

**ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS Y GEOMÉTRICAS DE LA  
RELATIVIDAD ESPECIAL**

**EDUARDO JOSÉ ORDÓÑEZ HURTADO**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA  
EDUCACIÓN  
INGENIERÍA FÍSICA  
POPAYÁN  
2018**

**ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS Y GEOMÉTRICAS DE LA  
RELATIVIDAD ESPECIAL**

**EDUARDO JOSÉ ORDÓÑEZ HURTADO**

Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de  
Ingeniero Físico

Director

**SERVIO TULIO PEREZ MERCHANCANO Ph.D.**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA  
EDUCACIÓN  
INGENIERÍA FÍSICA  
POPAYÁN  
2018**

**Nota de aceptación**

---

---

---

---

---

---

---

Jurado Dra. Luz Elena Bolivar

---

Jurado M.Sc. Pablo Javier Salazar

---

Director del trabajo de grado  
Dr. Servio Tulio Pérez

Popayán, 8 de noviembre de 2018

# Agradecimientos

A mi madre María del Socorro, cuya vida de lucha y sacrificios han sido mi mayor inspiración; a mis hermanos, Rodrigo Hernán y Andrés Fernando, que siempre han creído en mí brindándome su apoyo incondicional; a mi novia, Lizeth Andrea, seguiremos soñando juntos; a mi prima Aleja y a Josesito, las experiencias vividas nunca las olvidaré; a mi director, Servio Tulio, quien con sus consejos y enseñanzas me guió a lo largo de mi trabajo de grado; finalmente, a los integrantes del grupo SENUMA, por toda la confianza depositada.

# ÍNDICE DE FIGURAS

2.1.	Desplazamiento entre marcos [1] . . . . .	11
2.2.	Montaje del experimento de Fizeau [1] . . . . .	13
2.3.	Montaje de Michelson-Morley [1] . . . . .	15
2.4.	Recorrido del rayo 2 [1] . . . . .	16
2.5.	Recorrido del rayo 1[1] . . . . .	16
2.6.	Observador dentro del vagón[1] . . . . .	19
2.7.	Observador en las vias [1] . . . . .	19
3.1.	Representación de los diferentes tipo de vectores . . . . .	28
3.2.	Representacion de un par de vectores[1] . . . . .	32
3.3.	Estudio de simetría de un cuadrado . . . . .	34
3.4.	Rotación de un cuadrado en el plano . . . . .	35
4.1.	Marcos de referencia rotados un ángulo $\alpha$ . . . . .	45
4.2.	Relación entre marcos de referencia . . . . .	48
4.3.	Relación entre marcos de referencia . . . . .	49
6.1.	Marco 1 . . . . .	107
6.2.	Marco 2 . . . . .	108

# CONTENIDO

<b>1. Resumen</b>	<b>8</b>
<b>2. Espacio-Tiempo</b>	<b>9</b>
2.1. Mecánica de Galileo . . . . .	9
2.2. Incompatibilidades . . . . .	12
2.2.1. Experimento de Fizeau . . . . .	13
2.2.2. Contracción de Lorentz . . . . .	17
2.3. Simultaneidad . . . . .	18
2.4. Transformaciones de Lorentz . . . . .	20
<b>3. Espacios Vectoriales</b>	<b>22</b>
3.1. Desplazamiento temporal . . . . .	22
3.2. Espacio vectorial . . . . .	23
3.2.1. Producto escalar . . . . .	25
3.3. Espacio de Minkowski . . . . .	25
3.3.1. Métrica de Lorentz . . . . .	26
3.3.2. Tipos de vectores . . . . .	28
3.3.3. Mapeo lineal . . . . .	32
3.4. Teoría de grupos . . . . .	33
3.4.1. Subgrupos . . . . .	35
3.4.2. Clases . . . . .	36
3.4.3. Clases laterales . . . . .	37
3.5. Homomorfismos . . . . .	37
<b>4. Estructuras Algebraicas</b>	<b>39</b>
4.1. Simetría en Física . . . . .	39
4.2. Grupos de Lie . . . . .	40
4.2.1. Transformaciones Infinitesimales . . . . .	40

4.2.2.	Algebras de Lie . . . . .	42
4.3.	Rotaciones en el espacio . . . . .	44
4.3.1.	Grupo SO(2) . . . . .	45
4.3.2.	SO(3) . . . . .	48
4.3.3.	Generalización SO(n) . . . . .	51
4.4.	Grupo de Galileo . . . . .	51
4.5.	Grupo de Poincaré . . . . .	54
4.6.	Conmutadores de los diferentes grupos . . . . .	57
<b>5.</b>	<b>Estructuras Geométricas de la Relatividad Especial</b>	<b>64</b>
5.1.	Campo Electromagnético Clásico . . . . .	64
5.2.	Transformación de los campos E y B . . . . .	67
5.3.	Invariantes del Campo Electromagnético . . . . .	73
5.3.1.	Anulación de Campos . . . . .	74
5.4.	Covariancia Electromagnética . . . . .	75
5.5.	Introducción al Cálculo Tensorial . . . . .	79
5.5.1.	Espacios Vectoriales . . . . .	80
5.5.2.	Espacio Dual . . . . .	82
5.5.3.	Tensores Covariantes y Contravariantes . . . . .	85
5.6.	Tensores en Relatividad Especial . . . . .	87
5.6.1.	Transformaciones de Lorentz . . . . .	87
5.6.2.	Vectores en el Espacio-Tiempo . . . . .	88
5.6.3.	Escalares . . . . .	88
5.7.	Operador Derivada . . . . .	90
5.8.	Electrodinámica Manifiestamente Covariante . . . . .	90
<b>6.</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>94</b>
6.1.	Descripción de una Partícula Libre [11] . . . . .	94
6.1.1.	Límite de la Acción no Relativista . . . . .	97
6.1.2.	Momentum-Energía . . . . .	98
6.2.	Simetrías en Física y Teorema de Noether[12] . . . . .	101
6.2.1.	Simetrías de Noether para un campo escalar real . . . . .	102
6.3.	Análisis del tensor momentum-energía para una estrella de neutrones [13] . . . . .	103
6.4.	Respuesta electromagnética de un gas de Fermi relativista [14] . . . . .	105
6.5.	Dispositivos GPS, corrección en el flujo de tiempo . . . . .	106
<b>A.</b>	<b>Desigualdad de Schwarz</b>	<b>111</b>
A.1.	Desigualdad de Schwarz en un espacio tridimensional . . . . .	111

# 1. Resumen

La relatividad especial -que merece más atención de lo que normalmente se le concede en cursos de mecánica y electrodinámica- es la puerta de entrada al estudio de la física fundamental y al uso tecnológico de redes de información, satélites de sistemas de posicionamiento global (GPS) y diferentes tecnologías de la información que abrazan también la materia condensada. Observando el amplio panorama de trabajo que plantea la relatividad, se considera que es esencia explorar diversas áreas matemáticas y físicas inmersas en la relatividad con el propósito de participar activamente en todo este universo de conocimiento que, para este caso, comprende el estudio del espacio-tiempo y su potencial aplicación científica.

Este trabajo estudia estructuras algebraicas y geométricas que involucran algunos aspectos de teoría de grupos para describir los grupos de Galileo, Lorentz, Poincaré y Lie, que ayudan a analizar propiedades de simetría y traslación en diferentes contextos físicos. Se hace necesario describir el comportamiento algebraico a través de álgebras como la lineal y la de Lie, que ayuda a mostrar que las estructuras anteriores son grupos, permitiendo generalizar principio y leyes de conservación que pueden ser estudiados en mecánica o teoría electromagnética. Estos fundamentos son básicos en el entendimiento de la teoría clásica y cuántica de campos, la cual influye substancialmente en diversas propiedades físicas de comportamiento de la luz y su interacción con la materia, como por ejemplo materiales fotónicos que presentan propiedades exóticas cuando se analizan en medios diferentes al vacío.



## 2. Espacio-Tiempo

Hasta hace un poco más de un siglo, se pensó que la física estaba a punto de ser descubierta completamente; cualquier fenómeno del Universo podría ser descrito por medio de los modelos físicos planteados hasta la fecha, todo parecía comportarse de acuerdo a éstos y las fallas presentes podrían ser corregidas haciendo observaciones más precisas. Pero las dificultades salieron a flote y no se encontró una explicación razonable para el comportamiento para algunas fenómenos, obligando a abrir la mente a nuevas interpretaciones del Universo.

La incompatibilidad de la mecánica clásica y el electromagnetismo, llevaron al estudio mas detallado de fenómenos lumínicos en donde, apegados a la teoría clásica, se introdujeron una serie de conceptos nuevos que resultaron ser innecesarios desde el punto de vista de la revolucionada relatividad, propuesta por Einstein. Ésta, requiere además una revisión geométrica del espacio en el cual se desarrollan los sucesos físicos, puesto que sus ideas no es posible implementarlas a un espacio euclideo.

### 2.1. Mecánica de Galileo

Que la Tierra gire al rededor sol es algo aceptado abiertamente en la actualidad, es lo que se ha venido enseñando en las instituciones educativos desde hace un tiempo atrás, pero esto no siempre fue así. En la antigüedad, basándose en el desplazamiento de los astros sobre los cielos, el pensamiento más lógico era que la Tierra permanecía quieta, mientras todos estos giraban en torno a ella. Uno de los problemas más complejos con que se toparon en la antigüedad fue el de encontrar un modelo planetario que concordara con las observaciones de los cuerpos en el firmamento; el modelo más aceptado fue propuesto por Claudio Ptolomeo, ubicando a la Tierra en el centro del Universo con todos los cuerpos celestes girando a su alrededor. Sin embargo, este es un modelado muy complejo, por lo cual no logró convencer a todo el mundo. Nicolás Copérnico, un sacerdote polaco, ideó un modelo más sencillo que se adaptaba muy bien a las observaciones realizadas, pero traía consigo una falla inaceptable para la época, la Tierra no era el centro del Universo; además ésta debe estar en continuo movimiento orbitando al Sol, por lo que sus ideas no fueron aceptadas debido a la

cantidad de argumentos a favor de la inmovilidad del planeta.

En sus escritos<sup>1</sup>, Galileo desmiente cada una de las afirmaciones acerca del porqué debería ser correcto el modelo de Ptolomeo, estableciendo, de un modo preciso, lo que ahora es conocido como *el principio de relatividad de la mecánica clásica*. La idea fundamental es sencilla y ya bastante conocida; si un barco se desplaza con movimiento uniforme, con respecto a la tierra firme, sobre aguas tranquilas, en su interior todo sucede exactamente igual que si pasara en la ribera, de modo que no existe ningún experimento mecánico que logre demostrar el movimiento del barco<sup>2</sup>; de igual forma, tampoco es posible afirmar la inmovilidad de la Tierra con las experiencias realizadas hasta entonces.

Las ideas de Galileo dotaron de una estructura más formal a la física, haciendo de las matemáticas una herramienta fundamental para la descripción de cualquier fenómeno. Sin embargo, fue Newton quien logró un análisis más profundo de esta estructura, introduciendo una matemática más avanzada, llegando con ello a un conjunto de leyes que deben obedecer los cuerpos en movimiento, utilizando como base estructuras geométricas euclidianas las cuales se adaptan muy bien a las propiedades métricas del universo, tal y como era concebido hasta el momento. Esta forma de representar el mundo físico trae implícitamente consigo que las nociones de espacio y tiempo van a ser independientes y absolutas, con lo que se llega a dos conclusiones importantes:

- 1) Un intervalo espacial va a ser medido de igual forma por todos los observadores ubicados a lo largo del espacio.
- 2) El flujo de tiempo será el mismo para cualquier observador.

Y estas dos condiciones se cumplirán independientemente del estado de movimiento de los observadores.

Desde este punto de vista, para localizar cuerpos en el espacio hace falta plantear un sistema de referencia  $O$  en donde, por ejemplo, se toma un cuerpo rígido considerado en reposo y a partir de éste se efectúan las mediciones y cambios de posición de los diferentes cuerpos. Además, este cuerpo rígido va a estar dotado de un sistema coordenado  $(x, y, z)$  con el cual es posible darle un valor numérico a cada una de estas posiciones. Con esto, se plantea el espacio tridimensional en donde suceden los fenómenos físicos tomando las ideas newtonianas, es decir, considerando la condición de absoluto implícita en el espacio y el tiempo.

---

<sup>1</sup>Dialogos de Galileo

<sup>2</sup>Enrique Loedel - Física Relatiista

Sentada esta base de la mecánica clásica, las leyes de Newton van de la mano con el principio de relatividad de Galileo, esto es, conservan su forma - estructura matemática - al ser desarrolladas por cualquier observador que se encuentre en movimiento constante, en otras palabras, que esté en un sistema de referencia inercial. Esto no quiere decir que un fenómeno va a ser descrito de una misma forma para un par de distintos sistemas de referencia; cada uno lleva consigo un grupo de coordenadas que lo representan, y debido al movimiento entre marcos de referencia, no van a coincidir a lo largo del tiempo. Pero existe la forma de relacionar estas descripciones a través de un conjunto de ecuaciones llamadas las transformaciones de Galileo, que vienen dadas por:

$$x' = x - vt \tag{2.1}$$

$$y' = y \tag{2.2}$$

$$z' = z \tag{2.3}$$

$$t' = t \tag{2.4}$$

donde, las coordenadas primadas representan a un punto en un marco de referencia inercial  $O'$ , mientras son las coordenadas del mismo punto en un marco  $O$ ; y el tiempo corre de una misma forma en ambos marcos. Este es un caso particular en donde el movimiento entre marcos se da únicamente a lo largo del eje  $x$  como lo muestra Figura (1.1) <sup>3</sup>.

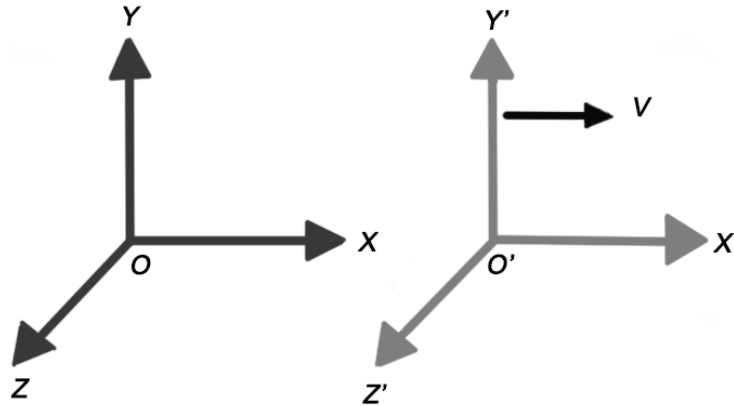


Figura 2.1: Desplazamiento entre marcos [1]

De este grupo de ecuaciones surgió un principio que trajo una serie de inconvenientes al no ser compatible con las leyes ópticas y electromagnéticas, es el principio de

<sup>3</sup>ver [1, págs. 7, 8.]

adición de velocidades. Por ejemplo, estando dentro de un tren que marcha con una velocidad  $v$  constante, se lanza una pelota a una velocidad  $u$ , se dice entonces que la velocidad final de aquella pelota viene dada por:

$$u' = u + v \tag{2.5}$$

En un principio que permite sumar las velocidades de una forma vectorial, aproximándose a las observaciones de experimentos realizados; sin embargo, es uno de los fallos más relevantes en la mecánica clásica.

## 2.2. Incompatibilidades

La relatividad de Galileo, es un principio de simetría clásico, pues exige una conservación de las leyes de la mecánica para todos los sistemas que se trasladan con movimiento uniforme. En este caso, se dice que las leyes son *covariantes* respecto a las transformaciones de Galileo. Por otro lado, el avance en el estudio del electromagnetismo tenía buena pinta, el descubrimiento de Augustin Coulomb, al que nombró "ley de la fuerza electrostática", llevaba una esencia newtoniana puesto que su estructura matemática era muy similar a la de la fuerza gravitatoria planteada por Newton; de hecho si se eliminaba el efecto de repulsión y se sustituían las cargas por masas, casi se obtenía el calco de ésta. No obstante, la electrodinámica de Maxwell presenta problemas cuando se analiza un cuerpo en movimiento siguiendo el principio de adición de velocidades, puesto que surgen asimetrías que no parecen estar en correspondencia con los fenómenos observados<sup>4</sup>, entonces se llegó a la conclusión de que el principio de relatividad era válido únicamente en el campo de la mecánica. Como resultado, volviendo al ejemplo del barco, si se realiza un experimento mecánico es imposible detectar movimiento alguno de éste, pero, se pesó que utilizando cuidadosos métodos electromagnéticos u ópticos, los resultados serían ligeramente diferentes a los encontrados en la orilla revelando el desplazamiento del marco de referencia<sup>5</sup>.

Analizando varios experimentos, y con el apoyo de la teoría electromagnética de Maxwell, la luz tenía un comportamiento ondulatorio y se esperó, al igual que sucede con otro tipo de ondas, que existiera un medio por el cual se propagaran con cierta velocidad  $c$  independientemente de la estado de movimiento de la fuente; este medio fue denominado éter y contaba con algunas propiedades algo confusas y contradictorias, pero en su esencia se formó una idea newtoniana importante: el éter representaría el sistema de referencia que se encuentra en reposo absoluto; así, las

---

<sup>4</sup>Ver ejemplo en *Electrodinámica de los Cuerpos en Movimiento* - Einstein, página 1

<sup>5</sup>Enrique Loedel - Física Relativista, pág11

leyes electromagnéticas se cumplen de una forma más simple si se analizan desde éste marco.

### 2.2.1. Experimento de Fizeau

Surge entonces la necesidad de averiguar cuales son las propiedades de este medio, y cómo dejaras en evidencia. ¿Existe alguna forma de interacuar con el éter? Fizeau ideó un experimento con el objetivo de resolver esta duda, pretendía encontrar si existe algún arrastre del éter, del mismo modo que un avión arrastra toso el aire en su interior, haciendo pasar rayos de luz por agua en movimiento; de esta manera, de haber dicho arrastre la velocidad de la luz cambia dependiendo de la dirección con que se desplazara respecto al agua. Dicho experimento consta de un montaje de agua en movimiento por medio de un tubo, la cual en su primer recorrido lleva una dirección y se invierte en el trayecto final, como se muestra en (2.2),

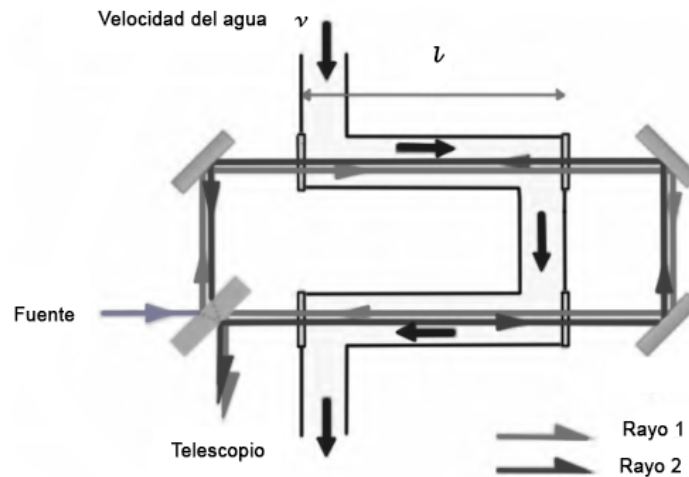


Figura 2.2: Montaje del experimento de Fizeau [1]

Así, utilizando un juego de espejos se hace pasar un par de rayos luminoso con la condición de que uno de ellos siempre siga la dirección de la velocidad que lleva el agua, y el otro siempre vaya en contra de ésta, de modo que si existe algún cambio en el éter debido al movimiento del agua será detectado analizando el tiempo que gasta cada haz de luz en hacer su recorrido, siendo el mismo para ambos.

Al ser arrastrado el éter por el agua pueden pasar dos cosas, o es arrastrado completamente, o sea, la velocidad de la luz tendrá se le agrega un valor de  $v$  que es la velocidad que lleva el agua; o parte del éter es arrastrado, o bien, sólo se agrega

cierta parte de  $v$ . Matemáticamente es expresado por: para el rayo que se mueve en la misma dirección del agua se tiene que  $c_a = c/n + fv$ , donde  $c_a$  es la velocidad final del rayo de luz,  $c/n$  es la velocidad de la luz en agua quieta y  $f$  es un factor de arrastre que dice cuánta cantidad de éter se ha arrastrado; en el caso en que  $f = 1$  hay un arrastre total. para el rayo contrario únicamente cambia el signo en la adición de velocidad, es decir:  $c_a = c/n - fv$

Con esta información se encuentra el tiempo que gasta cada haz en hacer el recorrido, expresado como:

$$t_1 = \frac{2l}{\frac{c}{n} + fv}$$

$$t_2 = \frac{2l}{\frac{c}{n} - fv}$$

entonces la diferencia de recorrido de cada rayo viene dada por:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2l}{\frac{c}{n} - fv} - \frac{2l}{\frac{c}{n} + fv}$$

de forma que:

$$\Delta t = \frac{4fnl^4}{c^2} \quad (2.6)$$

y midiendo esta diferencia de tiempos fue posible encontrar el factor de arrastre, dando como resultado un valor de 1,48; o sea, existe un arrastre parcial del éter como lo habría planteado mucho antes Fresnell, sin embargo este había predicho sería igual a 0,43. Todavía había algo que no se estaba teniendo en cuenta para que la realidad coincidiera con a teoría, pero el camino parecía ser el correcto.

### Experimento Michelson-Morley

Con la idea de que en realidad se puede determinar el movimiento de un sistema de referencia, quedaba una pregunta qué resolver: ¿con qué velocidad se desplaza la Tierra en el éter? Michelson-Morley trataron de averiguarlo utilizando un montaje que consistió en: ubicar un par de espejos, cada uno en los ejes  $x$  e  $y$  de un plano, de tal manera que el un uno de estos apuntara en la dirección de movimiento terrestre y el otro forma una perpendicular con éste, como lo muestra Figura 2.3.

Emitiendo un haz de luz desde la fuente hacía un espejo divisor, de modo que se obtienen dos haces que avanzan por diferentes caminos, tras recorrer una distancia

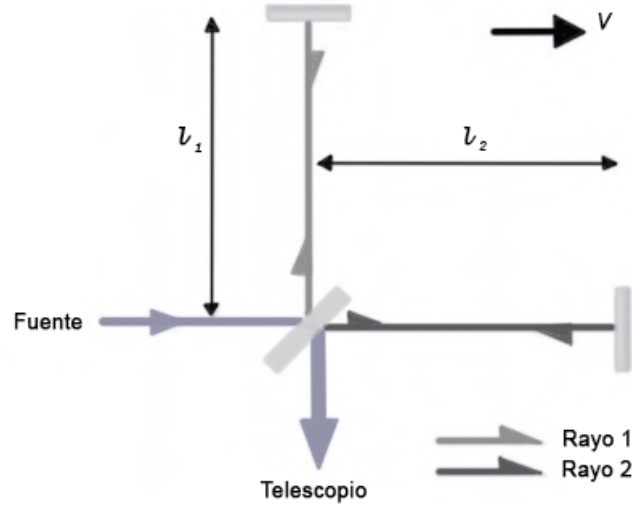


Figura 2.3: Montaje de Michelson-Morley [1]

$l$  regresan y se encuentran nuevamente en el espejo divisor. Debido a que la Tierra avanza con una velocidad  $V$  con respecto al éter, cada haz toma una velocidad diferente y para simplificar cálculos se asume que: el rayo 1 avanza de forma perpendicular a  $V$ , mientras que el rayo 2 mantiene la dirección, como lo muestra la Figura 2.4. De esta manera es posible encontrar el tiempo que gasta cada rayo en hacer todo su recorrido hasta volver al espejo divisor.

Tomando la trayectoria que recorre el rayo 2 en salir del espejo divisor y volver al mismo, y teniendo en cuenta que este análisis se realiza desde el punto de vista del sistema de referencia del éter, el tiempo que debe tardarse en hacer este recorrido viene especificado por:

$$t_2 = \frac{l_2}{c - V} + \frac{l_2}{c + V} = \frac{2l_2/c}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (2.7)$$

La Figura 2.5, muestra más claramente el camino recorrido por el rayo 1 desde el marco de referencia del éter, debido a que la dirección con que avanza el haz es diferente a la de  $V$  aparece un efecto de aberración, y por ende el tiempo gastado por el rayo 1 será:

$$t_1 = \frac{2l_1/c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.8)$$

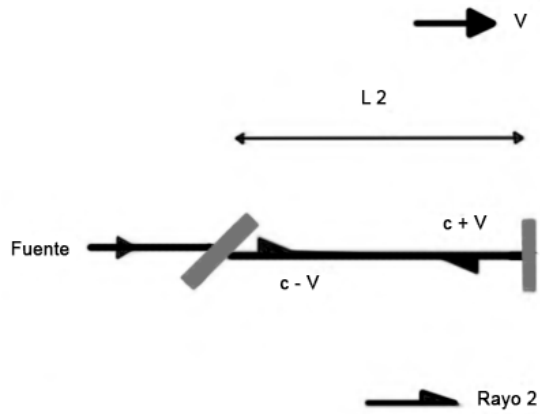


Figura 2.4: Recorrido del rayo 2 [1]

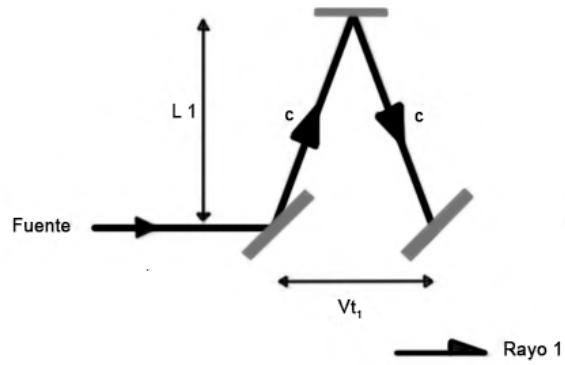


Figura 2.5: Recorrido del rayo 1[1]



De esta manera, si se lograba hacer la medición de estos tiempos se encontraría de forma inmediata la respuesta a la incógnita de la velocidad con que se mueve la Tierra por el éter. Sin embargo, este experimento se hizo una y otra vez, dando siempre una respuesta negativa, como si la luz no quisiera obedecer las leyes naturales. Mas también trajo resultados consigo, confirmó que la velocidad de la luz permanece constante, independientemente del sistema de referencia en el cual se media, contrariamente a lo esperado aplicando los fundamentos clásicas.

### 2.2.2. Contracción de Lorentz

La idea de la existencia del éter no estaba del todo erradicada, con Fitzgelad nace la interpretación de que en realidad el éter ejerce una fuerza de compresión sobre los cuerpos en movimiento. Lorentz, compartió esta idea y apegado al concepto del espacio absoluto, concluyó que dicha compresión viene dada por:

$$L = L_o \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.9)$$

en donde  $L_o$  es la longitud del cuerpo en reposo, y  $L$  es la longitud al ser comprimida por el éter. [1, pág. 42].

Einstein no compartía la idea de la presencia de asimetrías en una ley física, así que se dispuso a desarrollar una teoría cuyo objetivo fue remediar las inconsistencias. Desprendido de la condición de que el espacio y tiempo son absolutos e independientes el uno del otro, dejó como innecesario hablar de reposo absoluto, perdiéndose así la idea que se había formado acerca del éter. Einstein llegó a esta conclusión basado en dos sencillos, pero poderosos, postulados: el principio de la relatividad y el principio de la velocidad de la luz, formulados de la siguiente manera:

Las leyes de acuerdo a las cuales cambian los estados de los sistemas físicos no dependen de si estos cambios de estado se refieren a uno u otro de dos sistemas de coordenadas que se encuentran en movimiento relativo de traslación uniforme.

Cualquier rayo de luz se propaga en un sistema de coordenadas en reposo con cierta velocidad  $V$ , independientemente de si este rayo de luz ha sido emitido por un

cuerpo en reposo en movimiento.

A partir de estos supuestos, Einstein logra dar una nueva interpretación a los resultados del experimento que realizó Fizeau; y además, de una forma natural, a los valores obtenidos por Michelson y Morley, no sin antes hacer una completa reestructuración a la mecánica clásica. Su teoría establece una nueva visión para el estudio de la electrodinámica en donde las leyes del electromagnetismo prevalecen para cualquier observador, sin importar su estado de movimiento.

”La punta del hilo pudo ser asida después de una reflexión honda y libre de prejuicios acerca del significado de las coordenadas de espacio y tiempo que interviene en la descripción de cualquier proceso físico. El detective Einstein encontró, como veremos, que el culpable de todo el enredo era un personaje de inocente apariencia llamado *tiempo absoluto* y al que ejecutó de inmediato y con justa razón y justicia<sup>6</sup>”.

### 2.3. Simultaneidad

El hecho de que la luz no cumpla con el principio de adición de velocidades trae consigo una serie de consecuencias bastante peculiares, y pone en evidencia que no existe una escala de tiempo universal dada para todos los observadores; esto es posible divisarlo al profundizar en el concepto de simultaneidad. Hablar de simultaneidad de acontecimientos que ocurren muy cercanos el uno del otro es una idea bastante primitiva, sin embargo al tratarse de eventos que tienen una separación espacial bastante amplia complica un poco el asunto; por ejemplo, tomando un par de puntos en el espacio,  $p$  y  $q$ , separados una distancia considerable, un fenómeno producido en  $p$  es observado por  $q$  en el momento que pueda observarlo, es decir, reciba su luz. Como resultado, al detectarse el evento se tiene la certeza de que ya ha pasado algún tiempo desde que ocurrió.

Siguiendo con la cadena de ideas, ¿qué pasará con la medición temporal de un evento, visto por dos observadores en diferentes marcos de referencia que se mueven uno respecto del otro, teniendo en cuenta el principio de la constancia de la velocidad de la luz? Para responder a esta pregunta se presenta el siguiente ejemplo:

Un observador ubicado dentro del vagón de un tren emite dos rayos de luz provenientes hacia un par de sensores ubicados en dos extremos opuestos del vagón como lo muestra la siguiente figura:

---

<sup>6</sup>Enrique Loedel - Física Relativista

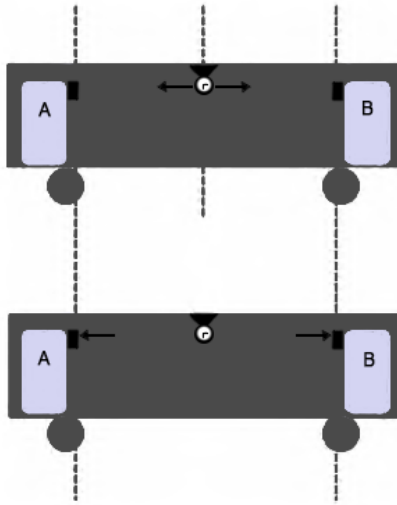


Figura 2.6: Observador dentro del vagón[1]

Tomando el observador en el centro del vagón se concluye que mira llegar de los dos haces de luz de forma simultánea a los sensores. Pero ahora, si se ubica un segundo observador fuera del tren, de modo que su sistema de referencia venga dado por las vías del tren, de la siguiente forma:

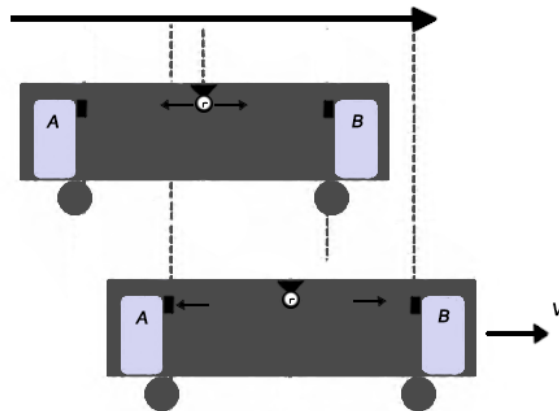


Figura 2.7: Observador en las vías [1]

En este caso, los dos rayos de luz recorren diferentes distancias ya que el rayo que se dirige hacia  $A$ , tiene un trayecto más largo que el que va hacia  $B$ , pues éste último se acerca al observador. Bajo los postulados de Einstein, la luz se desplaza a una misma velocidad, por lo tanto, el observador mira primero el rayo  $B$  y los eventos han

dejado de ser simultáneos, en otras palabras, se pierde el concepto de simultaneidad.

Entonces, el segundo postulado de Einstein trae como consecuencia una diferencia en las mediciones temporales realizadas desde diferentes marcos de referencia inerciales, existiendo una relación del tipo:

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t \quad (2.10)$$

donde  $\tau$  es llamado tiempo propio, siendo el medido desde el sistema de referencia en donde el suceso tiene inicio y final en el mismo punto; mientras que  $t$  es el tiempo registrado por cualquier otro observador.

## 2.4. Transformaciones de Lorentz

Al aceptar la constancia de la velocidad de la luz y la nueva formulación del principio de la relatividad, se replantea la forma de relacionar las diferentes observaciones realizadas por los marcos de referencia; sean  $O$  y  $O'$  dos marcos de referencia inerciales, que se alejan el uno del otro con velocidad constante, en los cuales se registra de forma independiente la evolución de un acontecimiento cualquiera, en donde  $O$  hará la descripción de dicho evento a través de las coordenadas  $x, y, z$  de su sistema cuyo avance temporal tiene un valor  $t$ , mientras que  $O'$  cuenta con su sistema coordenado  $x', y', z'$  en un tiempo  $t'$ . Las funciones que encargadas de relacionar las coordenadas espaciales y temporales de este par de marcos de referencia fueron dadas por Lorentz cuando buscaba una expresión que mantuviera una covariancia de las leyes del electromagnetismo en un par de sistemas que se movieran con una velocidad  $v$  el uno del otro, y vienen dadas por:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (2.11)$$

$$y' = y \quad (2.12)$$

$$z' = z \quad (2.13)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (2.14)$$

en donde  $\gamma = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{v^2}{c^2}}}$ <sup>7</sup>. Sin embargo, la correcta interpretación de estas ecuaciones

fue dada por Einstein, desprendido de un espacio y un tiempo absolutos, al afirmar que las éstas son las mediciones realizadas cada uno de los observadores en los diferentes marcos.

---

<sup>7</sup>Una derivación de estas ecuaciones puede encontrarse en [2, Pág. 16]

Analizando en detalle estas ecuaciones, se deduce fácilmente que si un marco de referencia se desplaza con una velocidad mayor a  $c$  éstas pierden sentido dando como resultado un valor imaginario. Es por ello que se llega a la conclusión de que, según esta teoría, ningún cuerpo pueda ir más rápido que la luz, cuestión que no era tenida en cuenta utilizando el principio de adición de velocidades de la mecánica clásica. Sin embargo, esto se resuelve reformulando dicho principio partiendo de las transformaciones de Lorentz, con lo cual se tiene que:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (2.15)$$

donde  $u_x$  y  $u'_x$  son las velocidades, con que se mueve un cuerpo, vistas desde dos sistemas de referencia que se alejan entre sí con una velocidad  $v$ . Esta es la manera correcta en que se hace la adición de velocidades, que nace de los postulados de la relatividad especial. Así pues, ya es posible divisar el comportamiento de sucesos que ocurren a velocidades cercanas a las de la luz, volviéndose más complejo de lo que la intuición dice. Con éste se hace una correcta interpretación de los resultados del experimento de Fizeau sin recurrir al arrastre de ningún medio, y de hecho la belleza que lleva este experimento es que trae consigo la primera demostración terrestre de los efectos de la teoría de la relatividad especial.

Aceptada la teoría formulada por Einstein, queda todavía mucho camino por recorrer, muchos conceptos por reescribir y una nueva geometría que construir, puesto que se la geometría euclidiana como base de la mecánica clásica no es compatible con los postulados de la relatividad especial, así pues es necesario replantear esta interpretación espacial del universo al adherir a ella los efectos temporales, lo cual se detalla en el siguiente capítulo.

## 3. Espacios Vectoriales

La interpretación relativista de que el tiempo y el espacio son dependientes el uno del otro no solo revolucionó la forma de ver el Universo, sino que también dejó obsoletas las herramientas matemáticas utilizadas para lograr su descripción. Hablar de un flujo de tiempo independiente de los fenómenos que están ocurriendo a lo largo del espacio no tiene coherencia, con lo que pierde validez proponer un escenario del mundo físico basado en la geometría euclideana y su estructura vectorial. Por lo que hace falta hacer una revisión de los espacios vectoriales que representan al Universo desde el punto de vista de la relatividad especial.

### 3.1. Desplazamiento temporal

Einstein mostró que el espacio y el tiempo son relativos, por ejemplo: dos personas,  $O$  y  $O'$ , que se alejan entre sí con una velocidad  $v$  se disponen a medir la longitud de un automóvil en movimiento. Debido a que se encuentran en marcos de referencia distintos, obtienen valores distintos para dicha medida; además de ello, tampoco coinciden en el tiempo que tarda el auto en recorrer toda una calle. Sin embargo, hay algo en lo que sí están de acuerdo, si calculan ese mismo tiempo desde el marco de referencia del automóvil, llegan a un mismo resultado, en otras palabras, el tiempo propio del auto permanece invariante.

Basado en el trabajo de Einstein, Minkowski descubrió que el universo está formado por un tejido de espacio-tiempo absoluto, es decir, es el mismo visto desde todos los sistemas de referencia. La idea fundamental consiste en: cada punto del espacio-tiempo, o evento, es descrito por tres coordenadas espaciales y una temporal, de tal manera que un par de observadores con movimiento relativo lo describen con un conjunto de coordenadas diferentes, como sucede en el ejemplo del automóvil. No obstante, la separación de un par de eventos toma un valor que permanece constante ante todo observador. Analizando el tiempo propio del auto, con respecto a  $O$  y  $O'$ ,

se tiene que:

$$c\tau = ct\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$c\tau = ct'\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

mientras el automóvil en su marco de referencia, ha tenido un desplazamiento meramente temporal, para  $O$  y  $O'$ , ha habido un desplazamiento tanto espacial como temporal. Sin embargo, para los tres observadores, recorre un mismo intervalo a lo largo del espacio-tiempo. Por lo tanto,

$$ct\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = ct'\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

elevando al cuadrado toda la ecuación,

$$(ct)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (ct')^2\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)$$

teniendo en cuenta que la velocidad con la que se desplazan los observadores es constante, es correcto afirmar que:  $v = xt$  y  $v' = x't'$ , llegando a:

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 \tag{3.1}$$

En conclusión, la expresión matemática que representa un desplazamiento a lo largo del espacio ideado por Minkowski viene dado por (3.1), siendo ésta la misma para cualquier sistema de referencia.

## 3.2. Espacio vectorial

Se define un espacio vectorial  $V$  como un conjunto de elementos denominados vectores, el cual tiene asociadas dos operaciones: una operación externa, dada por el producto con elementos pertenecientes a los reales; y una operación interna, que es una suma entre los vectores pertenecientes a  $V$ . para que  $V$  sea considerado un espacio vectorial, debe cumplir con los siguientes axiomas:

### Axiomas del producto

Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  dos elementos pertenecientes a  $\mathbf{V}$ , y sea  $a$  y  $b$  dos escalares reales, se debe cumplir:

1.  $a\mathbf{u} \in \mathbf{V}$
2.  $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
3. Existe un escalar 1, tal que,  $1a = a1 = a$
4.  $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
5.  $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

### Axiomas de la adición

Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ , elementos pertenecientes a  $\mathbf{V}$ , deben cumplir

1.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{V}$
2.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4. Existe un elemento  $\mathbf{0}$  perteneciente a  $V$  talque,  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
5. Para todo  $\mathbf{u}$  existe un elemento  $-\mathbf{u}$  perteneciente a  $\mathbf{V}$  tal que,  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

De acuerdo a este conjunto de axiomas, es posible obtener cualquier vector a través de la combinación de diferentes vectores multiplicados escalarmente con un número real. En este sentido es correcto afirmar que un vector  $\mathbf{v}$  se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2$$

se dice entonces que  $\mathbf{v}$  es una combinación lineal de los vectores  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ . Dando diferentes valores a  $a_1$  y  $a_2$ , se obtiene un conjunto de los diferentes valores que puede adquirir  $\mathbf{v}$ , entonces se afirma que  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  son generadores de todo este conjunto de vectores.

Tomando una combinación lineal tal que:

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

si la única solución posible a esta ecuación es que todos los escalares sean cero,  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , se dice que los vectores son linealmente independientes (L.I.), y además el conjunto de mayor número de vectores L.I. encontrados sobre un espacio determina la dimensión del mismo, siendo esta igual al número total de



elementos pertenecientes a éste. De esta manera, cualquier vector del espacio puede ser expresado de forma única en términos de  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ , del siguiente modo:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_n\mathbf{u}_n,$$

entonces, este conjunto de vectores forma una base en  $\mathbf{V}$ . Por conveniencia, se suelen utilizar bases cuyos vectores sean perpendiculares entre sí y su longitud sea de una unidad.

### 3.2.1. Producto escalar

Para un espacio vectorial  $V$ , la distancia de separación entre dos puntos,  $a$  y  $b$ , está dada por la magnitud del vector,  $ab$ , que los une. Por tanto, se define la operación producto escalar, denotada por  $(\cdot)$ , tal que al operar un vector  $\mathbf{v}$  consigo mismo se obtiene,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 \tag{3.3}$$

es decir, brinda información acerca de las medidas del espacio vectorial y permite cuantificarlo, por ejemplo, en un espacio euclidiano, facilita la obtención de áreas y volúmenes. Esta operación se define para cualquier par de vectores pertenecientes a  $V$  y, al igual que para la suma y la multiplicación, cumple con una serie de axiomas.

### Axiomas del producto punto

Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  elementos pertenecientes a  $\mathbf{V}$ , y sea  $a$  y  $b$  dos escalares reales, se debe cumplir:

1.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbf{R}$
2.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
3.  $(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + b\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
4. Sea  $\mathbf{u}$  un vector fijo entonces,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  para todo  $\mathbf{v}$  si y sólo si  $\mathbf{u} = 0$

### 3.3. Espacio de Minkowski

El tejido espacio-temporal que imaginó Minkowski, donde la separación entre dos eventos permanece invariante bajo cualquier sistema de referencia, es imposible representarlo a través de un espacio vectorial euclideo, la estructura geométrica de

ambos espacios es diferente. Para mostrar esto, se propone el siguiente ejemplo:

Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  un par de vectores sobre un espacio euclidiano de dimensión dos, expresados como:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v} &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$ , no necesariamente perpendiculares, forman la base del espacio vectorial en  $R^2$ . Con lo que, al operar el producto punto, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + u_1v_2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2v_1\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

expresado en forma matricial,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

La matriz presente en (3.4) es conocida como la métrica del espacio y se denota como  $g$ , está estrechamente ligada a la forma en la cual se realizan mediciones en el espacio y es la para entender cómo la relatividad especial modifica la representación geométrica del Universo.

En un espacio euclideo, se acostumbra a trabajar con una métrica equivalente a:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora la cuestión es: ¿Cuál debe ser la estructura matemática de una métrica que represente la geometría en un espacio de Minkowski  $\mathcal{M}$ ?

### 3.3.1. Métrica de Lorentz

En el caso de un espacio  $n$ -dimensional, la métrica viene representada por una matriz  $n \times n$ , con lo que para  $\mathcal{M}$ , al tener de cuatro dimensiones, se obtiene una matriz de la forma:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}$$

No obstante, esta métrica en particular obedece a una propiedad importante que rompe con la estructura de la geometría euclidiana; al desarrollar la ecuación característica, sus valores propios cumplen con la siguiente distribución de signos:

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 < 0 \quad (3.5)$$

Esta condición es conocida como el axioma de Lorentz, que debe cumplir todo espacio de Minkowski, y trae consecuencias que implican un cambio en la forma de ver el producto punto, es decir, la forma de medir. La distancia entre dos eventos está dada por (3.1), el producto punto para el espacio-tiempo es,

$$\mathbf{u}(ct, x, y, z) \cdot \mathbf{u}(ct, x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2, \quad (3.6)$$

dejando la posibilidad de que el resultado al operar un vector consigo mismo tome valores negativos, como consecuencia, la longitud de un vector, como es tratada clásicamente, pierde sentido al trabajar en  $\mathcal{M}$ .

Para hallar una métrica que esté de acuerdo con el axioma de Lorentz, se impone una base para  $\mathcal{M}$  que cuente con un vector  $\mathbf{e}_n$ , perteneciente a una dimensión  $n$  cualquiera, y además sea unitario, de esta forma,  $\mathbf{e}_n$  genera a todos los elementos a lo largo su dimensión. Por último, se exige que:  $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = -1$ , dicho de otro modo, esta componente de la base está ligada al valor propio de la métrica que cumple:  $\lambda < 0$ .

Ahora bien, existe un conjunto de vectores donde todos sus elementos son ortogonales a  $\mathbf{e}_n$ , donde, siguiendo el axioma de Lorentz, generan un espacio en el cual los valores propios de la métrica van a tomar valores positivos, a saber, un espacio euclidiano. De esta manera la métrica de  $\mathcal{M}$  debe ser:

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

$\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  y  $\mathbf{e}_z$  forman la base de un espacio euclidiano, que se puede suponer ortonormal, y teniendo en cuenta que estos vectores son perpendiculares a  $\mathbf{e}_n$ ,  $g$  es definida como:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

denominada la métrica de Lorentz, da lugar a la explicación geométrica correspondiente a la descripción de los fenómenos físicos basada en la teoría de Einstein.

### 3.3.2. Tipos de vectores

Es posible encontrar diferentes tipos de vectores sobre  $\mathcal{M}$ , dependiendo cómo sea su comportamiento bajo (3.6), este producto puede dar como resultado valores positivos, negativos e incluso cero, con lo que se definen los vectores como:

- Vector tipo espacio, para el cual  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$
- Vector tipo tiempo, para el cual  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} < 0$
- Vector nulo, para el cual  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$

Un vector tipo espacio es aquel que se encuentra ubicado en una región de  $\mathcal{M}$  donde todos sus puntos están conectados causalmente, es decir, la zona alrededor de un evento que pueda ser afectada por cualquier fenómeno que ocurra sobre éste; mientras que un vector tipo tiempo se localiza por fuera de esta región. Ahora, un vector nulo representa un rayo de luz, que es la frontera que separa a los vectores tipo espacio de los tipo tiempo. En Fig.(3.1), se aprecia gráficamente, cómo se divide el espacio de Minkowski con respecto a los diferentes tipos de vectores que lo constituyen.

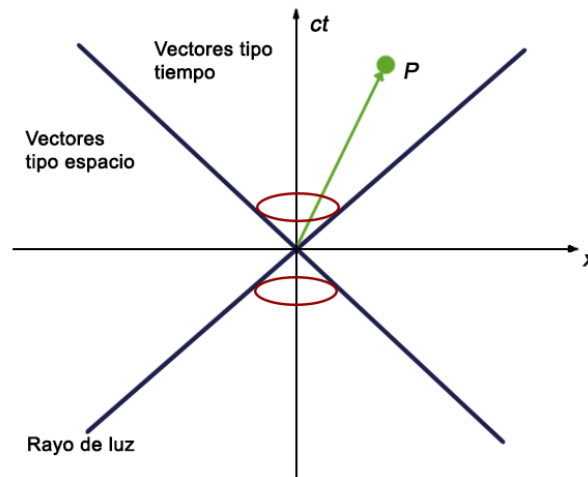


Figura 3.1: Representación de los diferentes tipo de vectores

Entonces, cualquier evento dentro del cono superior puede ser afectado por algún suceso que esté ocurriendo en  $(0, 0)$ ; y, dicho suceso, tiene una causa localizada en algún evento del cono inferior. Esta separación es conocida como *el cono de luz*.

## Base del espacio de Minkowski

Es conveniente utilizar una base para  $\mathcal{M}$  que cuente con un conjunto de vectores perpendiculares entre sí. La métrica de Lorentz implica que ésta debe estar conformada por tres vectores tipo espacio y uno tipo tiempo, ya que el producto punto entre diferentes tipos de vectores trae consigo una serie de requisitos con respecto a la ortogonalidad de éstos. Para mostrar su validez, se define una forma para expresión matemática del producto punto, con e fin de compactar los cálculos, asumiendo que las componentes espaciales se operan como:

$$u^i u^i = u^1 u^1 + u^2 u^2 + u^3 u^3$$

de esta manera, se tiene que:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^i u^i - u^4 u^4$$

siendo las componentes temporales representadas con índices numéricos iguales a 4.

Si un par de vectores son perpendiculares, el producto punto entre ellos es igual a cero. Un vector con coordenadas espaciales puede ser perpendicular a una infinidad de vectores tipo espacio, por lo tanto la base del espacio-tiempo puede contener más de uno de estos vectores. Sin embargo, si la base es meramente espacial, se dice que es un espacio euclideo, por tanto, deben existir vectores tipo tiempo.

Ahora, ¿es posible contar con más de un vector tipo tiempo para una base de  $\mathcal{M}$  Para dar respuesta a esta pregunta se toman un par de vectores, tales que:

$$\begin{aligned} u \cdot u &= u^i u^i - u^4 u^4 < 0 \\ v \cdot v &= v^i v^i - v^4 v^4 < 0 \end{aligned}$$

es decir, tipo tiempo, y es equivalente a,

$$u^i u^i < u^4 u^4 \tag{3.7}$$

$$v^i v^i < v^4 v^4 \tag{3.8}$$

multiplicando las ecuaciones (3.7) y (3.8), se llega a la expresión:

$$u^i u^i v^i v^i < (u^4)^2 (v^4)^2$$

sacando raiz cuadrada se obtiene:

$$\sqrt{u^i u^i v^i v^i} < u^4 v^4 \tag{3.9}$$

La desigualdad de Schwarz afirma que para un par de vectores tridimensionales, el producto escalar cumple la siguiente relación:

$$|u^i v^i| \leq \sqrt{u^i u^i v^i v^i} \quad (3.10)$$

donde la desigualdad se convierte en igualdad siempre y cuando los vectores sean múltiplos escalares uno del otro<sup>1</sup>. De modo que la ecuación (3.9), teniendo en cuenta esta desigualdad, lleva a que:

$$|u^i v^i| < |u^4 v^4| \quad (3.11)$$

esta desigualdad se mantiene al remover el valor absoluto, por lo cual:

$$u^i v^i - u^4 v^4 < 0 \quad (3.12)$$

en otros términos,

$$u \cdot v < 0 \quad (3.13)$$

en conclusión, ningún par de vectores tipo tiempo son perpendiculares entre sí, por lo tanto, es imposible que exista más de uno en una base para  $\mathcal{M}$ .

Por último, resta analizar qué sucede al introducir un vector nulo en la base de  $\mathcal{M}$ . Para ello, se efectúa el procedimiento anterior cambiando un vector tipo tiempo por un vector nulo, de modo que se obtiene:

$$u^i u^i < u^4 u^4 \quad (3.14)$$

$$n^i n^i = n^4 n^4 \quad (3.15)$$

al multiplicar las ecuaciones (3.14) y (3.15), y sacando raíz cuadrada se llega a:

$$\sqrt{u^i u^i n^i n^i} < u^4 n^4 \quad (3.16)$$

aplicando la desigualdad de Schwarz:

$$u^i n^i < u^4 n^4 \quad (3.17)$$

es decir,

$$u \cdot n < 0 \quad (3.18)$$

por lo tanto, al no ser perpendiculares entre sí, se excluyen los vectores nulo de la base, puesto que trabajar con un vector nulo en vez de uno tipo tiempo implica un

---

<sup>1</sup>Revisar el Apéndice A

rompimiento en el axioma de Lorentz. De esta manera, se deduce que la base de  $\mathcal{M}$  tetradimensional debe estar compuesta por tres vectores tipo espacio, y uno tipo tiempo.

Un caso especial en  $\mathcal{M}$ , se presenta cuando dos vectores nulos serán perpendiculares entre sí siempre y cuando sean paralelos, o sea, serán múltiplos escalares uno del otro. Para demostrar esto se toman dos vectores de la forma:

$$m^i m^i = m^4 m^4 \quad (3.19)$$

$$n^i n^i = n^4 n^4 \quad (3.20)$$

Partiendo de la hipótesis de que los vectores son ortogonales,

$$n \cdot m = n^i m^i - n^4 m^4 = 0 \quad (3.21)$$

Ahora, multiplicando las ecuaciones (3.19) y (3.20),

$$m^i m^i n^i n^i = (m^4)^2 (n^4)^2 \quad (3.22)$$

y despejando de la ecuación (3.21), y elevando al cuadrado

$$(n^i m^i)^2 = (n^4 m^4)^2 \quad (3.23)$$

Las dos ecuaciones (3.22) y (3.23) resultan equivalentes, por lo tanto si igualando los términos,

$$(n^i m^i)^2 = m^i m^i n^i n^i \quad (3.24)$$

que indica el caso en que la desigualdad de Schwarz se cambia por una igualdad, por lo que los vectores  $m^i$  y  $n^i$  son paralelos, que es igual a  $m^i = \lambda n^i$ . Sólo hace falta corroborar que la componente temporal de los vectores tiene el mismo comportamiento. Partiendo de que  $n^4 = 0$ , de la ecuación (3.21) es posible hacer el siguiente despeje:

$$m^4 = \frac{m^i n^i}{n^4} \quad (3.25)$$

y puesto que  $m^i = \lambda n^i$ ;

$$m^4 = \lambda \frac{n^i n^i}{n^4} \quad (3.26)$$

pero, para un vector nulo  $n^i n^i = n^4 n^4$

$$m^4 = \lambda \frac{n^4 n^4}{n^4} \quad (3.27)$$

por lo tanto  $m^4 = \lambda n^4$ , con lo que se concluye que  $m = \lambda n$ , en conclusión, los vectores son paralelos<sup>2</sup>.

Teniendo en cuenta la estructura de una base para  $\mathcal{M}$ , es posible realizar una representación gráfica de igual forma a como se hace en el espacio euclidiano, con lo que se puede causar confusión al no referenciar el espacio en que se está trabajando. Por ejemplo, en la Fig.(3.2) se han graficado un par de vectores con respecto a la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

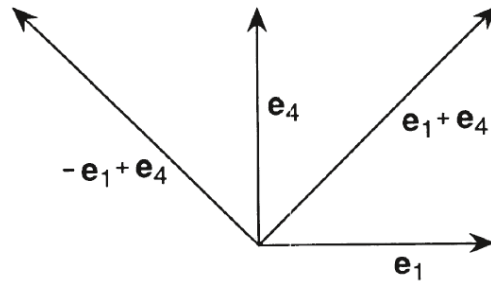


Figura 3.2: Representacion de un par de vectores[1]

Al no tener referencia del espacio en que están estos vectores, no se conoce cómo es su comportamiento, verbigracia, con respecto al producto punto. Para un espacio euclidiano se tiene que:

$$(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 0 \quad (3.28)$$

con lo cual los vectores son ortogonales entre sí. Sin embargo, utilizando la métrica de Lorentz, este mismo producto tiene como resultado:

$$(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -2 \quad (3.29)$$

En conclusión, aunque gráficamente los vectores sean iguales, se debe tener presente la métrica utilizada para hacer una correcta interpretación.

### 3.3.3. Mapeo lineal

Con la representación vectorial, surge la duda si es posible relacionar el conjunto de elementos pertenecientes a dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$ , esto se hace por medio de

<sup>2</sup>Anadijiban Das, The Special Theory of Relativity - A Mathematical Exposition



un mapeo  $\phi$  el cual es una función que asigna a cada elemento  $v \in V$  algún elemento  $\phi(v) \in W$ ,

$$w = \phi(v) \tag{3.30}$$

se dice entonces que  $\phi$  mapea a  $V$  en  $W$ . No obstante, también es posible mapear un espacio a  $V$  en  $V$ , esta es una herramienta muy útil para representar diferentes marcos de referencia pertenecientes a un mismo espacio  $\mathcal{M}$ .

Un mapeo lineal es aquel que cumple con la condición,

$$\mathbf{L}(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mu\mathbf{L}(\mathbf{v}) \tag{3.31}$$

este tipo de relaciones, teniendo en cuenta la validez de la homogeneidad del espacio-tiempo, representan las posibles transformaciones que se aplican sobre  $\mathcal{M}$ . Estas transformaciones, deben estar de acuerdo con el principio de simetría exigido por la teoría de la relatividad; por tanto, debe cumplirse que:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'$ , llamado el mapeo de Lorentz. Un ejemplo de ellos son las transformaciones de Lorentz vistas en el capítulo 1.

El estudio de dichas transformaciones conllevan al entendimiento de las simetrías presentes en el espacio de Minkowski, por lo tanto, es necesario implementar un formalismo matemático el cual de pie para analizar los efectos que aparecen al ejercer cambios sobre un sistema físico. Esto se logra a partir de estructuras algebraicas a través de la *Teoría de Grupos*.

### 3.4. Teoría de grupos

El conjunto de diferentes transformaciones que preservan cierta simetría de un sistema físico, son estudiadas por medio de cuerpos matemáticos denominados grupos. Se define un grupo como el conjunto de distintos elementos al que se le ha asignado una ley de composición, que cumple con la siguiente serie de axiomas:

- a) La composición entre cualquier par de elementos  $a$  y  $b$  pertenecientes a  $G$  da como resultado un elemento el cual también pertenece a  $G$ .

$$a \circ b \in G \tag{3.32}$$

- b) Existe un elemento  $E \in G$  conocido como el elemento neutro o elemento identidad, cuya composición con cualquier elemento  $a$  de  $G$  es de la forma:

$$E \circ a = a \circ E = a \tag{3.33}$$

- c) Para todo elemento  $a$  de  $G$  existe un único elemento  $a^{-1}$  también perteneciente a  $G$ , llamado inverso, tal que:

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = E \quad (3.34)$$

- d) La ley de composición debe ser asociativa, es decir, para cualquier elementos  $a$ ,  $a$  y  $c \in G$  se debe cumplir:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad (3.35)$$

con los cuales se fundamenta toda la estructura algebraica que estudia la teoría de grupos, y garantizan la existencia de simetrías sobre un sistema. <sup>3</sup>

Un grupo es definido a partir del número de elementos con que cuente, ya sea finito o infinito; por ejemplo, tomando la Fig.(3.3), la simetría que guarda el cuadrado bajo transformaciones, en este caso, se tiene dos tipos de transformaciones: rotaciones y reflexiones.

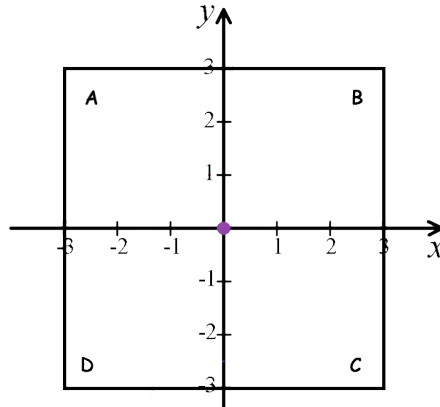


Figura 3.3: Estudio de simetría de un cuadrado

Tomando el centro geométrico como un eje de rotación, es posible hacer cuatro tipos de transformaciones que dejen la forma del cuadrado invariante, mas las etiquetas en sus esquinas cambian de lugar, Fig.(3.4). Se dice entonces que el cuadrado guarda una simetría bajo este conjunto de rotaciones.

Además de éstas, existen otro tipo de transformaciones que mantienen la simetría del cuadrado: las reflexiones con respecto a un eje, en este ejemplo, vienen representados

<sup>3</sup>A.W. Joshi - Elements of Group Theory for Physicists

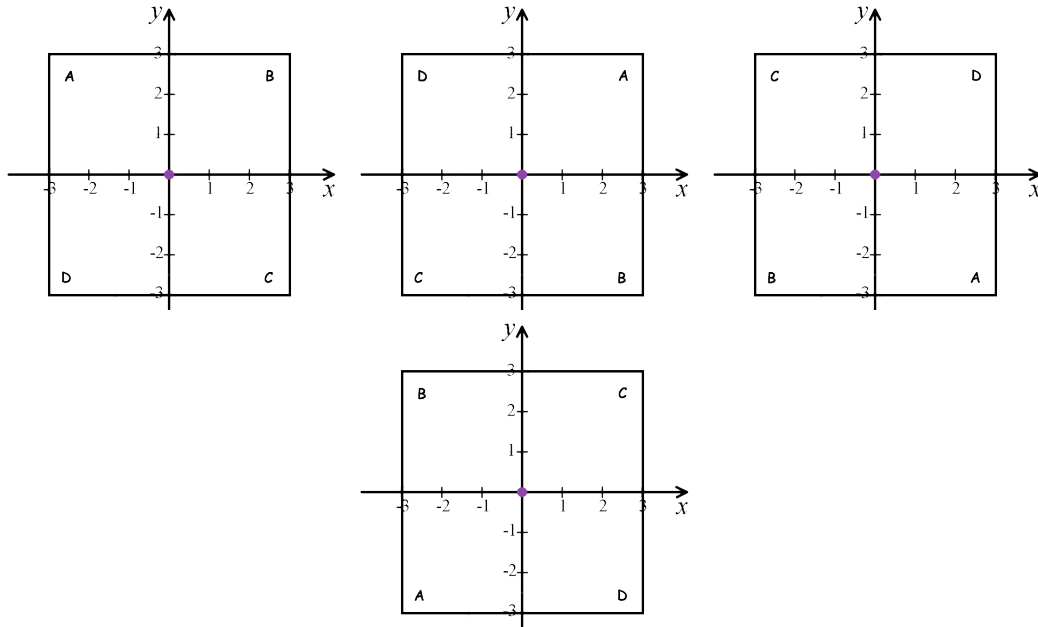


Figura 3.4: Rotación de un cuadrado en el plano

por el eje  $x$ , el eje  $y$ , y las diagonales del cuadrado. Rotaciones y reflexiones, cumplen con los axiomas necesarios para formar un grupo, el cual contiene ocho elementos, entonces se dice que es de orden ocho.

### 3.4.1. Subgrupos

En el caso de las simetrías del cuadrado, se toman dos tipos de elementos que transforman al cuadrado de formas diferentes. Al analizar las rotaciones, se llega a la conclusión de que éstas, por sí solas, obedecen los cuatro axiomas propuestos, y por lo tanto, forman un grupo; siendo más precisos, un subgrupo del llamado simetrías de un cuadrado. No ocurre lo mismo con las reflexiones, comenzando porque no cuentan con un elemento neutro contenido en su conjunto.

Una forma de identificar que un subgrupo  $H$  es un subgrupo de un grupo general  $G$ , es verificar que se cumpla con la condición:

$$h'h^{-1} \in H \tag{3.36}$$

para cualquier  $h$  y  $h'$  pertenecientes a  $H$ . Esto se demuestra comprobando (3.36) implica el cumplimiento de los axiomas  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$  y  $d)$ . Partiendo de que (3.36) es cierta:

1. Como  $h, h' \in H$ , haciendo  $h = h'$ , entonces  $h'h^{-1} = E$  resultando que el elemento identidad pertenece al subconjunto, y se cumple el axioma  $c$ ).
2. Ahora,  $Eh^{-1} \in H$ , entonces,  $h^{-1} \in H$ , o sea, existe un elemento inverso para cada  $h$ , satisfaciéndose el axioma  $d$ ).
3. El producto  $h'(h^{-1})^{-1} = h'h \in H$  garantiza la veracidad del axioma  $a$ ).
4. Por último, cualquier subconjunto de  $G$  cumple con el axioma  $b$ ).

En conclusión, la condición (3.36) es suficiente para mostrar que un subconjunto  $H$  es un subgrupo de  $G$ .

### 3.4.2. Clases

En un lenguaje cotidiano, hablar de clases hace referencia a hablar de algún tipo de conjunto; mas, en el contexto de la teoría de grupos es algo más complejo. Definirlo requiere primero especificar lo que son los elementos conjugados.

Se dice que un par de elementos,  $a$  y  $b$  pertenecientes a  $G$ , son conjugados, si cumplen la siguiente condición:

$$b = xax^{-1} \tag{3.37}$$

con  $x \in G$ . Además, si un tercer elemento  $c \in G$ , es conjugado de  $a$  o de  $b$ , es correcto afirmar que los tres elementos son conjugados entre sí.

Se define una clase como un subconjunto de  $G$  que conste únicamente de elementos mutuamente conjugados. Entonces, la construcción una clase completa, se logra a partir de un elemento  $h \in H$  tomando el conjunto de valores obtenidos del producto  $xhx^{-1}$  para todos los valores de  $x \in G$ .

Un ejemplo de clases en el grupo de simetría que guarda un cuadrado en el plano, son las rotaciones y las reflexiones, puesto que aplicando (3.37): si  $a$  es una rotación  $b$  también lo es; del mismo modo ocurre con las reflexiones: si  $a$  es una reflexión también lo es  $b$ . Así pues, es imposible encontrar una rotación dentro de la clase de reflexiones, y viceversa.

Generalizando este concepto a un espacio tridimensional, el conjunto de rotaciones hechas sobre un eje determinado forma una clase. Debido a que es posible conseguir infinitos ejes de rotación, existen infinitas clases.

### 3.4.3. Clases laterales

Un tipo especial de clases son las llamadas *clases laterales*. Se definen a partir de un subgrupo  $H$  contenido en  $G$ , y un elemento  $a \in G$ , de modo que: se toma  $a$  arbitrario y se opera con cada uno de los  $h \in H$ , el conjunto de elementos resultantes forman una clase lateral.

$$gH = \{gh : h \in H\} \quad (3.38)$$

$$(3.39)$$

$$Hg = H; \{hg : h \in H\} \quad (3.40)$$

Se clasifican en dos tipos: clase lateral derecha, de la forma (3.38); y clase lateral izquierda (3.40), lo cuales tienen el mismo número de elementos. Por lo general forman un mismo conjunto, sin embargo, cuando esto ocurre, se dice que  $H$  es un subgrupo invariante de  $G$ , también expresado como:

$$gH = Hg \quad (3.41)$$

por lo cual, está compuesto enteramente por clases de  $G$ . La importancia de estos grupos es que a partir de ellos es posible desarrollar toda un álgebra que permita conocer la información del grupo general.

## 3.5. Homomorfismos

Existen diversos conjuntos de transformaciones que pueden ser estudiadas con la ayuda de diferentes grupos; por ejemplo, es válido representar las rotaciones utilizando ángulos como elementos del grupo, y la suma como su operación ligada; sin embargo, también es correcto representar dichos ángulos por medio de matrices, cuya composición es dada por la multiplicación matricial. Se dice entonces que estos dos grupos forman un homomorfismo.

Un homomorfismo se define como un mapeo  $\phi$  de  $G$  en  $G'$  si existe una relación *n-a-uno*, es decir, cada elemento de  $G$  tiene una única imagen en  $G'$ , y además cumplir con la siguiente relación:

$$\phi(g) * \phi(g') = \phi(g \cdot g') \quad (3.42)$$

en donde la operación  $*$ , al tratarse de elementos pertenecientes a  $G'$ , representa la operación definida en dicho grupo; mientras que  $\cdot$ , es la ley de composición definida para  $G$ . Esto queda implícito en el contexto en el cual se trabaje, y por lo general

no se pone ningún símbolo para diferenciar las operaciones.

La importancia de los homomorfismos radica en poder hacer un estudio de grupos con cierto grado de complejidad o abstracción utilizando grupos que requieran un desarrollo más simple. De esta manera, haciendo uso de matrices y la operación definida para éstas, se estudian las diferentes transformaciones posibles de realizar sobre el espacio de Minkowski, constituyéndose así toda una estructura algebraica con la cual se analizan sus diversas simetrías.

## 4. Estructuras Algebraicas

### 4.1. Simetría en Física

”Los principios de simetría nos llevaron a descubrir nuevas leyes como los huecos de la tabla periódica nos llevaron a descubrir nuevos elementos”,<sup>1</sup> esta frase resume la importancia del estudio de las simétricas sobre un sistema, para el profundo desarrollo de la física; las teorías que se van descubriendo, son verificadas o descartadas a partir de estas principios. A lo largo de este trabajo se estudia un concepto fundamental en física: el principio de relatividad, que proporciona el tipo de simetrías que deben cumplir las leyes de la naturaleza.

De acuerdo a las ideas clásicas, deben existir simetrías en el espacio con respecto a las rotaciones y traslaciones posibles sobre un sistema. Sin embargo, para detallar más en el estudio del espacio y del tiempo, falta mencionar las traslaciones temporales y además, las relaciones entre dos marcos de referencia que se alejan entre sí con una velocidad constante. Todo este conjunto de transformaciones representan las variaciones posibles de hacer a un sistema de acuerdo con las ideas Newton, además forman un grupo hoy conocido como Grupo de Galileo.

Al replantearse la idea de relatividad, teniendo en cuenta los postulados de Einstein, también se cambia el modo de transformación de un sistema, ahora es necesario tener en cuenta que no es posible analizar el espacio y el tiempo de una forma independiente, sino que se deben ir de la mano, para ello se introducen las transformaciones de Lorentz, con las cuales se desarrolla un conjunto de elementos que forman un grupo entre sí, llamado el Grupo de Lorentz,

La generalización de este último grupo viene cuando se incluyen las traslaciones a lo largo del espacio-tiempo, de modo que se obtiene un grupo análogo al Grupo de Galileo, los cuales coinciden siempre y cuando se trabaje con velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, este último es llamado el Grupo de Poincaré.

---

<sup>1</sup>Daniel Freedman y Antoine Van, la revista Investigación y Ciencia, Artículo N° 447.

Estos grupos comparten una serie de propiedades, y es posible encerrarlos en un grupo más general llamado Grupo de Lie.

## 4.2. Grupos de Lie

La teoría de la relatividad especial estudia cómo es el comportamiento de la naturaleza, vista desde diferentes marcos de referencia inerciales. La relación entre los sistemas coordinados correspondientes a cada marco se hace por medio de un conjunto de transformaciones, las cuales forman un grupo  $G$ , cuyos elementos son caracterizados por uno o más parámetros continuos,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ [8], es decir:

$$a = a(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

donde  $a$  representa un elemento perteneciente a  $G$ . Este tipo de grupos se conoce como grupos de Lie, en honor a Sophus Lie, que dedico su trabajo al estudio de este tipo de grupos.

Lie se dio cuenta de que analizando el comportamiento de una región de elementos pertenecientes a  $G$ , tan pequeña como sea posible, alrededor de la identidad, es posible obtener el comportamiento de todo el grupo. Esta idea, sutil pero potente, es el punto de partida para lograr una estructura matemática que permita relacionar diferentes elementos de diferentes maneras, lográndose ejecutar cálculos más sencillos para operaciones más complejas.

### 4.2.1. Transformaciones Infinitesimales

La representación matemática de una transformación espacio-temporal generalmente se hace por medio de una matriz, esto implica que al realizar transformaciones consecutivas se tenga que hacer una serie de multiplicaciones matriciales, este proceso es sencillo pero tedioso, y puede llevar a un número elevado de cálculos.

Para un grupo  $M$ , compuesto por números reales bajo la operación multiplicación, se cumple que todo  $a \in M$  es dado a partir de un par de elementos  $b, c \in M$ , tal que:

$$a = b * c$$

es decir, todo elemento de  $M$  puede ser expresado como la multiplicación de dos números reales. Sin embargo, esta no es la única manera de hacerlo; por ejemplo,



también pueden ser representados por medio de la función exponencial, de tal forma que cada número real tenga la estructura  $e^a$ . Entonces, ahora se tiene que:

$$\begin{aligned} e^a &= e^b * e^c \\ e^a &= e^{b+c} \end{aligned}$$

convirtiendo una multiplicación en una suma de números reales. Esta notación facilita los cálculos cuando se trata con elementos de una magnitud mayor.

El paso siguiente es encontrar un método análogo al procedimiento realizado con los números reales, pero ahora aplicado a la operación con matrices, y para ello se parte de la idea propuesta para un grupo de Lie. Al trabajar con grupos cuyos elementos forman un continuo es posible realizar transformaciones tan pequeñas como se quiera, es decir, transformaciones infinitesimales. Una matriz,  $R(\epsilon)$ , que represente este tipo de transformación viene dada por:

$$R(\epsilon)_i = I + \epsilon B_i$$

en donde  $\epsilon$  es un número infinitesimal que representa la magnitud de la transformación, y  $B_i$ , conocido como el generador del grupo, indica el tipo de transformación realizada; por ejemplo, en una rotación en el espacio:  $B_i$  representa el eje de rotación ya sea  $x$ ,  $y$ ,  $z$  o cualquier otro; mientras  $\epsilon$  es el ángulo total que se quiere rotar el sistema.

Para lograr realizar una transformación de magnitud  $\delta$ , es necesario aplicar  $N$  veces la transformación  $R(\epsilon)$ , lo cual implica que la relación entre las magnitudes de ambas esté dada por:

$$\delta = N\epsilon$$

donde  $N$  debe tomar un valor muy grande, y la transformación infinitesimal es reescrita como,

$$R(\epsilon)_i = I + \frac{\delta}{N} B_i$$

por lo tanto, al hacer  $N$  transformaciones  $R(\epsilon)_i$  consecutivas se tiene que,

$$R(\delta) = \left( I + \frac{\delta}{N} B \right)^N \tag{4.1}$$

se ha multiplicado  $N$  veces a la matriz  $R(\epsilon)$  consigo misma.

Aplicando un desarrollo en series de Tylor de la expresión (4.1), se obtiene:

$$R(\delta) = I + \delta B + \frac{1}{2!} \delta^2 B^2 \dots \quad (4.2)$$

que es la misma estructura que se obtiene al desarrollarse la función exponencial en series de Taylor,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 \dots \quad (4.3)$$

por lo tanto, existe una relación término a término entre expresiones (4.2) y (4.3), que permite introducir un nuevo tipo de notación matricial, a partir de funciones exponenciales, de modo que, una transformación es representada por:

$$R(\delta) = e^{\delta B_i}$$

Esta notación, el conjunto de generadores  $B_i$  adquiere un rol análogo al que una base toma en un espacio vectorial, es decir, cualquier elemento perteneciente al grupo es expresado como una combinación lineal de los diferentes generadores, y a partir de este hecho se genera toda la estructura algebraica que soporta a la teoría de la relatividad especial.

### 4.2.2. Algebras de Lie

La multiplicación entre dos números expresados de forma  $e^a$  y  $e^b$ , se resuelve manteniendo la base y sumando los exponentes, tal que:

$$e^a e^b = e^{a+b} \quad (4.4)$$

Esta igualdad se cumple, sí y sólo sí, el producto entre los elementos es conmutativo; en este caso la multiplicación de reales conmuta y por lo tanto es válida. Sin embargo, las transformaciones generalmente vienen representadas por matrices; es bien sabido que el producto entre matrices no conmuta, por lo tanto (4.4) no es válida.

Entonces se hace necesario incluir un álgebra que incluya la notación exponencial, o dicho de otra forma, una manera de relacionar los expresados a partir de esta notación.

La construcción de un álgebra general, que pueda servir a desarrollos futuros en aplicaciones de otras ramas de la física como lo es la mecánica cuántica, requiere de generadores,  $M_j$ , que incluyan términos complejos, y sean escritos como:

$$M_j = \frac{B_j}{i} \quad (4.5)$$

y por lo tanto, los elementos de  $G$  vienen dados por:  $e^{i\alpha_j M_j}$  y  $e^{i\beta_k M_k}$ .

Que  $G$  sea un grupo, garantiza que si  $e^{i\alpha_j M_j}$  y  $e^{i\beta_k M_k} \in G$  el el producto:

$$e^{i\alpha_j M_j} e^{i\beta_k M_k} = e^{i\delta_l M_l} \quad (4.6)$$

también pertenezca a  $G$ . Ahora, se pretende encontrar una formulación diferente para (4.6), para ello se toma el logaritmo natural de toda la expresión, quedando entonces que:

$$\ln e^{i\delta_l M_l} = \ln (e^{i\alpha_j M_j} e^{i\beta_k M_k})$$

por lo tanto,

$$\delta_l M_l = \ln (e^{i\alpha_j M_j} e^{i\beta_k M_k}) \quad (4.7)$$

Es posible realizar una expansión del logaritmo natural utilizando las series de Taylor, de forma que:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (4.8)$$

Entoces, se suma y se resta 1 al logaritmo que aparece (4.7), para obtener una expresión de la forma en que aparece (4.8), de tal manera que:

$$\ln (e^{i\alpha_j M_j} e^{i\beta_k M_k}) = \ln (1 + e^{i\alpha_j M_j} e^{i\beta_k M_k} - 1) \quad (4.9)$$

de modo que:

$$x = e^{i\alpha_j M_j} e^{i\beta_k M_k} - 1 \quad (4.10)$$

Antes de hacer el desarrollo propuesto por (4.8), se hace una expansión en series de Taylor de las funciones exponenciales presentes en (4.10),

$$\begin{aligned} e^{i\alpha_j M_j} e^{i\beta_k M_k} - 1 &= (1 + i\alpha_j M_j + \frac{1}{2}(i\alpha_j M_j)^2 + \dots) \\ &\quad (1 + i\beta_k M_k + \frac{1}{2}(i\beta_k M_k)^2 + \dots) - 1 \\ &= 1 + i\alpha_j M_j + \frac{1}{2}(i\alpha_j M_j)^2 - i\beta_k M_k - \frac{1}{2}(i\beta_k M_k)^2 - 1 \\ &= i(\alpha_j M_j + \beta_k M_k) - \alpha_j M_j \beta_k M_k - \frac{1}{2}((\alpha_j M_j)^2 + (\beta_k M_k)^2) \end{aligned}$$

dado el valor para  $x$ , se continua con el desarrollo de (4.8),

$$\begin{aligned}
x - \frac{x^2}{2} &= i(\alpha_j M_j + \beta_k M_k) - \alpha_j M_j \beta_k M_k - \frac{1}{2}((\alpha_j M_j)^2 + (\beta_k M_k)^2) \\
&\quad - \frac{i(\alpha_j M_j + \beta_k M_k) - \alpha_j M_j \beta_k M_k - \frac{1}{2}((\alpha_j M_j)^2 + (\beta_k M_k)^2)}{2} \\
&= i(\alpha_j M_j + \beta_k M_k) - \alpha_j M_j \beta_k M_k - \frac{1}{2}((\alpha_j M_j)^2 + (\beta_k M_k)^2) \\
&\quad - \frac{1}{2}(-(\alpha_j M_j + \beta_k M_k)(\alpha_j M_j + \beta_k M_k)) \\
&= i(\alpha_j M_j + \beta_k M_k) - \alpha_j M_j \beta_k M_k - \frac{1}{2}((\alpha_j M_j)^2 + (\beta_k M_k)^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}((\alpha_j M_j)^2 + (\beta_k M_k)^2 + \alpha_j \beta_k (M_j M_k + M_k M_j)) \\
&= i(\alpha_j M_j + \beta_k M_k) + \frac{1}{2} \alpha_j \beta_k (M_k M_j - M_j M_k)
\end{aligned}$$

con lo cual se llega a la igualdad

$$e^{i\alpha_j M_j} e^{i\beta_k M_k} = i(\alpha_j M_j + \beta_k M_k) + \frac{1}{2} \alpha_j \beta_k (M_k M_j - M_j M_k) \quad (4.11)$$

Esta es la manera correcta de operar dos diferentes elementos de  $G$  por medio de la notación exponencial, aunque presenta términos de más, se limita a la suma de matrices[6]. En donde  $(M_k M_j - M_j M_k) = [M_k, M_j]$  es el conmutador entre los dos conmutadores.

### 4.3. Rotaciones en el espacio

Como ejemplo de la potencia que trae consigo esta forma de desarrollar un problema de transformaciones, se ha propuesto desarrollar las transformaciones espaciales, según el modelo clásico, y generalizar a un espacio tetradimensional de Minkowski,

En primer lugar, se trabaja con las rotaciones en el espacio, empezando primero con el desarrollo de una estructura matemática asociada a las rotaciones en el plano, y mostrar las dificultades que trae consigo atacar el problema desde un punto de vista trigonométrico para al final proponer una solución elegante a partir de la idea de Lie.

Comparando los dos desarrollos y escogiendo el más eficiente para generalizar el trabajo a n-dimensiones.

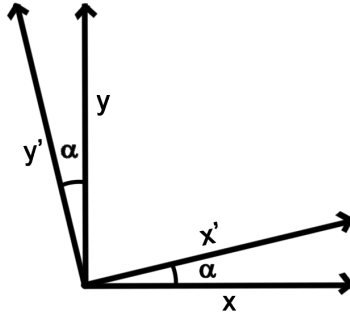


Figura 4.1: Marcos de referencia rotados un ángulo  $\alpha$

### 4.3.1. Grupo $SO(2)$

Un par de marcos de referencia que difieren el uno del otro únicamente por una rotación de un ángulo  $\alpha$ , como lo muestra la Fig. 4.1, cuentan, cada uno, con un sistema de coordenadas que se relacionan trigonométricamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha\end{aligned}$$

o también, expresado en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

en donde la matriz,

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

representa la transformación que ha sufrido el marco de referencia. El tratamiento matemático de las rotaciones en un sistema, desde un punto de vista trigonométrico, no presentan mayor dificultad cuando se trata de un plano. Sin embargo, al pasar a un espacio tridimensional, la relación entre coordenadas gana un mayor nivel de complejidad, que aumenta al incrementar en número de dimensiones del sistema, lo cual hace que la generalización de este tratamiento, a espacio n-dimensionales, se vuelva imposible.

La idea ahora es hacer una representación de estas transformaciones por medio de la función exponencial; para ello se parte de la condición de invariancia de la norma de un vector bajo rotaciones, es decir, un vector  $r$ , visto desde un par de marcos de referencia  $O$  y  $O'$  rotados entre sí, conserva el valor de su longitud de modo que:

$$r \cdot r = r' \cdot r'$$

o, expresado matricialmente como:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{r} = \mathbf{r}'^T \mathbf{r}' \quad (4.12)$$

Los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  guardan una relación de:

$$\mathbf{r} = R\mathbf{r}'$$

donde  $R$  representa la rotación del sistema. Sacando la traspuesta de la expresión anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T &= (R\mathbf{r}')^T \\ &= \mathbf{r}'^T R^T \end{aligned}$$

y, reemplazando en (4.12):

$$\mathbf{r}'^T R^T R \mathbf{r}' = \mathbf{r}'^T \mathbf{r}'$$

lo cual implica que si la condición de invariancia de la norma de un vector es cierta, se debe cumplir que:

$$R^T R = I \quad (4.13)$$

es decir, las rotaciones matricialmente hablando, son ortogonormales. Según la idea de los grupos de Lie, una rotación infinitesimal  $R(\epsilon)$ , también obedece a (4.13), por lo tanto:  $R(\epsilon)^T R(\epsilon) = I$ . Como  $R(\epsilon)$ , debe estar en una región cercana al elemento identidad, es posible expresarlo como

$$R(\epsilon) = I + A$$

donde  $A$  es una matriz infinitesimal cualquiera, por consiguiente:

$$(I + A)^T (I + A) = I$$

resolviendo la ecuación,

$$\begin{aligned} (I + A^T)(I + A) &= I \\ I + A^T + A + A^T A &= I \end{aligned}$$

los elementos de orden  $A^2$  o superiores se desprecian, puesto que  $A$  es infinitesimal, resultando:

$$\begin{aligned} A^T + A &= 0 \\ A^T &= -A \end{aligned}$$

es decir, la matriz  $A$  es antisimétrica, o en otros términos, tiene una estructura de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo,

$$A = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con ello, se reescribe  $R(\epsilon)$  como,

$$R(\epsilon) = I + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

en conclusión, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

actúa como el generador de todas las rotaciones posibles en un plano, de modo que cualquier elemento de este grupo es dado por:

$$R(\delta) = \exp \left[ \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Un par de marcos de referencia conectados por medio de una rotación  $R(\epsilon)$ , son escritos como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\epsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tomando una rotación de la forma (4.14), se tiene que las componentes del sistema coordinado de cada marco viene relacionados tal que:

$$\begin{aligned} x' &= x + \epsilon y \\ y' &= y - \epsilon x \end{aligned} \quad (4.15)$$

### 4.3.2. SO(3)

La generalización de las rotaciones a un espacio tridimensional es hecho a partir del estudio de rotaciones el plano, vistas en el apartado anterior. Partiendo de que una rotación en el plano  $xy$  se realiza alrededor del eje  $z$ , deja la componente  $z$  invariante mientras las componentes  $x$  e  $y$  se comportan de acuerdo a (4.15). La Fig. (4.2), representa este tipo de rotación.

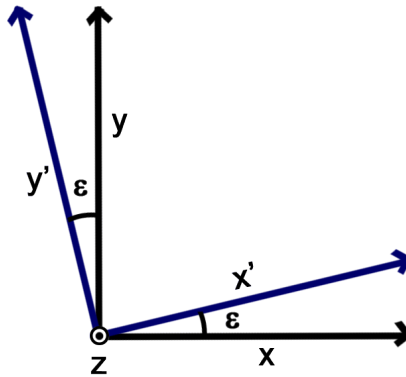


Figura 4.2: Relación entre marcos de referencia

Entonces, la relación entre los dos sistemas coordenados viene dada por:

$$R_z(\epsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \epsilon y \\ y - \epsilon x \\ z \end{pmatrix}$$

Encontrar el generador de las rotaciones alrededor del eje  $z$  implica encontrar una matriz  $A_z$  tal que:

$$A_z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde, despejando a  $A_z$  se obtiene que:

$$A_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Por lo tanto, una rotación alrededor del eje  $z$  es dada por:

$$R_z(\epsilon) = \exp\left(\epsilon \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Siguiendo este mismo proceso se hallan los generadores para las rotaciones con respecto a los ejes  $x$  e  $y$ . Una rotación alrededor del eje  $x$ , implica una rotación del plano  $yz$  como lo muestra la Fig.(4.3).

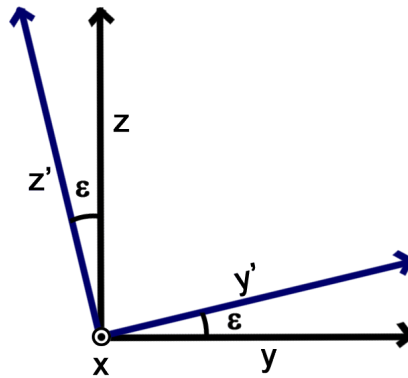


Figura 4.3: Relación entre marcos de referencia

Ahora, con base a las relaciones (4.15), la relación entre las coordenadas  $y$  y  $z$ , están dadas por:

$$\begin{aligned} y' &= y + \epsilon z \\ z' &= z - \epsilon y \end{aligned}$$

mientras la componente  $x$  permanece invariante. Por lo tanto, la rotación en alrededor del eje  $x$  viene dada por:

$$R_x(\epsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

De igual manera que el caso anterior, el generador de esta transformación,  $A_x$ , se obtiene con:

$$A_x(\epsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

y despejando  $A_x$ ,

$$A_x(\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que una rotación al rededor del eje  $x$  es dada por:

$$R_x(\epsilon) = \exp \left( \epsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se obtiene que el generador de rotación al rededor del eje  $y$  es dado por:

$$A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y su transformación en notación exponencial es:

$$R_y(\epsilon) = \exp \left( \epsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Una rotación cualquiera de cierto ángulo  $\theta$  en el espacio tridimensional, puede ser obtenida realizando rotaciones sucesivas de los planos  $x$ ,  $y$  y  $z$ , por lo tanto, es expresada como:

$$R(\theta) = e^{\theta A}$$

Donde  $A_i$  representa la matriz generadora de los elementos pertenecientes a  $SO(3)$ , siendo:

$$A = A_x + A_y + A_z$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & A_z & -A_y \\ -A_z & 0 & A_x \\ A_y & -A_x & 0 \end{pmatrix}$$

Este proceso de generadores permite un desarrollo más amigable para dimensión  $n$ , un espacio a analizar contará con una matriz de generadores  $n \times n$ , los cuales son obtenidos de una forma trivial siguiendo el desarrollo que se logró para las tetraciones.

### 4.3.3. Generalización SO(n)

Aprovechando el hecho de saber que una rotación en el espacio debe estar representada por una matriz asimétrica, de manera que, para una rotación en el espacio tetradimensional viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

o vista de una forma extendida,

$$\begin{aligned} A = & a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lo cual reduce considerablemente el problema de encontrar los generadores del grupo. Teniendo en cuenta que este tipo de matrices deja un cierto número de parámetros límite el cual depende de la dimensión en que se trabaje. El número total de valores de aquella matriz es  $n \times n$ , sin embargo se sabe que los valores de la diagonal siempre van a ser ceros, y además que al ser una matriz antisimétrica únicamente quedan como valores independientes la mitad de este número, es decir, para una matriz  $n \times n$  los parámetros independientes vienen dados por la fórmula:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{n^2 - n}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

## 4.4. Grupo de Galileo

El grupo de Galileo contiene al conjunto de transformaciones que afectan las coordenadas espaciales y temporales, teniendo en cuenta el carácter absoluto de estos.

Hasta ahora, sólo se han mencionado las rotaciones afectando al espacio, sin embargo, existe otro tipo de transformaciones que únicamente cambian punto de origen del sistema coordenado, ya sea para coordenadas espaciales o la temporal. Este tipo de transformaciones son conocidas como traslaciones. Este tipo de transformaciones a cada punto  $P$  del espacio se le hace corresponder un punto  $P'$ . Puede ser representado mediante una suma de vectores como:

$$T(P) = P' = P + u$$

donde  $u$  representa la transformación. Este tipo de transformación no afecta la orientación del sistema coordenado, de tal manera que presentan simetrías en el espacio-tiempo.

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Para mantener la estructura con la que se trabajó el grupo  $SO(n)$ , es necesario expresar las traslaciones de una forma matricial. Esto es posible introduciendo el concepto de matriz ampliada, que consiste expresar una suma de vectores como una multiplicación matricial, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

entonces, la transformación por traslaciones viene dada por la matriz:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo una expansión se  $T$ :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo cual indica que el generador de una traslación viene dado por la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde,

$$C_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

representa las traslaciones espaciales, mientras que:

$$C_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una traslación temporal.

## Transformaciones de Galileo

El principio de relatividad se aplica a marcos que se desplazan con una velocidad constante  $v$ , cuyos sistemas de coordenadas son relacionados a través de las transformaciones de Galileo, bajo ideas clásicas. De acuerdo con la teoría, las ecuaciones que rigen este comportamiento son las transformaciones de Galileo, son vistas de una forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 1 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

donde una transformación de Galileo, notada como  $\Gamma$ , es:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_x & 1 & 0 & 0 \\ v_y & 0 & 1 & 0 \\ v_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o de una forma más extendida, Es decir, una transformación de Galileo  $\Gamma$  es representada por las matrices:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_x & 0 & 0 & 0 \\ v_y & 0 & 0 & 0 \\ v_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en consecuencia, el parámetro que caracteriza a este grupo viene dado por la velocidad  $v$  con que se desplacen los marcos de referencia, cuyos generadores son:

$$P_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 4.5. Grupo de Poincaré

El desarrollo de la teoría de la relatividad, se basa en las transformaciones que dejan invariante la métrica de Lorentz, unas de ellas ya fueron vistas, las transformaciones de Lorentz, sin embargo, no se ha profundizado en el gran conjunto que ellas implican. La forma en que se muestran este tipo de transformaciones de una manera general es a través de la invariancia de la métrica en el espacio-tiempo[4]. Es decir, tener en cuenta que:

$$-x^0 + x^1 + x^2 + x^3 = -x'^0 + x'^1 + x'^2 + x'^3$$

o expresado en forma matricial,

$$(\mathbf{r}^\mu)^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}^\mu = (\mathbf{r}'^\mu)^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}'^\mu$$

Como ya se mencionó anteriormente, la forma de relacionar las coordenadas de dos marcos de referencia viene dada por medio de una matriz,

$$(\mathbf{r}^\mu) = \Lambda \mathbf{r}'^\mu$$

De igual manera que en las rotaciones en el espacio, se saca la transpuesta del término anterior y se reemplaza en el otro término:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}^\mu)^T &= (\Lambda \mathbf{r}'^\mu)^T \\ (\mathbf{r}^\mu)^T &= \mathbf{r}'^T \Lambda^T \end{aligned}$$

reemplazando este valor en la ecuación general,

$$\begin{aligned}
 (\Lambda \mathbf{r}^\mu)^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}^\mu &= (\mathbf{r}'^\mu)^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda \mathbf{r}'^\mu \\
 (\mathbf{r}'^\mu)^T \Lambda^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda \mathbf{r}'^\mu &= (\mathbf{r}'^\mu)^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}'^\mu
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, notando la matriz métrica como  $\eta$ , toda transformación de Lorentz debe cumplir con la siguiente fórmula general:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (4.18)$$

se dice entonces que las transformaciones de Lorentz dejan invariante la métrica en el espacio Minkowski, siempre y cuando se cumpla la condición (4.18).

Existen diversas tipos de transformaciones que cumplen esta condición de invariancia de la métrica, un caso, análogo al de las reflexiones trabajando en el espacio espacio, son las transformaciones impropias cuya representación matricial tiene como determinante un valor de  $-1$ . Otro tipo de transformación que se encuentra dentro de este grupo son las transformaciones ortocronas, que son aquellas que respetan la dirección en que fluye el tiempo.

Dentro de las transformaciones propias y ortocronas se encuentran las antes mencionadas transformaciones de Lorentz que están relacionadas con la velocidad con que se mueve cada sistema de referencia respecto a un eje determinado, ésta va a poderse describir a partir de las velocidades en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . A este tipo de transformaciones se les llama boost.

Al igual que en las rotaciones en el espacio, a un boost también es posible aplicarle la idea planteada por Lie, tomando una transformación  $\Lambda = I + L$ , en donde  $L$  es una matriz infinitesimal; ésta debe cumplir con la condición planteada para las transformaciones de Lorentz, es decir:

$$(I + L)^T \eta (I + L) = \eta$$

resolviendo la ecuación se llega a:

$$\begin{aligned}
 (\eta + L^T \eta)(I + L) &= \eta \\
 \eta + L^T \eta + \eta L + L^T \eta L &= \eta
 \end{aligned}$$

en donde  $L^T\eta L$  es un término de segundo orden, y por ello se desprecia, con lo cual:

$$\begin{aligned}(\eta + L^T\eta)(I + L) &= \eta \\ L^T\eta + \eta L &= 0\end{aligned}$$

Desarrollar este término implica darle valores a la matriz  $L$  y analizar su comportamiento bajo el anterior resultado. Suponiendo un  $L$  igual a:

$$L = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & r_1 & r_2 & r_3 \\ f & r_4 & r_5 & r_6 \\ g & r_7 & r_8 & r_9 \end{pmatrix}$$

debe cumplir que:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & r_1 & r_2 & r_3 \\ f & r_4 & r_5 & r_6 \\ g & r_7 & r_8 & r_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & e & f & g \\ b & r_1 & r_4 & r_7 \\ c & r_2 & r_5 & r_8 \\ d & r_3 & r_6 & r_9 \end{pmatrix} = 0$$

Resolviendo esta operación, obtiene que:

$$\begin{pmatrix} -a & -b & -c & -d \\ e & r_1 & r_2 & r_3 \\ f & r_4 & r_5 & r_6 \\ g & r_7 & r_8 & r_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & e & f & g \\ -b & r_1 & r_4 & r_7 \\ -c & r_2 & r_5 & r_8 \\ -d & r_3 & r_6 & r_9 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se debe cumplir que,

$$\begin{aligned}-a - a &= 0 \rightarrow a = 0 \\ -b + e &= 0 \rightarrow b = e \\ -c + f &= 0 \rightarrow c = f \\ -d + g &= 0 \rightarrow d = g\end{aligned}$$

Los términos relacionados con  $r$  forman una matriz antisimétrica que únicamente relacionan coordenadas espaciales, es decir, representa una rotación en el espacio, cuyos generadores ya fueron expuestos. Por lo tanto, una transformación de Lorentz viene dada por una matriz que tenga la siguiente estructura:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a & b & d \\ a & 0 & A_z & -A_y \\ b & -A_z & 0 & A_x \\ c & A_y & -A_x & 0 \end{pmatrix}$$



la cual es una matriz antisimétrica que depende, igual que en el grupo  $SO(4)$ , de seis parámetros diferentes, que al expandirla se encuentran los generadores relacionados con los diferentes boost, que vienen dados por:

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 4.6. Conmutadores de los diferentes grupos

Para hacer una correcta relación entre los elementos de los diferentes grupos que afectan el espacio-tiempo, utilizando la notación de las funciones exponenciales, se estudia el comportamiento de los distintos conmutadores posibles.

Comenzando con el grupo de Galileo, que cuenta con subgrupos de: traslación, rotación y las transformaciones de Galileo, donde sus elementos conmutan de la siguiente manera:

### Conmutador entre rotaciones

$$[R_x, R_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_x, R_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_x, R_y] = -R_z$$

$$[R_x, R_z] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_x, R_z] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_x, R_z] = R_y$$

Es fácil comprobar, realizando los demás cálculos, que los conmutadores para el caso de rotaciones siguen un comportamiento de la forma:

$$[R_x, R_y] = -R_z$$

$$[R_x, R_z] = R_y$$

$$[R_y, R_x] = R_z$$

$$[R_y, R_z] = -R_x$$

$$[R_z, R_x] = -R_y$$

$$[R_z, R_y] = R_x$$

## Conmutador entre transformaciones de Galileo

$$[P_x, P_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[P_x, P_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[P_x, P_y] = 0$$

$$[P_x, P_z] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[P_x, P_z] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[P_x, P_z] = 0$$

De igual manera que en el caso anterior, al realizar el resto de operaciones se comprueba que las transformaciones de Galileo conmutan entre sí.

$$[P_x, P_y] = 0$$

$$[P_x, P_z] = 0$$

$$[P_y, P_x] = 0$$

$$[P_y, P_z] = 0$$

$$[P_z, P_x] = 0$$

$$[P_z, P_y] = 0$$

## Conmutador entre rotación y transformación de Galileo

Tomando elementos del grupo de rotaciones y de transformaciones de Galileo se obtienen diferentes casos en donde el resultado del conmutador cambia. El primer caso que se desarrolla es en el que las rotaciones se dan alrededor del mismo eje en que se aplica la transformación de Galileo, tomando el eje  $x$  se tiene:

$$[R_x, P_x] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_x, P_x] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_x, P_x] = 0$$

Ahora, para el eje  $y$

$$[R_y, P_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_y, P_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_y, P_y] = 0$$

Igualmente para el eje  $z$

$$[R_z, P_z] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_z, P_z] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_z, P_z] = 0$$

Como conclusión, se tiene que en este primer caso los elementos conmutan. El siguiente caso es en el cual las transformaciones se realizan con respecto a diferentes coordenadas, dando como resultado:

$$[R_x, P_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_x, P_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_x, P_y] = -P_z$$

$$[R_x, P_z] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_x, P_z] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[R_x, P_z] = P_y$$

Realizando los cálculos restantes se comprueba que los conmutadores se comportan de la forma:

$$[R_x, P_y] = -R_z$$

$$[R_x, P_z] = R_y$$

$$[R_y, P_x] = R_z$$

$$[R_y, P_z] = -R_x$$

$$[R_z, P_x] = -R_y$$

$$[R_z, P_y] = R_x$$

## Traslaciones

Por último, se tiene que las traslaciones únicamente tienen un conmutador distinto de cero cuando se operan con las rotaciones, y como resultado se tiene,

$$[R_x, T_y] = -T_z$$

$$[R_x, T_z] = T_y$$

$$[R_y, T_x] = T_z$$

$$[R_y, T_z] = -T_x$$

$$[R_z, T_x] = -T_y$$

$$[R_z, T_y] = T_x$$

## Conmutadores grupo de Poincaré

Del mismo modo como se realizó el procedimiento para encontrar los conmutadores entre los diferentes subgrupos del grupo de Galileo, se procede para el grupo de

Poincaré. Empezando por las transformaciones de Lorentz, se tiene que:

$$[A, A_y] = R_z \qquad [A_x, A_z] = -R_y$$

$$[A_y, A_x] = -R_z \qquad [A_y, A_z] = R_x$$

$$[A_z, A_x] = R_y \qquad [A_z, A_y] = -R_x$$

Ahora bien, cuando se trata de operaciones entre un elemento de rotación y un boost con respecto a la misma coordenada, sus conmutadores son:

$$[A_x, L_x] = 0$$

$$[A_y, L_y] = 0$$

$$[A_z, L_z] = 0$$

y cuando se realizan utilizando distintas coordenadas, vienen dados por:

$$[A_x, L_y] = -L_x \qquad [A_x, L_z] = L_y$$

$$[A_y, L_x] = L_z \qquad [A_y, L_z] = -L_x$$

$$[A_z, L_x] = -L_y \qquad [A_z, L_y] = L_x$$

Con todo el tratamiento matemático realizado hasta el momento, se construyen las estructuras algebraicas basadas en la notación exponencial y el uso de los diferentes conmutadores, que dan soporte a la relatividad especial.

Para cerrar este capítulo, se propone el siguiente ejemplo: Sobre cierto sistema físico actúan dos transformaciones consecutivas, en este caso un par de boost, con una misma magnitud pero aplicadas a diferentes coordenadas, las cuales vienen representadas por:

$$A_1 = \exp(\theta A_x)$$

$$A_2 = \exp(\theta A_y)$$

Utilizando la expresión (4.11), se relacionan este par de elementos, teniendo en cuenta que:

$$M_j = \frac{A_j}{i}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \exp(\theta A_x) \exp(\theta A_y) &= \exp\left(\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\theta^2 \frac{[A_x, A_y]}{i^2}\right) \\
 &= \exp\left(\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\theta^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta^2/2 & -\theta \\ \theta/2^2 & 0 & \theta \\ \theta & -\theta & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

en conclusión, el problema de transformaciones sucesivas sobre el espacio-tiempo se reduce a la suma de diferentes matrices, ahorrando una cantidad considerable de cálculos.

## 5. Estructuras Geométricas de la Relatividad Especial

La idea principal de este trabajo es el estudio de las simetrías presentes en la física según las ideas relativistas, es decir, las cantidades que pertenecen invariantes bajo transformaciones en el espacio-tiempo. Hasta ahora se ha realizado el estudio de las transformaciones que dejan invariantes el sistema, estructurando un formalismo algebraico apoyado en la teoría de grupos. En este orden de ideas, este capítulo se refiere al procesamiento de las cantidades físicas que invariantes, que son representados por medio de cuerpos matemáticos pertenecientes al cálculo tensorial. Aquí se inicia haciendo un análisis de la electrodinámica partiendo de las fallas que presentaba bajo ideas relativistas, para al final llegar a una expresión elegante, con base a tensores, que manifieste la covariancia de sus leyes.

### 5.1. Campo Electromagnético Clásico

A finales del siglo XIX era posible hacer descripciones bastante precisas del movimiento de los cuerpos por medio de las leyes de Newton y el principio de relatividad de Galileo, dando como imposible determinar el estado de movimiento de un sistema valiéndose únicamente de un experimento mecánico. Sin embargo, un estudio de la teoría electromagnética, basado en el principio de adición de velocidades, podría poner de manifiesto este movimiento realizando experimentos lo suficientemente precisos, como lo fue, por ejemplo, el realizado por Michelson y Morley.

Maxwell descubrió el comportamiento ondulatorio de los campos eléctrico y magnético, suponiendo el desplazamiento de un haz luminoso sin la presencia de cargas ni



corrientes eléctricas al aplicar las leyes que habría descubierto, de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (5.4)$$

Aplicando el rotacional a la ecuación (5.3)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

por propiedades del rotacional esta expresión puede ser escrita como:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t}$$

y reemplazando las expresiones (5.1) y (5.4) se llega a:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (5.5)$$

Haciendo este mismo procedimiento para el campo magnético obtiene:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (5.6)$$

Las expresiones (5.5) y (5.6) sugieren que los campos eléctrico y magnético tienen un comportamiento de onda cuya velocidad de desplazamiento es de  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . La introducción del éter intentó dar explicación a este fenómeno, surgiendo la duda de ¿cómo se comportan estas ondas vistas desde dos marcos de referencia diferentes?

Para responder esta pregunta es necesario analizar el comportamiento de una onda viajera desde dos distintos marcos,  $O$  y  $O'$ , los cuales se alejan entre sí a una velocidad  $v$  constante. Suponiendo que para  $O$  la onda cumpla una ecuación de la forma:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (5.7)$$

donde  $\phi$  es una función de onda. De acuerdo con lo estipulado por la mecánica clásica, las relaciones que permiten ver cómo es el comportamiento de esta onda desde  $O'$  se

consiguen a través de las transformaciones de Galileo:

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}$$

Derivando este conjunto de ecuaciones, con respecto a las variables espaciales del sistema no primado, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial y'}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial z'}{\partial z} &= 1\end{aligned}$$

lo cual implica la invariancia del Laplaciano para cualquier marco de referencia inercial, es decir:

$$\nabla' \phi = \nabla \phi$$

Ahora, las transformaciones de Galileo derivadas con respecto al tiempo muestran que,

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -v \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial t} = 0 \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial z'}{\partial t} = 0 \tag{5.11}$$

donde, utilizando la regla de la cadena, se encuentra que el operador derivada parcial con respecto a  $t$ , en términos de las componentes primadas, viene dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'}$$

de donde, al remplazando las expresiones (5.8)-(5.11), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} - v \frac{\partial}{\partial t'}$$

y al aplicar dos veces este operador sobre la función  $\phi$ ,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} + v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'}$$

por lo tanto, la ecuación de onda vista desde  $O'$  tiene una estructura:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2} \left( v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial t' \partial x'} \right) \quad (5.12)$$

Comparando las ecuaciones (5.7) y (5.12) se llega a la conclusión de que las leyes del electromagnetismo presentes en  $O$  son distintas a las que rigen en  $O'$ ; únicamente para el caso en el cual  $v = 0$  se obtiene la ecuación cuya estructura es más sencilla, fracasando así el concepto de simetría en la naturaleza.

## 5.2. Transformación de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$

El principio de simetría impreso en la teoría de la relatividad de Einstein afirma que la estructura matemática que presentan las leyes de la naturaleza se conserva en cualquier marco de referencia, siguiendo este orden de ideas, las ecuaciones de Maxwell deben preservar esta simetría. Entonces, es necesario partir de que dichas ecuaciones son <sup>1</sup>:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (5.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.16)$$

La forma de representar un campo electromagnético desde un marco de referencia  $O$ , está ligada a variaciones que presenta su sistema coordenado. Visto desde un marco de referencia  $O'$ , que se aleja de  $O$  con una velocidad constante  $v$ , el mismo campo se representa a partir de unas nuevas coordenadas. Entonces, para encontrar una expresión que relacione a los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  con los campos  $\mathbf{E}'$  y  $\mathbf{B}'$  preservando la simetría

<sup>1</sup>Se ha realizado un cambio en la estructura de las ecuaciones con respecto a [9]

del sistema, se acude la relación entre sistemas de coordenadas proporcionada por las transformaciones de Lorentz,

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

Además, se hace necesario conocer cómo es el comportamiento de los operadores diferenciales, de acuerdo a  $O$  y  $O'$ , por medio de las transformaciones de Lorentz. Para ello, se toman estas ecuaciones y se aplica derivadas con respecto a las componentes del sistema coordenado de  $O$ , de la siguiente forma:

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma v \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\gamma \frac{v}{c^2} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 1 \quad (5.21)$$

Tomando estas expresiones, y haciendo uso de la regla de la cadena, se llega de una manera directa a la relación de los operadores diferenciales para ambos sistemas de referencia,  $O$  y  $O'$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'}$$

y reemplazando los valores (5.17)-(5.21):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) \quad (5.22)$$

Así mismo para  $x, y$  y  $z$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}. \quad (5.25)$$

con la que se consigue relacionar el operador derivada de los marcos  $O$  y  $O'$ .

Contando con las herramientas matemáticas necesarias, se analizan las siguientes leyes de Maxwell expresadas para un marco de referencia  $O$ ,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.27)$$

El primer paso es tomar la correspondencia entre las coordenadas  $x, y$  y  $z$  de la ecuación (5.26), es decir,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}$$

Luego se aplica el mismo procedimiento para (5.27)

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

Reemplazando las expresiones que relacionan a los diferenciales por medio de las transformaciones de Lorentz, en las componentes del rotor de  $\mathbf{B}$ .

$$\frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_z}{\partial y'} - \frac{\partial B_y}{\partial z'} \quad (5.28)$$

$$\frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial (E_y - vB_z)}{\partial t'} = \frac{\partial B_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial \left( B_z + \frac{v}{c^2} E_y \right)}{\partial x'} \quad (5.29)$$

$$\frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial (E_z + vB_y)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial \left( B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right)}{\partial x'} - \frac{\partial B_x}{\partial y'} \quad (5.30)$$

ahora, se aplican el cambio de diferenciales para las componenetes del rotor de  $\mathbf{E}$ ,

$$\gamma \frac{\partial B_x}{\partial t'} = \gamma v \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial E_y}{\partial z'} - \frac{\partial E_z}{\partial y'} \quad (5.31)$$

$$\gamma \frac{\partial \left( B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right)}{\partial t'} = \gamma \frac{\partial (E_z + vB_y)}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial z'} \quad (5.32)$$

$$\gamma \frac{\partial \left( B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right)}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y'} - \gamma \frac{\partial (E_y - vB_z)}{\partial x'} \quad (5.33)$$

El principio de la relatividad exige que la simetría en las leyes de la naturaleza no se puede romper, por lo tanto, las ecuaciones (5.26) y (5.27) conservan su estructura si

se estudian desde el marco de referencia  $O'$ , por lo cual se cumple que:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} = \frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} = \frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} = \frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'}$$

siguiendo con:

$$\frac{\partial B'_x}{\partial t'} = \frac{\partial E'_y}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial t'} = \frac{\partial E'_z}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial B'_z}{\partial t'} = \frac{\partial E'_x}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial x'}$$

y, además, existe una relación directa de estas ecuaciones en  $O'$  con las expresiones (5.28)-(5.33), de la siguiente manera

$$E'_y = f(v)\gamma(E_y - vB_z) \quad (5.34)$$

$$B'_x = f(v)B_x \quad (5.35)$$

$$B'_z = f(v)\gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \quad (5.36)$$

La función  $f(v)$  representa la proporcionalidad que hay entre las expresiones, la cual debe ser independiente de los parámetros  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$  para que se cumpla la equivalencia de las ecuaciones; por lo tanto, se intuye que esta función depende únicamente de la velocidad con que se alejen los marcos de referencia. De igual maera, la correspondencia entre coordenadas de las expresiones restantes es de la forma:

$$E'_z = g(v)\gamma(E_z + vB_y) \quad (5.37)$$

$$B'_y = g(v)\gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \quad (5.38)$$

$$B'_x = g(v)B_x \quad (5.39)$$

y por último

$$B'_z = h(v)\gamma \left( B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \quad (5.40)$$

$$E'_y = h(v)\gamma (E_y - vB_z) \quad (5.41)$$

$$E'_x = h(v)E_x \quad (5.42)$$

¿Cómo se relacionan las funciones  $f(v)$ ,  $g(v)$  y  $h(v)$ ? Las ecuaciones (5.35) y (5.39) muestran que las funciones  $f(v)$  y  $g(v)$  son equivalentes, y del mismo modo (5.34) y (5.41) dejan ver que  $f(v)$  y  $h(v)$  también lo son; ahora sólo resta encontrar el valor de la función  $f(v)$ . Para ello, se introduce un nuevo observador en un marco de referencia  $O''$  que se aleja de  $O$  con una velocidad  $-v$ . Suponiendo que en  $O$  existe un campo magnético cuya componente está dada únicamente en la coordenada  $z$ , y no hay presencia de campos eléctricos, si se le observa desde  $O'$  y  $O''$  se encuentran las siguientes relaciones:

$$B'_z = f(v)\gamma B_z$$

$$B''_z = f(-v)\gamma B_z$$

Teniendo en cuenta que la magnitud de la velocidad con la que se desplazan ambos marcos de referencia con respecto a  $O$  es la misma, la homogeneidad del espacio permite afirmar que las componentes  $B'_z$  y  $B''_z$  corresponden a un mismo valor, por lo que:

$$f(v)\gamma B_z = f(-v)\gamma B_z$$

así pues

$$f(v) = f(-v)$$

Tomando la ecuación (5.35), vista desde  $O'$  se tiene que  $B_x = f(-v)B'_x$  por lo tanto:

$$\begin{aligned} B'_x &= f(v)f(-v)B'_x \\ f(v)f(-v) &= 1 \\ f(v)^2 &= 1 \end{aligned}$$

con lo cual  $f(v)$  puede tomar dos valores,  $+1$  o  $-1$ . Escoger un signo negativo implica que los campos invierten su orientación desde cualquier otro marco de referencia que se observe, lo cual resulta imposible; así pues, el valor correcto es  $f(v) = 1$ .



La relación entre las componentes del campo eléctrico a partir de las transformaciones de Lorentz vienen dadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}E'_x &= E_x \\E'_y &= \gamma (E_y - vB_z) \\E'_z &= \gamma (E_z + vB_y)\end{aligned}$$

y para el campo magnético,

$$\begin{aligned}B'_x &= B_x \\B'_y &= \gamma \left( B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \\B'_z &= \gamma \left( B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right)\end{aligned}$$

Estas expresiones permiten concluir que si los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  para dos sistemas de referencia permanecen invariantes siempre y cuando tengan componentes correspondientes únicamente a la dirección de desplazamiento; de lo contrario, existe una mezcla de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  dependiendo del observador, confirmando así que con dos partes de un mismo fenómeno.

En una forma general, la relación de los campos está dada por,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (\gamma - 1)\mathbf{E}_\perp + \gamma\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + (\gamma - 1)\mathbf{B}_\perp + \gamma\frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} \quad (5.44)$$

en donde  $\mathbf{E}_\perp$  y  $\mathbf{B}_\perp$  hacen referencia a las componentes perpendiculares al movimiento de los observadores.

### 5.3. Invariantes del Campo Electromagnético

El estudio del espacio-tiempo bajo las transformadas de Lorentz lleva a encontrar un intervalo invariante de la forma  $\Delta s^2 = \Delta(ct)^2 - \Delta x^2$ ; de manera análoga, estudiar los campos electromagnéticos a partir de estas transformaciones permite encontrar cantidades invariantes, las cuales traen implicaciones importantes.

En primer lugar está el término  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ , que toma un mismo valor sin importar el marco de referencia desde el cual se observe. Demostrar esto no es tarea difícil, es cuestión de reemplazar las correspondencias de las coordenadas, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= E'_x B'_x + E'_y B'_y + E'_z B'_z \\ \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= E_x B_x + \gamma^2 (E_y - vB_z) \left( B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) + \gamma^2 (E_z + vB_y) \left( B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \\ \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}\end{aligned}$$

De igual manera se demuestra, tomando las magnitudes de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , que la otra cantidad invariante es de la forma:

$$E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2$$

que implica tres consecuencias importantes<sup>2</sup>,

$$\begin{aligned} E > B &\iff E' > B' \\ B > E &\iff B' > E' \\ E = B &\iff E' = B' \end{aligned} \tag{5.45}$$

es decir, si la magnitud de un campo, eléctrico o magnético, es mayor que la del otro para un marco de referencia dado, será mayor para los demás sistemas de referencia; y si estos campos tienen la misma magnitud para un observador, tendrán la misma magnitud para cualquier observador.

### 5.3.1. Anulación de Campos

De la invariancia del producto punto se deduce que: de cumplirse  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$  existe la posibilidad de que alguno de los dos campos sea cero para un cierto sistema de referencia ¿cuál de los dos se anula? de acuerdo con las condiciones (5.45), lo hará el campo de menor magnitud.

#### Anulación del campo magnético

Suponiendo que para algún observador se cumpla que  $B' = 0$ , de la ecuación (5.44) se tiene que

$$\mathbf{B} + (\gamma - 1)\mathbf{B}_\perp - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} = 0$$

y multiplicando escalarmente toda la expresión por  $\mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + (\gamma - 1)\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_\perp - \gamma \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} = 0$$

dando como resultado,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = 0$$

así pues, el campo magnético debe ser perpendicular al vector velocidad, es decir,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp$  y reemplazando este valor nuevamente en (5.44),

$$\mathbf{B} + (\gamma - 1)\mathbf{B} - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} = 0$$

---

<sup>2</sup>Cap. 4 de [9]

por lo tanto,

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}$$

$$\frac{B}{E} = \frac{v}{c^2} \sin \alpha$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que forma el vector  $\mathbf{E}$  con  $\mathbf{v}$ . De esta expresión se concluye que la anulación del campo magnético depende únicamente de la orientación que presente el campo eléctrico con respecto al movimiento del sistema; además, para que  $\mathbf{B}$  sea anulable debe ser perpendicular tanto a  $\mathbf{v}$  como a  $\mathbf{E}$

### Anulación del campo eléctrico

El mismo procedimiento se sigue para encontrar cómo debe ser el comportamiento del campo electromagnético para poder anular el campo eléctrico, teniendo en cuenta que en este caso  $\mathbf{E}$  debe ser el campo de menor magnitud. Usando (5.43) con  $\mathbf{E}' = 0$  y multiplicando escalarmente la expresión por  $\mathbf{v}$ , se obtiene:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + (\gamma - 1)\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_\perp + \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (5.46)$$

resultando,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = 0$ , es decir,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp$ , obteniéndose así:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}'$$

$$\frac{E}{B} = -v \sin \beta$$

donde  $\beta$  es el ángulo entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{v}$

## 5.4. Covariancia Electromagnética

Hasta ahora se ha comprobado la relación que existe entre los campos electromagnéticos vistos desde dos sistemas de referencia distintos; sin embargo, aún queda por demostrar que estas relaciones llevan a una simetría del conjunto completo de leyes de Maxwell. Para ello, hace falta introducir un concepto que no se ha tenido en cuenta: la corriente eléctrica; ésta debe tener en cuenta la cantidad de carga existente y cómo fluye en el espacio, los cuales se estudian bajo los parámetros  $\rho$  que representa la densidad de carga y  $\mathbf{J}$  la densidad de corriente. Haciendo las respectivas relaciones bajo transformaciones de Lorentz, se tiene que, vistas por dos observadores con

movimiento relativo entre sí respecto al eje  $x$ , están dadas por:

$$\rho = \gamma \left( \rho' + \frac{v}{c^2} J'_x \right) \quad (5.47)$$

$$J_x = \gamma (J_x + v \rho') \quad (5.48)$$

$$J_y = J'_y \quad (5.49)$$

$$J_z = J'_z \quad (5.50)$$

Estas ecuaciones <sup>3</sup> muestran que, analizadas desde el contexto del espacio-tiempo relativista, las densidades de carga y de corrientes también representan dos cantidades de un mismo fenómeno.

Las ecuaciones de Maxwell, vistas desde un marco  $O'$ , vienen dadas por:

$$\nabla' \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = 0 \quad (5.51)$$

$$\nabla' \times \mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} = \mu_0 \mathbf{J}' \quad (5.52)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}' = 0 \quad (5.53)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = 4\pi \rho \quad (5.54)$$

Para evidenciar la covariancia entre las leyes de Maxwell en  $O$  y  $O'$ , se debe mostrar que el grupo de ecuaciones (5.13)-(5.16), implican necesariamente a (5.51)-(5.54). El primer paso es reescribir las ecuaciones de ambos marcos con respecto a las componentes paralelas y perpendiculares al movimiento de los observadores, o sea,  $\mathbf{v}$ .

Las ecuaciones, en términos de sus componentes perpendiculares son,

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}'_y \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}'_z \quad (5.58)$$

---

<sup>3</sup>Cap. 3 de [9]

en términos de las componentes paralelas son,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}'_x \quad (5.60)$$

Las ecuaciones que incluyen la divergencia de los campos simplemente se expanden de la siguiente forma,

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (5.62)$$

Ahora, haciendo el mismo procedimiento para la expresión de los campos vistos desde  $O'$  se tiene que sus componentes perpendiculares están dadas por,

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} = 0 \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial t'} = 0 \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} = \mu_0 \mathbf{J}'_y \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} = \mu_0 \mathbf{J}'_z \quad (5.66)$$

sus componentes paralelas son,

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} = 0 \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} = \mu_0 \mathbf{J}'_x \quad (5.68)$$

y la expansión de las ecuaciones que presentan divergencia es,

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0 \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} = 4\pi\rho' \quad (5.70)$$

Por último, para ver si estas expresiones implican mismas leyes, se toman (5.55)-(5.58) y se aplica las transformaciones a campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  y de los diferenciales vistas anteriormente, obteniendo como resultado,

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} = 0 \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial t'} = 0 \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} = \mu_0 \mathbf{J}'_y \quad (5.73)$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} = \mu_0 \mathbf{J}'_z \quad (5.74)$$

Al comparar este resultado con su equivalente en  $O'$  dado por las ecuaciones (5.55)-(5.58), se llega a una igualdad en las expresiones, es decir que (5.55)-(5.58) implican directamente a (5.71)-(5.74).

Falta por demostrar la implicación del conjunto de ecuaciones restantes, para ello, se sigue el mismo procedimiento de relación de términos no primados con términos primados para las expresiones (5.59)(5.60), llegando al resultado de

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} = \frac{v}{c} \left( \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \right) \quad (5.75)$$

$$(5.76)$$

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} = \frac{c}{v} \left( \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \right) \quad (5.77)$$

igualando estas expresiones se llega a que,

$$\frac{v}{c} \left( \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \right) = \frac{c}{v} \left( \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \right) \quad (5.78)$$

con lo cual se concluye que necesariamente de tiene que cumplir  $\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0$ , lo cual quiere decir que (5.59) y (5.60) implican a (5.53).

Con las dos ecuaciones restantes se procede del mismo modo que en el caso anterior,

llegando a,

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} + \frac{v}{c} \left( \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \right) = \mu_0 \mathbf{J}'_x + \frac{v}{c} 4\pi \rho' \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} + \frac{c}{v} \left( \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \right) = \mu_0 \mathbf{J}'_x + \frac{c}{v} 4\pi \rho' \quad (5.80)$$

es fácil verificar que a partir de estas expresiones se cumple la igualdad,

$$\mu_0 \mathbf{J}'_x + \frac{v}{c} 4\pi \rho' - \frac{v}{c} \left( \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \right) = \mu_0 \mathbf{J}'_x + \frac{c}{v} 4\pi \rho' - \frac{c}{v} \left( \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \right) \quad (5.81)$$

factorizando términos,

$$4\pi \rho' \left( \frac{v}{c} - \frac{c}{v} \right) = \left( \frac{v}{c} - \frac{c}{v} \right) \left( \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \right) \quad (5.82)$$

y por lo tanto,

$$4\pi \rho' = \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \quad (5.83)$$

por lo tanto, reemplazando este valor en (5.79) se obtiene la última relación,

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} + \frac{v}{c} 4\pi \rho' = \mu_0 \mathbf{J}'_x + \frac{v}{c} 4\pi \rho' \quad (5.84)$$

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} = \mu_0 \mathbf{J}'_x \quad (5.85)$$

De este modo, queda demostrado que el cumplimiento de las leyes de Maxwell en  $O$  implica, bajo una relación de transformaciones de Lorentz, que las leyes en  $O'$  conservan la misma estructura, o sea, se conserva la simetría del sistema.

## 5.5. Introducción al Cálculo Tensorial

El cálculo tensorial es la rama de las matemáticas encargada de investigar las relaciones que permanecen invariantes al cambiar de un sistema de coordenadas o otro, en otras palabras, estudia las cantidades simétricas de un sistema bajo transformaciones de coordenadas. Por ello, este formalismo matemático representa una estructura que

sirva como base para la teoría de la relatividad, encargada del estudio de la simetría presente en las cantidades físicas y las leyes de la naturaleza con respecto al espacio-tiempo.

Todo este estudio se realiza mediante el uso del tensor, que es un cuerpo matemático con propiedades independientes a los sistemas empleados para caracterizarlos, con lo cual resulta muy útil asociar magnitudes físicas a éste y analizar como es su comportamiento al ser aplicada una transformación que incluya cambio de coordenadas espaciales y temporales. Verbigracia, la distancia medida en un espacio euclideo queda invariante cuando sobre éste actúa algún elemento del grupo de Galileo, por consiguiente, se puede atribuir una cantidad tensorial a la distancia mencionada.

Un tensor describe una cantidad física a través del número  $M$  de componentes que lo conforman; las cuales, a su vez, dependen de la dimensión  $n$  del espacio en el que se trabaje y el orden  $m$  del tensor, de tal manera que<sup>4</sup>:

$$M = n^m$$

entonces, un tensores de orden cero cuenta con una única componente y describe, por ejemplo, la temperatura de un sistema; los vectores son tensores de orden uno que, suponiendo un espacio tridimensional, pueden describir la posición de un punto en el espacio utilizando tres componentes,  $x, y$  y  $z$ ; las matrices son tensores de orden dos que cuentan con  $n \times n$  componentes, y así sucesivamente.

### 5.5.1. Espacios Vectoriales

En general, un las componentes de un vector se representan por las letras  $(x, y, z)$ ; sin embargo, puede ser expresado empleando una única letra, y a cada coordenada se le atribuye un índice numérico, por ejemplo:

$$\mathbf{v} = (x^1, x^2, x^3)$$

en general, esta es la forma de denotar tensores utilizada a lo largo del capítulo.

Como es sabido, cualquier vector puede ser descrito por medio de una combinación lineal de un conjunto de vectores, en donde intervienen cantidades escalares, de forma:

$$\mathbf{v} = ax^1 + bx^2 + cx^3..$$

---

<sup>4</sup>Cap 1 de [11]



este conjunto de escalares también se simbolizan utilizando índices como  $(v_1, v_2, v_3\dots)$ , entonces,

$$\mathbf{v} = v_1x^1 + v_2x^2 + v_3x^3..$$

Esto permite una simplificación a través de uso una sumatoria, de modo que:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N v_i x^i$$

### Convenio de Einstein

A medida en que se desarrollan procesos del cálculo tensorial, se acumulando cada vez más sumatorias, con ellas todo el simbolismo utilizados para su representación; Einstein se dio cuenta de que se podrían suprimir todos estos símbolos siguiendo un par de sencillas reglas, y de este modo lograr una simplificación tipo:

$$\sum_{i=1}^N v_i x^i = v_i x^i$$

Los índices involucrados en la sumatoria se les llama mudos; si en la expresión hay presente más de una suma, deben expresarse con índices diferentes, esto para evitar confusiones.

### La Métrica del Espacio Euclideo

Para un espacio euclideo, la distancia entre dos puntos,  $P = (x^1, x^2, x^3)$  y  $Q = (y^1, y^2, y^3)$ , está representado por el intervalo:

$$s = [(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2]^{1/2}$$

en el caso de tratarse de una distancia infinitesimal, la distancia está dada por:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

la cual, usando subíndices y superíndices, se reescribe como,

$$ds^2 = \delta_{ij} x^i x^j$$

donde  $\delta_{ij}$ , conocido como el delta de Kronecker, hace alusión a la métrica del espacio euclideo, la matriz identidad.

En este orden de ideas, recordando que una forma de efectuar el producto escalar entre dos vectores es por medio de la matriz métrica, entonces,

$$\delta_{ij} x^i y^j = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$$

representa esta operación vectorial, para un espacio tridimensional.

## Cambio de Base

Dado un espacio vectorial cuya base consta de un conjunto de vectores  $(y^1, y^2, y^3)$  y se define una nueva base que consta de vectores  $(x^1, x^2, x^3)$  que cumplan con la relación<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}x^1 &= x^1(y^1, y^2, y^3) \\x^2 &= x^2(y^1, y^2, y^3) \\x^3 &= x^3(y^1, y^2, y^3)\end{aligned}$$

¿Cómo se relacionan las cantidades definidas para el sistema  $y^i$  cuando se quieren expresar desde el sistema  $x^i$ ? Se puede hacer una relación directa entre los diferenciales de los sistemas, sabiendo que, valiéndose de la regla de la cadena se llegan a las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}dx^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^1}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^1}{\partial y^3} dy^3 \\dx^2 &= \frac{\partial x^2}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^2}{\partial y^3} dy^3 \\dx^3 &= \frac{\partial x^3}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^3}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^3}{\partial y^3} dy^3\end{aligned}$$

o, haciendo uso de la notación tensorial,

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \quad (5.86)$$

En general, los vector contravariantes denotados desde diferentes sistemas coordenados, guardan una relación de la forma:

$$x^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} y^j \quad (5.87)$$

### 5.5.2. Espacio Dual

En un espacio vectorial es posible definir diferentes tipos de bases, capaces todas de generar cualquier vector del espacio en cuestión; en este caso se introducen dos de ellas cuyo conjunto de vectores son de gran apoyo para el desarrollo de la estructura tensorial en física. Este par de bases tiene como condición que, independientemente de la métrica que se escoja, se cumpla:

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

---

<sup>5</sup>Desarrollo en cap. 1 de [10]

siendo  $e^i$  y  $e_j$  los vectores que conforman las dos bases. Se llama vectores contravariantes a todos aquellos que sean de la forma  $e^i$ ; y por otro lado, se conocen como covariantes los que sean de la forma  $e_i$ .

¿Cómo se relacionan estos dos tipos de vectores? Como todos ellos hacen parte de un mismo espacio, es correcto afirmar que partiendo de una base covariante bidimensional, se obtienen los vectores contravariantes de la forma,

$$\mathbf{e}^1 = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 \quad (5.88)$$

$$\mathbf{e}^2 = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \quad (5.89)$$

con lo que, encontrando los valores de  $a, b, c$  y  $d$ , se responde a esta pregunta. Antes que nada, se debe cumplir con la condición planteada, o sea:

$$(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 = 1$$

$$(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 = 0$$

$$(c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 = 0$$

$$(c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 = 1$$

resolviendo el producto punto de cada expresión,

$$a\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \quad (5.90)$$

$$a\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad (5.91)$$

$$c\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \quad (5.92)$$

$$c\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \quad (5.93)$$

Tomando el sistema de ecuaciones compuesto por (5.90) y (5.91), se hallan los valores de  $a$  y  $b$  por medio del método de Cramer. Recordando que el producto punto entre los vectores que conforman una base dan como resultado las componentes de la

matriz métrica  $g_{ij}$ , el valor de  $a$  está dado por,

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & g_{21} \\ 0 & g_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}}$$

$$a = \frac{g_{22}}{|g_{ij}^T|}$$

$$a = \frac{g_{22}}{|g_{ij}|}$$

y el valor de  $b$  es,

$$b = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & 1 \\ g_{12} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}}$$

$$b = \frac{-g_{12}}{|g_{ij}|}$$

Siguiendo este mismo procedimiento se hallan los valores de  $c$  y  $d$  tomando las expresiones (5.92) y (5.93), y se llega a:

$$c = \frac{-g_{21}}{|g_{ij}|}$$

$$d = \frac{g_{11}}{|g_{ij}|}$$

Por lo tanto, las expresiones (5.88) y (5.89) quedan de la forma:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{g_{22}}{|g_{ij}|}\mathbf{e}_1 + \frac{-g_{12}}{|g_{ij}|}\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}^2 = \frac{-g_{21}}{|g_{ij}|}\mathbf{e}_1 + \frac{g_{11}}{|g_{ij}|}\mathbf{e}_2$$

o, vistas en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|g_{ij}|} \begin{pmatrix} g_{22} & g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

El término que efectúa el cambio de base es la forma extendida de la matriz métrica invertida, es decir  $g_{ij}^{-1}$ , y se denota de una forma contravariante como:

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{1}{|g_{ij}|} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$$

por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} = g^{ij} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo, en notación compacta,

$$\mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j \quad (5.94)$$

la cual lleva a convertir una base covariante en una contravariante. El procedimiento contrario, entonces, viene dado por:

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j \quad (5.95)$$

### 5.5.3. Tensores Covariantes y Contravariantes

El siguiente paso es generalizar la notación aplicada a los vectores, involucrando tensores de orden superior.

#### Tensores Contravariantes

Analizando a un tensor  $A$  de segundo orden, desde un par de marcos de referencia  $O$  y  $O'$ , que cuentan con su propio sistema coordenado, se obtiene que sus componentes vistas desde  $O$ , vienen dadas efectuando el producto de dos vectores,  $B^m$  y  $D^n$ , y se denota<sup>6</sup>,

$$A^{mn} = B^m D^n \quad (5.96)$$

análogamente, definido desde  $O'$  va a tener componentes,

$$A'^{kl} = B'^k D'^l$$

De (5.87), se encuentra la relación que existe entre,

$$B'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} B^m$$

$$D'^l = \frac{\partial x'^l}{\partial x^n} D^n$$

---

<sup>6</sup>cap. 4[11]

por lo tanto,

$$A'^{kl} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} B^m \frac{\partial x'^l}{\partial x^n} D^n$$

$$A'^{kl} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \frac{\partial x'^l}{\partial x^n} B^m D^n$$

y al reemplazar, (5.96) se llega a la expresión final,

$$A'^{kl} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \frac{\partial x'^l}{\partial x^n} A^{mn}$$

que es la forma de denotar un tensor de segundo orden de forma contravariante.

Siguiendo el mismo procedimiento, se llega a que las cantidades de un tensor de tercer orden, se transforman como,

$$A'^{ijk} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} \frac{\partial x'^k}{\partial x^p} A^{mnp}$$

y, siguiendo este orden de ideas, se generaliza la formalismo para expresar un tensor contravariantemente.

### Tensores Covariantes

Del mismo modo que en el caso anterior, y teniendo en cuenta que un vector contravariante se define como:

$$A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j$$

un tensor de orden dos, visto desde  $O$  y  $O'$ , en términos covariantes está dado por,

$$A'_{kl} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \frac{\partial x^n}{\partial x'^l} A_{mn}$$

igualmente, un tensor covariante de tercer orden,

$$A'_{ijk} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x^p}{\partial x'^k} A_{mnp}$$

siendo este el formalismo con que se representan los tensores covariantes.

### Tensores Mixtos

Un tensor mixto es aquel que es expresado utilizando tanto subíndices como superíndices, en otras palabras, se mezclan las dos representaciones, covariante y contravariante. Esto se puede dar de distintas maneras, verbigracia:

$$A'^{ij}_{kl} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^p} \frac{\partial x'^l}{\partial x^q} A^{mn}_{pq}$$

se dice entonces que  $A'^{mn}_{pq}$  es un tensor mixto de cuarto orden.

## 5.6. Tensores en Relatividad Especial

Los eventos que tienen lugar en el espacio-tiempo, son determinados por un conjunto de coordenadas espaciales y una coordenada temporal que no ha sido tenido en cuenta hasta ahora en el desarrollo tensorial; ésta se incluye utilizando el índice cero para distinguirla, y ahora las coordenadas van a ser representadas con letras riegas de forma que,

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

De una manera análoga a como se hizo para el espacio euclideo, el intervalo que separa dos eventos en el espacio-tiempo viene dado por:

$$(ds)^2 = (ct)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (5.97)$$

o, en formalismo covariante, teniendo en cuenta la métrica del espacio de Minkowski  $\eta$ :

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (5.98)$$

### 5.6.1. Transformaciones de Lorentz

Se quiere encontrar la relación entre los sistemas coordenados pertenecientes a dos marcos de referencia inerciales  $O$  y  $O'$ , teniendo en cuenta ahora las ideas relativistas. De igual manera como se definió (5.87), se define la correspondencia:

$$x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu \quad (5.99)$$

Sin embargo, se sabe que para convertir cantidades de un sistema coordenado a otro en el espacio de Minkowski, se utilizan las transformaciones de Lorentz, denotadas por  $\Lambda$ , por lo cual,

$$\Lambda_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (5.100)$$

donde  $\Lambda_\nu^\mu$ , son los coeficientes de la matriz que representa dicha transformación, que en forma compacta es,

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (5.101)$$

En el caso particular en que  $O$  y  $O'$ , se desplacen únicamente en dirección  $x$ , las transformaciones implicadas son,

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$

con lo que para este caso se tiene,

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 5.6.2. Vectores en el Espacio-Tiempo

Un vector  $\mathbf{A}$ , perteneciente al espacio de Minkowski, puede ser representado igualmente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{\mu} \mathbf{e}^{\mu} \\ \mathbf{A} &= A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} \end{aligned}$$

Como el vector  $\mathbf{A}$  permanece invariante, es correcto afirmar,

$$A_{\mu} \mathbf{e}^{\mu} = A^{\nu} \mathbf{e}_{\nu}$$

y utilizando (5.94) se llega a una relación de las componentes covariante y contravariante de  $\mathbf{A}$ ,

$$\begin{aligned} A_{\mu} \eta^{\mu\nu} \mathbf{e}_{\nu} &= A^{\nu} \mathbf{e}_{\nu} \\ \eta^{\mu\nu} A_{\nu} &= A^{\mu} \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la métrica de Lorentz y tomando las coordenadas en forma contravariante de un cuadrivector  $\mathbf{x}^{\mu}$ , entonces

$$\mathbf{x}^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

entonces, las componentes del cuadrivector en forma covariante son:

$$\mathbf{x}_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3).$$

### 5.6.3. Escalares

Un escalar es un tensor de orden cero, representado por un sólo número, el cual es constante desde cualquier sistema en que se analice. Por lo tanto, es ideal para representar algunas magnitudes físicas, como lo son la carga eléctrica, la masa en reposo o la temperatura de un cuerpo, que, no importa el marco de referencia utilizado, permanecen invariantes.



Una forma de obtener este tipo de tensores por medio de la composición de un vector contravariante con uno covariante; así, para un sistema de referencia  $O$  se tiene,

$$F = A^\mu B_\mu$$

y, visto desde  $O'$

$$F' = A'^\nu B'_\nu$$

haciendo uso de las (5.87) y (5.86),

$$F' = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} B_\alpha$$

$$F' = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} A^\mu B_\alpha$$

en donde, haciendo uso de las (5.87) y (5.86),

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}$$

y, al tratarse de coordenadas independientes, se tiene que,

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\alpha$$

por lo tanto,

$$F' = \delta_\mu^\alpha A^\mu B_\alpha = A^\mu B_\mu$$

$$F' = F$$

quedando así demostrado que  $F$  toma el mismo valor para todos los sistemas coordenados.

Un ejemplo escalares está definido por medio del un vector  $\mathbf{x}$ , escrito como:

$$s^2 = x^\nu x_\nu$$

el cual representa un intervalo espacio-temporal en el espacio de Minkowski, que, como ya se ha mencionado, permanece invariante sin importar quién lo observe.

## 5.7. Operador Derivada

Para continuar con la formulación en términos covariantes y contravariantes, se introduce una notación de cómo deben ser las operaciones de las derivadas bajo este formalismo; para ello se definen los operadores de la siguiente forma:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right)$$

por lo tanto, la parte contravariante de estos operadores viene dada por:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{c\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla \right).$$

Aplicando un par de operadores,  $\partial^\mu$  y  $\partial_\mu$ , sucesivamente:

$$\partial^\mu \partial_\mu = \partial^0 \partial_0 + \partial^i \partial_i$$

llegando al resultado de que,

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 \tag{5.102}$$

## 5.8. Electrodinámica Manifiestamente Covariante

Hasta aquí se han introducido las herramientas necesarias para hacer una formulación de la electrodinámica, en donde se aprecie directamente la simetría que guardan estas leyes. Si bien se demostró que dicha simetría se preserva, el desarrollo no permite que se visualice fácilmente.

La tarea de ahora consiste en hacer un análisis tensorial de las leyes de Maxwell, desarrollando una estructura matemática en la cual no quepa la menor duda de que éstas se mantienen invariantes para cualquier observador. Este procedimiento se hace introduciendo los potenciales eléctrico y magnético, que aparecen de una manera natural de las ecuaciones (5.13) y (5.14) de la siguiente manera,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5.103}$$

por lo tanto existe una función vectorial  $\mathbf{A}$  implicada con  $\mathbf{B}$  tal que,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5.104}$$

y, reemplazando este valor en la ecuación (5.14),

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto, existe una función escalar  $\phi$ , que cumpla:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (5.105)$$

Ahora es posible hacer una descripción de un campo electromagnético a partir de  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  o de los potenciales  $(\phi, \mathbf{A})$ ; sin embargo, la relación que existe entre estos parámetros no es uno a uno, es decir, para describir a  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  hay un número infinito de opciones  $(\phi, \mathbf{A})$ . En efecto, cualquier función derivable  $\kappa$  sirve para crear un nuevo tipo de potenciales  $(\phi', \mathbf{A}')$  de la forma:

$$\begin{aligned}\phi' &= \phi + \frac{\partial \kappa}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \kappa\end{aligned}$$

los cuales producen los mismos campos eléctrico y magnético que los potenciales  $(\phi, \mathbf{A})$ ,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A}' &= \nabla \times \mathbf{A} \\ -\nabla \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}$$

Esto brinda cierta libertad de escoger los potenciales con los que se trabajará, y es conocida como *libertad de gauge*. Luego, para determinar cómo deben ser dichos potenciales se reescribe la ecuación (5.16) en términos de  $(\rho, \mathbf{A})$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\left( \nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)}{\partial t}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

organizando los términos se llega a la ecuación,

$$\nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla^2 \mathbf{A}$$

Es aquí donde entra en juego el papel del gauge, saber escogerlo representa un desarrollo eficiente de la teoría electromagnética. La condición de gauge de Coulomb se establece para trabajar en física clásica, e impone que:  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ [9]. Sin embargo, esta ecuación de gauge debe preservar su forma para distintos marcos de referencia; pero, bajo los criterios de la teoría de la relatividad, este gauge debe presentar una dependencia temporal que muestre la mezcla del espacio y el tiempo, de lo contrario se rompe la simetría que este debe preservar.

Entonces, es conveniente escoger una condición del gauge que permita un desarrollo simétrico, la cual lleva a una expresión final formulada en términos covariantes y contravariantes; para ello se utiliza la condición de gauge de Lorentz[9], dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

de esta manera se obtiene que:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

o, en términos de operadores,

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{5.106}$$

Por último, se reescribe la ecuación (5.15) en el formalismo covariante, teniendo en cuenta la condición del gauge de Lorentz,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \left( -\nabla\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 4\pi\rho \\ -\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} &= 4\pi\rho \end{aligned}$$

aplicando la condición del gauge,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 4\pi\rho$$

o, en formulación covariante,

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = 4\pi\rho \tag{5.107}$$

Con lo que se llega a una formulación de la electrodinámica bastante simplificada, puesto que las cuatro leyes de Maxwell se resumen, en términos de los potenciales  $A$  y  $\phi$ , en (5.106) y (5.107).

Ahora, las cantidades  $\rho$  y  $\mathbf{J}$ , componen un cuadvivector, de forma,

$$J^\mu = (\rho, \mathbf{J}) \quad (5.108)$$

e, igualmente, los potenciales se enmarcan como,

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \quad (5.109)$$

llevando así, al desarrollo de la electrodinámica en una sola expresión:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (5.110)$$

cuya estructura tensorial, permite un desarrollo covariante de la teoría. En consecuencia, trabajar el problema de una onda electromagnética se vuelve algo trivial, sabiendo que en este caso no se tienen en cuenta las cargas ni corrientes eléctricas, es decir:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad (5.111)$$

se llega entonces a,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 \quad (5.112)$$

$$(5.113)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (5.114)$$

que reproducen la ecuación de una onda electromagnética.

## 6. Aplicaciones

Una vez implementado el formalismo matemático propuesto en este proyecto, ahora se debe mostrar su efectividad al desarrollar una serie de ejemplos cuyo planteamiento se realiza de una forma directa. Dicha efectividad, se muestra en el análisis sucinto de algunos artículos técnicos en los cuales se deja ver el formalismo geométrico y algebraico de la relatividad especial.

### 6.1. Descripción de una Partícula Libre [11]

La partícula libre es un concepto físico utilizado para realizar el estudio de cuerpos sobre los cuales no actúa ninguna fuerza. En mecánica clásica, este estudio puede ser efectuado por medio del comportamiento de la función lagrangiana del sistema. Ahora, como la idea es hacer la descripción de la partícula relativista, se acoplan los formalismos de Lagrange y tensorial, de modo que la partícula libre cumple con una acción tal que:

$$I = \int_b^a L(x^\mu, u^\mu) ds \quad (6.1)$$

donde  $L$  representa la función lagrangiana que cumple la partícula, que además satisface la ecuación Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right) = 0 \quad (6.2)$$

En el espacio de Minkowski, la acción a minimizar es representada por medio de la separación,  $s$ , entre un par de eventos que, como se vio en el capítulo dos, equivale a  $s = c\tau$ . Por ende,

$$I = \int_{\tau_a}^{\tau_b} c d\tau$$

Por otro lado,  $s$  es un escalar invariante, por lo que puede ser escrito de forma tensorial como:

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

donde,  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica utilizada en el espacio de Minkowski, y  $dx^\nu$  son las coordenadas del cuadrivector posición. Multiplicando y dividiendo, la parte de la derecha esta última expresión, por  $(d\tau)^2$ :

$$ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2}$$

$$ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau$$

donde,  $dx^\mu/d\tau$ , hace referencia al cuadrivector velocidad, de modo que:

$$ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau$$

por lo tanto, la acción, desde un punto de vista del formalismo tensorial, toma la estructura:

$$I = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau \quad (6.3)$$

Entonces, ya es posible ver el acople entre la mecánica analítica y la representación tensorial. Utilizando el formalismo covariante, se reduce la expresión del lagrangiano tetradimensional de una partícula libre a una expresión como lo es:

$$L = \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}$$

Comparando las expresiones (6.1) y (6.3), se concluye que:

$$\sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} = c$$

es decir, la lagrangiana es un escalar, por lo cual es toma el mismo valor para cualquier sistema de referencia inercial en donde se estudie la acción. Haciendo un análisis más profundo del movimiento de la partícula, se llega a que este lagrangiano debe ser de la forma:

$$L = -mc\sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} \quad (6.4)$$

siendo  $m$  la masa en reposo de la partícula.

Ahora, para describir movimiento de la partícula libre se hace necesario resolver la ecuación Euler-Lagrange, utilizando (6.4):

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}) - \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial}{\partial u^\mu} (-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}) \right] = 0$$

Como la lagrangiana no depende de la posición entonces se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}) = 0$$

y por tanto;

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial}{\partial u^\mu} (-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}) \right] = 0$$

Ahora, desarrollando la derivada interna,

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu} (-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}) = -\frac{mc}{2} (\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu)^{-1/2} (\eta_{\mu\nu}u^\mu + \eta_{\mu\nu}u^\nu)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu} (-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}) = \frac{m}{2} (\eta_{\mu\nu}u^\mu + \eta_{\mu\nu}u^\nu)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu} (-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}) = -m\eta_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau}$$

es decir,

$$\frac{d}{ds} \left( -m\eta_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau} \right) = 0$$

teniendo en cuenta que  $m$  y  $\eta_{\mu\nu}$  son invariantes entonces,

$$\frac{du^\mu}{ds} = 0$$

o sea, la partícula libre se desplaza por el espacio-tiempo con una cuadrivelocidad  $u^\mu$  constante. Hasta ahora, el formalismo covariante concuerda con lo esperado en un sistemas donde no actúan fuerzas, ahora resta comprobar su eficacia mostrando su validez para el caso clásico.



### 6.1.1. Límite de la Acción no Relativista

Para hacer un puente entre las descripciones clásica y relativista del problema, se escoge un marco de referencia  $O$ , describiendo la acción con respecto a las coordenadas de éste, de la forma,

$$I = -mc \int_{\tau_a}^{\tau_b} c d\tau = -mc^2 \int_{\tau_a}^{\tau_b} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

definiendo una nueva función lagrangiana  $L_T(x^i, v^j)$ , que depende ahora de vectores tridimensionales de posición y velocidad, así:

$$L_T = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

es decir, un lagrangiano representado en un espacio euclideo, para el cual se ha definido na métrica  $g_{ij}$  donde  $i, j = 1, 2, 3$ , tal que,

$$L_T = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{g_{ij}v^i v^j}{c^2}}$$

En este caso, el lagrangiano depende únicamente del desplazamiento espacial de la partícula,  $v$ , dando pie para realizar un tratamiento clásico utilizando la aproximación,

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

en donde  $v \ll c$ . Replanteando la acción no relativista, teniendo en cuenta esta condición, toma la forma:

$$I = \int_{t_a}^{t_b} \left( -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \right) dt$$

con un lagrangiano,

$$L_T(x^i, v^i) = \frac{1}{2}mv^2 - mc^2$$

del cual se obtiene la ecuación de movimiento utilizando la expresión Euler-Lagrange,

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

o sea, como es de esperar, su velocidad es constante; concluyéndose entonces que: un tratamiento tensorial del problema de la partícula libre, lleva de una forma natural a las descripciones hechas por métodos clásicos.

### 6.1.2. Momentum-Energía

El momento lineal clásico cuenta con una representación análoga en la mecánica relativista por medio del cuadrivector momentum, el cual relaciona el momento clásico de la partícula con su energía. El comportamiento de este cuadrivector, se estudia partiendo de la acción en términos de  $L_T$ , que cumple con la ecuación:

$$\frac{\partial L_T}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_T}{\partial v^i} \right) = 0 \quad (6.5)$$

Por otro lado, se tiene que la variación de la función lagrangiana con respecto al tiempo es,

$$\frac{dL_T}{dt} = \frac{\partial L_T}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial L_T}{\partial v^i} \frac{dv^i}{dt}$$

teniendo en cuenta la igualdad (6.5),

$$\frac{dL_T}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_T}{\partial v^i} \right) v^i + \frac{\partial L_T}{\partial v^i} \frac{dv^i}{dt}$$

$$\frac{dL_T}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_T}{\partial v^i} v^i \right)$$

y, factorizando los términos,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_T}{\partial v^i} v^i - L_T \right) = 0$$

que implica la existencia de una constante de movimiento, en donde ésta es representada por  $\epsilon$  siendo igual a:

$$\epsilon = \frac{\partial L_T}{\partial v^i} v^i - L_T \quad (6.6)$$

Ahora, teniendo en cuenta que el momentum, a partir de la función lagrangiana, se define como:

$$\frac{\partial L_T}{\partial v^i} = p^i$$

la expresión (6.6) representa el hamiltoniano del sistema, y en este caso la energía total; es decir, los procedimientos hasta aquí realizados cumplen condiciones de conservación de la energía con las que se trabaja habitualmente. Ahora, el momentum escrito de una forma contravariante es,

$$p_i = -\frac{\partial L_T}{\partial v^i}$$

por tratarse de coordenadas meramente espaciales, y al ser reemplazado en  $\epsilon$  se obtiene,

$$\epsilon = p_i v^i - L_T$$

$$\epsilon = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L_T$$

Con lo que se llega a una expresión covariante, independiente del sistema coordenado utilizado, del valor de la energía total del sistema.

El siguiente paso es encontrar cómo se comportan el momentum y la energía de la partícula libre, para ello se aplica  $L_T$ , y se hace los reemplazos necesarios. De este modo, la expresión del momentum es,

$$p_i = -\frac{\partial L_T}{\partial v^i} = mc \frac{\partial}{\partial v^i} \sqrt{1 + \frac{g_{ij} v^i v^j}{c^2}}$$

resolviendo la derivada,

$$p_i = -mc \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{g_{ij} v^i v^j}{c^2}} \right)^{-1/2} g_{ij} v^j$$

y por lo tanto,

$$p_i = -\frac{mv_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

con lo que se concluye entonces que: el momentum lineal de una partícula sobre la cual no actúa fuerza alguna, depende de la masa de la misma y la velocidad con la que se mueva, donde su conservación exige que la la masa de dicha partícula dependa de su movimiento.

Con el valor del momentum dado entonces, la energía total del sistema es:

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{mv_i v^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \sqrt{1 + \frac{g_{ij} v^i v^j}{c^2}} \\ \epsilon &= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v^i + \sqrt{1 + \frac{g_{ij} v^i v^j}{c^2}} \end{aligned}$$

si se suma y se resta el término  $\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  a la expresión anterior se tiene,

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \sqrt{1 + \frac{g_{ij}v^i v^j}{c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \epsilon &= -\frac{m(c^2 - v^2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \sqrt{1 + \frac{g_{ij}v^i v^j}{c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \epsilon &= -\sqrt{1 + \frac{g_{ij}v^i v^j}{c^2}} + \sqrt{1 + \frac{g_{ij}v^i v^j}{c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

con lo que la energía total de la partícula es,

$$\epsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

donde nuevamente, este valor está relacionado con la masa de la partícula, cuyo movimiento afecta directamente. Además, hay presente una energía de la materia que clásicamente no es tenida en cuenta: la energía de la partícula cuando se encuentra en reposo y viene dada por,

$$\epsilon_0 = mc^2$$

Por lo tanto, la energía total de un cuerpo en movimiento está compuesta por su energía de reposo y su energía cinética,

$$\epsilon = \epsilon_0 + E_k$$

entonces, la energía cinética de la partícula es:

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Al hacer el tratamiento en donde  $v \ll c$ , es decir la condición clásica, y utilizando la aproximación binomial,  $E_k$  toma un valor de:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

en conclusión, el tratamiento hasta ahora visto concuerda con los resultados propuestos, y ya comprobados, por la mecánica newtoniana.

## 6.2. Simetrías en Física y Teorema de Noether[12]

El teorema de simetría de Nether juega un papel fundamental en física, puesto que muestra una conexión directa entre simetrías y leyes de conservación, por medio de una notación basada en el formalismo de Lagrange.

En el artículo [12], el estudio de la simetría es realizado por medio de la mecánica lagrangiana; sin embargo, para profundizar en el tema de simetrías en un campo escalar, se hace necesario abordar el problema desde la perspectiva de muchas partículas, en donde la función lagrangiana antes utilizada ya no es conveniente. Se ha de introducir entonces el concepto de densidad lagrangiana, notado por  $\mathcal{L}$ , que brinda información de cómo es la función para un conjunto de partículas interactuando, análogamente como lo haría para una sola. Así, estas partículas deben cumplir con la siguiente acción:

$$I = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) d^4x$$

siendo  $\phi = \phi(x)$  el campo escalar donde se ubica el conjunto de partículas, y  $x$  es un cuadrivector posición. Un requerimiento en relatividad especial es que la densidad lagrangiana, al igual que la función lagrangiana para el caso de una partícula, sea un escalar invariante bajo las transformaciones de Lorentz, asegurando la validez del grupo de Poincaré, es decir, el grupo de transformaciones fundamentales del espacio de Minkowski.

Ahora, al realizar una transformación infinitesimal sobre el sistema, se evidencia una variación tanto en la coordenada de posición como en el campo escalar, tal que:

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x^\mu + \epsilon \eta^\mu(\phi, x) \\ \phi &\rightarrow \phi + \epsilon \psi(\phi, x) \end{aligned}$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro infinitesimal y  $\psi(x, \phi)$ ,  $\eta^\mu(x, \phi)$ , son funciones suaves independientes de las derivadas de campo; se dice que es una transformación de simetría siempre y cuando deje las ecuaciones de movimiento invariantes, es decir, la acción permanece constante. La condición impuesta a la función lagrangiana, para que cumpla la condición de invariancia bajo este tipo de transformaciones, es que cuente con una estructura,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (d_\mu \psi - d_\nu \phi \partial_\mu \eta^\nu) + \partial \mathcal{L} \eta^\mu + \mathcal{L} d_\mu \eta^\mu = d^\mu \sigma^\mu \quad (6.7)$$

la cual no cumple estrictamente la condición de invariancia de la acción, y es modificada con la adición de un término constante: la integral de superficie de  $\sigma$  en el infinito; sin embargo, esta constante no afecta la ecuación Euler-Lagrange.

El teorema de Noether asegura que si dicha condición se cumple existe una corriente conservada  $J$ , y está dada por:

$$J^\mu = \Theta_\nu^\mu \eta^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \psi + \sigma^\mu$$

que satisface:

$$d_\mu J^\mu = 0$$

donde,  $\Theta_\mu^\mu$  es el tensor momentum-energía, definido como:

$$\Theta_n^\mu u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

Entonces, queda la incógnita, dada la densidad lagrangiana ¿cómo derivar las transformaciones de simetría infinitesimal dejando la acción invariante adicionando un término de superficie? Esto se resuelve insertando una densidad lagrangiana en la condición de invariancia, llegando a una ecuación polinomial respecto a las derivadas de campo. De ser necesario se imponen restricciones al campo para concluir con un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales para las funciones de simetría, que no involucran derivadas de campo<sup>1</sup>.

### 6.2.1. Simetrías de Noether para un campo escalar real

El estudio de las simetrías sobre un campo escalar se desarrolla usando las condiciones antes vistas, y la densidad lagrangiana para un campo escalar, dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

que cumple con la ecuación Euler-Lagrange, dando como resultado una expresión de la forma:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

---

<sup>1</sup>La revisión hecha en este documento se hace hasta el planteamiento de la ecuación polinomial, el desarrollo completo está dado en [12]

Ahora, como ya se mencionó, esta función tiene que cumplir con la condición (6.7), por lo tanto, haciendo el debido reemplazo,

$$-m^2\phi\psi + \partial^\mu\phi(d_\mu\psi - \partial_\nu\phi d_\nu\eta^\nu) + \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi^2)d_\nu\eta^\nu = d^\mu\sigma_\mu$$

Haciendo uso de la regla de la cadena, se expresan los diferenciales totales en términos de sus respectivas derivadas parciales, de manera que:

$$\begin{aligned}d_\mu\psi &= \partial_\mu\psi + \frac{\partial\psi}{\partial\phi}\partial_\nu\phi \\d_\mu\eta^\nu &= \partial_\mu\eta^\nu + \frac{\partial\eta^\nu}{\partial\phi}\phi \\d_\mu\sigma_\mu &= \partial_\mu\sigma_\mu + \frac{\partial\sigma_\mu}{\partial\phi}\partial^\mu\phi\end{aligned}$$

llegando a una expresión final de la forma:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\frac{\partial\eta^\nu}{\partial\phi} + \partial^\mu\phi\partial_\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \frac{1}{2}\partial_\nu\eta^\nu\right) - \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi\partial^\mu\eta^\nu + \\ + \partial^\mu\left(\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\frac{\partial\eta_\mu}{\partial\phi}\right) - m^2\phi\psi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\partial^\mu\eta_\mu = \partial^\mu\phi\frac{\partial\sigma_\mu}{\partial\phi} + \partial^\mu\sigma_\mu\end{aligned}$$

Y es así como se realizó el planteamiento del problema en el artículo mencionado, donde su solución se realiza desde este punto con procesos algebraicos. De esta manera, el formalismo tensorial covariante es de gran ayuda al estudiar las simetrías presentes, en este caso un campo escalar, compactando un gran número de ecuaciones en una expresión algebraica cuyo desarrollo ofrece más sencillez en sus cálculos.

### 6.3. Análisis del tensor momentum-energía para una estrella de neutrones [13]

El colapso gravitacional de una estrella supergigante, después de agotar el combustible en su núcleo y explotar como supernova, hace que el núcleo de dicha estrella, al no poder producir más fusión nuclear, se compacte tanto como el empuje gravitacional lo permita, ya que no es contrarrestado por la presión producida por la fusión, generando lo que hoy se conoce como una estrella de neutrones.

A pesar de su pequeño diámetro, las estrellas de neutrones pueden contener hasta 1,5 veces la masa del Sol, por lo que son increíblemente densas, provocando que en el

núcleo de éstas aparezca una serie de nuevos fenómenos físicos, los cuales es posible describirlos a través del estudio de la traza del tensor momentum-energía.

Una de las propiedades de la relatividad general, es que permite el acoplamiento entre los grados de libertad escalares con la traza del tensor momentum-energía por medio de una ecuación de campo típica, que puede ser esquematizada de la forma:

$$\square_g - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = -\alpha(\phi)T$$

donde  $\square_g$  representa el operador de onda covariante, definido en términos de la métrica de Lorentz  $g_{\mu\nu}$  que obedece a alguna versión modificada de ecuación de Einsteins;  $\alpha$  representa una función de acople, y  $V(x)$  representa potencial. El tensor traza  $T$  es denotado como  $T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ , siendo  $T^{\mu\nu} = (2/\sqrt{-g})\delta S_m/\delta g_{\mu\nu}$ , con  $S_m$  denotando la acción para el campo.

Sorprendentemente, la nueva fenomenología que proviene de las teorías escalares donde  $T$  cambia de signo, muestra que en el límite de campos gravitacionales débiles se producen resultados muy próximos a los que se obtienen a través de la teoría de la relatividad general, facilitando su uso en el estudio de estrellas de neutrones donde  $T$  asume valores positivos en el interior de este tipo de estrellas. Estos efectos, que incluyen la aproximación espontanea de las estrellas de neutrones a agujeros negros, podrían identificarse a través de cicatrices o marcas, detectables a través de ondas electromagnéticas y ondas gravitacionales, suministrando pruebas contundentes del buen aporte de estas teorías al interior de las estrellas de neutrones.

Así mismo, este tipo de investigación en estrellas de neutrones, basadas en las teorías escalares de tensores, permite determinar predicciones de una rica fenomenología para estos objetos cuando  $T$  se vuelve positivo en la región interna de las estrellas, generando modelos que relacionan las características microscópicas que dependen de las densidades supernucleares y aspectos macroscópicos que pueden ser estudiados u observados de manera elemental.

Las estrellas, debido a su alta cantidad de energía, admiten un modelamiento de fluido perfecto. Ahora bien, un fluido de este tipo con densidad de energía  $\epsilon$  y presión  $p$ , desde su propio marco de referencia, y una cuadrivelocidad  $u^\mu$  para sus componentes, cuenta con un tensor momentum-energía dado por:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}$$

el cual tiene una traza de la forma:

$$T = 3p - \epsilon$$



Para el campo electromagnético y para un sistema de partículas que no interactúan, se mantiene la relación  $3p < \epsilon$ , y a veces se asume que se mantiene en toda la generalidad. Sin embargo, las teorías causales relativistas invariantes que describen sistemas que interactúan fuertemente, pueden mostrar la propiedad  $3p > \epsilon$ , encontrada en el interior de una estrella de neutrones. Con esto se plantea un método del estudio de las propiedades de estas estrellas, posibilitando la descripción de efectos macroscópicos los cuales pueden ser verificados por las huellas que dejan en forma de ondas electromagnéticas y gravitacionales. En este caso, el formalismo tensorial no solo permite una forma reducida de analizar ecuaciones, sino que da pie a un método para desarrollos matemáticos y físicos partiendo de las propiedades que lleva implícita la traza de ciertos tensores.

## 6.4. Respuesta electromagnética de un gas de Fermi relativista [14]

El conocimiento de cómo los materiales responden a las perturbaciones electromagnéticas, junto con la ingeniería a nanoescala, ha llevado a la construcción de dispositivos personalizados diseñados para exhibir propiedades muy específicas, por lo cual es fundamental para una gran cantidad de aplicaciones científicas y tecnológicas. En particular en nanofotónica o en lo que actualmente se conoce como metamateriales, juega un papel muy importante la respuesta electromagnética a temperaturas finitas y el formalismo de la relatividad es relevante debido a la manipulación de campos eléctricos y magnéticos en términos relativísticos.

En este caso, se describe, mediante un formalismo tensorial relativista, el comportamiento de un gas de electrones a temperaturas finitas, en su límite no relativista, para describir electrones casi libres en sistemas de materia condensada, en los cuales ya se dispone de resultados experimentales. En particular, se ha comparado la dependencia de la temperatura y el vector de onda de los valores experimentales de las frecuencias eléctricas de plasmón para el grafito y el óxido de estaño con las predicciones del presente estudio. Desafortunadamente, todavía no se puede probar el comportamiento equivalente en el caso magnético en el régimen no relativista.

Dicho estudio se realiza a partir de las relaciones que constituyen el campo electromagnético en un gas de Fermi relativista a temperaturas finitas, las cuales son dadas

por:

$$D^j = \varepsilon^{jk} E^k + \tau^{jk} c B^k$$

$$H^j = (\mu^{-1})^{jk} B^k + \sigma^{jk} \frac{E^k}{c}$$

Las permitividades,  $\mu$  y  $\sigma$ ; y permeabilidades,  $\varepsilon$  y  $\tau$ , electromagnéticas generalizadas, que resultan de una corrección de primer orden en la constante de estructura fina, se introducen a través de relaciones constitutivas generales en el espacio recíproco y se calculan para diferentes valores de la densidad y temperatura del gas. De manera que:

$$\varepsilon^{jk} = \varepsilon \delta^{jk} + \varepsilon' \hat{q}^j \hat{q}^k$$

$$(\mu^{-1})^{jk} = \mu^{-1} \delta^{jk} + \mu'^{-1} \hat{q}^j \hat{q}^k$$

$$\tau^{jk} = \tau \epsilon^{jkl} \hat{q}^l$$

$$\sigma^{jk} = \sigma \epsilon^{jkl} \hat{q}^l$$

donde  $\delta^{jk}$  es el delta de Kronecker,  $\epsilon^{jkl}$  es el tensor Levi-Civita, y  $\hat{q} = q^j/q$  con  $q = |\mathbf{q}|$ .

Los resultados obtenidos en los límites de bajas temperaturas y bajas densidades de portadores se utilizaron para estudiar el comportamiento de la energía del plasmón eléctrico, en función de la temperatura y el vector de onda. La energía del plasmón se calculó a partir de la permitividad eléctrica, haciendo uso de un formalismo tensorial, dando buena concordancia con las mediciones experimentales previas en dichos sistemas. Con lo cual se concluye que el potencial del formalismo de la relatividad especial es de gran valor en los resultados teóricos actuales, adquiriendo importancia en aplicaciones de materia condensada que involucran plasmónica y fotónica.

## 6.5. Dispositivos GPS, corrección en el flujo de tiempo

Uno de los efectos predichos por la teoría especial de la relatividad es la falta de sincronización presente en un par de relojes que se mueven, con una velocidad constante, alrededor del mundo.

Un par de relojes, el primero ubicado en un marco de referencia  $O$  que se encuentra en reposo con respecto a la superficie del planeta, y el segundo pertenece a un marco  $O'$  que se desplaza con una velocidad  $u$  con respecto a  $O$ , como lo muestra (6.1).

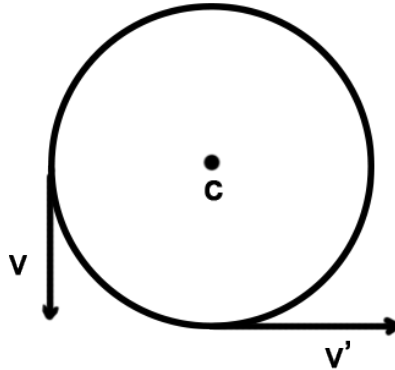


Figura 6.1: Marco 1

Desde el centro de la Tierra  $C$ , un observador en  $O$  se mueve con una velocidad  $v$ , mientras alguien en  $O'$  tiene una velocidad de:

$$v' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

por lo tanto, los sistemas de referencia  $C$  y  $O'$ , están relacionados por medio de las transformaciones de Lorentz utilizando un valor para  $\gamma$  de la forma:

$$\gamma_{v'} = \left( 1 - \frac{(u + v)^2}{c^2} \left( 1 + \frac{cv}{c^2} \right)^{-2} \right)^{-1/2}$$

Este mismo análisis es aplicado a  $O$ , haciendo una rotación al sistema como lo muestra (6.2), donde la simetría de las leyes de la naturaleza garantiza la validez de este procedimiento. En este caso se usa un valor de  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De acuerdo al transcurso del paso del tiempo en  $C$ , es posible encontrar como es el comportamiento de este mismo en  $O$  y  $O'$ , haciendo uso del concepto de tiempo propio de un sistema; con lo cual, para  $O$  viene dado por:

$$t = t_c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

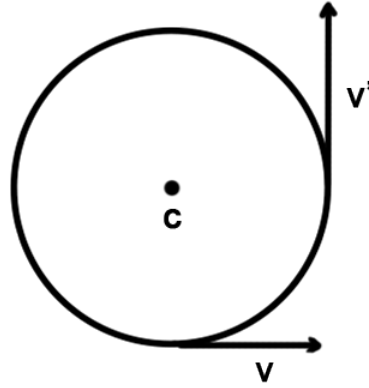


Figura 6.2: Marco 2

y en el caso de  $O'$  es:

$$t' = t_c \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

$$t' = t_c \left( 1 - \frac{(u+v)^2}{c^2} \left( 1 + \frac{cv}{c^2} \right)^{-2} \right)^{1/2}$$

con lo que se llega a una relación directa entre el flujo de tiempos para los marcos de referencia,  $O$  y  $O'$ , de manera que:

$$\frac{t'}{t} = \frac{t_c \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}{t_c \left( 1 - \frac{(u+v)^2}{c^2} \left( 1 + \frac{cv}{c^2} \right)^{-2} \right)^{1/2}}$$

$$\frac{t'}{t} = \left( 1 - \frac{(u+v)^2}{c^2} \left( 1 + \frac{uv}{c^2} \right)^{-2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

en donde, suponiendo que:  $c \gg u$  y  $c \gg v$ ; se puede hacer la siguiente aproximación:

$$\frac{t'}{t} \approx \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{(u+v)^2}{c^2} \right) \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

$$\frac{t'}{t} \approx 1 - \frac{u^2}{2c^2} - \frac{uv}{c^2} = 1 - \frac{uv}{c^2} \left( 1 + \frac{u}{2v} \right)$$

y por tanto,

$$t' \approx \left[ 1 - \frac{uv}{c^2} \left( 1 + \frac{u}{2v} \right) \right] t$$

mostrando una mayor dilatación del tiempo para el marco de referencia que se mueve respecto a la superficie del planeta.

Desde el punto de vista de  $O$ , un observador situado en  $O'$  va una vuelta entera al mundo en un tiempo  $T$  igual a:

$$T = \frac{2\pi R_E}{u} \quad (6.8)$$

siendo  $R_E$  el radio ecuatorial de la Tierra, mientras desde  $O'$  el reloj marca cierto tiempo  $T'$ . Entonces, la diferencia entre estos dos tiempos es dada por:

$$\Delta T = T' - T$$

pero,

$$T' \approx \left[ 1 - \frac{uv}{c^2} \left( 1 + \frac{u}{2v} \right) \right] T$$

por tanto,

$$\Delta T = \left[ 1 - \frac{uv}{c^2} \left( 1 + \frac{u}{2v} \right) \right] T - T$$

$$\Delta T = -\frac{uv}{c^2} \left( 1 + \frac{u}{2v} \right) T$$

y, suponiendo que la velocidad del reloj es mucho menor al movimiento de la superficie terrestre,  $u \ll v$ , entonces:

$$\Delta T \approx -\frac{uv}{c^2} T$$

Desde el marco de referencia  $C$ , la velocidad  $v$  es dada por:

$$v = \frac{2\pi R_E}{T_E}$$

siendo  $T_E$  es periodo de rotación del planeta. Con ello,

$$\Delta T \approx -\frac{2\pi R_E}{c^2 T_E} u T$$

Despejando de la expresión (6.8), se tiene que:

$$u T = 2\pi R_E$$

con lo que finalmente se llega a la expresión:

$$\Delta T \approx -\frac{(2\pi R_E)^2}{c^2 T_E}$$
$$\Delta T \approx -207nm$$

que a pesar de ser un tiempo bastante pequeño, es fácilmente medible con relojes de alta precisión. En conclusión, dos relojes que se desplazan alrededor del mundo con diferentes velocidades, presentan una diferencia en su flujo de tiempo; por lo tanto, es necesario hacer las debidas correcciones en dispositivos tales como los utilizados para la ubicación GPS, de lo contrario existen errores debidos a la mala calibración del instrumento.

# Apéndice A. Desigualdad de Schwarz

## A.1. Desigualdad de Schwarz en un espacio tridimensional

Sean un par de vectores  $x$  e  $y \in R^3$ , entonces:

$$|(x \cdot y)|^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y)$$

esto es válido únicamente en un espacio euclidiano. Además, la igualdad se cumple únicamente si los vectores son múltiplos escalares entre sí, en otros términos,  $y = \lambda x$ . Ahora, en términos de una notación relativista, esta desigualdad de nota como:

$$|x^a y^a|^2 \leq (x^a x^a)(y^b y^b)$$

con  $a, b = 1, 2, 3$ .<sup>1</sup>

### Demostración

En el caso de trabajar con el vector nulo, se tiene una solución trivial de esta ecuación. Ahora, suponiendo que  $x^a x^a > 0$  y un  $\lambda \in R$  se tiene que un vector de la forma  $v = \lambda x^a + y^a$  cumple:

$$(\lambda x^a + y^a)(\lambda x^a + y^a) = \lambda^2 x^a x^a + y^a y^a + 2\lambda x^a y^a \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

tomando un valor particular para  $\lambda$  igual a: cumple:

$$-\frac{(x^a y^a)}{x^c x^c}$$

y reemplazando en (A.1), se llega a:

$$-\frac{(x^a y^a)^2 + (x^a x^a)(y^b y^b)}{x^c x^c} \geq 0$$

lo que es lo mismo,

$$(x^a x^a)(y^b y^b) \geq (x^a y^a)^2$$

---

<sup>1</sup>[15]

# Bibliografía

- [1] R.Ferraro. *Einstein's Space-time An Introduction to Special and General Relativity*. Springer Science, 2007.
- [2] R. D'Auria. *From Special Relativity to Feynman Diagrams*. Springer Science, 2012
- [3] P. Hewitt. *Física Conceptual*. Pearson Education, 2007
- [4] K. Thorne, *Agujeros Negros y Tiempo Curvo*. Crítica, 1994
- [5] E.Loedel, *Física Relativista*. Kapelusz, 1955
- [6] M.Robinson, *Symetry and the Standard Model Mathematics and Particle Physics*. Springer, 2011
- [7] Y.S.Kim, E. Noz *Group Theory in Physics*. Springer, 2011
- [8] J.F.Cornwell, *Theory and Applications of the Poincaré Group*. Springer, 2011
- [9] L.de la Torre, *Elementos de Relatividad*. Universidad de Antioquia, 2008
- [10] C. González Rodríguez, *Introducción al Cálculo Tensorial*. Universidad Nacional de Colombia, 1978
- [11] M. Dalarsson, *Tensors, Relativity and Cosmology*. Universidad Nacional de Colombia, 1978
- [12] F. Haas *Systematic Derivation of Noether Point Symmetries in Special Relativistic Field Theories*.
- [13] D. Podkowka, R. Mendesy, Eric Poissonz *Trace of the Energy-Momentum Tensor and Macroscopic Properties of Neutron Stars*.
- [14] E. Reyes-Gómez, L. E. Oliveira, C. A. A. de Carvalho *The Electromagnetic Response of a Relativistic Fermi Gas at Finite Temperatures: Applications to Condensed-Matter Systems*



- [15] Anadijiban Das *The Theory of Relativity: A Mathematical Exposition* University of Calicut, 1993