indicaciones, la ecuación se simplifica a:

$$\tilde{V}_2^2 = \frac{2k}{k-1} \left( \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \quad (2.37)$$

Se extrae la raíz cuadrada a ambos lados de la expresión, obteniendo:

$$\tilde{V}_2 = \sqrt{\frac{2k}{(k-1)\rho_1} \left( P_1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} P_1 \right)} \quad (2.38)$$

El resultado anterior determina la velocidad teórica del fluido, ahora se define el coeficiente de velocidad  $C_v$  que relaciona la velocidad real  $V_2^r$  a la salida del orificio con la velocidad teórica  $\tilde{V}_2$ :

$$C_v = \frac{V_2^r}{\tilde{V}_2} \quad (2.39)$$

En la ecuación 2.28 aparece el coeficiente de contracción  $C_c$ , su valor numérico para un fluido determinado varía con el diámetro del orificio y la carga. La razón de flujo másico en el sector 2 es:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \rho_2 V_2^r A_2 \\ \dot{m} &= \rho_2 C_v C_c A_0 \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)}\end{aligned}\quad (2.40)$$

Del Proceso politrópico se tiene que:  $\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{k}}$ , por lo que:

$$\dot{m} = \rho_2 C_v C_c A_0 \sqrt{\frac{2k}{k-1} P_1 \rho_1 \left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right)}\quad (2.41)$$

Escribiendo la ecuación 2.14 en las variables del sector 1 se tiene:  $\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1}$ . En este momento se define el coeficiente de descarga ( $C_d$ ), el cual relaciona los coeficientes de velocidad y de contracción de la siguiente forma:

$$C_d = C_v C_c \quad (2.42)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 2.41, esta se modifica de la siguiente manera:

$$\dot{m} = \frac{C_d A_0 P_1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} R \left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right)}\quad (2.43)$$

### 2.2.1. Presión crítica, razón de flujo máximo y velocidad crítica

Manteniendo constantes las variables  $P_1, C_d, A_0, T_1$  en la ecuación 2.43, la razón de flujo másico ( $\dot{m}$ ) se hace una función solamente dependiente de  $P_2$  y con un máximo en el instante donde se cumple que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{m}}{\partial P_2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial P_2} \left[ \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right] &= 0\end{aligned}\quad (2.44)$$

lo que resulta en:

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{2}{k+1}\quad (2.45)$$

La razón de flujo másico se hace máxima ( $\dot{m}_{max}$ ) en el punto donde  $P_2 = P_c$ , siendo  $P_c$  la **presión crítica**:

$$P_c = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} P_1 \quad (2.46)$$

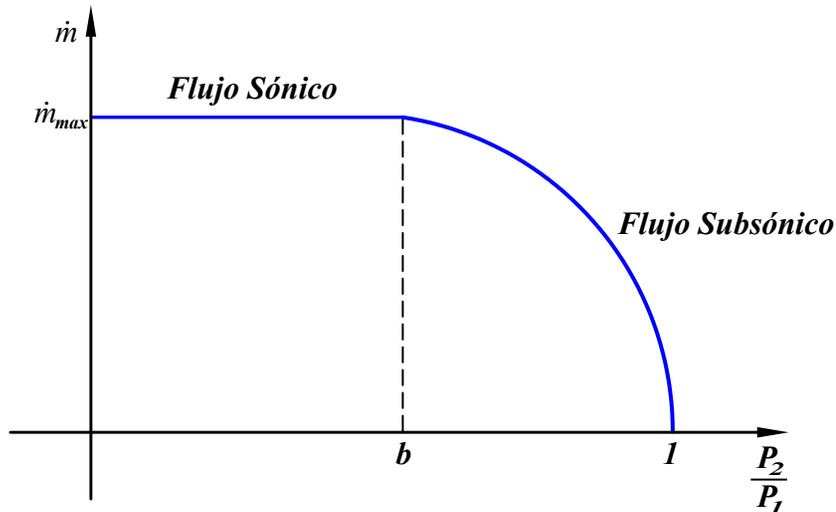
y se hace cero donde  $P_2 = P_1$ . Por lo tanto  $\dot{m}_{max}$  se obtiene de la ecuación 2.43 para  $P_c$ :

$$\dot{m}_{max} = \frac{C_d A_0 P_1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{\frac{2k}{(k+1)R} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}}} \quad (2.47)$$

Puesto que el valor de  $C_d A_0$  es constante y el valor de  $k$  para el aire también es una constante ( $k=1.4$ ), por tal motivo la razón de flujo máxima depende solamente de la condición en la sección 1. De la ecuación 2.46 se obtiene la expresión denominada **relación de presiones crítica** para el aire:

$$b = \frac{P_c}{P_1} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 0.528 \quad (2.48)$$

La ecuación 2.47 determina el **flujo másico máximo**, también llamado flujo sónico, pero el flujo después de  $P_c$  cae hasta llegar a cero, a este comportamiento se le denomina flujo subsónico y esta definido por la ecuación 2.43. La figura 2.4 muestra la curva del comportamiento de  $\dot{m}$  en función de la relación de presiones. En consecuencia la razón de flujo de masa queda establecida por una función a trozos, la cual se presenta en la ecuación 2.49. [14]



**Figura 2.4:** Curva de  $\dot{m}$  en función de  $\frac{P_2}{P_1}$

$$\dot{m} = \begin{cases} \frac{C_d A_0 P_1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{\frac{2k}{(k-1)R} \left( \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right)} & \text{si } b < \frac{P_2}{P_1} \leq 1 \quad (\text{F. Subsónico}) \\ \frac{C_d A_0 P_1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{\frac{2k}{(k+1)R} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}}} & \text{si } b \geq \frac{P_2}{P_1} \quad (\text{F. Sónico}) \end{cases} \quad (2.49)$$

Sustituyendo  $P_2 = P_c$  y reemplazando la ecuación 2.46 en la ecuación de la velocidad (Ec. 2.38), se obtiene la **velocidad crítica**  $\tilde{v}_c$ :

$$\tilde{v}_c = \sqrt{\frac{2k}{(k+1)} \frac{P_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{2k}{(k+1)} R T_1}$$

Teniendo en cuenta que  $T_1 = \frac{k+1}{2} T_c$ , se obtiene:

$$\tilde{v}_c = \sqrt{k R T_c} \quad (2.50)$$

De manera que la velocidad  $\tilde{v}_c$  es igual la velocidad del sonido.

### 2.2.2. Conductancia Sónica

Se considera como método más preciso para determinar el flujo de aire a través de válvulas y restricciones. Básicamente este método establece que la relación de presión en la cual ocurre *flujo crítico* o *flujo sónico* en válvulas direccionales o en otros dispositivos de restricción es menor que el valor teórico de 0.528. Esto es debido al hecho que las válvulas direccionales no son generalmente dispositivos de restricción simple, en su lugar, tienen múltiples restricciones. El modelo tiene dos parámetros para describir la razón de flujo de masa de aire: la *relación de presiones crítica*  $b$  y la *conductancia sónica*  $C$ . El modelo se puede expresar como:

$$\dot{m} = \begin{cases} A_o C \rho_n P_1 \sqrt{\frac{T_n}{T_1}} \sqrt{1 - \left( \frac{\frac{P_2}{P_1} - b}{1 - b} \right)^2} & \text{si } \frac{P_2}{P_1} > b \\ A_o C \rho_n P_1 \sqrt{\frac{T_n}{T_1}} & \text{si } \frac{P_2}{P_1} \leq b \end{cases} \quad (2.51)$$

donde  $\rho_n$  y  $T_n$  son la densidad y la temperatura del aire a las condiciones de referencia establecidas por la correspondiente norma<sup>1</sup>.

La conductancia sónica,  $C$ , y la relación de presiones crítica,  $b$ , son definidos por la norma como parámetros que cuantifican la capacidad de flujo a través un componente neumático. [16]

<sup>1</sup>Según **ISO 6358**  $\rho_n = 1.185 \frac{kg}{m^3}$  y  $T_1 = 293.15 K$

## 2.3. Modelo de la Válvula de control de flujo

La válvula de estrangulación que se utiliza en el sistema neumático se representa como un orificio variable en la línea de flujo; esto implica, que el flujo que la atraviesa cumple con las ecuaciones 2.43 y 2.51, con el reemplazo del parámetro  $A_o$  por un término adicional: el **Área relativa** ( $A_r$ ), que se define como la relación entre el área geométrica variable del orificio de paso en un puerto de la válvula  $A_o$  y el área geométrica máxima  $A_{Omax}$ , o sea:

$$A_r \triangleq \frac{A_o}{A_{Omax}} \quad (2.52)$$

este parámetro es independiente de las presiones en el orificio, esta relacionado con la posición del husillo y cambia en función del número de vueltas de éste.

### 2.3.1. Cálculo del Flujo de Masa

El flujo de aire que atraviesa la válvula se ve afectado por la estrangulación en su interior, para determinar el caudal másico se parte de los estados antes y después de la misma (Puerto 1 y 2 respectivamente), además se introduce la variable  $N_v$  que representa el número de vueltas de apertura del husillo (Fig. 2.5). Debido a que se desconoce la geometría interna de la válvula, se establece una función para el área relativa en términos de  $N_v$ :

$$A_r = A_r(N_v) \quad (2.53)$$

Con las consideraciones particulares de este tipo de válvula establecidas, el flujo en la

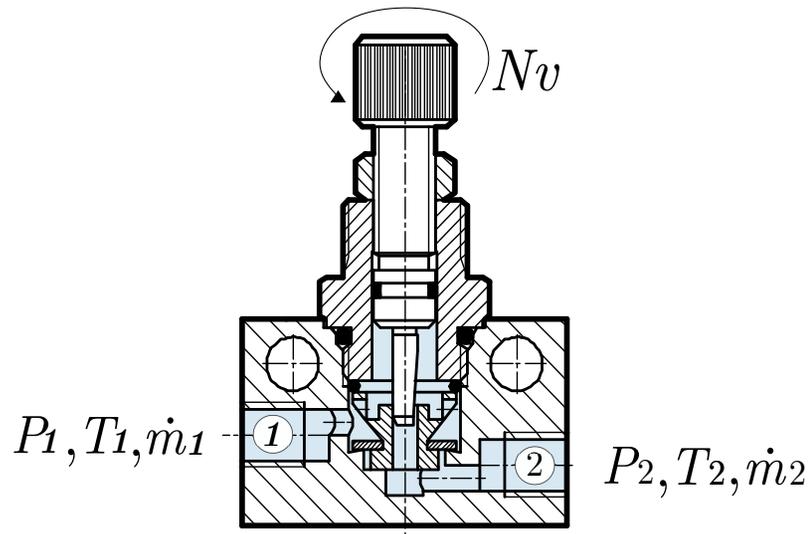


Figura 2.5: Esquema de la válvula

válvula se define como:

$$\dot{m}_v = \begin{cases} A_r(N_v)C\rho_n P_1 \sqrt{\frac{T_n}{T_1}} \sqrt{1 - \left(\frac{P_2}{P_1} - b\right)^2} & \text{si } \frac{P_2}{P_1} > b \\ A_r(N_v)C\rho_n P_1 \sqrt{\frac{T_n}{T_1}} & \text{si } \frac{P_2}{P_1} \leq b \end{cases} \quad (2.54)$$

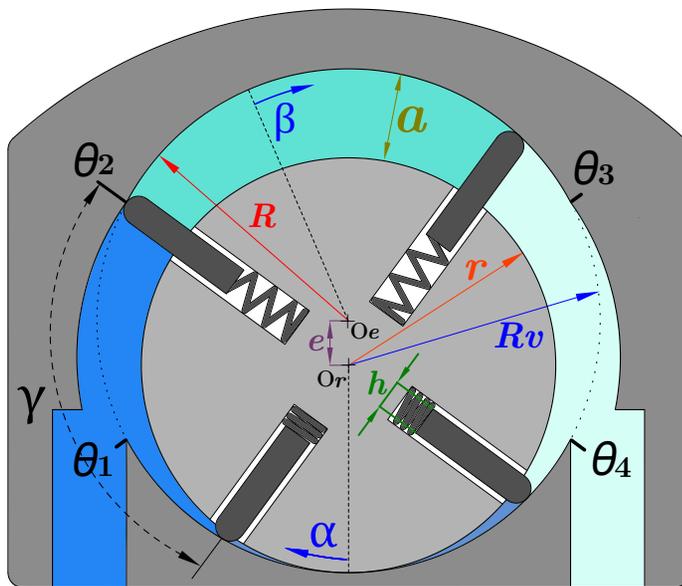
donde la conductancia sónica,  $C$ , la función para el área relativa,  $A_r(N_v)$ , y la relación de presiones crítica,  $b$ , son definidas experimentalmente.

## 2.4. Modelo del Motor de Aletas

El modelo matemático que describe la dinámica del actuador comprende la ecuación de movimiento para el elemento de salida (*eje*) y las ecuaciones de presión en las cámaras, para llegar a ellas primero se debe conocer la geometría del mecanismo, ésta expresada en coordenadas polares, y establecer las zonas donde se establecen los proceso de expansión y compresión de aire, así se logra determinar la presión respecto a la posición de las aletas. Conociendo la presión de las cámaras, se determina el torque que produce cada aleta y el torque neto sobre el rotor, que representa el trabajo hecho por el aire dentro de la ecuación de movimiento.

### 2.4.1. Descripción del funcionamiento

Un motor neumático de aletas consiste de un elemento giratorio que es un rotor ranurado de radio  $\mathbf{r}$  y de profundidad axial  $\mathbf{w}$  montado en un eje de accionamiento, cada ranura del rotor está equipado con una aleta rectangular de espesor  $\mathbf{h}$  libre para deslizarse. El rotor y las aletas están encerrados en el estator, el cual tiene un perfil circular de radio  $\mathbf{R}$  y cuyo centro esta desviado una distancia  $\mathbf{d}$  del eje de accionamiento del motor como se muestra en la figura 2.6. Cuando el rotor está en movimiento, las aletas tienden a deslizarse hacia el exterior a causa de la fuerza centrífuga. El funcionamiento del motor se logra por medio del aire que entra y el cual ejerce una fuerza rotacional en las pequeñas cámaras formadas por el rotor, estator y las aletas haciendo girar el conjunto alrededor del centro del rotor. En la parte inferior dos orificios son para entrada y salida de aire, estos puertos se pueden intercambiar proporcionando de esta manera que la rotación se pueda dar en cualquier sentido. La forma de la carcasa del rotor limita la distancia que las aletas se pueden deslizar. Los resortes insertados en las ranuras del rotor sostienen las aletas contra el estator durante el arranque inicial del motor, porque la fuerza centrífuga no existe hasta que el rotor empieza a girar. [10; 25]



**Figura 2.6:** Parámetros geométricos del interior del motor

### 2.4.2. Geometría del Motor

Para calcular el volumen de los compartimientos del motor, se definen los parámetros mostrados en la figura 2.6. El ángulo entre aletas  $\gamma$  dado por

$$\gamma = \frac{2\pi}{z}$$

donde  $z$  es el número de aletas.

La excentricidad  $e$  es la diferencia entre el radio interno del estator y el radio del rotor

$$e = R - r$$

La posición del extremo de las aletas respecto al centro del rotor ( $O_r$ ) está representado por  $R_v$  y  $\alpha$ , y respecto al centro del estator ( $O_e$ ) por  $R$  y  $\beta$ , el ángulo del estator  $\beta^1$  está en función del ángulo del rotor  $\alpha$  como:

$$\beta = \alpha - \arcsin\left(\frac{e \sin\alpha}{R}\right). \quad (2.55)$$

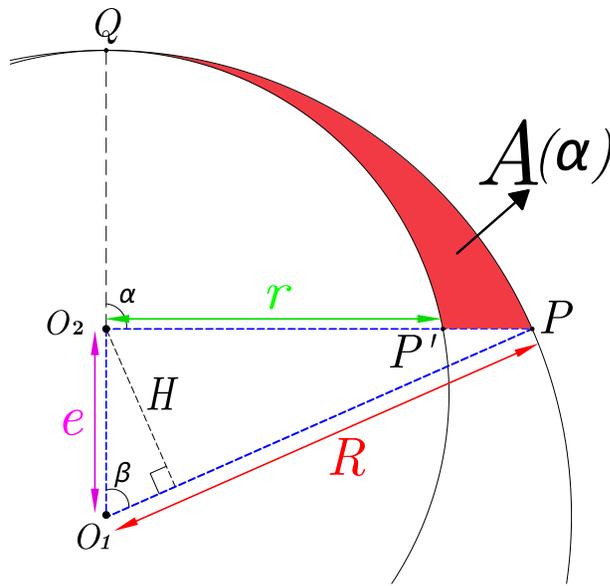
El radio variable  $R_v^2$  en términos del ángulo de giro  $\alpha$  viene dado por:

$$R_v(\alpha) = r + a(\alpha) = \sqrt{R^2 - (e \sin\alpha)^2} - e \cdot \cos\alpha \quad (2.56)$$

donde  $a(\alpha)$  describe el cambio de longitud de la parte de la aleta que sale del rotor. El

<sup>1</sup>Ver Apéndice C.1

<sup>2</sup>Ver Apéndice C.2



**Figura 2.7:** Cálculo del área transversal

área transversal que antecede a la aleta con posición  $(R_v, \alpha)$  es  $A(\alpha)$ , se puede determinar a partir de la figura 2.7, como:

$$A(\alpha) = \text{sección circular}[O_1PQ] - \text{sección circular}[O_2P'Q] - \text{triángulo}[O_1PO_2]$$

que según las definiciones para cada uno de estas zonas, corresponde a:

$$A(\alpha) = \frac{R^2\beta}{2} - \frac{r^2\alpha}{2} - \frac{RH}{2}, \quad (2.57)$$

si se toma en cuenta que

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{H}{e} \\ H &= e \sin \beta \end{aligned} \quad (2.58)$$

entonces el área resulta en:

$$A(\alpha) = \frac{1}{2}(R^2\beta - r^2\alpha - Re \sin \beta). \quad (2.59)$$

Valor que se obtiene también de manera analítica<sup>1</sup> considerando el área de la región limitada por las curvas  $r_1(\alpha) = r$  y  $r_2(\alpha) = R_v(\alpha)$ . También se debe tomar en cuenta el área que aportan las paletas a esta sección transversal; para una aleta,  $A_p(\alpha)$  se expresa como:

$$A_p(\alpha) = \frac{h}{2}a(\alpha), \quad (2.60)$$

<sup>1</sup>Ver Apéndice C.3

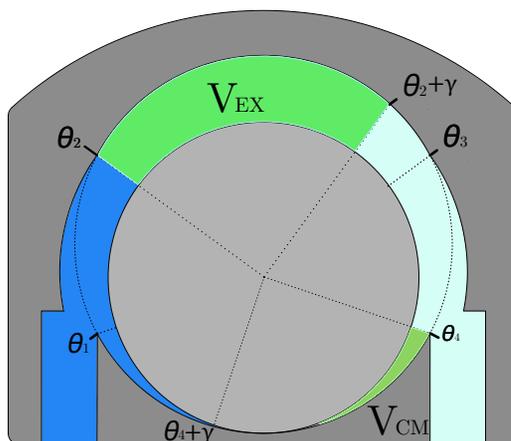
para dos paletas que cierran una cámara, ésta área resulta en:

$$A_{pc} = \frac{h}{2} (a(\alpha) + a(\alpha - \gamma)) \quad (2.61)$$

Por lo tanto, el volumen de la cámara variable ubicada detrás de la aleta en la posición  $(R_v, \alpha)$ , siendo  $w$  el largo de la aleta, se tiene:

$$V_c(\alpha) = w (A(\alpha) - A(\alpha - \gamma) + A_{pc}) \quad (2.62)$$

En la figura 2.8 se definen los ángulos que limitan los puertos de entrada y salida de aire,



**Figura 2.8:** Sectores de trabajo en el motor

así como los ángulos que encierran a los volúmenes de expansión  $V_{EX}$  y compresión  $V_{CM}$ , que representan la partida y final de los cambios de presión por procesos politrópicos, su valor corresponde a:

$$V_{EX} = V_c(\theta_2 + \gamma) = V(\theta_3) \quad (2.63)$$

$$V_{CM} = V_c(\theta_4 + \gamma) = V(\theta_1). \quad (2.64)$$

El volumen mínimo ( $V_{min}$ ) de una cámara se presenta cuando  $\alpha = \frac{\gamma}{2}$  y el volumen máximo ( $V_{max}$ ) se presenta para un ángulo  $\alpha = \pi + \frac{\gamma}{2}$ , la razón entre este volumen y el volumen de expansión (Fig. 2.9) determina en qué medida se utiliza la energía interna del aire y es llamada *razón de expansión*  $\varepsilon$ .

$$\varepsilon = \frac{V_{max}}{V_{EX}} \quad (2.65)$$

Para este tipo de motor se han medido valores desde  $\varepsilon = 1.0$  hasta  $\varepsilon = 1.43$ , si se tiene una alta razón de expansión, la potencia del motor incrementa pero la temperatura puede ser tan baja que el agua en el aire suministrado puede condensarse y afectar la integridad del motor.

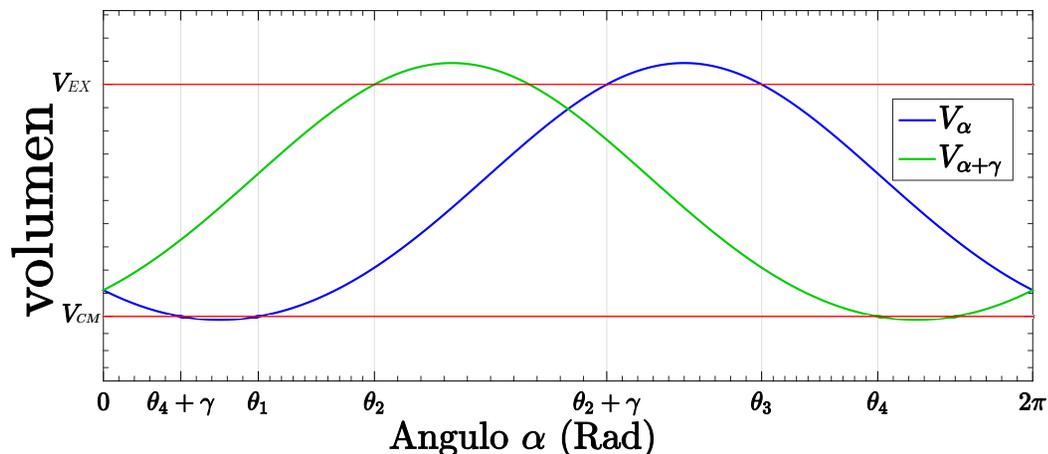


Figura 2.9: Volumen de las cámaras en función del ángulo

### 2.4.3. Presión en las cámaras

Como lo muestra la figura 2.8, aparecen zonas donde las cámaras están en contacto directo con los puertos del motor, y zonas en donde se encuentran delimitadas por el estator, el rotor y las aletas; debido a esto, la presión en cada volumen tiene un determinado comportamiento dependiendo de su ubicación. Bajo las consideraciones de que no hay fuga de aire entre las cámaras o hacia el exterior y que se desprecian los cambios de temperatura del aire dentro del motor, se puede establecer el valor de presión para cada sección.

Los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  y  $\theta_4$  sirven para establecer las fronteras en donde cambia la presión; para las secciones  $[\theta_1-\theta_2]$  y  $[\theta_3-\theta_4]$ , se va a considerar que toda cámara en contacto con éstas, va a estar a la presión del Puerto de entrada y salida respectivamente, en las secciones  $[\theta_2-\theta_3]$  y  $[\theta_4-\theta_1]$ , si la cámara se encuentra dentro de éstas, el aire encerrado presenta un cambio de presión de manera isentrópica, de la forma:

$$P_c(\alpha) = P_o \left( \frac{V_o}{V_c(\alpha)} \right)^k \quad k = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.66)$$

donde  $P_o$  y  $V_o$  son la presión y el volumen de la cámara al momento de entrar por completo al sector, los dos procesos isentrópicos que se presentan por ciclo están determinados por el arco que barre cada sector, es decir, para el sector  $[\theta_2-\theta_3]$  el proceso ocurre entre  $\theta_2 + \gamma$  y  $\theta_3$ , y para el sector  $[\theta_4-\theta_1]$  el proceso ocurre entre  $\theta_4 + \gamma$  y  $\theta_1$ ; estos recorridos se analizan para elegir los parámetros geométricos que optimizan el rendimiento del motor.

Con las anteriores consideraciones, ya se puede definir la función de presión en una cámara; sea  $P_s$  la presión a la entrada del motor,  $P_o$  la presión a la salida de éste, entonces la presión en la cámara tras la aleta con posición  $(R_v, \alpha)$  está determinada

como sigue:

$$P_c(\alpha) = \begin{cases} P_o & \text{si } \theta_3 < \alpha \leq \theta_4 + \gamma \\ P_o \left( \frac{V_{CS}}{V_c(\alpha)} \right)^k & \text{si } \theta_4 + \gamma < \alpha \leq \theta_1 \\ P_s & \text{si } \theta_1 < \alpha \leq \theta_2 + \gamma \\ P_s \left( \frac{V_{EX}}{V_c(\alpha)} \right)^k & \text{si } \theta_2 + \gamma < \alpha \leq \theta_3 \end{cases} \quad (2.67)$$

En la figura 2.11 se presentan las presiones en dos cámaras consecutivas; se aprecia la magnitud del cambio de presión por los procesos politrópicos, que si bien es pequeña comparado con la presión de suministro y de escape, es de considerar para motores con una apertura menor en sus puertos, además, estas fluctuaciones aportan en gran medida a la irregularidad en la velocidad de giro del motor.

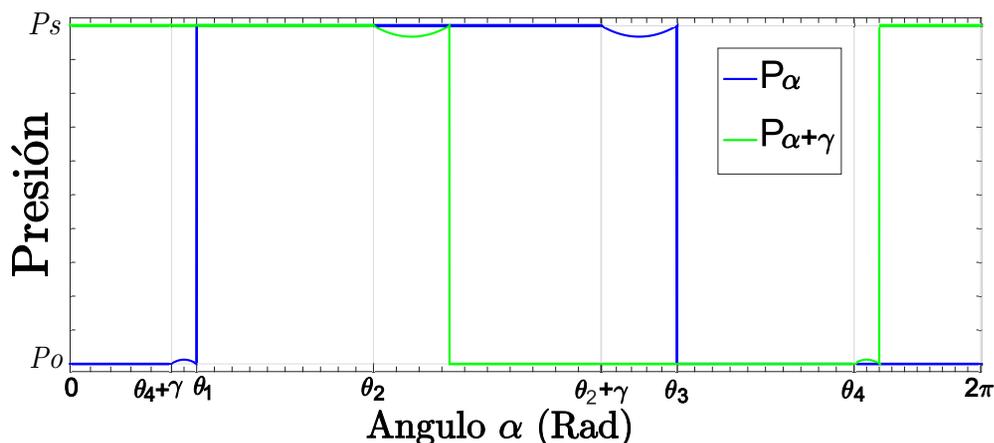


Figura 2.10: Presión en las cámaras en función del ángulo

#### 2.4.4. Torque en las aletas y torque neto en función del ángulo

Las fuerzas que actúan sobre las aleta debido a la diferencia de presión en sus cámaras vecinas, se ejecutan idealmente normal a éstas en el punto medio de su extensión saliente  $a(\theta)$  aunque hay sectores donde estas fuerzas se dirigen en oposición al sentido de giro, la suma de fuerzas de las aletas proporciona un par siempre positivo para impulsar el rotor. Considerando la aleta en posición  $(R_v, \alpha)$ , la diferencia de presión viene dada por

$$\Delta P(\alpha) = P_c(\alpha + \gamma) - P_c(\alpha) \quad (2.68)$$

y la fuerza ejercida sobre la aleta es

$$F(\alpha) = \Delta P(\alpha) \cdot a(\alpha) \quad (2.69)$$

Ahora, el brazo de momento respecto al eje de rotación para la aleta esta dado por

$$br(\alpha) = r + \frac{a(\alpha)}{2} \quad (2.70)$$

Por lo que el torque que ejerce la aleta resulta en:

$$\begin{aligned} \tau(\alpha) &= F(\alpha) \cdot br(\alpha) \\ \tau(\alpha) &= \Delta P(\alpha) \cdot a(\alpha) \cdot br(\alpha) \end{aligned} \quad (2.71)$$

El torque neto resulta de la sumatoria de el torque que aporta cada una de las cuatro aletas:

$$\tau(\alpha) = \sum_{i=0}^3 \tau(\alpha + i\gamma) \quad (2.72)$$

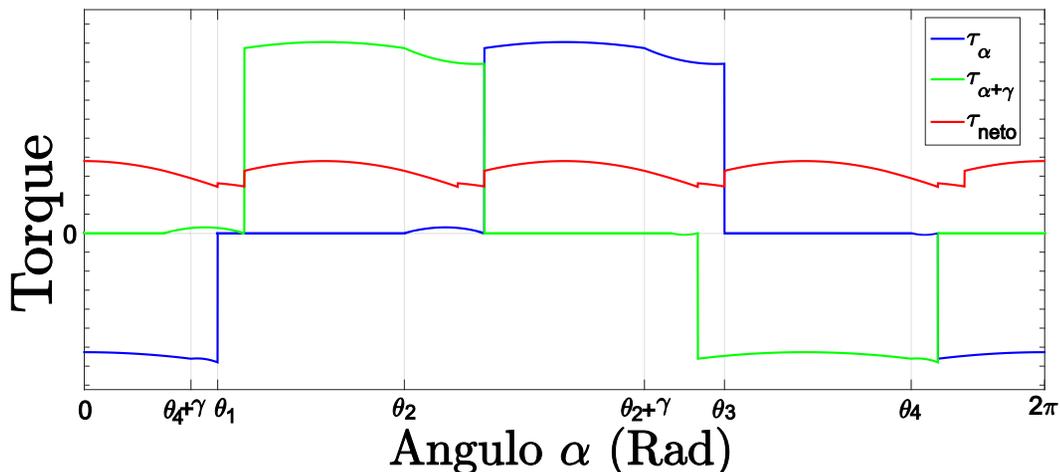


Figura 2.11: Torque en función del ángulo

### 2.4.5. Trabajo y potencia del motor

El cálculo del trabajo que realiza el motor, se aborda desde el punto de vista termodinámico; para empezar, se considera el trabajo en los sectores donde el aire esta sellado en la cámara y se comprime o se expande en un proceso isentrópico:

$$W_{exp} = W_{\frac{\gamma}{2} \rightarrow \theta_1} + W_{\theta_2 + \gamma \rightarrow \pi + \frac{\gamma}{2}} \quad (2.73)$$

$$W_{comp} = W_{\pi + \frac{\gamma}{2} \rightarrow \theta_3} + W_{\theta_4 + \gamma \rightarrow \frac{\gamma}{2}} \quad (2.74)$$

$$(2.75)$$

Donde a partir de la definición de trabajo politrópico (Sec. 2.1.9), se definen como:

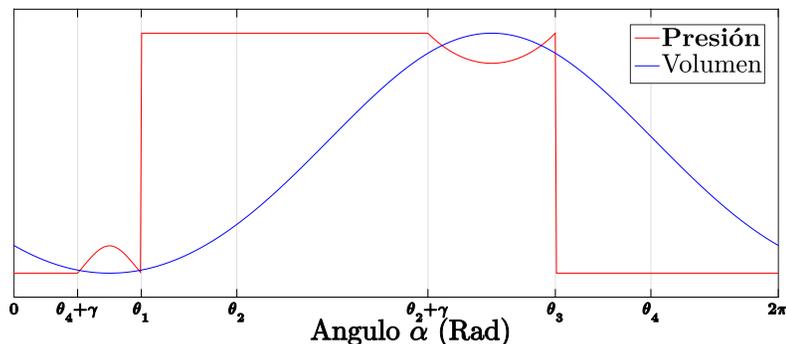
$$W_{\frac{\gamma}{2} \rightarrow \theta_1} = \frac{P_c(\frac{\gamma}{2})V_{min}}{k-1} \left( \frac{V_{CM}^{1-k}}{V_{min}} - 1 \right) \quad (2.76)$$

$$W_{\theta_2 + \gamma \rightarrow \pi + \frac{\gamma}{2}} = \frac{P_s V_{EX}}{k-1} (\varepsilon^{1-k} - 1) \quad (2.77)$$

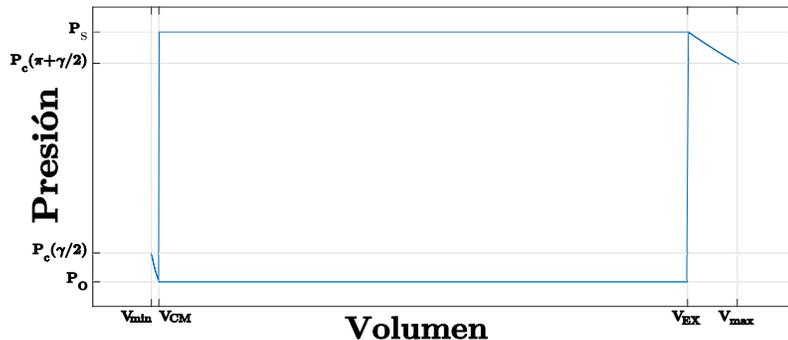
$$W_{\pi + \frac{\gamma}{2} \rightarrow \theta_3} = \frac{P_c(\pi + \frac{\gamma}{2})V_{max}}{k-1} (\varepsilon^{k-1} - 1) \quad (2.78)$$

$$W_{\theta_4 + \gamma \rightarrow \frac{\gamma}{2}} = \frac{P_o V_{CM}}{k-1} \left( \frac{V_{CM}^{k-1}}{V_{min}} - 1 \right) \quad (2.79)$$

Los estados en los límites de los sectores  $[\theta_4 + \gamma - \theta_1]$  y  $[\theta_2 + \gamma - \theta_3]$  son iguales, por lo



(a) Presión y volumen en función del ángulo



(b) Diagrama P-V para una revolución

**Figura 2.12:** Relación de presión y Volumen

que el trabajo total de estas secciones es igual a cero (Fig. 2.12 ). Ahora, en la sección de desplazamiento el trabajo se define como:

$$W_{dezp} = (P_s - P_o)(V_{EX} - V_{CM}) \quad (2.80)$$

El trabajo por revolución corresponde a la suma del trabajo en las etapas de compresión, expansión y la zona de desplazamiento. La potencia en el eje se considera la resultante

del trabajo que realiza el aire comprimido a la velocidad angular  $\omega$  menos la energía disipada considerada como

$$\frac{1}{2}C\omega^2$$

siendo  $C$  el coeficiente de fricción viscosa, entonces la potencia resulta como:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= W\omega - \frac{1}{2}C\omega^2 \\ &= (V_{EX} - V_{CM})(P_s - P_o)\omega - \frac{1}{2}C\omega^2 \end{aligned} \quad (2.81)$$

que se relaciona con el torque efectivo y resulta en:

$$\tau_e = \frac{\mathbf{P}}{\omega} = (V_{EX} - V_{CM})(P_s - P_o) - \frac{1}{2}C\omega \quad (2.82)$$

Este par efectivo en el eje del motor esta entonces en términos de la caída de presión entre los puertos y la velocidad de giro. [1]

### 2.4.6. Flujo volumétrico y caudal en el motor

El volumen de aire que atraviesa al motor por revolución se puede determinar a partir de

$$\mathbf{q} = \frac{\bar{V}\omega}{2\pi} \quad (2.83)$$

donde  $\bar{V}$  es el volumen efectivo por revolución que se calcula a partir de la figura 2.8 como:

$$\bar{V} = K(zV_{EX} - V_{CM}) \quad (2.84)$$

donde  $V_{EX}$  es el volumen de aire que queda aislado del puerto de entrada,  $V_{CM}$  es el volumen de aire remanente luego de que la cámara pase por el puerto de salida, y  $K$  es el módulo de compresibilidad del aire. [10]

El módulo de compresibilidad es una aproximación del coeficiente de compresibilidad adiabático, definido como:

$$K_s = -V \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_s \quad (2.85)$$

El caudal másico que pasa por el motor, a partir de la relación con el flujo volumétrico (Ec. 2.6) y la densidad de la ecuación 2.15 resulta en:

$$\dot{m}_m = \rho q = \frac{P_s}{RT} \mathbf{q} \quad (2.86)$$

### 2.4.7. Dinámica del Motor

El eje que sale del motor es una extensión del rotor, es decir, son una misma pieza mecánica; por tanto se el giro del eje va a depender de el torque neto que afecta al rotor, este par primero tiene que superar el amortiguamiento y la fricción en seco entre las paletas y el perfil del estator, con el fin de accionar el motor. Ignorando la masa de la aleta, se puede representar el motor como un sistema de segundo orden definido por:

$$J\ddot{\alpha} + C\dot{\alpha} = \tau(\alpha) - T_{ex} - T_d \operatorname{sgn}(\dot{\alpha}) \quad (2.87)$$

donde  $J$  es el momento de inercia del rotor,  $C$  es el coeficiente de amortiguamiento viscoso,  $\tau(\alpha)$  es el par neto obtenido en la sección 2.4.4,  $T_{ex}$  es la carga externa y  $T_d$  es el torque de fricción de Coulomb producida principalmente por la paleta en contacto con el estator.

El comportamiento de la fricción depende de las fuerzas de contacto entre la aleta y el rotor, la aleta y el estator, los coeficientes de fricción de los material y la presión entre cámaras [31]. Todas estas consideraciones son las que determinan en parte la no-linealidad de la velocidad en el motor, sobre todo a bajas revoluciones. Sin embargo, a mayor velocidad, la simplificación formulada en la sección 2.1.7 es válida para este actuador y los parámetros  $T_d$  y  $C$  se determinan experimentalmente.

## 2.5. Variables de Estado

Para simular el comportamiento de la válvula reguladora de flujo se toma como **variable de estado**  $x_1 = P_2$ , la presión en el volumen  $V_P$  objeto de presurización; el flujo de aire ( $x_2 = \dot{m}_v$ ) dado en la ecuación 2.54 sirve como variable intermedia y como variables de entrada  $u_1 = P_1$  y  $u_2 = N_v$ .

La representación del modelo para el motor de aletas; requiere como variables de estado del sistema  $x_3 = \alpha$  que es el ángulo de desplazamiento de las paletas al interior del motor y  $x_4 = \omega = \dot{\alpha}$  la velocidad angular de giro, como variable de entrada  $u_3 = P_s$  la presión en el puerto de entrada, además, el par efectivo, el caudal y el flujo másico se pueden calcular con ayuda de  $\omega$ , para ello se definen  $x_5 = \tau_e$ ,  $x_6 = q$  y  $x_7 = \dot{m}_m$ .

Haciendo uso de las ecuaciones que determinan estas variables, se obtiene:

$$\dot{x}_1 = \frac{nRT_1}{Vm + V_P} x_2 \quad (2.88)$$

$$x_2 = A_r(u_2) f \left( u_1, T_1, \frac{u_1}{x_1} \right) \quad (2.89)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (2.90)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\tau(x_3)}{J} - \frac{C}{J} x_4 - \frac{T_d}{J} \text{sgn}(x_4) - \frac{T_{ex}}{J} \quad (2.91)$$

$$x_5 = (V_{EX} - V_{CM})(u_3 - P_o) - \frac{1}{2} C x_4 \quad (2.92)$$

$$x_6 = \frac{\bar{V} x_4}{2\pi} \quad (2.93)$$

$$x_7 = \frac{u_1}{RT} x_6 \quad (2.94)$$

donde

$$f \left( u_1, T_1, \frac{u_1}{x_1} \right) = \begin{cases} C \rho_n u_1 \sqrt{\frac{T_n}{T_1}} \sqrt{1 - \left( \frac{\frac{x_1}{u_1} - b}{1 - b} \right)^2} & \text{si } \frac{x_1}{u_1} > b \\ C \rho_n P_1 \sqrt{\frac{T_n}{T_1}} & \text{si } \frac{x_1}{u_1} \leq b \end{cases} \quad (2.95)$$

$$\tau(x_3) = \sum_{i=0}^3 \tau(x_3 + i \frac{\pi}{2}) \quad (2.96)$$

$$\text{sgn}(x_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_4 \geq 0 \\ -1 & \text{si } x_4 < 0 \end{cases} \quad (2.97)$$

$$\bar{V} = 4(V_{EX} - V_{CM}) \quad (2.98)$$

## Descripción del Sistema

---

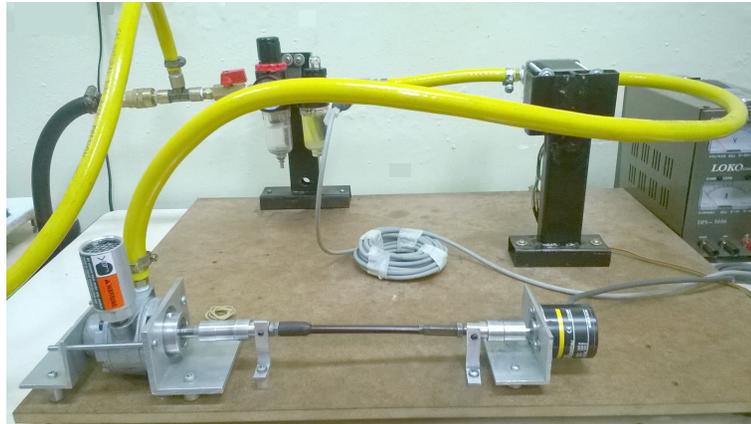
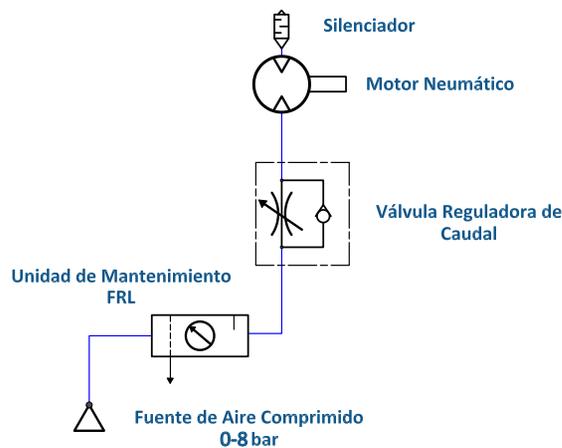
**S**E CONSIDERA UN SISTEMA NEUMÁTICO a todo aquel que funciona en base a aire comprimido. Estos se usan extensamente en la automatización de maquinaria de producción y en el campo de los controladores automáticos. Los sistemas neumáticos se complementan con los eléctricos y electrónicos lo que les permite obtener un alto grado de sofisticación y flexibilidad. Debido a que los sistemas neumáticos se encuentran con abundancia en la industria, los ingenieros deben estar familiarizados con los principios básicos de los componentes.

Los sistemas de aire comprimido que proporcionan un movimiento controlado con el empleo de cilindros y motores neumáticos, se aplican en herramientas como: válvulas de control, posicionadores, martillos neumáticos, pistolas para pintar, sistemas de empaquetado, elevadores, herramientas de impacto, prensas neumáticas, robots industriales, vibradores, frenos neumáticos, etc.[13]

### 3.1. Sistema Neumático

El sistema neumático implementado en este proyecto se muestra en la figura 3.1. Los elementos que lo componen son; una fuente de aire comprimido que esta formada por el compresor de aire y un depósito de almacenamiento, la unidad de mantenimiento (filtro, regulador de presión y lubricador), la válvula reguladora de caudal, el motor de aletas (actuador), los elementos de entrada y la unidad de adquisición y procesamiento de datos.

Los elementos de sistemas neumáticos suelen ser concebidos para presiones de servicio de hasta 10 bar. No obstante que por razones económicas y de seguridad, se trabaja en la práctica con presiones entre 4 y 6 bar.[11]

(a) *Montaje experimental*(b) *Esquema del Circuito Neumático***Figura 3.1:** Sistema neumático

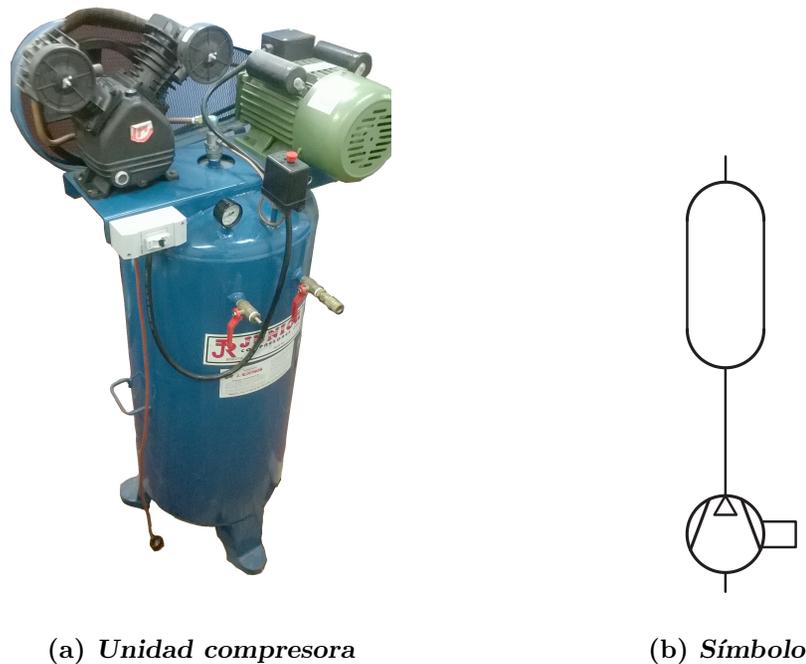
### 3.1.1. Generación del aire comprimido

Los compresores son los componentes principales de la producción de aire comprimido, estos se encargan de aspirar aire de la atmósfera y llevarlo al valor deseado, el funcionamiento de un compresor se aprecia por caudal que suministra y el por tipo de compresión que utiliza. Enseguida del compresor se sitúa el acumulador o depósito, sus objetivos son; almacenar aire comprimido para suministrarlo en los momentos de consumo, permitir que los motores de los compresores no tengan que trabajar de manera continua, sino intermitentemente, además debe garantizar un caudal constante. Generalmente el acumulador lleva un presostato, que activará el compresor cuando la presión disminuya hasta un cierto límite y lo desconectará cuando la presión alcance cierto tope. También van provistos de accesorios como un manómetro, una válvula de

seguridad y una llave de purga para liberar directamente los condensados. Gracias a la superficie del acumulador, el aire se refrigera adicionalmente.

En la figura 3.2 se muestra la unidad compresora que posee el grupo de investigación Sistemas Dinámicos y Control (SIDICO). A continuación se describen sus características:

- Potencia: 2HP 1.5KW Monofásico 110/220 V
- Capacidad de almacenamiento: 300 L
- Presión Máxima: 300 psi



**Figura 3.2:** Unidad compresora

El aire comprimido contiene impurezas que pueden producir perturbaciones en el funcionamiento y un rápido deterioro de las instalaciones neumáticas, estas impurezas están formadas por polvo, hollín, suciedad, hidrocarburos, gérmenes y vapor de agua, a estas se suman las partículas que provienen del propio compresor, tales como polvo de abrasión por desgaste, aceites y aerosoles, los residuos y depósitos de la red de tuberías, tales como oxido, cascarilla, residuos de soldadura y las sustancias hermetizantes que pueden producirse durante el montaje de las tuberías y accesorios. Estas impurezas pueden crear partículas más grandes que dan origen muchas veces a averías y pueden

conducir a la destrucción de los elementos neumáticos. Es vital eliminarlas en los procesos de producción de aire comprimido, en los compresores y en la preparación para la alimentación directa de los dispositivos neumáticos. El proceso de elaboración del aire puede clasificarse en dos fases: La eliminación de partículas gruesas y la preparación fina del aire (aire seco). [13]

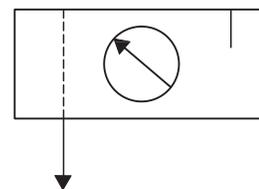
### 3.1.2. Alimentación directa de los dispositivos neumáticos

Una vez generado el aire comprimido en el compresor, debe ser acondicionado para que alimente en óptimas condiciones a los dispositivos neumáticos, es necesario utilizar la unidad de mantenimiento.

**Unidad de mantenimiento (FRL)** Está compuesta por un filtro, un regulador de presión, un lubricador del aire y un manómetro (figura 3.3). El aire debe ser filtrado para que las partículas remanentes que no han sido eliminadas o generadas en el acumulador, no ejerzan una acción de abrasión sobre los elementos neumáticos. Además los dispositivos neumáticos deben alimentarse con el aire comprimido a una presión determinada (normalmente 4-6 bares *man*) independientemente de los consumos variables de la instalación, misión que realiza el regulador de presión. Por otro lado, las partes móviles de los sistemas neumáticos necesitan lubricación, función realizada por el lubricador. [13]



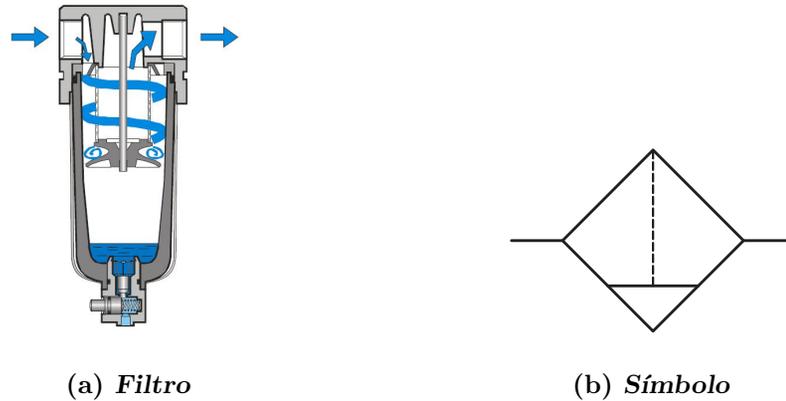
(a) *FRL*



(b) *Símbolo*

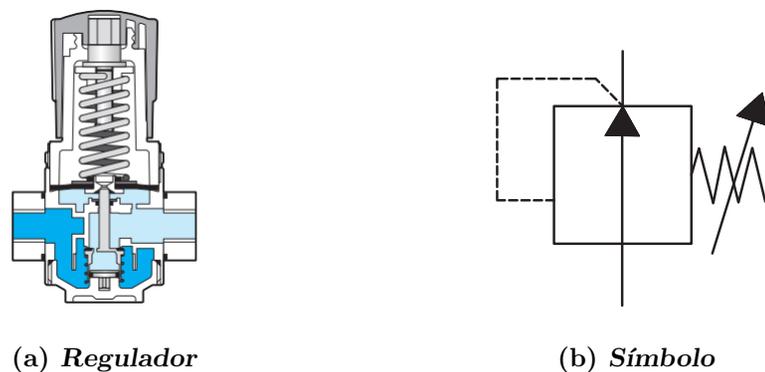
**Figura 3.3:** Unidad de mantenimiento

**Filtro** Tiene como función eliminar las impurezas y la humedad contenida en las tuberías de aire comprimido impartiendo un movimiento en ciclón al aire con lo que las impurezas se separan por la fuerza centrífuga. Dispone de cartuchos filtrantes porosos de 5 a 100 micras que deben limpiarse y cambiarse periódicamente (figura 3.4). El condensado de los contaminantes se purga de forma manual o automática por medio de un tornillo de purga situado en la parte inferior del filtro.[13]



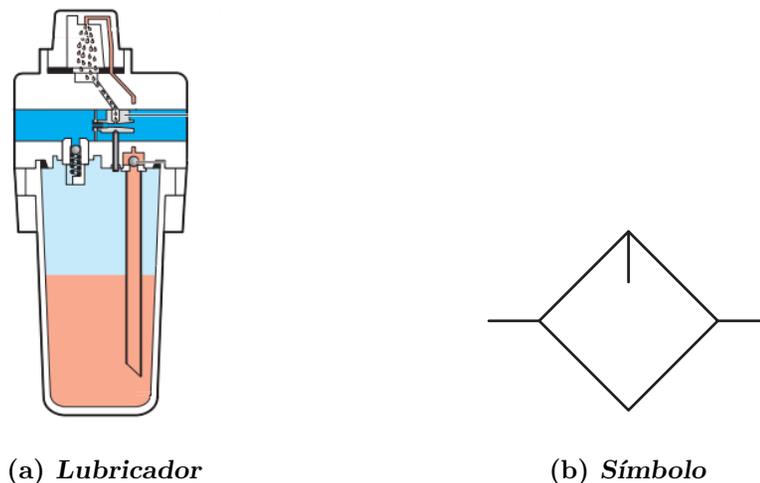
**Figura 3.4:** Filtro

**Regulador de presión** Tiene como misión graduar la presión de entrada (presión primaria) al sistema, de modo que pueda mantener constante el consumo de aire y la presión de trabajo (presión secundaria), independientemente de las variaciones que sufra la presión de entrada. La presión de salida se regula a través de una membrana que está equilibrada por un lado, por la fuerza ejercida debido a la presión de trabajo y en el otro por la fuerza de un resorte ajustable mediante un tornillo (tornillo de ajuste). La presión de salida viene indicada por un manómetro (figura 3.5).[13]



**Figura 3.5:** Regulador

**Lubricador** Su función principal es proporcionar al aire una película de lubricante necesaria para el funcionamiento correcto de dispositivos neumáticos (cilindros, motores, válvulas). Funciona de acuerdo con el principio de Venturi, aspirando una fina cantidad de aceite contenido en el depósito de alimentación, que va a la cámara de goteo, mediante la caída de presión que se produce al pasar el aire comprimido de alimentación por una tobera Venturi, y pulverizándolo en forma de aerosol al entrar en contacto con la corriente de aire a presión. La cantidad de aceite nebulizado es proporcional al caudal de aire a presión (figura 3.6). [13]



**Figura 3.6:** Lubricador

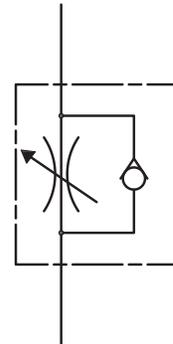
### 3.1.3. Válvula Reguladora de Caudal

Las válvulas reguladoras de caudal se utilizan para el control de velocidad de actuadores neumáticos, así como también para la obtención de efectos de retardo de señales neumáticas (temporización neumática) [23]. Las válvulas reguladoras de caudal se pueden dividir en dos grupos:

- Reguladores Unidireccionales.
- Reguladores bidireccionales.

Los reguladores unidireccionales regulan el caudal en una sola dirección y permiten la libre circulación del aire en el sentido opuesto. Un regulador de este tipo se utiliza en presente proyecto y se muestra en la figura 3.7. En los reguladores bidireccionales el flujo es regulado en cualquiera de las dos direcciones. Las válvulas reguladoras bidireccionales, representan en palabras simples, una estrangulación en el conducto por el cual fluye el fluido, con lo cual se le restringe el paso, por otro lado la válvula de regulación

unidireccional, está constituida, por dos válvulas; una de retención y otra que permite regular el caudal. [18; 23]

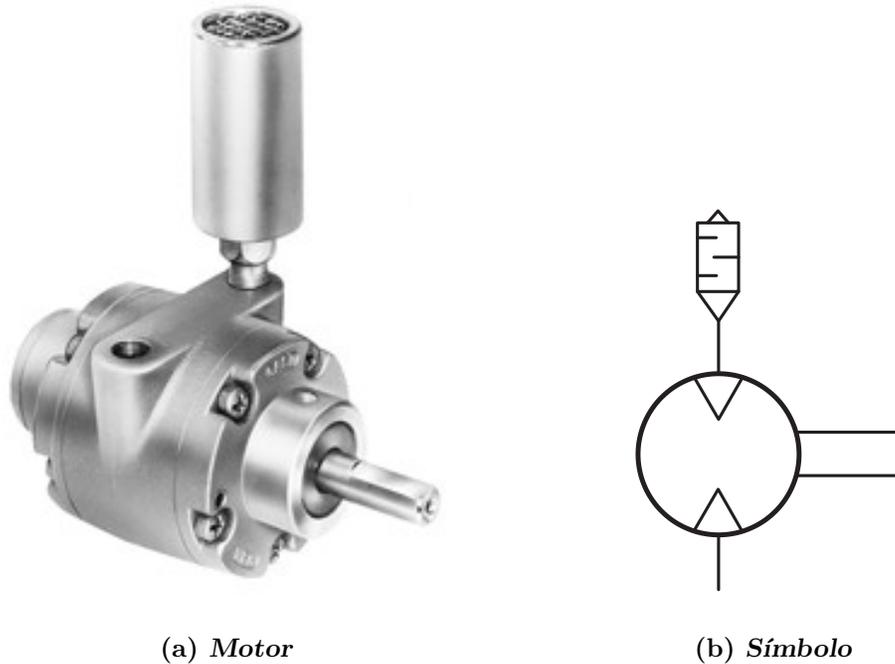
(a) *Válvula*(b) *Símbolo***Figura 3.7:** Válvula Reguladora de Caudal

### 3.1.4. Motor de Aletas

El motor de aletas tiene un rotor circular montado excéntricamente en una cámara fija (Estator) con dos orificios ubicados simétricamente en esta. El rotor cuenta con una serie de aletas alojadas en ranuras a lo largo si mismo, las cuales mediante resortes se contactan con la parte interior de la cámara fija. Existen tipos diferentes de motores de aletas, los hay de *tipo no reversible* en donde el rotor se ubica excéntricamente respecto al estator de tal manera que la zona en donde estan más separados corresponda con la zona del puerto de salida de aire, los de *tipo reversible* usan un diseño simétrico y pueden girar en ambas direcciones, los diseños europeos tienen además un puerto extra de entrada de aire equidistante de los otros dos , el aire ejerce una fuerza rotacional en las pequeñas cámaras formadas por el eje, la cámara fija y las aletas haciendo girar el conjunto alrededor del centro del rotor.[1; 13]

El motor en funcionamiento causa mucho ruido (puede alcanzar hasta los  $78dB$ ), el cual es motivado por el aire que se encuentra en las cámaras del actuador y al salir a través del escape presenta una violenta expansión; con el objeto de atenuar el nivel de ruido en la instalación neumática es necesario acoplar un silenciador al motor. El dispositivo permite disminuir el nivel de ruido de manera considerable y además no restringe el

paso de aire. En la figura 3.8 puede verse el tipo de motor de aletas y el silenciador utilizados en el presente proyecto.



**Figura 3.8:** Motor de aletas

## 3.2. Elementos de Entrada

Para determinar de manera cuantitativa los cambios y el comportamiento del sistema neumático anteriormente descrito, es necesario hacer uso de instrumentos de medida, los cuales permiten registrar las magnitudes de las variables de importancia en este mecanismo, como lo son las **revoluciones por minuto** (RPM) con las que gira el eje del motor, la **presión** ( $P$ ) en las etapas del circuito neumático, el **par** ( $\tau$ ) en el eje del motor y el **caudal** ( $Q$ ) que atraviesa el sistema. Estos instrumentos son dispositivos transductores y entregan de manera indirecta la alteración de la variable deseada por lo que se requiere de comprender sus parámetros de operación y así realizar las conversiones necesarias para llegar a conocer los cambios reales de la magnitud física de interés.

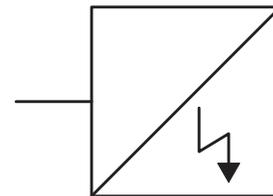
### 3.2.1. Sensor de Presión

La presión en el sistema es sensada de las siguientes maneras; por el manómetro que viene incluido en la unidad de mantenimiento, y para mayor precisión, por el transmisor de presión *Festo SDET-22T-D10-G14-U-M12* (figura 3.9), el cual se presta para ser instalado en cualquier etapa del circuito neumático, presenta una gran robustez y fidelidad de su señal, requiere de alimentación eléctrica independiente (14-24)V por lo que se implementó un circuito de acople entre éste transductor y el resto de la electrónica presente. Este sensor además presenta las siguientes características:

- Salida analógica: 0.1-10 V (3 hilos)
- Presión de entrada: 0-10 bar
- Precisión: 1.0 %
- Resistencia de carga  $RL > 10k$
- Constante de tiempo:  $\tau \leq 2\mu s$



(a) *Sensor de Presion*



(b) *Símbolo*

**Figura 3.9:** Sensor de Presion

Se utilizó este sensor en distintas partes del montaje neumático y en las etapas de caracterización, por lo que se usaba junto con un racor tipo T y conectaba interviniendo la línea de flujo.

### 3.2.2. Encoder Rotativo

Para medir la velocidad angular en el eje del motor se utiliza un Encoder Óptico rotativo *Omron E6B2-CWZ6C* (figura 3.10), éste presenta fácil ajuste de la posición inicial gra-

cias a la función de paso por cero (fase Z), también permiten una carga grande de 30 N en dirección radial y de 20 N en dirección axial. Además el circuito de protección contra cortocircuito y conexión invertida aseguran una alta fiabilidad en su funcionamiento, otras características se indican a continuación:

- Voltaje de alimentación: 5-24 V
- Configuración de salida: Salida de colector abierto (NPN)
- Resolución (pulso/rotación)P/R: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 100, 200, 300, 360, 400, 500, 600, 720, 800, 1.000, 1.024, 1.200, 1.500,1.800, 2.000
- Fases de salida: A, B, y Z
- Torque de arranque: 0.98 N.m max.
- Máxima velocidad permitida: 6,000 r/min.
- Tiempo de salida(sube y baja):  $1\mu s$  máx.

Se acopló de manera inicial al motor mediante un mecanismo que usa una guaya para transmitir la velocidad entre los ejes motor-encoder sin transmitir todo el par entre estos, este mecanismo permite mayor flexibilidad a la hora de alinear los ejes. Al momento de realizar las pruebas de torque en el eje del motor se cambio el mecanismo de la guaya por un mecanismo en donde un eje metálico se ubica de manera colineal entre el motor y el encoder, aquí es necesaria mayor precision para acoplar y alinear las partes y evitar sobreesfuerzos que afecten la integridad del encoder.



**Figura 3.10:** Encoder rotativo

### 3.2.3. Rotámetro

El rotámetro es un caudalímetro industrial que se usa para medir el caudal de líquidos y gases. El rotámetro consiste en un tubo y un flotador (figura 3.11). La respuesta del flotador a los cambios de caudal es lineal, y un rango de flujo de 10:1 es estándar. La operación del rotámetro se basa en el principio de área variable: El flujo de fluido eleva el flotador en un tubo ahusado, lo que aumenta el área para el paso del fluido. Cuanto mayor es el flujo, más alto se eleva el flotador. La altura del flotador es directamente proporcional al caudal. Con líquidos, el flotador se eleva por una combinación de la flotabilidad del líquido y la altura equivalente de velocidad del fluido. Con los gases, la flotabilidad es despreciable, y el flotador responde solo a la altura equivalente de velocidad.

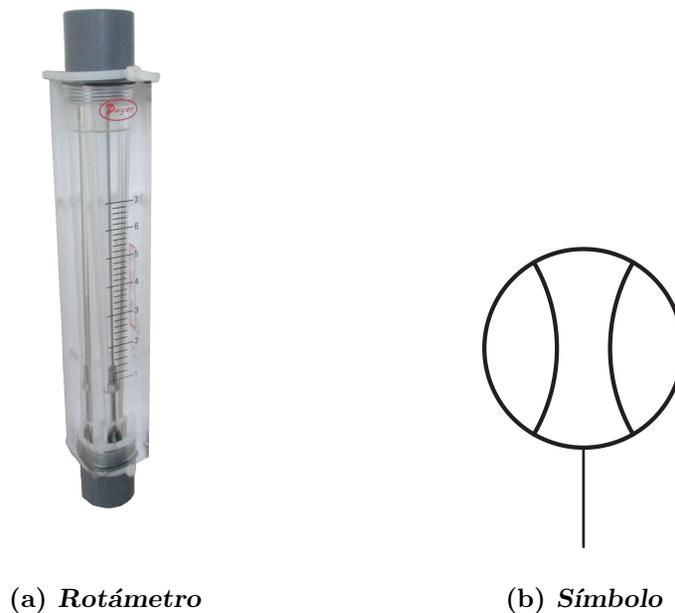


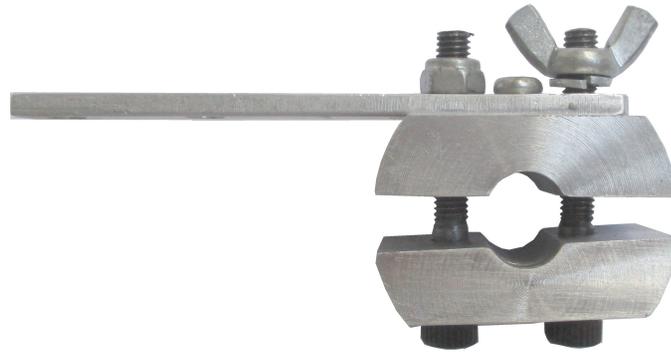
Figura 3.11: Rotámetro

El flotador se mueve hacia arriba o hacia abajo en el tubo en proporción al caudal de fluido y el área anular entre el flotador y la pared del tubo. El flotador alcanza una posición estable en el tubo cuando la fuerza ascensional que ejerce el fluido en movimiento es igual a la fuerza gravitatoria hacia abajo que ejerce el peso del flotador. Un cambio en el caudal afecta este equilibrio de fuerzas. El flotador luego se mueve hacia arriba o hacia abajo, y cambia el área anular hasta que nuevamente alcanza una posición en la que las fuerzas están en equilibrio. Para satisfacer la ecuación de fuerzas, el flotador del rotámetro supone una posición distinta para cada caudal constante. Sin embargo, es importante señalar que debido a que la posición del flotador depende de la gravedad,

los rotámetros deben estar orientados y montados verticalmente. [2]

#### 3.2.4. Freno de Prony

es un freno dinamométrico que se usa para medir la potencia efectiva existente en los ejes de los motores de combustión interna, de vapor, eléctricos, etc. Es del tipo de absorción de la potencia del motor para realizar un trabajo que venza al realizado por la fuerza de rozamiento.



**Figura 3.12:** Freno de Prony

Consta de dos zapatas que abrazan al eje cuya potencia se quiere medir, recubiertas, en la zona de contacto, de material especial para realizar la fuerza necesaria en la fricción y para resistir las altas temperaturas y esfuerzos mecánicos a que son sometidas. Las dos zapatas están unidas por dos pernos roscados que cuentan con tuercas para ajustarlas al eje y regular la presión que ejercen sobre el mismo (figura 3.12). Cuando el eje gira, ejerce fuerza hacia abajo que puede ser tanto medida como compensada en el extremo del brazo, en estas condiciones el trabajo del motor se consume por el rozamiento en el freno, y debido al equilibrio puede determinarse esta fuerza ejercida por el eje del motor.

### 3.3. Elementos de Salida

Tanto en lazo abierto como en lazo cerrado se hacen necesarios instrumentos que permitan interactuar con el sistema neumático y modificar el comportamiento del sistema; como dispositivo de manipulación de la señal en este circuito neumático (figura 3.1) se encuentra la válvula reguladora de flujo, el accionamiento de este requiere del girar el tornillo en función de permitir proporcionalmente el paso de aire por el resto de la línea neumática, para realizar tal proceso se acondiciona un motor paso a paso cuyas

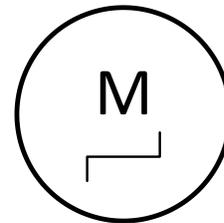
características principales se mencionan a continuación.

### 3.3.1. Motor Paso a Paso

Los motores paso a paso son ideales para la construcción de mecanismos en donde se requieren movimientos muy precisos. La característica principal de estos motores es el hecho de poder moverlos un paso a la vez por cada pulso que se le aplique.



(a) *Motor PaP*



(b) *Símbolo*

**Figura 3.13:** Motor Paso a Paso

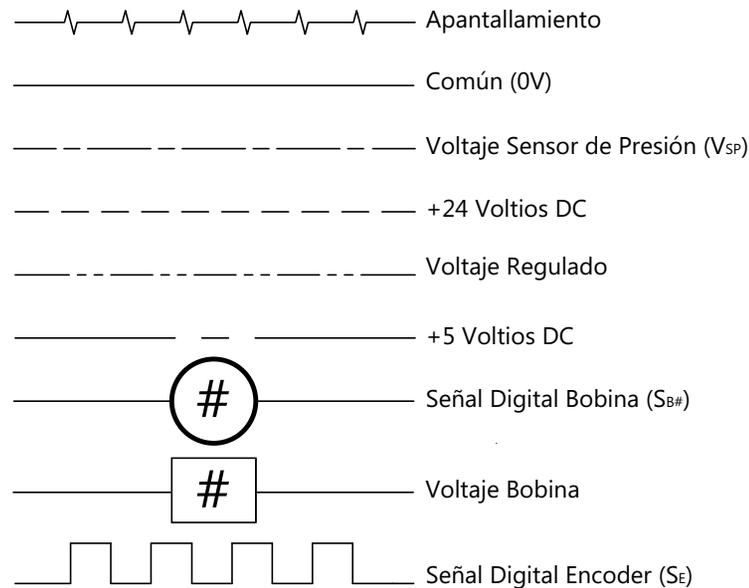
Este paso puede variar desde  $90^\circ$  hasta pequeños movimientos de tan solo  $1.8^\circ$ , es decir, que se necesitarán 4 pasos en el primer caso ( $90^\circ$ ) y 200 para el segundo caso ( $1.8^\circ$ ), para completar un giro completo de  $360^\circ$ . Estos motores poseen la habilidad de poder quedar enclavados en una posición o bien totalmente libres. Si una o más de sus bobinas está energizada, el motor estará enclavado en la posición correspondiente y por el contrario quedará completamente libre si no circula corriente por ninguna de sus bobinas.

El paso a paso utilizado en este proyecto es de tipo *unipolar* que permite accionar de manera independiente cada una de las 4 bobinas que lo componen, está ubicado sobre un soporte adecuado de tal manera que su eje y el eje del tornillo de la válvula se encuentren de manera colineal para que el motor sea quien accione esta válvula (figura 3.13). También es necesario para este motor realizar una etapa de acoplamiento de

señales ya que el funcionamiento de sus bobinas demanda una corriente mucho mayor a la que puede recorrer el resto del circuito electrónico y por tanto requiere de una fuente de alimentación independiente.

### 3.4. Adquisición de Datos

La adquisición de las señales presentes en el sistema se realiza a través de un sistema compuesto por PC, una tarjeta de adquisición de datos de National Instruments y circuitos electrónicos de acondicionamiento de señal. Las señales del sensor de presión y el encoder son llevados a una bornera, de esta se une a un conector de terminal de National Instruments que se ensambla en la tarjeta PCI. Además la tarjeta comunica la señal de control desde el PC hacia el elemento de control (la válvula reguladora de caudal) manipulando el estado de las bobinas del motor paso a paso. Para la obtención de datos referentes al torque y el caudal no se hace uso de mecanismos electrónicos y el registro se hace de forma manual. En la figura 3.14 se observa la simbología que se usó para identificar las distintas señales que se tienen en el sistema.



**Figura 3.14:** Simbología de las señales

Todas las señales que entran y salen de la tarjeta PCI son procesadas en el software LabView<sup>®</sup>, donde se acondicionan para su monitoreo, visualización y registro. De este software se programan las señales digitales hacia el sistema, que resultan en pulsos

eléctricos sobre las bobinas del mecanismo actuador.

### 3.4.1. Tarjeta PCI

La tarjeta de National Instruments PCI-6023E (figura 3.15), es un dispositivo multifuncional de adquisición de señales; cuenta con entradas analógicas, entradas y salidas digitales, contadores y relojes repartidos en 50 pines <sup>1</sup>, se ensambla a la placa del PC y con salida hacia una bornera para la conexión de los cables de señal. Para el presente proyecto se utilizaron 9 pines para la interfaz de la siguiente manera:

- **ACH(0-1)**, Sensor de presión.
- **GPCTR0\_GATE**, Encoder óptico.
- **DIO(0-3)**, Motor paso a paso.
- **GND**, Comun o 0V



**Figura 3.15:** Tarjeta PCI 6023E

La configuración de estos pines para su correcta utilización se realizó por medio del software *Measurement & Automation Explorer* (MAX) de National Instruments, en donde se establecen los parámetros de escala y muestreo de las señales de entrada y los pines digitales como *output* para el motor paso a paso.

---

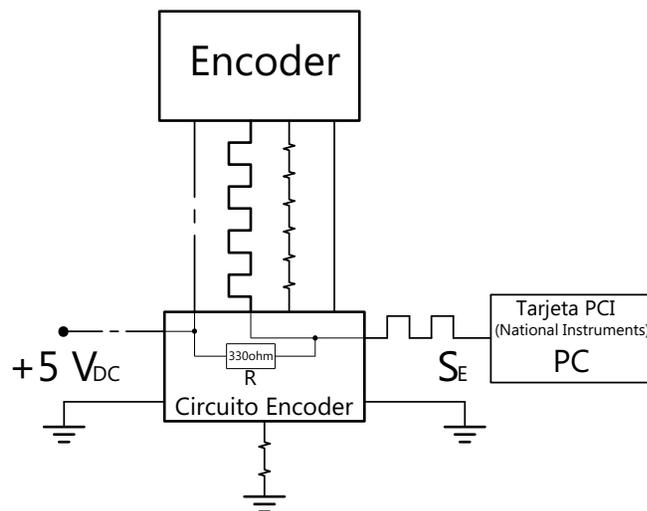
<sup>1</sup>Ver Apéndice B.2

### 3.4.2. Señales de Entrada

En la interfaz Sistema neumático - PC , la información sobre el estado del sistema se registra a través de variables como presión, caudal, torque y velocidad angular, cada parámetro de estos necesita una adecuación diferente para que la información tenga fidelidad a el estado real del circuito neumático. Por limitaciones en cuanto a instrumentación, algunas medidas se obtiene en un corto rango y baja resolución, pero que sin embargo son útiles a la hora de comprender el comportamiento del sistema estudiado.

#### 3.4.2.1. Medida de velocidad angular

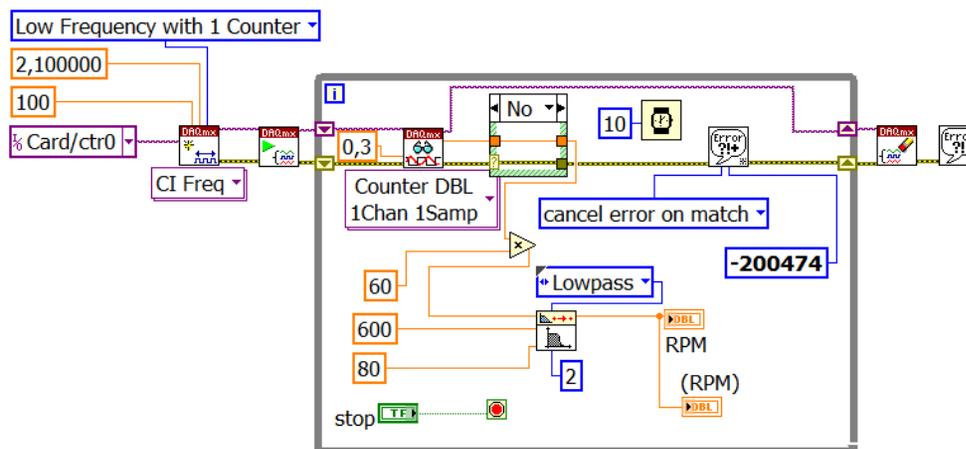
La velocidad angular que resulta del eje del motor en funcionamiento esta en un rango que va desde los 500 RPM hasta los 5000 RPM, el cual esta dentro de la capacidad de medida del Encoder Optico utilizado. Se usa la fase Z de salida de este dispositivo para que entregue un pulso cada vez que el eje hace un giro completo; debido a la configuración de salida del encoder de tipo *colector abierto*, se realiza la conexión electrónica (figura 3.16) que consiste en una *resistencia PULL UP* para que proporcione un nivel alto en el pulso.



**Figura 3.16:** Circuito para el Encoder

En la tarjeta PCI se conecta a un *puerto contador*, que es un pin PFI (Entrada con función programable) que actúa como detector de flancos de una señal digital entrante, en el software MAX, se establece el flanco de subida como parámetro de conteo y el rango de la señal de entrada que se estableció entre 2 y 100 Hz.

En LabView<sup>®</sup> se realizó el diagrama de bloques (figura 3.17) que inicia con la creación del canal virtual en modo de lectura de frecuencia, en esta configuración automáticamente se calcula la frecuencia a la cual el contador detecta los flancos pero presenta inconvenientes al detenerse el motor, por lo cual se acomoda el diagrama para que salte tal error y funcione correctamente, continua con un filtro digital, luego se convierte la frecuencia a RPM ( $60RPM = 1Hz$ ) y al final se muestra el valor de la medida gráficamente y numéricamente.



**Figura 3.17:** Diagrama de Bloques para medida de velocidad angular

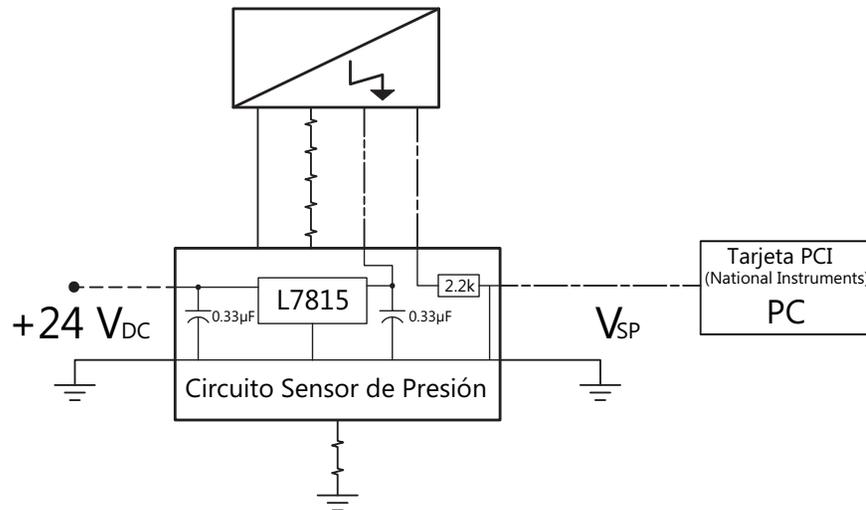
### 3.4.2.2. Medida de Caudal

El flujo volumétrico que atraviesa el sistema neumático, debido a las características de conexión, alcanza un caudal máximo de  $220 L/min$  y para que opere el motor requiere un mínimo de  $120 L/min$ , además, el rotámetro tiene una resolución de  $20 L/min$ , por lo que no se logró una buena disposición de datos al usar este instrumento. El procedimiento para realizar las medidas de caudal parte de conectar el rotámetro al final de la línea, ubicarlo de manera vertical y que sea visible su escala; requirió de mantener el valor del caudal fijo sobre una línea de la escala del instrumento, variando la apertura de la válvula y controlando la presión de entrada en el sistema, de esta manera se garantiza una medida de caudal a presión constante.

### 3.4.2.3. Medida de Presión

La presión siendo de las variables fundamentales de la neumática, requirió de un mecanismo eficiente y confiable de medida, no solo para conocer esta variable en las distintas

etapas del sistema neumático, sino para poder caracterizar sus componentes. Las presiones de trabajo se establecieron en un entre 2 y 5 bares *man* para este sistema, que se encuentran dentro del rango de medida soportada por el sensor utilizado, éste dispositivo requirió de un circuito eléctrico (figura 3.18) que le regule su voltaje de alimentación y aísle del ruido eléctrico.



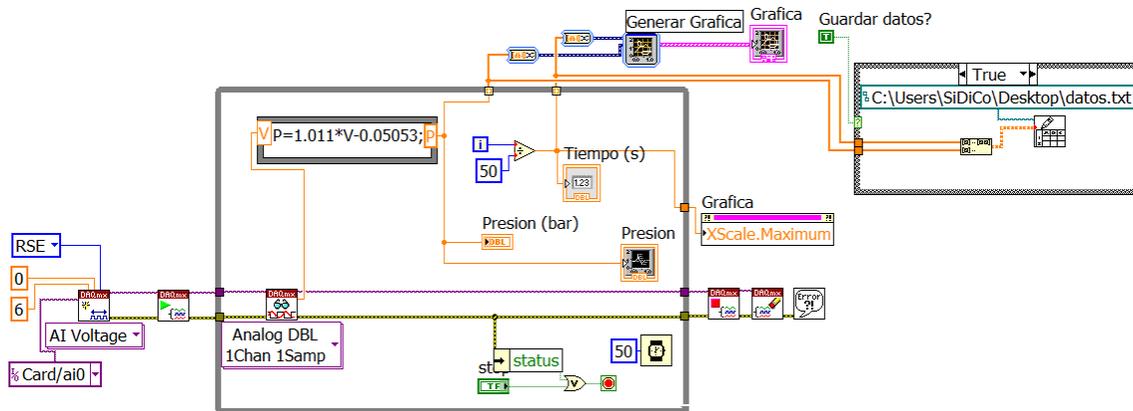
**Figura 3.18:** Circuito para el Sensor de Presión

Se utilizaron puertos de lectura analógica en la tarjeta PCI que soportan un rango de -10V a 10V; en MAX se establece el tipo de señal analógica referenciada a común y en LabView<sup>®</sup> se implementó el diagrama de bloques (figura 3.19); donde se lee el valor del voltaje por un canal virtual, se pasa por un ajuste lineal producto de la previa calibración del sensor y se muestra el valor gráfica y numéricamente, además se implementó un proceso de registro y almacenamiento de los datos para su posterior análisis. La velocidad de muestreo también se diseñó como parámetro ajustable para las distintas maneras en que se necesitaba medir la presión.

#### 3.4.2.4. Medida de Torque

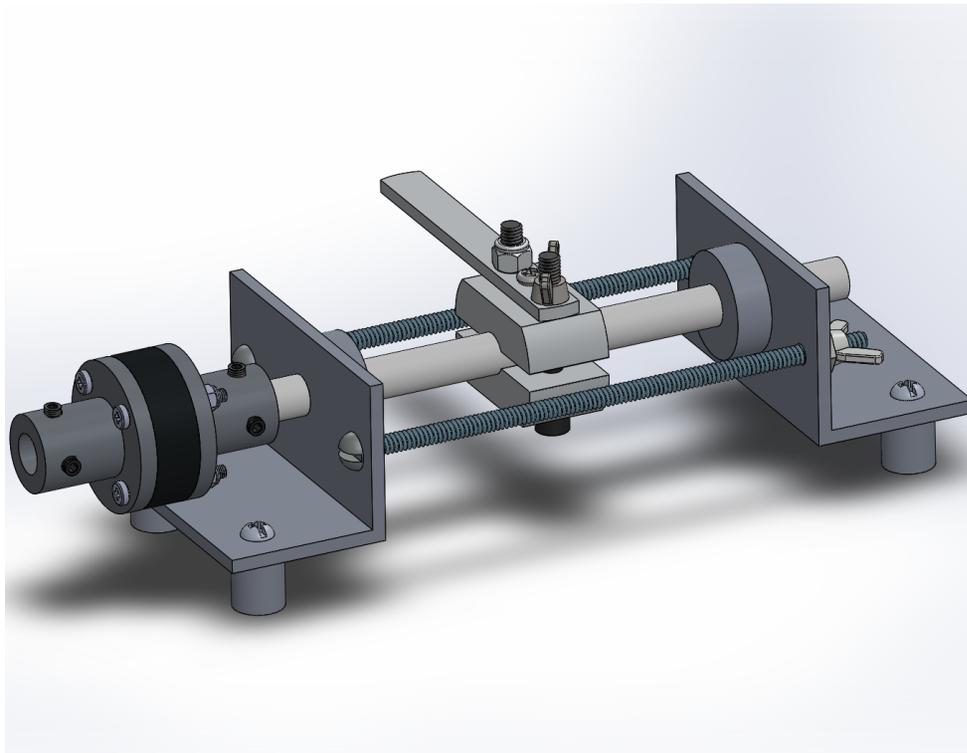
El mecanismo de freno de Prony mide la potencia efectiva existente en el eje del motor, lo hace absorbiendo la potencia del motor, para realizar un trabajo que venza al realizado por la fuerza de rozamiento. Esta medida es indirecta, porque de este proceso se obtiene el torque efectivo del eje que luego se relaciona con la velocidad de rotación ( $P = \tau \cdot \omega$ ) y se calcula la potencia. Debido a los esfuerzos mecánicos y altas temperaturas se diseño y fabricó un sistema de transmisión <sup>1</sup> que se acopla al eje del motor

<sup>1</sup>Ver Apéndice D



**Figura 3.19:** Diagrama de Bloques para medida de Presión

(figura 3.20), este sistema tiene un eje ubicado de manera colineal al eje del motor y sobre este se ubica el freno de Prony, de esta manera se libera el eje del motor de los efectos del rozamiento en el proceso.



**Figura 3.20:** Mecanismo para la medida del torque

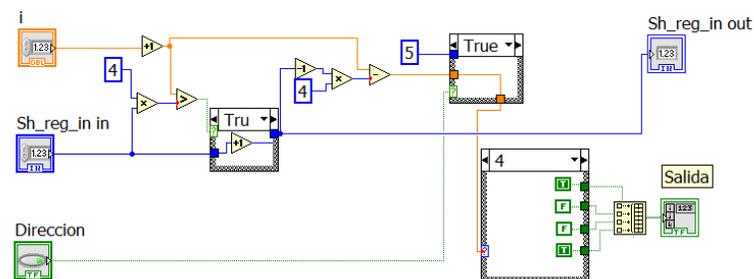
El procedimiento para obtener el valor del torque consiste en ubicar el freno de Prony sobre el eje de la transmisión dejándolo sin ajustar, el brazo se coloca sobre una balanza gramétrica, si es necesario, se coloca una pequeña pieza debajo del brazo para dejarlo de manera horizontal; cuando el motor este en funcionamiento a la velocidad y presión deseada, se comienza a ajustar las zapatas poco a poco mientras en la balanza se va observando el valor hasta que éste se mantenga constante, el valor medido luego se combina con el valor de la aceleración de la gravedad local y la medida del brazo para obtener así el torque efectivo.

### 3.4.3. Señales de Salida

Para aprovechar de la mejor manera la resolución del actuador del sistema sin decrementar la velocidad de respuesta de este, se tuvieron en cuenta las distintas configuraciones en que el motor paso a paso opera y se eligió la más conveniente para el funcionamiento del sistema en lazo abierto y realimentado.

#### 3.4.3.1. Accionamiento de la Válvula reguladora de flujo

La apertura de la válvula reguladora de flujo viene determinada por el giro de su tornillo de ajuste; la utilizada en este proyecto comprende un total de 10 vueltas completas para abrirse totalmente, esto corresponde a  $3600^\circ$ , como la resolución del motor paso a paso usado es de  $1.8^\circ$  por paso, son necesarios 2000 pasos para lograr una máxima apertura; para no esforzar la válvula a sus límites, se tomó un rango operativo de 1800 pasos en medio del rango de la válvula.

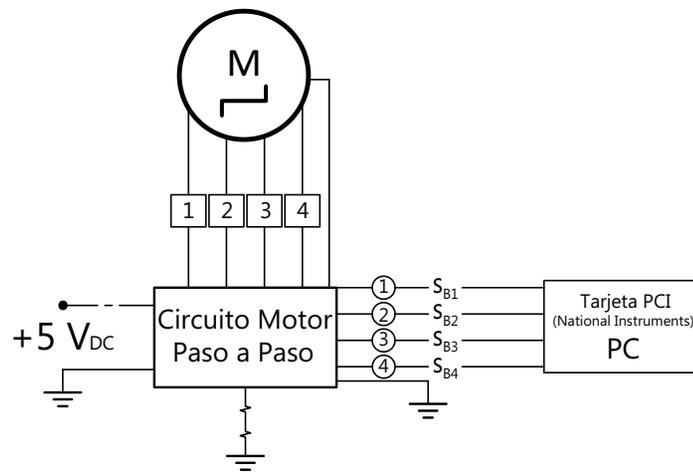


**Figura 3.21:** Diagrama de Bloques para accionamiento del Motor paso a paso

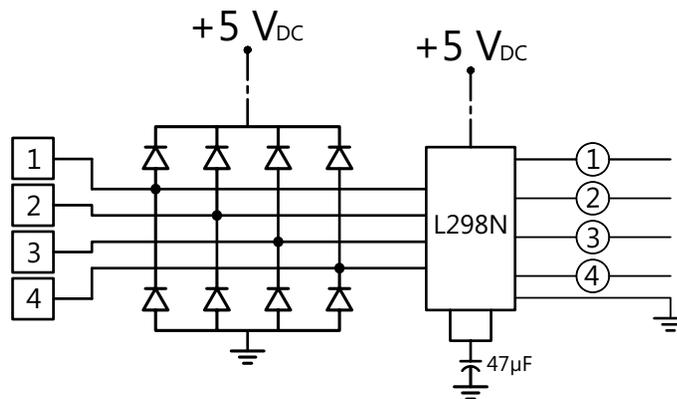
En LabView<sup>®</sup> se implementó un diagrama para generar la secuencia de activación del motor (figura 3.21), en donde se contabilizan los pasos, se controla la secuencia y la

dirección de giro. Existen varias configuraciones para la secuencia de giro del motor paso a paso; la secuencia normal en la que dos bobinas consecutivas se activan en cada paso, la secuencia wave drive en la cual se activa solo una bobina y la secuencia de medio paso la cual alterna las dos anteriores; para lograr un buen torque de paso y retención se eligió la primera configuración, con esto se establecen las salidas lógicas hacia el motor.

Debido al alto consumo eléctrico del motor paso a paso, se implementó un circuito tipo *punte H* como convertidor de potencia, que se ubica en la entrada del motor paso a paso (figura 3.22(b)) para aislar las altas corrientes hacia los demás circuitos.



(a) *Conexión motor paso a paso*



(b) *circuito eléctrico*

**Figura 3.22:** Conexión del motor paso a paso

## Caracterización del Sistema Neumático

---

EN ESTE CAPÍTULO se describen los procedimientos de la caracterización del sistema neumático y sus componentes principales, como lo son la válvula reguladora de flujo y el motor de aletas; estableciendo para el caso de la válvula, con ayuda en técnicas numéricas, un modelo físico matemático que describe su funcionamiento y para el caso del motor, se obtienen curvas que son de gran utilidad a la hora de seleccionar este actuador en alguna aplicación que requieran en conjunto una velocidad y un par o potencia determinado.

### 4.1. Caracterización de Válvula reguladora de flujo

El tipo de válvula que se usó en este proyecto es una reguladora de caudal unidireccional, descrita en la sección 3.1.3, el flujo de aire a través de este tipo de válvulas se suele indicar por factores como: la *conductancia sónica* ( $\mathbf{C}$ ), la *relación de presiones crítica* ( $\mathbf{b}$ ) y los *coeficientes* ( $C_d$ ), ( $C_v$ ) y ( $K_v$ ). En el presente proyecto para la caracterización de la válvula, se usa el método de **conductancia sónica** (Sec. 2.2.2).

Para determinar los parámetros  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{b}$  se utilizó el montaje experimental mostrado en la figura 4.1, que permite la presurización del tanque, a través de un flujo de aire controlado por la válvula. La etapa experimental correspondió en:

- Establecer distintas presiones constantes  $P_1$ .
- Variar el grado de apertura de la válvula con un número de vueltas de cierre determinado.
- Adquirir los datos del tiempo y de la presión  $P_2$ , hasta que esta alcanza el valor de la presión  $P_1$ .

Este procedimiento inicia con la apertura máxima de la válvula, equivalente a 0 vueltas de cierre, y gradualmente se reduce en un giro completo hasta completar 9 vueltas. Los

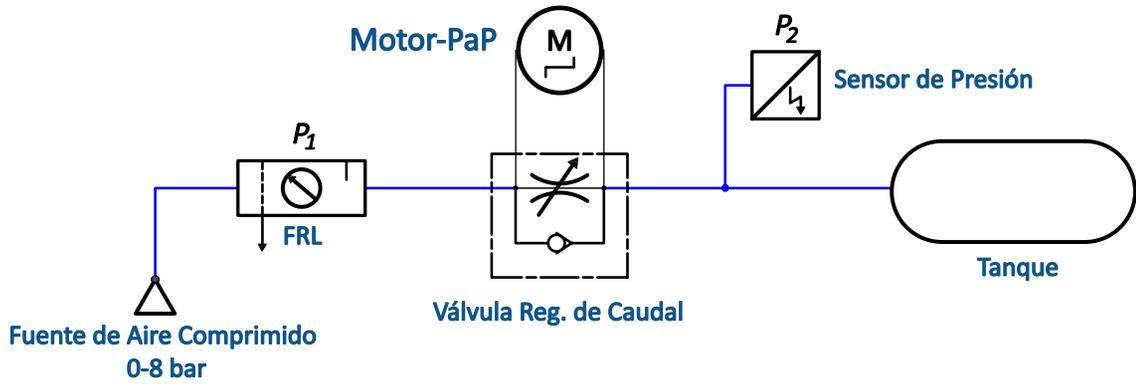


Figura 4.1: Circuito Caracterización Válvula

valores en la presión de suministro  $P_1$  fueron: 2, 3, 4 y 5 bares.

Los datos obtenidos de este proceso se muestran en la figura 4.2; las curvas con tendencia al color rojo representan la presurización con una apertura que tiende hacia la apertura máxima y las curvas con tendencia al color azul muestran la presurización a medida que la apertura se va reduciendo por medio del número de vueltas, se evidencia la relación entre la apertura y el tiempo de presurización en el tanque; también se puede ver que en este tiempo las curvas de las 4 figuras presentan un comportamiento similar independiente del valor de la presión de entrada  $P_1$ . Para las 4 figuras las tres primeras

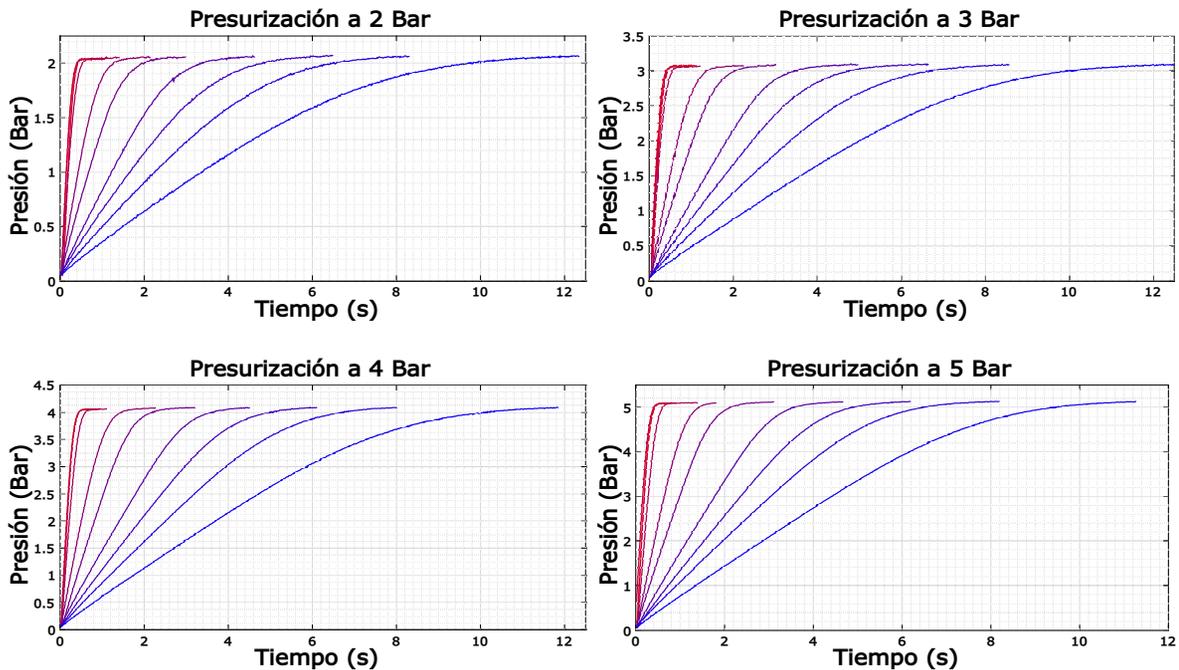


Figura 4.2: Pruebas de presurización

curvas que corresponden a 0, 1 y 2 vueltas de cierre casi se superponen y a partir de la cuarta curva se pueden identificar entre ellas, de modo que a mayor apertura, el tiempo que tarda  $P_2$  en alcanzar el valor de  $P_1$  es menor, es decir, la presurización en el tanque se da de manera más rápida. Por tal motivo se puede concluir que el flujo de aire que pasa por la válvula para las primeras vueltas de cierre es casi el mismo y se va reduciendo a medida que se aumenta el número de vueltas.

Después se utiliza el método de regresión por mínimos cuadrados no-lineal para encontrar los parámetros **arc** (*área relativa\*conductancia sónica*) y **b** a partir de los datos experimentales, para llevar a cabo esta técnica de análisis numérico, se implemento un algoritmo<sup>1</sup> que entrega los valores para cada conjunto de datos obtenidos en la presurización.

Dado que el algoritmo entrega el producto **arc**, se llevó a cabo lo siguiente para obtener  $A_r$  y **C** experimentalmente: se interpreta que se puede encontrar **C** a partir de las aperturas concernientes a cero vueltas porque para ellas el  $A_r$  es igual a 1, debido a que el área variable del orificio en estas es máxima, teniendo en cuenta esta consideración ( $arc = C$ ), se promedian los valores pertenecientes a estas aperturas, obteniendo la conductancia sónica ( $C_{pro}$ ), después todos los datos de **arc** se dividen por este valor y así se calcula el área relativa. Los resultados son cuatro curvas (una para cada presión) que se muestran en la figura 4.3(a), las cuales presentan alta correlación cuando la apertura de la válvula está por encima de cuatro vueltas, pero para aperturas entre cero y cuatro vueltas las curvas tienen dispersión entre si, además hay valores para  $A_r$  mayores que 1, observando estas irregularidades se promedian, obteniendo la curva  $A_{r_{pro}}$  que se asemeja a la curvas entregada por el fabricante para este tipo de válvula.

Por último, se dividen los datos de **arc** entre los valores correspondientes de  $A_{r_{pro}}$ , dando como resultado los valores de **C** mostrados en la figura 4.3(c), el promedio de estos datos corresponde al valor de la conductancia sónica de forma experimental. Para hallar **b** solo basta con promediar todos los datos obtenidos del algoritmo (Fig. 4.3(d)). Además, con un ajuste polinomial de los datos de  $A_{r_{pro}}$ , se encontró una función del área relativa en terminos del giro de la válvula  $A_r(N_v)$  (figura 4.3(b)). Los valores de los parámetros obtenidos por la caracterización se muestran en la tabla 4.1.

**Tabla 4.1:** Valores de Caracterización de la Válvula

Parametro	Definición	Valor
C	Conductancia sónica	$2.1953 \cdot 10^{-3} \pm 1.89 \cdot 10^{-4} [\text{m}^3/\text{s Pa}]$
b	Relación de presión crítica	$0.36033 \pm 0.0897$
$A_r(N_v)$	Función de área relativa	$-1.2994e^{-4}N_v^5 + 1.4865e^{-3}N_v^4 + 7.0892e^{-3}N_v^3 - 1.1675e^{-1}N_v^2 + 1.3960e^{-1}N_v + 9.8613e^{-1}$

<sup>1</sup>Ver el Apéndice A.1.1

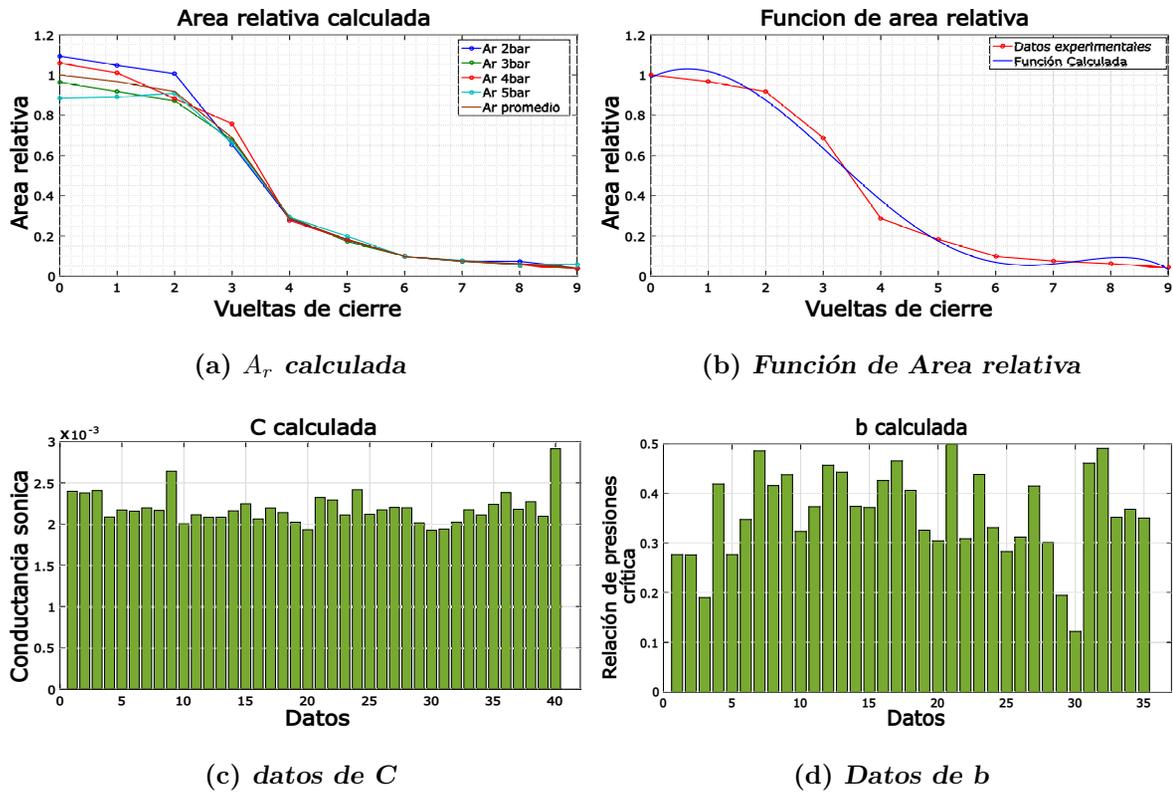


Figura 4.3: Resultados de  $A_r$ ,  $C$  y  $b$

### 4.1.1. Evaluación del Modelo de la Válvula

A partir del resultado de la sección anterior, se puede validar la representación matemática de la válvula (Sec. 2.3), por lo cual se resuelven las ecuaciones 2.88 y 2.89 con los parámetros de la tabla 4.1, para simular el proceso de presurización que se lleva a cabo en el método de caracterización.

En la figura 4.4, se observan los datos simulados y los datos medidos para algunas aperturas de la válvula y presión de suministro, se tiene una muy buena correlación del modelo en todo el rango de las variables de entrada, a pesar de que el parámetro  $b$  calculado presenta una desviación estándar considerable, no influye en gran medida a la presión simulada, además, el tomar un polinomio de quinto grado para representar la función de área relativa da garantía de que exista una buena correspondencia del valor de área relativa que pueda tener la válvula.

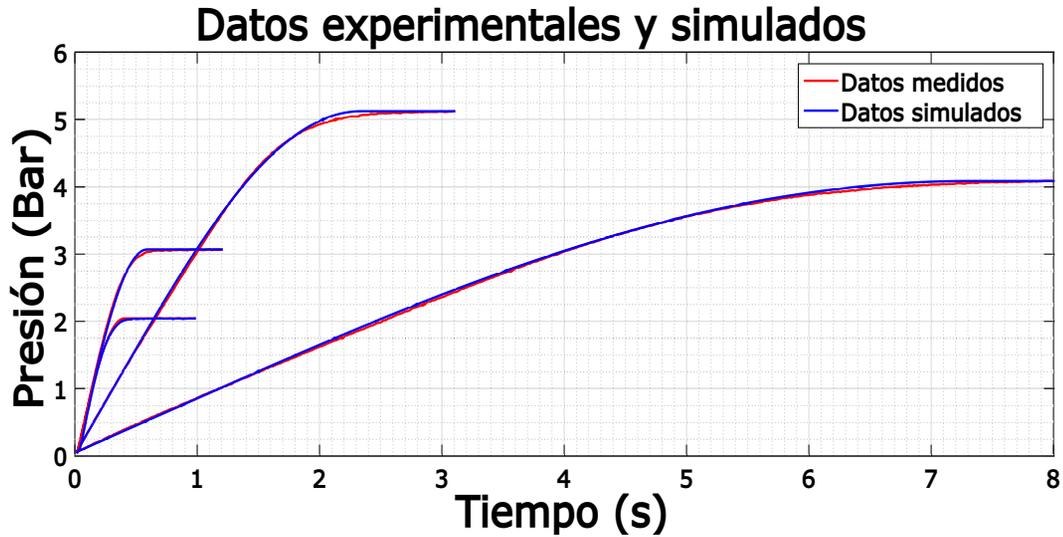


Figura 4.4: Gráfica Pruebas de Torque

## 4.2. Caracterización de Motor de aletas

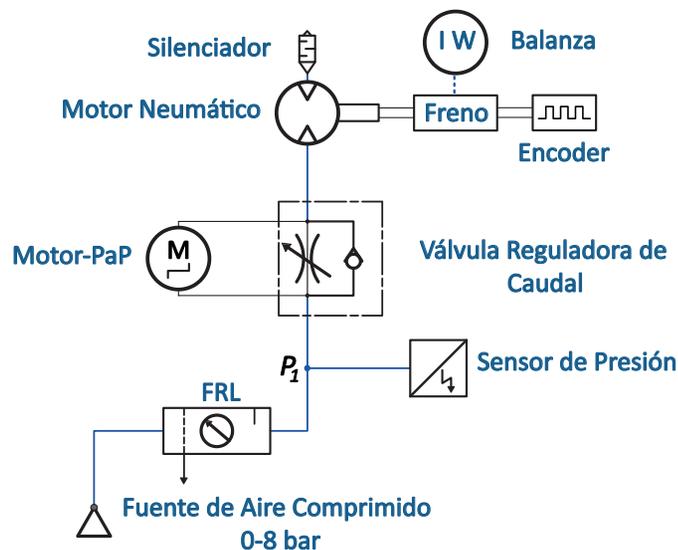
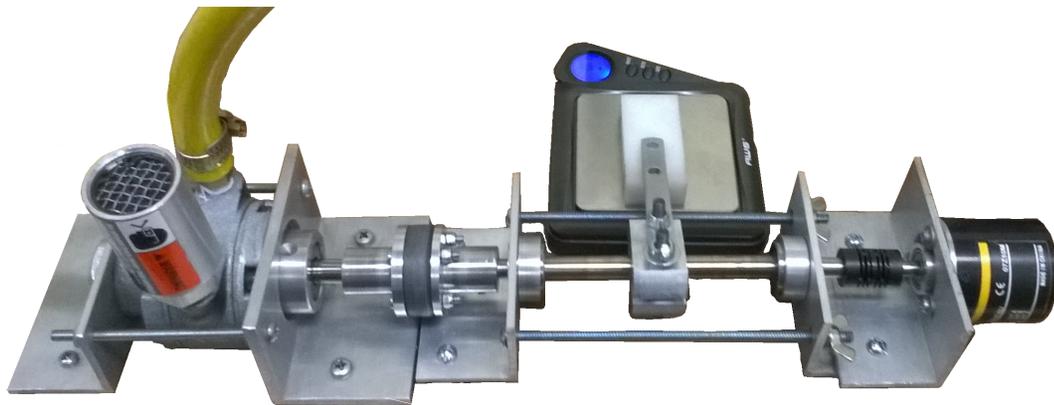
El proceso de caracterización del motor neumático comprende distintas pruebas, como lo son las pruebas de torque, caudal y de presión; las cuales sirven como referencia para determinar las condiciones de suministro de aire necesarias para una determinada operación del motor. A continuación se describen cada una de ellas.

### 4.2.1. Pruebas de Torque

Esta característica se determinó experimentalmente a partir del montaje mostrado en la figura 4.5 en donde se acopla el freno de Prony al eje de la transmisión; en la prueba se mantiene una presión de suministro  $P_1$  constante manipulando la perilla del regulador y la apertura de la válvula, con el motor en funcionamiento se comienza a ajustar el freno al eje, para ello se gira la tuerca de mariposa gradualmente, mientras tanto se adquieren los datos de velocidad con el encoder y de masa con la balanza, este procedimiento se realiza hasta que el motor tienda a detenerse por completo. A partir del valor de la masa obtenido y por la geometría del freno (Fig. 4.6), se obtiene el *torque efectivo* por medio de la relación:

$$T_{ef} = F_r \cdot r = W \cdot L = mgL \quad (4.1)$$

Los resultados de esta prueba se presentan en la figura 4.7; se observa que cuando se aumenta la resistencia de carga producida por el freno, se reduce su velocidad de funcionamiento y se incrementa el par para ajustarse a la carga, esta condición de aumento del par con disminución de la velocidad continúa hasta que el motor se detiene.



**Figura 4.5:** Montaje Pruebas de Torque

Para bajas velocidades se tienen inconvenientes al intentar realizar una medida, debido a que las fluctuaciones del torque por la posición de las aletas comienza a tener un mayor efecto, de hecho, si bien el valor máximo de par en el motor se alcanza en el par de arranque, éste es fuertemente dependiente de la posición inicial de las aletas con respecto a la entrada y la salida de aire, condición por la cual las pruebas se realizaron con el motor en movimiento.

Se destaca también la relación proporcional entre la presión y el torque para una velocidad determinada. En la práctica, estas proporcionalidades se pueden ajustar con el uso de engranajes, reguladores de presión o instalando un restrictor en la manguera de entrada o salida de aire del motor, todo esto con el fin de aprovechar la potencia del motor en un *punto de operación* determinado. [22]

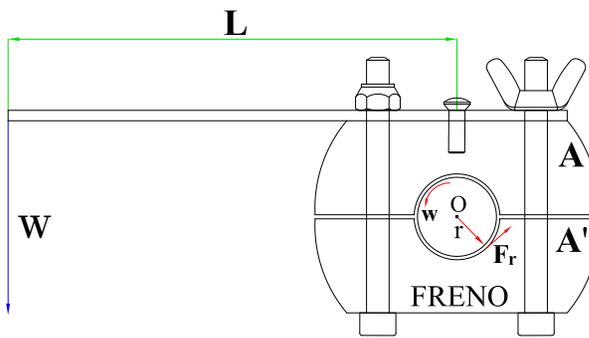


Figura 4.6: Parámetros del freno de Prony

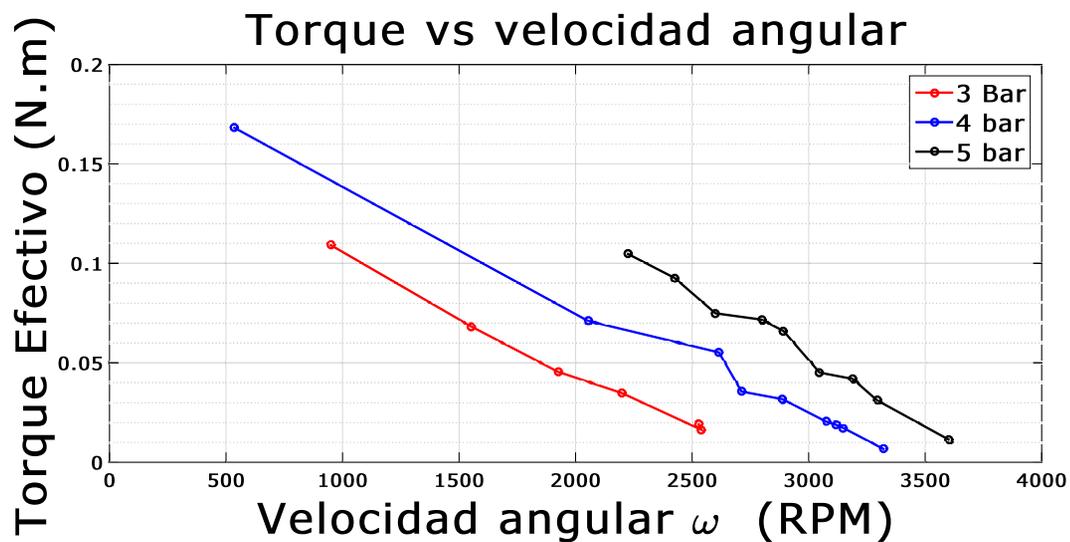


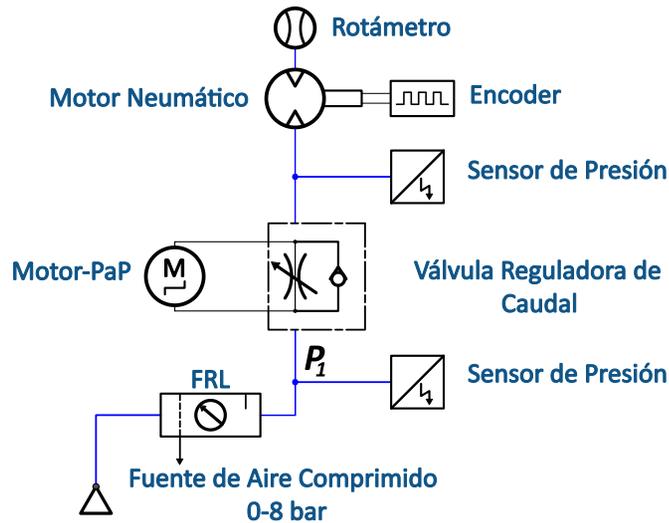
Figura 4.7: Gráfica Pruebas de Torque

#### 4.2.2. Pruebas de Caudal

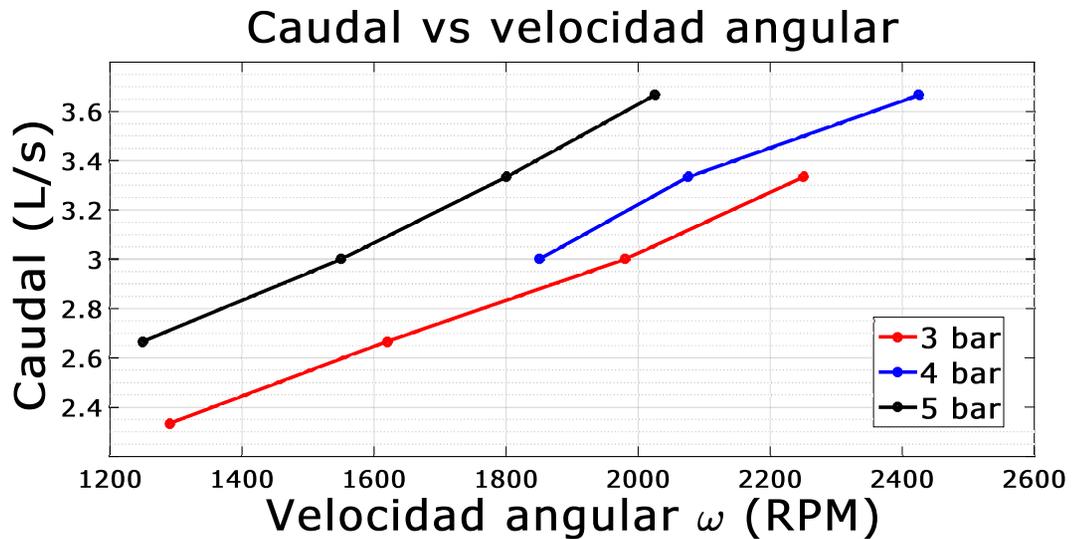
El procedimiento para caracterizar el caudal de flujo que atraviesa el motor requiere del montaje mostrado en la figura 4.8(a), donde se instala el rotámetro al final de la línea de manera vertical para facilitar la lectura del caudal; se fija una presión  $P_1$  constante, que se consiguió manipulando la perilla del regulador y la apertura de la válvula, finalmente con el motor en funcionamiento se adquieren datos de velocidad y de caudal.

Los resultados de la pruebas se muestran en la figura 4.8(b); los datos obtenidos presentan un error sistemático producto del instrumento analógico utilizado, sin embargo permiten apreciar la proporcionalidad que tiene el caudal con respecto a la velocidad y la presión de suministro. Es importante notar las magnitudes de caudal que requiere el motor para su operación, incluso con el motor en reposo hay un caudal de aproximadamente el 65 % del caudal máximo, para un promedio de 3 litros por segundo esto significaría una producción constante de aire comprimido o un contenedor de capacidad

considerable, es por esto, que usualmente se instala una válvula de vías en la línea de aire que determine la activación del motor.



(a) Esquema Pruebas de Caudal



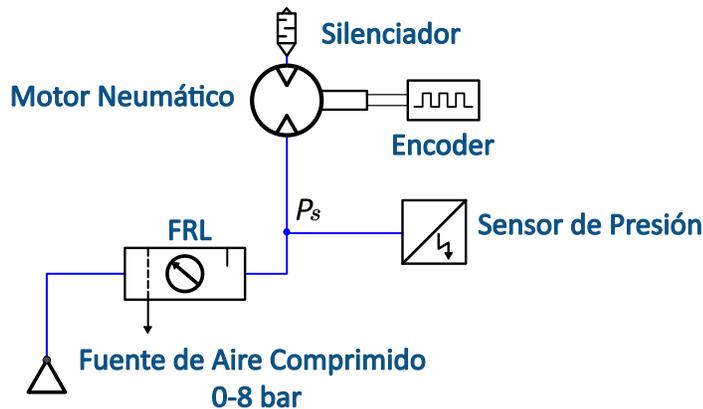
(b) Gráfica Pruebas de Caudal

Figura 4.8: Pruebas de Caudal

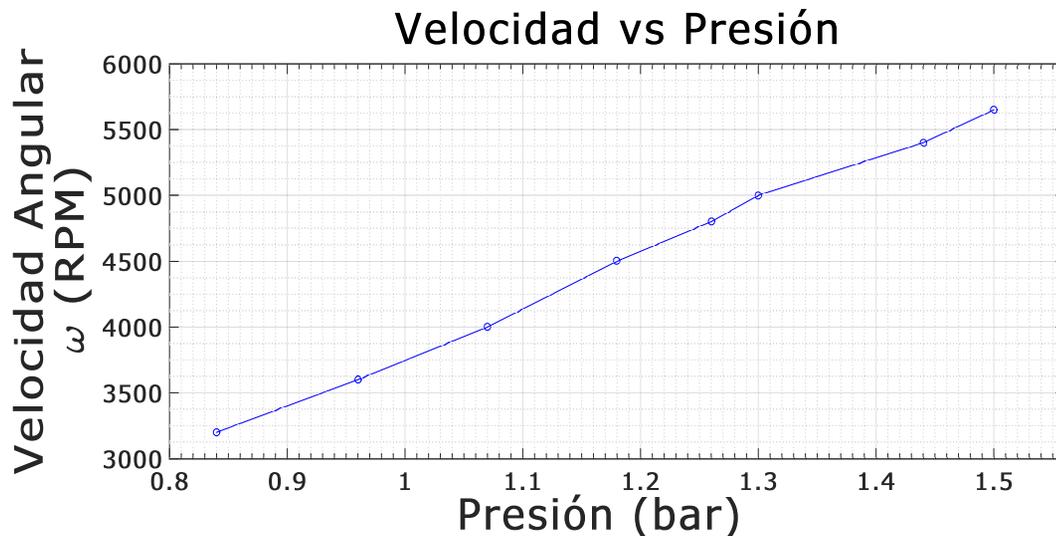
### 4.2.3. Pruebas de Presión

Con el fin de determinar la influencia directa de la presión de los puertos del motor en la velocidad en estado estacionario de éste; se realizan pruebas con el montaje cuyo esquema se muestra en la figura 4.9(a). Se pone en operación el motor a la máxima velocidad que logra dentro del sistema, a partir de ahí se registra continuamente la

presión  $P_s$  y la velocidad del motor mientras se descarga la fuente de aire, de los datos obtenidos se promedian los valores de presión que correspondan a un rango de velocidad constante determinada, se toma el promedio de la presión y el valor de la velocidad para diferentes zonas y se grafican los datos (Fig. 4.9(b)). Como se reconoce también de las



(a) Esquema Pruebas de Presión



(b) Datos de Velocidad vs Presión

**Figura 4.9:** Pruebas de Presión

pruebas anteriores, hay una proporcionalidad directa entre la presión a la entrada del motor y la velocidad de éste, el límite inferior en la medida resulta del hecho de que ante presiones más bajas la velocidad presenta fluctuaciones que no permiten representarse en un valor de estado estacionario. En esta practica no se utiliza la válvula reguladora de flujo, que representa una restricción y caída de presión adicional en la línea de aire, sin embargo, la presión máxima que se alcanza a la entrada del motor sigue siendo baja comparada con la presión de suministro, esta caída de presión es un factor a tener

en cuenta cuando se instala el motor, se deberá entonces elegir la tubería adecuadas y de longitud moderada, además, la posición de la válvula de control de flujo en el diagrama del circuito puede desempeñar un papel importante en la minimización de las pérdidas de presión. En general, el aire debe dejarse escapar estrangulado de un actuador neumático, en vez, del estrangulamiento de la alimentación hacia adentro de aire hacia el actuador. [15]

#### 4.2.4. Evaluación del modelo del motor

A pesar de las consideraciones que se omiten en el modelo, como lo son el análisis del arranque y el estado transitorio, entre otros; se puede obtener la validación del modelo en términos de las pruebas experimentales, es decir, son objeto de comparación y permiten determinar parámetros desconocidos en el modelo del motor.

##### 4.2.4.1. Torque efectivo del motor

De la relación obtenida para el par efectivo del motor (Sec. 2.4.5) y las pruebas de torque realizadas, en primera instancia ambos resultados expresan una relación decreciente entre el torque  $\tau_e$  y la velocidad angular  $\omega$  además de la proporcionalidad con la diferencia de presión entre los puertos del motor, variable que no se midió directamente, si no que se registró la presión que entregaba la unidad FLR, además, del modelo para el torque efectivo se tiene otro parámetro desconocido ( $C$ ), que es un indicador de la pérdida de energía por rozamiento. Ambas incógnitas se obtienen gracias al ajuste de curvas implementada en un algoritmo <sup>1</sup>, el cual entrega la presión en el motor para cada prueba y el valor promedio del coeficiente  $C$ .

**Tabla 4.2:** Valores Ajuste del torque efectivo

Parametro	Definición	Valor
Ps3	Presión de entrada a 3 bares	0.7893[Pa]
Ps4	Presión de entrada a 4 bares	0.7978[Pa]
Ps5	Presión de entrada a 5 bares	0.81160[Pa]
$C$	Coficiente de fricción viscosa	$1.1575 * 10^{-3} \pm 1.225 * 10^{-4}[J/s]$

Los valores obtenidos se presentan en la tabla 4.2, las curvas simuladas y experimentales en la figura 4.10; a pesar de la corta variación en el valor de la presión en el motor, el modelo indica que es amplia su influencia en la relación par-velocidad que entrega el motor, hecho que ocurre en la práctica pero en menor proporción por el efecto del mecanismo de transmisión. El coeficiente de fricción obtenido determina la razón de cambio entre el par y la velocidad de giro, a pesar de ser un valor que se ajuste muy bien a lo observado en las pruebas, este coeficiente corresponde tanto a la fricción en el motor como la presente en la transmisión, por lo cual no puede ser involucrado en el

<sup>1</sup>Ver Apéndice A.1.2

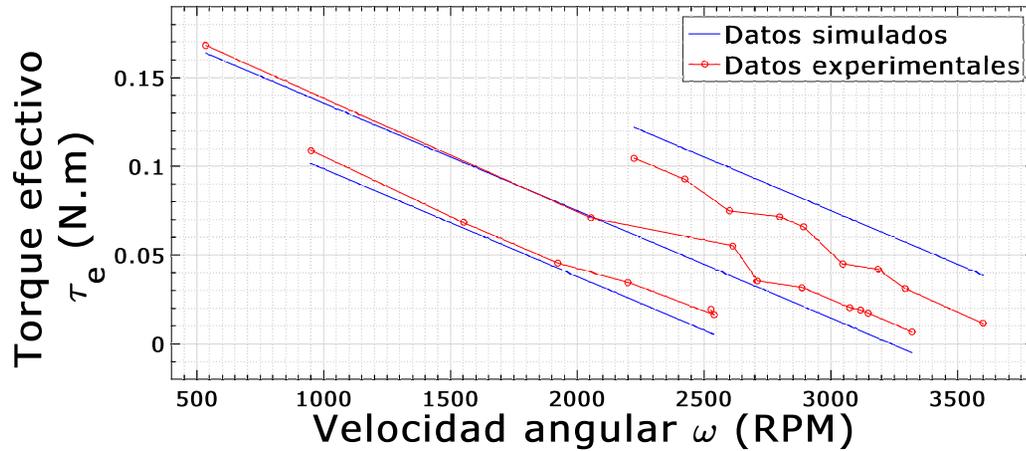


Figura 4.10: Validación torque efectivo

modelo dinámico del motor, pero si es un indicador de la magnitud que se debe esperar del coeficiente en este modelo.

#### 4.2.4.2. Dinámica del motor

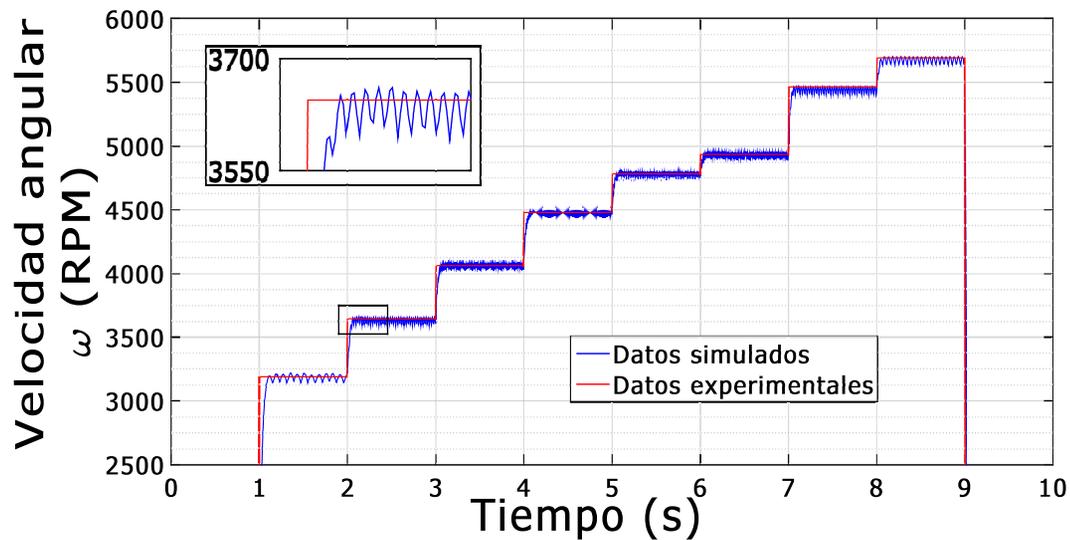
En base a lo obtenido para el modelo del motor (Sec. 2.4), se realiza un algoritmo<sup>1</sup> para validar la ecuación de movimiento del motor obtenida con los datos experimentales de la sección 4.2.3; determinando los parámetros desconocidos de la ecuación como lo son el momento de inercia  $J$ , el coeficiente de fricción viscosa  $C$ , y el torque debido a la fricción de Coulomb  $T_d$ .

Tabla 4.3: Valores Ajuste del modelo dinámico

Parametro	Definición	Valor
$J$	momento de inercia del rotor	$1.5 * 10^{-4} [Kg m^2]$
$C$	Coeficiente de fricción viscosa	$7.4 * 10^{-3} [J/s]$
$T_d$	Torque por fricción de Coulomb	$4.5 * 10^{-3} [N.m]$

El resultado del ajuste se muestra en la tabla 4.3 y la simulación del modelo dinámico con estos parámetros se observa en la figura 4.11; del proceso de ajuste se lograron interpretar distintos fenómenos en la operación del motor; la influencia del torque por la fricción de Coulomb es muy pequeña comparada con los otros parámetros, el coeficiente de amortiguamiento afecta a la magnitud de la velocidad y en un porcentaje al tamaño del rizado de la velocidad, y la inercia del rotor determina el tiempo en alcanzar la velocidad deseada y la magnitud de las fluctuaciones de la velocidad. La magnitud del rizado medido en estado estacionario para el motor resulta inestable, pero si se puede dar una cifra, corresponde entre el 2% y el 5% de la velocidad media, esto se cumple

<sup>1</sup>ver Apéndice A.2.1



**Figura 4.11:** Validación del modelo dinámico

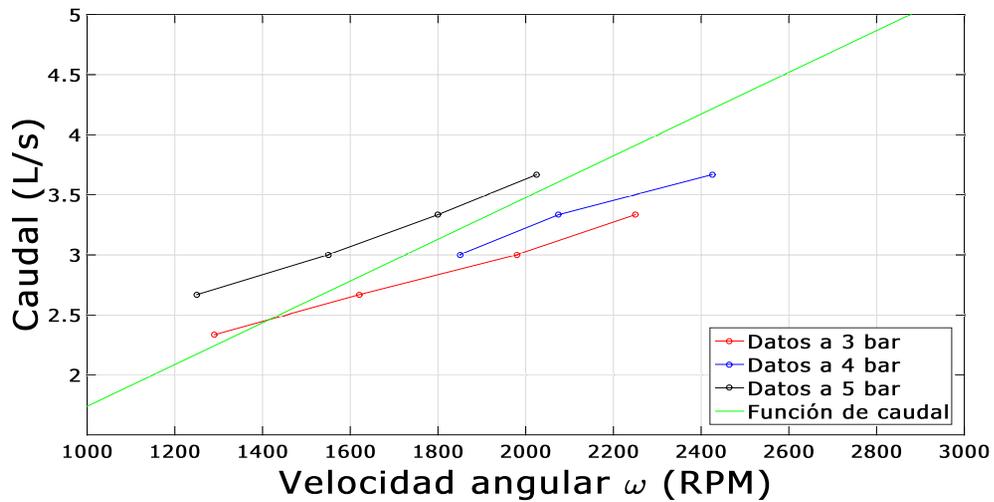
para velocidades mayores a 1000 RPM; en la simulación, esta magnitud corresponde al 2.3% por lo que también es un acierto en el modelo. A bajas velocidades el modelo dista de manera considerable de lo observado experimentalmente, se asume entonces que el modelo es validado a partir de 800 RPM.

#### 4.2.4.3. Caudal en el motor

Para evaluar la función de flujo del modelo obtenido, que solo es dependiente de la velocidad angular del motor, se grafica junto a los valores experimentales obtenidos en las pruebas de flujo, resultando la figura 4.12; se aprecia una buena correspondencia de las pruebas y el modelo de flujo gracias a la consideración del modulo de compresibilidad del aire, para usos prácticos esta aproximación es válida como indicador de la cantidad de aire comprimido que requiere producirse para la operación del motor.

#### 4.2.5. Prueba del sistema completo

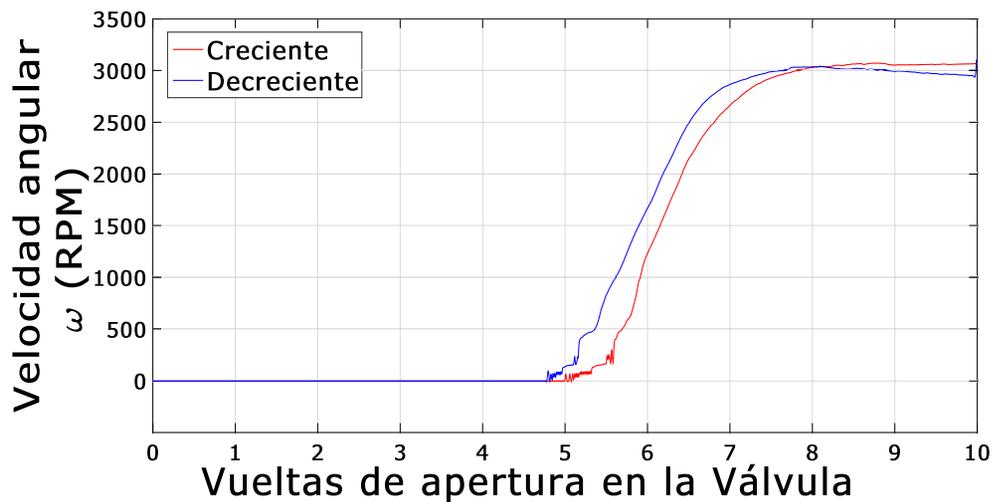
Con el fin de observar el comportamiento del conjunto Válvula-Motor en operación, se realiza una prueba en condiciones libres, es decir, sin intentar regular la presión y sin agregar carga externa al eje; solo se asume como variable de entrada, la apertura de la válvula por medio del giro controlado del husillo de esta, y como variable de salida, la velocidad de giro en el eje del motor. El resultado se muestra en la figura 4.13, las dos curvas corresponden a los procesos de apertura y cierre de la válvula, si bien ambas presentan diferencias como consecuencia de la no linealidad en la operación del motor, se asemejan en la forma que dependen del estado de la válvula, puesto que hasta una apertura cercana al 50% el motor no inicia su operación, pasado ese umbral aparece



**Figura 4.12:** función de flujo y datos experimentales

un rango cercano a tres vueltas en la válvula donde la velocidad cambia de manera continua hasta llegar a una velocidad máxima que se mantiene por el resto de vueltas.

El comportamiento de la velocidad se relaciona con el observado para el área relativa de la válvula (Fig. 4.3(b)), y de esto se puede establecer que ante una apertura por debajo del 50 % que corresponde a el 20 % del área relativa, el flujo de aire y la presión después de la válvula no son suficientes para vencer la fricción estática, por encima del 50 % la velocidad es proporcional a la apertura y por consiguiente al flujo de aire, como se dedujo para el modelo en la sección 2.4.6; en las últimas vueltas de apertura el área relativa se mantiene cerca del valor máximo y esta invarianza se traduce en una tendencia constante en la velocidad de giro.



**Figura 4.13:** Velocidad angular vs apertura de la válvula

# Control de Velocidad

---

LA TEORÍA DE CONTROL ha desempeñado un papel vital en el avance de la ingeniería y la ciencia, tanto es así que se ha convertido en una parte importante e integral en los sistemas de vehículos espaciales, en los sistemas robóticos, en los procesos modernos de fabricación y en cualquier operación industrial que requiera el control de temperatura, presión, velocidad, humedad, flujo, etc.

Un controlador realimentado compara el valor real de la salida del sistema con la entrada de referencia (el valor deseado), determina la desviación y produce una señal de control que reduce la desviación a cero o a un valor pequeño. La acción de control utilizado en el proyecto es un controlador proporcional-integral-derivativo (PID). La utilidad de los controles PID estriba en que se aplican en forma casi general a la mayoría de los sistemas de control. En particular, cuando no se pueden emplear métodos de diseño analíticos, es cuando los controles PID resultan más útiles.

Se pretende controlar la velocidad de giro del motor gracias al mecanismo de control PID, el cual se implementa de manera digital en el software LabView<sup>®</sup>, y dará la señal de control hacia el motor paso a paso que funciona como actuador en el proceso de control.

## 5.1. Sistemas de Control

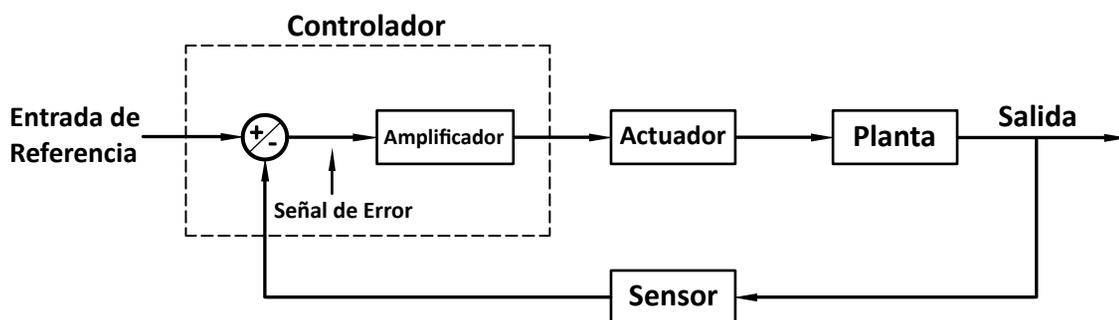
Un sistema de control puede tener varios componentes, para mostrar las funciones de cada componente en la ingeniería de control, por lo general se usa una representación denominada *diagrama de bloques*, esta consiste en una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y las variables del sistema se enlazan unas con otras mediante bloques funcionales, los cuales se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señal.

**Sistemas de control en lazo cerrado.** Un sistema que mantiene una relación deter-

minada entre la salida y la entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como medio de control, se denomina sistema de control realimentado. Los sistemas de control realimentados se denominan también sistemas de control en lazo cerrado. En estos se alimenta al controlador con la señal de error, que es la diferencia entre la señal de entrada (el valor deseado) y la señal de realimentación (que puede ser la propia señal de salida o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), con el fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado. El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema.

**Sistemas de control en lazo abierto.** Los sistemas en los cuales la salida no tiene efecto sobre la acción de control se denominan sistemas de control en lazo abierto. En otras palabras, en un sistema de control en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada de referencia. Así, a cada entrada le corresponde una condición de operación fija; como resultado de ello, la precisión del sistema depende de la calibración. Ante la presencia de perturbaciones, un sistema de control en lazo abierto no realiza la tarea deseada. En la práctica, el control en lazo abierto sólo se usa si se conoce la relación entre la entrada y la salida y si no hay perturbaciones internas ni externas.

En la figura 5.1 se muestra un ejemplo de un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado, conocido como bucla típica, que consiste en un controlador, un actuador, una planta y un sensor (elemento de medición). El controlador detecta la señal de error, que por lo general, está en un nivel de potencia muy bajo, y la amplifica a un nivel lo suficientemente alto. El controlador produce una salida que se conoce como señal de control y la manera en que lo hace se denomina *acción de control*. El actuador determina la entrada para la planta de acuerdo con la señal de control, con el fin de que la señal de salida se aproxime a la señal de entrada. El sensor convierte la variable de salida en otra variable manejable, como por ejemplo un desplazamiento, una presión o un voltaje, que pueda usarse para comparar la salida con la señal de referencia. Este elemento está en la trayectoria de realimentación.



**Figura 5.1:** Diagrama de Bloques de un Sistema en Lazo Cerrado.

La mayoría de los controladores industriales emplean como fuente de energía la electricidad o un fluido presurizado, como el aceite o el aire. Los controladores también pueden clasificarse, según el tipo de energía que utilizan en su operación, como neumáticos, hidráulicos o electrónicos. El tipo de controlador que se use debe decidirse basándose en la naturaleza de la planta y las condiciones de operación, incluyendo consideraciones tales como seguridad, costo, disponibilidad, fiabilidad, precisión, peso y tamaño.

Los controladores se clasifican según sus acciones de control, a continuación se describen algunas de ellas.

### **Acción de Control Proporcional**

Este controlador genera a la salida una señal de control que es proporcional a la señal de error, de modo que:

$$u(t) = K_p e(t) \quad (5.1)$$

donde  $u(t)$  es la señal de salida del controlador,  $e(t)$  es la señal de error y  $K_p$  es la ganancia proporcional. Cualquiera que sea el mecanismo real y la forma de la potencia de operación, el controlador proporcional es, en esencia, un amplificador con una ganancia ajustable. Usando transformada de laplace tenemos:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (5.2)$$

### **Acción de Control Integral**

En un controlador con acción de control integral, la señal de salida  $u(t)$  es proporcional a la integral de la señal del error:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt, \quad K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (5.3)$$

donde  $K_i$  es la ganancia integral y  $T_i$  se denomina tiempo integral. La función de transferencia del controlador integral es:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (5.4)$$

### **Acción de Control Derivativa**

La acción de control derivativa genera una señal proporcional a la derivada de la señal de error. De este modo obteniendo la derivada de la señal de error, se conoce las características dinámicas de la misma (crecimiento y decrecimiento), produciendo una corrección antes de que la señal de error de haga excesiva, a este efecto se le denomina acción anticipativa.

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad K_d = K_p T_d \quad (5.5)$$

donde  $K_d$  es la ganancia derivativa y  $T_d$  se denomina tiempo derivativo. La función de transferencia del controlador derivativo es:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_d s}{\tau_d s + 1} \quad (5.6)$$

donde  $\tau_d$  es la constante de tiempo, pero esta es normalmente menor que el tiempo del propio proceso, por lo tanto:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_d s \quad (5.7)$$

La presencia de la acción derivativa lleva generalmente asociada una mejora de la estabilidad, lo que permite valores mas elevados de la ganancia proporcional con la siguiente mejora del estacionario. Pero esta acción no es recomendable cuando la salida del proceso esta afectada del ruido ya que este seria amplificado por la acción derivativa. Además el control derivativo no puede utilizarse en solitario ya que es incapaz de responder a una señal de error constante. En conclusión, con un control derivativo un sistema no alcanzaría nunca el estado estacionario por eso, el control derivativo debe utilizarse en combinación con otros controles por su influencia estabilizadora mediante la acción anticipativa.

### **Acción de Control Proporcional-Integral**

La acción de control de un controlador proporcional-integral (PI) se define mediante

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt \quad (5.8)$$

o la función de transferencia del controlador es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (5.9)$$

### **Acción de Control Proporcional-Derivativa**

La acción de control de un controlador proporcional-derivativa (PD) se define mediante

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (5.10)$$

y la función de transferencia es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s) \quad (5.11)$$

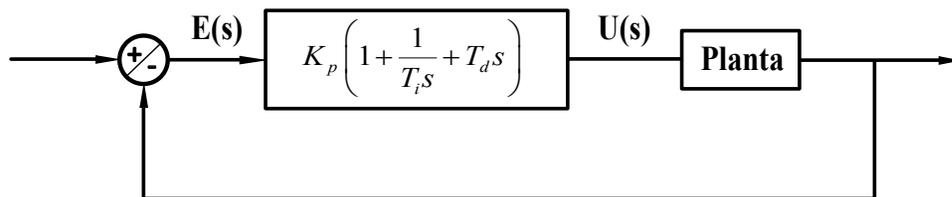
### Acción de Control Proporcional-Integral-Derivativa

La combinación de la acción de control proporcional, la acción de control integral y la acción de control derivativa se denomina acción de control proporcional-integral-derivativa (PID). Esta acción combinada tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada está dada por

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (5.12)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (5.13)$$

En la figura 5.2 se muestra el control PID de una planta. Muchos procesos industriales se controlan utilizando controladores PID y su popularidad se atribuye en parte a su buen comportamiento en un amplio intervalo de condiciones de operación y por otra a su sencillez funcional, lo cual permite a los ingenieros operar con ellos de una manera sencilla y directa. Para implementar este controlador se debe determinar 3 parámetros para un proceso dado: la ganancia proporcional, la ganancia integral y la ganancia derivativa. [3]



**Figura 5.2:** Control PID de una Planta.

## 5.2. Estructuras de Controladores PID

En los reguladores industriales es frecuente encontrar distintas versiones del algoritmo de control PID. Donde cualquiera de ellas se puede considerar a uno de los tres grupos de controladores PID (no interactivos, interactivos y paralelos).

### 5.2.1. PID no Interactivo

Con el calificativo de no interactivo se quiere decir que las acciones de control integral y derivativa son independientes y actúan sobre la señal de error directamente, mientras la acción proporcional es la última en actuar, afecta tanto a la señal de error, como a

las acciones derivativa e integral. Este controlador es considerado como el estándar por la ISA (Instrumentation Society of America).

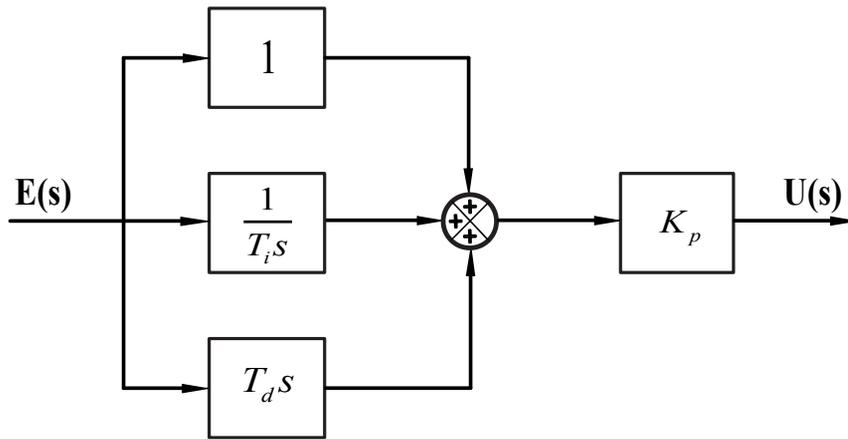


Figura 5.3: PID no Interactivo.

### 5.2.2. PID Interactivo

Se denominan algoritmo interactivo ó al algoritmo en serie. Con el calificativo de interactivo se quiere recalcar que cualquier modificación en unos de sus parámetros con lleva cambios en todas las constantes de tiempo, es decir en la proporcional, en la integral y en la derivativa. Este algoritmo surgió como una posibilidad de realizar control PID analógico con dos amplificadores, a diferencia del no interactivo que requiere el uso de tres amplificadores. De ahí que en la mayoría de los reguladores analógicos, buscando el ahorro económico se usara el algoritmo interactivo.

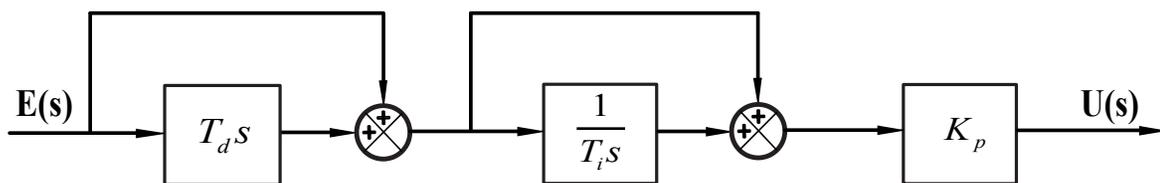
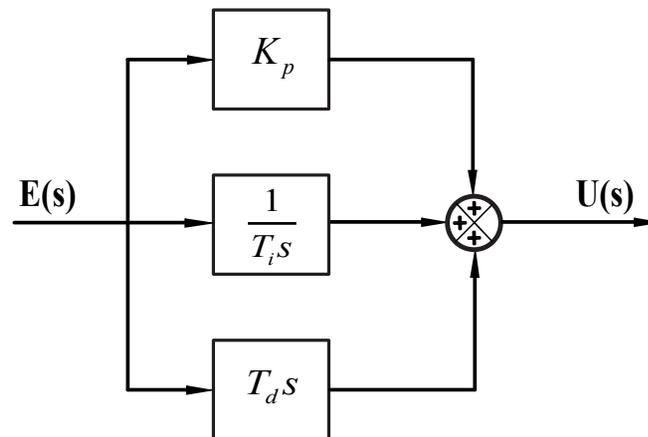


Figura 5.4: PID Interactivo.

### 5.2.3. PID Paralelo

Con el calificativo de paralelo se quiere indicar que las tres acciones proporcional, integral y derivativa son independientes. Las tres acciones de control actúan directamente sobre la señal de error y cada acción puede ser modificada por separado. Es la forma mas general de realizar el algoritmo PID. Este tipo de algoritmo no tiene en principio ninguna ventaja respecto a los dos anteriores, salvo el poder ajustar cada acción por separado.



**Figura 5.5:** PID Paralelo.

La utilidad de los controles PID estriba en que se aplican en forma casi general a la mayoría de los sistemas de control. Es interesante señalar que más de la mitad de los controladores industriales que se usan hoy en día utilizan esquemas de control PID o PID modificado.

### 5.3. Arquitecturas de Control PID

Actualmente se usan en la industria formas modificadas del control PID, tales como control I-PD y control PI-D. A continuación se describen cada uno de ellos.

#### 5.3.1. Control PI-D

En el Control PI-D la acción derivativa sólo actúa en el camino de la realimentación, a fin de que la diferenciación ocurra sobre esta señal y no sobre la señal de error. De esta forma se evita respecto a la señal PID que aparezcan señales de control muy bruscas o excesivamente elevadas cuando la consigna varía bruscamente. El esquema de control dispuesto de esta forma se muestra en la figura 5.6.

#### 5.3.2. Control I-PD

En el Control I-PD tanto la acción proporcional como la acción derivativa se mueven al camino de la realimentación. Por tanto, en el control I-PD es imprescindible tener la acción de control integral para una operación adecuada del sistema de control. La figura 5.7 muestra este tipo de control.

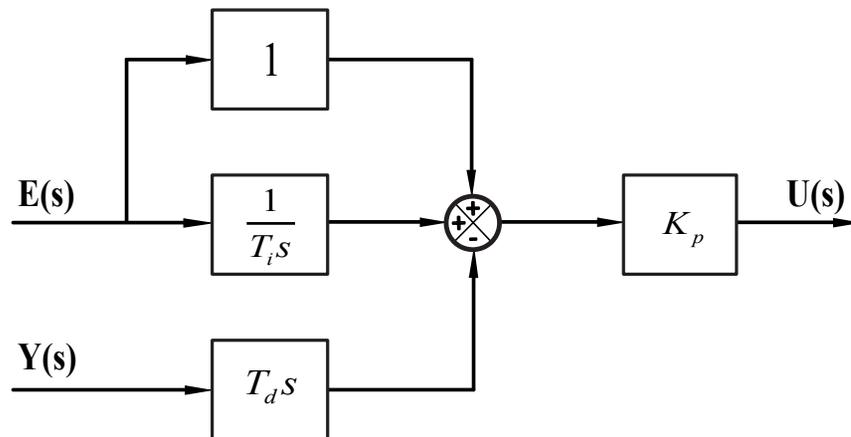


Figura 5.6: Control PI-D

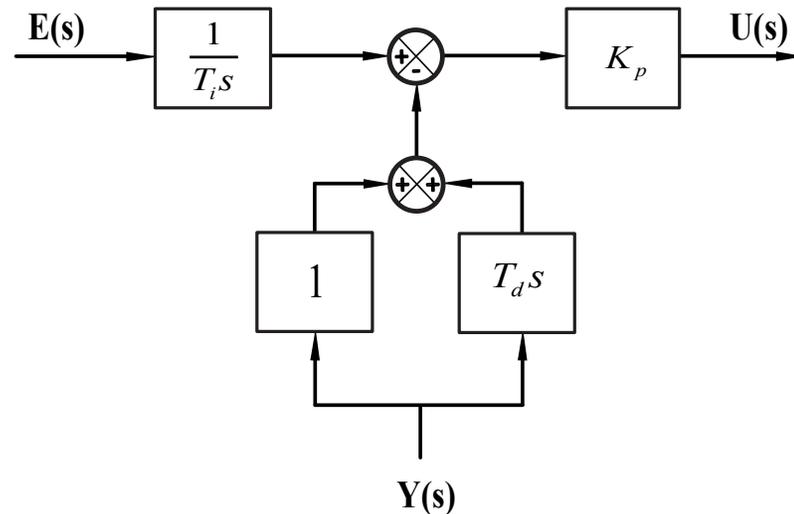


Figura 5.7: Control I-PD

## 5.4. Sintonización de Controladores

El paso final para la implementación de un lazo de control consiste en ajustar los parámetros del controlador. Si el controlador puede ser ajustado para dar una respuesta satisfactoria, se presume que el lazo de control ha sido bien diseñado. Cuando el controlador no puede ajustarse satisfactoriamente, debe revisarse la selección de los demás componentes del lazo de control. Generalmente existen varias consideraciones que se toma en cuenta para evaluar la respuesta de un lazo de control frente a una perturbación:

- La variable controlada deberá alcanzar su valor deseado tan rápidamente como

sea posible.

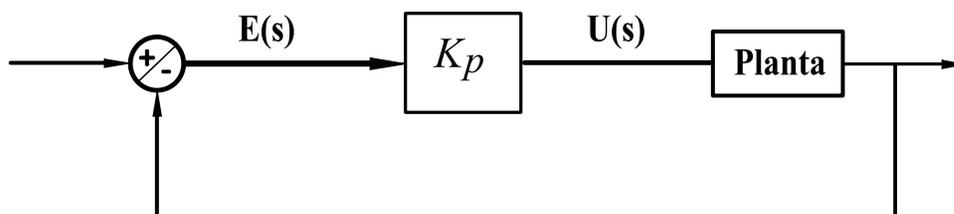
- La respuesta de la variable controlada no debería ser muy oscilatoria.
- La variable manipulada no debería estar sometida a grandes cambios, ya que frecuentemente afecta a otras partes del proceso.

Los métodos de ajuste de controladores se clasifican en dos grandes grupos: métodos de lazo cerrado, y métodos de lazo abierto. Los primeros se aplican con el controlador en automático; los segundos con el controlador en manual. Los parámetros obtenidos por estos métodos, son parámetros iniciales, para obtener los parámetros adecuados se pueden utilizar los criterios de error de integración.

### Método de Ziegler and Nichols

También conocido como método de de circuito cerrado o ajuste en línea, se basa en encontrar la ganancia de un controlador de tipo proporcional con la finalidad de que el lazo oscile indefinidamente a una amplitud constante; ésta es la máxima ganancia para la cual el lazo es estable denominada *ganancia crítica*, el periodo de la oscilación final llamado *periodo crítico*, también se requiere en este método. Para obtener estos parámetros de manera experimental, a partir del sistema real, mediante el siguiente procedimiento:

1. Se desconectan las acciones integral y derivativo del controlador por retroalimentación, de manera que se tiene un controlador proporcional (Fig. 5.8).
2. Se aplica una perturbación en el lazo (generalmente un cambio escalón en el valor deseado de aproximadamente 20%) y se ajusta la ganancia  $K_p$ , hasta que la respuesta oscile continuamente a una amplitud constante.
3. Se registra el último valor de la ganancia como  $K_{cr}$  y el periodo de la oscilación como  $P_{cr}$ , se determinan los ajustes a partir de las ecuaciones dadas en la tabla 5.1. [17]



**Figura 5.8:** Sistema en lazo cerrado con controlador proporcional

**Tabla 5.1:** Ecuaciones para Ajuste de Controladores

Controlador	Ajuste	Ziegler-Nichols Lazo Cerrado
Proporcional, P	$K_p$	$K_{cr}/2$
PD	$K_p$	$K_{cr}/1.7$
	$T_d$	$P_u/8$
PI	$K_p$	$K_{cr}/2.2$
	$T_i$	$P_u/1.2$
PID	$K_p$	$K_{cr}/1.7$
	$T_d$	$P_u/2$
	$T_i$	$P_u/8$

Por lo que el controlador PID sintonizado mediante este método produce

$$\begin{aligned}
 \frac{U(s)}{E(s)} &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\
 &= 0.6 K_{cr} \left( 1 + \frac{1}{0.5 P_{cr} s} + 0.125 T_d s \right) \\
 &= 0.075 K_{cr} P_{cr} \frac{\left( s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

## 5.5. Implementación Digital del PID

Si se requiere el uso de un controlador PID para un proceso del que se tenga un registro en tiempo discreto, es necesario aproximar las operaciones que se realizan en la acción del controlador; sea  $SP$  el valor del setpoint actual,  $PV$  la variable del proceso medida y  $\Delta t$  el tiempo de muestreo, se tiene que:

**Calculo del Error:** La siguiente formula representa el error actual usado en la obtención de la acción proporcional, integral y derivativa:

$$e(k) = (SP - PV) \tag{5.15}$$

**Acción Proporcional:** La acción proporcional es la ganancia del controlador por el error, como se muestra en la siguiente fórmula:

$$u_P(k) = (K_p * e(k)) \tag{5.16}$$

**Integración Trapezoidal:** La integración trapezoidal se utiliza para evitar cambios bruscos en la acción integral cuando hay un cambio repentino en **PV** o **SP**. Utilizar el ajuste no lineal de la acción integral para contrarrestar la saturación. Cuanto mayor sea el error, menor será la acción integral, como se muestra en la siguiente fórmula:

$$u_I(k) = \frac{K_c}{T_i} \sum_{i=1}^k \left( \frac{e(i) - e(i-1)}{2} \right) \Delta t \quad (5.17)$$

**Acción de Derivada Parcial:** Debido a los cambios abruptos que se presenten en **SP**, sólo aplican la acción derivada al **PV**, no al error  $e$ , para evitar que la derivada no aumente en gran proporción. La siguiente fórmula representa la acción derivada parcial:

$$u_d(k) = -K_c \frac{T_d}{\Delta t} (\mathbf{PV}(k) - \mathbf{PV}(k-1)) \quad (5.18)$$

Por lo que la salida del controlador queda determinada como

$$u(k) = u_P(k) + u_I(k) + u_D(k) \quad (5.19)$$

## 5.6. Estrategia para el control de velocidad del motor neumático

Habiendo analizado el comportamiento del motor observado en la caracterización de éste; de la dependencia de diferentes variables según el modelo y de cómo opera dentro del sistema neumático implementado, se plantea un mecanismo de control PID para la velocidad en el motor dentro del amplio rango de operación que posee.

Las limitaciones que se deben considerar para la estrategia de control dan la partida para dimensionar las propiedades que tendrá el mecanismo de control; por una parte, el motor presenta un comportamiento muy inestable e impredecible tanto en el arranque como a bajas velocidades (menores a 900 RPM) que en ocasiones lo detienen por completo aun si el sistema no se perturba, razón por la cual el controlador operará para valores superiores a éste umbral y entrará en operación con el con el motor activo. Si bien para mayores velocidades no se presentan estas paradas repentinas, si se presentan irregularidades y comportamientos no lineales que impiden definir un modelo de planta único para todos los rangos de operación, además del hecho de que por las magnitudes de caudal que requiere el sistema, las condiciones de flujo y presión entrada no se pueden mantener constantes en el tiempo.

Se debe establecer un umbral de velocidad máxima de 6000 RPM, determinado por la capacidad de lectura del encoder Rotativo (Sec. 3.2.2) utilizado para registrar la velocidad. La velocidad de respuesta del control esta determinada por la velocidad de





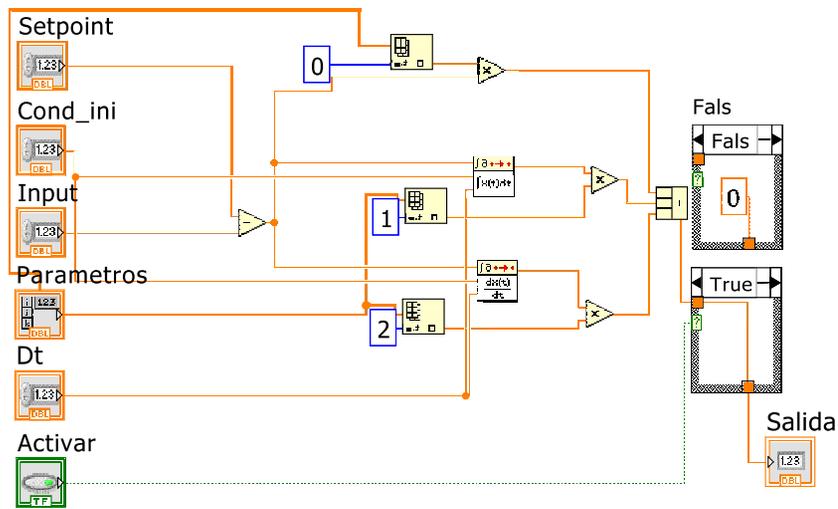


Figura 5.11: Diagrama del PID paralelo

En la fase final, denominada *apagado del sistema* (Fig. 5.12), se procede a limpiar el espacio en memoria virtual; registrando los datos del proceso de control, a partir de los pasos netos que haya realizado el motor PaP desde el inicio de su operación, se realiza el proceso de cierre y se cierran los canales virtuales con la tarjeta PCI.

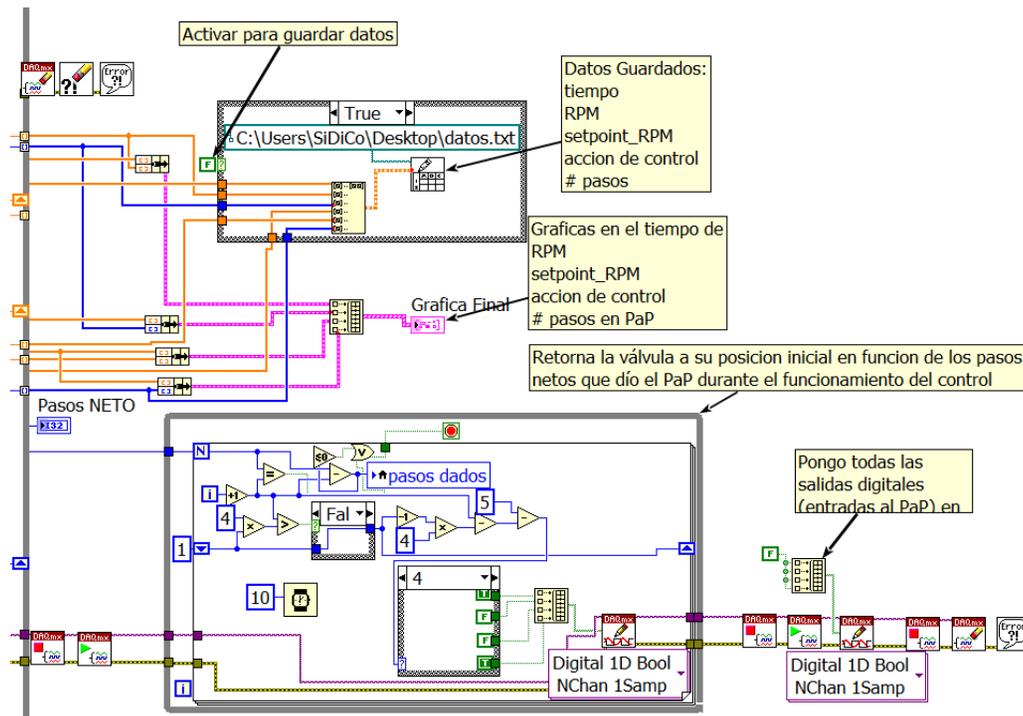


Figura 5.12: Diagrama de bloques de etapa de apagado del sistema

En el panel visual (Fig. 5.13) se ubican los cuadros de gráficas, en donde se van a observar el setpoint y la velocidad medida; una barra para elegir el valor del setpoint, un boton para activar y detener la ejecución del programa, cuadros de texto para ingresar el valor de las constantes al control PID, y cuadros de texto para observar el estado de variables como, el número de pasos neto, la salida del PID entre otras en tiempo real.

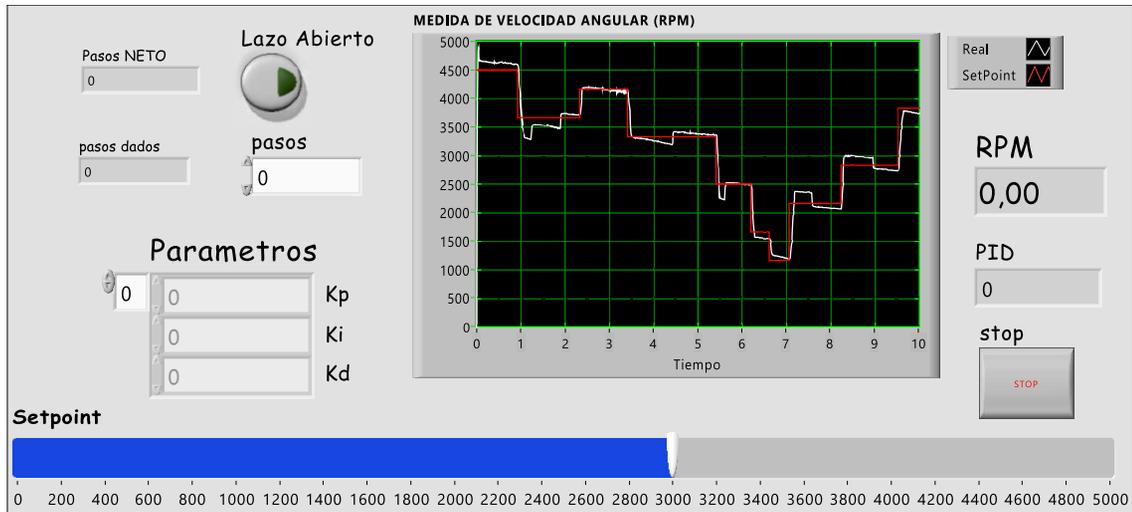


Figura 5.13: Panel Frontal del Programa de Control

### 5.7.1. Sistema en lazo abierto

Se establece como **variable de entrada** al número de pasos que realiza el motor PaP  $N_p$  y como **como variable de salida** a la velocidad de giro en el motor  $\omega$ ; con el resultado de la prueba del sistema completo (Sec. 4.2.5), se observa la relación presente entre estas dos variables, recordando que una vuelta en el husillo de la válvula corresponde a 200 pasos en el motor PaP. De aquí se elige la *ganancia del proceso* para la zona donde la velocidad es proporcional al número de pasos, entre los puntos de inflexión de la curva (Fig. 5.14), viene dada por la ecuación:

$$K_p = \frac{\Delta\omega}{\Delta N_p} = \frac{2351 - 443}{1336 - 1117} = 8.7 \frac{RPM}{paso} \quad (5.20)$$

Con el valor de ganancia definido, se llevan a cabo algunas pruebas en lazo abierto (Fig. 5.15), donde se observa la respuesta a la entrada escalón a partir del motor estático y con el motor activo. Se observan fenómenos de retardo, sobreimpulso amortiguamiento y amplio error en estado estacionario, los cuales se buscan corregir con la implementación del PID. La prueba también permite identificar que se debe aumentar el filtrado de la señal de velocidad medida, ya que los cambios entre datos consecutivos pueden arrojar errores muy grandes que lleven a acciones desmedidas del controlador PID.

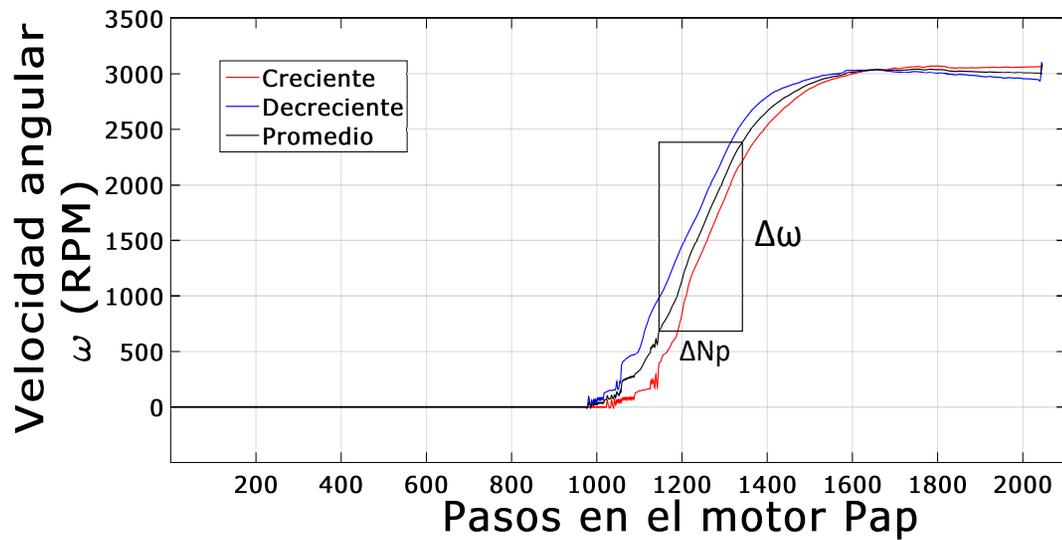


Figura 5.14: Variable de salida vs variable de entrada

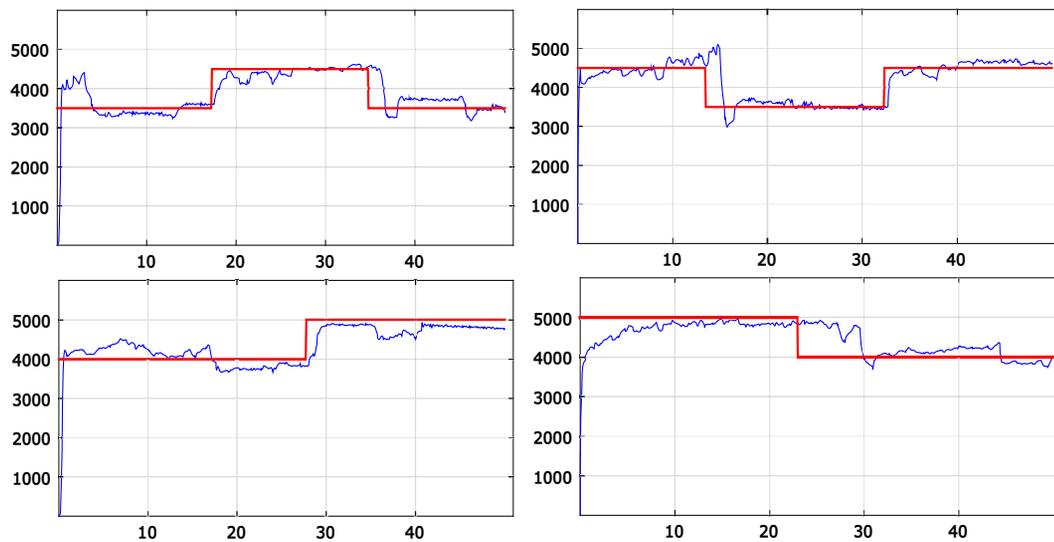


Figura 5.15: Respuesta de la planta en lazo abierto

### 5.7.2. Sintonización del control PID para el motor

Para determinar los parámetros del controlador, se lleva a cabo el proceso de sintonización descrita en la sección anterior, donde para un valor de  $K_p = K_{cr} = 12$  se obtiene el resultado mostrado en la figura 5.16, el valor del periodo se elige del promedio entre tres periodos de diferentes oscilaciones, de donde resulta  $P_{cr} = 1.36s$ , con lo que usando las formulas de la tabla 5.1, se obtienen los valores para las constantes del controlador mostradas en la tabla 5.2. Si bien estos valores no son los exactos para el funcionamiento del controlador, forman un punto de partida muy aproximado para variar su magnitud

hasta determinar los valores que mejor se adecuen al sistema.

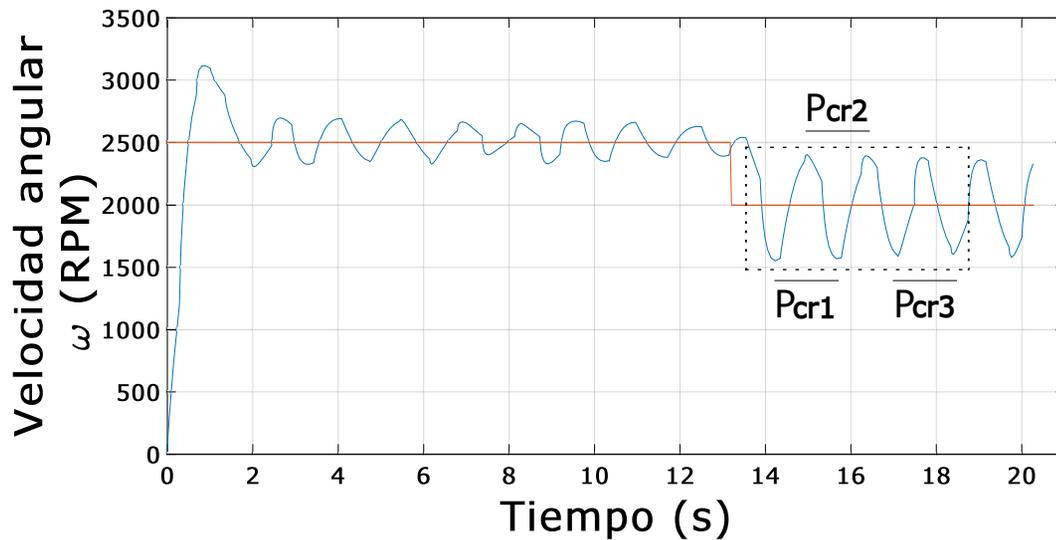


Figura 5.16: Prueba de sintonización del controlador PID

Tabla 5.2: Constantes del PID calculadas

Parámetro	Valor	Unidades
$K_p$	7.2	RPM/paso
$T_i$	0.68	s
$T_d$	0.17	s

### 5.7.3. Pruebas de controlador

Con el mecanismo de control ya adecuado, se realiza una prueba para analizar el funcionamiento del controlador a distintos valores de velocidad en el motor; para ello se ingresa un setpoint que varía de magnitud y de duración y se ejecuta el programa de control, al final se obtiene el registro de la velocidad medida, el setpoint, la acción del controlador y el error medido en el sistema, el resultado se observa en la figura 5.17.

El seguimiento del controlador a la señal deseada presenta un retardo a partir de la velocidad de respuesta del actuador, para estados del setpoint que duran pocos segundos el controlador envía la señal de corrección, si bien el actuador la ejecuta, la respuesta del motor no alcanza el valor deseado. Se observa además que el motor no responde proporcionalmente ante el cambio en el actuador, este fenómeno no se apreció en la caracterización, en donde se modificaba la apertura de la válvula a una velocidad menor.

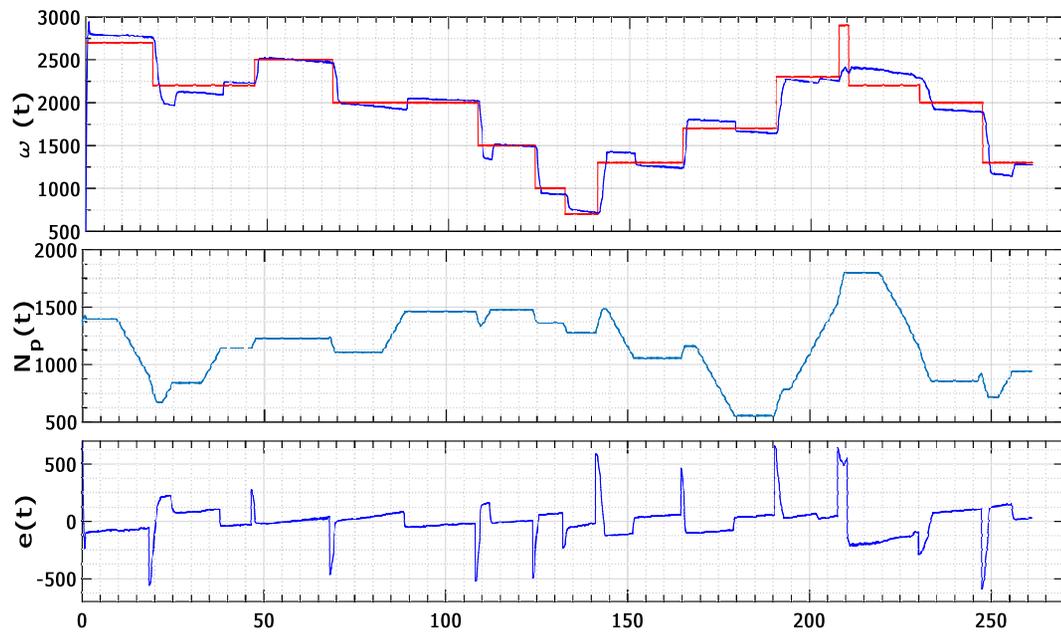


Figura 5.17: Prueba del controlador en rango de operación

Para ver este comportamiento en más detalle se proponen en el setpoint entradas senoidales a partir de diferentes velocidades y se cambia el valor de la constante  $T_i$  para analizar como cambia la compensación del error, la respuesta obtenida (Fig. 5.18) evidencia que el motor tiende a permanecer a una velocidad constante aun si se hay cortas variaciones en sus condiciones de entrada, solo se ve afectado hasta que haya una desviación suficiente para modificar su dinámica.

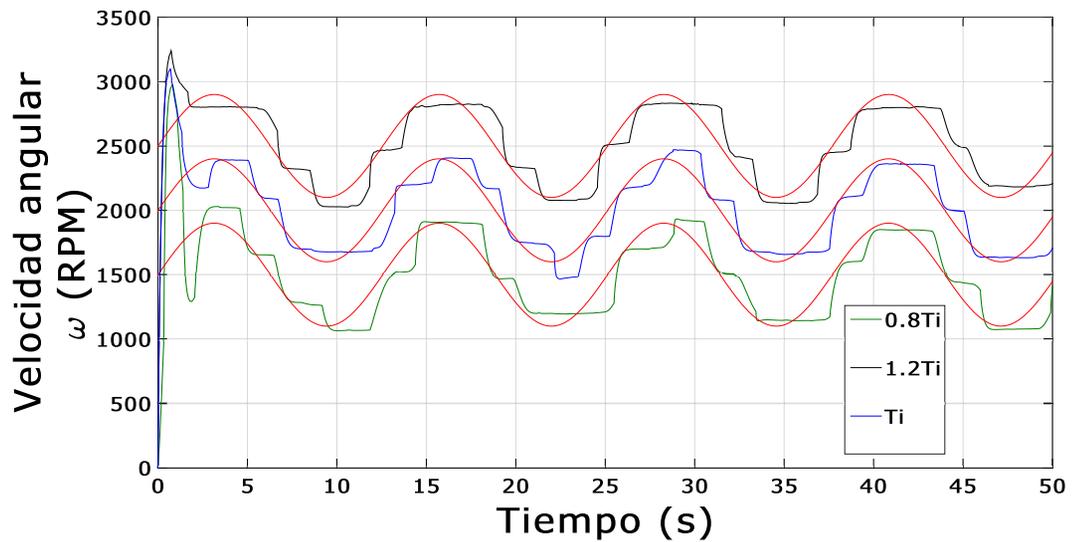
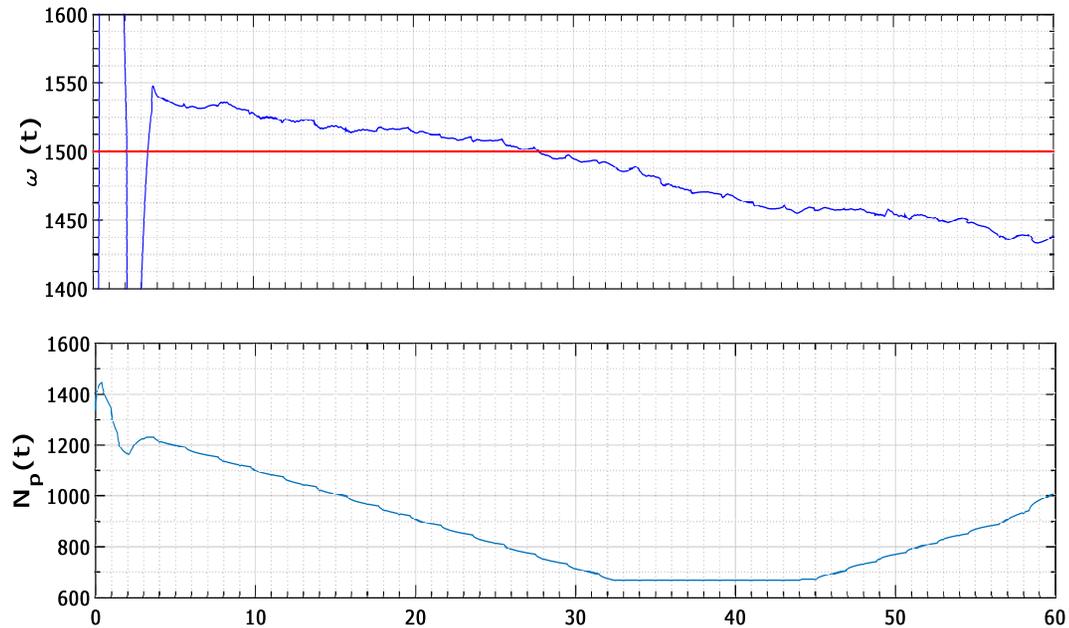


Figura 5.18: Respuesta planta controlada ante entrada senoidal

Al disminuir la constante  $T_i$  se observa que si bien la velocidad no sigue la curva del setpoint, pasa por más niveles de velocidad para seguirla, contrario a lo que ocurre con la respuesta del controlador con mayor valor de la constante, que a favor tiene que no demanda mucho trabajo del actuador.



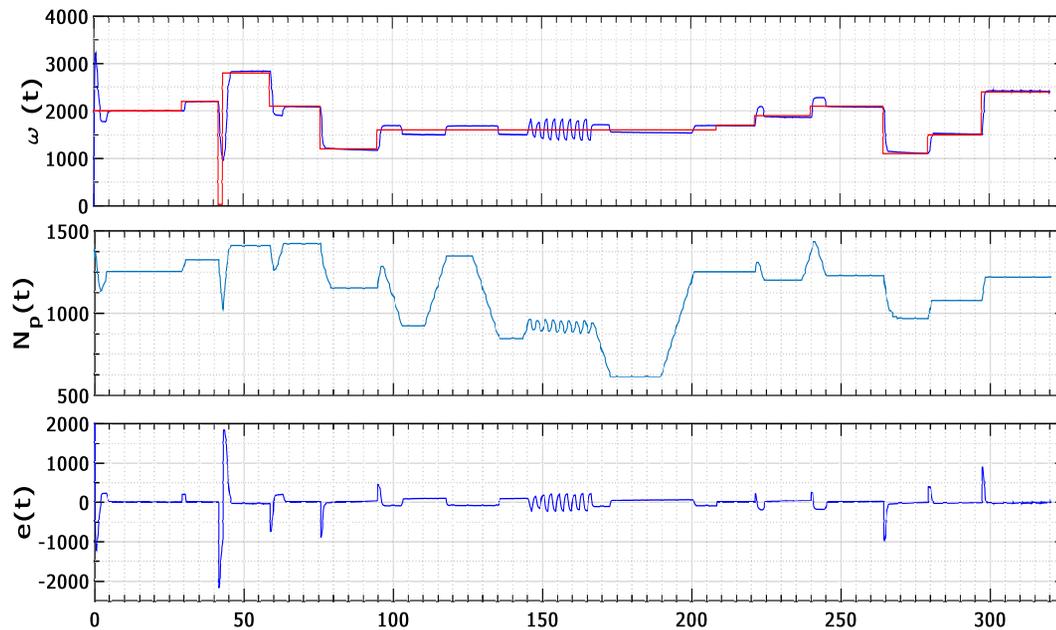
**Figura 5.19:** Acción de control en detalle

Ante un setpoint constante (Fig. 5.19), se observa con más detalle la acción de control por el efecto del integrador digital, como se definió en la sección 5.5, el integrador acumula el error de la señal y entrega un valor para compensar dicho error, cuando el error pasa a ser negativo, su magnitud se resta al error acumulado. Cuando la señal continua por debajo del setpoint, el integrador asume que el error esta siendo corregido y al llegar a un valor mínimo, ya no hay acción de control hasta que el error negativo aumente lo suficiente para iniciar la compensación contraria. En la literatura se proponen variantes en el tipo de integral como lo son la integral del valor absoluto del error (**IAE**) ó la integral del cuadrado del error (**ICE**), que corrigen estos fenómenos, lastimosamente son efectivas cuando se tiene un actuador con alta velocidad de respuesta.

#### 5.7.4. Pruebas del controlador ante disturbios

Para analizar la versatilidad del control del motor bajo efectos externos, se propone un setpoint con valor cero entre un corto tiempo, se detiene la producción de aire comprimido y además se le agrega una carga externa al eje durante un periodo de tiempo, el resultado de la prueba se observa en la figura 5.20; para un setpoint de valor cero, el motor reacciona de manera más rápida la acción de control, ya que el actuador ante

este disturbio opera saturado a velocidad máxima. Cuando sobre el eje se aplica una carga externa, el motor entra en oscilación, debido a la acción de control que busca mantener la velocidad de giro constante y la tendencia del motor a compensar el par externo aplicado con una variación en su velocidad.

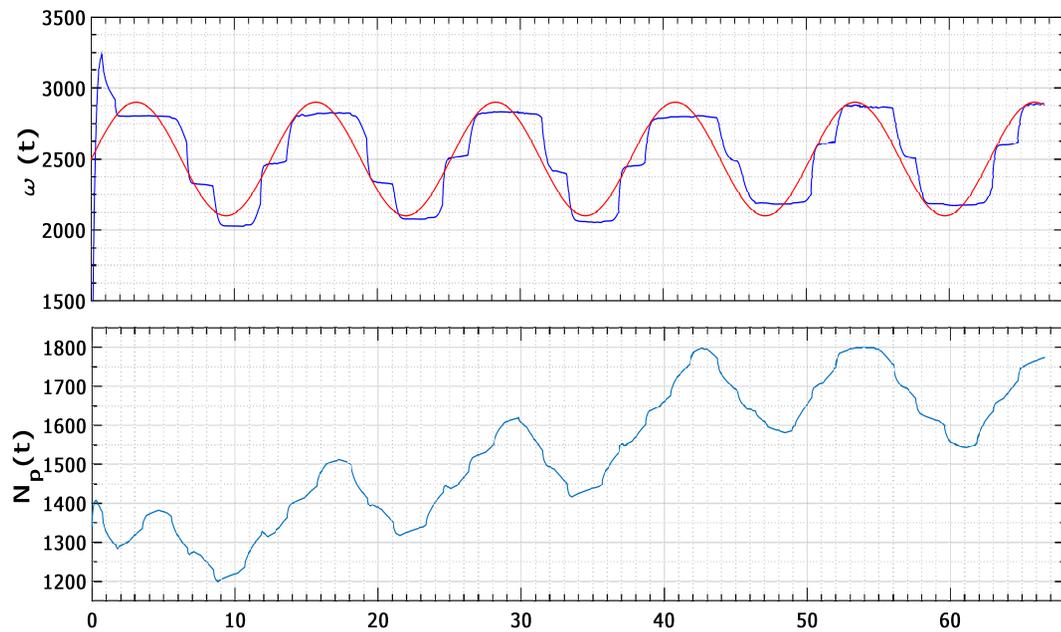


**Figura 5.20:** Prueba del controlador ante disturbios

Cuando el suministro de aire presenta cambios en el caudal o la presión; la acción de control, al ser netamente dependiente del valor de velocidad registrado, lleva a cabo su operación independiente de estos cambios, es por eso que se observa en la figura 5.21, que en el intento de seguir la señal del setpoint, el actuador realiza las operaciones mientras este en la capacidad de tener un efecto en la velocidad de salida, al llegar al umbral de número de pasos permitidos, la acción de control se detiene hasta que se registre una velocidad de cero ó que se registre una velocidad mayor a la referencia.

### 5.7.5. Observaciones sobre el Controlador PID de velocidad

La estrategia y el mecanismo de control que se han implementado, responden ante las necesidades de operar el motor a distintas velocidades, en un rango determinado; de seguir una referencia, dentro de los límites, independiente de las condiciones de suministro del aire comprimido. La posibilidad de implementar instrumentación virtual en el desarrollo del control ha facilitado el análisis del rendimiento del control, gracias a la facilidad de modificar las características de la arquitectura y la acción de control, que se convirtió en algo casi necesario para cada procedimiento experimental que se llevaba a cabo. El gran desafío que enfrenta este sistema de control se encuentra al mantener el



**Figura 5.21:** Acción de control bajo cambios del sistema

motor a unas revoluciones constantes en presencia de carga en el eje, porque la acción de control actúa en contra de la naturaleza del motor, impidiendo así llegar de inmediato a un punto de equilibrio para continuar siguiendo la referencia.

## Conclusiones

---

EL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN detallado en esta tesis, ha consistido fundamentalmente en un estudio del motor neumático de aletas, se obtuvieron las expresiones teóricas que fundamenten su operación y se validaron, a partir de pruebas experimentales. Además, conociendo el comportamiento del motor acompañado por una válvula reguladora de flujo, se ha propuesto una estrategia de control PID en su velocidad de rotación, que se implementó de manera virtual y cuya acción de control se ejecuta en el sistema neumático por medio de la válvula.

En el análisis físico-matemático del motor se han determinado las variables mecánicas y termodinámicas que intervienen en la dinámica del motor de aletas, como lo son la presión, el caudal, flujo volumétrico, el torque, la fricción la velocidad y la potencia. Se ha partido de conceptos de estas áreas de la física, omitiendo ciertas consideraciones al tratar el fluido como un gas ideal y al definir una representación simplificada de la fricción dentro del motor, y tomando en cuenta la geometría particular del motor, se derivaron relaciones entre el estado del aire comprimido que alimenta al motor y las variables mecánicas de salida de este actuador. En paralelo se ha llevado a cabo un estudio similar en la válvula reguladora de flujo, para la cual se aproximó su operación como un la que tiene un orificio de área transversal variable en la línea de flujo del aire; a partir de esta simplificación, se ha desarrollado su modelo descriptivo con parámetros que se deben determinar experimentalmente. El conjunto de ecuaciones obtenidas poseen tanto ecuaciones diferenciales como expresiones directas que permiten la simulación del comportamiento del motor y de la válvula, en el caso particular del motor, si bien las expresiones simulan la operación desde el arranque del mismo, en la práctica se observa un comportamiento que dista bastante de la simulación, por lo que esta etapa transitoria no hace parte de las consideraciones del modelo.

El montaje experimental implementado solo se debe considerar como un sistema de pruebas, pues no cuenta con la robustez de un montaje industrial, los instrumentos que acompañan al sistema neumático están bien soportados para su estabilidad mecánica y cuentan con la instrumentación electrónica adecuada que los llevó a ser efectivos en su desempeño. En el proceso de adquisición y procesamiento de datos, si bien es-

---

tuvo soportada por una tarjeta DAQ de alto rendimiento, la capacidad de computo del ordenador utilizado limitaba las herramientas de multitarea en algunos procesos de lectura de varias variables del sistema. A pesar de ello, no hubo mayor inconveniente para establecer una buena interfaz entre el montaje externo y el software de programación.

La caracterización de los componentes neumáticos presentó ciertos desafíos en cuanto a la resolución de algunas medidas, tal es el caso de las pruebas que determinaron el caudal en términos de la velocidad del motor, en donde se necesitó precisar la medida a un valor de la escala del instrumento; para las pruebas de torque realizadas, era necesario el ajuste de varios parámetros al tiempo, lo que limitaba la repetibilidad de la medida. A pesar de ello, la tendencia de los datos obtenidos tuvo correspondencia con lo esperado según el modelo y observado en la literatura; tal correspondencia fue evaluada en las etapas de simulación, donde se combinaron las expresiones matemáticas del modelo y los datos experimentales dentro de un algoritmo que implementó técnicas de ajuste no lineal por mínimos cuadrados, para obtener los parámetros del modelo que soporten lo observado en la práctica. El modelo ajustado presentó una excelente correlación para el comportamiento de la válvula, por lo que el uso de la aproximación de orificio de área variable y el método experimental de la conductancia sónica se validan entre si. En el caso del motor, las características dinámicas obtenidas del modelo para altas revoluciones tuvieron una muy buena correspondencia tanto en la magnitud como en el rizado presente por las fluctuaciones del torque; la relación entre el torque efectivo y la velocidad del motor presentó la misma tendencia en cuanto a la razón de cambio, con algo de desfase producto de la complejidad de mantener constante la presión en el proceso de medida; del caudal registrado y simulado se nota algo similar, la razón de cambio es similar para ambos casos, solo se apartan por la consideración del módulo de compresibilidad y no el coeficiente de compresibilidad, el cual si cambia con la presión de suministro. Al considerar el comportamiento del sistema general se apreció el efecto de la válvula en la operación del motor, esta tendencia sirvió de pauta para la acción de control implementada en el sistema.

Implementar un control de velocidad para el motor de aletas, requirió de bastantes consideraciones en base a lo observado en la etapa de caracterización, de ésta se determinó que es un dispositivo altamente no lineal y por tanto la estrategia de control o se desarrollaba no lineal, o se hacía uso de un controlador versátil que no se viera ampliamente afectado por esta propiedad del motor. Gracias a la observación del desempeño del motor en diferentes rangos de velocidad y sus márgenes de estabilidad, se logró diseñar e implementar una estrategia de control PID, la cual presenta la mejor versatilidad ante un elemento a controlar tan complejo como lo es el motor neumático, se establecieron las limitaciones del controlador en cuanto a su modo de operación y los rangos de velocidad en que debe operar para tener un buen desempeño. Debido a la baja velocidad de respuesta del actuador, también se especificó la acción de control para el sistema ya activado, con un proceso de arranque independiente del control. A partir del diseño, la estrategia de control se programó virtualmente en el software LabView<sup>®</sup>, que de una manera practica permite modificar las condiciones del controlador, los tiempos de

---

la acción de control y las características de operación del actuador. Para sintonización del controlador, se realizó el procedimiento descrito por Ziegler-Nichols, de donde se obtuvieron las constantes del control PID, se determinó que si bien se puede llevar a un estado de oscilación permanente de manera sencilla, el resultado de las constantes obtenido es poco reproducible por la no linealidad del motor, por lo que en adelante se llevó a cabo un análisis más cualitativo que cuantitativo. De las pruebas del controlador se determinó que en términos generales el control funciona de manera correcta; cuando se trata de seguir una referencia constante en el tiempo, el controlador compensa los errores accionando el motor PaP según la magnitud entregada por el control, en ocasiones el motor presentó un retardo en la respuesta ante el cambio que se apreció en mayor proporción para las referencias variables en el tiempo, ante un cambio en la carga externa en el eje, el motor presentó oscilaciones antes de volver a seguir la señal, hecho que es determinante para su puesta en marcha dentro de un proceso en el que se dependa de una velocidad constante en medio de par externo, ya que por lo general un motor de aletas sin controlador, ante la presencia de carga externa ajusta la velocidad para compensar el par extra, es decir, busca mantener constante la potencia y no la velocidad. Por último se observó que el controlador funciona de manera independiente de los pequeños cambios que se presenten en el suministro de aire, si bien la magnitud de la acción de control parte de la relación entre la velocidad y el número de pasos de apertura en la válvula, solo se tomó en cuenta la razón de cambio de esta relación y no la correspondencia entre ambas variables, por lo el control cubre los límites de presión y caudal en los que opera el motor.

## Trabajos a Futuro

El presente proyecto ha abierto las puertas para el estudio de los motores neumáticos, el modelo desarrollado es una de las muchas maneras en que se puede abordar el análisis y la simulación de estos dispositivos, pasa igual con la válvula reguladora de flujo, que si bien no posee las ventajas de las electroválvulas que usualmente se implementan en los procesos neumáticos, es una alternativa de fácil manejo y simulación.

Se pueden llevar a cabo proceso de caracterización con mejores resultados a partir de implementar instrumentos de medida con mayor resolución, además, se pueden llevar a cabo pruebas adicionales si se utiliza un mecanismo que permita medir la potencia en el eje del motor.

La implementación de un controlador PID es una primera aproximación al desarrollo de un controlador robusto para el motor, por lo que se motiva a utilizar estrategias de control más avanzadas, en conjunto con actuadores de mejor respuesta, o que modifiquen otras variables como la presión, para tener la capacidad de incluso de controlar el par de salida en el motor o la potencia del mismo, así mismo se puede desarrollar de manera virtual o electrónica en función de los requerimientos.

## Bibliografía

---

- [1] Peter Beater. *Pneumatic Drives*. Springer, 2007.
- [2] Delmée G. *Manual de Medición de Flujo*. Edgar Blücher Ltda, 1983.
- [3] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de Control Moderna S.A.* 5ªed.. Pearson Educación, 2010.
- [4] S. Millán Teja. *Automatización Neumática y Electroneumática, Year = 1995*. Norgrem.
- [5] Béla G. Lipták. *Instrument Engineers' Handbook*. CRC Press, fourth edition, 2006.
- [6] Hugh D Young y Roger A. Freedman. *Física universitaria Volumen 1, 12ª ed.* Pearson Educación, 2009.
- [7] E. Russell Johnston y Phillip J. Cornwell Ferdinand P. Beer. *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica*. Mcgraw-Hill, 2010.
- [8] Raymond A. Serway y John W. Jewett. *Física Para Ciencias e Ingeniería Volumen 1. 7ª ed.* Cengage Learning, 2008.
- [9] Gordon J. Van Wylen y Richard E. Sonntag. *Fundamentos de Termodinámica. 2ª ed.* Limusa Wiley, 2004.
- [10] German V. Krejnín Igor L. Krivts. *Pneumatic Actuating System for Automatic Equipment United States of América*. CRC Press, 2006.
- [11] German A. Bacca. **Estudio de la Dinámica No-lineal de un Servomecanismo de Posicionamiento**. Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, 2011.
- [12] Yunus A. Cengel y Michael A. Boles. *Termodinámica 7ª ed.* Mcgraw-Hill, 2012.
- [13] Antonio Creus Solé. *Neumética e Hidráulica*. Marcombo, 2007.
- [14] Katsuhiko Ogata. *Dinámica de Sistemas*. Prentice-Hall, 1987.

- 
- [15] S. R. Majumdar. *Sistema Neumáticos; Principios y Mantenimiento*. McGraw-Hill, 1997.
- [16] ISO 6358. *Pneumatic fluid power – Components using compressible fluids – Determination of flow-rate characteristics*. ISO, 1989.
- [17] Armando Corripio Carlos Smith. *Principles and Practice of Automatic Process Control*. John Wiley y Sons Inc., 1997.
- [18] L. M. García P. H. Guevara L. Távara y C. Sánchez R. J. Guevara, J. S. Sandoval. **Sistemas Neumáticos Industriales**. *Escuela Profesional de Ing. Electrónica - UNPRG*, 2009.
- [19] P. R. Moore J. Pu and R. H. Weston. **Digital servo motion control of air motors**. *International Journal of Production Research*, 1991.
- [20] C.B. Wong J. Wang, J. Pu and P.R. Moore. **Robust Servo Motion Control of Air Motor Systems**. *UKACC International Conference on Control*, 427:90–95, 1996.
- [21] NEUMAC. S.A. **Motores Neumáticos Catalogo**. *Zaragoza-Espana*, 2004.
- [22] Atlas Copco. **Catálogo Motores neumáticos**. *Zaragoza-Espana*, 2004.
- [23] Departamento de Capacitación. **Introducción a la neumática**. *Automatización Micromecánica S.A.I.C.*
- [24] P. R. Moore J. Pu and R. H. Weston. **Modeling study and servo control of air motor systems**. *International Journal of Production Research*, 1998.
- [25] Cheng-Wei Cheng Chao-Chieh Lan. **Modeling and Design of Air Vane Motors for Minimal Torque Ripples**. *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, 2010.
- [26] L. Governi Y. Volpe Monica Carfagni, R. Furferi. **A vane-motor automatic design procedure**. *Int J Interact Des Manuf*, 7:147–157, 2012.
- [27] Sheng-Chung Tzeng K. david Huang. **Development of a hybrid pneumatic-power vehicle**. *Applied Energy*, 80:47–59, 2005.
- [28] Philip R Moore Zongmao Zhang Jihong Wang, Junsheng Pu. **Modelling study and servo-control of air motor systems**. *International Journal of Control*, 71:459–476, 1998.
- [29] Shih-Yao Huang, Yean-Ren Hwang. **System Identification and Integration Design of an Air/Electric Motor**. *Energies*, 6:921–933, 2013.
- [30] Yean-Ren Hwang, Yu-Da Shen. **Dynamic Modeling and Controller Design for Air Motor**. *SICE-ICASE International Joint Conference, Busan*, 2006.
-

- 
- [31] S. Pastorelli T. Raparelli A. Manuello Bertetto, L. Mazza. **A Model of Contact Forces in Pneumatic Motor Vanes.** *Meccanica*, 36:691–700, 2001.
- [32] Peter Beater. **Modelling and Control of Pneumatic Vane Motors.** *International Journal of Fluid Power*, 5, No. 1:7–16, 2004.
- [33] D. Scholz G. Prede. **Electroneumática 1ªed.. Festo Didactic GmbH**, 2001.
- [34] Yean-Ren Hwang Chia-Hua Lu. **Backstepping sliding mode tracking control of a vane-type air motor X-Y table motion system.** *ELSEVIER Ltd*, 2011.
- [35] Yasuhiro Hayakawa Sadao Kawamura Shunmugham R.Pandian, Fumiaki Takemura. **Control Performance of an Air Motor.** *International Conference on Robotics and Automation*, 1999.
- [36] Radek Votrubec and Miroslav Vavroušek. **Control system of a rotary pneumatic motor.** *Technical university of Liberec*.
- [37] Shih-Yao Huang Yean-Ren Hwang. **Design FPGA Speed Controllers for Air Motor.** *Mechanical Engineering, National Central University*.
- [38] Yen JiaYush Lin LinHsu. **Dynamic Modeling and Robust Controller Design for Air Motor.** *Chinese Control Conference*, 2008.
- [39] Leonid Shpanin Nan Jia Gang Liu Alan S. I. Zinober Xing Luo, Jihong Wang. **Development of a Mathematical Model for Vane-type Air Motors with Arbitrary N Vanes.** *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 2008.
- [40] Yu-Ta Shen Yean-Ren Hwang and Min-Shin Chen. **Dynamic analysis and fuzzy logic control for the vane-type air motor.** *Journal of Mechanical Science and Technology*, 23, 2009.
- [41] G. Ascanio J. naranjo, E. Kussul. **A new pneumatic vanes motor.** *ELSEVIER Ltd.*, 2010.
- [42] S. Jiménez O. Caldas. **Identificación paramétrica en lazo cerrado de sistema de accionamiento neumático para cilindro de doble efecto.** *Revista Facultad de Ingeniería, UPTC*, 2012.

## A.1. Algoritmos en Matlab<sup>®</sup>

### A.1.1. Algoritmo de regresión por mínimos cuadrados para determinar parámetros de la Válvula

Para hallar los parámetros desconocidos que relacionen el modelo matemático de la Válvula y el comportamiento experimental, se implementa un algoritmo que usa la función *lsqcurvefit*, que partir de los datos experimentales registrados (tiempo y presión), determina los coeficientes  $\mathbf{x}=[\mathbf{arc},\mathbf{b}]$  que mejor se ajustan al modelo matemático:

```
%Cálculo Area relativa y relación de presión crítica Válvula
%% Parametros del sistema
Patm=0.753; % bar_abs Presion atmosferica en Popayán
T0=22+273; % K Temp. aire ambiente
Ts=T0; % K, Temp. aire de suministro
R=287; % N-m/kg-K Constante del aire
Tn=20+273.15; % K, Según Norma ISO 6358 [16]
Pn=1; % bar_abs
denn=1e5*Pn/(R*Tn); % kg/m3
arco=1; % Valores iniciales para la función de ajuste
bo=1;
Ps=5.083+P0; % Presión P1 (suministro), bar_abs
Lm=0.34; % m longitud de la manguera
Dim=10/1000; % m diametro interno de las manguera
Vm=pi*Dim^2/4*Lm; % m3 vol. de la manguera
Vt=0.000725; % Vol. del tanque en m3

%% Cargar datos medidos
load data.txt
data_t=data(:,1); % Datos de tiempo medidos
data_p=data(:,2)+Patm; % Datos de presión (abs) medidos
Ps=max(data_p); %
%% Función de Ajuste
xo=[ArCo,bo]; % Valor inicial de Parámetros
options=optimset('tolfun',0.0001);
```

```
[x,resnorm]=lsqcurvefit(@ec_pre,xo,data_t,data_p,[],[],options);
er=resnorm/(data_t);
% Valores obtenidos del Ajuste
ArC=x(1); % Área relativa * Conductancia Sónica
b=x(2); % Relación de presiones Crítica
```

Donde `ec_pre` es la función que resuelve numéricamente la ecuación diferencial de la presión a la salida de la válvula definida por la ecuación 2.88 con ayuda de la función `Ode45`:

```
% Ecuación de presión resuelta numéricamente
function P_m = ec_pre(x,data_t)
    % definir los parámetros que cambian en la función de ajuste
    arc=x(1);
    b=x(2);
    tf=xdata(length(xdata));
    p_i=data_p(1);

    % Definir la función que resuelve la Ec. Diferencial
    options = odeset('RelTol',1e-6, 'Abstol',1e-7);
    [t,y]=ode45(@ec_dp,[0 tf],p_i,options);

    % Entrega los valores de presión calculados del modelo para los
    datos de tiempo experimental
    P_m=spline(t,y(:,1),data_t);

    % Definir la función de presión Ec. 2.88
    function dp = ec_dp(t,p)
        if t == data_t(1)
            P1=0;
        else
            P1=max(data_p);
        end
        T=T0*(p(1)/P0)^((n-1)/n);
        flujo=fun_flujo(arc,Ps,p(1),Ts,denn,T0,b);
        dp=[1e-5*n*R*T/(Vt+Vm)*flujo];
    end

    % Definir la función de flujo de masa Ec. 2.89
    function flujo=fun_flujo(ArC,Pu,Pd,Tu,deno,To,b)
        rp=Pd/Pu;
        if rp <= b
            flujo=ArC*Pu*deno*sqrt(To/Tu);
        elseif rp > b && rp < 1.0
            flujo=ArC*Pu*deno*sqrt(To/Tu)*sqrt(1-((rp-b)/(1-b))^2);
        else
            flujo=0;
        end
    end
end
```

## A.1.2. Algoritmo de regresión por mínimos cuadrados para determinar parámetros del motor a partir de pruebas de torque

Se implementa el siguiente algoritmo que a partir del resultado de las pruebas de torque en el motor (Fig. 4.7), se determinan las variables desconocidas  $\mathbf{x}=[P_s, \mathbf{C}]$  en la ecuación del torque efectivo (Ec. 2.92) por medio de la función *lsqcurvefit*:

```

%%Cálculo de Presión de entrada en el motor y coeficiente de fricción
    viscosa a partir de las pruebas de torque
%% Parámetros del sistema
Patm=0.753; % bar_abs Presion atmosferica en Popayán
th1=pi/3; %Ángulos límite en puerto de entrada de aire
th2=7*pi/12;
th3=17*pi/12; %Ángulos límite en puerto de salida de aire
th4=5*pi/3;
Vex=vc(th3); % Volúmen de expansión
Vcm=vc(th1); % Volúmen de compresión

%% Cargar datos de pruebas de torque
data=xlsread('pruebas_torque.xlsx','Hoja1');
vs3=data(:,1);
tq3=data(:,2);
vs4=data(:,3);
tq4=data(:,4);
vs5=data(:,5);
tq5=data(:,6);

%% Rangos de búsqueda de parámetros
lb = [0.5,0.00001];
ub = [4,0.005];
xi=[1,0.0074]; % Valor inicial de Parámetros
%Torque efectivo (Ec. 2.92)
fun=@(x,vs)((Vex-Vcm)*(x(1)-Patm)*(1e5)-(0.5*x(2)*vs*2*pi/60));
val3=lsqcurvefit(fun,xi,vs3,tq3,lb,ub);
val4=lsqcurvefit(fun,xi,vs4,tq4,lb,ub);
val5=lsqcurvefit(fun,xi,vs5,tq5,lb,ub);

% Valores obtenidos del Ajuste
ps3=val3(1); % Presión en el motor a 3 bares
ps4=val4(1); % Presión en el motor a 4 bares
ps5=val5(1); % Presión en el motor a 5 bares
J=(val3(2)+val4(2)+val5(2))/3; % Coeficiente de fricción viscosa

```

Donde *vc* es el volumen en una cámara determinado en la sección 2.4.2:

```

%% Calcular volumen en la cámara
function v=vc(th)
%% Constantes
R=0.041; % Radio Estator
r=0.034; % Radio rotor
d=R-r; % Excentricidad ( Radio estator - Radio rotor)
w=0.063; % Ancho de estator, rotor y aleta

```

```

    x=0.004; % Espesor aleta
    gm=pi/2;
%% Formulas de ayuda
    bt=th-asin(d*sin(th)/R);
    a=rv(th);
    bt_gm=th-gm-asin(d*sin(th-gm)/R);
    a_gm=rv(th-gm);
%% Volumen en la camara (Ec. 2.4.2)
    v=0.5*w*((bt - bt_gm)*R^2 - gm*r^2 - d*R*(sin(bt) - sin(bt_gm)) -
    x*(a + a_gm - 2*r) );
end

```

## A.2. Algoritmo en Python

### A.2.1. Algoritmo para ajuste de curva de la ecuación de movimiento del motor

El algoritmo determina los parámetros desconocidos de la ecuación de movimiento del motor `param[T_d,J,C]` por medio de la combinación entre un método numérico para resolver la ecuación diferencial (*odeint*) y una función para el ajuste por mínimos cuadrados (*curve\_fit*).

```

#Cálculo de parámetros en el modelo dinámico del motor a partir de las
#pruebas de presión
import math
from scipy.integrate import odeint
from scipy.optimize import curve_fit
import numpy as np
# Parámetros del sistema
patm=0.753      # Presión atmosférica
R=0.041         # Radio del estator
r=0.034         # Radio del rotor
d=R-r           # Excentricidad
w=0.063         # Espesor aleta
x=0.004         # Largo de la aleta
gm=math.pi/2   # Ángulo entre aletas
k=1.3           # Constante politrópica del aire
th1=pi/3        #Ángulos límite en puerto de entrada de aire
th2=7*pi/12
th3=17*pi/12    #Ángulos límite en puerto de salida de aire
th4=5*pi/3
# Simular cambios de presión en el tiempo
def prs(t):
    global patm
    if t<=1:
        p=patm
    elif t<=2 and t>1:
        p=patm+0.84
    elif t<=3 and t>2:
        p=patm+0.96
    elif t<=4 and t>3:
        p=patm+1.07
    elif t<=5 and t>4:
        p=patm+1.18
    elif t<=6 and t>5:

```

```

        p=patm+1.26
    elif t<=7 and t>6:
        p=patm+1.30
    elif t<=8 and t>7:
        p=patm+1.44
    elif t<=9 and t>8:
        p=patm+1.50
    else:
        p=1*patm
    return p
# Función para calcular el volumen de la cámara
def vc(th):
    global R r gm w x
    bt=th-math.asin(d*math.sin(th)/R)
    a=rv(th)
    bt_gm=th-gm-math.asin(d*math.sin(th-gm)/R)
    a_gm=rv(th-gm)
    v=0.5*w*( (bt - bt_gm)*R**2 - gm*r**2 - d*R*(math.sin(bt) -
    math.sin(bt_gm)) - x*(a + a_gm - 2*r) )
    return v
# Funcion para calcular el radio variable
def rv(th):
    global R r d
    a=math.sqrt(R**2-d**2*(math.sin(th))**2)-d*math.cos(th);
    return a
# Función para calcular la presión en la cámara
def pre(th,t):
    global k patm gm th1 th2 th3 th4
    ps=prs(t)*100000
    pi=math.pi
    vex, vcs = vc(th2+gm), vc(th4+gm)
    nv=math.ceil(th/(2*pi))
    i=th-(nv-1)*2*pi
    if i<=th1 or i >th4+gm:
        p=patm*(vcs/vc(i))**k
    elif i>th1 and i<th4+gm:
        p=ps
    elif i>=th4+gm<=i4 and i<th3:
        p=ps*(vex/vc(i))**k
    else:
        p=patm
    return p
# Funcion para calcular el torque
def tq(th,t):
    global R r w gm
    # posicion aletas
    v1, v2, v3, v4 = th, th+gm, th+2*gm, th+3*gm
    # presión en las cámaras
    pr1, pr2, pr3, pr4 = pre(v1,t), pre(v2,t), pre(v3,t), pre(v4,t)
    # diferencia de presión sobre las aletas
    dp1, dp2, dp3, dp4 = pr1-pr2, pr2-pr3, pr3-pr4, pr4-pr1
    # Áreas
    a1, a2, a3, a4 = (rv(v1)-r)*w, (rv(v2)-r)*w, (rv(v3)-r)*w, (rv(v4)
-r)*w
    # Brazos
    br1, br2, br3, br4 = (rv(v1)+r)/2, (rv(v2)+r)/2, (rv(v3)+r)/2, (rv
(v4)+r)/2
    # Torque sobre aleta
    M1, M2, M3, M4 = dp1*a1*br1, dp2*a2*br2, dp3*a3*br3, M4=dp4*a4*br4
    # Torque neto
    trq=(M1+M2+M3+M4)
    return trq
# Función sgn(x)

```

---

```

def sign(x):
    if x>=0:
        return 1
    else:
        return -1
# valores Iniciales para resolver la ecuación dinámica
X0=[math.pi,0]
t=np.linspace(0,10,2000)
vel=np.zeros(2000)
# Velocidad experimental
for i,ti in enumerate(t):
    # Velocidad a partir de la curva en la figura 4.9(b)
    vel[i]=prs(ti)*3792-2850.9
# Ecuación diferencial de dinámica del motor (Ec. 2.91)
def df(X,t,Td,C,J):
    th, w= X[0], X[1]
    tor_pre, tor_fr, tor_din = tq(th,t), C*(w), Td*sign(w)
    if tor_pre <= tor_fr+tor_din and w<=0:
        dth=dw=0
    else:
        dth, dw = w, dw=(tor_pre-(tor_fr+tor_din))/(J);
    return [dth,dw]
# función para resolver Ec. diferencial a partir de los parámetros
# dados
def func(t,Td,C,J):
    out=[]
    sol=odeint(df,X0,t,rtol=1e-4,args=(Td,C,J))
    out=(sol[:,1]*60/(2*math.pi))

param, cov =curve_fit(func, t, vel)

Td=param[0] # Torque de la fricción dinámica de Coulomb
J=param[1] # Momento de inercia del rotor y eje
C=param[2] # Coeficiente de amortiguamiento viscoso

```

# Especificaciones de Instrumentos

## B.1. Especificaciones del Encoder

Item	E6B2-CWZ6C	E6B2-CWZ5B	E6B2-CWZ3E	E6B2-CWZ1X
<b>Power supply voltage</b>	5 VDC -5% to 24 VDC +15%, Ripple (p-p): 5% max.	12 VDC -10% to 24 VDC +15%, Ripple (p-p): 5% max.	5 VDC -5% to 12 VDC +10%, Ripple (p-p): 5% max.	5 VDC ±5%, Ripple (p-p): 5% max.
<b>Current consumption</b> (See note 1.)	70 mA max.	80 mA max.		130 mA max.
<b>Resolution</b> (pulses/rotation)	10/20/30/40/50/60/100/200/300/ 360/400/500/600/720/800/1,000/ 1,024/1,200/1,500/1,800/2,000 P/R	100/200/360/500/600/ 1,000/2,000 P/R	10/20/30/40/50/60/100/200/300/ 360/400/500/600/1,000/1,200/ 1,500/1,800/2,000 P/R	10/20/30/40/50/60/100/200/ 300/360/400/500/600/1,000/ 1,024/1,200/1,500/1,800/ 2,000 P/R
<b>Output phases</b>	A, B, and Z			A, $\bar{A}$ , B, $\bar{B}$ , Z, $\bar{Z}$
<b>Output configuration</b>	NPN open-collector output	PNP open-collector output	Voltage output (NPN output)	Line driver output (See note 2.)
<b>Output capacity</b>	Applied voltage: 30 VDC max. Sink current: 35 mA max. Residual voltage: 0.4 V max. (at sink current of 35 mA)	Applied voltage: 30 VDC max. Source current: 35 mA max. Residual voltage: 0.4 V max. (at source current of 35 mA)	Output resistance: 2 k $\Omega$ Sink current: 20 mA max. Residual voltage: 0.4 V max. (at sink current of 20 mA)	AM26LS31 equivalent Output current: High level = $I_o = -20$ mA Low level = $I_i = 20$ mA Output voltage: High level = $V_o = 2.5$ V min. Low level = $V_i = 0.5$ V max.
<b>Max. response speed</b> (See note 3.)	100 kHz	50 kHz	100 kHz	
<b>Phase difference on output</b>	90°±45° between A and B (1/4T±1/8T)			
<b>Rise and fall times of output</b>	1 $\mu$ s max. (Control output voltage: 5 V; load resistance: 1 k $\Omega$ ; cable length: 2 m)	1 $\mu$ s max. (Cable length: 2 m; source current: 10 mA max.)	1 $\mu$ s max. (Cable length: 2 m; sink current: 10 mA max.)	0.1 $\mu$ s max. (Cable length: 2 m; $I_o = -20$ mA; $I_i = 20$ mA)
<b>Starting torque</b>	0.98 m N·m max.			
<b>Moment of inertia</b>	1 x 10 <sup>-8</sup> kg·m <sup>2</sup> max.; 3 x 10 <sup>-7</sup> kg·m <sup>2</sup> max. at 600 P/R max.			
<b>Shaft loading</b>	<b>Radial</b>	30 N		
	<b>Thrust</b>	20 N		
<b>Max. permissible speed</b>	6,000 r/min.			
<b>Protection circuits</b>	Power supply reverse polarity protection, Output load short-circuit protection			—
<b>Ambient temperature</b>	Operating: -10°C to 70°C (with no icing) Storage: -25°C to 85°C (with no icing)			
<b>Ambient humidity</b>	Operating/storage: 35% to 85% (with no condensation)			
<b>Insulation resistance</b>	20 M $\Omega$ min. (at 500 VDC) between current-carrying parts and case			
<b>Dielectric strength</b>	500 VAC, 50/60 Hz for 1 min between current-carrying parts and case			
<b>Vibration resistance</b>	10 to 500 Hz, 150 m/s <sup>2</sup> or 2-mm double amplitude for 11 min 3 times each in X, Y, and Z directions			
<b>Shock resistance</b>	1,000 m/s <sup>2</sup> 3 times each in X, Y, and Z directions			
<b>Degree of protection</b>	IEC 60529: IP50			
<b>Connection method</b>	Pre-wired Models (standard length: 0.5 m)			
<b>Weight (packed state)</b>	Approx. 100 g			
<b>Accessories</b>	Coupling, Hexagonal Wrench, Instruction Manual			

## B.2. Asignación de Pines de la DAQ PCI-6023E

**AIGND** *Tierra de la entrada Analógica*—Esos pines son el punto de referencia para una medida en configuración RSE y el punto de retorno de la corriente de polarización para las mediciones diferenciales. Las tres referencias de tierra (AIGND, AOGND y DGND) están conectadas entre si en la tarjeta.

**GPCTR0\_GATE** *Compuerta de contador*—Como entrada, la señal se configura en el modo de detección de flancos, puede seleccionarse cualquier pin PFI como fuente y configurar la selección de polaridad para el flanco ascendente o descendente.

**DIO** *Señales digitales E/S*—Son para uso general, se puede configurar individualmente cada línea para cada entrada o salida, además los puertos digitales son de alta impedancia.

AIGND	1	2	AIGND
ACH0	3	4	ACH8
ACH1	5	6	ACH9
ACH2	7	8	ACH10
ACH3	9	10	ACH11
ACH4	11	12	ACH12
ACH5	13	14	ACH13
ACH6	15	16	ACH14
ACH7	17	18	ACH15
AISENSE	19	20	DAC0OUT <sup>1</sup>
DAC1OUT <sup>1</sup>	21	22	RESERVED
AOGND	23	24	DGND
DIO0	25	26	DIO4
DIO1	27	28	DIO5
DIO2	29	30	DIO6
DIO3	31	32	DIO7
DGND	33	34	+5 V
+5 V	35	36	SCANCLK
EXTSTROBE*	37	38	PFI0/TRIG1
PFI1/TRIG2	39	40	PFI2/CONVERT*
PFI3/GPCTR1_SOURCE	41	42	PFI4/GPCTR1_GATE
GPCTR1_OUT	43	44	PFI5/UPDATE*
PFI6/WFTRIG	45	46	PFI7/STARTSCAN
PFI8/GPCTR0_SOURCE	47	48	PFI9/GPCTR0_GATE
GPCTR0_OUT	49	50	FREQ_OUT

<sup>1</sup> Not available on the PCI-6023E

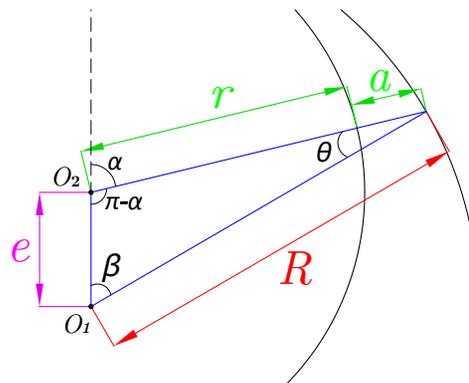
## B.3. Especificaciones del Sensor de Presión

Número de artículo	547476	547478	547480	547482	547484	547486	547488	547490	547475	547477	547479	547481	547483	547485	547487	547489
Denominación de tipo	SDET-22T-B2-G14-U-M12	SDET-22T-D2-G14-U-M12	SDET-22T-D6-G14-U-M12	SDET-22T-D10-G14-U-M12	SDET-22T-D16-G14-U-M12	SDET-22T-D25-G14-U-M12	SDET-22T-D50-G14-U-M12	SDET-22T-D100-G14-U-M12	SDET-22T-B2-G14-I-M12	SDET-22T-D2-G14-I-M12	SDET-22T-D6-G14-I-M12	SDET-22T-D10-G14-I-M12	SDET-22T-D16-G14-I-M12	SDET-22T-D25-G14-I-M12	SDET-22T-D50-G14-I-M12	SDET-22T-D100-G14-I-M12
Margen de medición de presión																
Valor inicial [bar]	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
Margen de medición de presión																
Valor final [bar]	1	2	6	10	16	25	50	100	1	2	6	10	16	25	50	100
Margen de sobrecarga [bar]	5	5	10	20	40	40	100	200	5	5	10	20	40	40	100	200
Presión de estallido [bar]	6	6	12	25	50	50	120	250	6	6	12	25	50	50	120	250
Precisión [% FS]	1,5	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Salida analógica	0,1 - 10 V (3 hilos)								4 - 20 mA (2 hilos)							
Resistencia de carga	RL > 10k								RL ≤ (UB-8V)/0,02 A							
Margen de tensión de func. UB	14 - 30 VDC								8 - 30 VDC							
Intensidad en reposo	máx. 4 mA								-							
Ondulación residual	10 % UB															
Error de linealidad BFSL	0,40 % FS															
Precisión de repetición																
Valor analógico FS	0,25 % FS															
Desviación de largo plazo	0,3 % FS por año															
Temperatura ambiente	0 - 80 °C															
Temperatura del fluido	-10 - 100 °C															
Temperatura de funcionamiento	-20 - 85 °C															
Coefficiente de temperatura Señal cero	Típ. 0,2 % FS máx. 0,4 % FS /10K (Margen de medición 0...16 bar, típ. 0,25 % FS máx. 0,5 % FS /10K)															
Coefficiente de temperatura. margen inicial	Típ. 0,15 % FS max. 0,25 % FS/10K															
Símbolo CE	según EU-EMV-RL															
Resistencia a cortocircuitos	sí															
Polos inconfundibles	Para la tensión de funcionamiento															
Clase de protección	IP65															
Material Sensor	Al2O3 96 %															
Material de la junta	FPM															
Material Conexión de presión	CrNi acero 1.4305															
Peso del producto	100 g															

# Demostraciones

---

## C.1. Demostración del ángulo $\beta$



**Figura C.1:** Parámetros geométricos del motor

De la ley de senos se tiene:

$$\frac{\sin \beta}{r + a} = \frac{\sin \theta}{e} = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{R}. \quad (\text{C.1})$$

De los ángulos internos del triángulo,

$$\begin{aligned} \beta + (\pi - \alpha) + \theta &= \pi \\ \beta - \alpha + \theta &= 0 \\ \theta &= \alpha - \beta \end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha \\ &= 0 - (-1) \sin \alpha \\ &= \sin \alpha\end{aligned}$$

Relacionando lo anterior, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\alpha - \beta)}{e} &= \frac{\sin \alpha}{R} \\ \sin(\alpha - \beta) &= \frac{e \sin \alpha}{R} \\ \alpha - \beta &= \arcsin\left(\frac{e \sin \alpha}{R}\right) \\ \beta &= \alpha - \arcsin\left(\frac{e \sin \alpha}{R}\right).\end{aligned}\tag{C.2}$$

## C.2. Demostración del radio variable $R_v$

De la figura C.1 y la ecuación C.1 se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \beta}{r + a} &= \frac{\sin \alpha}{R} \\ r + a &= \frac{R}{\sin \alpha} \sin \beta \\ r + a &= \frac{R}{\sin \alpha} \sin\left(\alpha - \arcsin\left(\frac{e \sin \alpha}{R}\right)\right) \\ r + a &= \frac{R}{\sin \alpha} \left(\sin \alpha \cos\left(\arcsin\left(\frac{e \sin \alpha}{R}\right)\right) - \cos \alpha \sin\left(\arcsin\left(\frac{e \sin \alpha}{R}\right)\right)\right) \\ r + a &= \frac{R}{\sin \alpha} \left(\sin \alpha \sqrt{1 - \frac{e^2 \sin^2 \alpha}{R^2}} - \frac{e \cos \alpha \sin \alpha}{R}\right) \\ r + a &= \frac{R}{\cancel{\sin \alpha}} \left(\frac{\cancel{\sin \alpha}}{R} \left(\sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} - e \cos \alpha\right)\right) \\ r + a &= R_v = \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} - e \cos \alpha.\end{aligned}\tag{C.3}$$

### C.3. Cálculo analítico del área transversal barrida por una aleta

Por definición el área de la región limitada por las curvas de ecuaciones polares  $r = r_1(\theta)$  y  $r = r_2(\theta)$  se define como la integral:

$$\frac{1}{2} \int (r_2(\theta)^2 - r_1(\theta)^2) d\theta$$

Considerando lo anterior, el área de la sección encerrada entre el rotor ( $r_1 = r$ ) y el estator ( $r_2 = R_v$ ) dado por la ecuación C.3, se obtiene:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha (R_v(\alpha)^2 - r^2) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left( \left( \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} - e \cos \alpha \right)^2 - r^2 \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left( \left( R^2 - e^2 \sin^2 \alpha - 2e \cos \alpha \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} + e^2 \cos^2 \alpha \right) - r^2 \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left( R^2 + e^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2e \cos \alpha \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} - r^2 \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \left( R^2 \alpha + e^2 \int_0^\alpha \cos 2\alpha d\alpha - 2 \int_0^\alpha e \cos \alpha \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} d\alpha - r^2 \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (R^2 - r^2) \alpha + \frac{e^2}{2} \sin 2\alpha - 2 \underbrace{\int_0^\alpha e \cos \alpha \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} d\alpha}_I \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( R^2 \alpha - r^2 \alpha - R^2 \alpha + R^2 \beta + \frac{e^2}{2} \sin 2\alpha - e \sin \alpha \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( R^2 \beta - r^2 \alpha + e^2 \sin \alpha \cos \alpha - e \sin \alpha \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( R^2 \beta - r^2 \alpha - e \sin \alpha \left( \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} - e \cos \alpha \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} (R^2 \beta - r^2 \alpha - e R_v \sin \alpha) \end{aligned}$$

Y de las relaciones en la Ec. C.1, se obtiene:

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} (R^2 \beta - r^2 \alpha - e R \sin \beta) \tag{C.4}$$

Se resuelve la integral I , como sigue:

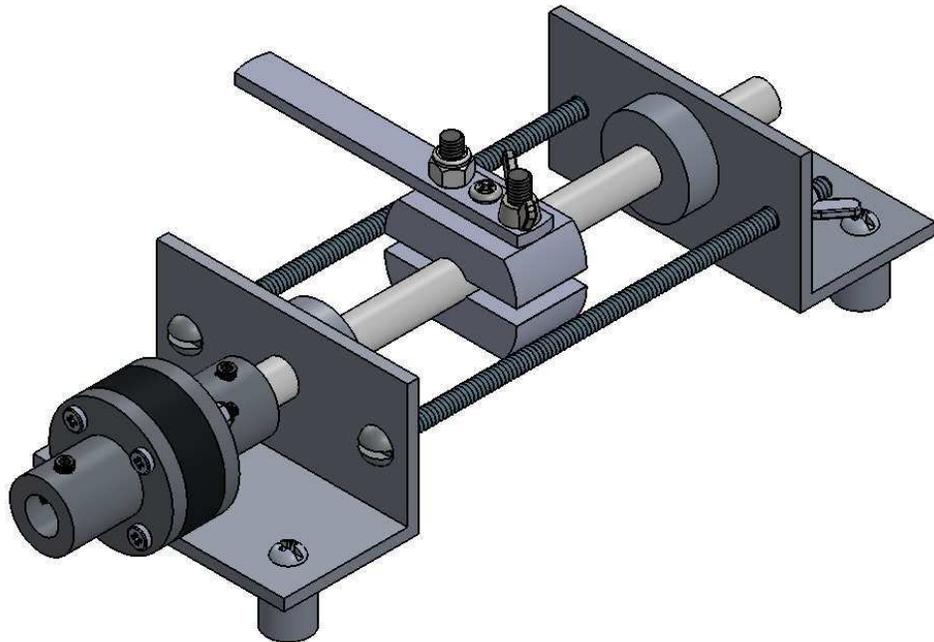
$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\alpha e \cos \alpha \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} \, d\alpha \\
 &= R \int_0^\alpha e \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{e^2}{R^2} \sin^2 \alpha} \, d\alpha, & x = \frac{e}{R} \sin \alpha &\implies dx = \frac{e}{R} \cos \alpha \, d\alpha \\
 &= R^2 \int_0^x \sqrt{1 - x^2} \, dx, & x = \sin \theta &\implies dx = \cos \theta \, d\theta \\
 &= R^2 \int_0^\theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta \, d\theta \\
 &= R^2 \int_0^\theta \cos^2 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{R^2}{2} \left( \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\
 &= \frac{R^2}{2} \left( \arcsin(x) + \frac{1}{2} 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) \right) \\
 &= \frac{R^2}{2} \left( \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \alpha \right) + \frac{e}{R} \sin \alpha \sqrt{1 - \left( \frac{e \sin \alpha}{R} \right)^2} \right) \\
 &= \frac{R^2}{2} \left( (\alpha - \beta) + \frac{e}{R^2} \sin \alpha \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \alpha} \right)
 \end{aligned}$$

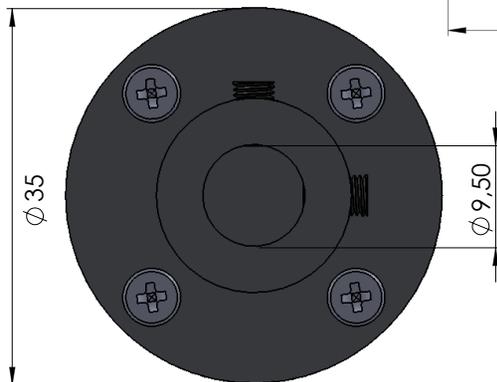
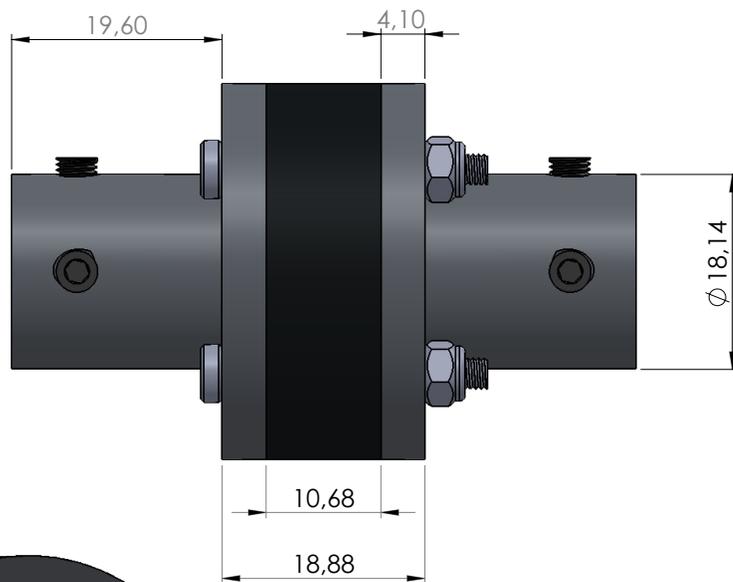
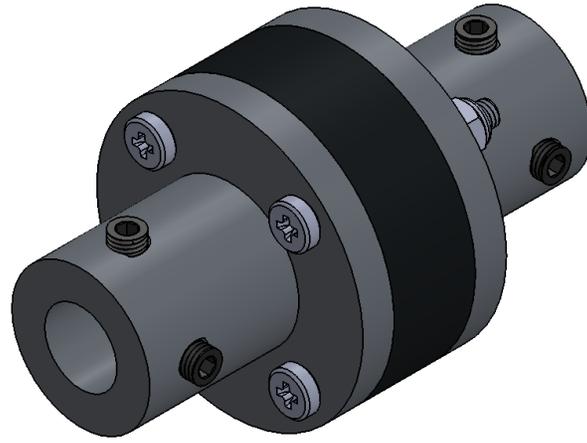
---

Apéndice D

Planos del mecanismo para pruebas de  
torque

---





TÍTULO:  
Acople Motor

NOMBRES:  
J. Ramos y J. Gómez

