

**Beneficios del Análisis del Tiempo de Espera
en Fila General o Preferencial para el
Acueducto y Alcantarillado de Popayán S.A.
E.S.P.**

Investigadores
Jhinner Alejandro Patiño Pasquel
Gustavo Adolfo López Muñoz

Director:
Esp. Julián Andrés Zúñiga

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
Facultad de Ciencias Contables, Económicas y Administrativas
Departamento de Ciencias Administrativas

Popayán, Julio del 2018

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO I ASPECTOS INICIALES DE LA INVESTIGACIÓN	10
1.1. Planteamiento del problema.....	10
1.1.1. Marco contextual	10
1.1.2. Formulación del problema	11
1.1.3. Justificación	11
1.2. Objetivos	14
1.2.1. Objetivo general.....	14
1.2.2. Objetivos específicos	14
1.3. Análisis del tamaño de la muestra.....	15
1.4. Metodología	16
CAPÍTULO II CARACTERIZACIÓN DE LA EMPRESA EN ESTUDIO PARA APLICAR EL MODELO DE COLAS	17
2.1 Descripción de la empresa	17
2.1.1 Funcionamiento de la división de tesorería con respecto a los clientes	18
2.1.2 Estructura del modelo de cola para la empresa	18
2.1.3 Caracterización del contexto circunstancial en el sistema	19
2.2 Modelo de investigación	19
CAPÍTULO III MARCO TEÓRICO.....	20
3.1 Teoría de colas	20
3.1.1 Estructura de un modelo de colas	20
3.1.1.1 Elementos de un sistema de colas	21
3.1.1.2 Proceso de llegada.....	22
3.1.1.3 Proceso de línea o cola.....	22
3.1.1.4 Proceso de servicio	22
3.1.2 Notación utilizada para los modelos de colas	23
3.1.3 Tipos de estados del sistema	25
3.1.3.1 Estado estable.....	25
3.1.3.2 Estado transitorio	26
3.1.4 Medidas de desempeño de estado estable	26
3.1.5 Relaciones entre L, W, W_q, L_q	26
3.2 Modelo de cola M/M/s.....	27
CAPÍTULO IV ANÁLISIS DE RESULTADOS	30
4.1 Recolección de datos relacionados con los tiempos de espera y de atención	30
4.2 Análisis exploratorio estadístico de los tiempos de espera y atención al usuario	36

4.2.1	Prueba Kruskal Wallis	36
4.2.1.1	Análisis de los tiempos entre llegadas	37
4.2.1.2	Análisis de tiempo de servicio	39
4.2.1.3	Análisis de los tiempos entre llegada por intervalos	41
4.2.2	Prueba de bondad de ajuste por frecuencias esperadas mediante la distribución Chi-cuadrado	43
4.2.2.1	Análisis de los tiempos entre llegada por semanas	44
4.2.2.2	Análisis de los tiempos de servicio	47
4.3	Determinación de los parámetros necesarios para utilizar el modelo de teoría de colas y variables de salida de interés.....	49
4.3.1	Parámetros de tasas por cada semana.....	49
4.3.2	Parámetros por cada semana en estado estable	50
4.4	Aplicación del criterio de aceptación que permite obtener la elección del número óptimo de cajeros que atenderán al usuario	53
4.4.1	Parámetros de optimización de servidores por semana.....	53
4.4.2	Parámetros de optimización de servidores por intervalo	56
4.5	Calibración	58
4.6	Comparación de la distribución de servidores de acuerdo a lo propuesto por la empresa y los resultados optimizados	60
4.6.1	Análisis de distribución de servidores por semana	61
4.6.2	Análisis de distribución de servidores por intervalos de tiempo respecto a cada día de la semana	62
CAPÍTULO V CONCLUSIONES		66
CAPÍTULO VI ESTRATEGIAS DE CONTINUIDAD DEL PROYECTO.....		68
BIBLIOGRAFÍA.....		71

TABLAS

Tabla 1	Factores de la prueba Kruskal Wallis	37
Tabla 2	Tiempo entre llegadas (s) semana 1	38
Tabla 3	Datos para el cálculo de H semana 1. Tiempo entre llegadas.....	38
Tabla 4	Resumen de la comparación entre el estadístico H y el valor crítico $\chi^2_{(0.05,3)} = 7.81$. Para tiempos entre llegadas.....	39
Tabla 5	Tiempo de servicio semana 1	39
Tabla 6	Datos para el cálculo de H semana 1. Tiempo de servicio	40
Tabla 7	Resumen de la comparación entre el estadístico H y el valor crítico $\chi^2_{(0.05,3)} = 7.81$. Para tiempos de servicio	40

Tabla 8 Tiempo entre llegadas (s) Intervalo I.....	41
Tabla 9 Datos para el cálculo de H Intervalo I. Tiempo entre llegadas	42
Tabla 10 Resumen de la comparación entre el estadístico H y el valor crítico $\chi^2_{(0.05,4)} = 9.48$. Para tiempos entre llegadas por intervalos.....	43
Tabla 11 Parámetros para determinar el estadístico de prueba Chi-cuadrado. Día martes semana 1 ...	46
Tabla 12 Resumen de la comparación entre el estadístico χ^2 y el valor crítico $\chi^2_{(0.05,9)} = 16.919$. Para tiempos entre llegadas.....	47
Tabla 13 Resumen de la comparación entre el estadístico χ^2 y el valor crítico $\chi^2_{(0.05,9)} = 16.919$. Para tiempos de servicio	48
Tabla 14 Tasa del modelo M/M/s para cada una de las semana en observación	49
Tabla 15 Análisis de los parámetros W, L, W_q, L_q de acuerdo al número de servidores considerando la semana 1	50
Tabla 16 Análisis de los parámetros W, L, W_q, L_q de acuerdo al número de servidores considerando la semana 2	51
Tabla 17 Análisis de los parámetros W, L, W_q, L_q de acuerdo al número de servidores considerando la semana 3	51
Tabla 18 Análisis de los parámetros W, L, W_q, L_q de acuerdo al número de servidores considerando la semana 4	52
Tabla 19 Análisis de los parámetros W, L, W_q, L_q de acuerdo al número de servidores considerando la semana 5	52
Tabla 20 Parámetros de optimización para la semana 1	53
Tabla 21 Parámetros de optimización para la semana 2	53
Tabla 22 Parámetros de optimización para la semana 3	54
Tabla 23 Parámetros de optimización para la semana 4	54
Tabla 24 Parámetros de optimización para la semana 5	54
Tabla 25 Casos especiales en W	55
Tabla 26 Distribución de servidores considerando la semana y el tiempo de trabajo.....	55
Tabla 27 Parámetros de optimización para el intervalo I.....	56
Tabla 28 Parámetros de optimización para el intervalo II	56
Tabla 29 Parámetros de optimización para el intervalo III	56
Tabla 30 Parámetros de optimización para el intervalo IV.....	56
Tabla 31 Distribución de servidores considerando el intervalo y el tiempo de trabajo	57
Tabla 32 Consolidado por intervalos	57
Tabla 33 Tiempos de calibración.....	59
Tabla 34 Tiempo de calibración por estación	60
Tabla 35 Distribución de servidores semana 1	61
Tabla 36 Distribución de servidores semana 2	61
Tabla 37 Distribución de servidores semana 3	61
Tabla 38 Distribución de servidores semana 4	62
Tabla 39 Distribución de servidores semana 5	62
Tabla 40 Distribución de servidores día lunes	62
Tabla 41 Distribución de servidores día martes.....	63
Tabla 42 Distribución de servidores día miércoles	63
Tabla 43 Distribución de servidores día jueves	63
Tabla 44 Distribución de servidores día viernes.....	64

FIGURAS

Figura 1 Proceso básico de cola.....	21
Figura 2 Sistema de colas de un paso	21
Figura 3 Red de colas.....	22
Figura 4 Diagrama de transición del modelo M/M/s	28
Figura 5 Recopilación de datos en C Sharp 1	32
Figura 6 Descripción del usuario C Sharp	33
Figura 7 Recopilación de datos en C Sharp 2	33
Figura 8 Selección del comercial en C Sharp	34
Figura 9 Recopilación de datos en C Sharp 3	34
Figura 10 Recopilación de datos en C Sharp 4	35
Figura 11 Recopilación de datos en Excel	35
Figura 12 Fluctuación del tiempo entre llegadas semana 1	37
Figura 13 Fluctuación del tiempo entre servicios semana 1	39
Figura 14 Fluctuación del tiempo entre llegadas intervalo I.....	41
Figura 15 Sectores de errores en tramos por aproximar el agrupamiento de datos en distribución de probabilidad exponencial negativa.....	44
Figura 16 Distrucion de probabilidad para el tiempo entre llegadas día martes de la semana 1	45
Figura 17 Distrucion de probabilidad para el tiempo de servicio día martes de la semana 1	47
Figura 18 Medidas en metros de la configuración en culebra (fila general de la entidad)	58
Figura 19 Estaciones calibradas en la fila general de la entidad.....	60
Figura 20 Comparación de resultados del factor de ocupación para cada una de las semanas con dos y tres servidores.	64
Figura 21 Comparación de resultados de la probabilidad de vacío para cada una de las semanas con dos y tres servidores.....	65

INDICE DE ANEXOS

Anexo. A Procesos Estocásticos	73
Anexo. B Cadenas de Markov	73
Anexo. C Proceso de nacimiento y muerte	74
C-1 Analisis del proceso de nacimiento y muerte.....	75
Anexo. D Ecuaciones de balance.....	76
D-1 Tabla D 1 Ecuaciones de balance	77
D-2 Tabla D2 Ecuaciones de Balance (Despeje).....	77
Anexo. E. Modelos de colas con distribuciones no exponenciales	78
E-1 Modelo M/G/1.....	78
E-2 Modelo M/D/s	78
E-3 Modelo M/E _k /s	78
Anexo. F Tratamiento Estadístico.....	78
F-1 Prueba de hipótesis.....	78
F-2 Errores en las pruebas de hipótesis.....	79
F-3 Pruebas no paramétricas	79
F-4 Prueba de bondad de ajuste mediante la distribución Chi-cuadrado	79
F-5 Prueba H de Kruskal Wallis	80
F-5.1 Análisis de los tiempos ente llegada	81

Figura F1	81
Tabla F-1 Tiempo entre llegada semana 2	81
Tabla F-2 Datos para el cálculo de los tiempos entre llegadas semana 2	81
Figura F2	82
Tabla F-3 Tiempo entre llegadas semana 3	82
Tabla F-4 Datos para el cálculo de los tiempos entre llegadas semana 3	82
Figura F3	83
Tabla F-5 Tiempos entre llegadas semana 4	83
Tabla F-6 Datos para el cálculo de los tiempos entre llegadas semana 4	83
Figura F4	84
Tabla F-7 Tiempos entre llegada semana 5	84
Tabla F-8 Datos para el cálculo de los tiempos entre llegadas semana 5	84
F-5.2 Análisis de tiempo de servicio	85
Figura F5	85
Tabla F-9 Tiempos de servicio semana 2	85
Tabla F-10 Datos para el cálculo de los tiempos de servicio semana 2	85
Figura F6	86
Tabla F-11 Tiempos de servicio semana 3	86
Tabla F-12 Datos para el cálculo de los tiempos de servicio semana 3	86
Figura F7	87
Tabla F-13 Tiempos de servicio semana 4	87
Tabla F-14 Datos para el cálculo de los tiempos de servicio semana 4	87
Figura F8	88
Tabla F-15 Tiempo de servicio semana 5	88
Tabla F-16 Datos para el cálculo de los tiempos de servicio semana 5	88
F-5.3 Análisis de los tiempos entre llegada por intervalos	89
Figura F9	89
Tabla F-17 Tiempo entre llegada Intervalo II	89
Tabla F-18 Datos para el cálculo de los tiempos entre llegada Intervalo II	89
Figura F 10	90
Tabla F-19 Tiempo entre llegada Intervalo III	90
Tabla F-20 Datos para el cálculo de los tiempos entre llegada Intervalo III	90
Figura F11	91
Tabla F-21 Tiempo entre llegada intervalo IV	91
Tabla F-22 Datos para el cálculo de los tiempos entre llegada Intervalo IV	91
Anexo. G Parámetros de diseño	92
Tabla G-1 Parámetros de diseño con 2 servidores semana 1	92
Tabla G-2 Parámetros de diseño con 2 servidores semana 1	93
Tabla G-3 Parámetros de diseño con 3 servidores semana 2	93
Tabla G-4 Parámetros de diseño con 2 servidores semana 2	94
Tabla G-5 Parámetros de diseño con 3 servidores semana 3	94
Tabla G-6 Parámetros de diseño con 2 servidores semana 3	95
Tabla G-7 Parámetros de diseño con 3 servidores semana 4	95
Tabla G-8 Parámetros de diseño con 2 servidores semana 4	96
Tabla G-9 Parámetros de diseño con 3 servidores semana 5	96
Tabla G-10 Parámetros de diseño con 2 servidores semana 5	97

RESUMEN

Los ciudadanos son cada vez más conscientes del valor del tiempo, por lo que les irrita verse obligados a esperar para obtener un producto o un servicio, sin importar de que se trate, todos los clientes son reticentes a hacer filas o colas. La presente investigación tuvo como objetivo disminuir la molestia anteriormente descrita, teniendo en cuenta que para toda entidad prestadora de servicio la variable “clientes satisfechos” es fundamental a la hora de brindar los productos y servicios, máxime cuando se trata de productos intangibles, donde el ambiente que circunda la entrega del producto o servicio es lo que permite generar el valor agregado. De manera más específica, con la investigación se buscó el aprovechamiento del tiempo de espera en fila general para la entidad prestadora de servicio Acueducto y Alcantarillado S.A. E.S.P. de Popayán mediante el uso adecuado del modelo matemático M/M/s (tiempos de llegada y de servicio tipo exponencial o Markoviano con s servidores atendiendo) y las medidas de desempeño de estado estable: cantidad esperada de usuarios en el sistema (L), cantidad esperada de usuarios en la cola (L_q), tiempo de espera en el sistema para cada usuario (W), tiempo de espera en la cola para cada cliente (W_q) que ofrece la teoría de colas o de líneas de espera. Para esto, inicialmente se realizó una toma de datos (tiempos de llegada y de servicio) en la entidad prestadora de servicios, se continuó con la aplicación de un conjunto de herramientas estadísticas (Kruskal Wallis y Chi-cuadrado) que permitieron estudiar y comprender el comportamiento de estos datos, con esto se logró usar el modelo y las medidas de desempeño de teoría de colas obteniendo así información del sistema de espera de la entidad prestadora de servicio.

Con la utilización adecuada de esta teoría, la investigación generó un efecto positivo, dado que con el uso de esta se determinó el número óptimo de servidores, lo que permite dar lugar a recesos (descanso), en aquellos casos en los cuales son requeridos dos (2) de ellos, por tal caso se analizó este ítem en el presente trabajo y dio como resultado que el 70,23% de los intervalos cumplen con esta condición, por lo cual se recomienda a la entidad dar tiempos de descansos a los servidores en estos casos, debido que este es un factor de gestión de seguridad y salud en el trabajo altamente importante para la salud física y mental del empleado. Otro resultado importante tiene que ver con la calibración (Cal) de la línea de espera (marcación de tiempo desde distintas posiciones de la fila), en la cual se determinaron 5 estaciones, las cuales dan al usuario el conocimiento de cuál es el tiempo que deberá pasar en la fila, aspecto fundamental debido a que cada persona que llegue a ella podrá decidir si permanecer o no en ella dependiendo del tiempo con el que cuente, además este proceso optimiza el espacio físico en el cual se concentra la fila de espera, dando lugar a una vista más agradable del establecimiento (específicamente en el sistema de espera) tanto para el cliente externo (usuario) como para el interno (servidor). La muestra analizada comprendió 10,080 observaciones, que se dividieron en 84 intervalos, además se tuvo en cuenta la distancia en metros de la fila como factor importante a la hora de hacer los cálculos de la calibración (Cal) y por último se debe anotar que la toma de los datos tuvo una duración de un mes.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo está motivado por una urgente necesidad del ámbito empresarial en la gestión de la prestación del servicio en entidades de servicio público, específicamente en dos aspectos relacionados con el sistema de espera, la satisfacción del usuario y la gestión de seguridad y salud en el trabajo. La característica principal que se maneja en torno a esta investigación es el uso del modelo matemático M/M/s de la teoría de colas y sus parámetros de diseño L, L_q, W, W_q , modelo que surge con el propósito de estudiar el sistema de espera para optimizarlo.

El interés por estudiar la satisfacción del usuario en el contexto de la teoría de colas surgió al observar el sistema de espera del Acueducto y Alcantarillado S.A. E.S.P, en este se notó que la fluctuación de usuarios es demasiado alta, lo que hace incurrir a largas y molestas filas que hacen ver la entidad un lugar al cual no quisiesen visitar, es decir este aspecto al no ser gestionado adecuadamente termina afectando la imagen corporativa de la entidad; por otro lado la causa o motivo del estudio de la gestión de seguridad y salud en el trabajo del servidor nació al observar la repetida y sostenida atención al usuario que este enfrenta en su día a día, lo que genera desgaste tanto físico como psicológico en él.

Con el propósito de estudiar y dar una solución a esta problemática que envuelve el sistema de espera en este tipo de entidades, la investigación fue estructurada en seis capítulos; en el capítulo I se presenta temas bases para la investigación como lo es el marco contextual, la formulación del problema, justificación además de los objetivos que tiene como fin la investigación; en el capítulo II se detallan los aspectos relacionados a la entidad prestadora de servicio público a la cual se realiza la investigación como lo es la descripción de la empresa tanto organizacionalmente como en cuanto a su sistema de espera además del modelo de investigación utilizado; en el capítulo III se exhibe el marco teórico en donde se encuentran temas y herramientas necesarias para poder abordar los objetivos de esta investigación, estas son: teoría de colas con su respectiva estructura (población de clientes, proceso de llegada, proceso de línea y proceso de servicio) además de su notación (Kendall), también se muestra en el capítulo las condiciones de estado estable y con ella las medidas de desempeño del estado en mención, necesarias para conocer el comportamiento del sistema de espera y proponer mejoras; finalizando el capítulo se presenta el modelo matemático M/M/s a emplear en el sistema de espera; en el capítulo IV se presenta los resultados de la investigación los cuales se dividen en seis partes, la primera parte consiste en los resultados de la recolección de datos relacionados con los tiempos de espera y de atención del usuario, la segunda parte del capítulo muestra el análisis exploratorio estadístico de los tiempos de espera y atención al usuario con ayuda de las pruebas Kruskal Wallis y bondad de ajuste Chi-cuadrado, en la tercera parte del capítulo se exhiben los resultados de los parámetros necesarios para utilizar el modelo de teoría de colas y las variables de salida de interés, la cuarta parte del capítulo muestra los resultados de la aplicación del criterio de aceptación que permitió elegir el número óptimo de cajeros que atenderán al usuario, en la quinta parte del capítulo se presenta los resultados de la calibración de la fila general del sistema de espera de la entidad y por último en la sexta parte se exhibe una comparación de la distribución de servidores de acuerdo a lo propuesto por la empresa y

los resultados optimizados; en el capítulo V de la investigación se expone las conclusiones relevantes de la toda la investigación; finalmente en el capítulo VI se presenta las estrategias de continuidad del proyecto, es decir los futuros trabajos que pueden ser realizados con base a la presente investigación.

CAPÍTULO I

ASPECTOS INICIALES DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo está dedicado a ser un insumo de gran valor para el resto del documento, en él se trabajan aspectos introductorios como el marco contextual (antecedentes), la formulación del problema su justificación y los objetivo que tiene como fin la investigación.

1.1. Planteamiento del problema

1.1.1. Marco contextual

El presente trabajo al ser realizado bajo la temática de la teoría de colas busca dar un mayor entendimiento del funcionamiento de los sistemas de espera en las entidades de servicio como es el caso del Acueducto y Alcantarillado de Popayán S.A. E.S.P., para eso se deben tener claro varios aspectos de la teoría, esto con el objetivo de generar un modelo en el cual se tenga un mejor aprovechamiento de los recursos físicos y humanos en este tipo de organizaciones. Es necesario entonces buscar diferentes fuentes bibliográficas las cuales nutran el contenido del trabajo, por tal razón se realizó una exploración por diferentes medios como lo son el físico y el virtual en donde se encontraron trabajos entre artículos y tesis de grados, los cuales enseñan a través de sus experiencias los diferentes aspectos que se deben tener en cuenta para realizar una investigación sobre el tema que se quiere abordar.

Para empezar se examinó la tesis llamada "Análisis estadístico mediante la teoría de colas para determinar la satisfacción del paciente atendido en el departamento de admisiones del hospital provincial general docente de Riobamba" realizada por (Cazorla Huaraca, 2014) a partir de la cual se obtienen importantes aportes que se basan en la aplicación de la teoría de colas para encontrar el modelo exacto que se debe utilizar en el proceso de prestar un servicio y así mejorar la satisfacción del cliente, esta es una contribución vital debido a que con este modelo se genera un mejor aprovechamiento de los recursos tanto físicos como humanos por parte de la entidad, además de ser una herramienta valiosa a la hora de tomar de decisiones dentro de la organización. Siguiendo esta línea se encontró un artículo llamado "Aplicación de teoría de colas en una entidad financiera: herramienta para el mejoramiento de los procesos de atención al cliente" de (Gomez Jimenez, 2008) en el cual los modelos cuantitativos aplicados son muy adecuados como soporte para la toma de decisiones, ayudando al mejoramiento de los procesos de atención al cliente. De este modo esta herramienta se convierte en una vía para la obtención de ventajas competitivas de empresas prestadoras de servicios, donde el ambiente que rodea la entrega del producto es el que genera el valor agregado que perciben los clientes. Además, se demuestra que las colas que se presentan en el transcurso de los procesos de atención al usuario, indudablemente tienen un modus operandi dependiendo de los días y las horas en que ocurre el evento. Teniendo en cuenta esto, es deber de las empresas obtener el modelo de dicho comportamiento para adecuar su sistema de atención. En el caso de omitir dicha información, las empresas desperdician recursos valiosos, cabe destacar que en varias entidades de Popayán donde se atiende clientes no se han hecho estudios de análisis de tiempos de espera de su fila general lo cual probablemente disminuye su eficiencia global. Además de estas fuentes se

consultaron los trabajos de (Gonzalez Vera, 2012-2013) y (Martinez Erazo, 2009) basados en la misma temática los cuales serán muy útiles en el momento de realizar la parte metodológica de la investigación.

1.1.2. Formulación del problema

Tras analizar el comportamiento y el desempeño de la línea de espera en procesos de servicio, se plantea en este trabajo: ¿Cómo optimizar el sistema de espera de la entidad prestadora de servicio mediante la aplicación de teoría de colas? Esto, con el propósito de medir el tiempo de atención al usuario, predecir el comportamiento de la demanda, así como optimizar el espacio físico del sistema permitiendo el aumento de la satisfacción del cliente y de los servidores gracias a los tiempos de descanso dirigidos a estos últimos que serían programados con ayuda de la teoría y el departamento de talento humano.

1.1.3. Justificación

El sector servicios en Colombia es un pilar fundamental de la actividad económica, lo cual se evidencia en ser sector que compuso el 57,5% del PIB nacional Colombiano para el año 2015¹. Lo anterior permite aseverar que el sector cuenta con un gran potencial de crecimiento, por ello se ha convertido en una de las mayores apuestas comerciales para el país lo cual se evidencia en haber sido el más activo de la economía en 2015; según el DANE, con un crecimiento de 3.5% real para el 2015, que aportó cerca de la segunda parte de la expansión de 3,1% del PIB colombiano², "Es importante señalar que el sector servicios está compuesto de cuatro grandes segmentos de la economía, el primero transportes, comunicaciones y servicios públicos, el segundo comercio al por mayor y al detal, tercero finanzas, seguros y bienes raíces, y el cuarto la parte del sector servicios que crece más rápidamente la cual incluye servicios comerciales tales como contabilidad, ingeniería y oficinas jurídicas, además los servicios personales tales como los domésticos, barberías y servicios recreativos (Albrech & Zemke, 1991, pág. 3).

Uno de los cuatro segmentos claves es el sector servicios, que al diario vivir las personas están en constante "contacto". Los servicios públicos en Colombia se han consolidado en las dos últimas décadas como un sector decisivo para la competitividad del país, pero al mismo tiempo, para el desarrollo social de Colombia en lo que a la solución de necesidades básicas se refiere. Es así que tanto el servicio de acueducto como el servicio de energía eléctrica tienen una cobertura cercana al 90% del total de la población de Colombia, beneficiando a una gran cantidad de hogares dentro del territorio nacional. Además, se puede identificar al sector de servicios públicos como uno de los más estratégicos en la economía, ya que representa casi el 5% del PIB, generando alrededor de 100.000 empleos directos y más de 300.000 indirectos, al

¹Pro Colombia. (2016). Inversión en el sector Servicios en Colombia. Invierta en Colombia. Recuperado de: <http://www.inviertaencolombiacom.co/sectores/servicios.html>

²Clavijo, Vera y Cuellar. (2016). Desempeño del Sector Servicios en 2015-2016. ANIF. Recuperado de: <http://anif.co/sites/default/files/jul25-16.pdf>

tiempo que genera beneficios a la comunidad, la industria y el comercio³. Con base a estas cifras, es lógico inferir que el sector se encuentra en uno de sus mayores momentos. Es muy importante estudiar su comportamiento con el ánimo de generar ideas innovadoras que permitan mantener y potencializar su crecimiento y desarrollo, generar bienestar a la comunidad y consolidar la economía colombiana.

“El marketing de servicios ha proporcionado conocimientos necesarios para alcanzar tales ideas innovadoras, esta herramienta sostiene que todas las organizaciones, incluida las entidades prestadoras de servicios deben definir y estudiar sus respectivos mercados y elegir metas, luego estas deben de atender y prestar atención a la oferta de bienes y servicios, la estructura de precios, el sistema de distribución, y las actividades promocionales. Es innegable el hecho de que para alcanzar el éxito de la organización de servicios se debe administrar eficientemente la calidad del servicio; esta administración de la calidad incluye la gestión del talento humano como motor primordial para la consecución de un buen servicio” (Stanton Wiliam J, 2007, págs. 304-316).

Sin embargo, existe un problema común para todas las organizaciones que impiden ejercer una buena gestión del servicio a través del talento humano y este es las líneas de espera o colas. En una gran cantidad de ocasiones en la vida, la mayoría de personas de la sociedad actual han esperado en una fila para recibir a causa de ello un servicio. El fenómeno de espera se puede ver reflejado en situaciones como: esperar en una fila para realizar compras en una caja de un supermercado, esperar en una fila para ingresar en un parque de diversiones, esperar en una fila para que el cajero de un banco efectúe una transacción financiera etc., y es que esperar un servicio se ha convertido parte de nuestra vida diaria (Vergara Navarro, 2006, págs. 15-17). Este fenómeno de espera se presenta con amplia continuidad en las entidades prestadoras de servicio dado el gran volumen de personas que ingresan a las instalaciones a recibir un servicio las largas filas que se registran en estas entidades y corporaciones no solamente molestan a quienes se ven obligados a ir mensualmente a una institución prestadoras de servicio a pagar los recibos de agua, luz, celular, internet y gas, sino a los clientes de estas entidades, que cada vez tienen que dedicar más tiempo para hacer una diligencia personal en su banco o entidad prestadora de servicio; este hecho también se observa continuamente en las entidades de servicios públicos como lo es el acueducto, energía eléctrica y telefonía celular que día a día deben de atender un gran volumen de personas que ingresan al establecimiento físico a recibir a cambio un servicio lo que genera en repetidas ocasiones fastidiosas y largas colas de espera⁴. Para el cliente de la entidad prestadora de servicios el hecho de esperar se ha convertido en un fenómeno que fácilmente generaría el rechazo de optar por el servicio sacrificando valiosas utilidades para la organización; todas las empresas que brindan servicios tienen como elemento principal al consumidor, este es la base de toda estrategia empleada y el éxito de la empresa dependerá de cómo el cliente percibe a la entidad la cual le presta el servicio público; esto se

³Galvis Hernández, Gustavo. (2014). Servicios Públicos, factor de competitividad y desarrollo. Portafolio. Recuperado de: [8http://www.portafolio.co/economia/finanzas/servicios-publicos-factor-competitividad-desarrollo-46408](http://www.portafolio.co/economia/finanzas/servicios-publicos-factor-competitividad-desarrollo-46408)

⁴Tovar Martínez, Edmer. (2000). Bancos no resisten más colas. Bogotá: El Tiempo. Recuperado de <http://www.eltiempo.com/archivo/documento/MAM-1263524>

ha convertido en un problema muy común para toda empresa dado que mientras más clientes consigue, la calidad de la atención comienza a decaer a causa de las terribles “colas” y el largo periodo de espera por el que atraviesan sus clientes⁵. Desde el punto de vista de la entidad prestadora de servicios el hecho de analizar el sistema de espera o colas , les permite disminuir costos , dado que estos se reflejan cuando existe una innecesaria capacidad de servicio que probablemente ocasiona tiempos ociosos (tiempo en el cual el servidor se mantiene inactivo , es decir tiempo en el cual no existen clientes siendo atendidos) en la instalación donde se realiza la atención al cliente, además de verse reflejados en el beneficio dejado de percibir por un sistema de espera de baja capacidad que generaría grandes colas afectando así la decisión del cliente de mantenerse o entrar en ella optando finalmente por realizar otro tipo de actividad diferente a la que inicialmente deseaba realizar en la entidad prestadora de servicio (Vergara Navarro, 2006, pág. 16).

Las entidades prestadoras de servicios públicos conocen de antemano y en detalle que además de ofrecer un servicio para la sociedad, cobra bastante importancia la forma en cómo estos generan el servicio, es decir como atienden al cliente en el establecimiento físico. La manera en cómo está distribuida las instalaciones, la calidad y formación del cliente interno que se encargan de ejercer el servicio al cliente externo y la satisfacción de estos últimos son algunos de dichos aspectos. El factor clientes satisfechos es elemental al momento de brindar los productos y servicios máxime, donde el entorno que rodea la entrega del producto o servicio es lo que permite generar el valioso valor agregado. En el caso de la problemática a tratar en esta investigación el valor agregado se verá reflejado en la eficiencia en cómo se controla el tiempo en que un usuario o cliente espera para recibir el servicio (Gomez Jimenez, 2008, págs. 51-52).

El fenómeno de espera descrito anteriormente se ve reflejado en todas entidades prestadoras de servicio situadas en las diferentes ciudades de Colombia⁶ , La ciudad de Popayán, Cauca no se escapa de esta realidad; teniendo en cuenta que la ciudad de Popayán posee un considerable número de clientes que necesitan de estos servicios. Además se puede ver que en el 2015 el PIB del departamento del Cauca fue el de mayor crecimiento a nivel nacional llegando a una cifra del 5,7% (actualmente no se encuentra información actualizada respecto al crecimiento del PIB caucano) siendo el sector servicios el que más jalonó este crecimiento⁷, el cual es un porcentaje bastante representativo que afecta positivamente el desarrollo de la región; no es de sorprender el interés por investigar este fenómeno de espera como problemática en estas entidades, esto con el propósito de entenderlo y dar con posibles soluciones que aminoren este fenómeno tan molesto que se da en las entidades prestadoras de servicio permitiendo así optimizar el uso de las instalaciones y por ende contribuir en la mejora de la atención al cliente.

⁵Psicología y empresa. (2013). La atención en los bancos: Un problema difícil de resolver. Recuperado de <http://psicologiayempresa.com/la-atencion-en-los-bancos-un-problema-dificil-de-resolver.html>

⁶Vallejo López, Gabriel. (2012). El problema de las filas. Colombia: Portafolio. Recuperado de <http://www.portafolio.co/opinion/gabriel-vallejo-lopez/problema-filas-94960>

⁷DANE. (2015). Cuentas Departamentales - Colombia Producto Interno Bruto (PIB). Recuperado de <http://www.dane.gov.co>

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Optimizar el sistema de espera en la fila de atención general o preferencial del Acueducto y Alcantarillado de Popayán S.A. E.S.P. mediante la teoría de colas para aprovechar los tiempos y recursos relacionados con la espera y servicio del sistema.

1.2.2. Objetivos específicos

- ✓ Determinar estadísticamente los tiempos de espera de los usuarios del Acueducto y Alcantarillado de Popayán S.A E.S.P.
- ✓ Establecer los días y horas claves en las cuales pueden atender dos o tres servidores la fila de espera general o preferencial del Acueducto y Alcantarillado de Popayán S.A E.S.P.
- ✓ Sugerir un plan de mejora para optimizar el sistema de espera en la fila de atención general o preferencial del Acueducto y Alcantarillado de Popayán S.A E.S.P.

1.3. Análisis del tamaño de la muestra

En esta parte del trabajo se determina cual es el tamaño de la muestra para cada uno de los 84 intervalos. Inicialmente se estableció la siguiente relación (Martinez Bencardino, 2009, pág. 390)

$$n = \pi(1 - \pi) \left(\frac{Z}{E_M} \right)^2$$
, donde: π es la media proporcional, Z el valor correspondiente para la distribución de probabilidad normal debido al nivel de confianza y E_M el error muestral.

Para este caso se decidió trabajar con una proporción de la población del 50% debido a que no existe información de esta investigación en particular dentro de la empresa que se está estudiando; acorde a esto, se propuso un nivel de confianza del 98% el cual da como resultado un $Z = 2.33$ y con un error de muestreo del 1,16% para un tamaño de muestra total de 10.086 datos. Ahora bien, teniendo en cuenta que se analizaron 84 intervalos además de decidir trabajar con el mismo tamaño de datos para cada intervalo, se ultima que el número de datos a trabajar por intervalo es de 120,07 datos, pero debido a que el estudio se hizo con personas el numero resultante debe ser un entero positivo por lo cual se concluye que se deben tener 120 datos para cada intervalo, lo cual genera una muestra total de 10.080.

Por otro lado se aclara que la recopilación de datos se hizo para todos los usuarios que llegaron y fueron atendidos en el sistema de espera en su respectivo intervalo, dado que existió la facilidad de recopilarlos con la ayuda de los videos de seguridad de la empresa, esto hizo rechazar la idea de ejercer escogencias aleatorias de los usuarios durante el intervalo de tiempo en recopilación. Una vez obtenido la totalidad de datos se procedió a restar datos de aquellos intervalos que tuvieran una cantidad mayor a los 120 establecidos (según lo comentado en el párrafo anterior), teniendo en cuenta que tal reducción se hizo uniformemente, se escogieron datos tanto del inicio del intervalo, mitad y final de este (de igual tamaño), garantizando que dicha escogencia de datos sumara 120 para cada intervalo.

1.4. Metodología

A continuación, se presenta la metodología utilizada para la investigación

Los datos de la investigación se obtuvieron con ayuda de los videos de la línea de espera proporcionados por la entidad esto con el fin de no interferir en la línea de espera objeto del estudio y así evitar sesgos dentro de la investigación, debido a que si el cliente se siente observado no actúa de forma natural y los datos no reflejaran la realidad de la línea de espera

Los tiempos de llegada, los tiempos de espera y de servicios de los usuarios dentro del sistema de espera, se tomaron en dos intervalos de tiempo en la mañana y otros dos en la tarde, donde cada intervalo corresponde a 1 hora y 30 minutos, el intervalo de la jornada de la mañana iniciara a la 8:30 hasta las 10:00 y desde las 10:00 hasta las 11:30. En la tarde iniciara a las 2:15 hasta las 3:45 y desde las 3:45 hasta 5:15. Se decidió esto dado que son momentos en los cuales el sistema de espera se puede considerar en estado estable debido a que los datos no se consideran ni muy cerca del inicio del sistema (apertura del acueducto) ni muy cerca del final de este.

La sistematización de los datos se realizó mediante la utilización de C-sharp implementado con Microsoft Excel, el cual permitió un registro fácil y rápido de los datos además del procesamiento de estos. Por otra parte, con este software se distingue a cada uno de los seleccionados para hacer parte de la muestra mediante la caracterización de estos como lo puede ser color de camisa, altura, contextura corporal, etc. Esto es importante porque la afluencia de personas es alta y es fácil perder de vista el usuario seleccionado e incurrir de esta manera a una toma de datos errónea.

Tomados los datos se calcularon las medianas de los tiempos entre llegadas y de servicio obtenidas para cada uno de los 84 intervalos de hora y media, cada uno de estos contaba con 120 datos brutos como se aclaró anteriormente. Paso a seguir se realizó el tratamiento estadístico no paramétrico constituido de la prueba Kruskal Wallis que permitió determinar que las medianas provenían de la misma población, y la prueba de bondad de ajuste de frecuencias esperadas mediante la distribución Chi-cuadrado utilizada para estudiar el comportamiento exponencial en los datos.

Consecuente a lo anterior, se aplicó la teoría de colas y con ella los resultados de estado estable para cada una de las cinco semanas, así como para cada uno de los 84 intervalos. Finalmente, se construyó el modelo del nivel óptimo de servidores y se calibro la línea de espera a partir de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO II

CARACTERIZACIÓN DE LA EMPRESA EN ESTUDIO PARA APLICAR EL MODELO DE COLAS

En el presente capítulo se exhibe aspectos relacionados a la entidad prestadora de servicios a la cual se realiza la investigación, dentro de estos aspectos se tiene: descripción de la empresa tanto organizacionalmente como en cuanto a su sistema de espera además del modelo de investigación utilizado.

2.1 Descripción de la empresa

La Empresa de Acueducto y Alcantarillado de Popayán S.A. E.S.P. es una sociedad anónima colombiana clasificada legalmente como empresa de servicios públicos mixta ya que el servicio pertenece al orden municipal, sociedad en la que el Estado posee más del 90% de su capital social. Esta hace parte del sector terciario de la economía. El objeto social de la empresa lo constituye la prestación del servicio público de acueducto y alcantarillado consistente en la distribución municipal de agua apta para el consumo humano, incluida su conexión y medición y en las actividades complementarias, tales como captación de agua, procesamiento, tratamiento, almacenamiento, conducción y transporte de ésta. El servicio público de alcantarillado se refiere a la recolección municipal de residuos principalmente líquidos por medio de tuberías y conductos a las actividades complementarias de transporte, tratamiento y disposición final de tales residuos. Para su cumplimiento la Empresa se encuentra estructurada como una organización divisional en donde se distinguen tres grandes funciones: Gerencia y Apoyo, Administrativa y Financiera y Técnica – Operativa.

La empresa de Acueducto y alcantarillado de Popayán S.A. E.S.P se encuentra dividida en diferentes dependencias, de las cuales no todas poseen sistemas de espera dado que dentro de sus funciones no se encuentra la atención al usuario; diferente es el caso de la división comercial, división integral al usuario, división de tesorería entre otras, donde sí se presentan sistemas de espera bien definidos. La presente investigación se centrará exclusivamente en la división de tesorería, concretamente en el área de atención al público de esta división. Se ha escogido esta parte de la empresa y no otra por ser la que más flujo de usuarios presenta y donde se forman mayoritariamente las colas dado que en ella se realizan los pagos por parte de los usuarios del servicio público de agua. (Acueducto de Popayan, 2012).

La división de tesorería está constituida por cinco personas pertenecientes a la empresa en mención y otras dos pertenecientes al Banco Caja Social de Popayán, donde sus funciones son descritas a continuación:

- ✓ Jefe de tesorería el cual se encarga de realizar actividades administrativas en función del recaudo de dinero realizado por los cajeros (servidores).
- ✓ Un administrativo auxiliar el cual se encarga de la atención al público en cuanto a aspectos no relacionados con el recaudo de dinero, por lo que la cola que se forma frente a este auxiliar no es de la incumbencia en la investigación.

- ✓ Un cajero principal que siempre se encuentra en funcionamiento y su única actividad es la de atención al usuario, es decir el recaudo del dinero; por lo que es uno de los servidores que hacen parte de la investigación.
- ✓ Dos cajeros pertenecientes al banco caja social cuyas actividades de atención y recaudo del pago de servicio de agua se realizan en las instalaciones de atención al usuario de la división de tesorería. Lo anterior es a causa de un convenio entre el Banco Caja Social y el Acueducto y alcantarillado de Popayán S.A. E.S.P para el apoyo de recaudo de dinero. Estos dos están siempre activos, por lo que los dos se tendrán en cuenta para la investigación.

2.1.1 Funcionamiento de la división de tesorería con respecto a los clientes

El horario usual de atención al público es de lunes a viernes de 7:30 a.m. a 12:00 p.m. y de 2:00 p.m. a 5:30. El mecanismo de servicio del sistema de espera es bastante sencillo al llegar, un usuario puede ser atendido de inmediato o esperar en la cola si la instalación está ocupada. Cuando una instalación completa un servicio, “jala” de forma automática a un cliente que está esperando en la cola, si lo hay. Si la cola está vacía, la instalación se vuelve ociosa hasta que llega un nuevo cliente.

2.1.2 Estructura del modelo de cola para la empresa

- ✓ **Población de clientes:** Aproximadamente la empresa cuenta con 84.844 usuarios (para agosto de 2017), el cual es un número considerablemente grande; y al ser el tamaño una variable importante que caracteriza la población de clientes, esta se considerara infinita. Dicha consideración se ejerce dada la dificultad matemática de tratar los modelos de colas con una población de clientes finita donde está es muy elevada.
- ✓ **Proceso de llegada:** El proceso de llegada al sistema de espera de la empresa es probabilístico. En otras palabras, el tiempo que transcurre entre dos llegadas consecutivas de usuarios se infiere que sigue una distribución de probabilidad exponencial.
- ✓ **Proceso de línea o cola:** Los usuarios esperan en un sistema de una sola cola, es decir el sistema de colas para la empresa de acueducto y alcantarillado es de una sola línea. Por otra parte, la disciplina de cola que presenta el sistema de espera de la organización es FIFO (first come, first service), primero en llegar primero en ser atendido.
- ✓ **Proceso de servicio:** Dado que la organización cuenta con tres servidores (objetos de estudio) se pueden atender tres usuarios de manera simultánea; además el tiempo que transcurre desde el inicio del servicio de un usuario hasta que este finaliza es probabilístico lo que hace inferir que el tiempo de servicio que se da en el sistema de espera de la empresa se describe mediante la distribución de probabilidad exponencial negativa. En caso de no hacerlo se seguirá asumiendo el comportamiento exponencial en los tiempos de servicio a manera de aproximación, dado que de esta manera modelo M/M/s permite dar una explicación acertada del comportamiento del sistema de espera de la entidad.

2.1.3 Caracterización del contexto circunstancial en el sistema

Los datos para este trabajo de investigación fueron recopilados durante los días hábiles del mes de agosto de 2017. La toma de datos se realizó con base a cuatro intervalos de tiempo de 1 hora y 30 minutos cada uno, el intervalo de la jornada de la mañana fue de 8:30 hasta las 10:00 a.m., el segundo fue desde las 10:00 a.m. hasta las 11:30 p.m. El tercer intervalo se tomó desde las 2:15 p.m. hasta las 3:45 p.m. y el último desde las 3:45 p.m. hasta las 5:15 p.m. Se tomó la decisión de recopilar la información de los tiempos de llegada y de servicio en estos intervalos dado que son momentos en los cuales el sistema de espera se puede considerar en estado estable debido a que los datos no se consideran ni muy cerca del inicio del sistema (apertura del acueducto) ni muy cerca del final de este. Además, es importante señalar que inicialmente se había planeado tomar los dos últimos intervalos de 2:30 a 4:00 y de 4:00 a 5:30 p.m. pero dado que la atención al usuario en la empresa solo iba hasta las 5:30 p.m. se tomó la decisión de correr la toma de datos 15 minutos menos en estos dos intervalos para garantizar el estado estable. La toma de datos en este trabajo no tuvo cuenta los días lunes de la semana dos y cuatro dado que estos fueron días festivos; no se tuvo en cuenta el día lunes de la semana uno por ser parte del mes de julio de 2017 (periodo de tiempo que no hace parte de la toma de datos), igualmente no se tuvo en cuenta el día viernes de la semana cinco dado que este día no pertenece al mes de agosto del 2017 sino al de septiembre (periodo de tiempo que no hace parte de la toma de datos).

2.2 Modelo de investigación

El modelo de investigación científica a seguir es de carácter empírico-analítico, dado que este se basa en la experimentación y lógica empírica mediante la observación del fenómeno estudiado (tiempos de espera) y el análisis estadístico de este. Teniendo en cuenta lo anterior la empresa seleccionada para realizar la investigación es el Acueducto y Alcantarillado de Popayán S.A. E.S.P. Los hechos por los cuales se seleccionó esta empresa se discuten a continuación.

1. La empresa hace parte del sector servicios, sector al cual la investigación apunta dado que en este sector las empresas se caracterizan por presentar el fenómeno de espera.
2. La organización cuenta con un sistema de espera en el cual el arribo de usuarios se da en altas cantidades formando largas colas.
3. Es considerada como mediana empresa lo que permite pensar que, al mejorar el sistema de espera de esta Empresa, se contribuirá de forma positiva en el crecimiento del sector servicios en el departamento del Cauca.

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

Para poder abordar los objetivos de esta investigación es necesario dar una breve presentación de la teoría de colas con su respectiva estructura (población de clientes, proceso de llegada, proceso de línea y proceso de servicio) además de su notación (Kendall); siguiendo con las condiciones de estado estable y con ella las medidas de desempeño del estado en mención, necesarias para conocer el comportamiento del sistema de espera y proponer mejoras; finalizando el tratamiento de colas se presenta el modelo matemático M/M/s a emplear en el sistema de espera. Con el propósito de abarcar mejor el tema de teoría de colas se exponen en la sección de anexos temas relacionados a esta teoría como lo son procesos estocásticos, cadenas de Markov y procesos de nacimiento y muerte además de la herramienta estadística necesaria para el estudio de los datos (tiempo entre llegadas y servicios) que serán utilizados en el modelo de teoría de colas.

3.1 Teoría de colas

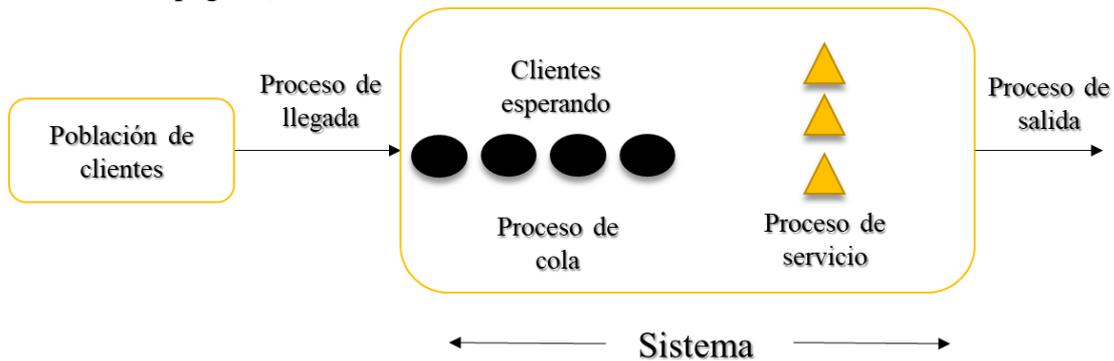
La teoría de colas es el estudio de la espera en las distintas modalidades. Utiliza modelos matemáticos para representar los tipos de sistemas de líneas de espera (sistemas que involucran colas de algún tipo) que surgen en la práctica. Las fórmulas de cada modelo indican cuál debe ser el desempeño del sistema correspondiente y señalan la cantidad promedio de espera que ocurrirá en diversas circunstancias. Por lo tanto, estos modelos de líneas de espera son muy útiles para determinar cómo operar un sistema de colas de la manera más eficaz. Proporcionar demasiada capacidad de servicio para operar el sistema implica costos excesivos; pero si no se cuenta con suficiente capacidad de servicio surgen esperas excesivas con todas sus desafortunadas consecuencias. Los modelos permiten encontrar un balance adecuado entre el costo de servicio y la cantidad de espera (Hiller & Lieberman, 2010, pág. 708).

El objetivo de los modelos de colas es más de descripción que de optimización y cualquier optimización que tenga lugar debe llevarla a cabo el usuario variando el parámetro del sistema para obtener diferentes conjuntos de características de operación (Vergara Navarro, 2006, págs. 15-16). La “mezcla” de características de operación que mejor se adecue a los objetivos-necesidades del usuario es quien determina la mejor estructura del sistema de línea de espera.

3.1.1 Estructura de un modelo de colas

Los actores principales en una situación de colas son el cliente y el servidor, los clientes llegan a una instalación (servicio) desde una fuente; al llegar, un cliente puede ser atendido de inmediato o esperar en una cola si la instalación está ocupada. Cuando una instalación completa un servicio, “jala” de forma automática a un cliente que está esperando en la cola, si lo hay. Si la cola está vacía, la instalación se vuelve ociosa hasta que llega un nuevo cliente; además de esto, la cola como tal no debe existir físicamente para poder estudiarla; la presencia de un grupo de personas formado en línea frente a algún servidor es innecesaria. Podrían estar, por ejemplo, disperso por un área esperando recibir servicio. El único requisito es que a pesar de no existir

la cola físicamente, el cambio generado en ese número de personas dispersas en determinada área es decir las llegadas y salidas de estas, funcionen como si prevaleciera dicha cola (Vergara Navarro, 2006, pág. 15) .



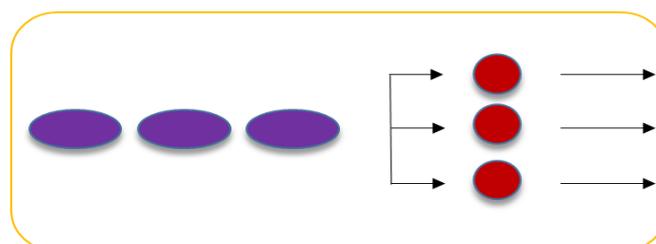
Fuente: elaboración propia

Figura 1 Proceso básico de cola: se puede observar la fuente de entrada del sistema representada por la población de clientes, además del proceso de la cola representado por óvalos que hacen el papel de personas esperando en la fila; el proceso de servicio se encuentra representado por triángulos que hacen el papel de los servidores. Una vez son atendidos salen del sistema (proceso de salida).

3.1.1.1 Elementos de un sistema de colas

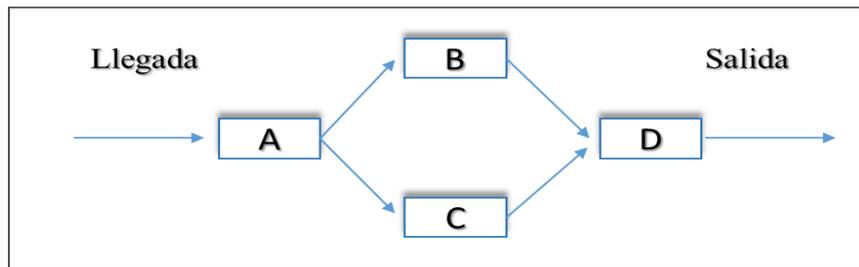
A continuación, se da una descripción detallada de cada uno de los elementos que integran el sistema de colas:

- ✓ Población de clientes: conjunto de todos los clientes posibles
- ✓ Proceso de llegada: forma en cómo llegan los clientes
- ✓ Proceso de colas: generado por la forma en cómo los clientes esperan para ser atendidos y la disciplina de colas, es decir la forma en cómo los clientes son elegidos para ser atendidos
- ✓ Proceso de servicio: forma y rapidez con que es atendido el cliente
- ✓ Proceso de salida: pueden ser de dos tipos, los elementos abandonan completamente el sistema después de ser atendidos, lo que tiene como resultado un sistema de cola de un solo paso como se ve en la figura 2; el otro caso sería en donde los elementos son atendidos en una estación, y una vez terminada la atención en esta estación son trasladados a alguna otra para someterlos a otro tipo de atención o proceso, lo que tiene como resultado una red de colas como se observa en la figura 3.



Fuente: elaboración propia

Figura 2 Sistema de colas de un paso: los óvalos de color morado representan a los clientes esperando en una única fila para ser atendidos, mientras que los rojos representan a clientes siendo atendidos listos para abandonar el sistema definitivamente una vez sean atendidos completamente por el servidor.



Fuente: elaboración propia

Figura 3 Red de colas: representa un sistema de espera tipo red en el cual las letras A, B, C, D juegan el papel de estaciones de servicio, es decir una vez el cliente es atendido en la estación A pasa a ser atendido en la estación B o C (según el tipo de servicio) luego a la estación D donde finalmente abandona el sistema definitivamente.

3.1.1.2 Proceso de llegada

Es la forma en cómo los clientes llegan a solicitar un servicio. Al momento de referirse a la población de clientes es necesario especificar la distribución de probabilidad con la cual se generan los clientes en el tiempo, en el caso de que estas llegadas sean probabilísticas y no determinísticas (como es el caso en que los tiempos de llegada de clientes a la entidad prestadora de servicios son conocidos con exactitud es decir que no sean aleatorios si no constantes). Dada la naturaleza de generación de clientes (llegadas) en el sistema, lo normal es describir dicha generación como un proceso de Poisson, es decir, el número de clientes que llegan a un sistema en un momento específico se describen mediante una distribución de probabilidad de Poisson. Por otra parte, el tiempo que transcurre entre dos llegadas consecutivas se describe mediante una función de densidad de probabilidad exponencial.

3.1.1.3 Proceso de línea o cola

Dentro del proceso de colas hace parte la manera en cómo los clientes esperan para ser atendidos. Los clientes pueden esperar en un sistema de una sola cola, lo cual forma un sistema de colas de una sola línea. De igual manera puede esperar en sistemas de múltiples colas, lo que formaría un sistema de cola de líneas múltiples o colas en paralelo.

Otra característica que hace parte del proceso de colas es la manera en cómo se atienden los clientes una vez estén dentro del sistema. A continuación, se señalan las disciplinas de cola más utilizadas que determinan la manera en cómo se seleccionan los clientes para ser atendidos:

- ✓ FIFO-FCFS (first come, firstservice), primero en llegar primero en ser atendido
- ✓ LIFO-LCFS (lastcome,firstservice), último en llegar primero en ser atendido
- ✓ SIRO (service in ramdomorder), atención en orden aleatorio.
- ✓ GD, disciplina general, atención particular por parte de cada sistema.

3.1.1.4 Proceso de servicio

En el sistema de colas existe un proceso que determina la manera en cómo son atendidos los clientes este es, el proceso de servicio. Cuando existe más de un servidor es posible realizar el

servicio a tantos clientes de manera simultánea como servidores hay en un determinado sistema; en el caso de las entidades de servicio se cuenta con varios cajeros es decir servidores.

Cualquiera que sea el proceso de servicio (ej. en ventanilla en el caso del acueducto, caja registradora en el caso de una tienda), es necesario tener en cuenta el tiempo que transcurre para llevar a cabo el servicio. El tiempo que transcurre desde el inicio del servicio a un cliente hasta su respectiva culminación recibe el nombre de tiempo de servicio; por lo general al igual que los tiempos entre llegadas, los tiempos de servicio son probabilísticos como en el caso de los clientes que llegan a la entidad de servicio, en la práctica la distribución de probabilidad que más se utiliza para describir los tiempos de servicios es la distribución de probabilidad exponencial negativa, aunque también son utilizadas otras distribuciones (Vergara Navarro, 2006, pág. 20).

3.1.2 Notación utilizada para los modelos de colas

En 1951 Kendall diseñó la notación siguiente para representar dicho sistema de líneas de espera (L Winston, 2004, pág. 1060). Esta consiste en una serie de símbolos separados entre sí por barras.

Los modelos de colas se etiquetan de la siguiente manera:

$$\underbrace{A_1} / \underbrace{A_2} / \underbrace{A_3} / \underbrace{A_4}$$

Donde:

A_1 Representa el tipo de distribución de probabilidad para el proceso de llegada, es decir los patrones.

A_2 Representa el tipo de distribución de probabilidad para el proceso de servicio o atención.

A_3 Representa el número de servidores o canales dentro del sistema.

A_4 Representa el número máximo de clientes que son permitido en el sistema de colas, ya sea que estén esperando o que estén adquiriendo el servicio, es decir por partes.

Estos símbolos a su vez pueden adoptar diferentes valores:

Para A_1 y A_2 se presentan los siguientes:

- ✓ M , Define una variable aleatoria que se distribuye de forma exponencial (Markoviana), bien sea para los tiempos de llegada o de servicio.
- ✓ D , Los tiempos, ya sean de llegada o de servicio son determinísticos (tiempos constantes).
- ✓ E_K , Los tiempos de llegada o de servicio están definidos por una distribución de probabilidad de Erlang de parámetro K o también llamada función de densidad de Erlang.
- ✓ G , Los tiempos de llegada o de servicio están definidos por alguna distribución exponencial.

Para el caso de A_3 , se toma el número de facilidades que ofrece el servicio, o las unidades de servicio, es decir la capacidad del sistema (0, 1, 2, 3...infinito) mientras que A_4 expresa el tipo de disciplina de cola (FIFO, LIFO, SIRO, GD).

Para nuestro caso, en el cual se utiliza el modelo M/M/s que describe la situación de colas de la entidad prestadora de servicio, y que se analizara más adelante en la sección 3.2, supone que los tiempos entre llegadas así como los de servicio siguen una distribución exponencial y que el número de servidores es s ($s \in \mathbb{Z}^+$).

El sistema de colas queda completamente determinado por las siguientes seis características (L Winston, 2004, págs. 1051-1053):

1. La naturaleza del proceso de arribo de los clientes al sistema.
2. La distribución de las salidas (naturaleza del tiempo de servicio).
3. La cantidad de servidores en paralelo.
4. La disciplina de cola.
5. La especificación de la cantidad máxima (finita o infinita) de clientes en el sistema.
6. El tamaño de la fuente: la población se considera infinita, a menos que los clientes potenciales igualen en número al de los servidores.

Para el tratamiento de procesos de colas se presenta a continuación un conjunto de parámetros aceptados de forma general (Hiller & Lieberman, 2010, pág. 712):

$N(t)$, define para el tiempo t el número de clientes en el sistema de colas.

$P_n(t)$, indica la probabilidad de que en el tiempo t , existan n clientes en el sistema.

s , representa la cantidad de servidores en el sistema de colas.

λ_n , define la frecuencia media de llegada cuando hay n clientes en el sistema, en caso de ser λ_n constante para toda n , se nota λ (unidades dadas en usuarios/hora).

μ_n , indica la frecuencia media de salida del servicio cuando hay n clientes en el sistema; de igual forma, cuando esta frecuencia es constante para cualquier $n \geq 1$, se nota μ (unidades dadas en usuarios/hora).

En general, cuando estas tasas λ_n y μ_n son constantes para toda n , se denotan simplemente por μ y λ , además $\mu_n = \mu \cdot s$, para $n \geq s$

$\frac{\text{Ln}(2)}{\lambda}$, indica el tiempo esperado entre llegadas (unidades dadas en segundos)

$\frac{\text{Ln}(2)}{\mu}$, representa el tiempo esperado de servicio (unidades dadas en segundos)⁸

$P = \frac{\lambda}{\mu s}$, es el factor de utilización de la instalación de servicio: fracción esperada de tiempo para que los servidores individuales estén ocupado o la probabilidad de que el sistema de espera se encuentre ocupado.

3.1.3 Tipos de estados del sistema

A lo largo del trabajo se usará de forma habitual la suposición de que el sistema se encuentra en estado estable, es decir el análisis de colas se realizara bajo esta suposición dado la dificultad matemática de los estados transitorios. A continuación, se definirá este para una mayor comprensión.

Al número de personas presentes en un sistema de líneas de espera en el estado t se le define como el estado del sistema de líneas de espera en el tiempo t para $t = 0$, el estado del sistema es igual número de personas que están inicialmente en el sistema (L Winston, 2004, pág. 1063).

3.1.3.1 Estado estable

Cuando el sistema acaba de iniciarse, el estado del sistema está siendo afectado por el estado inicial. Una vez se ha generado un número grande de transiciones de estado, el estado actual del sistema empieza a volverse independiente del estado inicial de este; cuando se llega a este punto se dice que el sistema se encuentra en estado estable, es decir dado el estado j de un sistema físico, se dice que se encuentra en estado estable si y solo si no depende del estado inicial del sistema (Hiller & Lieberman, 2010, págs. 711-712). En este punto la distribución de probabilidad del sistema se conserva a través del tiempo (Taha, 2012, pág. 613). Es necesario que λ y μ estén definidos y $0 \leq P < 1$ para que un sistema físico se encuentre en estado estable. Para conocer el carácter matemático del estado estable véase (L Winston, 2004).

Desde el punto de vista de la entidad de servicios como sistema físico puede decirse que, los flujos de atención con el paso del tiempo, permite alcanzar un estado que no depende del verificado al inicio de las operaciones del sistema; de esta forma, el estado estable de una cola es obtenido una vez ha pasado un tiempo largo desde el inicio de las operaciones, que no es afectado por el estado de inicio (Cardona Madariaga, 2012, pág. 21).

⁸ En esta investigación se utilizó mediana y no media aritmética como medida de tendencia central, al tener en cuenta el comportamiento exponencial entre los tiempos entre llegada y de servicio aparece la constante $\text{Ln}(2)$ para el cálculo de estos tiempos (se utiliza $1/\lambda, 1/\mu$ si se manejara la media aritmética) (Epidat, 2014, pág. 62).

3.1.3.2 Estado transitorio

El estado de un sistema de colas antes de alcanzar el estado estable (L Winston, 2004, pág. 1063) .

3.1.4 Medidas de desempeño de estado estable

Como se mencionó anteriormente la teoría de colas tiende a dedicar su análisis a la condición de estado estable. La notación siguiente supone que el sistema se encuentra en estado estable (Hiller & Lieberman, 2010, págs. 712-713).

P_n , probabilidad de que haya exactamente n clientes en el sistema

L , cantidad esperada de clientes en el sistema

L_q , cantidad esperada de clientes en la cola (excluye los clientes que están en servicio)

W , tiempo de espera en el sistema (incluye tiempos de servicio) para cada cliente.

W_q , tiempo de espera a en la cola (excluye tiempo de servicio) para cada cliente.

Recodar que el sistema incluye tanto la cola como el tiempo de servicio.

Las variables anteriores (W, L_q, W_q, L) son los parámetros que permitirán describir las características del sistema de espera de la entidad de servicios, indispensables para tomarlos como punto de base y así determinar cuál debería ser las características del sistema de espera ideales para mejorar la eficiencia del servicio y por ende de la satisfacción del cliente.

3.1.5 Relaciones entre L, W, W_q, L_q

Dado que John D.C. Little proporciono la primera demostración rigurosa de estas relaciones, a veces se le da el nombre de fórmulas de Little (Hiller & Lieberman, 2010, pág. 713); estas fórmulas relacionan la longitud de la cola con el tiempo de espera (L Winston, 2004, pág. 1075).

Suponiendo que λ_n es una constante λ para toda cantidad n de clientes en el sistema, se ha demostrado que en un proceso de colas de estado estable (Hiller & Lieberman, 2010, pág. 713):

$$L = \lambda W = L_q + \lambda / \mu, \quad (1) \quad L_q = \lambda W_q, \quad (2)$$

suponiendo que el tiempo medio de servicio es una constante $1/\mu$ para toda $n \geq 1$, se tiene entonces que

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}, \quad (3) \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}. \quad (4)$$

Estas relaciones son importantes, puesto que permiten determinar las cuatro cantidades fundamentales: L, W, L_q, W_q en cuanto se encuentre analíticamente el valor de una de ellas. Para conocer la deducción de las anteriores cuatro formulas véase (Hiller & Lieberman, 2010).

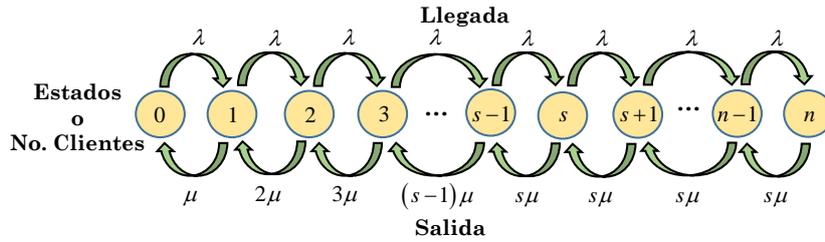
3.2 Modelo de cola M/M/s

Las dos primeras siglas M significan que los tiempos de llegada y de servicio se comportan en base a una distribución de probabilidad exponencial o Markoviana con s servidores atendiendo; este modelo supone que todos los tiempos entre llegadas son independientes e idénticamente distribuidos de acuerdo con una distribución exponencial (es decir, el proceso de entrada es de Poisson), que todos los tiempos de servicio son independientes e idénticamente distribuidos de acuerdo con otra distribución exponencial y que el número de servidores es s (cualquier entero positivo). En consecuencia, este modelo es solo un caso especial del proceso de nacimiento y muerte cuando la tasa media de llegadas al sistema de colas y la tasa media de servicio por servidor ocupado son constantes e independientes del estado del sistema (Hiller & Lieberman, 2010, pág. 725).

Aparte del modelo M/M/s se pueden encontrar otros, como los son el M/G/1, M/D/s y M/E_k/s para los sistemas de colas, pero estos tienen la dificultad de ser modelos con distribuciones no exponenciales (Hiller & Lieberman, 2010, págs. 737-739) para mayor información respecto a estos modelos de teoría de colas ver (Anexo E); es clave anotar que estos modelos son descritos mediante distribuciones de probabilidad no exponenciales, por lo cual se descartan de inmediato para ser aplicados en la investigación debido a que no manejan la distribución adecuada para el trabajo.

Se considera que para la investigación el modelo ideal es el M/M/s, donde se supone que los tiempos entre llegadas (tasa λ) y de servicios (tasa μ) tienen una distribución exponencial negativa en donde el sistema de espera cuenta con solo una cola de clientes que esperan ser atendidos por uno de los servidores en paralelo. Si hay $n \leq s$ clientes, entonces los n clientes están en servicio, por otro lado si n clientes están presentes, entonces los s servidores están ocupados y, $n > s$ clientes están haciendo la cola. Cualquier cliente que llegue y encuentre un servidor desocupado entrara directamente al servicio, pero un cliente que llegue y encuentre a los servidores ocupados entrara al sistema de cola en el cual los clientes esperan el servicio.

Definiendo la variable aleatoria X_T como el número de clientes en el sistema en el instante T y $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ como el conjunto de estados posibles que puede encontrarse el sistema de espera.



Fuente: Elaboración Propia

Figura 4 Diagrama de transición del modelo M/M/s: Se expone el diagrama de tasas, en éste las flechas representan las únicas transiciones posibles en el estado del sistema. La tasa de entrada por parte de los clientes al sistema siempre va a ser λ (estado estable), por ello en el diagrama se observa como el cambio de un estado al otro (por ejemplo, haciendo la suposición de que el sistema se encuentre en el estado 2 y haga una transición al estado 3, es decir hay dos clientes en el sistema y entra otro llegando así al estado 3 o lo mismo que 3 clientes en el sistema) se realiza a una tasa λ . Por otro lado, se observa que las tasas de salida del sistema del estado 1 al n es μ dado que solo existe un cliente en el sistema y de los s servidores en servicio solo estaría atendiendo un solo servidor; si pasamos del estado 2 al 1 dicha tasa de salida sería 2μ dado que como hay dos clientes en el sistema y de los s servidores solo estarán atendiendo 2 servidores, el mismo proceso se observa al pasar del estado 3 al 2. Si el sistema cuenta con s servidores y hay más de s clientes en el sistema la tasa a la cual saldrán dichos clientes será de $s\mu$ dado que el sistema estará utilizando toda su capacidad es decir todos los servidores estarán atendiendo..

En seguida se da una breve descripción de cómo hallar el parámetro de diseño L_q expresión (9) dado que este nos permite encontrar la cantidad esperada de clientes en la cola, así como determinar las restantes expresiones (1), (2) y (4) de desempeño mediante la utilización del parámetro en mención las cuales se presentan en la sección 3.1.5.

Teniendo en cuenta el despeje de las ecuaciones de balance que se encuentran en la tabla D2 de anexos se puede aseverar que para s (servidores) mayores o iguales a n ($s \geq n$) los factores

$$c_n \text{ se convierten en: } c_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!}, \text{ donde } n = \overline{1, S}.$$

Retomando la expresión de intensidad de tráfico o factor de ocupación definida en la sección 3.1.2; al sustituir esta, en la ecuación de balance de flujo en un proceso de nacimiento y muerte (ver anexo C) se tiene $P_n = P_0 c_n$, donde P_0 es la probabilidad de que el sistema de espera se encuentre vacío, con base a lo anterior se obtienen las probabilidades para n clientes P_n en el sistema (L Winston, 2004, pág. 729):

$$P_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} P_0 \text{ Siempre que } s \geq n \tag{6}$$

Cuando $n \geq s$ los factores c_n se convierten en: $c_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{s! s^{n-s}}$ para $n = s, s+1, s+2, \dots$

Conociendo c_n es posible determinar las probabilidades de estado estable para $n \geq S$ así:

$$P_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{s!s^{n-s}} P_0 \quad (7)$$

Puede observarse que la expresión (6) y (7) están en función de P_0 (probabilidad de vacío), a continuación se muestra P_0 para un modelo M/M/s (para determinar la manera cómo se obtuvo P_0 al igual que las medidas de desempeño L, L_q, W, W_q consultar (L Winston, 2004, págs. 729-730).

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda / \mu)^s}{s!} \frac{1}{1 - \lambda / (s\mu)} \right)^{-1} \quad (8)$$

Cuando un modelo de líneas de espera se basa en el proceso de nacimiento y muerte, de manera que el estado del sistema n representa el número de clientes en el sistema de colas, las medidas clave de desempeño del sistema (L, W, L_q, W_q) se pueden obtener de inmediato después de calcular las P_n (Hiller & Lieberman, 2010).

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda / \mu)^s P}{s!(1 - P)^2} \quad (9)$$

La expresión (9) nos permite encontrar la cantidad esperada de clientes en la cola.

CAPITULO IV

ANALISIS DE RESULTADOS

En el presente capítulo se expone los resultados obtenidos de la investigación constituido a partir de cinco pasos básicos, inicialmente se da a conocer los “promedios”⁹ de los tiempos entre llegadas y de servicio obtenidas para cada uno de los 84 intervalos de hora y media, seguido a esto, el tratamiento estadístico no paramétrico constituido de la prueba Kruskal Wallis que permitió determinar si los “promedios” provenían o no de la misma población, y la prueba de bondad de ajuste por frecuencias esperadas mediante Chi-cuadrado utilizada para estudiar el comportamiento exponencial entre los tratamientos. Consecuente a lo anterior, se exhibe la aplicación de la teoría de colas y con ella los resultados de estado estable para cada una de las cinco semanas así como para cada uno de los 84 intervalos haciendo uso de las ecuaciones (1),(2),(4) y (9) presentadas en el capítulo III; conforme a estos resultados se presenta el modelo de nivel de aceptación, construido a partir de los resultados de estado estable, el cual permitió calcular el número de servidores que requiere el sistema de espera de la entidad en cada uno de los 84 intervalos del mes. Finalmente en el capítulo se muestra la calibración (Cal) del sistema, para ello se analizaron dos parámetros ofrecidos por la teoría, la cantidad esperada de usuarios en la cola (L_q) y el tiempo de espera en la cola (W_q), con los cuales se realizó la relación $Cal = W_q / L_q$.

4.1 Recolección de datos relacionados con los tiempos de espera y de atención

El proceso de recopilación de datos se realizó por cuenta propia de los dos investigadores. Inicialmente se tenía planeado realizar la toma de datos de manera directa, desde un punto estratégico en un emplazamiento cercano a la recepción en donde se atendían a los usuarios y desde el cual se disponía de una libre visión del sistema de espera de la empresa. Teniendo en cuenta lo anterior, se procedió a realizar una prueba piloto de un día con el fin de determinar posibles complicaciones futuras en la recolección de los tiempos de entrada y de servicio. Con esta prueba se pudo determinar que, si era posible recopilar datos sin interferir de ningún modo en el sistema, no entablando ningún tipo de relación con el usuario ni interrumpiendo la tarea de los servidores, lamentablemente no fue posible mantener esta forma de recopilar datos dado que, la llegada de usuarios al sistema de espera en algunas ocasiones del día era bastante grande, lo que ocasionaba que la toma de datos se volviera tediosa debido a que no era posible hacer un seguimiento adecuado de cada uno de las personas que integraban la fila de espera, lo que generaba que al momento de tomar los datos de tiempos de servicio se tomaran de manera errónea al no tener completa seguridad de estar tomando los tiempo del usuario correcto.

La forma en cómo se resolvió este grave problema fue mediante una gestión para conseguir la autorización de acceder a los videos de las cámaras de vigilancia del área de espera de la división de tesorería para mes de agosto de 2017. Gracias a esto, se logró acceder a los videos

⁹Cada vez que en el presente de aquí en adelante la palabra “promedio”, se ha de entender esta como la medida de tendencia central mediana.

de todo el mes de agosto concernientes a dos cámaras del área que contaban con un ángulo de visión completo de todo el sistema de espera, lo que permitía realizar la recopilación de datos de una manera mucho más cómoda, y así eliminar el problema que generaba la primera forma de recolección.

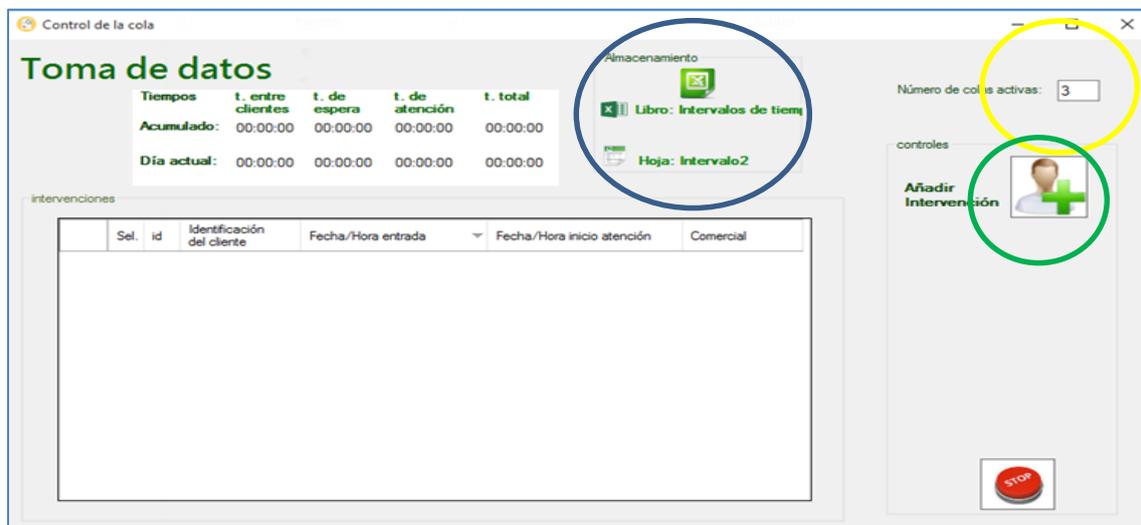
En la toma de datos (haciendo uso de los videos de las cámaras de vigilancia) se utilizó Microsoft Excel complementado con C Sharp para aplicaciones, esta permitió anotar de forma precisa el momento de cada uno de los sucesos que se dan en el sistema (entrada de un usuario, inicio de atención y fin de atención), así como el servidor que realizó la atención y el número de servidores activos. Automáticamente se obtenían además los tiempos, que eran calculados por diferencia entre los momentos registrados (tiempo de llegada entre usuarios, tiempo de espera, tiempo de servicio y tiempo total en el sistema). También se registraba automáticamente en el momento de la entrada de cada usuario el estado del sistema, el estado de la cola. Es necesario aclarar que la aplicación resultante por la utilización de C-sharp y Microsoft Excel fue de diseño propio.

Es importante señalar que la identificación de cada usuario es necesaria al momento de recopilar los datos. Esto es crucial para saber en qué fase del proceso se encuentra, poder seguir su trayectoria dentro del sistema y relacionar las diferentes horas de sus eventos. Cuando un usuario termina el proceso regular y abandona el sistema debe de haber pasado por tres eventos temporales: llegada, inicio de atención y final de servicio, puesto que un simple identificador podría llegar a confusiones en la práctica a la hora de asignar estos tiempos a cada usuario, de ahí que se usaron identificadores visuales para esta tarea; como: la forma del cabello, vestimenta, características personales, etc., he inclusive cuando el estado del sistema era reducido se usó identificadores numéricos, es decir persona 1, persona 2 etc.

Adicional a lo anterior es clave mencionar que al servidor 1 (codificado así para la toma de datos) además de atender al “usuario normal” le correspondía atender a la fila preferencial, fila en la cual esperaban las personas de edad avanzada. Este hecho “infla” artificialmente el tiempo de espera pues para la recopilación de datos estas personas no eran objeto de la investigación, dado que estas podían ser atendidas antes (no importando el momento de su llegada al sistema) de los “usuarios normales”; lo que implicaba contradecir la disciplina de cola FIFO. Puesto que esta alteración afecta únicamente al tiempo de espera y los tiempos que vamos a usar para aplicar la teoría son los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio, simplemente pasamos este hecho por alto, y registramos los tiempos únicamente de los “usuarios normales” de forma normal. El tiempo medio de espera es una de las soluciones que da el modelo matemático de teoría de colas; por lo tanto, no se usara el registrado en las hojas de cálculo de Excel. Teniendo en cuenta que la aplicación con la cual se recopiló los datos (C-sharp) calcula automáticamente el tiempo medio de espera en la hoja Excel, se toma la decisión de hacer caso omiso a dicho resultado dado que este no tiene en cuenta el trasfondo matemático con el cual se construye la fórmula con la que se calcula el parámetro, es decir dicho parámetro se calcula posteriormente con ayuda del modelo matemático y no con el que aparece en las hojas de Excel, en vista a que este es de suma importancia para la presente investigación.

Es pertinente mencionar que inicialmente se había propuesto no realizar recolección de datos el día martes después de lunes festivo debido a que (el periodo de recolección de datos tuvo dos lunes festivos), pero dado a que según nos indicó el personal de la organización, la afluencia de usuarios en el sistema de espera era normal, por lo anterior se toma la decisión de recolectar datos en estos días.

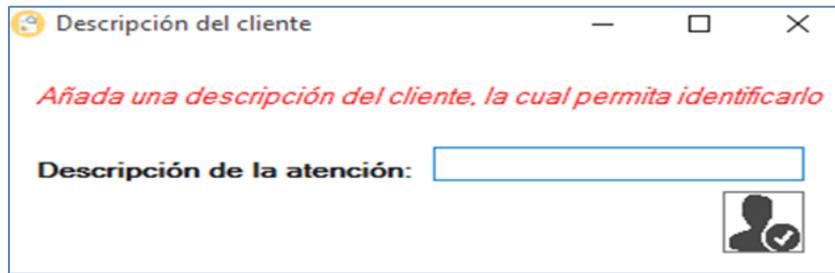
A continuación, se da a conocer el funcionamiento de la aplicación usada para la toma de datos:



Fuente: elaboración propia

Figura 5 Recopilación de datos en C Sharp: En la figura se ve un círculo color azul, en el cual se fija el lugar de almacenamiento de datos (hoja de Microsoft Excel). Además se observa un círculo de color amarillo en donde se registra el número de colas o servidores activos para la toma de datos. Adicional a esto el botón “añadir intervención” señalado con un círculo color verde, el cual permite registrar usuarios una vez llegan al sistema de espera.

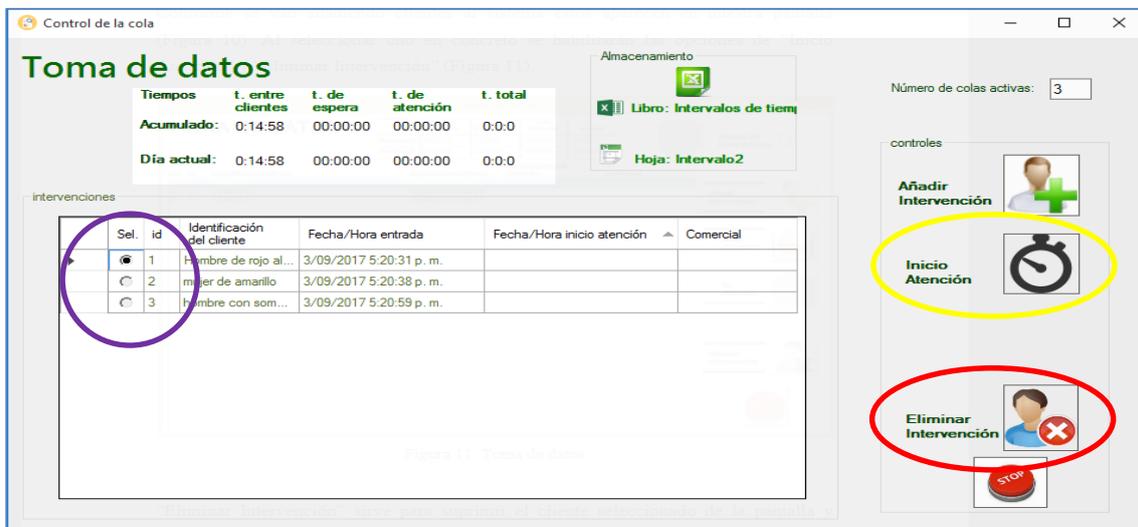
El primer paso se selecciona el lugar de almacenamiento de datos, para el ejemplo se utiliza el documento Excel denominado “Intervalos de tiempo” con hoja de cálculo denominada “intervalo dos”; luego de esto se debe rellenar la casilla “Número de colas activas” (servidores) en la esquina superior derecha, después pulsamos el botón “START” para que empiece la cuenta del tiempo (Figura 4). Al realizar esta acción observamos que se habilita la opción “Añadir Intervención”, la utilizamos para dar entrada al sistema a nuevos usuarios, registrando el momento exacto en que llegó. En segundo plano se registra además el tiempo entre llegadas, para realizar esta acción con el primer usuario se tomará como tiempo inicial el momento en que comenzó la toma de datos (cuando pulsamos el botón “START”).



Fuente: elaboración propia

Figura 6 Descripción del usuario C Sharp: En la figura se muestra la pestaña que permite dar una descripción como por ejemplo color de camisa, al usuario que se agregó con el botón “añadir intervención”

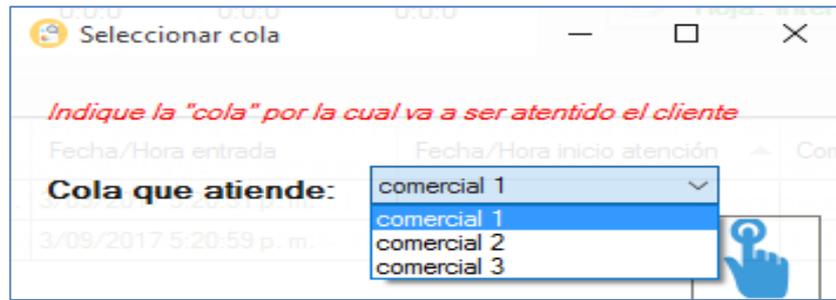
En el momento en que se pulsa el botón, aparecerá un cuadro de texto para darle al usuario su identificador visual (Figura 5). Conforme se van añadiendo usuarios al sistema éstos aparecen en nuestra pantalla (Figura 6), al seleccionar uno en concreto se habilitarán las opciones de “Inicio Atención” y “Eliminar Intervención”.



Fuente: elaboración propia

Figura 7 Recopilación de datos en C Sharp: En la figura se observa el listado de usuarios señalados con un círculo color morado que van siendo añadidos conforme llegan al sistema de espera. En esta figura se puede ver un círculo color amarillo que identifica el botón “Inicio de atención” el cual permite registrar y guardar el momento en el que el usuario es atendido; además se ve un círculo color rojo identificando el botón “eliminar intervención”, el cual permite eliminar un usuario que por error fue añadido al listado

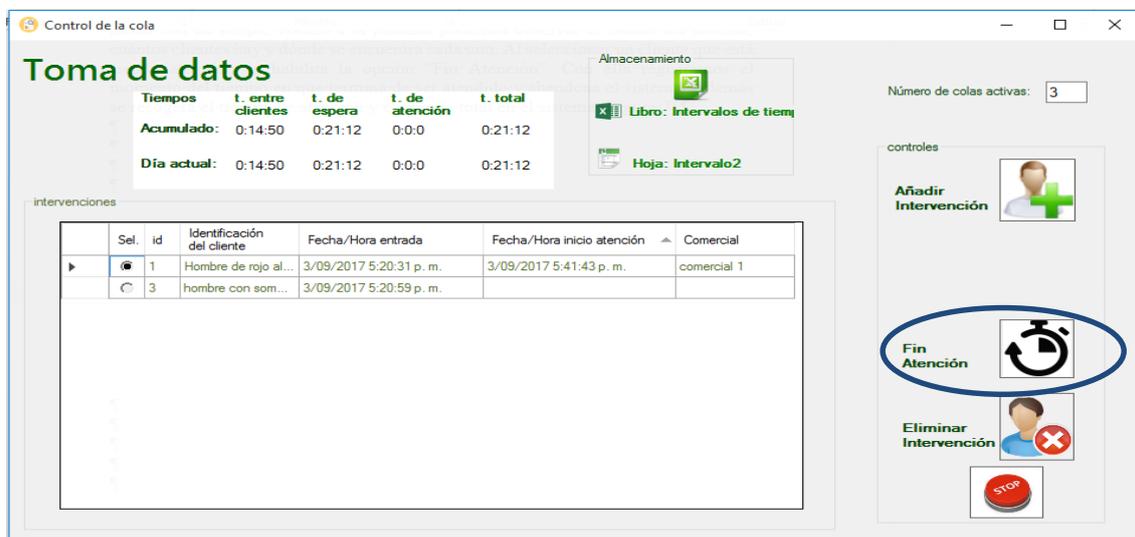
El botón “Eliminar Intervención” sirve para suprimir el usuario seleccionado de la pantalla y cualquier dato relacionado con él que se haya guardado en Excel (se eliminara del listado “mujer de amarillo”). Dando clic en el botón “Inicio Atención” se registra el momento exacto en que empieza a ser atendido, el tiempo de espera y por cual servidor en concreto va a ser atendido. (Figura 7).



Fuente: elaboración propia

Figura 8 Selección del comercial en C Sharp: La figura muestra el listado de servidores activos en donde se elige al servidor que atiende al usuario escogido.

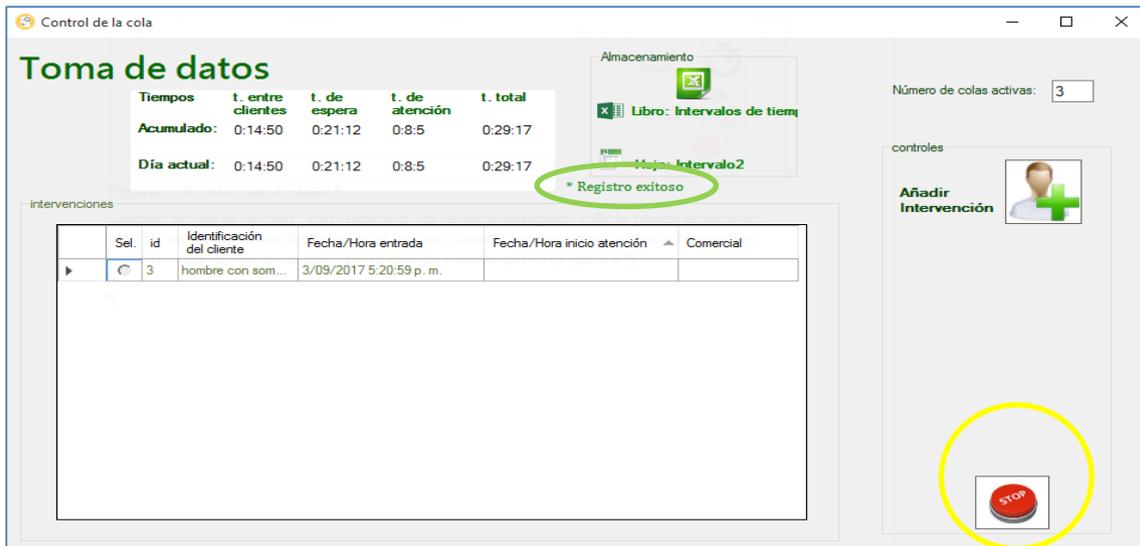
En la pantalla se ve el momento en que empieza a ser atendido y por quién, de este modo con un simple vistazo a la pantalla podemos observar el estado del sistema, cuántos usuarios hay y dónde se encuentra cada uno; al seleccionar un usuario que está siendo atendido se habilita la opción “Fin Atención”. Con ella registramos el momento del tiempo en que termina de ser atendido y abandona el sistema. Además, se recogerá el tiempo de atención y el tiempo total en el sistema (Figura 8).



Fuente: elaboración propia

Figura 9 Recopilación de datos en C Sharp: En esta figura se puede ver el botón “fin atención” señalado con el círculo de color azul, el cual permite finalizar el tiempo de atención dependiendo del usuario señalado.

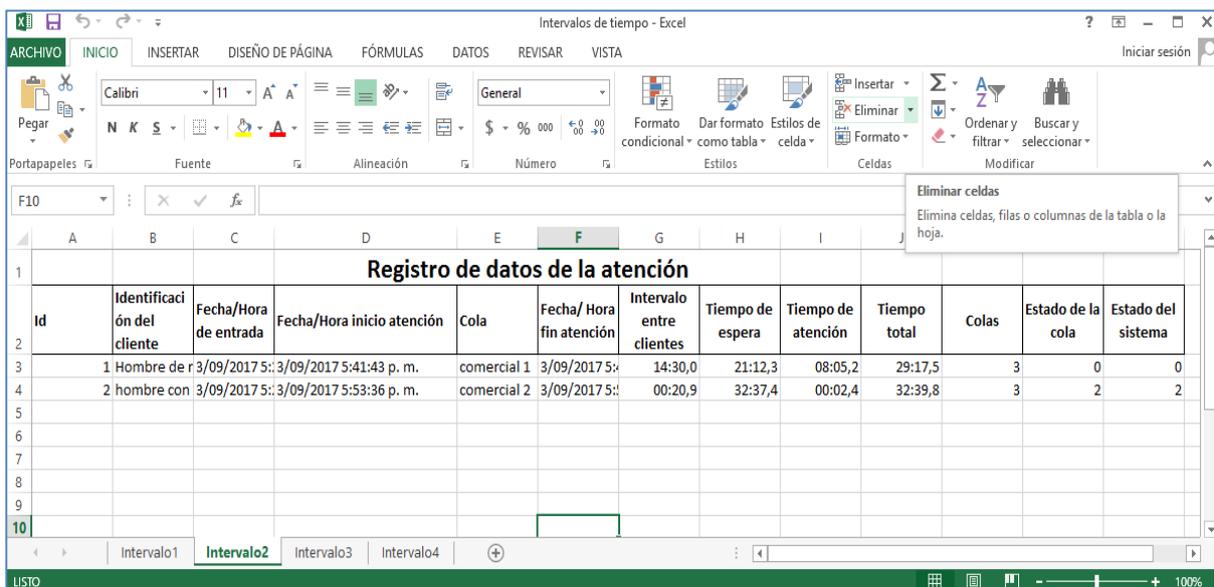
Cuando se usa la opción “Fin Atención” el usuario desaparece de la pantalla y aparecerá un letrero en verde diciendo “registro exitoso”, de este modo ésta no se satura de datos, y al dar un vistazo veremos exactamente lo que hay en el sistema en ese momento, no lo que ha pasado por él (Figura 9)



Fuente: elaboración propia

Figura 10 Recopilación de datos en C Sharp: En la figura se observa un círculo color verde señalando el texto “registro exitoso” el cual aparece una vez se ha guardado con éxito la información del usuario; además se observa un círculo color amarillo señalando el botón “stop”, este permite finalizar toda la toma de datos.

Para terminar, observamos un botón en la parte inferior derecha con el símbolo “STOP”. Este botón pone fin a la toma de datos y en caso de que quede algún usuario en el sistema que no haya terminado de ser atendido lo eliminará. Se observa también una tabla en la parte superior que nos muestra los tiempos medios que se van registrando en Excel. La lista en Excel queda finalmente de la forma que se observa en la Figura 10.



Fuente: elaboración propia

Figura 11 Recopilación de datos en Excel: En la figura se muestra la hoja Excel en donde fue guardada la información obtenida con ayuda de la aplicación, en ella se ve el servidor por el cual fue atendido el usuario así como el tiempo de llegada entre usuarios, el tiempo de espera, tiempo de atención y tiempo total de espera en el sistema.

4.2 Análisis exploratorio estadístico de los tiempos de espera y atención al usuario

Para esta parte fue necesario realizar gráficas entre los intervalos de tiempo por día y el “promedio” total de atención contrastando por los días de la semana, de igual manera se analizó el comportamiento del día durante las cuatro semanas considerando de nuevo los intervalos de tiempo de atención en la entidad prestadora de servicios.

Al analizar los tiempos entre llegadas, fue importante estudiar si existían diferencias entre estos, para ello se procedió a realizar una prueba de hipótesis para comparar los “promedios” encontrados y corroborar su igualdad o diferencia. Dado que los tiempos entre llegadas no suelen poseer distribuciones de probabilidad normal sino exponencial, con el objetivo de confirmar la sospecha enunciada, se planteó una prueba de hipótesis no paramétrica llamada Kruskal-Wallis (ver Anexo F-5) en la cual se analizaron los “promedios” para determinar si los datos provenían de una misma población o por el contrario difieran de la población. Al ser los “promedios” distintos se consideró hacer uso de la metodología de comparaciones múltiples con el propósito de estructurar grupos semejantes (se aclara que dicho procedimiento no fue requerido en la investigación dado que los “promedios” nunca fueron distintos), para luego aplicar la prueba de bondad y ajuste Chi-cuadrado a cada grupo, prueba que permitió probar si estos tiempos tenían una distribución de probabilidad exponencial negativa; para lo cual se utilizó tablas y gráficos al igual que análisis teóricos. Por último, para el tiempo de servicio se siguió un procedimiento similar al anteriormente mencionado.

4.2.1 Prueba Kruskal Wallis

Cabe resaltar que para los tiempos entre llegada así como los de servicio, se les aplicó la prueba no paramétrica Kruskal Wallis, la cual permite determinar si los datos obtenidos durante el transcurso de cada semana provienen de la misma población o no, es decir este contraste permitió decidir si puede aceptarse la hipótesis de que k muestras independientes (dependiendo de la semana) proceden de la misma población o de poblaciones idénticas; para aplicar la prueba se procedió a calcular las medianas de los tiempos entre llegada así como las del tiempo de servicios para cada intervalo de las 5 semanas, dado que la prueba Kruskal Wallis trabaja con medianas y no con media aritmética (Acuña, pág. 23).

Se toma la decisión de aplicar la prueba Kruskal Wallis dado que:

- ✓ Se asume la no normalidad en la distribución de los datos (tiempos entre llegada), dado que el tiempo entre llegada y de servicio se comportan como una variable aleatoria continua la cual no se ajusta a la distribución normal sino a la distribución de probabilidad exponencial negativa.
- ✓ Se va a ser la comparación de más de dos grupos independientes.
- ✓ Los datos se puedan ordenar de alguna manera (ordinales).
- ✓ No se tiene en cuenta la condición de igualdad en las varianzas (homocedasticidad) que si requiere la aplicación del test paramétrico ANOVA.
- ✓ Es clave mencionar que se aplicó la prueba Kruskal Wallis en lugar del análisis de varianzas de una vía (ANOVA) dado que este último requiere de normalidad en sus datos y es un

supuesto que no se puede admitir en la investigación dado que el modelo de teoría de cola a utilizar tiene como característica principal que los “promedios” (tasa entre llegadas y servicios) poseen una distribución exponencial negativa (Vicente, 2014-2015).

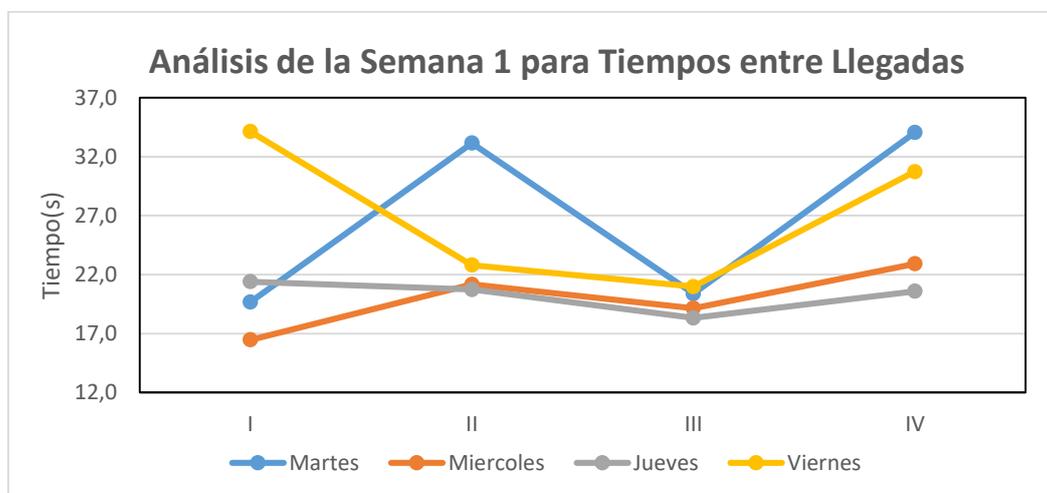
En la tabla 1 se encuentran resumidos los factores que se tuvieron en cuenta para la prueba Kruskal Wallis; estos factores son necesarios dado que el resultado de la prueba dependerá del número de datos con los cuales se le “alimente”, cada una de las semanas tiene diferentes niveles o muestras dado que cuentan con diferente número de días.

Tabla 1 Factores de la prueba Kruskal Wallis

Aspecto	Descripción
Factor	Día-Hora de la semana
Variable de respuesta	Tiempo entre llegada – Tiempo entre servicio
Tamaño de la muestra	120 muestras para cada nivel
Niveles de factor (semana 1)	16 niveles: 4 días de la semana por 4 intervalos de tiempo
Niveles de factor (semana 2)	16 niveles: 4 días de la semana por 4 intervalos de tiempo
Niveles de factor (semana 3)	20 niveles: 5 días de la semana por 4 intervalos de tiempo
Niveles de factor (semana 4)	16 niveles: 4 días de la semana por 4 intervalos de tiempo
Niveles de factor (semana 5)	16 niveles: 4 días de la semana por 4 intervalos de tiempo

A continuación se aplicará la prueba H para la semana 1, analizando los tiempos entre llegada mediante la fluctuación del tiempo en mención a través una figura, seguida de una tabla en donde se observa los “promedios” obtenidos, finalizando en la prueba de hipótesis. De forma análoga se procederá para el resto de semanas (ver anexo F-5).

4.2.1.1 Análisis de los tiempos entre llegadas



Fuente: elaboración propia

Figura 12 Se aprecia la fluctuación del tiempo entre llegadas de los usuarios en los 4 intervalos de tiempo que se consideraron durante los días de la semana uno. En el intervalo III (2:15 am a 3:45 am) se observa que el tiempo de llegada se comporta muy uniforme durante toda la semana

Tabla 2 Tiempo entre llegadas (s) semana 1

Días	Intervalos de tiempo			
	I	II	III	IV
Martes	19,7	33,1	20,4	34,0
Miércoles	16,5	21,2	19,2	22,9
Jueves	21,4	20,7	18,3	20,6
Viernes	34,1	22,8	21,0	30,7

Paso 1: Planteamiento de las hipótesis

H_0 : Los 16 tiempos entre llegada proviene de la misma semana

H_a : Algunos de los tiempos entre llegada proviene de semanas diferentes

Paso 2: Definición del nivel de significancia (α)

Se considera que hay una probabilidad del 5% ($\alpha = 0.05$) de rechazar la hipótesis nula H_0 cuando es verdadera.

Paso 3: Estadístico de prueba

Haciendo uso de la técnica explicada en el anexo F-5 y de la expresión (F-5, 1), se calcula el estadístico con $N = 16$ tiempos observados y con $j = 1, \dots, 4$ grupos, es decir:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^4 \frac{R_j^2}{N_j} - 3(N+1),$$

Con los datos de la **tabla 3** se obtiene que $H = 5.05$

Tabla 3 Datos para el cálculo de H semana 1. Tiempo entre llegadas

	Posición			
	4	14	5	15
	1	9	3	12
	10	7	2	6
	16	11	8	13
R_j	31	41	18	46
N_j	4	4	4	4

Paso 4: Toma de decisión

Como el valor crítico se toma el obtenido por la distribución Chi-cuadrado para un $\alpha = 0.05$ y $gl = 3$. Es decir, $\chi_{(0.05,3)}^2 = 7.81$.

En consecuencia, como $H < \chi_{(0.05,3)}^2$, se acepta la hipótesis nula.

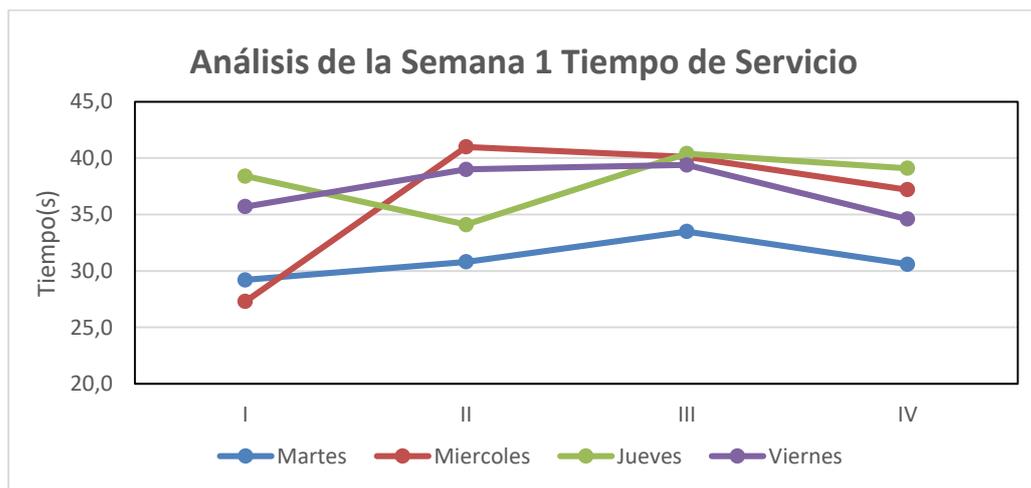
La tabla que sigue a continuación presenta un resumen de los resultados obtenidos para el estadístico H por semana, comparados con el valor crítico de $\chi^2_{(0.05,3)} = 7.81$, el cual no cambia, para analizar las hipótesis ya definidas en el paso 1 de esta sección.

Tabla 4 Resumen de la comparación entre el estadístico H y el valor crítico $\chi^2_{(0.05,3)} = 7.81$. Para tiempos entre llegadas

Semana	Estadístico (H)	Análisis Hipótesis
1	$5.05 < \chi^2_{(0.05,3)}$	Se acepta H_0
2	$3.04 < \chi^2_{(0.05,3)}$	
3	$1.53 < \chi^2_{(0.05,3)}$	
4	$5.63 < \chi^2_{(0.05,3)}$	
5	$2.68 < \chi^2_{(0.05,3)}$	

4.2.1.2 Análisis de tiempo de servicio

Procediendo de forma similar a la sección anterior, se analizará la semana 1 respecto al tiempo de servicio, considerando las fluctuaciones de los tiempos “promedios” según la figura 13 y tabla 5



Fuente: elaboración propia

Figura 13 Se aprecia la fluctuación del tiempo de servicio de los usuarios en los 4 intervalos de tiempo que se consideraron durante los días de la semana uno.

Tabla 5 Tiempo de servicio semana 1

Días	Intervalos de tiempo (s)			
	I	II	III	IV
Martes	29,2	30,8	33,5	30,6
Miércoles	27,3	41,0	40,1	37,2
Jueves	38,4	34,1	40,4	39,1
Viernes	35,7	39,0	39,4	34,6

El paso a seguir, es realizar la prueba H ; para la cual los pasos 1, y 2 son iguales a la sección anterior, el paso 3 cambia debido a la **tabla 5**, generando un valor para $H = 3.92$. Según tabla 6 y expresión (F-6, 1).

Tabla 6 Datos para el cálculo de H semana 1. Tiempo de servicio

	Posición			
	2	4	5	3
	1	16	14	9
	10	6	15	12
	8	11	13	7
R_j	21	37	47	31
N_j	4	4	4	4

Para la toma de decisión, paso 4, el valor crítico sigue siendo $\chi^2_{(0.05,3)} = 7.81$, ya que los grados de libertad siguen siendo 3. En la **tablas 7**, se resumen los resultados de la semana 1 a la 5 respecto a la aceptación de la hipótesis nula.

Tabla 7 Resumen de la comparación entre el estadístico H y el valor crítico $\chi^2_{(0.05,3)} = 7.81$. Para tiempos de servicio

Semana	Estadístico (H)	Análisis Hipótesis
1	$3.92 < \chi^2_{(0.05,3)}$	Se acepta H_0
2	$2.40 < \chi^2_{(0.05,3)}$	
3	$3.20 < \chi^2_{(0.05,3)}$	
4	$0.73 < \chi^2_{(0.05,3)}$	
5	$3.41 < \chi^2_{(0.05,3)}$	

Como se observa en las tablas realizadas respecto a la prueba Kruskal Wallis, tanto los tiempos entre llegada como de servicios de cada una de las semanas, se está aceptando H_0 por lo cual la hipótesis planteada de que los tratamientos son iguales tiene valides en estas, es decir no hay diferencias significativas entre los “promedios” hora-día de la semana. Es clave mencionar que en el caso en que la hipótesis nula de la prueba Kruskal Wallis hubiese sido rechazada (en alguna de las semanas), se hubiera requerido realizar un análisis adicional a los datos, esto con el propósito de establecer entre que “promedios” se estarían dando las diferencias que hacen que la hipótesis nula se rechace; mediante este proceso se formarían grupos semejantes de “promedios” con el propósito de seguir el tratamiento estadístico con ellas. Este análisis estaría basado en el test de Dunn para comparaciones múltiples también llamado análisis post- hoc de Dunn. (Díaz, 2009 , págs. 88-89).

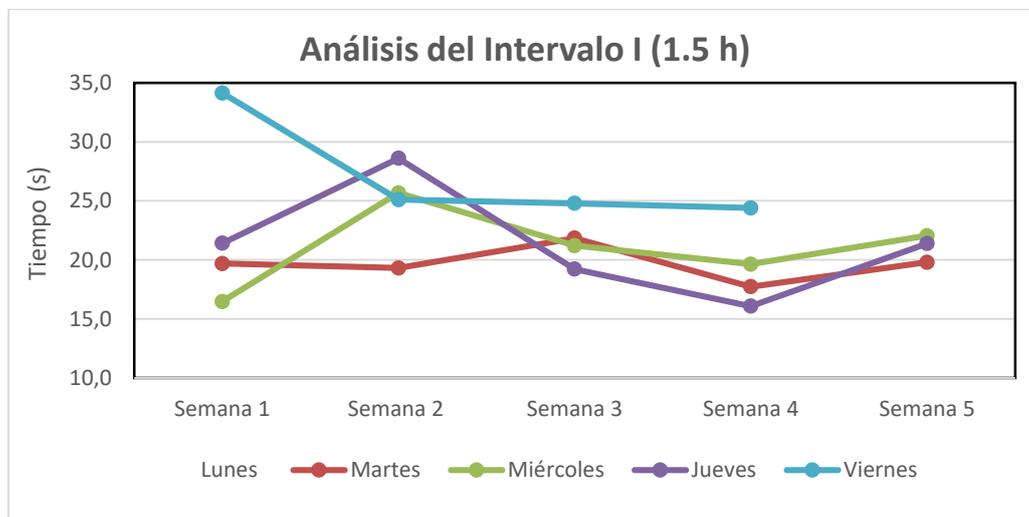
Determinado que los tratamientos provienen de la misma población se puede hallar la tasa promedio entre llegada $Ln(2)/\lambda$ y la tasa promedio entre servicio $Ln(2)/\mu$ (haciendo uso de las “promedios” presentados en la sección 4.2.1) para cada semana una vez se haya estudiado

el comportamiento exponencial entre los tratamientos (análisis que se presenta en la sección 4.2.2).

4.2.1.3 Análisis de los tiempos entre llegada por intervalos

Con el fin de enriquecer la investigación se decidió analizar cómo fue el comportamiento de los intervalos con el transcurrir de cada semana, esto con el objetivo de saber si estos tenían un comportamiento similar en todas las semanas respecto al tiempo entre llegada. Para este análisis se debe señalar que todos los intervalos en el día lunes para las semanas dos y cuatro se rechazarán debido a que no se cuenta con información suficiente para su estudio (por ser lunes festivos). Igualmente, no se posee información de los intervalos de tiempo del día lunes en la semana uno y del día viernes en la semana cinco dado que estos días hacen parte del mes de julio y septiembre respectivamente, los cuales no se encuentra dentro del periodo de recopilación de datos.

En consecuencia, se describirá el análisis del tiempo entre llegada para el intervalo I en función de los días hábiles en la empresa, agrupados por semana; considerando las fluctuaciones de los tiempos “promedios” según la figura 14 y **tabla 8**, para luego decidir si los tiempos en estudio proviene de la misma población o no.



Fuente: elaboración propia

Figura 14 Se aprecia la fluctuación del tiempo entre llegadas de los usuarios durante las cinco semanas en el intervalo I.

Tabla 8 Tiempo entre llegadas (s) Intervalo I

Días	Semanas				
	1	2	3	4	5
Lunes	No aplica	Festivo	22,9	Festivo	21,1
Martes	19,7	19,3	21,8	17,7	19,8
Miércoles	16,5	25,7	21,2	19,6	22,0
Jueves	21,4	28,6	19,2	16,1	21,4
Viernes	34,1	25,1	24,8	24,4	No aplica

Aplicación de la prueba H o Kruskal Wallis

Paso 1: Planteamiento de las hipótesis

H_0 : Los 21 tiempos entre llegada proviene del intervalo I

H_a : Algunos de los tiempos entre llegadas proviene de intervalos diferentes

Paso 2: Definición del nivel de significancia (α)

Se considera que hay una probabilidad del 5% ($\alpha = 0.05$) de rechazar la hipótesis nula H_0 cuando es verdadera.

Paso 3: Estadístico de prueba

Haciendo uso de la técnica explicada en el anexo F-5 y de la expresión (F-5, 1), se calcula el estadístico con $N = 21$ tiempos observados y con $j = 1, \dots, 5$ grupos.

Los datos de la **tabla 9** permiten obtener que $H = 4.34$

Tabla 9 Datos para el cálculo de H
Intervalo I. Tiempo entre llegadas

	Posición				
	7	5	15	3	9
	2	19	13	6	8
	12	20	10	1	14
	21	18	4	16	11
	-	-	17	-	-
R_j	42	62	59	26	42
N_j	4	4	5	4	4

“-” Indica que es día no aplica o fue festivo

Paso 4: Toma de decisión

Para el valor crítico se considera el obtenido por la distribución Chi-cuadrado con $\alpha = 0.05$ y $gl = 4$. Es decir, $\chi^2_{(0.05,4)} = 9.48$.

En consecuencia, como $H < \chi^2_{(0.05,4)}$, se acepta la hipótesis nula.

La tabla que sigue a continuación presenta un resumen de los resultados obtenidos para el estadístico H por intervalo, comparados con el valor crítico de $\chi^2_{(0.05,4)} = 9.48$, el cual no cambia, para analizar las hipótesis H_0 y H_a .

Tabla 10 Resumen de la comparación entre el estadístico H y el valor crítico $\chi^2_{(0.05,4)} = 9.48$. Para tiempos entre llegadas por intervalos

Intervalo	Estadístico (H)	Análisis Hipótesis
I	$4.34 < \chi^2_{(0.05,3)}$	Se acepta H_0
II	$4.25 < \chi^2_{(0.05,3)}$	
III	$1.92 < \chi^2_{(0.05,3)}$	
IV	$1.49 < \chi^2_{(0.05,3)}$	

El análisis por intervalo para los tiempos de servicio no se tuvo en cuenta por dos razones:

1. El análisis por intervalo entre llegadas se hizo únicamente con el propósito de establecer si los usuarios llegaban de una manera uniforme al sistema de espera, es decir si los intervalos tenían un comportamiento similar en todas las semanas; pese a no ser parte de los objetivos de la investigación, se hizo este proceso únicamente para informar a la entidad dicho aspecto de su sistema de espera.
2. El tiempo que demora el servidor en atender un usuario es probabilístico por lo que este puede ser largo o corto dependiendo de diferentes factores, por ejemplo el momento en el que el servidor 1 se encuentra atendiendo al usuario preferencial (recordar que dicho usuario no hace parte de la investigación) por lo que los dos restantes servidores recibirán mayor cantidad de usuarios normales haciéndolos trabajar más rápido, otro ejemplo sería el cansancio, lo que los obliga a laborar de una manera más lenta. Con lo anterior se está tratando de hacer entender que el tiempo de atención no puede ser controlado, por lo que el análisis por intervalo de este no tendría sentido.

4.2.2 Prueba de bondad de ajuste por frecuencias esperadas mediante la distribución

Chi-cuadrado

Continuando el proceso estadístico se procederá a comprobar si los datos recopilados durante los 21 días que duro el estudio siguen una distribución de probabilidad exponencial negativa, esto se hace debido a que en el modelo M/M/s con el cual se está trabajando para describir y mejorar el sistema de espera de la entidad, los tiempos (por teoría) siguen dicha distribución ; como ya se ha mencionado en el caso en que no ocurriera para alguno de los dos tiempos se supondría que la distribución en estudio se da, dado que el modelo de colas que acoge a la distribución describe en alto grado el comportamiento del sistema de espera de la entidad. Para estudiar el comportamiento exponencial entre los tratamientos se procederá a realizar la prueba de bondad de ajuste por frecuencias esperadas presentada en el anexo F-5, la cual puede emplearse para determinar qué tan bien se ajustan una distribución teórica (para nuestro caso la distribución exponencial) a una distribución empírica (es decir, a una distribución obtenida a partir de datos muestrales). Por eso se deben observar las coincidencias entre frecuencia observada y esperada debido a que entre menor sea el valor obtenido menor será el valor de Chi-cuadrado, si $\chi^2 = 0$ significa que hay una completa concordancia entre las frecuencias observadas y esperadas (Martinez Bencardino, 2009, págs. 545-546). Se debe tener en cuenta

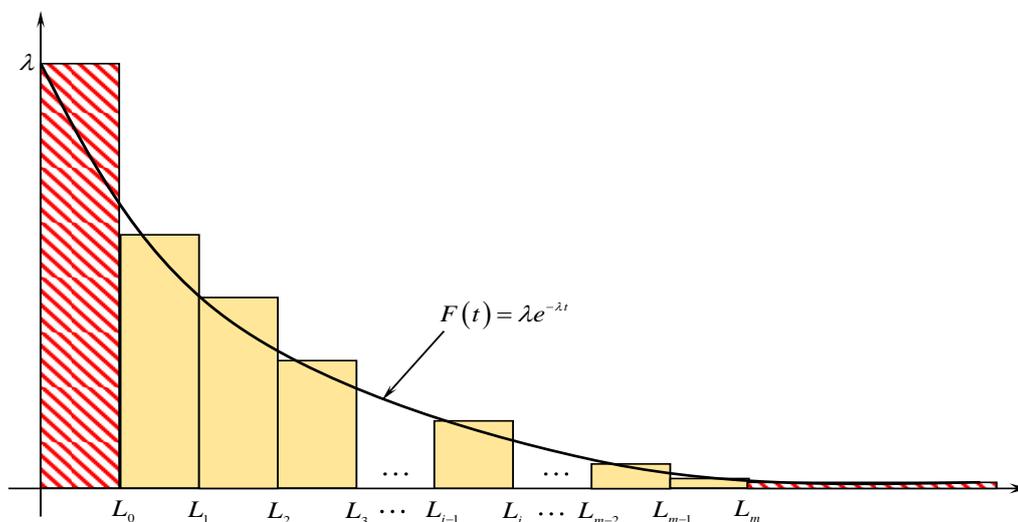
que esta prueba se realiza solo en aquellos casos en que el análisis de los datos está basado en conteo.

4.2.2.1 Análisis de los tiempos entre llegada por semanas

Para comprobar de mejor manera lo explicado anteriormente se procederá a realizar la prueba para los tiempos entre llegadas y así brindar la herramienta necesaria para aplicar la teoría de colas en la entidad en la que se realizó la investigación, para esto se procedió de la siguiente manera.

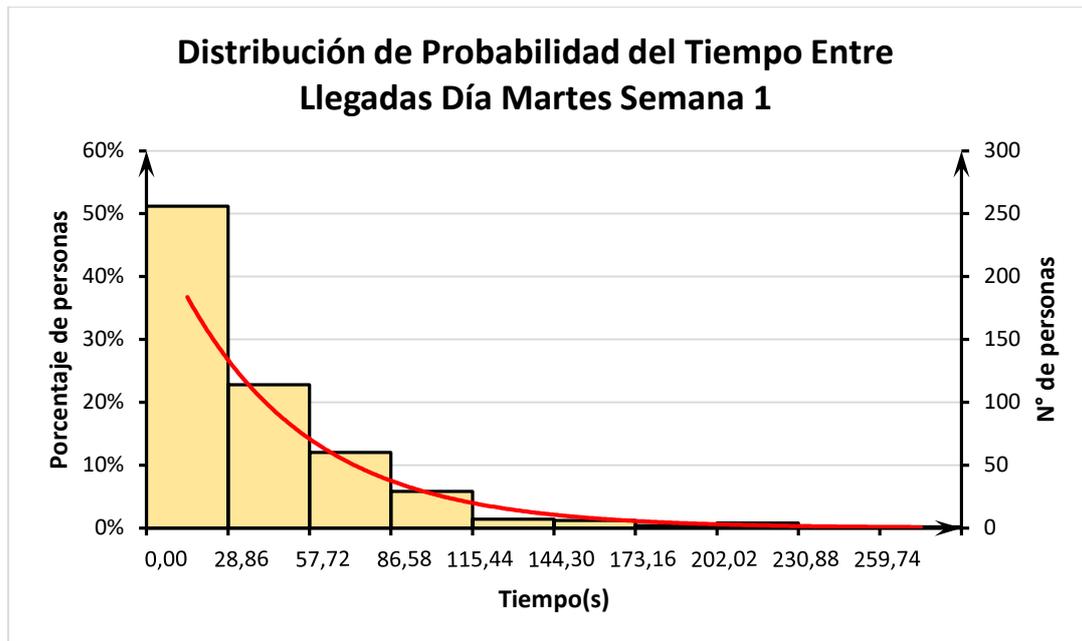
1. Antes de iniciar con la prueba es necesario tener en cuenta el error que se presenta cuando se agrupa los datos en intervalos considerando el valor mínimo y máximo obtenidos en la muestra, ya que el primer intervalo no empieza en cero y el último intervalo tiene un ancho finito a nivel práctico, pero teóricamente debería ser $[0, L_1)$ y $[L_{m-1}, \infty)$, este último se da debido a que $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$ (ver figura 15). Para resolver en parte ese problema se tomó como dato mínimo el cero y el máximo el tiempo entre llegada presentado el día jueves de la semana 5 correspondiente a 288.58 s.

Siguiendo la idea anterior, cada día de las semanas cuenta con 480 datos, los cuales se agrupan mediante la fórmula de Sturges, presentándose 10 intervalos. El ancho de los intervalos corresponde 28.86 s. (ver **tabla 11**); luego se pasó a calcular sus respectivas frecuencias absolutas o frecuencia observada (número de personas entre cada intervalo) y relativas porcentual (H_i) la cual representa la distribución de probabilidad de los datos, permitiendo ajustar la información a una distribución de probabilidad negativa, tal como se observa en la figura 16 (línea roja).



Fuente: elaboración propia

Figura 15 En esta figura se aprecia en los sectores en trama los errores que se comenten al tratar de aproximar el agrupamiento de datos con frecuencia h_i^S a la distribución de probabilidad exponencial negativa



Fuente: elaboración propia

Figura 16 La línea roja muestra la tendencia de la función densidad exponencial negativa para el tiempo entre llegadas día martes de la semana 1

- Se procederá a realizar la prueba de hipótesis mediante la distribución de probabilidad Chi-cuadrado. Utilizando a manera de ejemplo el día martes de la semana 1.

Paso 1: Planteamiento de las hipótesis

H_0 : La distribución de probabilidad del tiempo de entre llegadas sigue una distribución de probabilidad exponencial negativa.

H_a : La distribución de probabilidad del tiempo de entre llegadas *no* sigue una distribución de probabilidad exponencial negativa.

Paso 2: Definición del nivel de significancia (α)

Se considera que hay una probabilidad del 5% ($\alpha = 0.05$) de rechazar la hipótesis nula H_0 cuando es verdadera.

Paso 3: Estadístico de prueba

Para esta parte se debe construir la tabla que permite calcular χ^2 , por ello se necesita determinar la frecuencia esperada E_i . Por lo tanto, se procede a determinar la frecuencia relativa acumulada con límite superior h_i^s al igual que la esperada e_i^s , esta última corresponde a la distribución de probabilidad que se desea probar.

Se tiene que para el primer día el “promedio” o mediana (μ_M) es de 24.45 s (de la **tabla 2** esta información no es posible sacarla sino de muestra bruta). Entonces de acuerdo (Epidat, 2014, pág. 62)

$$\lambda = Ln(2)/\mu_M, \quad (10)$$

permitiendo establecer la siguiente función de densidad:

$$F(t) = \begin{cases} 0.0284 e^{-0.0284 t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases},$$

de donde se sigue, $P[L_{i-1} \leq t \leq L_i] = e^{-0.0284 L_{i-1}} - e^{-0.0284 L_i}$ con $i = 1, \dots, 9$. Es decir, $e_i^s = P[L_{i-1} \leq t \leq L_i]$. Ver **tabla 11**; para la última fila $e_{10}^s = 1 - \sum_{i=1}^9 e_i^s$, debido a que el intervalo teórico es de la forma $[259.74, \infty)$.

Por último $E_i = e_i^s \times n$, que para la primera fila da como resultado 258 personas. Luego $\chi^2 = 16.66$.

Tabla 11 Parámetros para determinar el estadístico de prueba Chi-cuadrado. Día martes semana 1

Tiempo (s)	O_i	h_i	h_i^s	H_i (%)	E_i	e_i^s	$(O_i - E_i)^2 / E_i$
[0.00, 28.86)	258	0.53750	0.53750	53.750	268	0.55883	0.39
[28.86, 57.72)	114	0.23750	0.77500	23.750	118	0.24654	0.16
[57.72, 86.58)	60	0.12500	0.90000	12.500	52	0.10876	1.16
[86.58, 115.44)	29	0.06042	0.96042	6.042	23	0.04798	1.55
[115.44, 144.30)	7	0.01458	0.97500	1.458	10	0.02117	0.98
[144.30, 173.16)	6	0.01250	0.98750	1.250	4	0.00934	0.51
[173.16, 202.02)	2	0.00417	0.99167	0.417	2	0.00412	0.00
[202.02, 230.88)	4	0.00833	1.00000	0.833	1	0.00182	11.21
[230.88, 259.74)	0	0.00000	1.00000	0.000	0	0.00080	0.38
[259.74, ∞)	0	0.00000	1.00000	0.000	0	0.00063	0.30
	480	1.00		100.0	480	1.00	16.66

Paso 4: Toma de decisión

Para el valor crítico se cuenta con $gl = 9$ y $\alpha = 0.05$, $\chi_{(0.05,9)}^2 = 16.919$.

En consecuencia, como $\chi^2 < \chi_{(0.05,9)}^2$, se acepta la hipótesis nula.

La **tabla 12** presenta un resumen de los resultados obtenidos para el estadístico χ^2 por día, comparados con el valor crítico de $\chi^2_{(0.05,9)}$, el cual no cambia, para analizar las hipótesis H_0 y H_a .

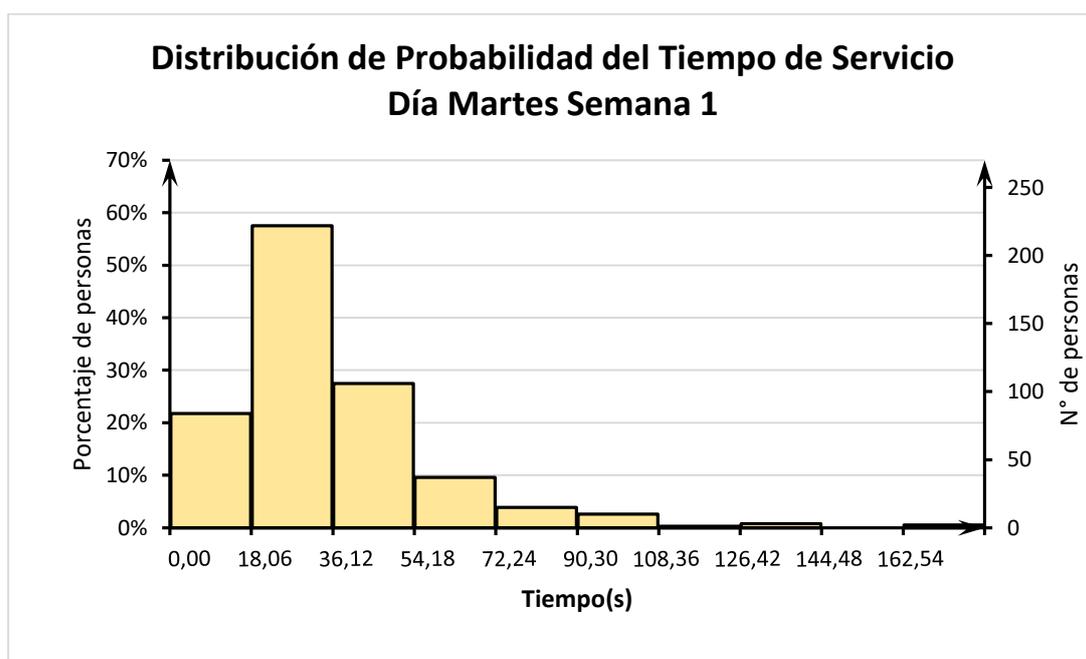
Tabla 12 Resumen de la comparación entre el estadístico χ^2 y el valor crítico $\chi^2_{(0.05,9)} = 16.919$. Para tiempos entre llegadas

Días	Semanas				
	1	2	3	4	5
Lunes	-	-	7.45	-	19.17
Martes	16.66	4.55	10.16	24.34	8.98
Miércoles	6.18	7.27	7.86	8.40	2.84
Jueves	10.16	7.40	16.32	6.88	9.45
Viernes	9.82	11.97	9.69	9.05	-

Los guiones “-” indican que es día no se trabajó en la entidad o no hacen parte del estudio

4.2.2.2 Análisis de los tiempos de servicio

Para esta parte del análisis se procederá de manera similar, agrupando la información en 10 intervalos con $L_0 = 0$ y en este caso $L_{m\acute{a}x}$ se tomó el valor más alto del tiempo de servicio para cada día. Para el caso del día martes de la semana 1. En la figura 17 se observa que el comportamiento de la probabilidad no se aproxima a una distribución de probabilidad negativa.



Fuente: elaboración propia

Figura 17 Se aprecia de que no hay una tendencia a la función densidad exponencial negativa para el tiempo de servicio del día martes de la semana 1; debido a que las barras (que representan la probabilidad) no aparecen en su totalidad en forma descendentes.

De acuerdo al numeral 2 del ítem anterior, solo hace falta contrastar las hipótesis H_0 y H_a ; hecho que a través de la **tabla 13** se observa que la hipótesis nula se rechaza ya que el valor crítico $\chi^2_{(0.05,9)} = 16.919$, está muy por debajo de los valores estadísticos dados para cada día de las 5 semanas.

Tabla 13 Resumen de la comparación entre el estadístico χ^2 y el valor crítico $\chi^2_{(0.05,9)} = 16.919$. Para tiempos de servicio

Días	Semanas				
	1	2	3	4	5
Lunes	-	-	199,96	-	303.26
Martes	225,19	284,82	165,17	181,76	178,80
Miércoles	213,05	216,64	275,26	139,23	319,49
Jueves	214,91	305,37	197,34	167.41	313,81
Viernes	290.10	282,47	74,86	308,30	-

Los guiones “-” indican que es día no se trabajó en la entidad o no hacen parte del estudio

En este caso, la distribución exponencial no proporcionará una buena aproximación a la distribución de los tiempos de servicio, ya que las pequeñas desviaciones de la media que puedan ocurrir se deberían a variaciones en la eficiencia del servidor. Además si el servicio requerido es, en esencia, idéntico para cada cliente y el servidor realiza siempre la misma secuencia de operaciones, entonces los tiempos de servicio reales tienden a aproximarse al tiempo esperado de servicio (Hiller & Lieberman, 2010, pág. 717).

Si los procesos que tiene que realizar el servidor difieren de un cliente a otro, entonces es posible que la distribución exponencial pueda constituir un buen ajuste (Gonzalez Vera, 2012-2013) y (Universidad Carlos III de Madrid, 2007-2008, págs. 1-2)

Como se puede evidenciar, los tratamientos en cada una de las cinco semanas siguen una distribución de probabilidad exponencial negativa para los tiempos entre llegadas, pero para el tiempo entre servicios no se presenta la mencionada distribución. En aras de realizar una aproximación de la parte experimental a la teórica, se puede suponer que el tiempo de servicio cumple con la distribución de probabilidad exponencial negativa, lo que permite asegurar que el modelo de teoría de colas correcto es el M/M/s (no es necesario realizar la comprobación por intervalos debido a que no se requiere para cumplir los objetivos de la investigación). Además de que el sistema de espera cuenta con más de un servidor, es necesario recordar que la prueba Kruskall Wallis dio información respecto a que los tratamientos hacen parte de la misma población; con todo lo anterior, ya se tiene la “herramienta” necesaria para trabajar con el modelo de teoría de colas.

4.3 Determinación de los parámetros necesarios para utilizar el modelo de teoría de colas y variables de salida de interés

En este apartado se presenta los resultados de la aplicación del modelo de colas M/M/s, se utilizó este modelo matemático dado que en el apartado anterior se corroboró que los tiempos entre llegadas siguen una distribución exponencial negativa al igual que los tiempos entre servicios. Los parámetros de diseño del modelo M/M/s que se calcularon fueron: número esperado de usuarios en el sistema L , número esperado de usuarios en la fila L_q , tiempo estimado de espera en el sistema W , tiempo estimado de espera en la fila W_q , porcentaje de tiempo inactivo de los promotores P y probabilidad de vacío P_0 . Estos parámetros permitieron estudiar el sistema de espera de la entidad y por ende calcular el número óptimo de servidor de esta, tanto para cada semana como para cada uno de los intervalos construidos en el mes.

4.3.1 Parámetros de tasas por cada semana

Inicialmente se presenta el cálculo de las tasas descritas en la sección 3.1.2, con las cuales el modelo de teoría de colas se sustenta, los datos utilizados para el cálculo de dichas tasas fueron exhibidos en las tablas 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20. Los resultados de estas tasas se presentan de forma breve en la siguiente tabla:

Tabla 14 Tasa del modelo M/M/s para cada una de las semana en observación

Semana	$Ln(2)/\lambda$	λ	$Ln(2)/\mu$	μ	$1/s\mu$	$s\mu$
1	22,1	112,7	35,9	69,6	17,2	208,8
2	22,9	109,2	43,0	58,1	20,7	174,1
3	22,0	113,3	41,2	60,6	19,8	181,7
4	23,1	107,9	38,5	64,9	18,5	194,4
5	21,5	116,2	33,3	75,0	16,0	224,8

Interpretación: A manera de ejemplo los datos de la semana 2 están dados en “promedio”, en consecuencia, se dice que un usuario llega cada 22,9 segundos al sistema de espera; llegan 109 usuarios en una hora al sistema; un solo servidor atiende un usuario cada 43,0 segundos, además atiende 58 usuarios por hora; los tres servidores en conjunto atenderían un solo usuario en 20,7 segundos y finalmente ellos atienden en conjunto a 174 usuarios en una hora. Cabe resaltar que el cálculo de las anteriores tasas fue el resultado de hallar la mediana entre la muestra bruta de cada semana.

A continuación se usan las tasas μ y λ obtenidos en la **tabla 41** para calcular los resultados de sistema estable (parámetros de diseño) para cada una de las cinco semanas con las expresiones que se expusieron en la sección 3.2 basadas en las ecuaciones de Little expuestas en la sección 3.1.5. Los resultados que se obtuvieron de esta forma son válidos en el supuesto de que el sistema de espera de la entidad de servicio se encuentre en condición de estado estable, como ya se mencionó en la sección 3.1.3. Esto significa que el sistema no se encuentra afectado por el tiempo que ha transcurrido desde el momento cero o de apertura.

4.3.2 Parámetros por cada semana en estado estable

Adicionalmente a lo anterior es importante considerar de nuevo que en todos los siguientes resultados, P_0 indica la probabilidad de que un usuario encuentre el sistema vacío, P también expresa la probabilidad de ocupación del sistema por hora, L_q representa la cantidad esperada de usuarios en la cola (excluyendo los usuarios que están siendo atendidos), L indica el “promedio” de usuarios que hay en el sistema (teniendo en cuenta los usuarios que están siendo atendidos como esperando en fila), W_q enuncia lo que se demora un usuario esperando en cola durante la semana (dada en minutos) y por último W representa el tiempo “promedio” de espera de un usuario en todo el sistema (se cuenta el tiempo de espera en fila como en la atención)

En las siguientes tablas se exponen los resultados de estado estable con diferente número de servidores para cada una de las semanas en observación:

Tabla 15 Análisis de los parámetros W, L, W_q, L_q de acuerdo al número de servidores considerando la semana 1

	Servidores ($\lambda = 112,7$ usuario/h y $\mu = 69,6$ usuario/h)		
	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
P_0	0%	10,5%	18,3%
P	177 %/h = 106 mín *	80,9 %/h = 48,6 mín *	54,0 %/h = 32,4 mín *
L_q	Desbordado	3	1
L	Desbordado	5	3
W_q	Desbordado	1,6	9,2
W	Desbordado	2,5	46

*Con valores mayores al 100% el sistema de espera se desborda, dado que el valor base para el factor de ocupación es 1 hora.

Interpretación: Haciendo uso de dos servidores en esta semana, el sistema de espera de la entidad presenta las siguientes características dadas en “promedio”: La probabilidad de que un usuario llegue al sistema de espera de la entidad prestadora de servicio y lo encuentre vacío es del 10,5%. La probabilidad de ocupación del sistema de espera en la entidad prestadora de servicio es de 80,9%/h, es decir, en una hora el sistema está ocupado, 48,6 minutos. Hay tres usuarios esperando para ser atendidos, en todo momento de la semana. Hay cinco usuarios en el sistema (teniendo en cuenta los usuarios que están siendo atendidos como esperando en fila). Un usuario espera en cola un tiempo de 1,6 minutos. El tiempo de espera de un usuario en todo el sistema es 2,4 minutos (suma tiempo de fila con el de servicio).

Tabla 16 Análisis de los parámetros W, L, W_q, L_q de acuerdo al número de servidores considerando la semana 2

Servidores ($\lambda = 109,2$ usuario/h y $\mu = 58,1$ usuario/h)			
	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
P_0	0%	3,1%	13,1%
P	186% / h = 112 mín *	93,9% / h = 56,4 mín *	62,6% / h = 37,6 mín *
L_q	Desbordado	14	1
L	Desbordado	16	3
W_q	Desbordado	7,8	0,4
W	Desbordado	8,9	1,4

*Con valores mayores al 100% el sistema de espera se desborda, dado que el valor base para el factor de ocupación es 1 hora.

Interpretación: Haciendo uso de dos servidores en esta semana, el sistema de espera de la entidad presenta las siguientes características dadas en “promedio”: La probabilidad de que un usuario llegue al sistema de espera de la entidad prestadora de servicio y lo encuentre vacío es del 3,1%. La probabilidad de ocupación del sistema de espera en la entidad prestadora de servicio es de 93,9%/hora, es decir, en una hora el sistema está ocupado, 56,4 minutos. Hay catorce usuarios esperando para ser atendidos, en todo momento de la semana. Hay dieciséis usuarios en el sistema (teniendo en cuenta los usuarios que están siendo atendidos como esperando en fila). Un usuario espera en cola un tiempo de 7,8 minutos. El tiempo de espera de un usuario en todo el sistema es 8,9 minutos (suma tiempo de fila con el de servicio).

Tabla 17 Análisis de los parámetros W, L, W_q, L_q de acuerdo al número de servidores considerando la semana 3

Servidores ($\lambda = 113,3$ usuario/h y $\mu = 60,6$ usuario/h)			
	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
P_0	0%	3,3%	13,3%
P	184% / h = 110 mín *	93,6% / h = 56,1 mín *	62,4% / h = 37,4 mín *
L_q	Desbordado	13	1
L	Desbordado	15	3
W_q	Desbordado	7	0,3
W	Desbordado	8	1,3

*Con valores mayores al 100% el sistema de espera se desborda, dado que el valor base para el factor de ocupación es 1 hora

Interpretación: Haciendo uso de dos servidores en esta semana, el sistema de espera de la entidad presenta las siguientes características dadas en “promedio”: La probabilidad de que un usuario llegue al sistema de espera de la entidad prestadora de servicio y lo encuentre vacío es del 3,3%. La probabilidad de ocupación del sistema de espera en la entidad prestadora de servicio es de 93,6%/hora, es decir, en una hora el sistema está ocupado, 56,1 minutos. Hay trece usuarios esperando para ser atendidos, en todo momento de la semana. Hay quince usuarios en el sistema (teniendo en cuenta los usuarios que están siendo atendidos como esperando en fila). Un usuario espera en cola un tiempo de 7 minutos. El tiempo de espera de un usuario en todo el sistema es 8 minutos (suma tiempo de fila con el de servicio).

Tabla 18 Análisis de los parámetros W, L, W_q, L_q de acuerdo al número de servidores considerando la semana 4

	Servidores ($\lambda = 107,9$ usuario/h y $\mu = 64,9$ usuario/h)		
	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
P_0	0%	9,2%	17,3%
P	166% / $h = 100$ mín *	83,1% / $h = 49,9$ mín *	55,4% / $h = 33,3$ mín *
L_q	Desbordado	4	1
L	Desbordado	5	2
W_q	Desbordado	2,1	0,2
W	Desbordado	3	1,1

*Con valores mayores al 100% el sistema de espera se desborda, dado que el valor base para el factor de ocupación es 1 hora

Interpretación: Haciendo uso de dos servidores en esta semana, el sistema de espera de la entidad presenta las siguientes características dadas en “promedio”: La probabilidad de que un usuario llegue al sistema de espera de la entidad prestadora de servicio y lo encuentre vacío es del 9,2%. La probabilidad de ocupación del sistema de espera en la entidad prestadora de servicio es de 83,14%/hora, es decir, en una hora el sistema está ocupado, 49,9 minutos. Hay cuatro usuarios esperando para ser atendidos, en todo momento de la semana. Hay cinco usuarios en el sistema (teniendo en cuenta los usuarios que están siendo atendidos como esperando en fila). Un usuario espera en cola un tiempo de 2,1 minutos. El tiempo de espera de un usuario en todo el sistema es 3 minutos (suma tiempo de fila con el de servicio).

Tabla 19 Análisis de los parámetros W, L, W_q, L_q de acuerdo al número de servidores considerando la semana 5

	Servidores ($\lambda = 116,2$ usuario/h y $\mu = 75,0$ usuario/h)		
	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
P_0	0%	12,6%	19,8%
P	150% / $h = 90$ mín *	77,5% / $h = 46,5$ mín *	51,7% / $h = 31$ mín *
L_q	Desbordado	2	1
L	Desbordado	4	2
W_q	Desbordado	1,2	0,1
W	Desbordado	2,0	0,9

*Con valores mayores al 100% el sistema de espera se desborda, dado que el valor base para el factor de ocupación es 1 hora

Interpretación: Haciendo uso de dos servidores en esta semana, el sistema de espera de la entidad presenta las siguientes características dadas en “promedio”: La probabilidad de que un usuario llegue al sistema de espera de la entidad prestadora de servicio y lo encuentre vacío es del 12,6%. La probabilidad de ocupación del sistema de espera en la entidad prestadora de servicio es de 77,5%/hora, es decir, en una hora el sistema está ocupado, 46,5 minutos. Hay dos usuarios esperando para ser atendidos, en todo momento de la semana. Hay cuatro usuarios en el sistema (teniendo en cuenta los usuarios que están siendo atendidos como esperando en fila). Un usuario espera en cola un tiempo de 1,2 minutos. El tiempo de espera de un usuario en todo el sistema es 2 minutos (suma tiempo de fila con el de servicio).

4.4 Aplicación del criterio de aceptación que permite obtener la elección del número óptimo de cajeros que atenderán al usuario

Si bien el modelo de teoría de colas M/M/s permitió determinar el tiempo “promedio” en que un usuario debe aguardar en el sistema de espera para ser atendido, también valora cuántos usuarios en “promedio” se encuentran en la cola para un número determinado de servidores (teniendo en cuenta la semana a la cual se hace mención); resta analizar entonces, el número de servidores que debe mantener la empresa para aumentar su eficiencia operativa con base a los resultados de los parámetros. Para ello se estable a dos factores que permiten generar un modelo de nivel de aceptación:

- ✓ el tiempo estimado de espera en el sistema (W) no debe superar los $\alpha = 14$ minutos (sugerido por la empresa)
- ✓ el porcentaje de tiempo inactivo de los cajeros (X) debe ser menor al $\beta = 18\%$ por hora o $\beta = 10.8 \text{ min.}$ (sugerido por la empresa)

Es decir, si se cumple que $W \leq 14 \text{ min}$ y $X \leq 18\% / h$, entonces se optimiza el número de servidores s .

En general, se debe satisfacer la expresión

$$W \leq \alpha \text{ y } X \leq \beta \quad (11)$$

El valor W se obtiene con base a los resultados del apartado anterior, para el valor X se calcula mediante el complemento del factor de ocupación, es decir $1 - P$.

4.4.1 Parámetros de optimización de servidores por semana

Inicialmente se presentan los cálculos en términos semanales, es decir, se determina el número de servidores que debería mantener la empresa según el comportamiento del sistema con base a la semana.

Tabla 20 Parámetros de optimización para la semana 1

		Número de servidores		
		1	2	3
W	Desbordados		2,5 min	1,0 min
X	Desbordados		19,0% / $h = 11,4 \text{ min}$	46,0% / $h = 27,6 \text{ min}$

Para la semana 1 el número de servidores que debería mantener la empresa es dos; dado que, para tres servidores el valor de X sobrepasa en un 28,0% el 18% sugerido por la empresa.

Tabla 21 Parámetros de optimización para la semana 2

		Número de servidores		
		1	2	3
W	Desbordados		8,9 min	1,4 min
X	Desbordados		6,0% / $h = 3,6 \text{ min}$	37,3% / $h = 22,4 \text{ min}$

Para la semana 2 el número de servidores que debería mantener la empresa es dos, dado que, para tres servidores el valor de X sobrepasa en un 19,3% el 18% sugerido por la empresa.

Tabla 22 Parámetros de optimización para la semana 3

		Número de servidores		
		1	2	3
W	Desbordados		8,0 min	1,3 min
X	Desbordados		6,4% / $h = 3,9\text{mín}$	37,6% / $h = 22,6\text{mín}$

Para la semana 3 el número de servidores que debería mantener la empresa es dos, dado que, para tres servidores el valor de X sobrepasa en un 19,6% el 18% sugerido por la empresa.

Tabla 23 Parámetros de optimización para la semana 4

		Número de servidores		
		1	2	3
W	Desbordados		3,0 min	1,1 min
X	Desbordados		16,9% / $h = 10,1\text{mín}$	44,6% / $h = 26,7\text{mín}$

Al igual que en la semana uno, dos y tres la semana 4 debería mantener dos servidores; dado que, para tres servidores el valor de X en esta semana sobrepasa en un 26,6% el 18% sugerido por la empresa.

Tabla 24 Parámetros de optimización para la semana 5

		Número de servidores		
		1	2	3
W	Desbordados		2,0 min	0,9 min
X	Desbordados		22,5% / $h = 13,5\text{mín}$	48,3% / $h = 29\text{mín}$

Finalmente, para la semana 5 se tomara como número óptimo de servidores 2; dado que, como se puede ver en la tabla el valor de W para el caso de dos o tres servidores respeta la regla de decisión, pero en el caso de X no debido a que ambos sobrepasan el 18%. Con el propósito de solucionar esta situación se tomó el número de servidores que reflejara el valor más cercano a X y este fue el de dos servidores.

Una vez obtenidos los datos semanales se procederá a realizar la misma operación para cada intervalo registrado durante las 5 semanas que duro la toma de datos y de esta manera obtener el número óptimo de servidores que debe haber en cada uno de ellos, para esto se deben tener en cuenta las siguientes recomendaciones.

Con el fin de realizar un mejor análisis, en aquellos casos en los cuales se acepta solo uno de los parámetros tanto con 2 como con 3 servidores se procedió a comparar aquellos que no se aceptaran y se tomaron reglas de decisión dependiendo de cada caso.

- a) Para el caso de W se presentaron los siguiente casos se encontraron 4 casos en los que se presenta esta situación

Tabla 25 Casos especiales en W

Caso	Servidores	Semana	Día	Intervalo	X (%)	W (min)
1	3	1	Miércoles	2	35,44	1,37
	2	1	Miércoles	2	3,16	15,85
2	3	2	Martes	4	33,45	1,50
	2	2	Martes	4	0,18	294,87
3	3	2	Miércoles	4	34,92	1,51
	2	2	Miércoles	4	2,38	22,89
4	3	3	Martes	1	35,44	1,41
	2	3	Martes	1	3,15	16,38
5	3	4	Martes	4	33,55	1,38
	2	4	Martes	4	0,32	150,67
6	3	4	Miércoles	1	33,93	1,34
	2	4	Miércoles	1	0,89	52,83
7	3	5	Miércoles	3	33,63	1,07
	2	5	Miércoles	3	1,95	19,69

Interpretación: En la tabla se observa de color rojo los parámetros que se aceptaron de acuerdo a los valores establecidos por la empresa, como se puede notar en cada caso se acepta uno de los parámetros con 3 servidores y el otro con 2 servidores. Con el fin de solucionar este inconveniente se procedió a ampliar $W \leq 16 \text{ min}$ esto con el objetivo de optimizar el sistema sin afectar el tiempo de espera de los usuarios, en caso de sobrepasar este valor se trabajara con 3 servidores.

- b) Para el caso de X se tomó de base lo presentado en la semana 5, se procedió a comparar que valor era el más cercano al 18% por encima tanto con 2 como con 3 servidores y de esta manera reducir el índice de inactividad de los servidores

Para ver en detalle los cálculos de los parámetros de diseño para cada uno de los 84 intervalos ver anexo G. A continuación, se presenta la tabla de resultados semana a semana de acuerdo con lo establecido anteriormente:

Tabla 26 Distribución de servidores considerando la semana y el tiempo de trabajo

Días	Intervalos de tiempo por semana																			
	Semana 1				Semana 2				Semana 3				Semana 4				Semana 5			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Lunes	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	3	2	-	-	-	-	2	2	2	3
Martes	2	2	2	2	3	3	3	3	3	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2
Miércoles	2	2	3	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	3	2	2	2	3	2
Jueves	2	2	3	2	2	3	2	2	3	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2
Viernes	2	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	-	-	-	-

Los guiones “-” indican que es día no se trabajó en la entidad o no hacen parte del estudio

Cuando número óptimo de servidores es de 2, el empleado de la entidad podrá hacer provechó de su tiempo “libre” ya sea utilizándolo para realizar alguna otra actividad complementaria (permitiendo mejorar la productividad de la empresa), o destinando este

tiempo al descansó el cual es un factor del sistema de gestión de seguridad y salud de la entidad altamente importante para la salud física y mental del empleado, que dada la posición de esta, debe ser tomada muy en cuenta por la gran cantidad de estrés que maneja en la repetida y sostenida atención de personas. Se puede afirmar que un empleado feliz es sinónimo de productividad, dado que en este estado el empleado trabajara de manera motivada y por ende productiva, mejorando la manera en cómo presta el servicio al usuario además de la efectividad de la entidad.

4.4.2 Parámetros de optimización de servidores por intervalo

Al igual que la anterior sección primero se presentan los cálculos en términos semanales, es decir, se determina el número de servidores que debería mantener la empresa según el comportamiento del sistema en base al intervalo.

Tabla 27 Parámetros de optimización para el intervalo I

		Número de servidores		
		1	2	3
<i>W</i>	Desbordados		4,7 min	1,1 min
<i>X</i>	Desbordados		10,1% / $h = 6,1\text{mín}$	40,1% / $h = 24,1\text{mín}$

Para el intervalo I el número de servidores que debería mantener la empresa es dos; dado que, para tres servidores el valor de *X* sobrepasa en un 22,1% el 18% sugerido por la empresa.

Tabla 28 Parámetros de optimización para el intervalo II

		Número de servidores		
		1	2	3
<i>W</i>	Desbordados		3,4 min	1,1min
<i>X</i>	Desbordados		13,7% / $h = 8,2\text{mín}$	42,5% / $h = 25,5\text{mín}$

Para el intervalo II el número de servidores que debería mantener la empresa es dos, dado que, para tres servidores el valor de *X* sobrepasa en un 24,5% el 18% sugerido por la empresa.

Tabla 29 Parámetros de optimización para el intervalo III

		Número de servidores		
		1	2	3
<i>W</i>	Desbordados		6,4 min	1,2 min
<i>X</i>	Desbordados		7,5% / $h = 4,5\text{mín}$	38,3% / $h = 23\text{mín}$

Para el intervalo III el número de servidores que debería mantener la empresa es dos, dado que, para tres servidores el valor de *X* sobrepasa en un 20,3% el 18% sugerido por la empresa.

Tabla 30 Parámetros de optimización para el intervalo IV

		Número de servidores		
		1	2	3
<i>W</i>	Desbordados		2,9 min	1,2 min
<i>X</i>	Desbordados		18,8% / $h = 11,3\text{mín}$	45,8% / $h = 27,5\text{mín}$

De la misma forma que los intervalos anteriores el intervalo IV debería mantener dos servidores; dado que, para tres servidores el valor de X en esta semana sobrepasa en un 27,8% el 18% sugerido por la empresa.

Al igual que se realizó en la sección anterior se procederá a mostrar los resultados para los intervalos dependiendo de los días de cada semana.

Tabla 31 Distribución de servidores considerando el intervalo y el tiempo de trabajo

	Días por semana																									
	Semana 1					Semana 2					Semana 3					Semana 4					Semana 5					
Inter	L	M	M	J	V	L	M	M	J	V	L	M	M	J	V	L	M	M	J	V	L	M	M	J	V	
I	-	2	2	2	2	-	3	2	2	3	2	3	2	3	2	-	3	3	3	2	2	2	2	2	2	-
II	-	2	2	2	2	-	3	2	3	2	2	2	2	2	3	-	2	3	2	2	2	2	2	2	2	-
III	-	2	3	3	2	-	3	3	2	2	3	2	2	3	2	-	2	3	2	2	2	2	3	2	2	-
IV	-	2	2	2	2	-	3	3	2	2	2	2	3	3	2	-	3	2	2	2	3	2	2	2	2	-

Los guiones “-” indican que es día no se trabajó en la entidad o no hacen parte del estudio

Tabla 32 Consolidado por intervalos

No. Servidores	Cantidad (intervalos)	H_i (%)
2	59	70,23%
3	25	29,77%
Total	84	100%

Analizando el consolidado por intervalos se puede afirmar que para el 70,23% de ellos se requiere de solo de 2 servidores en atención, lo cual podría ser muy beneficioso para la organización debido a que haciendo uso de esta información podrían mejorar su sistema de gestión de seguridad y salud lo que brinda beneficios para el trabajador y para la entidad.

Notas aclaratorias:

- ✓ Los resultados presentados anteriormente deben ser entendidos como resultados óptimos, es decir para que exista una verdadera eficiencia los servidores que se consideran como óptimos deben estar trabajando exclusivamente en la atención al usuario, es decir a manera de ejemplo en el día martes semana dos – intervalo I los dos servidores considerados como óptimos deben dedicarse únicamente a la atención al usuario, sin dar lugar a otro tipo de actividad.
- ✓ Para el caso del día lunes sin información, la empresa podrá tomar los resultados del siguiente día (martes) para distribuir sus servidores, para el caso del día viernes sin información la empresa podrá tomar la información del día inmediatamente anterior para la distribución de sus servidores en ese día.
- ✓ Teniendo en cuenta lo descrito en el numeral 2.1 el resultado respecto a la distribución óptima de servidores debe tener en cuenta que dentro de los 3 servidores que fueron tratados, dos de ellos hacen parte del Banco caja social, ya que si se apunta hacia la buena gestión del talento humano dentro del Acueducto dicho resultado se vería

afectado por los dos servidores que no hacen parte como tal de la empresa. Pese a lo anterior, existe un beneficio de carácter económico al reducir el presupuesto destinado al Outsourcing que podría ser generado en el Acueducto en el caso en que este último decidiera no contratar uno de los dos servidores de la entidad contratada.

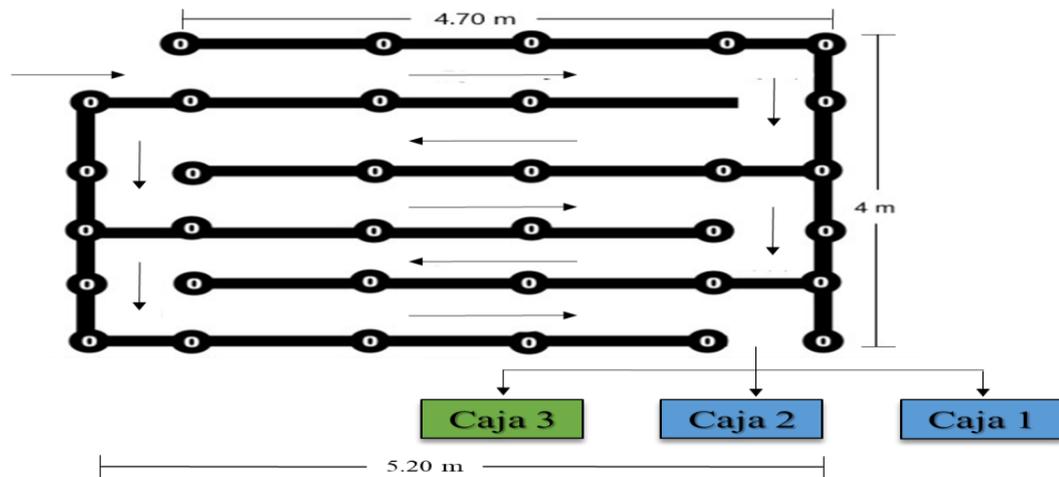
4.5 Calibración

En este apartado se presenta los resultados de la calibración de la fila general de la entidad; en ella se fijaron estaciones que muestrean el tiempo que se demorará el usuario en ser atendido dependiendo de la estación de calibración (Cal) en donde se encuentre. Para ello se utilizó la relación:

$$Cal = W_q / L_q \quad (12)$$

Donde W_q y L_q fueron tomados de los resultados del estado estable (Sección 4.3.2).

A continuación, se mostrará un esquema de cómo está organizada la fila general de la entidad:



Fuente: Elaboración propia.

Figura 18 En la figura se pueden observar las medidas en metros de la configuración en culebra (fila general de la entidad), además se muestran los servidores o cajas y la posición que tienen frente a la fila general. Los servidores de la caja 1 y caja 2 son trabajadores del banco caja social, entidad asociada con el acueducto y alcantarillado para el recaudo del servicio y el servidor de la caja 3 es un trabajador del Acueducto y Alcantarillado de Popayán S.A. E.S.P.

Ahora se procederá a realizar la calibración de la fila en mención, esto con el objetivo de que el usuario conozca el tiempo que deberá pasar en el sistema de espera antes de ser atendido. Este apartado es importante, ya que esta técnica permite reducir el nivel de ansiedad de las personas, optimizando de esta manera el uso de las instalaciones por parte de los usuarios los cuales tendrán el poder de decidir si realizar o no la diligencia en la entidad.

Para la calibración se tomaron los parámetros W_q , L_q de cada intervalo estudiado durante las cinco semanas incluyendo sus respectivos “promedios”, en estos se usó en la relación (12) en cada intervalo, con el fin de determinar el tiempo que representa cada uno de los usuarios dentro de la línea de espera, obtenidos estos datos se discrimino el mayor tiempo entre todos ellos

cuando había dos servidores en el sistema (número mínimo de servidores aceptables en el sistema). Una vez determinado el mayor tiempo se procedió a contar mediante video el número de personas que había en cada tramo de la línea de espera aspecto fundamental para los cálculos finales y para conocer el tiempo de cada estación (T_E) se multiplico el tiempo de la calibración por el número de personas al final de cada tramo (P_{Tr}). Es decir,

$$T_E = Cal \times P_{Tr} \quad (13)$$

Donde T_E se da en minutos

A manera de ejemplo se tomará el “promedio” de la semana 1 con dos servidores. Se recuerda que el tiempo tomado de W_q está tomado en horas por lo cual se hizo la transformación a segundos para tener una mejor referencia del tiempo

$$Cal = \frac{98,41}{3,08} \Rightarrow Cal = 31,95 \text{ s/usuario}$$

Haciendo un conteo mediante video se halló un máximo de 11 personas para cada tramo de 5m (ver Figura 37), por lo tanto $T_E = 31,95 \times 11$, es decir que el tiempo de la estación es aproximadamente de 6 minutos.

Para encontrar el mayor tiempo se procederá a realizar una tabla en la cual estarán los tiempos de calibración (Cal) de las cinco semanas en segundos.

Tabla 33 Tiempos de calibración

	Semana 1				Semana 2				Semana 3			
Días	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Lunes	-	-	-	-	-	-	-	-	33,0	32,7	24,9	36,7
Martes	28,4	47,8	29,4	49,1	2,8	2,4	2,5	3,1	31,5	27,8	40,5	34,4
Miércoles	23,7	30,5	27,6	33,1	3,7	3,6	2,9	3,3	30,1	35,6	33,4	32,7
Jueves	30,9	29,9	26,4	29,7	4,1	3,1	3,3	4,1	27,7	27,6	24,9	23,9
Viernes	49,3	32,9	30,3	44,3	3,6	3,9	3,5	4,2	35,8	25,5	33,4	46,3
	Semana 4				Semana 5							
	I	II	III	IV	I	II	III	IV				
Lunes	-	-	-	-	30,4	28,2	32,8	22,4				
Martes	25,6	42,9	30,2	28,8	28,6	31,8	30,4	49,6				
Miércoles	28,3	27,3	30,2	43,3	31,8	29,4	23,3	42,1				
Jueves	23,2	39,2	40,1	36,8	30,8	28,8	36,5	42,9				
Viernes	35,2	36,8	30,6	51,0*	-	-	-	-				

El asterisco “*” indica el mayor tiempo de calibración registrado durante las cinco semanas
Los guiones “-” indican que es día no se trabajó en la entidad o no hacen parte del estudio

Como se puede observar en la **Tabla 33** el mayor tiempo de calibración (Cal) registrado durante las cinco semanas de estudio fue de 51,0 segundos, dato que se tendrá en cuenta para realizar los cálculos finales.

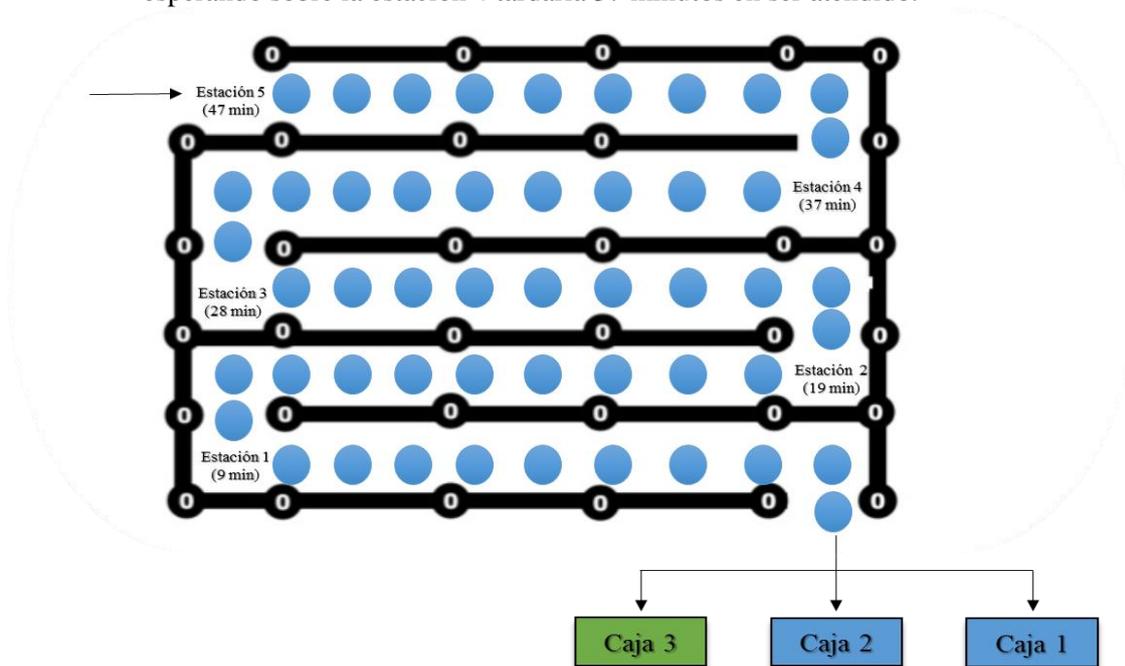
Como último se debe apuntar que el conteo mediante video dio como resultados que para cada tramo estudiado tiene un máximo de 11 personas.

A continuación, se presentan los cálculos realizados para cada estación de la calibración:

Tabla 34 Tiempo de calibración por estación con un $Cal = 51s$

Estación	P_{Tr}	T_E (min)
1	11	9
2	22	19
3	33	28
4	44	37
5	55	47

Interpretación: Cada una de las estaciones marca el tiempo que tardara un usuario en ser atendido dependiendo de la estación en la cual se encuentre. Es decir, a manera de ejemplo: el usuario que se encuentre esperando sobre la estación 4 tardaría 37 minutos en ser atendido.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 19 Se puede observar las cinco estaciones calibradas en minutos, en donde cada una se muestra el tiempo que le hace falta para ser atendido; por ejemplo si se encuentra en la estación 2 está a 19 minutos aproximadamente para ser atendido

4.6 Comparación de la distribución de servidores de acuerdo a lo propuesto por la empresa y los resultados optimizados

Como paso final se propone un plan de mejora con el objetivo de optimizar la utilización de los servidores que atienden la fila general en la entidad, para ello se realizara una comparación de como trabajaban los servidores semana a semana (3 servidores al 100%) y como deberían de trabajar según los resultados obtenidos semana a semana y por intervalos.

4.6.1 Análisis de distribución de servidores por semana

Tabla 35 Distribución de servidores semana 1

Distribución actual de servidores					Distribución óptima de servidores			
DÍAS	Intervalos de horas				Intervalos de horas			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Martes	3	3	3	3	2	2	2	2
Miércoles	3	3	3	3	2	2	3	2
Jueves	3	3	3	3	2	2	3	2
Viernes	3	3	3	3	2	2	2	2

Como se puede observar en la **Tabla 35** la distribución óptima de servidores solo en el 12,5% de los intervalos se requieren de los tres (3) servidores y el 87,5% restante funciona de manera óptima con dos (2)

Tabla 36 Distribución de servidores semana 2

Distribución actual de servidores					Distribución óptima de servidores			
DÍAS	Intervalos de horas				Intervalos de horas			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Martes	3	3	3	3	3	3	3	3
Miércoles	3	3	3	3	2	2	3	3
Jueves	3	3	3	3	2	3	2	2
Viernes	3	3	3	3	3	2	2	2

Como se puede observar en la **Tabla 36** la distribución óptima de servidores el 50% de los intervalos se requieren de los tres (3) servidores y el 50% restante funciona de manera óptima con dos (2).

Tabla 37 Distribución de servidores semana 3

Distribución actual de servidores					Distribución óptima de servidores			
DÍAS	Intervalos de horas				Intervalos de horas			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Lunes	3	3	3	3	2	2	3	2
Martes	3	3	3	3	3	2	2	2
Miércoles	3	3	3	3	2	2	2	3
Jueves	3	3	3	3	3	2	3	3
Viernes	3	3	3	3	2	3	2	2

Como se puede observar en la **Tabla 37** la distribución óptima de servidores el 35% de los intervalos se requieren de los tres (3) servidores y el 65% restante funciona de manera óptima con dos (2).

Tabla 38 Distribución de servidores semana 4

Distribución actual de servidores					Distribución óptima de servidores			
DÍAS	Intervalos de horas				Intervalos de horas			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Martes	3	3	3	3	3	2	2	3
Miércoles	3	3	3	3	3	3	3	2
Jueves	3	3	3	3	3	2	2	2
Viernes	3	3	3	3	2	2	2	2

Como se puede observar en la **Tabla 38** la distribución óptima de servidores el 31,25% de los intervalos se requieren de los tres (3) servidores y el 68,75% restante funciona de manera óptima con dos (2).

Tabla 39 Distribución de servidores semana 5

Distribución actual de servidores					Distribución óptima de servidores			
DÍAS	Intervalos de horas				Intervalos de horas			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Lunes	3	3	3	3	2	2	2	3
Martes	3	3	3	3	2	2	2	2
Miércoles	3	3	3	3	2	2	3	2
Jueves	3	3	3	3	2	2	2	2

Como se puede observar en la **Tabla 39** la distribución óptima de servidores el 12,5% de los intervalos se requieren de los tres (3) servidores y el 87,5% restante funciona de manera óptima con dos (2). Además, se tiene que en el promedio semanal la distribución de servidores propuesto por la organización es de tres (3) servidores para todas las semanas, mientras que los resultados obtenidos mediante la aplicación de la teoría (sección 4.4.1) revelan que se debería trabajar con dos (2) servidores por semana.

4.6.2 Análisis de distribución de servidores por intervalos de tiempo respecto a cada día de la semana

Tabla 40 Distribución de servidores día lunes

Distribución actual de servidores					Distribución óptima de servidores			
Semanas	Intervalos de horas				Intervalos de horas			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-
3	3	3	3	3	2	2	3	2
4	-	-	-	-	-	-	-	-
5	3	3	3	3	2	2	2	3

Los guiones “-” indican que es día no se trabajó en la entidad o no hacen parte del estudio

Como se puede observar en la **Tabla 40** la distribución óptima de servidores solo en el 25% de los intervalos se requieren de los tres (3) servidores y el 75% restante funciona de manera

óptima con dos (2), para el día lunes. Se debe mencionar que las casillas que no registran un valor son a que en ese día de la semana la entidad no desempeño sus actividades laborales o no hacia parte del mes de estudio.

Tabla 41 Distribución de servidores día martes

Distribución actual de servidores					Distribución óptima de servidores			
Semanas	Intervalos de horas				Intervalos de horas			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	3	3	3	3	2	2	2	2
2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	2	2	2
4	3	3	3	3	3	2	2	3
5	3	3	3	3	2	2	2	2

Como se puede observar en la **Tabla 41** la distribución óptima de servidores solo en el 35% de los intervalos se requieren de los tres (3) servidores y el 65% restante funciona de manera óptima con dos (2), para el día martes.

Tabla 42 Distribución de servidores día miércoles

Distribución actual de servidores					Distribución óptima de servidores			
Semanas	Intervalos de horas				Intervalos de horas			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	3	3	3	3	2	2	3	2
2	3	3	3	3	2	2	3	3
3	3	3	3	3	2	2	2	3
4	3	3	3	3	3	3	3	2
5	3	3	3	3	2	2	3	2

Como se puede observar en la **Tabla 42** la distribución óptima de servidores solo en el 40% de los intervalos se requieren de los tres (3) servidores y el 60% restante funciona de manera óptima con dos (2), para el día miércoles.

Tabla 43 Distribución de servidores día jueves

Distribución actual de servidores					Distribución óptima de servidores			
Semanas	Intervalos de horas				Intervalos de horas			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	3	3	3	3	2	2	3	2
2	3	3	3	3	2	3	2	2
3	3	3	3	3	3	2	3	3
4	3	3	3	3	3	2	2	2
5	3	3	3	3	2	2	2	2

Como se puede observar en la **Tabla 43** la distribución óptima de servidores solo en el 30% de los intervalos se requieren de los tres (3) servidores y el 70% restante funciona de manera óptima con dos (2), para el día jueves.

Tabla 44 Distribución de servidores día Viernes

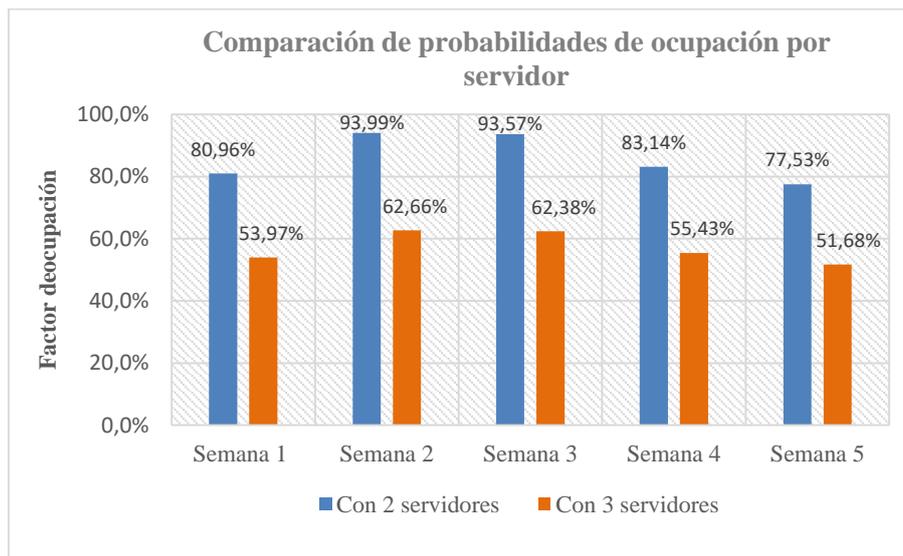
Distribución actual de servidores					Distribución optima de servidores			
Semanas	Intervalos de horas				Intervalos de horas			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	3	3	3	3	2	2	2	2
2	3	3	3	3	3	2	2	2
3	3	3	3	3	2	3	2	2
4	3	3	3	3	2	2	2	2
5	-	-	-	-	-	-	-	-

Los guiones “-” en las casillas indican que no registran un valor es debido a que en ese día de la semana no hacia parte del mes de estudio

Como se puede observar en la **Tabla 44** la distribución optima de servidores solo en el 6,25% de los intervalos se requieren de los tres (3) servidores y el 93,75% restante funciona de manera óptima con dos (2), para el día viernes. Se debe mencionar que las casillas que no registran un valor son debido a que en ese día de la semana no hacia parte del mes de estudio.

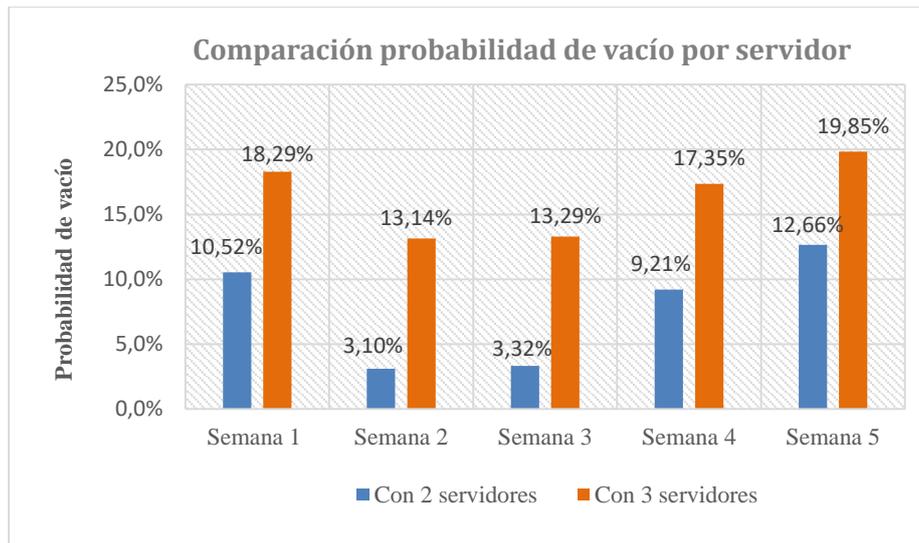
Se tiene que en el promedio por intervalos la distribución de servidores propuesto por la organización es de tres (3) servidores para todas las semanas, mientras que los resultados obtenidos mediante la aplicación de la teoría (sección 4.4.2) revelan que se debería trabajar con dos (2) servidores por semana.

A continuación, se presentan dos figuras que muestran los resultados del factor de ocupación y la probabilidad de vacío para dos y tres servidores en cada una de las semanas:



Fuente: Elaboración propia

Figura 20 En la figura se aprecia la comparación de los resultados del factor de ocupación para cada una de las semanas con dos y tres servidores. A manera de ejemplo: en la semana tres se obtuvo un P de 93,57% para dos servidores y un 62,38% para tres, es decir con dos servidores el sistema es más eficiente dado que su ocupación está cercana al 100%, contrario a si se utilizan tres servidores dado que el sistema estaría ocioso casi un 40% de su tiempo.



Fuente: Elaboración propia

Figura 21 En la figura se aprecia la comparación de los resultados de la probabilidad de vacío para cada una de las semanas con dos y tres servidores. A manera de ejemplo: en la semana tres se obtuvo una P_0 de 3,32% para dos servidores y un 13,29% para tres, es decir con dos servidores el sistema es más eficiente dado que existe una probabilidad de que no se encuentre ningún usuario en el sistema cercana al 3%, comparado con el uso de tres servidores que tendría una probabilidad de no encontrar ningún usuario en el sistema de 13,29% es decir 9,97 puntos porcentuales más que en el primer caso.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

Haciendo uso de los parámetros de diseño del modelo matemático de teoría de colas se determinó el número óptimo de servidores por semana, con base los resultados se recomienda el empleo de 2 servidores para cada una de las semanas en lugar de los 3 servidores con los que cuenta actualmente la entidad, puesto que con esto el tiempo medio de espera de los usuarios no supera los 14 minutos ni supera el 18% por hora de inactividad del servidor en las semanas. Con un servidor más la reducción de la cola no justifica el aumento de la tasa de servicio pues prácticamente se eliminaría la cola, hecho que no es necesario, además de que con esta cantidad de servidores (3) el porcentaje de inactividad de este superaría el 18% por hora; por otro lado, con un solo servidor el tiempo de espera y los usuarios medios en el sistema se dispararían siendo insostenibles para la entidad.

Analizando el consolidado por intervalos se puede afirmar que para el 70.23% de ellos requiere de solo de 2 servidores en atención, lo cual podría ser muy beneficioso para la organización ya que podrían mejorar su sistema de gestión de seguridad y salud lo que brinda beneficios psicológicos y físicos para el trabajador de la entidad.

La comparación de distribución de servidores arroja que durante las cinco semanas que duro el estudio y los cinco días de cada semana (analizados por intervalos) se deben manejar dos servidores en más del 50% de los intervalos de cada una de ellas para que el sistema funcione de manera óptima, siendo este último porcentaje (presentado en la semana 2) el mínimo y 93,75% (presentado el día viernes) el máximo.

Mediante procesos analíticos y la observación de los videos se logró calibrar la línea de espera en cinco estaciones; teniendo una primera estación en la cual un usuario se demora 9 minutos para ser atendido y una estación final en la cual el usuario está a 47 minutos de llegar a la caja.

La Teoría de Colas nos ofrece información útil sobre el funcionamiento de los sistemas de espera, de este modo se convierte en una herramienta poderosa para la obtención de ventajas competitivas de empresas prestadoras de servicios tanto privados como públicos, donde el ambiente que rodea la entrega del producto es el que genera el valor agregado que perciben los usuarios. Por medio de estudios estadísticos a los tiempos entre llegada y de servicio se logró visualizar la manera en cómo generar dicho valor agregado, mediante la prueba Kruskal Wallis se estudió que tanto los tiempos entre llegadas como los tiempos de servicio provienen de la misma población durante cada una de las cinco (5) semanas que duro el estudio; gracias a esta prueba se logró además demostrar que el comportamiento entre llegadas de los usuarios en la entidad prestadora de servicios es similar para cada de uno de los intervalos. Adicionalmente en estos estudios estadísticos, haciendo uso de la prueba de bondad de ajuste Chi-cuadrado aplicada a los tiempos entre llegada y tiempos de servicio a cada uno de los veintiún días que duro el estudio, se logró llegar a la conclusión que estos tiempos entre llegada siguen una distribución exponencial negativa contrario a los tiempos de servicio debido a que se observó un tiempo mínimo para realizar la operación de servicio.

Al tener en cuenta que la investigación trabajo haciendo el análisis con tres servidores de los cuales dos hacen parte del Banco caja social y el tercero del Acueducto y Alcantarillado de Popayán S.A E.S.P, los resultados que apuntan hacia la buena gestión de los recursos humanos para el acueducto mediante la distribución optima de servidores pueden ser afectados debido a que dos servidores no hacen parte como tal de la empresa. Queda a criterio de la organización el hecho de suspender el Outsourcing con el banco caja social y dejar únicamente un servidor del banco adicional al servidor de la empresa laborando lo que generaría un beneficio monetario por parte de la empresa al no requerir la contratación de un servidor adicional, o reestructurar internamente los turnos de trabajo teniendo en cuenta tanto los servidores del Banco como del Acueducto lo que repercutiría positivamente en la satisfacción del servidor como ya se ha mencionado.

CAPÍTULO VI

ESTRATEGIAS DE CONTINUIDAD DEL PROYECTO

Se establecen a continuación 5 líneas o caminos que la presente investigación puede tomar, con el propósito de mejorar y/o continuar con el análisis del fenómeno de espera en entidades prestadoras de servicio:

- ❖ Para el análisis del sistema de espera de la entidad, tener en cuenta la determinación de la proporción de los usuarios que pagan dentro de la entidad y los que lo hacen en los puntos de pago que tiene la entidad dentro de los Bancos (la cual para el periodo de recopilación de datos fue de 53.061 usuarios en bancos y 25.045 en la empresa), esto con el propósito de establecer si el poner en marcha los resultados del estudio (por parte de la empresa) es viable económicamente, dado la cantidad de personas que llegan a la entidad a solicitar el servicio (tener en cuenta que muchos de los clientes de la entidad ya no pagan en las ventanillas de la entidad sino en otros puntos de pago que tiene la empresa en convenio con los Bancos).
- ❖ Dado que en la investigación se tomó el parámetro W a partir de recomendaciones de la organización, se sugiere que para próximos trabajos en esta línea, se tome en cuenta al usuario para determinar este tiempo de espera, utilizado como criterio de aceptación en la presente investigación, esto debido a que es el directamente afectado por esta situación, para ello se sugiere utilizar la encuesta (como herramienta de investigación) para analizar la satisfacción de usuarios en cuanto al servicio prestado. Un vez obtenida la opinión del usuario (respecto al tiempo máximo de espera), se puede cruzar esta con la emitida por la empresa mediante la técnica de intervalos de confianza a dos muestras para decidir si hay una evidencia fuerte entre el tiempo planteado por la empresa y los usuarios y así establecer un valor W (como criterio de aceptación) más acertado para las necesidades del sistema de espera.
- ❖ Hacer uso de la técnica de simulación, la cual permite imitar la operación del sistema de espera con el objeto de dar un acercamiento más efectivo de los parámetros de campo. Para nuestra línea de trabajo se busca simular eventos discretos en los cuales los cambios en el estado del sistema ocurren de manera instantánea en puntos aleatorios del tiempo (Hiller & Lieberman, 2010, págs. 872-873), esto es de gran importancia en la teoría de colas debido a que permite simular los parámetros de campo bajo cualquier distribución de probabilidad y así poder solucionar inconvenientes que se puedan tener en la toma de datos. Una buena opción para esto sería hacer uso del Software Arena ya que cuenta con herramientas y una serie de elementos muy útiles para la simulación de manera rápida y eficaz, para así poder visualizar el fenómeno de espera.
- ❖ Hacer uso de la aproximación de Allen-Cunneen para los parámetros L, L_q, W, W_q (L Winston, 2004, pág. 1140), puesto que da un mejor acercamiento a ellos cuando los tiempos entre llegada o los tiempos entre servicio (o ambos) no se ajustan debidamente a la distribución exponencial (caso encontrado en los resultados del estudio estadístico de esta investigación), es clave mencionar que en este caso el sistema de la línea de espera se denomina G/G/s, desafortunadamente la fórmula para determinar los parámetros de diseño en este tipo general de sistema de cola aún no existe, solo la aproximación del sistema de colas G/G/s está disponible mediante la utilización de la fórmula de Allen-Cunneen (Kardi, 2012).

- ❖ Además, planteamos que se tenga(n) en cuenta que los centros que prestan servicios han evolucionado, esto debido que las nuevas tecnologías y las nuevas tendencias empresariales lo exigen, por lo cual sus sistemas de colas también presentan un avance significativo. Es por tal razón que el simple análisis de un sistema de colas sencillo no es suficiente para muchas de las entidades presentes en la actualidad. Por esto se pide ahondar en términos como redes de colas los cuales representan formas más acertadas para representar los sistemas de colas actuales. Las redes de colas son estructuras cuya composición dependen de los flujos de llegada o salida hacia los puntos de atención o hacia los nodos de servicio. Los nodos en serie son el tipo de red más simple y ocurrente, representan una base estructural dentro de todas las demás redes y por ello la importancia que tienen. Adicionalmente, se asume que a dicha red no llegarán usuarios de forma masiva, no habrá prioridades percibidas para la atención de estos, la disciplina de la fila será FCFS, además se generará una cola diferente en cada nodo con un número diferente de servidores y por último cada nodo tendrá una capacidad restringida distinta (Martínez Erazo, 2009, págs. 37-40): para el trabajo que se propone no bastará con mantener la distribución exponencial, debido a que esta posee un único parámetro lo que no le permite modelar eficazmente el comportamiento de una red, y se tiene el conocimiento que entre más parámetros tenga una distribución, se puede modelar mejor para explicar la realidad de forma más acertada (Kececioglu, 1993, págs. 250-335). Debido a esto se debe tener distribuciones con más parámetros como I (número de fases)¹⁰, C (orden de la distribución Erlang)¹¹ y α (probabilidad de ocurrencia para cada fase) para poder explicar los sistemas de colas actuales, es por esta razón que distribuciones mediante mezclas o adiciones de parámetros presentan las mejores características para solucionar este tipo de inconvenientes, porque son sobre dispersas y presentan colas más largas que la distribución de partida, dando lugar a mejores ajustes sobre los datos obtenidos en un muestreo de tiempos (Gómez & Sarabia, 2008, págs. 3-20). Tomando en cuenta lo anterior se tiene que la distribución a utilizar será la distribución hyper-Erlang la cual resulta de la interrelación de procesos Poisson en secuencia o en fases, haciendo del comportamiento de entrada al sistema un proceso más robusto y completo, debido a que esta contiene una mayor cantidad de parámetros (I , C , α), a diferencia de la distribución exponencial negativa la cual no refleja debidamente la realidad del sistema de espera; la distribución hyper-Erlang contiene unas sub fases que poseen la propiedad de la no memoria, que al igual que la distribución exponencial brinda una gran ventaja a nivel matemático para estos modelos, debido a que los eventos son totalmente aleatorios y no dependen de la ocurrencia de un evento anterior, además ofrece la posibilidad de mostrar de mejor manera problemas de dispersión de colas con un menor tiempo de procesamiento con respecto a sus semejantes (Hongxia, Wang, Xu, & Li, 2005, págs. 155-172). La modelación de redes de tráfico con distribuciones tipo fase ha demostrado en el pasado ser un poderoso medio para facilitar la evaluación del desempeño de un sistema de colas y llegar a conclusiones contundentes (Hongxia, Wang, Xu, & Li, 2005), con las cuales no solo se beneficiarían las empresas de transporte público sino la comunidad en general debido al mejoramiento considerable de la movilidad vehicular, además una de las más grandes ventajas de esta distribución es que da la flexibilidad necesaria para usarse en diferentes contextos y aporta la exactitud en el montaje del comportamiento de una cola (Wang, Liu, & Chundong, 2008, págs. 296-312). Teniendo en

¹⁰ Frecuentemente una distribución fásica aparece en un sistema donde hay diversos procesos de Poisson interrelacionados secuencialmente o en fases. La secuencia en que cada "fase" aparece es en sí misma un proceso estocástico. La distribución fásica puede ser representada por una variable aleatoria que representa el tiempo de absorción de un proceso de Markov con un único estado absorbente. Cada uno de los estados del proceso de Markov asociado a una distribución fásica, se denomina "fase".

¹¹ $C=1$ distribución exponencial, $C=2$ distribución Erlang y $C \geq 3$ distribución hyper Erlang.

cuenta esto se proponen trabajar con entidades las cuales no solo manejen un sistema de colas dentro de la organización como en la actual investigación, sino que se tengan redes de colas, entre las cuales se pueden encontrar entidades de salud y gubernamentales que son entidades que tienen un gran impacto en la sociedad.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Facultad de Ciencias Contables Económicas y Administrativas, al Programa de Administración de Empresas de la Universidad del Cauca y a el Acueducto y Alcantarillado de Popayán S.A E.S.P. por permitir la realización de la presente investigación de aplicación en los procesos de optimización de atención al cliente, contribuyendo a la relación universidad-empresa en nuestro medio.

BIBLIOGRAFÍA

- Acueducto de Popayan. (2012). *Acueducto de Popayán S.A. E.S.P.* Obtenido de Acueducto de Popayán S.A. E.S.P Web site: <http://www.acueductopopayan.com.co/institucional/>
- Acuña, E. (s.f.). *Universidad de Puerto Rico*. Obtenido de Universidad de Puerto Rico Web site: <http://math.uprm/edu/~edgar>
- Albrech, K., & Zemke, R. (1991). *Gerencia del Servicio*. Bogotá: LEGIS editores. S.A.
- Cardona Madariaga, D. F. (2012). *Aplicacion de colas de Poisson en procesos de "toma de decisiones" en la gestion de servicios medicos*. Bogotá: Universidad del Rosario.
- Cazorla Huaraca, F. R. (2014). Ingeniero en estadística informática. *Análisis estadístico mediante la teoría de colas para determinar la satisfacción del paciente atendido en el departamento de admisiones del hospital provincial general docente de riobamba*. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
- Clavijo, Vera, & Cuellar. (2016). *Acerca de Nosotros:Anif* . Recuperado el 2017, de Sitio Web Anif: <http://anif.co/sites/default/files/jul25-16.pdf>
- Coronado Hernández, J. (1 de Julio de 2014). *revista virtual pro*. Recuperado el Enero de 2017, de revista virtual pro: <http://www.revistavirtualpro.com/biblioteca/teoria-de-colas-colas-markovianas>
- DANE. (2015). *Departamento Administrativo Nacional de Estadística (Dane)*. Recuperado el 2017, de Departamento Administrativo Nacional de Estadística (Dane): <http://www.dane.gov.co>
- Díaz, A. (2009). *Diseño estadístico de experimentos*. . Medellín : Universidad de Antioquia .
- Epidat. (2014). Distribuciones de probabilidad. *Epidat*, 62-71.
- Erlang, A. (1909). The theory of probabilities and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik B Vol 20*, 33-39.
- Galvis Hernández, G. (2014). *Acerca de nosotros: Portafolio* . Recuperado el 2017, de Sitio Web de Portafolio: <http://www.portafolio.co/economia/finanzas/servicios-publicos-factor-competitividad-desarrollo-46408>
- Gomez Jimenez, F. A. (2008). Aplicacion de teoria de colas en una entidad financiera: Herramienta para el mejoramiento de los procesos de atencion al cliente. *Revista universidad EAFIT Vol 44 No.150*, 51-63.
- Gomez, E., & Sarabia, J. M. (2008). *La distribucion binomial exponencial truncada con aplicaciones en el sector del seguro de automoviles*. IAE .
- Gonzalez Vera, P. S. (2012-2013). Graduado en administracion y direccion de empresas. *Aplicacion de la teoria de colas a la atencion al publico de una corredurias de seguros*. Universidad politecnica de Cartagena, Cartagena, España.
- Hiller & Lieberman, F. s. (2010). *Introduccion a la investigacion de operaciones*. Mexico: McGRAW-HILL Interamerica editores S.A.

- Hongxia, Z., Wang, J., Xu, F., & Li, L. (2005). *Hyper-Erlang Based model for Network Traffic Approximation*. China: Posdoctoral Science Foundation.
- Kardi, T. (2012). Queuing Rule of Thumb based on M/M/s Queuing Theory with Applications in Construction Management. *Civil Engineering Dimension*, 3, 139-146. doi: 10.9744/CED.14.3.139-146
- Kececioglu, D. (1993). *Reliability and life testing handbook*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.
- L Winston, W. (2004). *Investigacion de operaciones Aplicaciones y algoritmos*. Mexico: International Thomson Editores S.A.
- Maister, D. (1985). *The Psychology of waiting lines*. New York: D.C. Heath and Company, Lexington Books.
- Martinez Bencardino, C. (2009). *Estadística y Muestreo*. Ecoe Ediciones.
- Martinez Erazo, C. E. (2009). Ingeniero Industrial. *Análisis de redes de colas modeladas con tiempos entre llegadas exponenciales e hiper erlang*. Universidad Javeriana, Bogota, Colombia.
- Procolombia. (2016). *Acerca de Nosotros :Invierta en Colombia*. Recuperado el 2017, de Invierta en Colombia: <http://www.inviertaencolombia.com.co/sectores/servicios.html>
- Psicología y Empresa. (1 de Diciembre de 2013). *Psicología y Empresa*. Recuperado el 2016, de Psicología y Empresa: <http://psicologiayempresa.com/la-atencion-en-los-bancos-un-problema-dificil-de-resolver.html>
- Spiegel & Stephens, M. R. (2009). *Estadística Schaum*. México, D. F.: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. de C.V.
- Stanton William J, E. M. (2007). *Fundamentos de Marketing*. Mexico: McGRAW-HILL interamericana editores S.A.,
- Taha, H. (2012). *Investigacion de Operaciones*. Mexico: Pearson educacion de Mexico.S.A.
- Tovar Martinez, E. (30 de Enero de 2000). *El Tiempo*. Recuperado el 2016, de El Tiempo: <http://www.eltiempo.com/archivo/documento/MAM-1263524>
- Vallejo López, G. (16 de Abril de 2012). *Portafolio*. Recuperado el 2016, de Portafolio: <http://www.portafolio.co/opinion/gabriel-vallejo-lopez/problema-filas-94960>
- Vergara Navarro, S. (2006). *Modulo de Investigacion de Operaciones*. Cesar: Corporacion Universitaria del Caribe.
- Vicente, Á. H. (2014-2015). *Universidad de Murcia*. Obtenido de Universidad de Murcia Web site: <http://www.um.es/ae/FEIR/50/>
- Wang, J., Liu, J., & Chundong, S. (2008). *Segment based adaptative hyper- Erlang model for long-tailed network traffic approximation*. J. Supercomput.

ANEXOS

En seguida se encuentra una breve explicación de los procesos estocásticos, cadenas de Markov y procesos de nacimiento y muerte (tipo de proceso estocástico) necesarios dado que, la mayor parte de los modelos elementales de colas suponen que las entradas (llegadas de clientes) y las salidas (clientes que se van) del sistema ocurren de acuerdo con un proceso de nacimiento y muerte, además de que estos permiten comprender la naturaleza matemática de las ecuaciones de balance del estado n que describen un principio de teoría de colas consistente en tasa de llegada igual a tasa de salida; además de permitir encontrar las probabilidades de estado estable para todo n .

Seguido de lo anterior se presenta la herramienta estadística necesaria para estudiar el comportamiento de los datos (tiempos de llegada y de servicio que siguen una distribución Poisson y exponencial respectivamente), esta consiste en: prueba de hipótesis, errores de prueba de hipótesis, pruebas no paramétricas como: ANOVA (prueba Chi Cuadrado χ^2 de bondad de ajuste), prueba H o prueba Kruskal-Wallis. Finalmente, en el apartado anexo se presentan los resultados de los parámetros de diseño tanto semanalmente como por intervalo.

Anexo. A Procesos estocásticos

A manera general los procesos estocásticos se definen como procesos que evolucionan en el tiempo de una manera probabilística; específicamente son definidos como procesos que describen la manera en cómo el estado de un sistema físico en operación evoluciona a través del tiempo (Hiller & Lieberman, 2010, pág. 673).

Antes de continuar con el estudio es fundamental realizar la salvedad de que existen dos tipos de procesos estocásticos, los procesos estocásticos discretos y continuos en el tiempo, a continuación, se procederán a definir cada uno de ellos: un proceso estocástico discreto en el tiempo es simplemente una descripción de la relación entre las variables aleatorias y un proceso estocástico continuo en el tiempo, es simplemente un proceso estocástico en el que el estado del sistema se puede ver en cualquier instante no solo en instantes discretos del tiempo, es necesario distinguir uno del otro dado que la teoría de colas se considera un proceso estocástico de tiempo continuo (L Winston, 2004, págs. 923-924). La importancia de la comprensión y manejo de los procesos estocásticos en la presente investigación es dado a raíz de que estos son la fuente principal de donde nace la teoría de colas, dado que esta teoría es en realidad un proceso estocástico.

Anexo. B Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son un tipo de proceso estocástico, el cual tiene como particularidad que las probabilidades que describen la forma como el proceso evoluciona en el futuro, dependen únicamente del estado actual en el que se encuentra el proceso y por lo tanto son independientes de los eventos que ocurrieron en el pasado.

La importancia del entendimiento y manejo de las cadenas de Markov en la presente investigación es dada a cómo estas pueden ayudar a estudiar y comprender el sistema de espera tomando el estado del sistema como una variable aleatoria (igual al número de clientes en el sistema en el tiempo); además de esto las cadenas de Markov permiten describir los procesos de nacimiento y muerte los cuales son procesos indispensables en el tratamiento de la teoría de colas, dado que la mayor parte los modelos elementales de colas suponen que las entradas (llegadas de clientes) y las salidas (clientes que se van) del sistema ocurren de acuerdo con un proceso de nacimiento y muerte. El término nacimiento refiere a la llegada de un nuevo cliente al sistema de colas, mientras que el término muerte se refiere a la salida del cliente servido (Hiller & Lieberman, 2010, pág. 721).

Anexo. C Proceso de nacimiento y muerte

Un proceso de nacimiento y muerte es un proceso estocástico de tiempo continuo para el cual el estado del sistema $N(t)$, en cualquier momento t , es un entero no negativo (L Winston, 2004, pág. 1063). En otras palabras el proceso de nacimiento y muerte describe en términos probabilísticos como cambia $N(t)$ al aumentar t . En general, sostiene que los nacimientos y muertes individuales, ocurren de manera aleatoria, cuyas tasa media de ocurrencia dependen del estado actual del sistema, siguiendo así una propiedad Markoviana.

De manera más precisa, los supuestos del proceso de nacimiento y muerte son los siguientes (Hiller & Lieberman, 2010, pág. 721).

Supuesto 1: Dado $N(t) = n$ la distribución de probabilidad actual del tiempo que falta para el próximo nacimiento (llegada) es exponencial con parámetro λ_n ($n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$).

Supuesto 2: Dado $N(t) = n$, la distribución de probabilidad actual del tiempo que falta para la próxima muerte (terminación del servicio) es exponencial con parámetro μ_n ($n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$).

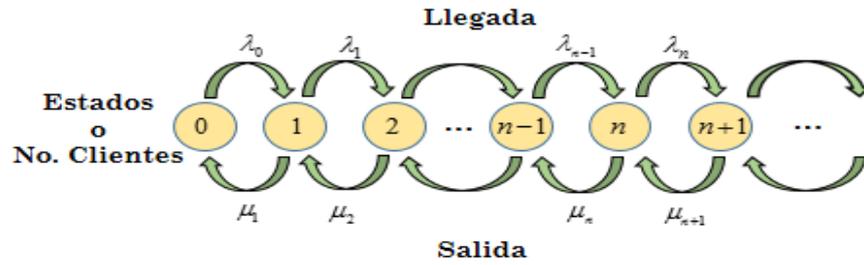
Supuesto 3: La variable aleatoria del supuesto 1 (el tiempo que falta hasta el próximo nacimiento) y la variable aleatoria del supuesto 2 (el tiempo que falta hasta la próxima muerte) son mutuamente independientes.

La siguiente transición del estado del supuesto es

$n \rightarrow n + 1$ (Un solo nacimiento)

$n \rightarrow n - 1$ (Una sola muerte)

En la teoría de cola λ_n y μ_n son, respectivamente, la tasa media de llegada y la tasa media de terminaciones del servicio, para n clientes en el sistema. Lo anterior implica que cualquier proceso de nacimiento y muerte queda completamente determinado al conocerse λ_n y μ_n ; además, como todos los estados son no negativos, se tiene que $\mu_0 = 0$ (Cardona Madariaga, 2012).



Fuente: (L Winston, 2004)

Figura C1. Diagrama de tasas del proceso de nacimiento y muerte: se expone el diagrama de tasas, en éste las flechas representan las únicas transiciones posibles en el estado del sistema.

C-1 Análisis del proceso de nacimiento y muerte

En cualquier tiempo t que observamos un proceso de nacimiento y muerte, debe ser cierto que, para cada estado n , la cantidad de veces que hemos entrado al estado n difiere cuanto mucho en una unidad del número de veces que hemos dejado el estado, es decir

Para t grande y para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ es cierto que

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Número de salidas esperadas desde el estado } n}{\text{Unidad de tiempo}} \\ &= \frac{\text{Número de entradas esperadas al estado } n}{\text{Unidad de tiempo}} \end{aligned}$$

O del mismo modo considerando cualquier estado particular n ($n = 0, 1, 2, \dots$) del sistema. Suponga que en el tiempo $t = 0$ se inicia el conteo del número de veces que el sistema entra a este estado y el número de veces que sale de él, como se denota en seguida (Hiller & Lieberman, 2010, págs. 722-725)

$E_n(t)$ = Número de veces que el proceso entra al estado n hasta el tiempo t .

$L_n(t)$ = Número de veces que el proceso sale del estado n hasta el tiempo t .

Como los dos tipos de eventos (entrar y salir) deben alternarse, estos dos números serán iguales o diferirán en sólo 1; es decir,

$$|E_n(t) - L_n(t)| \leq 1$$

Al dividir ambos lados entre t y después hacer que $t \rightarrow \infty$ (recordar condición de estado estable) se obtiene

$$\left| \frac{E_n(t)}{t} - \frac{L_n(t)}{t} \right| \leq \frac{1}{t}, \text{ entonces } \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{E_n(t)}{t} - \frac{L_n(t)}{t} \right| = 0$$

Si se dividen $E_n(t)$ y $L_n(t)$ entre t se obtiene la tasa real (número de eventos por unidad de tiempo) a la que ocurren estos dos tipos de eventos, y cuando $t \rightarrow \infty$ se obtiene la tasa media (número esperado de eventos por unidad de tiempo). Estos resultados conducen al siguiente principio clave:

Principio de tasa de entrada igual a tasa de salida. Para cualquier estado n ($n=0, 1, 2, \dots$) del sistema, la tasa media de entrada es igual a la tasa media de salida.

Las ecuaciones que expresan este principio se llaman *ecuaciones de balance del estado n* . Para la deducción de estas ecuaciones véase (Hiller & Lieberman, 2010).

Anexo. D Ecuaciones de balance

Tabla D-1 Ecuaciones de balance

Estado	Tasa de entrada = tasa de salida
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 = (\lambda_2 + \mu_2) P_2$
⋮	⋮
$n-1$	$\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n = (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) P_n$

Fuente: Hiller (2010).

Para resolver estas ecuaciones de balance se debe despejar cada una de ellas en términos de la variable P_0 la cual se denomina **probabilidad de vacío** o probabilidad de que el sistema de espera no se encuentre ningún cliente (siendo este el procedimiento más conveniente) (Hiller & Lieberman, 2010) esos despejes se muestran a continuación en la tabla D2:

Tabla D-2 Ecuaciones de Balance (Despeje)

Estado	Despejando en términos de P_0
0	$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$
1	$P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2} (\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$
2	$P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 + \frac{1}{\mu_3} (\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0$
⋮	⋮
$n+1$	$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} (\mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2}) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} P_0$
n	$P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n + \frac{1}{\mu_{n+1}} (\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \dots \mu_1} P_0$

Fuente: (Hiller & Lieberman, 2010)

Gracias a las ecuaciones de balance se hace posible obtener la probabilidad de estado estable de un sistema de líneas de espera (Taha, 2012). Teniendo en cuenta uno de Las propiedades básicas de probabilidad tenemos que (Hiller & Lieberman, 2010)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \quad (\text{D-2, 1})$$

Al hacer $\frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \dots \mu_1} = C_n$; para $n = 1, 2, 3, \dots$ Para $n = 0$, $C_n = 1$. De esta forma la probabilidad de estado estable para el estado n se resumirían

$$P_n C_n = P_0 \text{ Para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

De esta manera

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_0 = 1 \quad (\text{D-2, 2})$$

La ecuación anterior será útil en el momento de buscar las probabilidades de estado estable para el sistema de colas M/M/S.

Anexo. E Modelos de colas con distribuciones no exponenciales

E-1 Modelo M/G/1

El modelo M/G/1 supone que el sistema de colas tiene un servidor y un proceso de entradas de Poisson (tiempos entre llegadas exponenciales) con una tasa media de llegadas fija λ , los tiempos de servicios siguen alguna distribución de probabilidad exponencial.

E-2 Modelo M/D/s

Cuando el servicio consiste básicamente en la misma tarea rutinaria que el servidor realiza para todos los clientes, tiende a haber poca variación en el tiempo de servicio que se requiere. Muchas veces, el modelo M/D/s proporciona una representación razonable de este tipo de situación es porque supone que todos los tiempos de servicio son iguales a una constante fija (la distribución de tiempos de servicio degenerada) y que tiene un proceso de entradas de Poisson con tasa media de llegadas fija λ con s servidores.

E-3 Modelo M/E_k/s

Para este modelo los tiempos de llegada o de servicio están definidos por una distribución de probabilidad de Erlang de parámetro K o también llamada función de densidad de Erlang además de contarse con s servidores.

Anexo. F Tratamiento Estadístico

Para la actual investigación se deben tener claros algunos conceptos los cuales serán de gran ayuda en tratamiento de datos, dando la oportunidad de aceptar o rechazar algunos supuestos realizados durante el trabajo.

F-1 Prueba de hipótesis

La prueba de hipótesis denominada también prueba de significación, tiene como objetivo principal evaluar suposiciones o afirmaciones acerca de los valores estadísticos (parámetros), para tomar una decisión es necesario, ante todo plantear la posibilidad de que la suposición puede ser falsa o verdadera, estas suposiciones se llaman hipótesis estadística. La hipótesis estadística es la afirmación de una característica ideal de una población sobre la cual hay inseguridad en el momento de formularla y que a la vez es expresada de tal forma que puede ser rechazada (Martínez Bencardino, 2009, pág. 414).

F-2 Errores en las pruebas de hipótesis

Si se rechaza una hipótesis que debería aceptarse se dice que se comete un *error tipo I*. Si por otro lado, se acepta una hipótesis que debería rechazarse, se comete un *error tipo II*. En cualquiera de los casos ha habido una decisión errónea o se ha hecho un juicio erróneo.

Para que las reglas de decisión (o pruebas de hipótesis) sean buenas, deben diseñarse de manera que se minimicen los errores de decisión. Esto no es sencillo, ya que para cualquier tamaño dado de muestra, al tratar de disminuir un tipo de error suele incrementarse el otro tipo de error; en la práctica, un tipo de error puede ser más importante que otro y habrá que sacrificar uno

con objeto de limitar al más notable. La única manera de reducir los dos tipos de error es aumentando el tamaño de la muestra, lo que no siempre es posible. (Spiegel & Stephens, 2009, pág. 246).

F-3 Pruebas no paramétricas

La mayor parte de las pruebas de hipótesis y significancia (o reglas de decisión), requieren varias suposiciones acerca de la población de la que se toma la muestra.

En la práctica, hay situaciones en las que tales suposiciones no se justifican o en las que se duda que se satisfagan, como es el caso de poblaciones muy sesgadas. Debido a esto, se han desarrollado diversas pruebas y métodos que son independientes tanto de la distribución de las poblaciones como de sus correspondientes parámetros. Estas pruebas se conocen como *pruebas no paramétricas* (Spiegel & Stephens, 2009, pág. 446). Este método es de gran utilidad cuando las observaciones se pueden ordenar, ya que son imposibles de medir, también cuando se carece del conocimiento acerca del comportamiento de los parámetros de la población. Se puede concluir que en todos aquellos casos, en que se imposible establecer la forma de distribución poblacional o cuando se pueden ordenar en rangos se hace necesario aplicar estas pruebas (Martínez Bencardino, 2009, pág. 544).

F-4 Prueba de bondad de ajuste mediante la distribución Chi-cuadrado

Es una medida de la discrepancia entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas la proporciona el estadístico. Se espera que la diferencia entre los valores observados y esperados será igual a 0, por lo tanto, se hace necesario elevarlos al cuadrado para cuantificar la diferencia.

O_i = Frecuencia observada o real

E_i = Frecuencia teórica o esperada

$$\chi^2 = \frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} + \dots + \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (\text{F-4, 1})$$

Se puede observar de esta fórmula, que mientras mayor sean las coincidencias entre frecuencia observada y esperada menor será el valor de Chi-cuadrado.

La prueba Chi-cuadrado puede emplearse para determinar qué tan bien se ajustan una distribución teórica (por ejemplo, la distribución normal o la distribución binomial) a una distribución empírica (es decir, a una distribución obtenida a partir de datos muestrales) (Spiegel & Stephens, 2009, pág. 295).

F-5 Prueba H de Kruskal Wallis

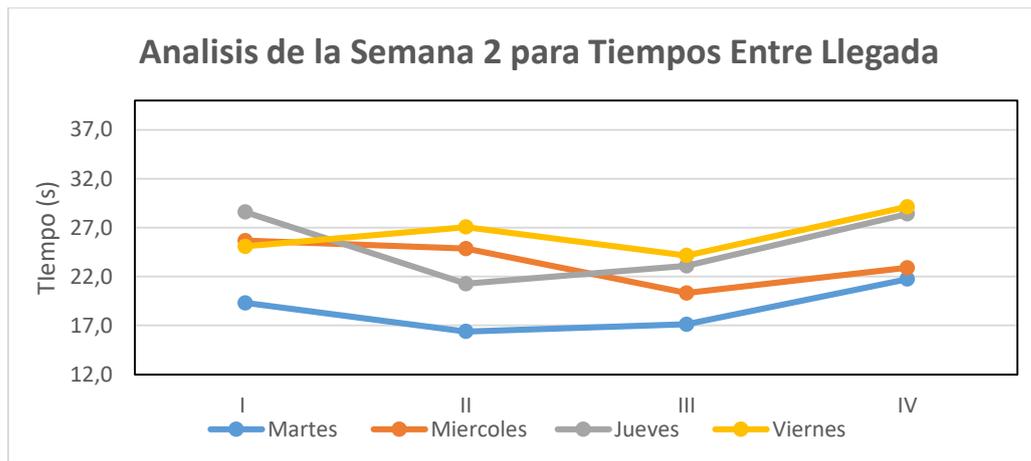
La prueba U (*Mann-Whitney*) (Spiegel & Stephens, 2009, pág. 447) es una prueba no paramétrica para decidir si dos muestras provienen o no de una misma población. Una generalización de esta prueba para k muestras es la *prueba H de Kruskal Wallis* o simplemente *prueba H* . Esta prueba se puede describir de la siguiente manera: primero que todo se debe tener que las poblaciones sean independientes, supóngase que se tienen k muestras, cuyos tamaños son N_1, N_2, \dots, N_k por lo que el tamaño de todas estas muestras juntas será $N = N_1 + N_2 + \dots + N_k$. Supóngase además que todas estas muestras se juntan y sus valores se ordenan de menor a mayor asignándoles una jerarquía, y que las sumas de las jerarquías, de cada una de las k muestras, son R_1, R_2, \dots, R_k , respectivamente. (Spiegel & Stephens, 2009, pág. 448). Es necesario que cada muestra tenga por lo menos 5 observaciones, de esta manera su distribución será muy cercana a *Chi-cuadrado* con $K - 1$ grados de libertad, donde K corresponderá al número de muestras tomadas (Martinez Bencardino, 2009, págs. 600-601). Para comprobar si las muestras provienen o no de la misma población se compara H con el nivel de significancia en la tabla de *Chi-cuadrado*. La regla de decisión consistirá en aceptar H_0 (Hipótesis nula) cuando $H < \chi^2_{(nivel\ de\ significancia)}$, en caso contrario se aceptara H_a (Hipótesis alternativa).

Para expresar esto de mejor manera se tiene la siguiente fórmula.

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \left[\frac{(R_1)^2}{N_1} + \dots + \frac{(R_k)^2}{N_k} \right] - 3(N+1) = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{N_j} - 3(N+1) \quad (\text{F-5, 1})$$

A continuación se presentan el comportamiento de los tiempos entre llegadas y tiempos entre servicio en función de los días de la semana, desde la 2 a la 5; estos resultados se aprecian en las figuras de la F-1 a la F-8, los resultados “promedio” de los mencionados tiempos (s) se muestran en las tablas con numeración impar empezando desde F-1 a la F-15 y por último los datos que permiten aplicar la prueba Kruskal Wallis para se analizan en las tablas con numeración par desde F-2 a la F-14.

F-5.1 Análisis de los tiempos ente llegada



Fuente: elaboración propia

Figura F1 Se aprecia la fluctuación del tiempo entre llegadas de los usuarios en los 4 intervalos de tiempo que se consideraron durante los días de la semana dos. En esta semana se valora una tasa de llegada muy similar, pero en el intervalo III se mantiene un mejor comportamiento.

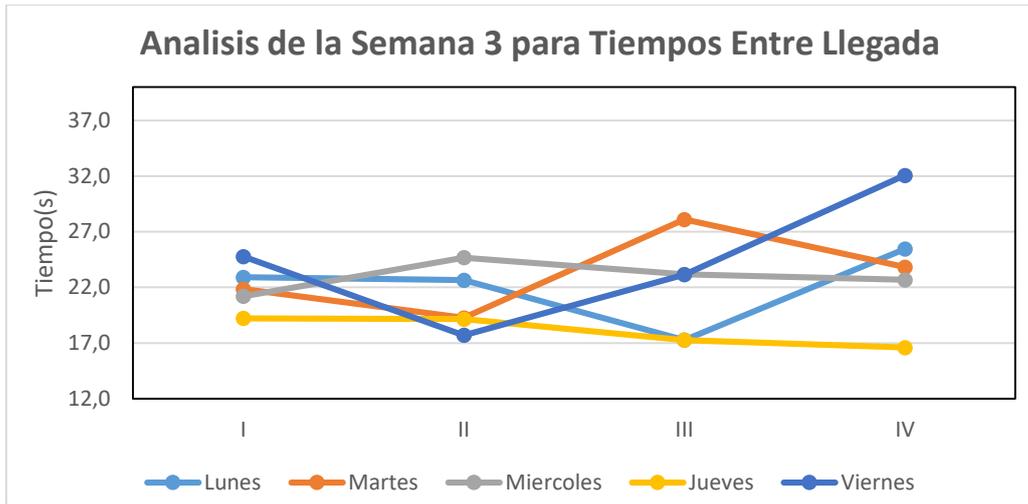
Tabla F-1 Tiempo entre llegadas Semana 2

Días	Intervalos de tiempo (s)			
	I	II	III	IV
Martes	19,3	16,4	17,1	21,7
Miércoles	25,7	24,9	20,3	22,9
Jueves	28,6	21,3	23,1	28,4
Viernes	25,1	27,1	24,2	29,1

Tabla F-2 Datos para el cálculo de H semana 2. Tiempo entre llegadas

	Posición			
	3	1	2	6
	12	10	4	7
	15	5	8	14
	11	13	9	16
R_j	41	29	23	43
N_j	4	4	4	4

Donde $N = 16$ tiempos observados y los datos de la **tabla F-2** permiten obtener que $H = 3.04$



Fuente: elaboración propia

Figura F2 Se aprecia la fluctuación del tiempo entre llegadas de los usuarios en los 4 intervalos de tiempo que se consideraron durante los días de la semana tres.

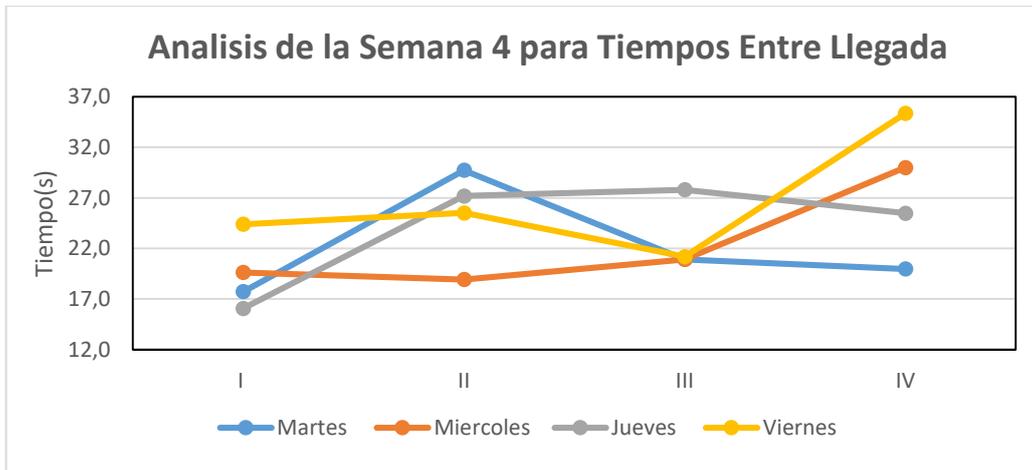
Tabla F-3 Tiempo entre llegada Semana 3

Días	Intervalos de tiempo (s)			
	I	II	III	IV
Lunes	22,9	22,6	17,3	25,5
Martes	21,8	19,3	28,1	23,8
Miércoles	21,2	24,7	23,2	22,7
Jueves	19,2	19,2	17,3	16,6
Viernes	24,8	17,7	23,1	32,1

Tabla F-4 Datos para el cálculo de H semana 3. Tiempo entre llegadas

	Posición			
	10	12	3	18
	9	7	19	15
	8	16	14	11
	6	5	2	1
	17	4	13	20
R_j	52	42	51	65
N_j	5	5	5	5

Donde $N = 20$ tiempos observados y los datos de la **tabla F-4** permiten obtener que $H = 1.53$



Fuente: elaboración propia

Figura F3 Se aprecia la fluctuación del tiempo entre llegadas de los usuarios en los 4 intervalos de tiempo que se consideraron durante los días de la semana cuatro.

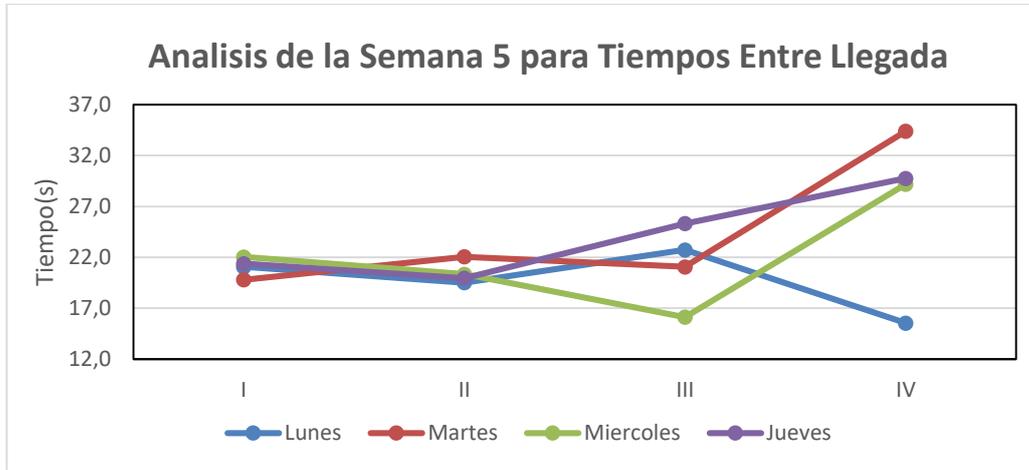
Tabla F-5 Tiempo entre llegadas Semana 4

Días	Intervalos de tiempo (s)			
	I	II	III	IV
Martes	17,7	29,7	20,9	20,0
Miércoles	19,6	18,9	20,9	30,0
Jueves	16,1	27,2	27,8	25,5
Viernes	24,4	25,5	21,2	35,3

Tabla F-6 Datos para el cálculo de H semana 4. Tiempo entre llegadas

	Posición			
	2	14	7	5
	4	3	6	15
	1	12	13	10
	9	11	8	16
R_j	16	40	34	46
N_j	4	4	4	4

Donde $N = 16$ tiempos observados y los datos de la **tabla F-6** permiten obtener que $H = 5.55$



Fuente: Elaboración propia

Figura F4 Se aprecia la fluctuación del tiempo entre llegadas de los usuarios en los 4 intervalos de tiempo que se consideraron durante los días de la semana cinco. En el intervalo I (8:30 am a 10:00 am) se observa que el tiempo de llegada se comporta muy uniforme durante toda la semana

Tabla F-7 Tiempo entre llegadas Semana 5

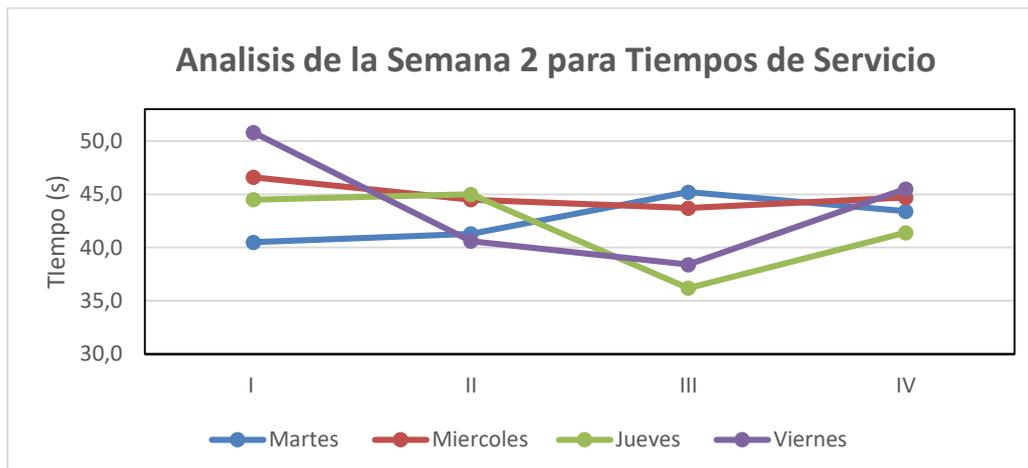
Días	Intervalos de tiempo (5)			
	I	II	III	IV
Lunes	21,1	19,5	22,7	15,5
Martes	19,8	22,0	21,1	34,4
Miércoles	22,0	20,4	16,1	29,2
Jueves	21,4	20,0	25,3	29,8

Tabla F-8 Datos para el cálculo de H semana 5. Tiempo entre llegadas

	Posición			
	8	3	12	1
	4	11	7	16
	10	6	2	14
	9	5	13	15
R_j	31	25	34	46
N_j	4	4	4	4

Donde $N = 16$ tiempos observados y los datos de la **tabla F-8** permiten obtener que $H = 2.58$

F-5.2 Análisis de tiempo de servicio



Fuente: elaboración propia

Figura F5 Se aprecia la fluctuación del tiempo de servicio de los usuarios en los 4 intervalos de tiempo que se consideraron durante los días de la semana dos descritos.

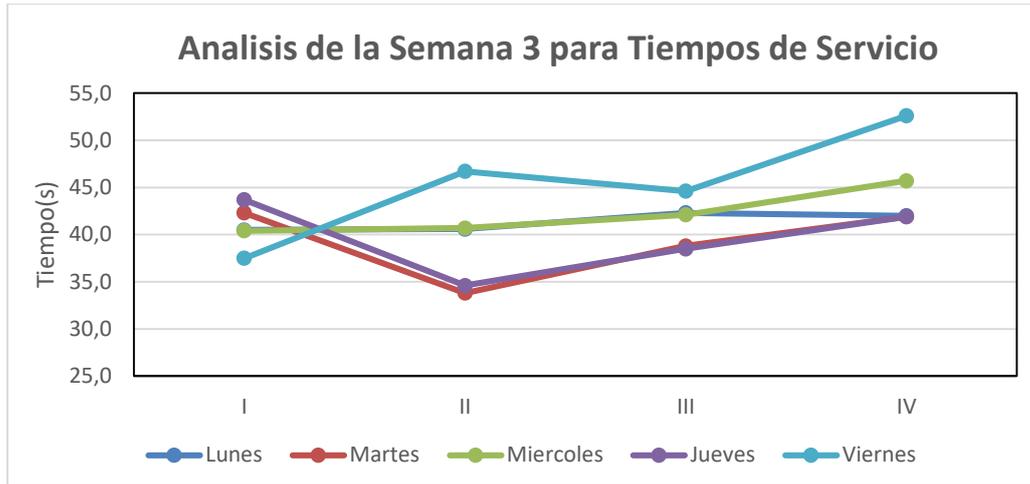
Tabla F-9 Tiempo de servicio Semana 2

Días	Intervalos de tiempo (s)			
	I	II	III	IV
Martes	40,5	41,3	45,2	43,4
Miércoles	46,6	44,5	43,7	44,7
Jueves	44,5	45,0	36,2	41,4
Viernes	50,8	40,6	38,4	45,5

Tabla F-10 Datos para el cálculo de H semana 2. Tiempo de servicio

	Posición			
	3	5	13	7
	15	9.5	8	11
	9.5	12	1	6
	16	4	2	14
R_j	43.5	30.5	24	38
N_j	4	4	4	4

Donde $N = 16$ tiempos observados y los datos de la **tabla F-10** permiten obtener que $H = 2.40$



Fuente: elaboración propia

Figura F6 Se aprecia la fluctuación del tiempo de servicio de los usuarios en los 4 intervalos de tiempo que se consideraron durante los días de la semana tres descritos.

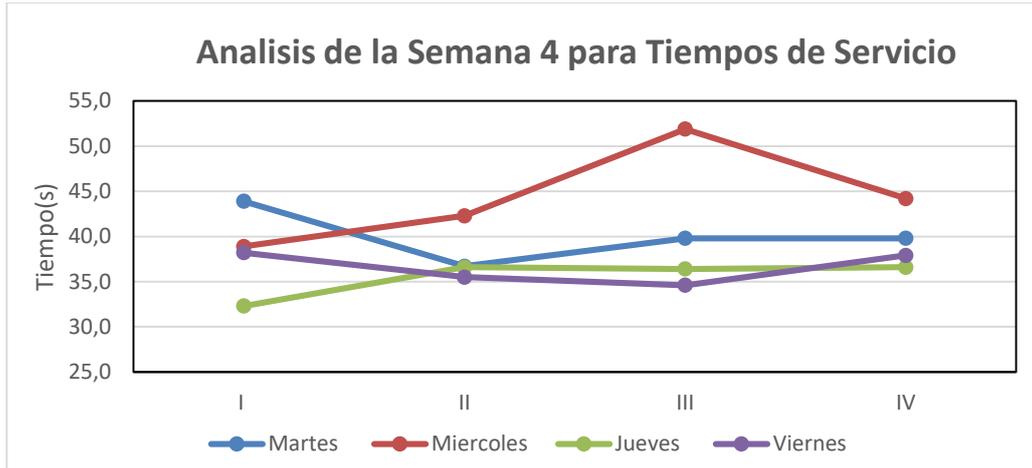
Tabla F-11 Tiempo de servicio Semana 3

Días	Intervalos de tiempo (s)			
	I	II	III	IV
Lunes	40,5	40,6	42,3	42,0
Martes	42,3	33,8	38,8	41,9
Miércoles	40,4	40,7	42,1	45,7
Jueves	43,7	34,6	38,5	41,9
Viernes	37,5	46,7	44,6	52,6

Tabla F-12 Datos para el cálculo de H semana 3. Tiempo de servicio

	Posición			
	7	8	14.5	12
	14.5	1	5	10.5
	6	9	13	18
	16	2	4	10.5
	3	19	17	20
R_j	46.5	39	53.5	71
N_j	5	5	5	5

Donde $N = 20$ tiempos observados y los datos de la **tabla F-12** permiten obtener que $H = 3.20$



Fuente: elaboración propia

Figura F7 Se aprecia la fluctuación del tiempo de servicio de los usuarios en los 4 intervalos de tiempo que se consideraron durante los días de la semana cuatro descritos.

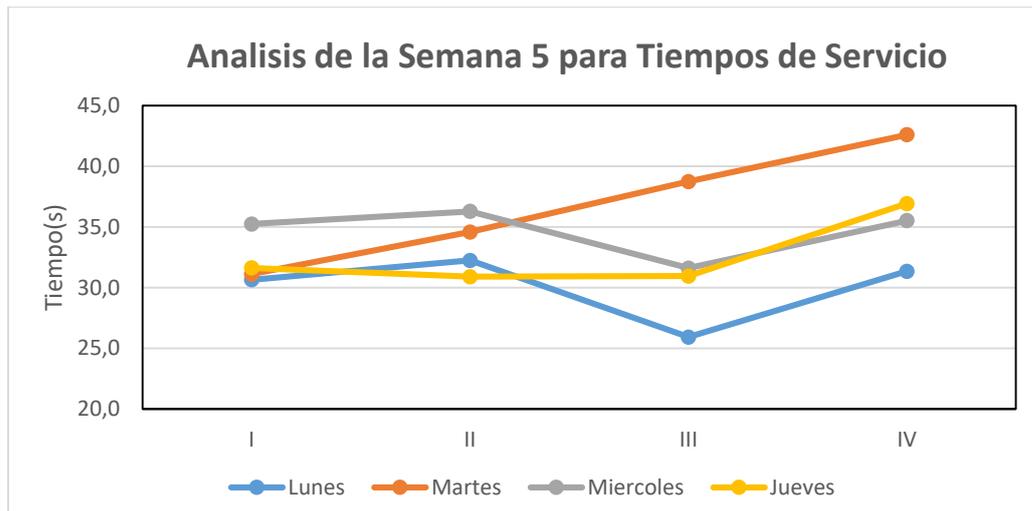
Tabla F-13 Tiempo de servicio Semana 4

Días	Intervalos de tiempo (s)			
	I	II	III	IV
Martes	43,9	36,7	39,8	39,8
Miércoles	38,9	42,3	51,9	44,2
Jueves	32,3	36,6	36,4	36,6
Viernes	38,2	35,5	34,6	37,9

Tabla F-14 Datos para el cálculo de H semana 4. Tiempo de servicio

	Posición			
14	7	11.5	11.5	
10	13	16	15	
1	5.5	4	5.5	
9	3	2	8	
R_j	34	28.5	33.5	40
N_j	4	4	4	4

Donde $N = 16$ tiempos observados y los datos de la **tabla F-14** permiten obtener que $H = 0.73$



Fuente: elaboración propia

Figura F8 Se aprecia la fluctuación del tiempo de servicio de los usuarios en los 4 intervalos de tiempo que se consideraron durante los días de la semana cinco descritos.

Tabla F-15 Tiempo de servicio Semana 5

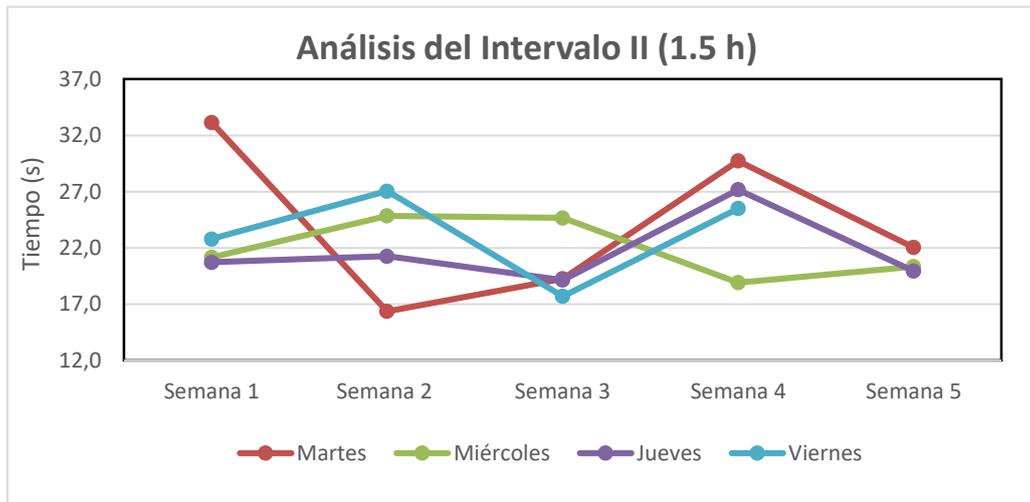
Días	Intervalos de tiempo (s)			
	I	II	III	IV
Lunes	30,6	32,3	25,9	31,4
Martes	31,1	34,6	38,7	42,6
Miércoles	35,2	36,3	31,6	35,5
Jueves	31,6	30,9	31,0	36,9

Tabla F-16 Datos para el cálculo de H semana 5. Tiempo de servicio

	Posición			
	2	9	1	6
	5	10	15	16
	11	13	7	12
	8	3	4	14
R_j	26	35	27	48
N_j	4	4	4	4

Donde $N = 16$ tiempos observados y los datos de la **tabla F-16** permiten obtener que $H = 3.41$. De igual manera se presentan el comportamiento de los tiempos entre llegadas en función de los días de la semanas agrupados por intervalos, desde el II al IV; estos resultados se aprecian en las figuras de la F-9 a la F-11, los resultados “promedio” del tiempo (s) en cuestión se muestran en las tablas F-17, F-19 y F-21 y por último los datos que permiten aplicar la prueba Kruskal Wallis para se analizan en las tablas F-18, F-20 y F-22.

F-5.3 Análisis de los tiempos entre llegada por intervalos



Fuente: elaboración propia

Figura F9 Se aprecia la fluctuación del tiempo entre llegadas de los usuarios durante las cinco semanas en el intervalo II.

Tabla F-17 Tiempo entre llegada (s) Intervalo II

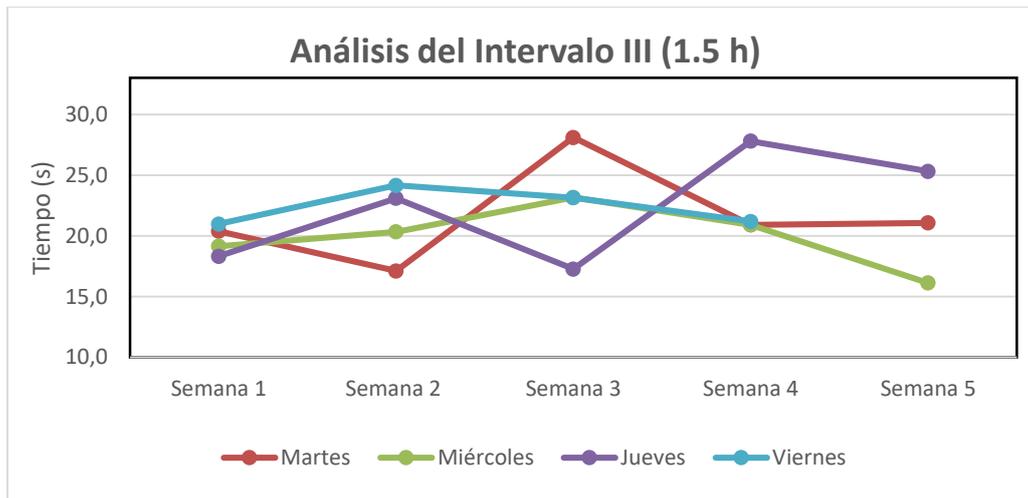
Días	Semanas				
	1	2	3	4	5
Lunes	No aplica	Festivo	22,6	Festivo	19,5
Martes	33,16	16,4	19,3	29,7	22,0
Miércoles	21,17	24,9	24,7	18,9	20,4
Jueves	20,74	21,3	19,2	27,2	20,0
Viernes	22,80	27,1	17,7	25,5	No aplica

Tabla F-18 Datos para el cálculo de H
Intervalo II. Tiempo entre llegadas

	Posición				
	21	1	13	20	6
	10	16	5	3	12
	9	11	15	19	8
	14	18	4	17	7
	-	-	2	-	-
R_j	54	46	39	59	33
N_j	4	4	5	4	4

“-” Indica que es día no aplica o fue festivo

Donde $N = 21$ tiempos observados y los datos de la **tabla F-18** permiten obtener que $H = 4.25$



Fuente: elaboración propia

Figura F10 Se aprecia la fluctuación del tiempo entre llegadas de los usuarios durante las cinco semanas en el intervalo III. En este intervalo (2:30 pm a 4:00 pm) se comporta muy uniforme durante toda la semana uno.

Tabla F-19 Tiempo entre llegadas (s) Intervalo III

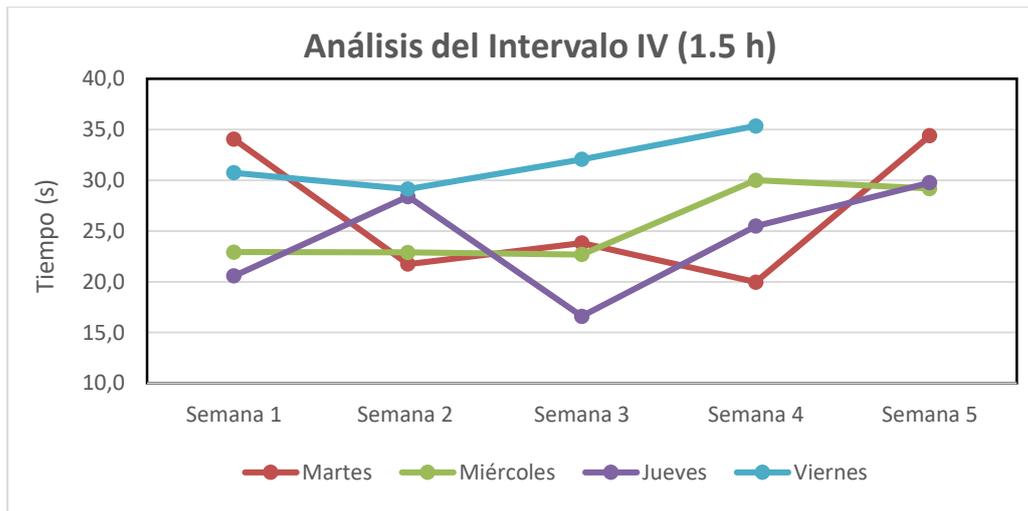
Días	Semanas				
	1	2	3	4	5
Lunes	No aplica	Festivo	17,3	Festivo	22,7
Martes	20,38	17,1	28,1	20,9	21,1
Miércoles	19,15	20,3	23,2	20,9	16,1
Jueves	18,33	23,1	17,3	27,8	25,3
Viernes	20,98	24,2	23,1	21,2	No aplica

Tabla F-20 Datos para el cálculo de H
Intervalo III. Tiempo entre llegadas

	Posición				
	8	2	4	10	14
	6	7	21	9	12
	5	15	17	20	1
	11	18	3	13	19
	-	-	16	-	-
R_j	30	42	61	52	46
N_j	4	4	5	4	4

“-” Indica que es día no aplica o fue festivo

Donde $N = 21$ tiempos observados y los datos de la **tabla F-20** permiten obtener que $H = 1.92$



Fuente: elaboración propia

Figura F11 Se aprecia la fluctuación del tiempo entre llegadas de los usuarios durante las cinco semanas en el intervalo IV.

Tabla F-21 Tiempo entre llegadas (s) Intervalo

Días	Semanas				
	1	2	3	4	5
Lunes	No aplica	Festivo	25,5	Festivo	15,5
Martes	34,04	21,7	23,8	20,0	34,4
Miércoles	22,92	22,9	22,7	30,0	29,2
Jueves	20,58	28,4	16,6	25,5	29,8
Viernes	30,73	29,1	32,1	35,3	No aplica

Tabla F-22 Datos para el cálculo de H
Intervalo IV. Tiempo entre llegadas

	Posición				
	19	5	10	3	1
	8	7	9	16	20
	4	12	6	11	14
	17	13	2	21	15
	-	-	18	-	-
R_j	48	37	45	51	50
N_j	4	4	5	4	4

“-” Indica que es día no aplica o fue festivo

Donde $N = 21$ tiempos observados y los datos de la **tabla F-22** permiten obtener que $H = 1.49$

Anexo. G Parámetros de diseño

En esta sección se exhibirán los resultados de los parámetros de diseño para los 84 intervalos y sus respectivos “promedios” semanales en estado estable, en estas tablas se mostrara P, P_o, L_q, L, W obtenidas de λ y μ , además de esto se tiene X tasa utilizada en el cálculo de los servidores óptimos (SO) y la columna final representa los tiempos de calibración (Cal) encontrado en cada uno de los intervalos. Se debe señalar que los resultados se muestran tanto con dos (2) como con tres (3) servidores, pero la columna de servidores óptimos (SO) y calibración (Cal) solo se muestran cuando hay dos (2) servidores en el sistema debido a que es el momento en cual se realizan los cálculos

Tabla G-1 Parámetros de diseño con 3 servidores semana 1

Semana 1	$\ln(2)/\lambda$	λ	$\ln(2)/\mu$	μ	P	Po	Lq	Wq	L	W	X
M1	19,7	126,8	29,2	85,5	0,4945	0,2146	0,2260	0,0018	1,7096	0,0135	50,5470
M2	33,2	75,3	30,8	81,0	0,3096	0,3916	0,0340	0,0005	0,9629	0,0128	69,0353
M3	20,4	122,4	33,5	74,5	0,5478	0,1776	0,3521	0,0029	1,9957	0,0163	45,2158
M4	34,0	73,3	30,6	81,5	0,2996	0,4039	0,0299	0,0004	0,9288	0,0127	70,0361
Mi1	16,5	151,6	27,3	91,4	0,5527	0,1745	0,3662	0,0024	2,0243	0,0134	44,7296
Mi2	21,2	117,9	41,0	60,9	0,6456	0,1215	0,7563	0,0064	2,6931	0,0228	35,4402
Mi3	19,2	130,3	40,1	62,2	0,6979	0,0966	1,1305	0,0087	3,2243	0,0247	30,2075
Mi4	22,9	108,9	37,2	67,1	0,5411	0,1820	0,3334	0,0031	1,9567	0,0180	45,8893
J1	21,4	116,6	38,4	65,0	0,5981	0,1471	0,5243	0,0045	2,3186	0,0199	40,1897
J2	20,7	120,3	34,1	73,2	0,5482	0,1774	0,3530	0,0029	1,9975	0,0166	45,1839
J3	18,3	136,2	40,4	61,8	0,7348	0,0809	1,5086	0,0111	3,7131	0,0273	26,5181
J4	20,6	121,3	39,1	63,8	0,6334	0,1278	0,6886	0,0057	2,5886	0,0213	36,6638
V1	34,1	73,1	35,7	69,9	0,3486	0,3466	0,0543	0,0007	1,1001	0,0150	65,1384
V2	22,8	109,4	39,0	64,0	0,5701	0,1636	0,4208	0,0038	2,1310	0,0195	42,9912
V3	21,0	118,9	39,4	63,3	0,6259	0,1317	0,6503	0,0055	2,5281	0,0213	37,4067
V4	30,7	81,2	34,6	72,1	0,3753	0,3185	0,0728	0,0009	1,1986	0,0148	62,4731
Semana 1	22,1	112,7	35,9	69,6	0,5397	0,1829	0,3297	0,0029	1,9490	0,0173	46,0253

Tabla G-2 Parámetros de diseño con 2 servidores semana 1

Semana 1	$\ln(2)/\lambda$	λ	$\ln(2)/\mu$	μ	P	Po	Lq	Wq	L	W	X	SO	Cal
M1	19,7	126,8	29,2	85,5	0,7418	0,1482	1,8152	0,0143	3,298	0,0260	25,8205	2	28,40
M2	33,2	75,3	30,8	81,0	0,4645	0,3657	0,2555	0,0034	1,184	0,0157	53,5529	2	47,83
M3	20,4	122,4	33,5	74,5	0,8218	0,0978	3,4181	0,0279	5,061	0,0413	17,8237	2	29,41
M4	34,0	73,3	30,6	81,5	0,4495	0,3798	0,2276	0,0031	1,126	0,0154	55,0542	2	49,11
Mi1	16,5	151,6	27,3	91,4	0,8291	0,0935	3,6450	0,0241	5,303	0,0350	17,0944	2	23,75
Mi2	21,2	117,9	41,0	60,9	0,9684	0,0161	29,1979	0,2477	31,13	0,2641	3,1603	2	30,54
Mi3	19,2	130,3	40,1	62,2	1,0469	-0,0229	-23,909	-0,1835	-21,89	-0,1674	-4,6888	3	27,63
Mi4	22,9	108,9	37,2	67,1	0,8117	0,1040	3,1342	0,0288	4,757	0,0437	18,8340	2	33,06
J1	21,4	116,6	38,4	65,0	0,8972	0,0542	7,4019	0,0635	9,196	0,0789	10,2846	2	30,88
J2	20,7	120,3	34,1	73,2	0,8222	0,0975	3,4324	0,0285	5,076	0,0422	17,7758	2	29,92
J3	18,3	136,2	40,4	61,8	1,1022	-0,0486	-12,462	-0,0915	-10,25	-0,0753	-10,222	3	26,44
J4	20,6	121,3	39,1	63,8	0,9500	0,0256	17,6046	0,1452	19,50	0,1608	4,9956	2	29,69
V1	34,1	73,1	35,7	69,9	0,5229	0,3133	0,3936	0,0054	1,439	0,0197	47,7076	2	49,25
V2	22,8	109,4	39,0	64,0	0,8551	0,0781	4,6535	0,0425	6,363	0,0582	14,4868	2	32,90
V3	21,0	118,9	39,4	63,3	0,9389	0,0315	13,9731	0,1175	15,85	0,1333	6,1100	2	30,27
V4	30,7	81,2	34,6	72,1	0,5629	0,2797	0,5222	0,0064	1,648	0,0203	43,7096	2	44,34
Semana 1	22,1	112,7	35,9	69,6	0,8096	0,1052	3,0808	0,0273	4,700	0,0417	19,0379	2	31,94

Tabla G-3 Parámetros de diseño con 3 servidores semana 2

Semana 2	$\ln(2)/\lambda$	λ	$\ln(2)/\mu$	μ	P	Po	Lq	Wq	L	W	X
M1	19,3	129,2	40,5	61,6	0,6991	0,0961	1,1410	0,0088	3,2384	0,0251	30,0880
M2	16,4	152,4	41,3	60,4	0,8406	0,0426	3,7672	0,0247	6,2889	0,0413	15,9416
M3	17,1	145,8	45,2	55,2	0,8804	0,0305	5,7630	0,0395	8,4042	0,0576	11,9578
M4	21,7	114,8	43,4	57,5	0,6655	0,1117	0,8809	0,0077	2,8773	0,0251	33,4514
Mi1	25,7	97,2	46,6	53,5	0,6052	0,1431	0,5539	0,0057	2,3695	0,0244	39,4825
Mi2	24,9	100,4	44,5	56,1	0,5967	0,1479	0,5185	0,0052	2,3085	0,0230	40,3325
Mi3	20,3	122,8	43,7	57,1	0,7166	0,0885	1,3074	0,0107	3,4573	0,0282	28,3366
Mi4	22,9	109,0	44,7	55,8	0,6508	0,1189	0,7873	0,0072	2,7397	0,0251	34,9174
J1	28,6	87,3	44,5	56,1	0,5188	0,1971	0,2774	0,0032	1,8337	0,0210	48,1243
J2	21,3	117,3	45,0	55,5	0,7053	0,0934	1,1970	0,0102	3,3129	0,0282	29,4698
J3	23,1	108,1	36,2	68,9	0,5225	0,1945	0,2862	0,0026	1,8537	0,0172	47,7486
J4	28,4	87,9	41,4	60,3	0,4859	0,2210	0,2099	0,0024	1,6677	0,0190	51,4050
V1	25,1	99,4	50,8	49,1	0,6748	0,1072	0,9463	0,0095	2,9707	0,0299	32,5177
V2	27,1	92,2	40,6	61,5	0,5002	0,2104	0,2372	0,0026	1,7377	0,0188	49,9831
V3	24,2	103,3	38,4	65,0	0,5300	0,1894	0,3043	0,0029	1,8942	0,0183	47,0045
V4	29,1	85,6	45,5	54,8	0,5205	0,1959	0,2815	0,0033	1,8431	0,0215	47,9479
Semana 2	22,9	109,2	43,0	58,1	0,6266	0,1314	0,6535	0,0060	2,5332	0,0232	37,3432

Tabla G-4 Parámetros de diseño con 2 servidores semana 2

Semana 2	$\ln(2)/\lambda$	λ	$\ln(2)/\mu$	μ	P	Po	Lq	Wq	L	W	X	SO	Cal
M1	19,3	129,2	40,5	61,6	1,0487	-0,0238	-23,1280	-0,1790	-21,0307	-0,1627	-4,8679	3	2,79
M2	16,4	152,4	41,3	60,4	1,2609	-0,1154	-6,7973	-0,0446	-4,2755	-0,0281	-26,0876	3	2,36
M3	17,1	145,8	45,2	55,2	1,3206	-0,1382	-6,1910	-0,0425	-3,5497	-0,0243	-32,0633	3	2,47
M4	21,7	114,8	43,4	57,5	0,9982	0,0009	562,1395	4,8972	564,1359	4,9146	0,1771	3	3,14
Mi1	25,7	97,2	46,6	53,5	0,9078	0,0483	8,5019	0,0875	10,3174	0,1061	9,2237	2	3,70
Mi2	24,9	100,4	44,5	56,1	0,8950	0,0554	7,2072	0,0718	8,9972	0,0896	10,4988	2	3,59
Mi3	20,3	122,8	43,7	57,1	1,0750	-0,0361	-15,9738	-0,1301	-13,8239	-0,1126	-7,4951	3	2,93
Mi4	22,9	109,0	44,7	55,8	0,9762	0,0120	39,6261	0,3636	41,5785	0,3815	2,3762	3	3,30
J1	28,6	87,3	44,5	56,1	0,7781	0,1248	2,3886	0,0274	3,9449	0,0452	22,1865	2	4,13
J2	21,3	117,3	45,0	55,5	1,0580	-0,0282	-19,8574	-0,1692	-17,7415	-0,1512	-5,7952	3	3,07
J3	23,1	108,1	36,2	68,9	0,7838	0,1212	2,4966	0,0231	4,0641	0,0376	21,6230	2	3,33
J4	28,4	87,9	41,4	60,3	0,7289	0,1568	1,6528	0,0188	3,1106	0,0354	27,1075	2	4,10
V1	25,1	99,4	50,8	49,1	1,0122	-0,0061	-84,2576	-0,8473	-82,2331	-0,8269	-1,2234	3	3,62
V2	27,1	92,2	40,6	61,5	0,7503	0,1427	1,9322	0,0210	3,4327	0,0372	24,9746	2	3,90
V3	24,2	103,3	38,4	65,0	0,7949	0,1142	2,7294	0,0264	4,3193	0,0418	20,5068	2	3,48
V4	29,1	85,6	45,5	54,8	0,7808	0,1231	2,4385	0,0285	4,0001	0,0467	21,9219	2	4,20
Semana 2	22,9	109,2	43,0	58,1	0,9399	0,0310	14,2302	0,1304	16,1100	0,1476	6,0149	2	32,98

Tabla G-5 Parámetros de diseño con 3 servidores semana 3

Semana 3	$\ln(2)/\lambda$	λ	$\ln(2)/\mu$	μ	P	Po	Lq	Wq	L	W	X
L1	22,9	109,0	40,5	61,6	0,5895	0,1520	0,4902	0,0045	2,2586	0,0207	41,0519
L2	22,6	110,2	40,6	61,5	0,5976	0,1473	0,5224	0,0047	2,3153	0,0210	40,2370
L3	17,3	144,4	42,3	59,0	0,8162	0,0506	2,9908	0,0207	5,4393	0,0377	18,3839
L4	25,5	98,0	42,0	59,4	0,5501	0,1762	0,3585	0,0037	2,0086	0,0205	44,9945
M1	21,8	114,3	42,3	59,0	0,6456	0,1215	0,7566	0,0066	2,6935	0,0236	35,4366
M2	19,3	129,5	33,8	73,8	0,5848	0,1548	0,4727	0,0036	2,2272	0,0172	41,5159
M3	28,1	88,8	38,8	64,3	0,4602	0,2412	0,1671	0,0019	1,5477	0,0174	53,9796
M4	23,8	104,7	41,9	59,6	0,5862	0,1539	0,4779	0,0046	2,2366	0,0214	41,3769
Mi1	21,2	117,7	40,4	61,8	0,6353	0,1268	0,6989	0,0059	2,6047	0,0221	36,4705
Mi2	24,7	101,1	40,7	61,3	0,5499	0,1763	0,3580	0,0035	2,0078	0,0199	45,0097
Mi3	23,2	107,7	42,1	59,3	0,6059	0,1427	0,5570	0,0052	2,3747	0,0220	39,4109
Mi4	22,7	110,0	45,7	54,6	0,6716	0,1088	0,9229	0,0084	2,9376	0,0267	32,8440
J1	19,2	129,9	43,7	57,1	0,7581	0,0716	1,8195	0,0140	4,0940	0,0315	24,1853
J2	19,2	130,3	34,6	72,1	0,6022	0,1447	0,5414	0,0042	2,3480	0,0180	39,7784
J3	17,3	144,5	38,5	64,8	0,7432	0,0775	1,6131	0,0112	3,8428	0,0266	25,6771
J4	16,6	150,4	41,9	59,6	0,8418	0,0422	3,8114	0,0253	6,3367	0,0421	15,8229
V1	24,8	100,7	37,5	66,5	0,5045	0,2073	0,2460	0,0024	1,7595	0,0175	49,5520
V2	17,7	141,0	46,7	53,4	0,8794	0,0308	5,6927	0,0404	8,3309	0,0591	12,0627
V3	23,1	107,8	44,6	55,9	0,6423	0,1232	0,7374	0,0068	2,6642	0,0247	35,7714
V4	32,1	77,8	52,6	47,4	0,5469	0,1782	0,3495	0,0045	1,9902	0,0256	45,3092
Semana 3	22,0	113,3	41,2	60,6	0,6238	0,1329	0,6399	0,0056	2,5113	0,0222	37,6173

Tabla G-6 Parámetros de diseño con 2 servidores semana 3

Semana	$\ln(2)/\lambda$	λ	$\ln(2)/\mu$	μ	P	Po	Lq	Wq	L	W	X	SO	Cal
L1	22,9	109,0	40,5	61,6	0,8842	0,0614	6,3380	0,058	8,1065	0,0744	11,57	2	33,04
L2	22,6	110,2	40,6	61,5	0,8964	0,0546	7,3365	0,066	9,1294	0,0828	10,35	2	32,67
L3	17,3	144,4	42,3	59,0	1,2242	-0,1008	-7,357	-0,059	-4,9091	-0,0340	-22,44	3	24,92
L4	25,5	98,0	42,0	59,4	0,8251	0,0958	3,5189	0,035	5,1691	0,0527	17,49	2	36,72
M1	21,8	114,3	42,3	59,0	0,9685	0,0160	29,251	0,256	31,1886	0,2730	3,155	3	31,51
M2	19,3	129,5	33,8	73,8	0,8773	0,0654	5,8602	0,045	7,6147	0,0588	12,27	2	27,79
M3	28,1	88,8	38,8	64,3	0,6903	0,1832	1,2568	0,014	2,6374	0,0297	30,96	2	40,54
M4	23,8	104,7	41,9	59,6	0,8793	0,0642	5,9974	0,057	7,7561	0,0741	12,06	2	34,37
Mi1	21,2	117,7	40,4	61,8	0,9529	0,0241	18,832	0,160	20,7386	0,1762	4,706	2	30,58
Mi2	24,7	101,1	40,7	61,3	0,8249	0,0960	3,5119	0,034	5,1616	0,0510	17,51	2	35,59
Mi3	23,2	107,7	42,1	59,3	0,9088	0,0478	8,6277	0,080	10,4453	0,0970	9,116	2	33,41
Mi4	22,7	110,0	45,7	54,6	1,0073	-0,0037	-138,7	-1,263	-136,73	-1,2430	-0,734	3	32,73
J1	19,2	129,9	43,7	57,1	1,1372	-0,0642	-10,029	-0,072	-7,7554	-0,0597	-13,72	3	27,72
J2	19,2	130,3	34,6	72,1	0,9033	0,0508	8,0117	0,061	9,8184	0,0754	9,668	2	27,63
J3	17,3	144,5	38,5	64,8	1,1148	-0,0543	-11,410	-0,070	-9,1804	-0,0635	-11,44	3	24,91
J4	16,6	150,4	41,9	59,6	1,2627	-0,1161	-6,7745	-0,040	-4,2492	-0,0283	-26,26	3	23,94
V1	24,8	100,7	37,5	66,5	0,7567	0,1385	2,0278	0,020	3,5412	0,0352	24,32	2	35,75
V2	17,7	141,0	46,7	53,4	1,3191	-0,1376	-6,2035	-0,040	-3,5654	-0,0253	-31,96	3	25,54
V3	23,1	107,8	44,6	55,9	0,9634	0,0186	24,907	0,231	26,8345	0,2489	3,657	2	33,39
V4	32,1	77,8	52,6	47,4	0,8204	0,0987	3,3767	0,043	5,0174	0,0645	17,96	2	46,25
Semana 3	22,0	113,3	41,2	60,6	0,9357	0,0332	13,173	0,116	15,0452	0,1328	6,426	2	31,77

Tabla G-7 Parámetros de diseño con 3 servidores semana 4

Semana 4	$\ln(2)/\lambda$	λ	$\ln(2)/\mu$	μ	P	Po	Lq	Wq	L	W	X
M1	17,7	140,8	43,9	56,8	0,8255	0,0475	3,2597	0,0232	5,7361	0,0407	17,4517
M2	29,7	83,9	36,7	68,0	0,4114	0,2834	0,1055	0,0013	1,3398	0,0160	58,8567
M3	20,9	119,3	39,8	62,7	0,6342	0,1274	0,6932	0,0058	2,5959	0,0218	36,5762
M4	20,0	125,0	39,8	62,7	0,6645	0,1121	0,8746	0,0070	2,8682	0,0229	33,5454
Mi1	19,6	127,2	38,9	64,1	0,6607	0,1140	0,8494	0,0067	2,8316	0,0223	33,9261
Mi2	18,9	131,8	42,3	59,0	0,7446	0,0769	1,6311	0,0124	3,8649	0,0293	25,5387
Mi3	20,9	119,3	51,9	48,1	0,8273	0,0469	3,3156	0,0278	5,7975	0,0486	17,2704
Mi4	30,0	83,2	44,2	56,5	0,4911	0,2171	0,2194	0,0026	1,6926	0,0204	50,8938
J1	16,1	155,3	32,3	77,3	0,6700	0,1095	0,9118	0,0059	2,9218	0,0188	33,0015
J2	27,2	91,8	36,6	68,2	0,4487	0,2506	0,1505	0,0016	1,4967	0,0163	55,1273
J3	27,8	89,7	36,4	68,6	0,4364	0,2611	0,1341	0,0015	1,4433	0,0161	56,3612
J4	25,5	97,9	36,6	68,2	0,4786	0,2266	0,1968	0,0020	1,6327	0,0167	52,1381
V1	24,4	102,3	38,2	65,3	0,5220	0,1949	0,2851	0,0028	1,8512	0,0181	47,7960
V2	25,5	97,8	35,5	70,3	0,4638	0,2383	0,1725	0,0018	1,5638	0,0160	53,6230
V3	21,2	117,8	34,6	72,1	0,5443	0,1799	0,3421	0,0029	1,9748	0,0168	45,5744
V4	35,3	70,6	37,9	65,8	0,3574	0,3371	0,0599	0,0008	1,1321	0,0160	64,2601
Semana 4	23,1	107,9	38,5	64,9	0,5543	0,1735	0,3708	0,0034	2,0336	0,0189	44,5741

Tabla G-8 Parámetros de diseño con 2 servidores semana 4

Semana 4	$\ln(2)/\lambda$	λ	$\ln(2)/\mu$	μ	P	Po	Lq	Wq	L	W	X	SO	Cal
M1	17,7	140,8	43,9	56,8	1,2382	-0,1064	-7,1210	-0,0506	-4,6445	-0,0330	-23,8224	3	25,57
M2	29,7	83,9	36,7	68,0	0,6171	0,2367	0,7593	0,0090	1,9936	0,0238	38,2851	2	42,90
M3	20,9	119,3	39,8	62,7	0,9514	0,0249	18,1426	0,1521	20,0453	0,1680	4,8643	2	30,18
M4	20,0	125,0	39,8	62,7	0,9968	0,0016	311,8914	2,4952	313,8850	2,5112	0,3181	3	28,80
Mi1	19,6	127,2	38,9	64,1	0,9911	0,0045	109,9769	0,8649	111,9591	0,8805	0,8892	3	28,31
Mi2	18,9	131,8	42,3	59,0	1,1169	-0,0552	-11,2591	-0,0854	-9,0252	-0,0685	-11,6920	3	27,32
Mi3	20,9	119,3	51,9	48,1	1,2409	-0,1075	-7,0785	-0,0593	-4,5966	-0,0385	-24,0944	3	30,17
Mi4	30,0	83,2	44,2	56,5	0,7366	0,1517	1,7474	0,0210	3,2206	0,0387	26,3407	2	43,29
J1	16,1	155,3	32,3	77,3	1,0050	-0,0025	-203,3837	-1,3098	-201,3738	-1,2969	-0,4978	3	23,18
J2	27,2	91,8	36,6	68,2	0,6731	0,1954	1,1151	0,0121	2,4613	0,0268	32,6909	2	39,22
J3	27,8	89,7	36,4	68,6	0,6546	0,2088	0,9815	0,0109	2,2907	0,0255	34,5418	2	40,11
J4	25,5	97,9	36,6	68,2	0,7179	0,1642	1,5272	0,0156	2,9631	0,0303	28,2071	2	36,77
V1	24,4	102,3	38,2	65,3	0,7831	0,1217	2,4826	0,0243	4,0487	0,0396	21,6940	2	35,19
V2	25,5	97,8	35,5	70,3	0,6957	0,1795	1,3047	0,0133	2,6960	0,0276	30,4344	2	36,81
V3	21,2	117,8	34,6	72,1	0,8164	0,1011	3,2628	0,0277	4,8956	0,0416	18,3616	2	30,57
V4	35,3	70,6	37,9	65,8	0,5361	0,3020	0,4324	0,0061	1,5046	0,0213	46,3902	2	51,00
Semana 4	23,1	107,9	38,5	64,9	0,8314	0,0921	3,7220	0,0345	5,3847	0,0499	16,8612	2	33,37

Tabla G-9 Parámetros de diseño con 3 servidores semana 5

Semana 5	$\ln(2)/\lambda$	λ	$\ln(2)/\mu$	μ	P	Po	Lq	Wq	L	W	X
L1	21,1	118,4	30,6	81,4	0,4848	0,2218	0,2078	0,0018	1,6623	0,0140	51,5182
L2	19,5	127,9	32,3	77,4	0,5509	0,1756	0,3610	0,0028	2,0138	0,0157	44,9074
L3	22,7	109,8	25,9	96,3	0,3802	0,3135	0,0767	0,0007	1,2173	0,0111	61,9803
L4	15,5	160,5	31,4	79,6	0,6723	0,1084	0,9285	0,0058	2,9455	0,0184	32,7651
M1	19,8	126,1	31,1	80,2	0,5239	0,1935	0,2896	0,0023	1,8615	0,0148	47,6055
M2	22,0	113,2	34,6	72,1	0,5231	0,1942	0,2875	0,0025	1,8566	0,0164	47,6947
M3	21,1	118,4	38,7	64,4	0,6131	0,1387	0,5889	0,0050	2,4282	0,0205	38,6915
M4	34,4	72,6	42,6	58,6	0,4129	0,2820	0,1071	0,0015	1,3459	0,0185	58,7063
Mi1	22,0	113,2	35,2	70,8	0,5330	0,1874	0,3119	0,0028	1,9108	0,0169	46,7045
Mi2	20,4	122,6	36,3	68,8	0,5943	0,1492	0,5091	0,0042	2,2920	0,0187	40,5684
Mi3	16,1	154,8	31,6	78,9	0,6537	0,1175	0,8046	0,0052	2,7656	0,0179	34,6328
Mi4	29,2	85,5	35,5	70,2	0,4058	0,2887	0,0997	0,0012	1,3171	0,0154	59,4211
J1	21,4	116,7	31,6	78,9	0,4932	0,2155	0,2235	0,0019	1,7032	0,0146	50,6760
J2	20,0	125,1	30,9	80,7	0,5165	0,1987	0,2722	0,0022	1,8216	0,0146	48,3525
J3	25,3	98,6	31,0	80,6	0,4076	0,2869	0,1016	0,0010	1,3246	0,0134	59,2352
J4	29,8	83,8	36,9	67,6	0,4136	0,2814	0,1078	0,0013	1,3486	0,0161	58,6393
Semana 5	21,5	116,2	33,3	75,0	0,5168	0,1985	0,2730	0,0023	1,8235	0,0157	48,3155

Tabla G-10 Parámetros de diseño con 2 servidores semana 5

Semana 5	Ln(2)/λ	λ	Ln(2)/μ	μ	P	Po	Lq	Wq	L	W	X	SO	Cal
L1	21,1	118,4	30,6	81,4	0,7272	0,1579	1,6326	0,0138	3,0871	0,0261	27,2773	2	30,40
L2	19,5	127,9	32,3	77,4	0,8264	0,0951	3,5597	0,0278	5,2125	0,0408	17,3611	2	28,15
L3	22,7	109,8	25,9	96,3	0,5703	0,2736	0,5498	0,0050	1,6904	0,0154	42,9704	2	32,79
L4	15,5	160,5	31,4	79,6	1,0085	-0,0042	-119,8395	-0,7466	-117,8224	-0,7340	-0,8523	3	22,43
M1	19,8	126,1	31,1	80,2	0,7859	0,1199	2,5393	0,0201	4,1112	0,0326	21,4082	2	28,56
M2	22,0	113,2	34,6	72,1	0,7846	0,1207	2,5126	0,0222	4,0817	0,0361	21,5421	2	31,81
M3	21,1	118,4	38,7	64,4	0,9196	0,0419	10,0819	0,0851	11,9211	0,1006	8,0373	2	30,39
M4	34,4	72,6	42,6	58,6	0,6194	0,2350	0,7712	0,0106	2,0100	0,0277	38,0594	2	49,62
Mi1	22,0	113,2	35,2	70,8	0,7994	0,1115	2,8313	0,0250	4,4301	0,0391	20,0567	2	31,80
Mi2	20,4	122,6	36,3	68,8	0,8915	0,0574	6,9028	0,0563	8,6857	0,0708	10,8526	2	29,36
Mi3	16,1	154,8	31,6	78,9	0,9805	0,0098	48,8356	0,3155	50,7966	0,3282	1,9493	3	23,26
Mi4	29,2	85,5	35,5	70,2	0,6087	0,2433	0,7165	0,0084	1,9339	0,0226	39,1316	2	42,10
J1	21,4	116,7	31,6	78,9	0,7399	0,1495	1,7896	0,0153	3,2693	0,0280	26,0140	2	30,84
J2	20,0	125,1	30,9	80,7	0,7747	0,1269	2,3259	0,0186	3,8753	0,0310	22,5288	2	28,78
J3	25,3	98,6	31,0	80,6	0,6115	0,2411	0,7303	0,0074	1,9533	0,0198	38,8528	2	36,52
J4	29,8	83,8	36,9	67,6	0,6204	0,2343	0,7765	0,0093	2,0173	0,0241	37,9590	2	42,94
Semana 5	21,5	116,2	33,3	75,0	0,7753	0,1266	2,3359	0,0201	3,8864	0,0334	22,4732	2	30,97