



“APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LOS ELEMENTOS FINITOS PARA SIMULAR TIERRA REFORZADA CON GEOSINTÉTICOS, TENIENDO EN CUENTA EL COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL SUELO”

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LOS ELEMENTOS FINITOS PARA
SIMULAR TIERRA REFORZADA CON GEOSINTÉTICOS, TENIENDO EN
CUENTA EL COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL SUELO**

LUZ ENEIDA BOTINA MUÑOZ

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
INSTITUTO DE POSGRADOS EN INGENIERIA CIVIL
MAESTRIA EN INGENIERIA DE VIAS TERRESTRES**

POPAYAN

2010



“APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LOS ELEMENTOS FINITOS PARA SIMULAR TIERRA REFORZADA CON GEOSINTÉTICOS, TENIENDO EN CUENTA EL COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL SUELO”

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LOS ELEMENTOS FINITOS PARA
SIMULAR TIERRA REFORZADA CON GEOSINTÉTICOS, TENIENDO EN
CUENTA EL COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL SUELO**

LUZ ENEIDA BOTINA MUÑOZ

**Trabajo de investigación para optar el título de Magíster en Ingeniería de
Vías Terrestres**

Director

ING. LUCIANO RIVERA CAICEDO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

INSTITUTO DE POSGRADOS EN INGENIERIA CIVIL

MAESTRIA EN INGENIERIA DE VIAS TERRESTRES

POPAYAN

2010



CONTENIDO

	Pág.
<u>INTRODUCCIÓN</u>	<u>1</u>
<u>1. OBJETIVOS.....</u>	<u>3</u>
1.1 OBJETIVO GENERAL.....	3
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	3
<u>2. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN</u>	<u>4</u>
2.1 TÍTULO	4
2.2 ANTECEDENTES	4
2.3 JUSTIFICACIÓN.....	4
2.4 ALCANCE	5
<u>3. MARCO TEÓRICO.....</u>	<u>6</u>
3.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE MUROS DE CONTENCIÓN.....	6
3.1.1 DEFINICIÓN.....	6
3.1.2 TIPOS DE MUROS	6
3.1.2.1 Muros de gravedad.....	6
3.1.2.2 Muros de Concreto Reforzado.....	6
3.1.2.3 Muros de Gaviones.....	7
3.1.2.4 Muros de Criba	7
3.1.2.5 Muros de Tierra Armada.....	7
3.2 USOS MÁS FRECUENTES DE LOS MUROS	10
3.3 CONCEPTOS BÁSICOS DE LOS GEOSINTÉTICOS.....	11
3.3.1 GENERALIDADES	11
3.3.2 DEFINICIÓN.....	12
3.3.3 CLASIFICACIÓN	12
3.3.3.1 Geomallas.....	13
3.3.3.2 Geocompuestos	13
3.3.3.3 Geomembranas	13
3.3.3.4 Geotextiles.....	13



3.3.4	FUNCIONES BÁSICAS DE LOS GEOSINTÉTICOS EN APLICACIONES GEOTÉCNICAS ...	16
3.4	TEORÍA DE LOS ELEMENTOS FINITOS	17
3.4.1	INTRODUCCIÓN	17
3.4.2	FORMULACIÓN DEL MÉTODO	17
3.4.2.1	Teoría de la Elasticidad. Relaciones Esfuerzo-Deformación Unitaria	18
3.4.2.2	Problema Modelo	22
3.4.2.3	Funciones base para elementos finitos.....	25
3.4.3	ELEMENTOS FINITOS MAESTROS	27
3.4.3.1	Elemento triangular de deformación constante.....	27
3.4.3.2	Elemento lineal.....	34
3.4.4	ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ GLOBAL DE RIGIDEZ Y VECTOR DE CARGA	37
3.5	FORMACIÓN DE LA MALLA DE E.F. TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY	41
3.5.1	TRIANGULACIÓN DE UN CONJUNTO DE PUNTOS EN UN PLANO:.....	41
3.5.2	PROPIEDADES DE LA TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY	44
3.5.3	CONSTRUCCIÓN DE LA TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY	44
3.6	COMPORTAMIENTO NO LINEAL	46
3.6.1	ANÁLISIS NO LINEAL DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL SUELO	46
3.6.1.1	Características esfuerzo-deformación de los suelos	46
3.6.1.2	No linealidad y esfuerzo-dependencia	47
3.6.1.3	Procedimiento para el análisis de esfuerzos no lineales	50
3.6.1.4	Valores de módulo tangente	53
<u>4.</u>	<u>DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN</u>	<u>55</u>
4.1	MODELACIÓN DE UN MURO DE TIERRA ARMADA CON ELEMENTOS FINITOS.....	55
4.2	CÁLCULO DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MURO DE TIERRA ARMADA.....	55
4.3	FALLA DE LOS ELEMENTOS FINITOS	56
4.4	INCLUSIÓN DE LA NO LINEALIDAD DE LOS MATERIALES A LA MODELACIÓN DE UN MURO DE TIERRA ARMADA.....	57
<u>5.</u>	<u>DESARROLLO DEL SOFTWARE</u>	<u>60</u>
5.1	INTRODUCCIÓN	60
5.2	PREPROCESADOR.....	60
5.2.1	OBJETO POLILÍNEA	61
5.2.2	OBJETO NODO	62
5.2.3	OBJETO CARGAS	63
5.2.4	OBJETO APOYO	64
5.3	PROCESADOR.....	64
5.4	POSTPROCESADOR.....	66
<u>6.</u>	<u>CALIBRACIÓN DEL SISTEMA</u>	<u>67</u>
6.1	EJEMPLO 1	67



6.1.1	DETERMINACIÓN DEL ASENTAMIENTO APLICANDO LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD ..	67
6.1.2	DETERMINACIÓN DEL ASENTAMIENTO UTILIZANDO EL SOFTWARE DESARROLLADO	69
6.2	EJEMPLO 2	74
6.2.1	CONSTRUCCIÓN E INSTRUMENTACIÓN DEL MURO A ESCALA	74
6.2.2	DESARROLLO DEL EJEMPLO	75
6.2.3	ANÁLISIS DEL MURO EN ESTUDIO UTILIZANDO EL SOFTWARE MTA.....	78
6.2.4	RESULTADOS.....	80
6.2.4.1	Relleno con suelo Cohesivo	80
6.2.4.2	Relleno con suelo granular	84
6.2.4.3	Comportamiento del refuerzo.....	87
7.	<u>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....</u>	90



INTRODUCCIÓN

Uno de los factores más importantes y complejos a tener en cuenta en el diseño de estructuras que involucren la presencia de suelo, es inferir su comportamiento frente a las solicitaciones impuestas.

La Ingeniería Geotécnica, aunque es una de las disciplinas más jóvenes de la Ingeniería Civil y aunque día a día se realicen avances significativos, siempre encontrará limitantes en la predicción del comportamiento del suelo y los principales factores que lo afectan, haciendo de este modo inevitable recurrir a simplificaciones y empirismos ya sea por la complejidad del asunto y/o por el poco conocimiento o experiencia que se tenga acerca de ello. Muchas de las aproximaciones de diseño que aún se emplean extensamente, no representan nuestra mejor capacidad para la predicción del comportamiento de los suelos.

Los avances en la Ingeniería Geotécnica buscan hacer una predicción más certera de las reales capacidades del suelo, para lo cual requiere de tres componentes:

- Modelos que describan el verdadero comportamiento del suelo.
- Métodos para evaluar parámetros requeridos del suelo, y
- Procedimientos computacionales para aplicar el modelo a problemas prácticos.

Sin embargo, la complejidad de la estructura de un suelo, no hace fácil su representación sobre un modelo matemático.

Uno de los modelos computacionales utilizados en el mundo actualmente, es el método de los elementos finitos, el cual consiste en dividir la masa de suelo en elementos interconectados los cuales poseen propiedades típicas del problema considerado (deformación, resistencia, consolidación, densidad, etc.), proporcionando soluciones mucho más acertadas a la realidad. Estos modelos requieren de un conocimiento amplio, claro y confiables de todos los parámetros del suelo y de recursos computacionales muy versátiles para su desarrollo.

La mayor parte de los modelos de diseño, están basados en modelos analíticos que consideran el suelo como un medio continuo, elástico lineal. Suponen una enorme simplificación del problema real. Estos modelos no consideran fenómenos tan importantes como la anisotropía y la no linealidad de los materiales.

En este proyecto, la teoría de los elementos finitos estará dirigida al cálculo de los esfuerzos y deformaciones presentes en un muro de tierra armada, teniendo en cuenta el comportamiento no lineal del suelo de relleno, para lo cual será creada una herramienta computacional que permita de manera ágil y confiable el logro de éste objetivo.

En el desarrollo de este sistema se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones: se trabaja en esfuerzos totales, análisis a corto plazo, no es tenido en cuenta el fenómeno de creep, no se considera la anisotropía del suelo, no hay modelo



de comportamiento para la interfase suelo-geotextil, por tanto, se consideran completamente ligados.



1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Desarrollar un sistema que permita simular tierra reforzada con geotextil utilizando la Teoría de los Elementos Finitos teniendo en cuenta la no linealidad del suelo.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Estudio del estado del Arte
- ✓ Desarrollo de algoritmos
- ✓ Estructurar un programa de computador para el modelo de comportamiento esfuerzo-deformación del suelo adoptado en desarrollo de este trabajo.
- ✓ Evaluar, utilizando el sistema implementado, el comportamiento a esfuerzos y deformaciones de un muro de tierra armada y establecer comparación de resultados con los obtenidos con otras metodologías, para el mismo muro.



2. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 TÍTULO

Aplicación de la Teoría de los Elementos Finitos para simular Tierra Reforzada con Geotextil, teniendo en cuenta el comportamiento no lineal del suelo.

2.2 ANTECEDENTES

Para el diseño de muros de suelo reforzado con geosintéticos existen diversos métodos tales como: los de equilibrio límite, el de compatibilidad de deformaciones (Juran y Christopher 1989, Juran y Chen, y Juran et al. 1990), el análisis de estado límite (McGown et al. 1992) y la técnica de los elementos finitos (Ling et al. 1992)¹.

Hasta el momento, dentro de la Universidad del Cauca, el trabajo de diseño y chequeo de muros de tierra reforzada con geosintéticos, se ha realizado utilizando métodos que no involucran la técnica de los elementos finitos y que no tienen en cuenta el verdadero estado de esfuerzos que presentan los suelos dentro del cuerpo de un muro de tierra armada.

En cuanto al uso de la Teoría de los Elementos Finitos, actualmente existen aplicaciones de computador tales como el PLAXIS y el ANSYS, los cuales realizan análisis de deformaciones, estabilidad y flujo de agua subterránea en la ingeniería geotécnica en dos y tres dimensiones, haciendo uso de diversos paquetes de elementos finitos y de modelos constitutivos para la simulación de la no linealidad y tiempo dependencia del comportamiento de los suelos.

2.3 JUSTIFICACIÓN

En la actualidad el diseño de muros de tierra armada, se realiza con métodos aproximados, los cuales llevan a un cierto grado de incertidumbre. Pensando en ello, el motivo principal de este proyecto, es estudiar de una forma más precisa la incidencia real del comportamiento del suelo, considerando la no linealidad, teniendo en cuenta los estados de esfuerzos y deformaciones en cada punto de la masa; esto implica la generación de un modelo que evalúe y muestre la influencia de dichas consideraciones en el diseño y chequeo de la estructura.

El desarrollo tecnológico de las últimas décadas ha llevado al uso de los elementos finitos en el diseño y evaluación en todas las áreas de la ingeniería.

Este trabajo adquiere importancia dentro del marco de investigaciones de la Universidad del Cauca pues representa un avance en el desarrollo de software propio que muy seguramente será de utilidad para la ingeniería Colombiana.



2.4 ALCANCE

Con la investigación que se está proponiendo se pretende desarrollar una herramienta matemática computacional que permita el diseño y chequeo de muros de tierra armada utilizando la teoría de los elementos finitos y el modelo de comportamiento del suelo propuesto por Kondner para la modelación de la estructura, que incluye el comportamiento no lineal del suelo.



3. MARCO TEÓRICO

3.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE MUROS DE CONTENCIÓN

3.1.1 Definición

Se define como muro: “Toda estructura continua que de forma activa o pasiva produce un efecto estabilizador sobre una masa de terreno”. El carácter fundamental de los muros es el de servir de elemento de contención de un terreno, que en unas ocasiones es un terreno natural y en otras un relleno artificial.²

3.1.2 Tipos de Muros

3.1.2.1 Muros de gravedad

Utiliza su propio peso como elemento estabilizador, no estando diseñado para que trabaje a tracción”. Son muros en los que la resistencia se consigue por su propio peso. Normalmente carecen de cimiento diferenciado, aunque pueden tenerlo.

Su ventaja fundamental es que no van armados, con lo cual no aparece en la obra el hierro. Pueden ser interesantes para alturas moderadas, y aún así, sólo si su longitud no es muy grande, pues en caso contrario, y en definitiva siempre que el volumen del muro sea importante, la economía que representan los muros de hormigón armado justifica la aparición del hierro.²

3.1.2.2 Muros de Concreto Reforzado

Son muros de concreto reforzados con barras de acero diseñado para poder soportar esfuerzos de tracción.

Se pueden encontrar de diferentes tipos:

- **Muros de semigravedad.** Similar al de gravedad pero ligeramente armado.
- **Muros ménsula o en “L”.** En estos muros el momento al vuelco, producido por el empuje de las tierras, es contrarrestado por el peso de las tierras sobre la zapata. Son los de empleo más corriente y aunque su campo de aplicación depende, lógicamente, de los costos relativos de excavación, hormigón, acero, encofrados y relleno, puede en primera aproximación pensarse que constituyen la solución más económica hasta alturas de 10 ó 12 metros.
- **Muros de contrafuertes.** Constituyen una solución evolucionada de la anterior, en la que al crecer la altura y por lo tanto los espesores del hormigón, compensa el aligerar las piezas. Esto conduce a encofrados mucho más complicados y a un hormigonado más difícil y por lo tanto mucho más costoso, al manejarse espesores más reducidos. Sin embargo, a partir de los 10 ó 12 m de altura es una solución



que debe ser evaluada para juzgar su interés. Puede tener los contrafuertes en el trasdós o en el intradós: Con contrafuerte en el intradós: Consiste en aligerar un muro de gravedad, suprimiendo hormigón en las zonas que colaboran muy poco en el efecto estabilizador. Con contrafuerte en el trasdós: Su idea es igual al del muro con contrafuerte en el intradós, pero en este caso los contrafuertes son interiores, es decir, no se ven. La segunda solución es técnica y económicamente mejor, por disponer el alzado en la zona comprimida de la sección en T que se forma. La primera solución, al dejar los contrafuertes vistos produce además, generalmente, una mala sensación estética.

3.1.2.3 Muros de Gaviones

Estos muros tienen el mismo comportamiento de los muros de gravedad y semigravedad. Consisten en canastillas construidas de alambre galvanizado, que pueden ser de simple torsión o triple torsión, las cuales van rellenas con material granular, de tamaño tal que se contenga dentro de la canastilla. Aquí el cementante encargado de mantener unido el material pétreo es la malla. La durabilidad de un muro de gavión, se considera mayor que la de un muro de gravedad².

Con respecto a la malla se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Deben hacerse de alambre galvanizado, con el fin de dar mayor resistencia a la malla.
- En climas muy agresivos, se recomienda alambres recubiertos con PVC.
- Utilizar alambre de mayor calibre, cuando los muros van a ser muy altos y/o van a estar sometidos a grandes empujes.
- Para evitar grandes deformaciones, se recomienda colocar tensores dentro de la caja, tanto en sentido transversal como longitudinal.

3.1.2.4 Muros de Criba

Están constituidos por elementos prefabricados de concreto reforzado, con los cuales se van formando cajas que luego se rellenan con suelo.

Conceptualmente estos muros son también muros de gravedad o semigravedad.

3.1.2.5 Muros de Tierra Armada

Los muros de tierra armada son sistemas en los cuales se utiliza materiales térreos como elementos de construcción³.

La tierra armada es una asociación de tierra y elementos lineales capaces de soportar fuerzas de tensión importantes; estos últimos elementos suelen ser tiras metálicas o



geosintéticos. El refuerzo de tales tiras da al conjunto una resistencia a la tensión de la que el suelo carece en sí mismo, con la ventaja adicional de que la masa puede reforzarse única o principalmente en las direcciones más convenientes. La fuente de esta resistencia a la tensión es la fricción interna del suelo, debido a que las fuerzas que se producen en la masa se transfieren del suelo a las tiras de refuerzo por fricción.

La fricción desarrollada en las dos superficies de las tiras que están en contacto con el suelo de relleno en la zona pasiva o de anclaje tiene dirección opuesta al empuje del suelo sobre la pantalla y tiende por lo tanto a mantenerla estable.

Muros de tierra armada con cinta metálica

La idea moderna de reforzar suelo con materiales que pueden resistir esfuerzos de tensión, fue desarrollada por el ingeniero francés Henri Vidal en la década de los 60.

Un muro de tierra armada tipo “Vidal” es simplemente una pared hecha de metal, de concreto o cualquier otro material resistente a la cual van unidas a diferentes alturas, cintas de refuerzo que pueden ser metálicas o fibras sintéticas de alta resistencia a la tensión.¹

Las primeras cintas utilizadas fueron de acero galvanizado lisas. En 1997, la compañía Terre Armée, introdujo cintas con nervaduras que presentan un mayor agarre por fricción con el suelo; esto permitió el uso de cintas más gruesas y menos anchas y por lo tanto, con menor superficie expuesta a la corrosión.

El suelo de relleno para este tipo de muros debe ser preferiblemente granular, cumpliendo con ciertas propiedades.

Muros de tierra armada con geosintéticos

La mayoría de los muros de contención de suelo reforzado con geosintéticos han sido usados como estructuras temporales en aplicaciones secundarias, pero dado al buen desempeño que han presentado y a su relación costo-efectividad, la aplicación de este tipo de muros para estructuras permanentes y de importancia, tales como terraplenes para carreteras y vías férreas, se está incrementando rápidamente, llegando a reemplazar los muros de contención convencionales.

Como estructuras permanentes, estos muros deben ser debidamente diseñados y contraídos, de modo que ellos:

- Sean suficientemente estables,
- Exhiban bajas deformaciones,
- Sean durables, y
- Sean estéticamente presentables.

Los muros de contención se construyen actualmente con geotextiles y con geogrillas. A diferencia de la tierra armada tipo “Vidal”, estos muros con geosintéticos se ha

construido satisfactoriamente con rellenos granulares y también con suelos finos plásticos.¹

Existe una gran diversidad de muros reforzados con geosintéticos, los más comunes se pueden dividir en tres grupos:

1. Muros cuya cara está conformada también con geosintético. Se construyen por capas, formando especies de almohadas rellenas con suelo compactado que se van volcando una encima de otra.
2. Muros cuya cara se construye con bloques prefabricados que se ensamblan uno a continuación de otro. Son generalmente de concreto y van unidos al refuerzo.
3. Muros de pantalla completamente monolítica que puede ser prefabricada o fundida in-situ, el refuerzo también va unido a la pantalla

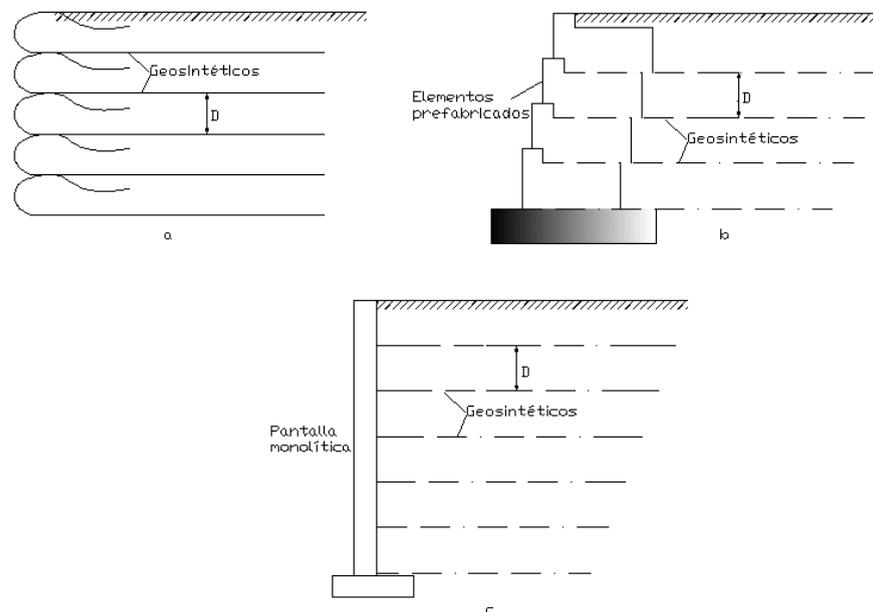


Figura 3.1. (a) Muro con pantalla de geosintético, (b) con pantalla de elementos prefabricados, (c) con pantalla monolítica¹

Criterios generales de diseño

La estabilidad de un muro de retención que se construya con tierra armada debe comprender principalmente dos clases de análisis. En primer lugar, tomar el elemento como un conjunto que no será diferente de un muro convencional del tipo de gravedad. En segundo lugar se harán análisis de estabilidad interna básicamente para definir la longitud de las tiras de refuerzo y separación horizontal y vertical, esto para que no se produzca deslizamiento del material térreo respecto a las tiras. Además de lo anterior es importante analizar el riesgo de corrosión en el caso de tiras metálicas o colocar



algún elemento frontal que impida la salida de la tierra entre las tiras de refuerzo. El drenaje se deberá planear con las mismas ideas que en los muros convencionales.³

Se han hecho tres tipos de estudio con relación a la tierra armada:

1. Estudios con vista a elaborar métodos de diseño. Por lo general se ha procurado aplicar al caso la metodología disponible, con aplicación de las teorías tradicionales del empuje de tierras.
2. Estudios de modelos bidimensionales en el laboratorio, en los que la tierra se ha representado por medio de barritas metálicas de longitud relativamente grande en comparación con su diámetro. Las tiras de armado se han hecho con el mismo material usado en los prototipos. Se trata principalmente de modelos cualitativos, en los que se han estudiado los tipos de falla susceptibles de presentarse.
3. Mediciones en prototipos construidos para resolver específicos de vías terrestres.

De los análisis y estudios anteriores parece concluirse que existe riesgo de que se presente una falla de cualquiera de los tres tipos siguientes:

1. Una falla en la cual la tierra armada colapsa como un conjunto, sin deformación importante dentro de sí misma. Esta falla puede ocurrir por deslizamiento o volcadura y es análoga a la de un muro de retención convencional que falle por las mismas causas.
2. Falla por deslizamiento de la tierra en relación a las tiras de armado, acompañada de una desorganización dentro del cuerpo de tierra armada.
3. Falla por rotura de las tiras de refuerzo, que parece estar asociada a mecanismos de falla progresiva.

Se recomienda para la masa de tierra armada una sección próxima a la rectangular, en la que el ancho sea de la altura del muro.

3.2 USOS MÁS FRECUENTES DE LOS MUROS

- Confinamiento lateral de rellenos o terraplenes.
- Conformación de la banca, en vías.
- Ayudar a estabilizar taludes.
- Protección contra la socavación del agua.
- Accesos a puentes elevados.



3.3 CONCEPTOS BÁSICOS DE LOS GEOSINTÉTICOS

3.3.1 Generalidades

En el pasado se utilizaban diversos materiales para separación y refuerzo del suelo, incluyendo césped, chorros de agua, troncos de madera, tablas, malla metálica, algodón y yute. Empero, debido a que se deterioraban en un tiempo relativamente corto, necesitaban mantenimiento con frecuencia o tenían un alto costo, era deseable el uso de materiales más eficientes, más durables. Como opción, ahora se utilizan telas sintéticas, cuadrículas, redes y otras estructuras.⁴

A comienzos del siglo pasado, en 1926 se ve el inicio de un proceso más sistemático de utilización de elementos para el mejoramiento de las condiciones del terreno. En Carolina del Sur, fue donde se utilizó por vez primera para la ejecución de una carretera una capa gruesa de algodón cubierta por asfalto caliente con una capa delgada de arena sobre una base de tierra. Este experimento no se dio a conocer sino diez años después; demostrando su efectividad al observar que después de realizados ensayos de campo se había disminuido considerablemente el agrietamiento y las fallas en la carretera. A pesar de este aparente éxito, existió un factor que no pudo ser controlado, la descomposición de la tela. Es así como se da inicio a los GEOSINTÉTICOS, "GEO" por su aplicación directa a suelos y rocas y "SINTÉTICOS", por ser fabricado exclusivamente de productos no naturales.

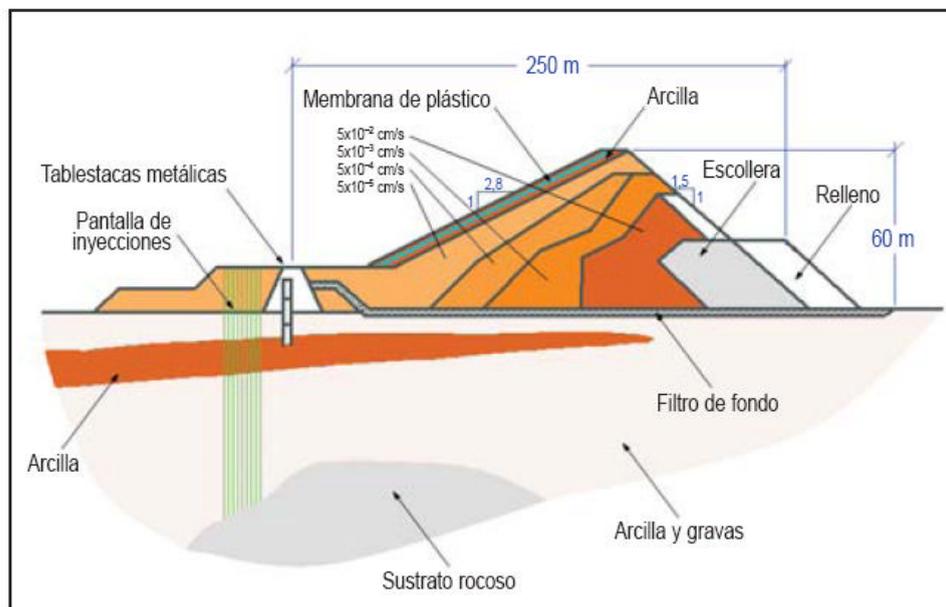


Figura 3.2. Presa de Terzaghi (Canadá) donde se utilizaron geosintéticos para resolver problemas geotécnicos⁴

Los grupos más influenciados en la utilización de los geosintéticos son los ingenieros y geotécnicos. Aunque son innumerables las razones que determinan la preferencia por la utilización de estos materiales; podríamos citar su rápida instalación, el que



reemplazan diseños más complejos y además, que representan ventajas económicas importantes.

Las funciones que desempeñan los materiales geosintéticos se pueden agrupar en cinco categorías principales: separación de materiales, refuerzo de suelos, filtración, drenaje dentro de masas de suelos y barrera para movimiento de humedad.

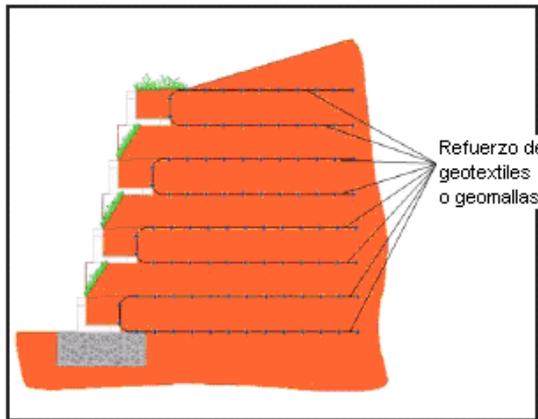


Figura 3.3. Muro ecológico reforzado con geosintéticos

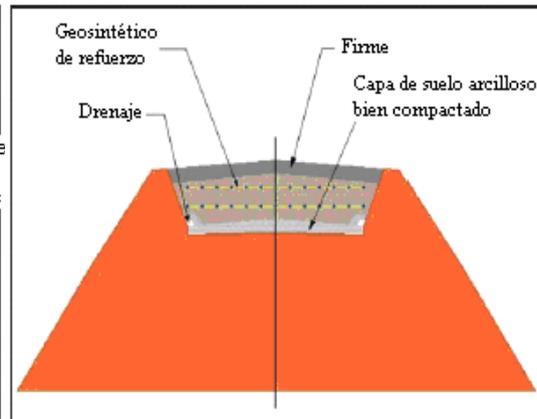


Figura 3.4. Aumento de la capacidad portante de un terraplén mediante el uso de geosintéticos

3.3.2 Definición

De acuerdo con la Sociedad Internacional de Geosintéticos, se denomina como tales a los materiales fabricados con polímeros (en su mayoría polipropileno, y, en ocasiones, poliéster, polietileno, hule, fibras de vidrio u otros materiales.) y que se emplean para mejorar, aumentar y hacer más económicos proyectos medioambientales, de las infraestructuras de transporte y de obras geotécnicas e hidráulicas.

3.3.3 Clasificación

Los geosintéticos se pueden clasificar en la actualidad en cuatro grupos :

1. Geomalla
2. Geocompuestos
3. Geomembranas
4. Geotextiles



3.3.3.1 Geomallas

Las geomallas forman el grupo más pequeño de los geosintéticos, pero en la actualidad tienen un crecimiento bastante acelerado. Son plásticos que forman una configuración bastante abierta. Frecuentemente las geomallas son estrechadas en una o en dos direcciones para mejorar sus propiedades físicas.

Según su función se pueden clasificar en:

- Para separación
- Para refuerzo

Las geomallas tienen gran variedad de usos como pueden ser:

- Para refuerzo de base de carretera.
- Muros de tierra reforzada.
- Protección para tuberías enterradas.
- Cercas de seguridad.
- Muros de gaviones.

3.3.3.2 Geocompuestos

Los geocompuestos son una combinación de otros tipos de materiales geosintéticos, formulados para cumplir funciones específicas.

El diseño de filtros de materiales geosintéticos, o refuerzo de tierra, o un recubrimiento de membrana impermeable para relleno sanitario requiere de una idea clara de las características geotécnicas a alcanzarse con la aplicación de materiales geosintéticos, y de un pleno conocimiento de las propiedades de los materiales geosintéticos así como de los materiales disponibles en la actualidad y de sus propiedades.

3.3.3.3 Geomembranas

Las geomembranas son tejidos poliméricos realmente impermeables, que por lo general se fabrican en hojas flexibles y continuas. Se usan básicamente como barreras para líquidos o vapores. Pueden servir como recubrimientos para rellenos sanitarios y cubiertas para almacenes. Algunas geomembranas se fabrican al impregnar geotextiles con asfalto o elastoméricos.

3.3.3.4 Geotextiles

Se conoce como geotextil a la tela porosa y permeable, tejida o no tejida, formada de filamentos sintéticos continuos, que están compuestos por polímeros de valores altos en resistencia y excelente durabilidad. Forman el grupo más grande de los productos geosintéticos. Su alcance en cuanto al crecimiento durante los últimos años ha sido impresionante. Están fabricados con polímeros sintéticos como el polietileno, el poliéster, el polipropileno y el nylon. En su fabricación no se utilizan fibras naturales ya



que estas son biodegradables. Las fibras pueden ser tejidas a máquina, adheridas (de forma tal que no se hace necesario tejerlas) o simplemente anudadas y entrelazadas.

Los geotextiles los podemos clasificar sobre la base de diversos parámetros, entre ellos: según su modo, forma o proceso de fabricación, conforme a los polímeros que los constituyen, de acuerdo a su peso o espesor, atendiendo a su función ingenieril, por su finalidad de uso, en cuanto a sus propiedades ingenieriles y podrían existir otras variantes de clasificación dependiendo del fin particular del fabricante. Los geotextiles generalmente son clasificados según su proceso de fabricación y están caracterizados por la materia prima usada, y para ello deben evaluarse las dimensiones geométricas, el origen y composición química de los filamentos, pudiéndose considerar otros factores no menos relevantes. Los geotextiles se pueden clasificar de la siguiente manera: Geotextiles tejidos o no tejidos

a) *Geotextiles Tejidos*

Están caracterizados por su alargamiento inferior y aberturas uniformes compuestas por dos grupos de filamentos paralelos, sistemáticamente entrelazados para así formar una estructura plana, que puede estar formada por monofilamentos, multifilamentos, tiras de polipropileno y combinaciones. La forma de entrelazarlos depende del telar utilizado. Generalmente los dos grupos de filamentos son perpendiculares entre sí, pero pueden ser oblicuos.

Las tiras de tejido de menos de 5 mm de ancho proveen una baja permeabilidad al agua y medianamente alta susceptibilidad al punzonamiento. Los procesos para la fabricación de estas fibras sintéticas pueden ser: Fusión del polímero sintético, Extrusión, Enfriamiento, estiraje y embobinamiento de los filamentos, Formación de tejidos en telares mecánicos.

b) *Geotextiles no tejidos*

Son estructuras laberínticas, con una distribución de aberturas no uniformes, pueden estar constituidos hasta por tres tipos de fibras: multifilamentos, estopas sintéticas e hilos de hebras, formando una estructura planar. La unión de estas fibras puede ser básicamente de tres tipos: *Método Física* consiste en la unión de la fibra sin adición de elementos extraños a la configuración de la misma, existiendo dos procesos para ello un térmico y otro mecánico. En el proceso térmico se utiliza fibra tipo estopa sintética, con una composición, ya sea de homofilamentos o heterofilamentos. En el proceso mecánico se usan agujas largas y afiladas, que realizan el entrelazado y reorientación de las fibras. Los elementos utilizados para la producción de estos son los del tipo estopa sintética. Para el logro de las resistencias límites, se hace necesario la utilización de un volumen elevado de fibras, obteniendo como consecuencia grandes espesores (0.5 a 5mm) y gran peso (500 a 5500 gr/m²). Los tejidos realizados por este método tienen una alta resistencia a las perforaciones y al razgamiento, lo que les permite aceptar grandes fuerzas de tracción y punzonados; como por ejemplo, su uso en terraplenes para vías férreas.

Método Química se utiliza un medio cementante como goma, caucho, látex, derivados de celulosa y resina acrílica, que es rociado dentro de los tejidos fibrosos y posteriormente presionado con el propósito de enlazar las fibras, manteniéndolas



unidas y así le proporciona al tejido una alta resistencia. Luego debe ser aplicado aire a presión para el restablecimiento y apertura de los poros, con la finalidad de darle la permeabilidad característica de los geotextiles. El uso de este tipo de geotextil es limitado ya que como filtro no es recomendable.

Método Combinado: es un adelanto de la industria textil, que elabora una gran variedad de tejido especializado, con una gran gama de texturas, funcionalidad y bajo peso. Actualmente la fabricación de los geotextiles, se basa en la utilización de una o varias fibras sintéticas unidas o separadas, polipropileno, poliéster, acrílicos etc., siempre utilizando fibras sintéticas, debido a su bajo costo de obtención, su alta resistencia y comportamiento.

Son diversas las propiedades que se le asignan a los geotextiles; entre las más importantes están: La capacidad de resistencia y de permeabilidad. De forma secundaria la porosidad, rugosidad y durabilidad.

La resistencia es una propiedad muy importante, por ser el geotextil el encargado de soportar o absorber los esfuerzos originados desde su instalación hasta que el material comience a cumplir la función a la cual se ha destinado. Es un factor determinante para la selección del tipo de geotextil, ya que es importante garantizar la resistencia del elemento ante cualquier circunstancia.

La porosidad se entiende como el tamaño y distribución de los espacios entre los filamentos que forman un geotextil. La porosidad no es una propiedad invariable entre el grupo de los geotextiles, sino que depende del tipo de fibra y el proceso de fabricación de los mismos. Los tejidos tienen una distribución y tamaño de poro bastante regular, a diferencia de los no tejidos que presentan aberturas de varias formas y tamaños.

La rugosidad es la aspereza que presenta el geotextil en su superficie. Los geotextiles rugosos son convenientemente utilizados para desempeñar funciones de adherencia, refuerzo y toda aplicación que necesite una buena fricción entre la tela y los materiales. Los más utilizados son los tejidos y no tejidos por procesos mecánicos.

En cuanto a la durabilidad, los tejidos sintéticos son altamente resistentes al deterioro progresivo, ocasionado por agentes físicos, químicos y biológicos. Esta propiedad está directamente relacionada con el tipo de material utilizado en la manufactura de la fibra. Los geotextiles, por estar compuestos de polímeros no se descomponen biológicamente y son indigeribles; la degradación físico-química por contacto directo con suelos y químicos, no representa un problema importante. Sin embargo los geotextiles son afectados por los rayos ultravioletas, por lo que, deben protegerse de la excesiva incidencia de los rayos solares durante su almacenamiento y en algunas fases de la construcción. Una cubierta de betún asfáltico o concreto podría representar una solución para aquellas zonas en que el material estará permanentemente expuesto a la intemperie. Estas condiciones hacen de los geotextiles, un producto altamente durable y confiable.



Las seis funciones más importantes de los geotextiles son:

- Separación.
- Refuerzo.
- Filtración.
- Drenaje.
- Control de erosión.
- Estabilización. Sin embargo se definen hasta 16 funciones diferentes.

3.3.4 Funciones básicas de los geosintéticos en aplicaciones geotécnicas

Tabla 1. Funciones básicas de los geosintéticos

APLICACIÓN	FUNCIÓN	GEOSINTETICO
Estabilización capa de asiento	Refuerzo, separación, filtración	Geotextiles o geocuadrillas
Estabilización de cama de vía de ferrocarril	Drenaje, separación, filtración	Geotextil
Cerca de limo para control de sedimentación	Retención, filtración, separación de sedimento	Geotextil
Capa de asfalto	Capa para aliviar esfuerzo e impermeabilización	Geotextil
Refuerzo de suelo:		
Terraplenes	Refuerzo	Geotextiles o geocuadrillas
Pendientes agudas	Refuerzo	Geotextiles o geocuadrillas
Muros de retención	Refuerzo	Geotextiles o geocuadrillas
Control de erosión:		
Refuerzo	Refuerzo, separación	Geocompuesto
Pedriscal	Filtración y separación	Geotextil
Losa continua	Filtración y separación	Geotextil
Filtro para drenar subsuelo	Filtración	Geotextil
Protección con geomembrana	Protección y cojin	Geotextil
Drenaje del subsuelo	Transmisión y filtración de fluidos	Geocompuesto prefabricado para drenaje



3.4 TEORÍA DE LOS ELEMENTOS FINITOS

3.4.1 Introducción

Aparecen en los años 50's para la solución de un problema de mecánica de sólidos. Se da como continuación del análisis matricial de estructuras en donde se formulan relaciones entre los desplazamientos y las fuerzas internas en los nudos de unión de los diferentes elementos estructurales.⁵

Los elementos finitos son inicialmente utilizados en el análisis estructural de aviones y fue aplicado como método de los desplazamientos a problemas de esfuerzos planos en los 60's.⁵

En este método de análisis, una región compleja que define un continuo se discretiza en formas geométricas simples llamadas elementos finitos. Las propiedades del material y las relaciones gobernantes, son consideradas sobre esos elementos y expresadas en términos de valores desconocidos en los bordes del elemento. Un proceso de ensamble, cuando se consideran debidamente las cargas y restricciones, da lugar a un conjunto de ecuaciones. La solución de esas ecuaciones nos da el comportamiento aproximado del continuo.⁵

En la formulación, el comportamiento de cada elemento es representado en términos de los desplazamientos en los nudos. En contraste con el análisis matricial, en donde las relaciones \mathbf{S} vs. \mathbf{e} son determinadas en forma exacta, en los Elementos Finitos son formuladas en forma aproximada dentro de cada elemento.⁵

Las primeras formulaciones del Elementos Finitos fueron generadas a partir del trabajo virtual y el principio de la energía potencial mínima.⁵

3.4.2 Formulación del método

La Figura 3.5 muestra un elemento estructural al que se pretende determinar sus esfuerzos y desplazamientos. Aunque la estructura es una viga en voladizo de sección rectangular, la teoría de vigas no puede ser aplicada debido a que esta es demasiado corta.⁵

El método de la Teoría de la Elasticidad sirve para formular este problema en términos de ecuaciones de derivadas parciales. La solución de estas ecuaciones proporcionaría una solución exacta del problema de análisis de esfuerzos. Pero las cargas y las condiciones de soporte son tales que una solución es bastante compleja.⁵

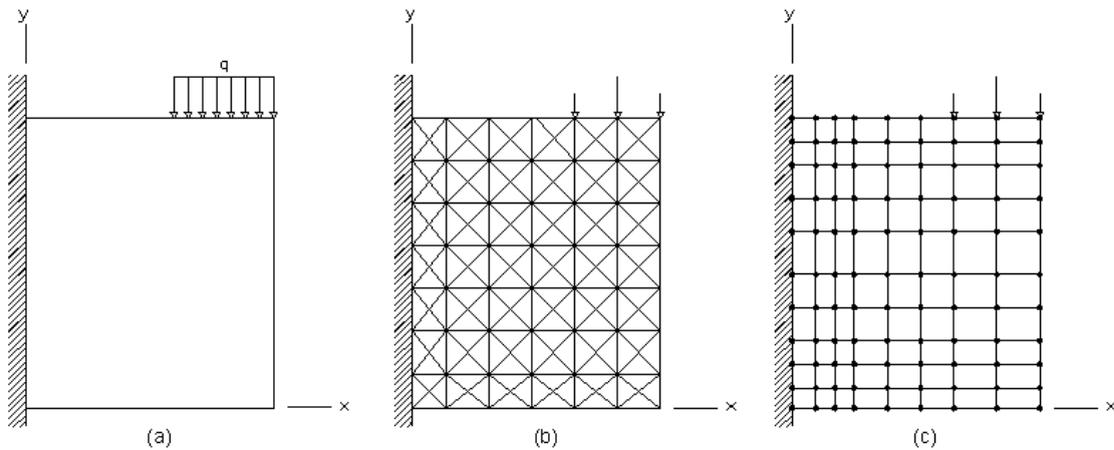


Figura 3.5. (a) estructura em um plano bajo carga, (b) uma estrutura modelo, (c) um modelo de elementos finitos.⁵

La gran mayoría de los ingenieros no son devotos de perseguir soluciones que demanden tiempos demasiado largos en la consecución de una solución que involucre ecuaciones con derivadas parciales, inclinándose por soluciones de muy buena aproximación que puedan ser obtenidas a un menor tiempo y esfuerzo razonable. Las soluciones aproximadas frecuentemente involucran el reemplazo del continuo con una estructura sustituta que tenga un número finito de grados de libertad. Tales métodos involucran el uso de un enmallado de barras elásticas (ver Figura 3.5b). Si las propiedades elásticas de las barras son apropiadamente especificadas, los desplazamientos de la estructura que son calculados son muy cercanos a los de la estructura original. Una vez los desplazamientos son conocidos, las deformaciones y los esfuerzos serán calculados por medio de las relaciones que se describen más adelante. Los grados de libertad referidos son los desplazamientos de los puntos donde las barras se conectan una a otra.⁵

El método de los Elementos Finitos usa una estructura sustituta cuyas partes son, en esencia, piezas de la estructura real. Las líneas de la malla señalan únicamente la separación de áreas y no hacen parte de la estructura. Así en la Figura 3.5c cada área rectangular es una lámina del material. Intuitivamente se podría esperar que en tanto la subdivisión sea hecha más fina, la estructura sustituta modelará la estructura original de manera mucho más aproximada. Esto se considera verdadero si se siguen las reglas de formulación de los Elementos Finitos de acuerdo al método que se siga. La estructura sustituta es una estructura de elementos finitos, y cada área separada por las líneas de la malla son un elemento finito. Los puntos en donde los elementos se conectan uno con otro son llamados nodos y se indican en la Figura 3.5c, con puntos resaltados en negro.⁵

3.4.2.1 Teoría de la Elasticidad. Relaciones Esfuerzo-Deformación Unitaria

En aras de un buen entendimiento de los elementos finitos, es de vital importancia familiarizarse con conceptos elementales como equilibrio, compatibilidad y la relación deformación-desplazamientos.



Para materiales elásticos lineales, las relaciones esfuerzo-deformación unitaria provienen de la ley de Hooke generalizada. Para materiales isotrópicos, las dos propiedades del material son el módulo de Young (o módulo de elasticidad) E y la relación de Poisson m . Si se considera un cubo elemental dentro del cuerpo, la ley de Hooke da:⁶

$$\begin{aligned}e_x &= \frac{s_x}{E} - m \frac{s_y}{E} - m \frac{s_z}{E} \\e_y &= -m \frac{s_x}{E} + \frac{s_y}{E} - m \frac{s_z}{E} \\e_z &= -m \frac{s_x}{E} - m \frac{s_y}{E} + \frac{s_z}{E}\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$g_{yz} = \frac{t_{yz}}{G}$$

$$g_{xz} = \frac{t_{xz}}{G}$$

$$g_{xy} = \frac{t_{xy}}{G}$$

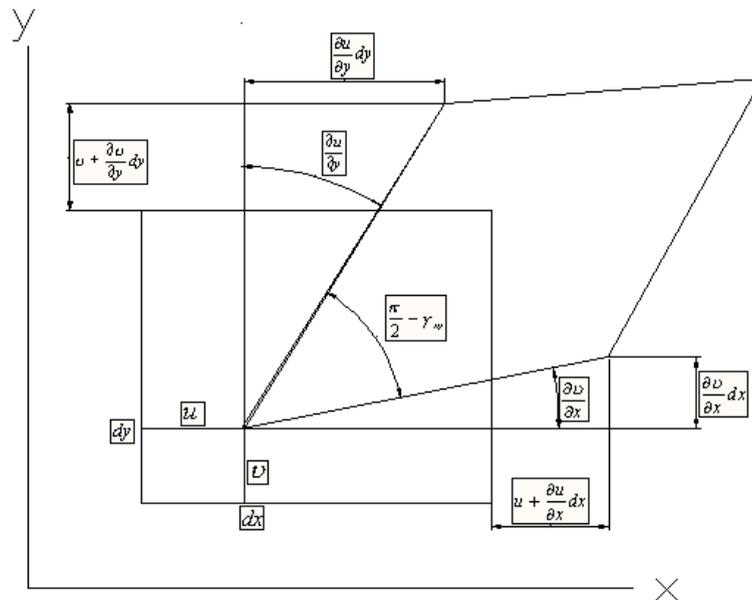


Figura 3.6. Superficie elemental deformada⁶



El módulo de corte (o módulo de rigidez) G , esta dado por

$$G = \frac{E}{2(1+m)} \quad (3.2)$$

De las relaciones de la ley de Hooke (ecuaciones 3.1), se obtiene que

$$e_x + e_y + e_z = \frac{(1-2m)}{E}(s_x + s_y + s_z) \quad (3.3)$$

Sustituyendo $(s_y + s_z)$ y otras relaciones en la ecuación 3.1, se obtienen las relaciones inversas

$$s = De \quad (3.4)$$

D es la matriz simétrica de (6×6) del material dada por

$$D = \frac{E}{(1+m)(1-2m)} \begin{bmatrix} 1-m & m & m & 0 & 0 & 0 \\ m & 1-m & m & 0 & 0 & 0 \\ m & m & 1-m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-m \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Casos especiales⁶

Una dimensión. En una dimensión, se tienen esfuerzos normales s a lo largo de x , así como la deformación unitaria correspondiente e . Las relaciones esfuerzo-deformación unitaria (ecuación 3.4) son

$$s = Ee \quad (3.6)$$

Dos dimensiones. En dos dimensiones, los problemas se modelan como esfuerzo plano y deformación unitaria plana.

Esfuerzo Plano. Se dice que un cuerpo plano delgado sometido a carga plana sobre su borde está en esfuerzo plano. Un ejemplo de esto es un anillo ajustado a presión sobre una flecha, (Figura 3.7a). Aquí los esfuerzos s_z , t_{xz} y t_{yz} se consideran iguales a cero. Entonces, las relaciones de la ley de Hooke (ecuación 3.1) dan

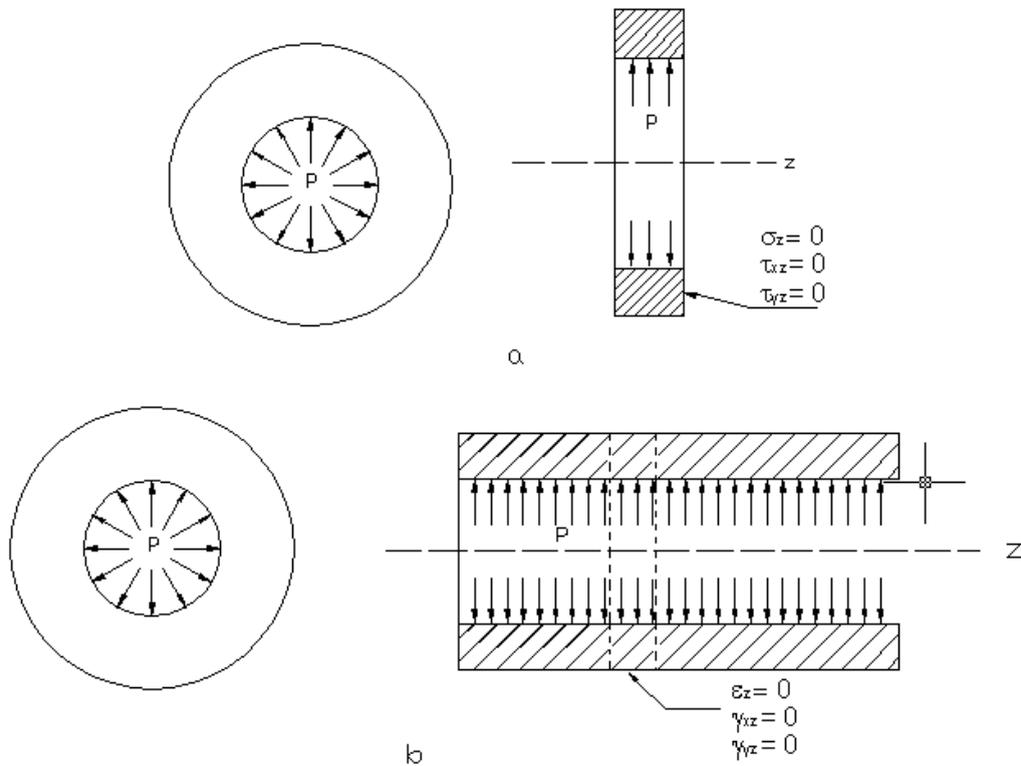


Figura 3.7. (a) Esfuerzo plano y (b) deformación unitaria plana⁶

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{s_x}{E} - m \frac{s_y}{E} \\
 e_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -m \frac{s_x}{E} + \frac{s_y}{E} \\
 e_z &= -\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{m}{E} (s_x + s_y) \\
 g_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{2(1+m)}{E} t_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Las relaciones inversas están dadas por

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-m^2} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-m}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix}
 \tag{3.8a}$$



Que suelen escribirse como $\mathbf{s} = \mathbf{K} \mathbf{e}$

ó

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mathbf{m}^2} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{m} & 0 \\ \mathbf{m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mathbf{m}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (3.8b)$$

denominadas ecuaciones constitutivas de esfuerzos planos.

Deformación unitaria plana. Si un cuerpo largo plano de sección transversal uniforme está sometido a una carga transversal a lo largo de su longitud, un espesor pequeño en el área cargada, como se muestra en la Figura 3.7b, puede tratarse como sometido a deformación unitaria plana. Aquí, \mathbf{e}_z , \mathbf{g}_{xz} y \mathbf{g}_{yz} se consideran iguales a cero. El esfuerzo \mathbf{s}_z puede no ser cero en este caso. Las relaciones esfuerzo-deformación unitaria pueden obtenerse directamente de las ecuaciones 3.4 y 3.5:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mathbf{m})(1-2\mathbf{m})} \begin{bmatrix} 1-\mathbf{m} & \mathbf{m} & 0 \\ \mathbf{m} & 1-\mathbf{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mathbf{m}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.9a)$$

Aquí \mathbf{K} es una matriz de (3 x 3), que relaciona tres esfuerzos con tres deformaciones unitarias.

Las ecuaciones constitutivas de deformaciones planas se expresan como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mathbf{m})(1-2\mathbf{m})} \begin{bmatrix} 1-\mathbf{m} & \mathbf{m} & 0 \\ \mathbf{m} & 1-\mathbf{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mathbf{m}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (3.9b)$$

3.4.2.2 Problema Modelo

Los elementos finitos es una técnica de construir soluciones “aproximadas” a problemas con condiciones de borde definidas.



El método consiste en construir una solución sobre un conjunto de subregiones denominadas “Elementos Finitos” usando los principios del cálculo variacional.

Planteamiento del problema: Encontrar la solución $U(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ que satisfaga la ecuación diferencial y condiciones de borde siguientes:

$$U''(x) - U(x) = -x \quad x \in [0,1]$$

y $U(x=0) = 0$, $U(x=1) = 0$ (condiciones de borde del elemento)

La solución de la ecuación diferencial existe y es del tipo:

$$U(x) = c_1 \sinh x + c_2 \cosh x + c_3 x + c_4$$

$$U''(x) = c_1 \sinh x + c_2 \cosh x$$

Como $U'' - U = -x \Rightarrow -c_3 x - c_4 = -x \quad \therefore c_3 = 1$ y $c_4 = 0$

$$\Rightarrow U(x) = c_1 \sinh x + c_2 \cosh x + x$$

Ahora, incluyendo las condiciones de borde:

$$U(x=0) = c_1 \sinh(0) + c_2 \cosh(0) + 0 = 0 \quad \Rightarrow c_2 = 0$$

$$U(x=1) = c_1 \sinh(1) + c_2 \cosh(1) + 1 = 0 \quad \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{\sinh(1)}$$

Por lo tanto:
$$U(x) = x - \frac{\sinh(x)}{\sinh(1)} \quad (3.10)$$

que representa una solución exacta.

La función $f(x) = -x$ representa una carga creciente de 0 a 1, si esta carga se cambia por una carga concentrada en la mitad o en cualquier punto del rango ésta se puede representar matemáticamente por la expresión $f(x) = \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$, la cual no es una función, luego entonces el problema modelo quedará así:

$$U''(x) - U(x) = -\delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad x \in [0,1]$$

y $U(x=0) = 0$, $U(x=1) = 0$ (condiciones de borde del elemento)

Cualquier $U(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial debe ser discontinua en su primera derivada en $x = \frac{1}{2}$ y por lo tanto la segunda derivada no existe. En este caso no se podría resolver la ecuación diferencial por métodos matemáticos directos. Para



ello se utiliza un método que es menos exigente en la solución y en sus derivadas. Este método se conoce como “formulación variacional del problema”.

La formulación variacional es la base para el método de los Elementos Finitos y la posibilidad de respuesta a muchos problemas en donde la solución analítica exacta no puede encontrarse.

Formulación Variacional. Consiste en encontrar una función U de tal forma que la ecuación diferencial y las condiciones de borde sean satisfechas, es decir:

$$\int_0^1 (U'' - U)J dx = \int_0^1 -xJ dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (U''(x) - U(x) + x)J(x) dx = 0 \quad \text{para toda } J \in H \text{ y } U(0)=0, U(1)=0$$

Formulación variacional simétrica. El término $U''J$ no tiene una simetría adecuada ya que exige continuidad hasta la segunda derivada en U'' y no para J , pero:

$$\frac{d}{dx}(U'J) = \frac{d^2U}{dx^2}J + \frac{dU}{dx} \frac{dJ}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(U'J) = U''J + U'J' \quad \Rightarrow \quad U''J = -U'J' + \frac{d}{dx}(U'J)$$

Tomando la formulación variacional:

$$\int_0^1 (U''J - UJ + xJ) dx = 0$$

$$\int_0^1 \left(-U'J' + \frac{d}{dx}(U'J) - UJ + xJ \right) dx = 0$$

$$\int_0^1 (-U'J' + UJ - xJ) dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}(U'J) = U'J \Big|_0^1 = 0$$

$$\int_0^1 (-U'J' + UJ - xJ) dx = 0 \quad \forall J \in H \text{ y } U(0)=0, U(1)=0 \text{ (condiciones de borde)}$$

El término más irregular es $U'J'$, ya que si U es irregular, entonces U' es irregular.



3.4.2.3 Funciones base para elementos finitos

Las funciones base o también llamadas funciones de forma son una expresión de la forma como fluyen los esfuerzos sobre un elemento.

Estas funciones se definen en intervalos o subregiones llamadas elementos finitos, no necesariamente uniformes y son construidas teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

1. Son construidas elemento a elemento sobre todo el dominio.
2. La escogencia de la función base es tal que sean lo suficientemente suaves para que los diferenciales existan.
3. Las funciones son escogidas de tal forma que las constantes a_i den el valor U_i en el nodo, $f_i = 1$.

Las funciones base se obtienen generando el producto de funciones lineales utilizando la siguiente expresión:

$$f_j = \frac{\prod_{i=1, i \neq j}^{k+1} (x - x_i)}{\prod_{i=1, i \neq j}^{k+1} (x_j - x_i)} \quad \forall j \in [1, k+1] \quad (3.11)$$

Esta función tiene la propiedad que:

$$f_j = \begin{cases} 1 & \text{en el nodo } j \\ 0 & \text{en los demás} \end{cases}$$

Todas las funciones base se trabajan sobre coordenadas locales (ξ) las cuales poseen relación directa con las coordenadas globales (x) de los elementos finitos. (Figura 3.8)

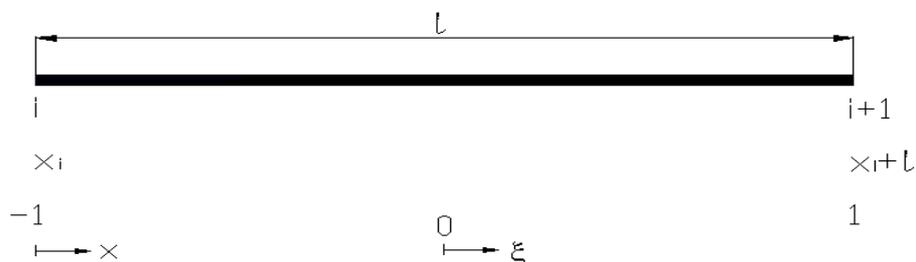
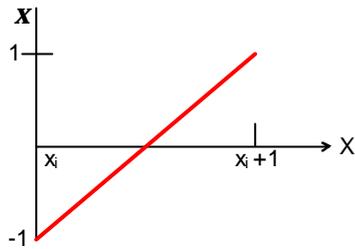


Figura 3.8. Relación coordenadas globales y locales



La relación existente entre x y X , para un elemento lineal como el que se muestra en la Figura 3.8 es la siguiente, cuando x está en el intervalo $[-1,1]$:



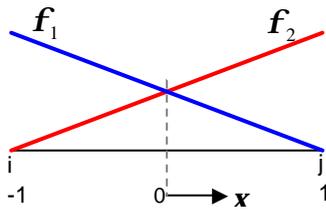
$$x = \frac{2(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - 1$$

$$dx = \frac{2}{x_{i+1} - x_i} dX$$

Sobre cada elemento finito se pueden construir funciones base polinómicas de grado k , así, podrán formularse funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, etc., conduciendo a resultados bastante más exactos en cuanto mayor sea el grado k de la función pero de igual manera su formulación se hace más compleja.

Para $k = 1$

Función lineal



Utilizando la ecuación 3.14, se tiene que:

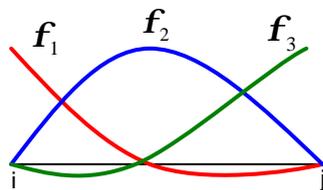
$$f_1 = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{x - 1}{-2} = \frac{1 - x}{2}$$

$$f_2 = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{x + 1}{2}$$

De igual manera se obtienen las expresiones de las funciones de forma para cuando aumenta el grado k .

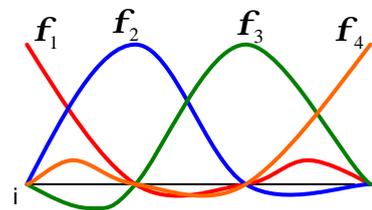
$k = 2$

Función cuadrática



$k = 3$

Función cúbica





3.4.3 Elementos finitos maestros

El elemento maestro es una forma geométrica utilizada en la subdivisión de un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) sobre el que están definidas ciertas ecuaciones integrales que caracterizan el comportamiento físico del problema en una serie de subdominios no intersectantes entre sí denominados «elementos finitos».

El elemento maestro es aquel por el cual se transforma del elemento general a cada uno de los elementos que conforman la malla de la estructura. El elemento maestro se caracteriza por el número de nodos y por su geometría; se trabaja siempre en coordenadas locales.

En la presente investigación se ha utilizado un elemento maestro de configuración triangular utilizado por su simplicidad en el manejo numérico y facilidad para la configuración del borde de geometrías complejas. Este elemento es un triángulo de tres nodos con dos grados de libertad por nodo, su geometría debe ser tal de modo que sus vértices no estén alineados, esto implica que es óptimo en la configuración del triángulo que los ángulos sean agudos; es importante también que se guarde proporción de los lados del triángulo con el objeto que la configuración de las funciones de forma sean homogéneas en toda la malla de elementos finitos.

3.4.3.1 Elemento triangular de deformación constante

Un triángulo plano tiene seis (6) grados de libertad como se muestra en la Figura 3.9, dos por nodo. Este elemento es ampliamente usado, debido a su simplicidad y a que fue adoptado como elemento maestro desde muy temprano.⁵

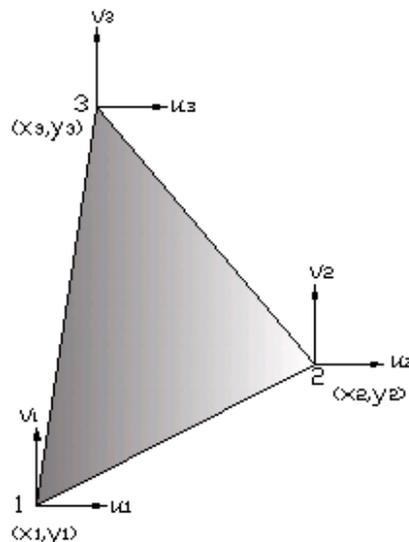


Figura 3.9. Elemento triangular de tres nodos



Consideremos un elemento finito triangular como el mostrado en la Figura 3.9. La numeración de los nodos 1, 2, 3 corresponde al sistema local, mientras que en el sistema global los nodos se identificarán por números enteros cualesquiera. Los desplazamientos en los sentidos x e y se pueden interpolar en función de los desplazamientos nodales u_i y \mathbf{u}_i , $p = 1, 2, 3$ en la forma usual⁷

$$U(x, y) = \mathbf{f}_1 u_1 + \mathbf{f}_2 u_2 + \mathbf{f}_3 u_3$$
$$\mathbf{J}(x, y) = \mathbf{f}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{f}_2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{f}_3 \mathbf{u}_3$$

donde las funciones de forma $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(x, y)$ deben ser tales que sean iguales a uno (1) en el nodo respectivo y cero (0) en los restantes (Figura 3.10). En el triángulo de deformación constante las funciones de forma son lineales sobre cada elemento. Cualquier combinación lineal de esas funciones de forma representa una superficie plana. En particular, $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ representa un plano con altura de 1 en los nodos 1, 2, 3 y es paralelo al triángulo 123. En consecuencia, para toda $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$,⁶

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 = 1$$

por lo que $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ no son linealmente independientes; solo dos de ellas lo son. Las funciones de forma independientes son representadas convenientemente por el par \mathbf{x}, \mathbf{h} , como sigue

$$\mathbf{f}_1 = 1 - \mathbf{x} - \mathbf{h} \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{x} \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{h}$$

donde \mathbf{x}, \mathbf{h} son coordenadas locales (Figura 3.10). En el elemento unidimensional, numeral 3.4.2.5, las coordenadas x fueron representadas en las coordenadas \mathbf{x} y las funciones de forma fueron definidas como funciones de \mathbf{x} . Ahora, en el problema bidimensional, las coordenadas x, y son representadas en las coordenadas \mathbf{x}, \mathbf{h} y las funciones de forma se definen como funciones de \mathbf{x} y \mathbf{h} .⁶

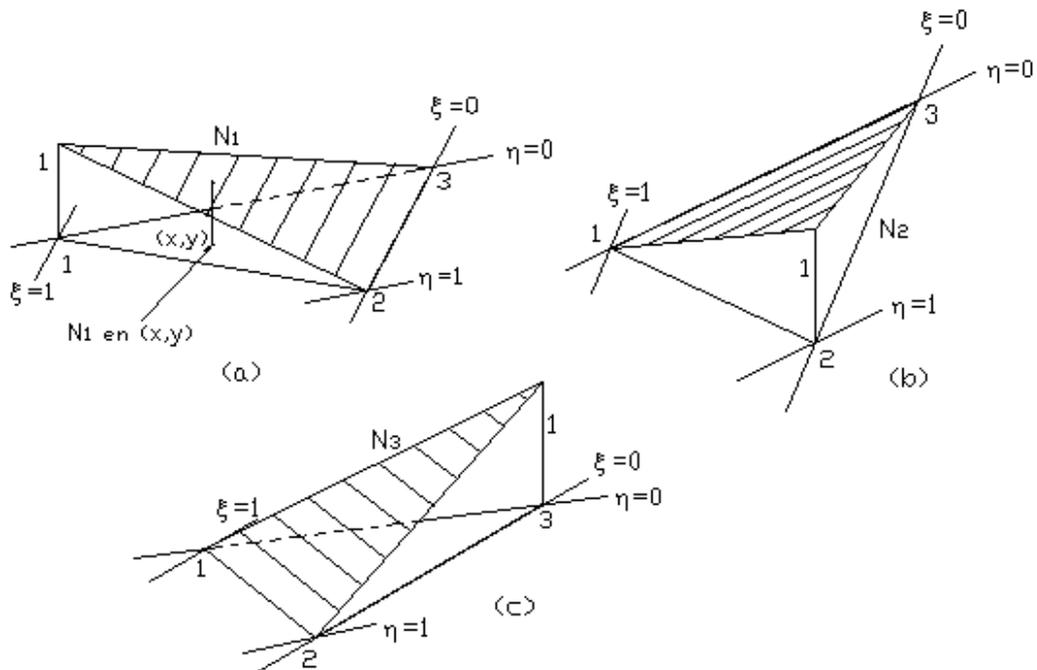


Figura 3.10. Funciones de forma

Representación isoparamétrica

Los desplazamientos dentro del elemento se escriben ahora usando las funciones de forma y los valores nodales del campo de desplazamiento des conocido.⁶

$$u = \mathbf{f}_1 q_1 + \mathbf{f}_2 q_3 + \mathbf{f}_3 q_5 \tag{3.12a}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}_1 q_2 + \mathbf{f}_2 q_4 + \mathbf{f}_3 q_6$$

o, reemplazando los valores de las funciones de forma,

$$u = (q_3 - q_1)\mathbf{x} + (q_5 - q_1)\mathbf{h} + q_1 \tag{3.12b}$$

$$\mathbf{u} = (q_4 - q_2)\mathbf{x} + (q_6 - q_2)\mathbf{h} + q_2$$

Las relaciones 3.12a pueden expresarse en forma matricial definiendo una matriz \mathbf{f} de funciones de forma del elemento,⁶

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & 0 & \mathbf{f}_2 & 0 & \mathbf{f}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{f}_1 & 0 & \mathbf{f}_2 & 0 & \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}$$



ó

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1-\mathbf{x}-\mathbf{h} & 0 & \mathbf{x} & 0 & \mathbf{h} & 0 \\ 0 & 1-\mathbf{x}-\mathbf{h} & 0 & \mathbf{x} & 0 & \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

y,

$$u = \mathbf{f} q$$

Transformación de coordenadas para el elemento triangular

Para el elemento triangular, las coordenadas x , y también pueden representarse en términos de coordenadas nodales usando las mismas funciones de forma. Ésta es la representación isoparamétrica. Este enfoque le da simplicidad al desarrollo y retiene la uniformidad con otros elementos complejos. Se tiene,⁶

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = x_1 \mathbf{f}_1 + x_2 \mathbf{f}_2 + x_3 \mathbf{f}_3 \quad (3.14a)$$

$$y = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 + y_3 \mathbf{f}_3$$

o

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\mathbf{x} + (x_3 - x_1)\mathbf{h} \quad (3.14b)$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{x} + (y_3 - y_1)\mathbf{h}$$

Usando la notación $x_{ij} = x_j - x_i$ y $y_{ij} = y_j - y_i$, se puede escribir la ecuación 3.14b como:

$$x = x_1 + x_{12}\mathbf{x} + x_{13}\mathbf{h}$$

$$y = y_1 + y_{12}\mathbf{x} + y_{13}\mathbf{h}$$

Esta ecuación relaciona las coordenadas x e y con las coordenadas \mathbf{x} y \mathbf{h} .

Al evaluar las deformaciones unitarias, las derivadas parciales de u y \mathbf{u} se toman con respecto a x y y . De las ecuaciones 3.12 y 3.14, vemos que u, \mathbf{u} y también x , y son funciones de \mathbf{x} y \mathbf{h} . Usando la regla de la cadena para derivadas parciales de u , tenemos,⁶

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$$



$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{h}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{h}}$$

Que puede escribirse en notación matricial como

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{h}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathbf{h}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{h}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

donde la matriz cuadrada de (2 x 2) se denomina el *jacobiano J* de la transformación:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathbf{h}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{h}} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{h}} - \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{h}}$$

Al tomar las derivadas de x y y, resulta:

$$J = \begin{bmatrix} x_{12} & y_{12} \\ x_{13} & y_{13} \end{bmatrix}$$

También, de la ecuación 3.15,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{h}} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

donde J^{-1} es la inversa del jacobiano J, dada por:

$$J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{13} & -y_{12} \\ -x_{13} & x_{12} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\det J = x_{12} y_{13} - x_{13} y_{12}$$

Puede verse que la magnitud del $\det J$ es el doble del área del triangulo. Tenemos:

$$A = \frac{1}{2} |\det J| \quad (3.18)$$



Rigidez del elemento

La matriz de rigidez del elemento finito se define como:

$$A_{ij} = t_e A_e [D\mathbf{f}]^T k [D\mathbf{f}] \quad (3.19)$$

Donde:

t_e : espesor del elemento

A_e : área del elemento

D es el operador

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

\mathbf{f} es la matriz de funciones de forma del elemento, ecuación 3.13, y k es la matriz de elasticidad que relaciona los esfuerzos con las deformaciones en las ecuaciones 3.8 y 3.9.

Reemplazando cada término por su equivalente y realizando las respectivas operaciones, la matriz de rigidez elemental se puede escribir en la forma:

$$A_{ij} = t_e A_e \frac{1}{|J|^2} \begin{bmatrix} y_{32} & 0 & x_{23} \\ 0 & x_{23} & y_{32} \\ y_{13} & 0 & x_{31} \\ 0 & x_{31} & y_{13} \\ y_{21} & 0 & x_{12} \\ 0 & x_{12} & y_{21} \end{bmatrix} \frac{E}{1-m^2} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{32} & 0 & y_{13} & 0 & y_{21} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & x_{31} & 0 & x_{12} \\ x_{23} & y_{32} & x_{31} & y_{13} & x_{12} & y_{21} \end{bmatrix}$$

en esfuerzos planos, y

(3.20)



$$A_{ij} = t_e A_e \frac{1}{|J|^2} \begin{bmatrix} y_{32} & 0 & x_{23} \\ 0 & x_{23} & y_{32} \\ y_{13} & 0 & x_{31} \\ 0 & x_{31} & y_{13} \\ y_{21} & 0 & x_{12} \\ 0 & x_{12} & y_{21} \end{bmatrix} \frac{E}{(1+m)(1-2m)} \begin{bmatrix} 1-m & m & 0 \\ m & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{32} & 0 & y_{13} & 0 & y_{21} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & x_{31} & 0 & x_{12} \\ x_{23} & y_{32} & x_{31} & y_{13} & x_{12} & y_{21} \end{bmatrix}$$

en deformaciones planas. (3.21)

Efectuando las operaciones indicadas en cada caso, se tiene una matriz elemental de rigidez simétrica de la siguiente forma:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Se dice que un cuerpo se encuentra en estado de *tensión o esfuerzo plano*, cuando se cumplen los siguientes dos requisitos:

1. El espesor del cuerpo es pequeño en comparación con las dimensiones restantes.
2. Las cargas restantes actúan sobre el plano medio, el cual es ortogonal al eje sobre el cual se mide el espesor.

Estas condiciones se encuentran satisfechas por cuerpos tales como pantallas de contención de concreto reforzado, laminas de acero, etc.

Por otra parte, el estado de *deformación plana* corresponde a un caso en cierta medida opuesto al anterior, es decir, a aquel en el que el espesor es mucho mayor que las dimensiones restantes de la estructura, sin que varíe la forma seccional. Además se debe cumplir que las cargas se encuentren repartidas de manera uniforme sobre el eje paralelo al espesor, de modo que el análisis de una unidad de espesor refleje adecuadamente el comportamiento de toda la estructura. Por tanto, el análisis de una sección de espesor unitario refleja finalmente el estado de tensiones y deformaciones de toda la estructura. Estas condiciones se dan por ejemplo, en muros de contención y presas de gravedad, como los analizados en este trabajo.



3.4.3.2 Elemento lineal

Para la descripción del problema del elemento lineal se requiere introducir dos sistemas coordenados, uno global y el otro local o elemental.⁸

El sistema coordenado global (XY) es utilizado para: 1) representar la orientación de cada nodo y para registrar la orientación de cada miembro (elemento), usando ángulos tales como θ ; 2) para la aplicación de cargas y restricciones en términos de sus respectivas coordenadas globales; y 3) para representar la solución, que es, los desplazamientos de cada nodo en dirección de las coordenadas globales. El sistema coordenado global es requerido para describir el comportamiento de cada miembro sometido a fuerzas. La relación entre estos dos sistemas coordenados se describe en la Figura 3.11.⁸

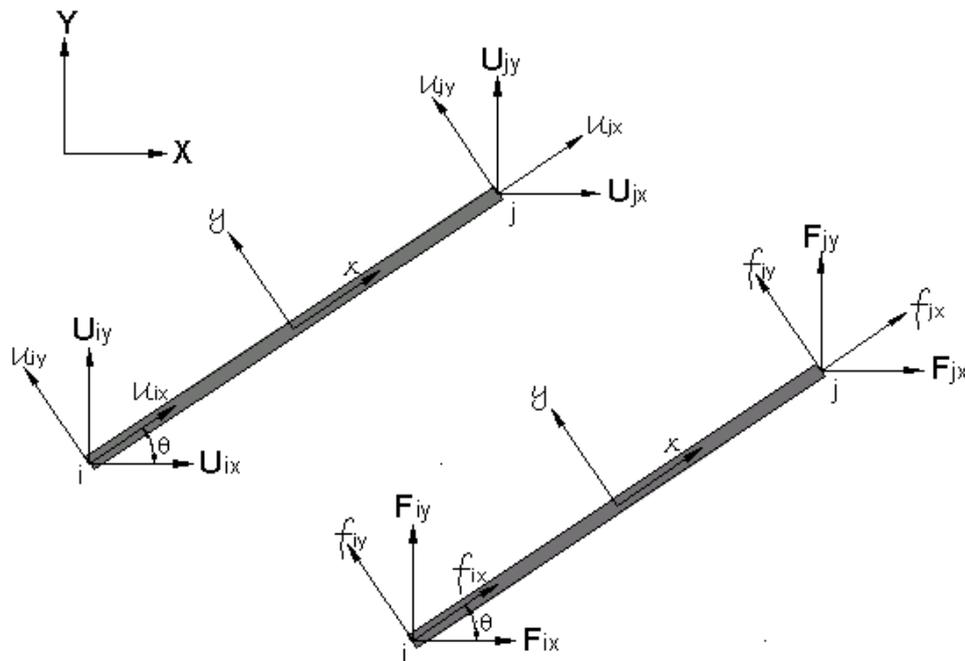


Figura 3.11. Relación entre coordenadas globales y locales⁸

Los desplazamientos globales están relacionados con los desplazamientos locales de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$U_{ix} = u_{ix} \cos \theta - u_{iy} \sin \theta$$

$$U_{iy} = u_{ix} \sin \theta + u_{iy} \cos \theta$$

$$U_{jx} = u_{jx} \cos \theta - u_{jy} \sin \theta$$

(3.23)



$$U_{jy} = u_{jx} \operatorname{sen} \mathbf{q} + u_{jy} \operatorname{cos} \mathbf{q}$$

Si las ecuaciones 3.23 se escriben de forma matricial, se tiene:

$$\{U\} = [T]\{u\} \quad (3.24)$$

Donde:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{jx} \\ U_{jy} \end{Bmatrix}; \quad [T] = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \mathbf{q} & -\operatorname{sen} \mathbf{q} & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \mathbf{q} & \operatorname{cos} \mathbf{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{cos} \mathbf{q} & -\operatorname{sen} \mathbf{q} \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \mathbf{q} & \operatorname{cos} \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{Bmatrix}$$

$\{U\}$ y $\{u\}$ representan los desplazamientos de los nodos i y j con respecto a las coordenadas globales y locales respectivamente. $[T]$ es la matriz que permite la transformación de coordenadas locales a globales.⁸

De manera similar las fuerzas locales y globales pueden ser relacionadas de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$F_{ix} = f_{ix} \operatorname{cos} \mathbf{q} - f_{iy} \operatorname{sen} \mathbf{q}$$

$$F_{iy} = f_{ix} \operatorname{sen} \mathbf{q} + f_{iy} \operatorname{cos} \mathbf{q}$$

$$F_{jx} = f_{jx} \operatorname{cos} \mathbf{q} - f_{jy} \operatorname{sen} \mathbf{q}$$

$$F_{jy} = f_{jx} \operatorname{sen} \mathbf{q} + f_{jy} \operatorname{cos} \mathbf{q}$$

(3.25)

En forma matricial

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \mathbf{q} & -\operatorname{sen} \mathbf{q} & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \mathbf{q} & \operatorname{cos} \mathbf{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{cos} \mathbf{q} & -\operatorname{sen} \mathbf{q} \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \mathbf{q} & \operatorname{cos} \mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = [T]\{f\} \quad (3.26)$$



Donde $\{F\}$ representa las componentes de las fuerzas actuantes en los nodos i y j respecto a las coordenadas globales, y $\{f\}$ las componentes locales de las fuerzas en los nodos i y j .

En los elementos lineales no se permite el desplazamiento en dirección “y”, por lo que las fuerzas en esta dirección se anulan, es decir $F_{iy} = 0$, $F_{jy} = 0$, $f_{iy} = 0$ y $f_{jy} = 0$; esto es debido a que el elemento solo puede ser estirado o acortado a lo largo de su eje longitudinal (eje local x).

Las fuerzas internas y los desplazamientos, locales, están relacionados a través de la siguiente matriz de rigidez.

$$\begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{Bmatrix}$$

$$\{f\} = [k] \{u\} \tag{3.27}$$

Donde $k = \frac{AE}{L}$ que se obtiene de la combinación de las siguientes expresiones.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{Ley de Hooke}$$

Multiplicando en ambas expresiones (3.24) y (3.26) a la izquierda por la transpuesta de la matriz $[T]$, se tiene:

En la expresión (3.24):

$$[T]^T \{U\} = [T]^T [T] \{u\}$$

$$[T]^{-1} \{U\} = [I] \{u\}$$

$$\therefore \{u\} = [T]^{-1} \{U\} \tag{3.28}$$

En la expresión (3.26):

$$[T]^{-1} \{F\} = [T]^{-1} [T] \{f\}$$

$$[T]^{-1} \{F\} = [I] \{f\}$$



$$\{f\} = [T]^{-1} \{F\} \quad (3.29)$$

Sustituyendo las expresiones (3.28) y (3.29) en la expresión (3.27), de modo que se pueda obtener la matriz de rigidez del elemento lineal en términos de coordenadas globales, se tiene:

$$\{f\} = [k] \{u\}$$

$$[T]^{-1} \{F\} = k [T]^{-1} \{U\}$$

Multiplicando por la matriz de cosenos directores $[T]$, a ambos lados de la anterior expresión, por la izquierda, se obtiene:

$$\{F\} = [T] [k] [T]^{-1} \{U\} \quad (3.30)$$

Efectuando las operaciones correspondientes para la solución del operador $[T] [k] [T]^{-1}$ de la expresión 3.30, se obtiene:⁸

$$[T] [k] [T]^{-1} = [K^e] = k \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

siendo ésta la matriz de rigidez del elemento lineal, $[K^e]$.

Así, la expresión 3.30, puede ser escrita como:

$$\{F\} = [K^e] \{U\} \quad (3.31)$$

3.4.4 Ensamblaje de la matriz global de rigidez y vector de carga

La matriz global de rigidez, $[K^G]_{ij}$, la cual es una matriz banda, está conformada por cada una de las matrices de rigidez de cada elemento que se encuentre presente en la estructura global. Para cada elemento triangular la matriz de rigidez está conformada por una matriz de 6 filas por 6 columnas, ya que, cada nodo posee dos grados de libertad, ecuación 3.22; en el elemento lineal esta matriz tiene 4 filas por 4 columnas.

La matriz global de rigidez posee dos filas y dos columnas por cada nodo que tenga la malla de elementos finitos, es decir, que el número total de filas y columnas de esta matriz será el doble del número de nodos.

El ensamblaje de la matriz global de rigidez consiste en llevar el valor de cada nodo de cada uno de los elementos, resultantes de realizar la matriz elemental, a su posición correspondiente en la matriz global de rigidez, sumando algebraicamente los diferentes



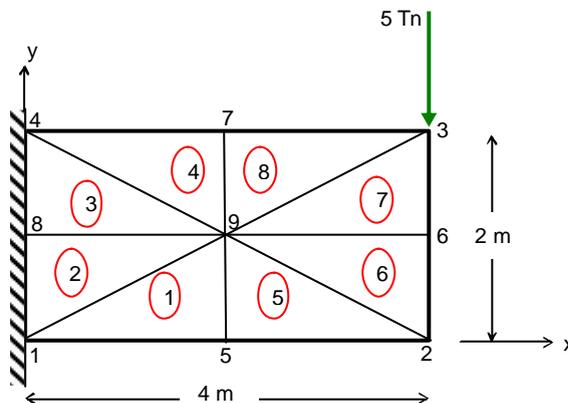
valores que en cada casilla se encuentren. Con el ejemplo que se muestra a continuación, donde se tienen elementos maestros triangulares, se ilustra de mejor manera este procedimiento.

La matriz global de rigidez multiplicada por los desplazamientos que se generen en cada nodo en sentido x e y , dado que se poseen dos grados de libertad por nodo, será igual a un vector de cargas, $\{F\}$, en el que se indica el valor de las cargas externas que están siendo aplicadas a la estructura. Estas cargas pueden también ser aplicadas en sentido x e y .

$$\text{Tenemos entonces que: } [K^{G_{ij}}]\{U\} = \{F\} \quad (3.32)$$

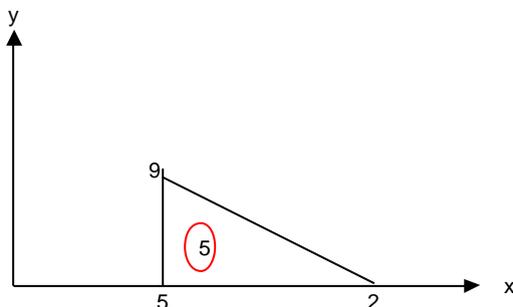
Ejemplo ilustrativo:

Se tiene la siguiente estructura.



de nodos, $n = 9$
elementos = 8
Grados de libertad = 2 por nodo
 $m = 0.15$
 $E = 200000 \text{Kg/cm}^2$

Sobre la estructura se ha armado una malla conformada por 8 elementos y 9 nodos. De cada elemento se debe formular la matriz de rigidez elemental como se muestra en la ecuación 3.22, bien sea en esfuerzos planos o deformaciones planas. De esta manera tenemos que para el elemento 5 de la figura anterior, la matriz elemental de rigidez se estructura de siguiente manera:





Matriz elemental de rigidez:

	5x	5y	2x	2y	9x	9y
5x	5x5x	5x5y	5x2x	5x2y	5x9x	5x9y
5y	5y5x	5y5y	5y2x	5y2y	5y9x	5y9y
2x	2x5x	2x5y	2x2x	2x2y	2x9x	2x9y
2y	2y5x	2y5y	2y2x	2y2y	2y9x	2y9y
9x	9x5x	9x5y	9x2x	9x2y	9x9x	9x9y
9y	9y5x	9y5y	9y2x	9y2y	9y9x	9y9y

Una vez obtenida la matriz elemental, se ubica el valor de cada una de las casillas de esta matriz en la casilla correspondiente en la matriz global de rigidez así:

	1x	1y	2x	2y	3x	3y	4x	4y	5x	5y	6x	6y	7x	7y	8x	8y	9x	9y	
1x																			
1y																			
2x			2x2x	2x2y					2x5x	2x5y							2x9x	2x9y	
2y			2y2x	2y2y					2y5x	2y5y							2y9x	2y9y	
3x																			
3y																			
4x																			
4y																			
5x			5x2x	5x2y					5x5x	5x5y							5x9x	5x9y	
5y			5y2x	5y2y					5y5x	5y5y							5y9x	5y9y	
6x																			
6y																			
7x																			
7y																			
8x																			
8y																			
9x			9x2x	9x2y					9x5x	9x5y							9x9x	9x9y	
9y			9y2x	9y2y					9y5x	9y5y							9y9x	9y9y	

El mismo procedimiento se sigue para los elementos restantes, ya sean lineales, triangulares o de cualquier otra geometría. Dado que en algunas casillas se



ensamblaran los valores de más de un elemento, éstos se sumarán algebraicamente. Finalmente se obtendrá la matriz global de rigidez $[K^{G}_{ij}]$.

El vector de cargas será un vector de la forma

$$F = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{nx} \\ F_{ny} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Los datos $F_{1x}, F_{1y}, \dots, F_{nx}, F_{ny}$, representan en valor de la carga externa por unidad de espesor y el peso propio de los elementos.

Las cargas $F_{i,x,y}$ son aplicadas en cada uno de los nodos de la malla de elementos finitos en sentido x e y respectivamente, por lo tanto el número de términos del vector de carga será el doble del número de nodos.

Como convención se ha adoptado que en el sentido negativo del eje y las fuerzas tendrán signo negativo y viceversa.

Así, para el ejemplo dado en donde la carga se encuentra aplicada en sentido y en el nodo 3, el vector de cargas será:

$$F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Con la matriz global de rigidez y el vector de cargas conocido, de la ecuación 3.32 se obtienen los desplazamientos, así:

$$\{U\} = [K^{G}_{ij}]^{-1} \{F\} \quad (3.34)$$

3.5 FORMACIÓN DE LA MALLA DE E.F. TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY

3.5.1 Triangulación de un Conjunto de Puntos en un Plano:

Sea $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ un conjunto de puntos contenidos en un plano. Para formar una triangulación de P , se definirá primero la máxima división planar como una subdivisión S , tal que ninguna línea que conecte dos puntos intercepte una de las líneas existentes. Entonces una triangulación de P se define como la máxima división planar cuyo conjunto de vértices es P .⁹

Cada cara excepto las de la frontera es un triángulo, cualquier línea que conecte dos puntos ubicados sobre la frontera será una línea de cualquier triangulación T y la polilínea que une todos los puntos sobre la frontera es un polígono convexo, esto puede verse en la Figura 3.12. El número de triángulos es el mismo para cualquier triangulación de P . Esto también es cierto para el número de líneas. El número exacto depende del número de puntos de P y de los que están en la frontera.⁹

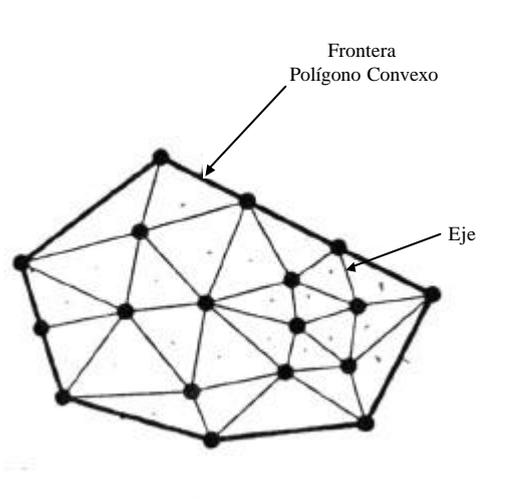


Fig. 3.12 Triangulación Planar de un conjunto de Puntos⁹

Dado que la triangulación es una estructura matemática que ha sido estudiada desde hace más de un siglo, se cuenta con los siguientes teoremas los cuales son útiles en el proceso.⁹

Teorema 1: Sea P un conjunto de n puntos no colineales contenidos en un plano y si k denota el número de puntos en P que están ubicados sobre la frontera de P . Entonces cualquier triangulación de P tiene $2n - 2 - k$ triángulos y $3n - 3 - k$ líneas.



Teorema 2 Sea C un círculo (ver Figura 3.13), ℓ una línea que intercepta a C en los puntos a y b y p, q, r y s puntos ubicados en el mismo lado de ℓ . Suponga que p y q están sobre C , que r está dentro de C y que s está por fuera de C entonces:

$$\angle arb > \angle apb = \angle aqb > \angle asb$$

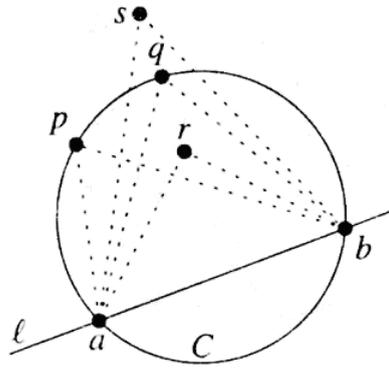


Figura 3.13 Correspondiente al teorema 2

Ahora se considera una línea $e = \overline{p_i p_j}$ de la triangulación T de P . Si e no es un línea de la frontera, es incidente a dos triángulos $p_i p_j p_k$ y $p_i p_j p_l$. Si estos dos triángulos, forman un cuadrilátero convexo, se obtiene una nueva triangulación T' removiendo $\overline{p_i p_j}$ de T e insertando $\overline{p_k p_l}$ en lugar de este. La única diferencia en el vector de ángulos de T y de T' está en que sus 6 ángulos $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ en $A(T)$ han sido reemplazados por $\alpha'_1, \dots, \alpha'_6$ en $A(T')$ la Figura 3.14 ilustra esto:⁹

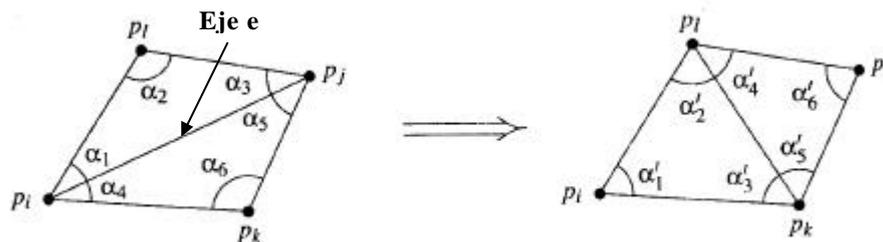


Figura 3.14. Rotación de una línea⁹

Se llamará la línea $e = \overline{p_i p_j}$ como una línea ilegal si:

$$\min \alpha_i < \min \alpha'_i \quad 1 \leq i \leq 6$$



En otras palabras una línea es ilegal si se puede incrementar localmente su ángulo mas pequeño girando la línea. La siguiente observación se puede deducir de la definición de línea ilegal.

Observación 1. Sea T una triangulación con una **línea** ilegal e y sea T' la triangulación obtenida de T mediante el giro de la **línea** e . Entonces $A(T') > A(T)$.

No es necesario calcular los ángulos $\alpha_1, \dots, \alpha_6; \alpha'_1, \dots, \alpha'_6$, para chequear si una **línea** dada es ilegal, en vez de esto se puede usar el criterio simple dado en el siguiente lema.⁹

Lema 1. Sea $\overline{p_i p_j}$ una **línea** común de los triángulos $p_i p_j p_k$ y $p_i p_j p_l$ y sea C la circunferencia que pasa a través de p_i, p_j y p_k . La **línea** $\overline{p_i p_j}$ es ilegal si y solo si el punto p_l está ubicado en el interior de C . Además, si los puntos p_i, p_j, p_k y p_l forman un cuadrilátero convexo y no están sobre un círculo común, entonces uno de las **líneas** $\overline{p_i p_j}$ o $\overline{p_k p_l}$ es una **línea** ilegal (ver Figura 3.15).

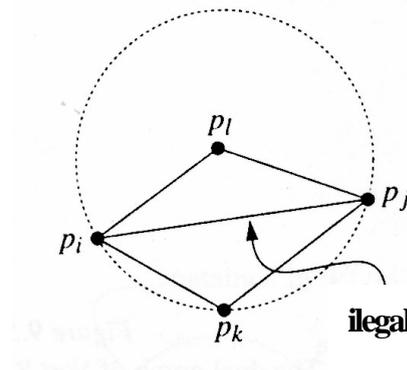


Figura 3.15 Correspondiente al Lema 1⁹

Observe que el criterio es simétrico con p_k y p_l : p_l está dentro de el círculo que pasa por los puntos p_i, p_j y p_k . Si y solo si p_k está dentro del círculo que pasa por los puntos p_i, p_j y p_l . Cuando todos los cuatro puntos están sobre el mismo círculo, tanto $\overline{p_i p_j}$ o $\overline{p_k p_l}$ son legales. Nótese que dos triángulos adyacentes en una **línea** ilegal deben formar siempre un cuadrilátero convexo, entonces es siempre posible girar una **línea** ilegal.

Se define entonces una triangulación legal como una triangulación que no contiene ninguna **línea** ilegal. Según la anterior observación hecha cualquier triangulación óptima (de ángulos óptimos) es legal. Calcular una triangulación legal es algo simple una vez se haya dado una triangulación inicial. Se pueden girar las **líneas** ilegales hasta que sean legales.⁹



3.5.2 Propiedades de la Triangulación de Delaunay

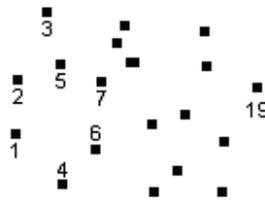
La triangulación de Delaunay genera una solución única para un conjunto de puntos dados, salvo en el caso especial en el que cuatro puntos pertenecen a una circunferencia en donde pueden existir triangulaciones alternativas validas. Las propiedades de esta triangulación son las siguientes:⁹

- Cualquier punto perteneciente a la muestra de puntos medidos del terreno es siempre un vértice de un triángulo.
- Dos triángulos del conjunto de puntos pueden estar conectados por un vértice o un lado común, en ningún caso podrá existir superposición.
- Dado un triángulo $p_i p_j p_k$ no existe otro punto de la triangulación interno al círculo que pasa por los puntos p_i , p_j y p_k .
- Dados 4 puntos y el cuadrilátero definido por ellos, la diagonal que los divide en dos triángulos es aquella que hace máximo el menor de los ángulos internos, es decir, la triangulación de Delaunay tiende a crear triángulos lo mas equiláteros posible.

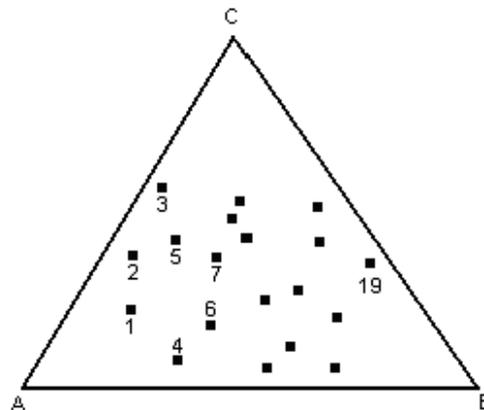
3.5.3 Construcción de la Triangulación de Delaunay

La triangulación de una nube de puntos se realiza siguiendo el siguiente algoritmo:⁹

- a. Se ordenan los puntos de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, o sea, los que tengan menor coordenada X primero y si dos puntos tiene la misma coordenada X se toma primero el que tenga menor coordenada Y.

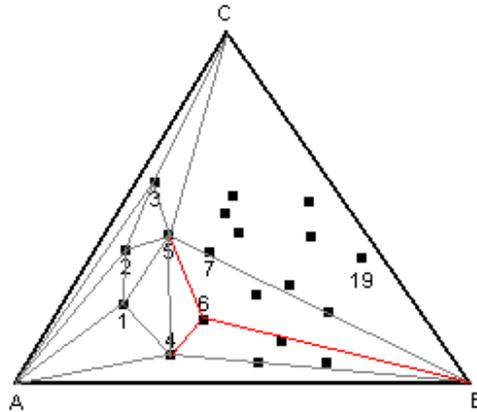


- b. Se encuentra un triángulo inicial que cubra todos los puntos de la nube de puntos.

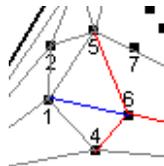




- c. Cada punto de la nube de puntos se va introduciendo en su triángulo respectivo, formando éste 3 triángulos más, por ejemplo el punto 6 se encuentra dentro del triángulo 4-5-B y forma los triángulos 4-5-6, 5-6-B y 4-6-B. Cada triángulo de estos debe cumplir todas las propiedades de la triangulación de Delaunay.

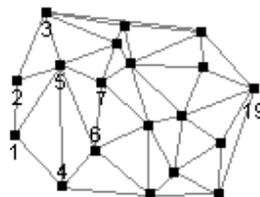


En la figura mostrada se observa que la línea 4-5 es ilegal, ya que, al formar una circunferencia con los puntos 4-5-6 queda el punto 1 dentro de ella, luego entonces se debe borrar y adicionar la línea 1-6 como se muestra en la figura siguiente.



Se continúa realizando este proceso para cada punto de la nube de puntos, o sea se realiza el paso c para cada punto.

- d. Los triángulos que tienen como uno de sus vértices uno de los vértices del triángulo inicial no pertenecen a la triangulación de Delaunay. La triangulación resultante se muestra a continuación.





3.6 COMPORTAMIENTO NO LINEAL

Muchas clases y combinaciones de comportamiento caen bajo el encabezado “no-linealidad”. La no linealidad en los materiales puede presentarse por comportamientos tiempo-dependientes o tiempo-independientes o a causa de grandes desplazamientos que alteran la forma de la estructura debido a que las cargas aplicadas alteran su distribución o magnitud. La no linealidad puede también estar asociada con desplazamientos muy pequeños, como en los problemas de esfuerzos de contacto y placas planas cuyos desplazamientos exceden su espesor. La no linealidad puede ser apacible o severa.

3.6.1 Análisis no lineal de esfuerzos y deformaciones en el suelo

Antes del desarrollo de los computadores, no era fácil ejecutar análisis de esfuerzos en masa de suelo por otro método que no fuese el de asumir comportamiento lineal elástico de los suelos. Ahora, sin embargo, debido a la gran capacidad y velocidad de los computadores y a las poderosas técnicas de análisis numérico tales como el método de los elementos finitos, es posible realizar una aproximación no lineal del comportamiento inelástico de los suelos en un análisis de esfuerzos. Para realizar un análisis no lineal de los esfuerzos en el suelo, es necesario describir el comportamiento esfuerzo-deformación del suelo en términos cuantitativos y desarrollar técnicas que permitan incorporar este comportamiento en el análisis.¹⁰

3.6.1.1 Características esfuerzo-deformación de los suelos

El comportamiento esfuerzo-deformación de algunos tipos de suelos depende de un gran número de diferentes factores tales como la densidad, el contenido de agua, la estructura, las condiciones de drenaje, las condiciones de esfuerzo (ej. deformación plana, triaxial), duración de la carga, historial de esfuerzos, presión de confinamiento y esfuerzo cortante. En muchos casos puede ser posible tener en cuenta estos factores seleccionando especímenes de suelo y condiciones de ensayo tales que simulen las correspondientes condiciones en campo. Cuando sea posible realizar esto correctamente, se esperaría que las deformaciones resultantes del cambio de esfuerzos dado en el laboratorio sean representativas de las deformaciones que ocurrirían en campo bajo el mismo cambio de esfuerzos.¹⁰

Este concepto de duplicar las condiciones de campo puede simplificar enormemente el procedimiento requerido para determinar las relaciones esfuerzo-deformación de los suelos; si los especímenes de suelo y las condiciones de ensayo son adecuadamente seleccionadas para duplicar las condiciones de campo, muchos de los factores que gobiernan el comportamiento esfuerzo-deformación de los suelos serían tenidos en cuenta. Aun cuando este procedimiento es seguido, comúnmente se encuentra que el comportamiento del suelo por encima de un amplio rango de esfuerzos es no lineal, inelástico y dependiente de la magnitud de la presión de confinamiento empleada en la prueba.¹⁰



Para el desarrollo del objetivo de este estudio se tendrá en cuenta una simplificada y práctica relación esfuerzo deformación, desarrollada por R. L. Kondner, 1963, la cual tiene en cuenta la no linealidad, esfuerzo-dependencia y la inelasticidad del comportamiento de los suelos.

3.6.1.2 No linealidad y esfuerzo-dependencia

No linealidad.- Kondner ha mostrado que la curva esfuerzo-deformación no lineal de la arcilla y la arena puede ser aproximada por una hipérbola con un alto grado de exactitud. La ecuación hiperbólica propuesta por Kondner fue:¹⁰

$$(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3) = \frac{e}{a + be} \quad (3.35)$$

en donde \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_3 son los esfuerzos principales mayor y menor respectivamente; e es la deformación axial y a y b son constantes cuyos valores pueden ser determinados experimentalmente. De ambas constantes, a y b , puede visualizarse el significado físico: como se muestra en la Figura 3.16, a es el recíproco del módulo tangente inicial, E_i , y b es el recíproco del valor asintótico de la diferencia de esfuerzos con la que la curva de esfuerzo-deformación se aproxima a la deformación infinita $(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_{ult}$

Kondner mostró que los valores de los coeficientes a y b pueden ser determinados más rápidamente si los datos de esfuerzo-deformación son dibujados sobre ejes transformados, como se muestra en la Figura 3.17. Cuando la ecuación 3.35 se escribe de la siguiente forma:¹⁰

$$\frac{e}{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)} = a + be \quad (3.36)$$

puede notarse que a y b , respectivamente, son el intercepto y pendiente de la línea recta resultante. Dibujando los datos de esfuerzo-deformación en la forma que se muestra en la Figura 3.17, es fácil determinar los valores de a y b correspondientes para la mejor adecuación entre la hipérbola (la línea recta en la Figura 3.17) y los datos de la prueba.¹⁰

Cuando esto se realiza es común encontrar que el valor asintótico de $(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)$ es más grande que la resistencia a la compresión del suelo en una pequeña cantidad. Esto es de esperarse ya que la hipérbola permanece por debajo de la asíntota en el rango de valores finitos de deformación. El valor asintótico puede estar relacionado con la resistencia a la compresión por medio de un factor Rf como se muestra en la siguiente expresión:¹⁰



$$(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_f = R_f (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_{ult} \quad (3.37)$$

en donde $(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_f$ es la resistencia a la compresión, o diferencia de esfuerzos en la falla; $(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_{ult}$ es el valor asintótico de la diferencia de esfuerzos y R_f es la relación de falla, la cual siempre tiene un valor por debajo de la unidad. Para un gran número de diferentes suelos, el valor de R_f se ha encontrado entre 0.75 y 1.0 y es esencialmente independiente de la presión de confinamiento.¹⁰

Para expresar los parámetros a y b en términos del valor del módulo tangente inicial y la resistencia a la compresión, la ecuación 3.38 puede escribirse como:

$$(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3) = \frac{e}{\left[\frac{1}{E_i} + \frac{e R_f}{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_f} \right]} \quad (3.38)$$

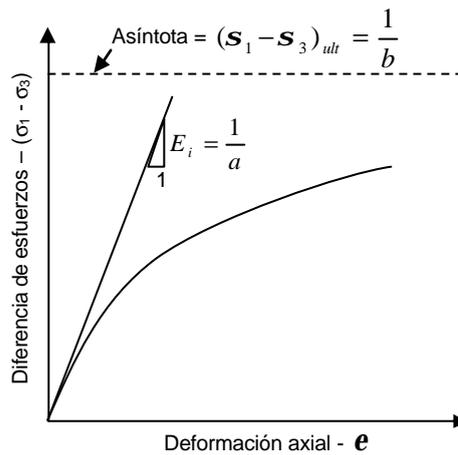


Figura 3.16. Curva hiperbólica de esfuerzo-deformación¹⁰

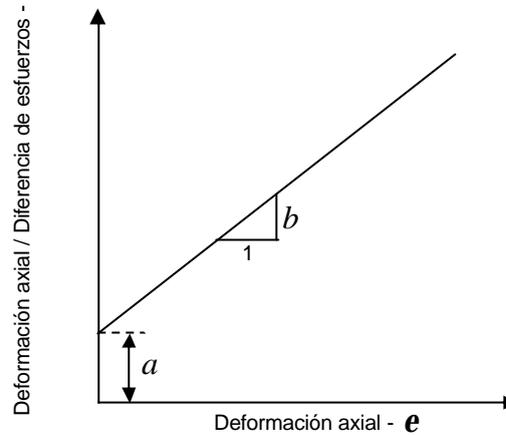


Figura 3.17. Curva hiperbólica transformada de esfuerzo-deformación¹⁰

Esta representación hiperbólica de la curva esfuerzo-deformación desarrollada por Kondner et al., se ha encontrado conveniente y útil en la representación de la no linealidad del comportamiento esfuerzo-deformación de los suelos y es parte importante de la relación que se desarrolla más adelante.¹⁰

Esfuerzo-dependencia.- Excepto en el caso de pruebas no consolidadas no drenadas (UU) sobre suelos saturados, se ha encontrado que el valor del módulo tangente y la resistencia a la compresión de los suelos varían con la presión de confinamiento empleada en la prueba. Estudios experimentales realizados por Janbu han mostrado que la relación entre el módulo tangente inicial y la presión de confinamiento puede ser expresada como:¹⁰

$$E_i = K p_a \left(\frac{s_3}{p_a} \right)^n \quad (3.39)$$

en donde E_i es el módulo tangente inicial; s_3 es el esfuerzo principal menor; p_a es la presión atmosférica expresada en las mismas unidades en que este E_i y s_3 ; K es un número módulo y n es el exponente determinado de la tasa de variación entre E_i y s_3 ; tanto K como n son solo constantes y pueden ser determinados fácilmente de los resultados de una serie de pruebas dibujando los valores de E_i vs. s_3 a escala y trazando una línea de tendencia recta sobre los datos, como se muestra en la Figura 3.18. Los valores que se muestran en la Figura 3.18, fueron determinados de los resultados de una prueba triaxial dinámica sobre un material granular usado para la pantalla de la represa Furnas y un limo de la fundación de la represa Cannonsville, reportados, respectivamente, por Casagrande y Hirschfeld & Poulos.¹⁰



Si se asume que la falla ocurrirá sin ningún cambio en el valor de s_3 , la relación entre la resistencia a la compresión y la presión de confinamiento puede ser expresada convenientemente en términos del criterio de falla de Mohr-Coulomb, como:

$$(s_1 - s_3)_f = \frac{2c \cos f + 2s_3 \operatorname{sen} f}{1 - \operatorname{sen} f} \quad (3.40)$$

en donde c y f son los parámetros de resistencia de Mohr-Coulomb.¹⁰

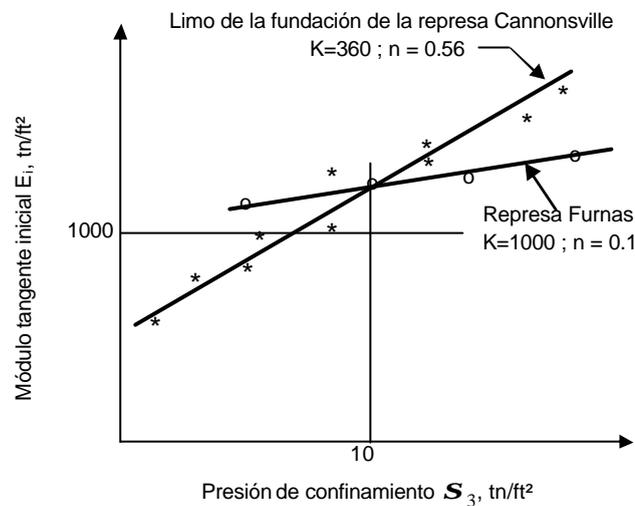


Figura 3.18. Variación del módulo tangente inicial con la presión de confinamiento bajo condiciones de prueba triaxial drenada¹⁰

Las ecuaciones 3.39 y 3.40, en combinación con la ecuación 3.38, proporcionan un medio para relacionar esfuerzos, deformaciones y presión de confinamiento a través de cinco parámetros K , n , c , f y R_f .¹⁰

A continuación se dan las técnicas para utilizar esta relación en el análisis de esfuerzos no lineales por el método de elementos finitos.

3.6.1.3 Procedimiento para el análisis de esfuerzos no lineales

El comportamiento no lineal, esfuerzo-dependencia y esfuerzo-deformación puede ser aproximado por medio del análisis con elementos finitos asignando diferentes valores de módulo a cada uno de los elementos en los que el suelo es dividido (malla de elementos finitos) para propósitos de análisis, como se muestra en la Figura 3.19. El valor de módulo calculado para cada elemento es seleccionado con base en el nivel de esfuerzos y deformaciones que presenta cada uno de ellos. Debido a que el valor del



módulo depende del nivel de confinamiento del elemento y a su vez los esfuerzos dependen del módulo, es necesario hacer un análisis repetitivo para asegurar que el valor del módulo y las condiciones de esfuerzo correspondan para cada elemento en el sistema.¹⁰

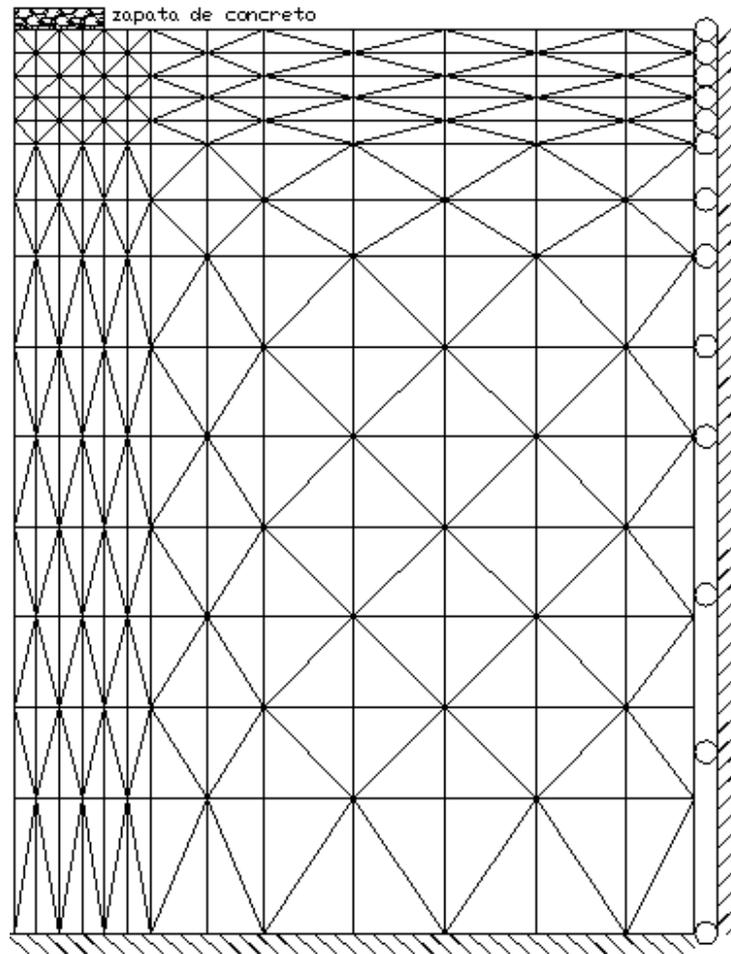


Figura 3.19. Representación de la malla de elementos finitos para una cimentación¹⁰

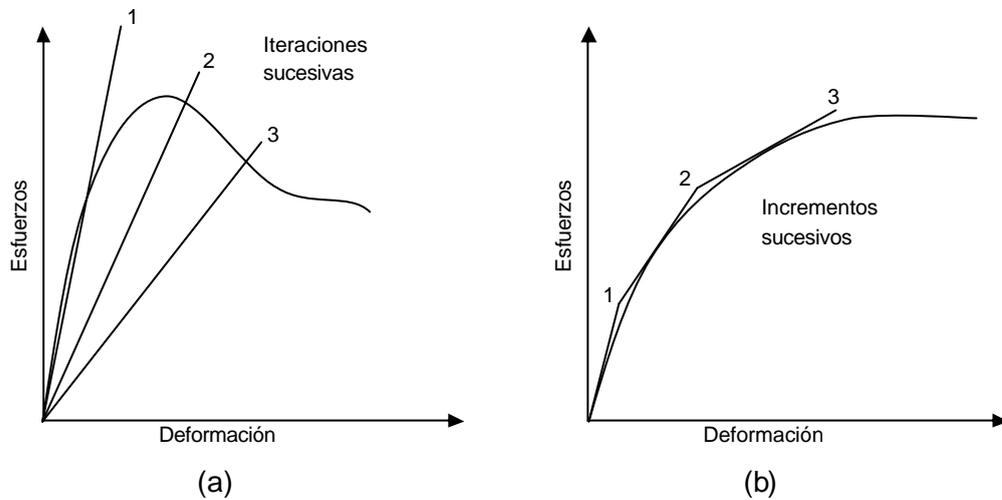


Figura 3.20. Técnicas para aproximación del comportamiento esfuerzo-deformación no lineal ¹⁰

En la Figura 3.20, se muestran dos técnicas para realizar una aproximación del análisis de esfuerzos no lineal. En la Figura 3.20a, que representa un proceso iterativo, el mismo cambio en la carga externa es analizado repetidamente. Después de cada análisis, los valores de esfuerzo y deformación dentro de cada elemento son examinados para determinar si ellos satisfacen apropiadamente la relación no lineal entre esfuerzos y deformaciones. Si los valores de esfuerzo y deformación no corresponden, un nuevo valor de módulo debe seleccionarse para los elementos y realizar un siguiente análisis. ¹⁰

Para el procedimiento incremental, que se muestra en la Figura 3.20b, el cambio en la carga es analizado en una serie de pasos o incrementos. Al inicio de cada incremento de carga un valor de módulo apropiado es seleccionado para cada elemento con base en los valores de esfuerzo y deformación de éste. De esta manera, la relación no lineal esfuerzo-deformación es aproximada por una serie de líneas rectas. Este procedimiento ha sido aplicado en el análisis de terraplenes, taludes excavados y para el análisis de esfuerzos en especímenes para cortante simple.

Ambos métodos presentan ventajas y desventajas. La principal ventaja del procedimiento iterativo es el hecho de que es posible representar la relación esfuerzo-deformación en la que el esfuerzo decrece con un aumento en la deformación después de alcanzar un valor pico. Esta habilidad es muy importante ya que la ocurrencia de falla progresiva en los suelos, se cree, está asociada con este tipo de comportamiento esfuerzo-deformación. El inconveniente del proceso iterativo es que es difícil tener en cuenta el esfuerzo inicial no cero, el cual juega un importante rol en muchos problemas de mecánica de suelos. ¹⁰

La principal ventaja del procedimiento incremental es que los esfuerzos iniciales pueden ser tenidos en cuenta. También tiene la ventaja que, en el proceso de análisis del efecto de una carga dada, los esfuerzos y deformaciones son también calculados



para las cargas más pequeñas. La desventaja de este procedimiento está en que no es posible simular una relación esfuerzo-deformación en la que el esfuerzo decrece después de alcanzar un valor máximo (pico). La exactitud del proceso incremental puede ser mejorada si cada incremento de carga es analizado más de una vez. De esta manera es posible mejorar el grado en el cual los incrementos lineales se aproximan al comportamiento no lineal del suelo.¹⁰

3.6.1.4 Valores de módulo tangente

La relación esfuerzo deformación expresada en la ecuación 3.38 puede ser empleada muy convenientemente en el análisis de esfuerzos incremental dado que es posible determinar el valor del módulo tangente correspondiente a algún punto sobre la curva esfuerzo-deformación. Si el valor del esfuerzo principal menor es constante, el módulo tangente, E_t , puede ser expresado como:¹⁰

$$E_t = \frac{\partial(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)}{\partial \mathbf{e}} \quad (3.41)$$

Teniendo en cuenta lo expresado en la ecuación 3.38, la expresión anterior puede escribirse como:

$$E_t = \frac{1}{E_i} \left[\frac{1}{E_i} + \frac{R_f \mathbf{e}}{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)_f} \right]^2 \quad (3.42)$$

Aunque esta expresión para el valor de módulo tangente puede ser empleada en el análisis de esfuerzo incremental, esto presenta un significativo inconveniente: el valor de módulo tangente, E_t , está relacionado tanto con la diferencia de esfuerzos como con la deformación $((\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3), \mathbf{e})$, lo cual puede tener diferentes estados de referencia. Aunque el estado de referencia para la diferencia de esfuerzos $[(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)=0]$ pueda ser especificado exactamente, el estado de referencia para la deformación $(\mathbf{e} = 0)$ es completamente arbitrario. La expresión para módulo tangente puede tener un uso más general si se hace independiente de los esfuerzos o independiente de las deformaciones. Dado que el estado de referencia para las deformaciones es seleccionado arbitrariamente y que los esfuerzos pueden ser calculados de manera más exacta que las deformaciones en muchos problemas de mecánica de suelos, se ve lógico eliminar la deformación y expresar el módulo tangente en términos de esfuerzos únicamente.¹⁰

La deformación puede ser eliminada de la ecuación 3.42, escribiendo la ecuación 3.38 como:



$$e = \frac{s_1 - s_3}{E_i \left[1 - \frac{R_f (s_1 - s_3)}{(s_1 - s_3)_f} \right]} \quad (3.43)$$

y sustituyendo esta expresión en la ecuación 3.41. Posteriormente simplificando la expresión resultante, E_t puede ser formulado como:

$$E_t = (1 - R_f S)^2 E_i \quad (3.44)$$

en donde S es el nivel de esfuerzos o fracción de resistencia movilizada, dada por:

$$S = \frac{(s_1 - s_3)}{(s_1 - s_3)_f} \quad (3.45)$$

Si la expresión para E_i , $(s_1 - s_3)_f$ y S dadas en las ecuaciones 3.39, 3.40 y 3.45 se sustituyen en la ecuación 3.44, el valor del módulo tangente, para cualquier condición de esfuerzos, puede ser expresado como:

$$E_t = \left[1 - \frac{R_f (1 - \text{sen } f) (s_1 - s_3)}{2c \cos f + 2s_3 \text{ sen } f} \right]^2 K p_a \left(\frac{s_3}{p_a} \right)^n \quad (3.46)$$

Esta expresión puede ser empleada de manera muy conveniente en el análisis incremental de esfuerzos; ya sea, en esfuerzos efectivos o en esfuerzos totales. Los análisis en esfuerzos efectivos, condiciones de prueba drenada, con s'_3 constante, son usados para determinar los valores de los parámetros requeridos. Los análisis en esfuerzos totales, prueba no drenada no consolidada (UU), con s_3 constante, son usados para determinar los valores parámetro. ¹⁰

Es importante señalar que la relación esfuerzo-deformación descrita aquí ha sido obtenida con base en datos de pruebas triaxiales estándar en la que el esfuerzo principal intermedio es igual al principal menor, debido a que en la mayoría de los casos prácticos se dispone únicamente de datos triaxiales de este tipo. Más sin embargo, esta misma relación puede ser usada en problemas de deformación plana, en las que el esfuerzo principal intermedio no es igual al principal menor, si se tienen disponibles resultados de pruebas de deformación plana apropiados. Para casos en los cuales se involucran tres dimensiones de esfuerzo y deformación es conveniente incluir en un criterio de falla o en una relación esfuerzo-deformación de los suelos los efectos del valor del esfuerzo principal intermedio. ¹⁰



4. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

4.1 MODELACIÓN DE UN MURO DE TIERRA ARMADA CON ELEMENTOS FINITOS

Para el desarrollo de la presente investigación la modelación del comportamiento esfuerzo-deformación del muro con elementos finitos se realizará en dos dimensiones, de tal manera que se deberá obtener una sección transversal típica que permita una representación adecuada para el análisis de este comportamiento.

Un muro de tierra armada está conformado por unidades de diferentes materiales. Cada uno de estos materiales será representado digitalmente conservando la forma geométrica que tienen en el muro y serán tratados como un objeto para el sistema. Los objetos podrán ser representados ya sea por un punto, una línea o una polilínea o una combinación de estas formas. La unión de todos los objetos conformará la representación gráfica del muro (Ver Figura 5.1).

Cada objeto poseerá dos propiedades importantes a saber:

1. Tipo de material que representa.
2. Configuración de la malla de elementos finitos, es decir, la separación espacial entre nodos, en sentido x y en sentido y .

Cada objeto tendrá su propia configuración de malla. La unión de todas estas mallas conformará la malla global para el muro que se está representando. Una vez se tiene esta malla, se efectúa el proceso de triangulación como es indicado en el numeral 3.5, forzando a que los contornos de la geometría que representa cada material sean lados obligados de triángulos de la triangulación.

Cada nodo y cada triángulo de la malla deberán ser enumerados y ubicados espacialmente sobre el muro. Esto facilita el conocimiento de los esfuerzos y deformaciones que estarán ocurriendo en cada sitio del muro, la ubicación de cargas y condiciones de borde.

4.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MURO DE TIERRA ARMADA

Una vez conformada la malla de elementos finitos para el muro, a cada uno de los elementos que la integran se les deberá determinar su matriz de rigidez siguiendo lo indicado en los numerales 3.4.3.1 ó 3.4.3.2 para finalmente obtener la matriz global de rigidez y vector de cargas de la estructura.

La matriz de rigidez global y el vector de cargas serán afectados por las condiciones de borde del muro, es decir, las restricciones en movimiento dadas a nodos de la malla de elementos finitos.



De la ecuación 3.28 se obtienen los desplazamientos U de cada uno de los nodos que conforman la malla de la estructura.

Con el vector de desplazamientos obtenido y la expresión

$$\mathbf{s} = K [Df]\{U\} \quad (4.1)$$

donde K es la matriz de elasticidad que relaciona los esfuerzos con las deformaciones en las ecuaciones 3.8 y 3.9, según sea en esfuerzos planos o deformaciones planas, se obtiene el tensor de esfuerzos \mathbf{s}_x , \mathbf{s}_y y \mathbf{t}_{xy} de cada elemento finito que está representando la estructura.

De la expresión (jj), se deduce que las deformaciones unitarias son equivalentes a

$$\mathbf{e} = [Df]\{U\} \quad (4.2)$$

Para el análisis del comportamiento esfuerzo-deformación de la estructura es necesario determinar los esfuerzos mayores o principales a los que se encuentra sometido cada elemento de la malla de elementos finitos. Con ayuda del círculo de Mohr y el tensor de esfuerzos determinado anteriormente se determinan los esfuerzos principales del elemento.

La formulación del círculo de Mohr para la determinación de los esfuerzos principales (\mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_3 por ser condiciones planas) es la siguiente:

$$\mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{s}_x + \mathbf{s}_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathbf{s}_x - \mathbf{s}_y}{2}\right)^2 + \mathbf{t}_{xy}^2} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{s}_3 = \frac{\mathbf{s}_x + \mathbf{s}_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\mathbf{s}_x - \mathbf{s}_y}{2}\right)^2 + \mathbf{t}_{xy}^2} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\mathbf{t}_{xy}}{\mathbf{s}_x - \mathbf{s}_y} \right) \quad (4.5)$$

4.3 FALLA DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Cada elemento de la malla de elementos finitos alcanzará un valor máximo de resistencia que lo hará fallar. Esta falla puede presentarse por tensión ó compresión.

Para determinar si un elemento esta fallado deben tener unos valores admisibles con los que se establecerá comparación entre el estado de esfuerzos en que se encuentra el elemento y los admisibles.



Para el caso de elementos cuyo tipo de material es suelo, los esfuerzos máximos admisibles o de falla estarán dados por las siguientes expresiones:

$$s_{1falla} = k s_3 + 2c\sqrt{k} \quad (4.6)$$

$$s_{3falla} = \frac{s_1}{k} - 2c\sqrt{\frac{1}{k}} \quad (4.7)$$

Donde:

s_1, s_3 : esfuerzos principales mayor y menor de cada elemento,

c : cohesión del material suelo,

$$k = \frac{1 + \text{sen}f}{1 - \text{sen}f}$$

Para el material de refuerzo, en este caso los geosintéticos, la falla se presentará cuando la tensión a la que se encuentre sometido este material sobrepase su tensión máxima permitida.

Para materiales como el concreto, que puede ser utilizado en pantallas protectoras, hablando de muros de tierra armada, la falla se alcanzará cuando el elemento finito que lo representa supere los esfuerzos de tensión o compresión máximos permitidos.

La falla global interna del muro estará controlada por la falla en el refuerzo, es decir cuando el geosintético supere su tensión máxima permitida.

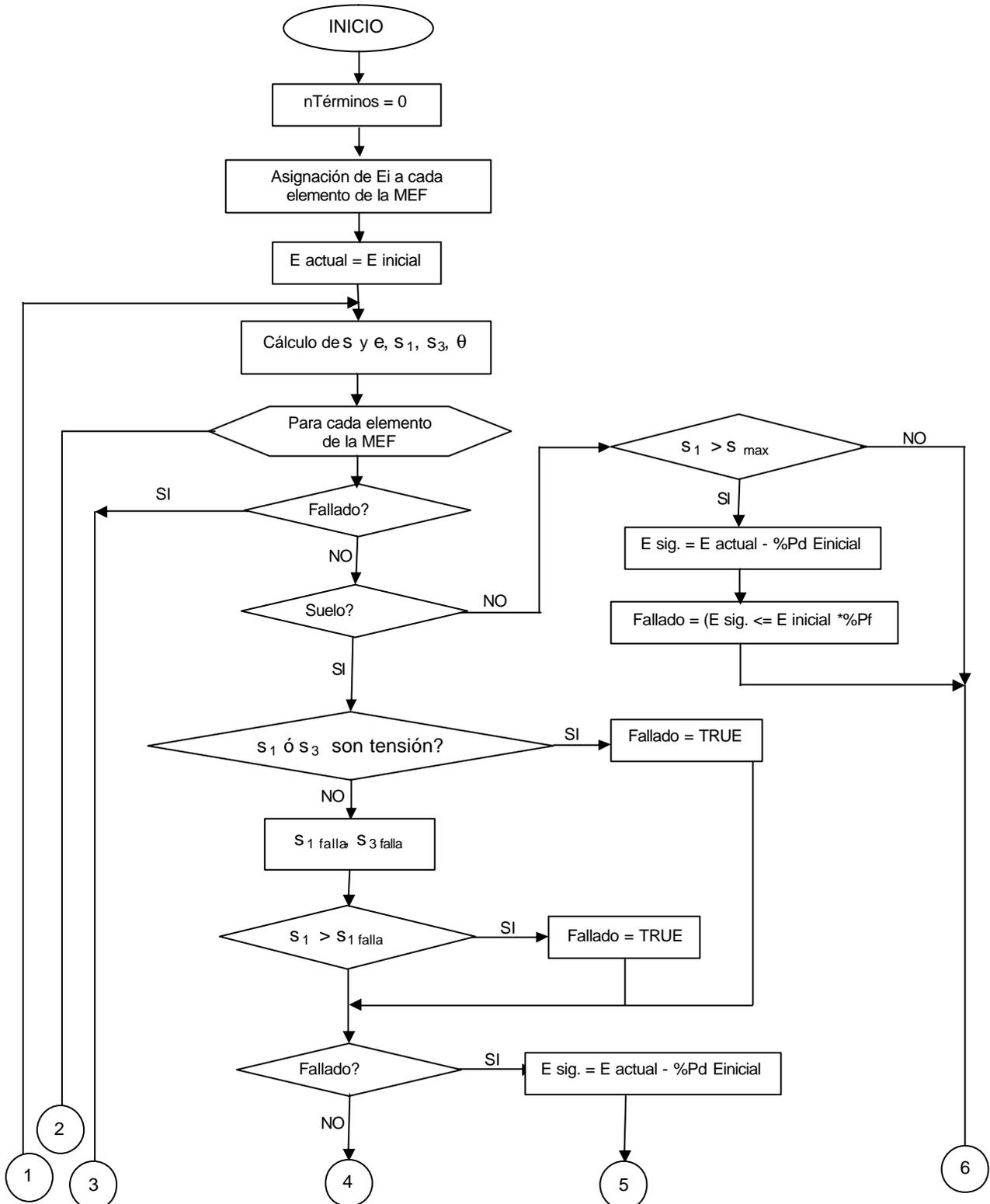
4.4 INCLUSIÓN DE LA NO LINEALIDAD DE LOS MATERIALES A LA MODELACIÓN DE UN MURO DE TIERRA ARMADA

La incorporación de la no linealidad de los materiales en el modelo de muro de tierra armada se realizará con una evaluación múltiple iterativa del comportamiento esfuerzo-deformación de éste asumiendo un comportamiento lineal en cada iteración.

En cada evaluación realizada se calculará el módulo de elasticidad (E) de cada elemento de la malla de elementos finitos y dependerá del tipo de material que el elemento este representando de acuerdo a su estado de esfuerzos actual, obedeciendo a una teoría dada. Para el caso de los elementos cuyo material es suelo el módulo E se calculará teniendo en cuenta la formulación de Kondner (numeral 3.6.1), en el caso de otros materiales E se calculará teniendo en cuenta el diagrama de esfuerzo vs. deformación que representa su comportamiento.

En cada iteración se observará que elementos han fallado, de acuerdo a los criterios de falla dados en el numeral 4.3, a dichos elementos se les asignará un módulo E muy pequeño. El número de iteraciones requeridas para la evaluación del muro dependerá de la comparación del módulo E calculados en la iteración anterior y la siguiente en cada elemento, cuya diferencia no debe superar un error máximo permitido.

En el siguiente diagrama de flujo se esquematiza el procedimiento descrito.



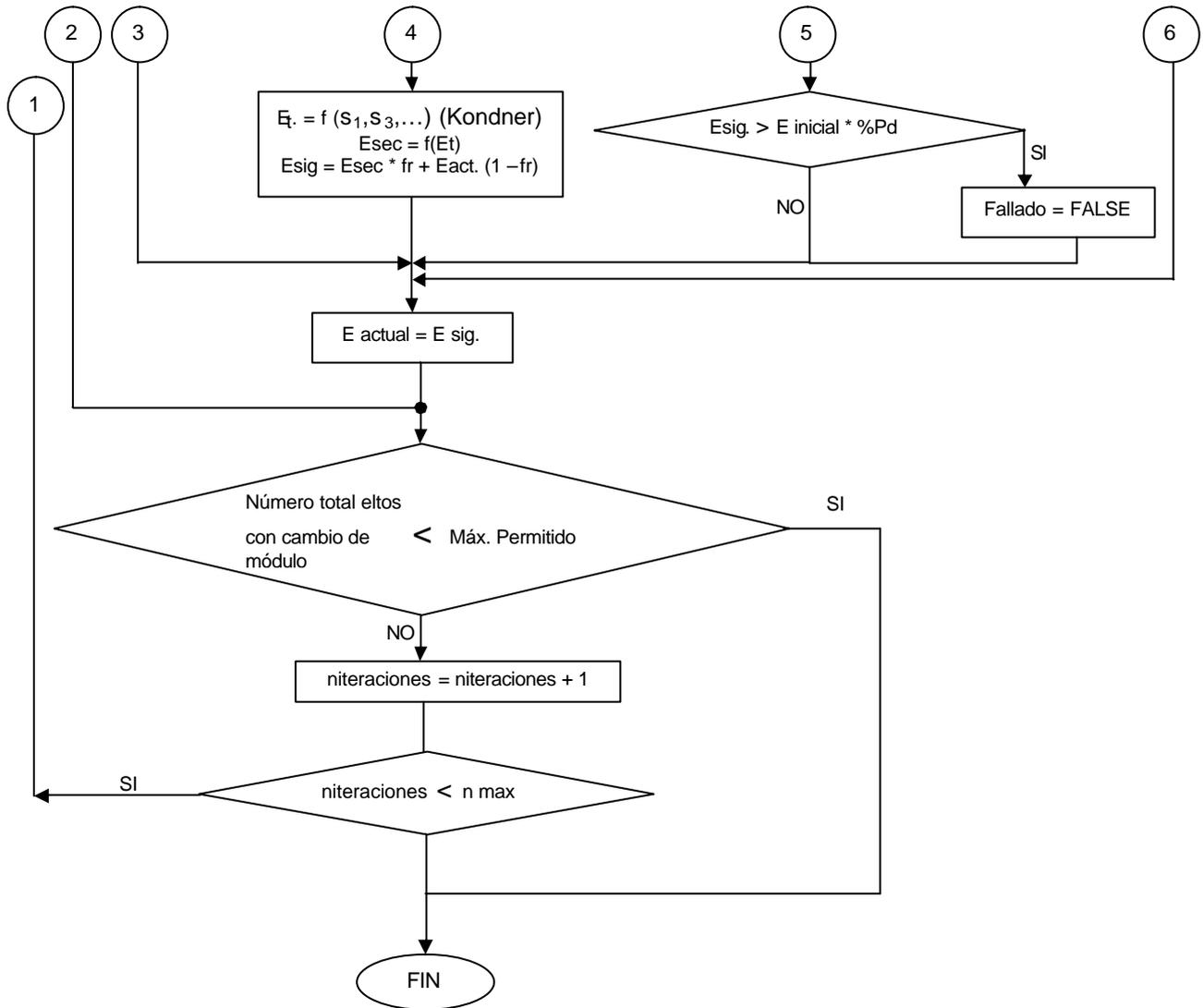


Figura 4.1. Diagrama de flujo de la inclusión de la *no linealidad*



5. DESARROLLO DEL SOFTWARE

5.1 INTRODUCCIÓN

El programa MTA es un código diseñado en lenguaje Visual Basic, para el análisis del comportamiento esfuerzo-deformación no lineal por el método de los elementos finitos para un muro de tierra armada con geosintéticos, modelado como un sólido en dos dimensiones (2D).

Las características de mayor relevancia del programa son las siguientes:

- Posee una interfase gráfica que permite al usuario crear de una forma fácil y dinámica la geometría del problema a analizar.
- Permite la definición de la malla de elementos finitos, la cual estará conformada por elementos triangulares, de manera automática y simultánea al diseño de la geometría del objeto problema.
- A través de una ventana de acceso de datos, se pueden crear los distintos materiales que permiten definir la estructura a evaluar. Estos materiales serán considerados isotrópicos y la evaluación de su comportamiento podrá hacerse tanto en deformaciones planas como en esfuerzos planos.
- La introducción de las condiciones de borde del problema, cargas puntuales y/o uniformes sobre la estructura se efectúa mediante la colocación de objetos sobre ella.
- El programa es versátil en el manejo de unidades, ya que permite el trabajo tanto en el sistema métrico decimal como en el sistema inglés.
- Posee una interfase con el usuario con base en ventanas, botones de comando, menús desplegables, cajas de texto, etc., que facilita la interacción usuario – sistema.
- Los resultados de esfuerzos obtenidos con esta aplicación, está limitada al cálculo de esfuerzos totales debido al alcance del proyecto.

5.2 PREPROCESADOR

Para la representación del muro se deben definir en el sistema los distintos tipos de materiales que lo componen, por ejemplo: suelo, concreto, geosintético, etc.

Cada material estará definido por sus propiedades, tales como peso unitario, módulo de elasticidad, relación de Poisson, etc. Alternativo a la definición del material, se debe indicar si se trabajará o no teniendo en cuenta la no linealidad de su comportamiento.



Cuando los materiales se van a trabajar teniendo en cuenta la no linealidad, se deben introducir los datos de esfuerzo y deformación obtenidos mediante ensayo de cada material. Para el caso de material tipo suelo, el programa MTA tiene implementado un modelo de comportamiento basado en la teoría de Kondner, la cual requiere la definición adicional de cohesión y ángulo de fricción; es posible, también, introducir los resultados de una curva esfuerzo deformación que el usuario disponga del suelo que va a utilizar en el relleno del muro. Para los materiales restantes que componen el muro, en este programa no se ha adoptado modelo alguno para el análisis de su comportamiento, ni para la interfase entre uno y otro.

En la representación grafica del muro se utilizarán cuatro objetos a saber: polilíneas, nodos, cargas y apoyos. Todos estos objetos serán trabajados en 2D, plano x, y .

5.2.1 Objeto Polilínea

Permite definir el contorno del cuerpo del muro, cimentaciones, pantallas, etc., mediante una polilínea cerrada, igualmente, este objeto, siendo trazado como línea, permite representar los geosintéticos los cuales constituyen el refuerzo del muro.

Cada polilínea posee las siguientes propiedades que le permiten expresar el objeto que representa:

- Coordenadas x, y de cada vértice.
- Descripción del objeto
- Tipo de material
- Espaciamiento de los nodos de la malla de elementos finitos, en sentido x y en sentido y .
- Área de la sección transversal de un elemento de refuerzo.

Con el objeto polilínea es posible también simular una sección vacía, por ejemplo el orificio de una tubería, un túnel, etc.

Finalmente, el conjunto de polilíneas forma la geometría de la estructura representada.

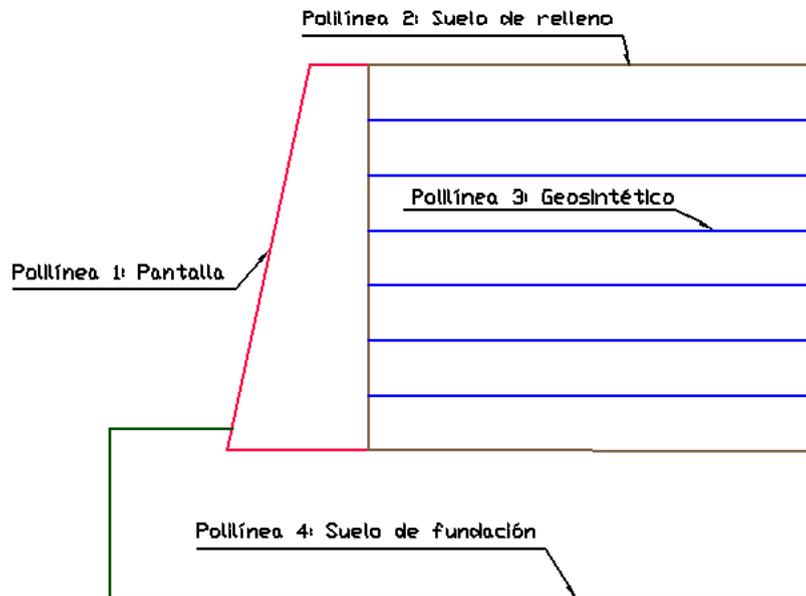


Figura 5.1. Conjunto de polilíneas formando la estructura

5.2.2 Objeto Nodo

Al objeto nodo se le han asignado 3 modalidades a saber: 1) representar un punto, 2) representar un círculo o una elipse, 3) como un texto sobre el dibujo.

Como punto. Permite adicionar un nodo a la malla de elementos finitos.

Como círculo o elipse. Permite definir un espacio circular o elíptico dentro del cual se puede crear el mallado de elementos finitos. Pueden ser representados túneles, tuberías, etc.

Como texto. Permite escribir un texto sobre el área del dibujo.

Cada objeto nodo posee las siguientes propiedades que le permiten expresar el objeto que representa:

- Coordenadas x , y .
- Descripción del objeto
- Tipo de material, en caso de ser círculo o elipse.
- Espaciamiento de los nodos de la malla de elementos finitos, en sentido x y en sentido y .

Con el objeto punto es posible también simular una sección vacía, por ejemplo el orificio de una tubería, un túnel, etc.



5.2.3 Objeto Cargas

Con este objeto se definen las cargas sobre la estructura. Estas cargas pueden ser puntuales, uniformemente distribuidas o variablemente distribuidas

Cada objeto carga posee las siguientes propiedades:

- Coordenadas x , y , del punto de aplicación, en el caso de cargas distribuidas, se tienen las coordenadas del punto inicial y final de aplicación.
- Magnitud de la carga. En caso de ser distribuida se da el valor de la carga inicial y carga final.
- Sentido de aplicación representado por un ángulo respecto al eje $x+$ ó a la línea de aplicación.

En el punto o puntos donde la carga es aplicada, el sistema genera automáticamente un nodo o nodos que entran a formar parte de la malla de elementos finitos.

Internamente el sistema determina las componentes x , y de las cargas. Cuando se tienen cargas distribuidas éstas son repartidas en forma proporcional al área de influencia en los nodos sobre los que está siendo aplicada, como se ilustra en la siguiente figura.

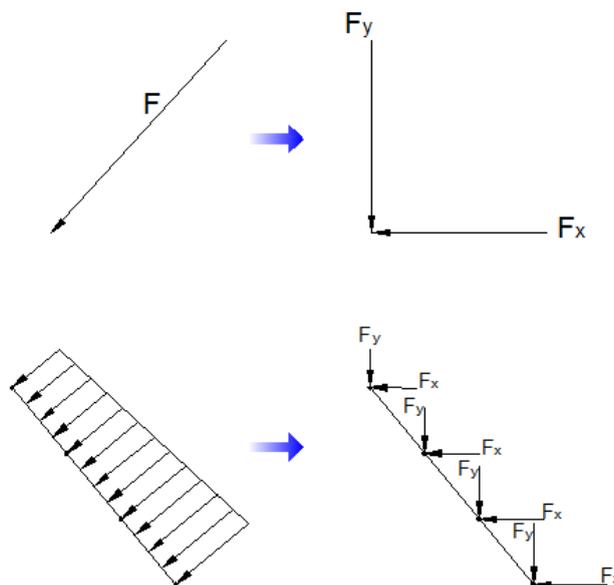


Figura 5.2. Manejo de los tipos de cargas en el sistema



5.2.4 Objeto Apoyo

Con este objeto se representan las restricciones sobre los nodos o condiciones de borde de la estructura. Los apoyos pueden ser fijos, móviles o empotramientos según sea el requerimiento.

Los apoyos pueden ser aplicados nodo por nodo o seleccionando una línea de restricción. Cuando se tiene una línea de restricción, todos los nodos sobre esta línea poseen las mismas características del apoyo dado, gráficamente no se observará un objeto apoyo sobre cada nodo, pero esto no tiene implicación alguna.

Cada objeto apoyo posee las siguientes propiedades:

- Coordenadas x , y , del punto de aplicación, en el caso de línea de restricción, se tienen las coordenadas del punto inicial y final de aplicación.
- Tipo de apoyo, si es fijo, móvil o empotramiento.

El sistema tiene facilidades que permiten al usuario crear muy rápidamente cada uno de estos objetos utilizando el mouse y teclado del computador.

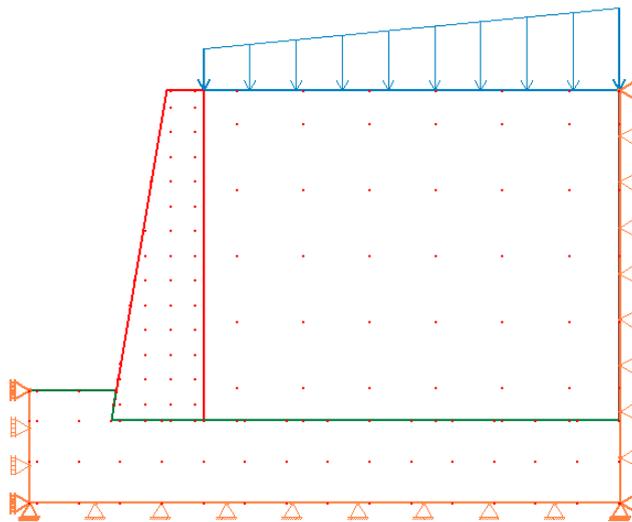


Figura 5.3. Estructura con objetos

5.3 PROCESADOR

Una vez generada la geometría de la estructura a evaluar y definido los parámetros relacionados con cargas, restricciones, materiales, se entra en la etapa de proceso de la información suministrada.

Esta etapa involucra las siguientes actividades:



1. *Generación de la malla de elementos finitos.* En esta actividad se analiza la información suministrada a cada polilínea relacionada con la separación de nodos que generan el mallado dentro o sobre ella. Este proceso se realiza de manera automática.
2. *Triangulación.* Una vez definidos los nodos constitutivos de la malla, se ejecuta sobre ellos el proceso de triangulación, como se indica en el numeral 3.5. En este proceso se consideran los contornos definidos por las polilíneas como líneas de quiebre del sistema, es decir, que ningún triángulo formará parte de dos tipos de material diferente.
3. *Asignación de propiedades iniciales a cada elemento finito.* Aquí se asigna de manera automática a cada elemento las propiedades mecánicas del material que representa. Si un elemento triángulo se encuentra dentro del contorno de dos polilíneas que representen diferentes tipos de material, se tendrá un parámetro dentro del sistema que permite resolver esta ambigüedad.
4. *Elaboración de la matriz inicial de rigidez.* Teniendo en cuenta las propiedades asignadas a cada triángulo, se procede a generar su matriz de rigidez. Todas estas matrices elementales pasarán a formar la matriz global de rigidez inicial de toda la estructura que está siendo evaluada, siguiendo el proceso descrito en el numeral 3.4.4.
5. *Condiciones de borde de la estructura.* En la etapa de preproceso fueron asignados apoyos donde se requería, estos apoyos tienen restricción de movimientos en uno de los sentidos x o y o en ambos, esta restricción de movimiento hace que las filas y/o columnas en la matriz de rigidez global correspondientes al nodo restringido sean anuladas, proceso realizado en esta actividad.
6. *Asignación de cargas.* Sobre la estructura, en el preproceso, fueron asignadas cargas, indicando el tipo, magnitud y punto inicial y final de aplicación. Cuando se genera la malla, dependiendo del espaciamiento dado a los nodos que la conforman, se tendrán algunos de éstos sobre los cuales la carga estará aplicada. Para el caso de una carga puntual se asigna al nodo correspondiente las componentes x e y de dicha carga y para el caso de cargas distribuidas, a cada uno de los nodos afectados se asigna en forma proporcional al área de influencia una carga puntual que la represente. Todas las cargas sobre los nodos, en sentido x e y pasan a formar el vector global de cargas. El vector de cargas al igual que la matriz de rigidez tendrá afectación de las restricciones de movimiento en los nodos con apoyo.
7. *Cálculo de los desplazamientos.* Con la matriz de rigidez y el vector de cargas de toda la estructura ya conformados, se procede a determinar el valor de los desplazamientos que se generan sobre cada nodo de la malla tanto en sentido x como en sentido y , por acción de las cargas presentes, resolviendo la ecuación 3.25.
8. *Determinación del tensor de esfuerzos de cada elemento finito.* Con el vector de desplazamientos obtenido en el paso anterior, se resuelve la expresión 4.1 para determinar el estado de esfuerzos actual de cada elemento finito.



9. Cálculo de esfuerzos principales. Utilizando el círculo de Mohr Coulomb se obtienen los esfuerzos principales, s_1 y s_3 , sobre cada elemento a partir del tensor de esfuerzos obtenido anteriormente.
10. Falla de los elementos finitos. El estado de esfuerzos principales de cada elemento se compara con los esfuerzos de falla, ya sea, a tensión o compresión de cada uno de éstos. Si el estado de esfuerzos actual supera los esfuerzos admisibles, el elemento se considera fallado.
11. Cálculo de los módulos de elasticidad teniendo en cuenta la no linealidad de los materiales y falla en los elementos. A los elementos cuyos materiales consideran no linealidad, teniendo en cuenta su estado de esfuerzos actual se recalcula el E, ya sea, utilizando el diagrama esfuerzo-deformación del material o utilizando la teoría de Kondner para el caso de material tipo suelo. A los elementos que se encontraron fallados en el paso anterior, se les asigna un valor de módulo muy bajo de modo que no intervengan en las siguientes iteraciones para el cálculo del nuevo E de los otros elementos.
12. Chequeo del cambio de módulo E en los elementos. Si al efectuar el cálculo de los E de los elementos se encuentra un cambio sustancial entre el valor anterior y el siguiente o si durante esa etapa algún elemento falló, se repiten los pasos del 4 al 11 hasta que se cumpla una de las siguientes condiciones:

- $E_{anterior} \approx E_{siguiente} \quad \forall \text{ los elementos finitos}$
- Número de iteraciones > Número máximo de iteraciones permitido

Nota 1.-Para la generación de la malla de elementos finitos (MEF) se tuvieron en cuenta dos diferentes tipos de elementos maestros a saber, cuadrilátero y triangular. Fue seleccionado un elemento maestro triangular de seis grados de libertad, por su facilidad en la formulación y sobre todo por su conveniencia para ajustarse a la geometría de un muro.

Nota 2.-El algoritmo implementado para la solución del sistema de ecuaciones resultantes del análisis con elementos finitos para el cálculo de esfuerzos y deformaciones fue el método *Matriz semibanda, tipo sparse (matrices simétricas definidas positivamente)*, el cual con un manejo óptimo de memoria soporta una MEF bastante refinada.

5.4 POSPROCESADOR

En esta etapa se analizan los resultados. Los valores calculados de esfuerzos y desplazamientos se pueden obtener tanto en forma gráfica como tabulada.

En forma gráfica el usuario puede tener:

- Deformada de la estructura
- Diagrama de esfuerzos s_x , s_y , t_{xy}
- Diagrama de esfuerzos s_1 , s_3



6. CALIBRACIÓN DEL SISTEMA

En aras de verificar y establecer una confiabilidad de los resultados obtenidos con el sistema propuesto, a continuación se ilustrarán unos ejemplos para tal fin.

6.1 EJEMPLO 1

En este primer ejemplo se hará la representación de un muro simple, sin refuerzo, sobre el cual se ha apoyado una estructura de cimentación tipo flexible.

Con ayuda del software desarrollado se calcularán los esfuerzos y deformaciones a diferentes niveles de la masa de suelo. Estos resultados serán comparados con los obtenidos, para el mismo muro, con la teoría de la elasticidad.

Es preciso aclarar que para este ejemplo con el fin de establecer comparaciones entre los resultados, en el sistema desarrollado no se tendrá en cuenta el comportamiento no lineal del suelo.

Configuración del muro:

Geometría:

Profundidad del estrato compresible = 350 pies

Características del suelo:

Módulo de Elasticidad= 800×10^3 Lb/pie²

Relación de Poisson= 0.40

Configuración de la estructura de cimentación:

Tipo: rectangular de longitud infinita

Ancho: 70 pies

Carga: 1250 Lb/pie² uniformemente distribuida

6.1.1 Determinación del asentamiento aplicando la teoría de la elasticidad

El cálculo del asentamiento vertical que se produce en un estrato de suelo debido a una o más cargas uniformemente distribuidas actuando sobre un área ya sea rectangular o circular, puede ser estimado mediante la expresión:

$$S_d = C_d \times P \times B \left(\frac{1 - \mu^2}{E} \right)$$

En esta expresión:



S_d : es el asentamiento vertical de un punto en la superficie del estrato de suelo,
 P : es la magnitud de la carga uniformemente distribuida,
 B : es la dimensión característica del área cargada, como se muestra en la figura 3.25,
 E : es el módulo de Young's o de elasticidad del suelo de fundación,
 μ : es la relación de Poisson del suelo de fundación,
 C_d : este factor es un parámetro que tiene en cuenta la forma del área cargada y la posición del punto para el cual se está calculando el asentamiento. Su valor se obtendrá de la siguiente tabla:

Tabla 2. Factor de forma y rigidez C_d para el cálculo del asentamiento en el centro de un área cargada uniformemente en la superficie de una capa elástica soportada por un estrato de mayor rigidez¹²

H/B	CIRCULAR	RECTANGULAR						L/B=8
	DIAMETRO = B	L/B=1	L/B=1.5	L/B=2.0	L/B=3.0	L/B=5.0	L/B=10	
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
0.25	0.24	0.24	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23
0.5	0.48	0.48	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47
1.0	0.70	0.75	0.81	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83
1.5	0.80	0.86	0.97	1.03	1.07	1.08	1.08	1.08
2.5	0.88	0.97	1.12	1.22	1.33	1.39	1.40	1.40
3.5	0.91	1.01	1.19	1.31	1.45	1.56	1.59	1.60
5.0	0.94	1.05	1.24	1.38	1.55	1.72	1.82	1.83
8	1.00	1.12	1.36	1.52	1.78	2.10	2.53	

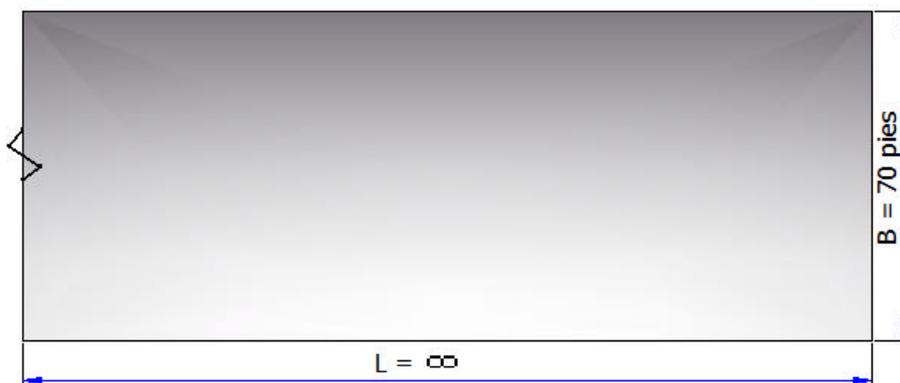


Figura 6.1. Notación del área cargada. Vista en planta

Para el problema propuesto, se determinará, entonces, el asentamiento en el centro y esquina del área cargada.



Sabemos que se trata de una estructura de forma rectangular y de la tabla 2, con

$$\frac{L}{B} = \infty \quad \text{y} \quad \frac{H}{B} = 5.0$$

El factor de forma Cd para el centro del área cargada uniformemente es:

$$Cd = 1.83$$

Por tanto, el asentamiento en el punto medio del área cargada, el asentamiento será:

$$Sd = 1.83 \times 1250 \times 70 \left(\frac{1 - 0.40^2}{800\,000} \right) = 0.168 \text{ pies}$$

6.1.2 Determinación del asentamiento utilizando el software desarrollado

El ejemplo de aplicación suministra toda la información requerida para el respectivo cálculo del asentamiento mediante el software desarrollado.

En el capítulo 3.4.2.1 de este texto, se dio la definición de lo que es un problema en esfuerzos planos y en deformaciones planas. De aquí se infiere que el ejemplo a desarrollar es un problema de deformaciones planas.

Iniciamos dibujando la geometría del muro en la pantalla principal del programa, esto implica la diagramación del cuerpo del muro utilizando polilíneas, la configuración de los apoyos de acuerdo a las condiciones de borde que se pretenden representar, y la de la carga sobre la superficie del muro, previamente habiendo configurado las unidades en las que se va a trabajar ingresando al menú *Utilidades-Configuración*.

La figura 6.2 muestra la geometría del muro para este ejemplo.

En el menú *Bases-Materiales* se crea el material constitutivo del cuerpo del muro, introduciendo los valores característicos de E y u . Para este caso, en que se analizará el problema como un medio elástico y lineal, estos valores son los únicos necesarios. Recordemos que el propósito de este ejemplo es compara los resultados obtenidos utilizando la teoría de la elasticidad, en la que no se contempla la no linealidad de los materiales involucrados, y los obtenidos mediante el software, por tal razón en el momento en que estén siendo definidos los materiales debe seleccionarse la opción de **no tener en cuenta la no linealidad**.

Una vez definido el material, este se asigna a la polilínea que forma el cuerpo del muro.

Cuando ya se ha configurado la geometría del muro, definido sus apoyos y cargas, podemos proceder a la formación de la malla de elementos finitos. La separación de los nodos de la malla se definen previamente en el submenú propiedades del menú modificar.



Figura 6.2. Configuración geométrica del muro, sistema de apoyos y área cargada

Para el ejemplo en cuestión, se ha definido una separación de nodos en $x = 2$ pies, $y = 2$ pies para los primeros 60 pies y de $x = 5$ pies, $y = 5$ pies para los restantes 90 pies de la altura total del muro. Esta doble configuración de la separación de los nodos de la malla de elementos finitos se logra dibujando dos polilíneas que serán las que forman el cuerpo del muro, una para los primeros 60 pies, con la separación de nodos indicada anteriormente y otra para la altura restante. Ambas polilíneas tendrán asignado el mismo material. Lo que se pretende con la doble separación de nodos es hacer más densa la malla en la zona donde se tendrá mayor influencia del área cargada en el suelo de fundación.

Inmediatamente se establecen los nodos, se continúa con la formación de los elementos finitos, aquí se verá sobre el cuerpo del muro una serie de triángulos que lo cubren (ver figura 6.3).

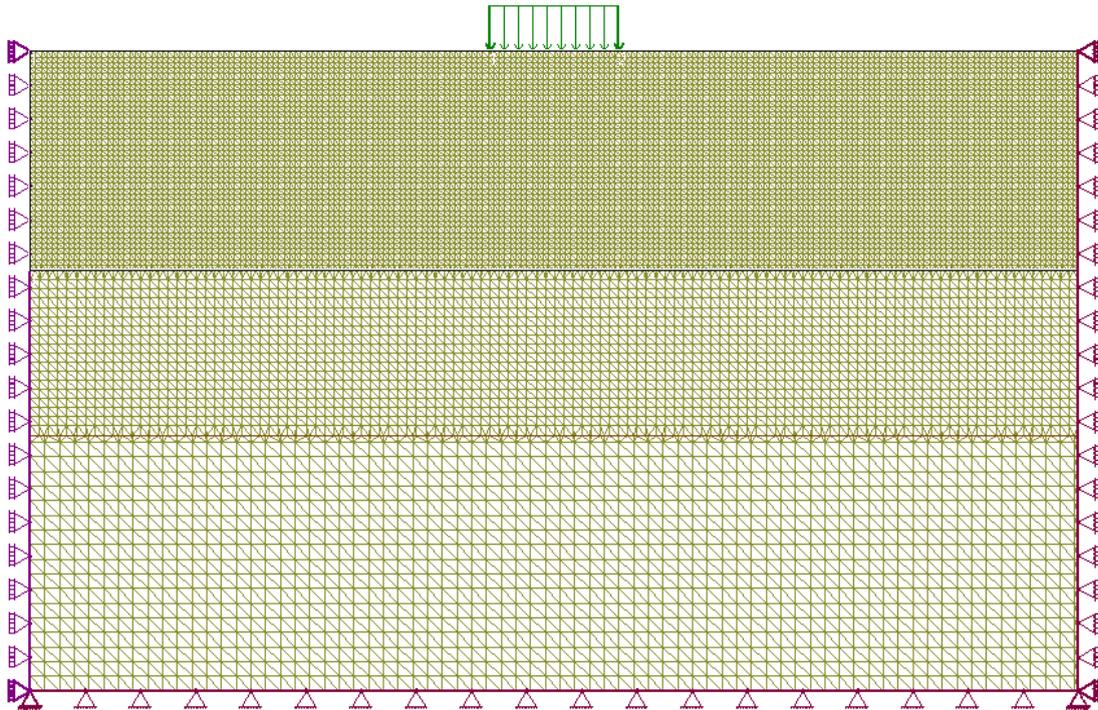


Figura 6.3. Configuración de la malla de elementos finitos sobre la masa de suelo

Como se trata de un problema que se analizará en deformaciones planas, debemos asegurarnos que dentro del menú *Utilidades* recuadro *Parámetros de análisis* este señalada la opción *deformaciones planas* y se analizará por unidad de profundidad de los elementos.

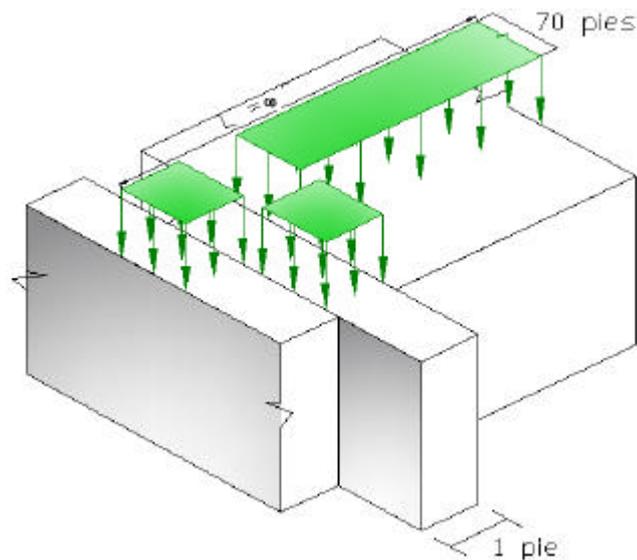


Figura 6.4. Notación para análisis en deformaciones planas



Los valores de los asentamientos verticales en el centro del área cargada, obtenidos del programa son:

$$U(\text{centro}) = 0.144 \text{ pies}$$

Además de numéricamente, el programa nos permite visualizar gráficamente la deformación que presenta el cuerpo del muro. Para el ejercicio en desarrollo se tiene:

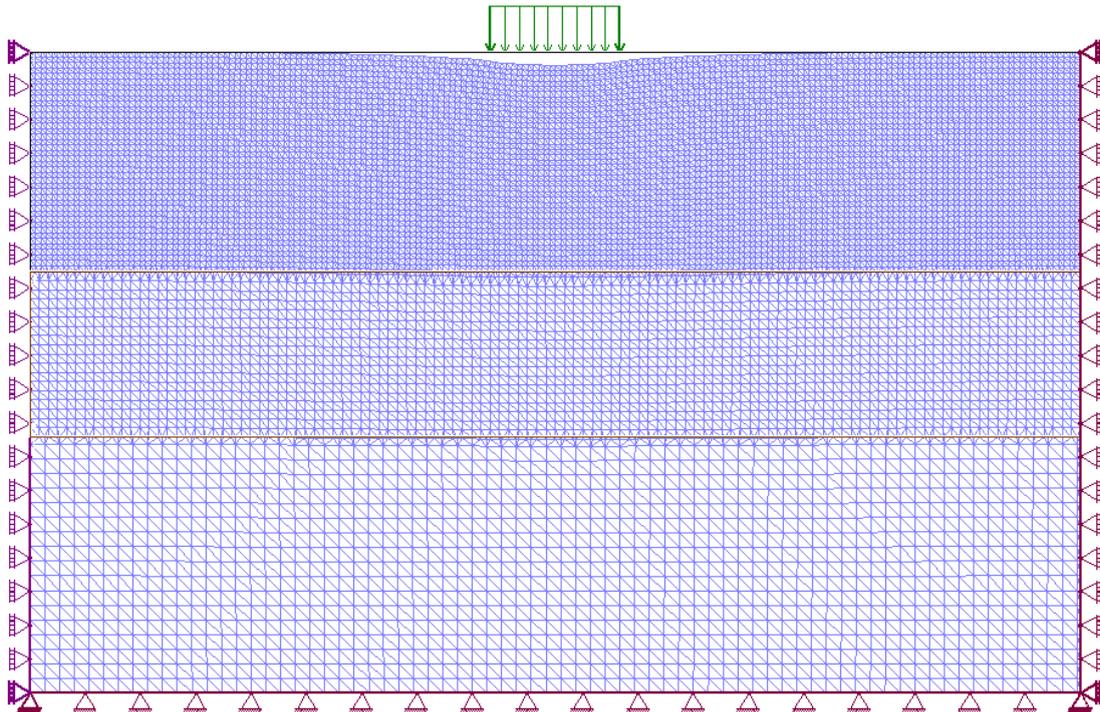


Figura 6.5. Deformada del suelo de fundación

De igual manera se pueden visualizar los niveles de esfuerzos actuantes en sentido x , y , cortante y esfuerzos principales (s_1 y s_3).

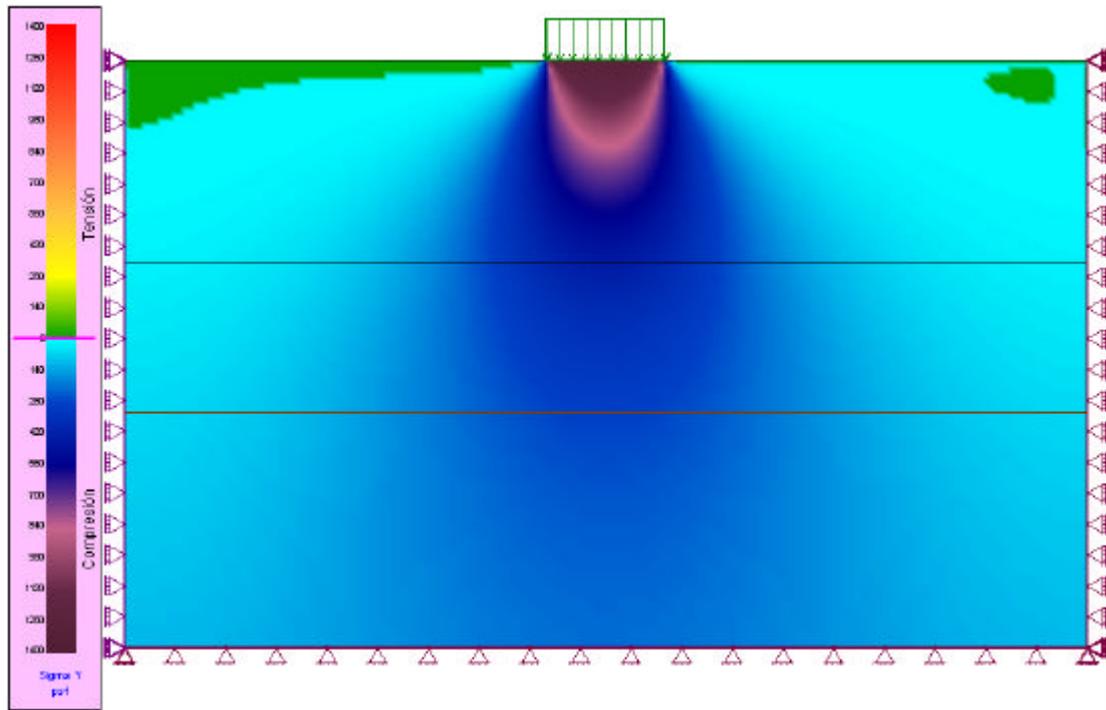


Figura 6.6. Diagrama de esfuerzos en sentido y (s_y)

Buscando dar mayor confiabilidad en la calibración del software, se ha desarrollado este mismo ejemplo haciendo una sensibilización en el valor del μ . Se calcula el asentamiento utilizando la teoría de la elasticidad y MTA.

$\frac{H}{B} = 5.0$		$C_s = 1.83$
μ	MTA	T. Elasticidad
0.25	0.1823	0.1876
0.30	0.1724	0.1821
0.33	0.1652	0.1784
0.36	0.1569	0.1742
0.40	0.1440	0.1681
0.43	0.1327	0.1631
0.45	0.1243	0.1596
0.49	0.1040	0.1521

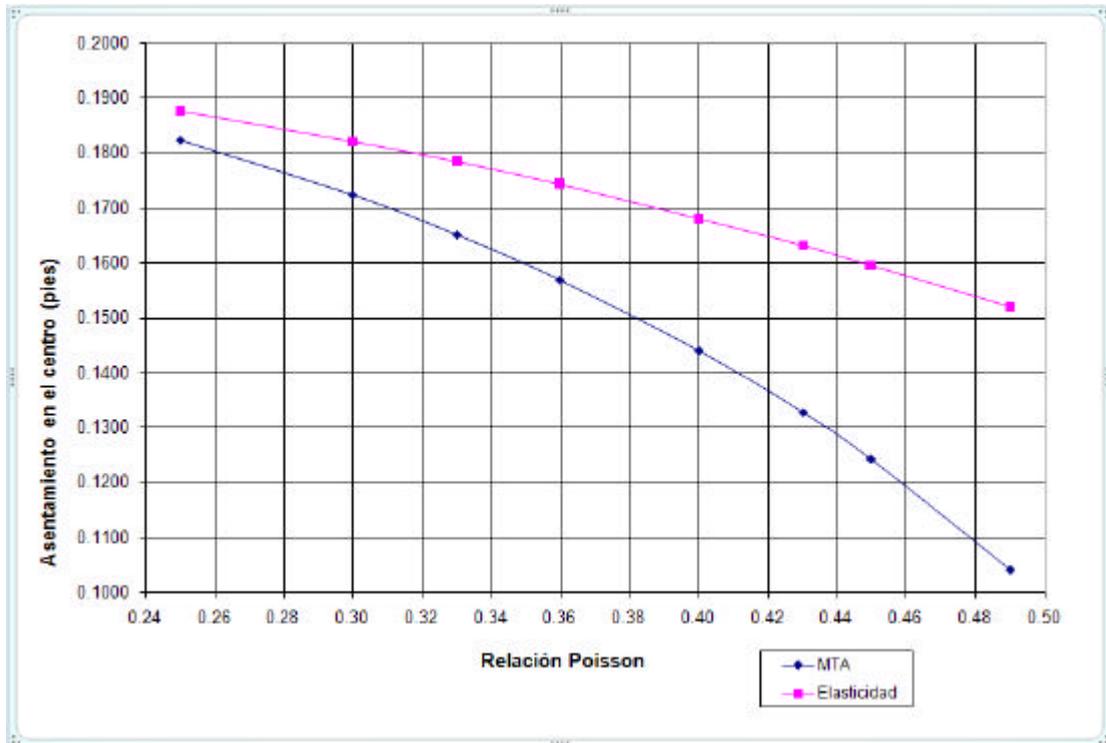


Figura 6.7. Valores de asentamiento en el centro del área vs. Relación de Poisson

De los resultados obtenidos se puede inferir que a medida que el valor de la relación de Poisson se acerca al valor de 0.5 se incrementa la diferencia entre los valores obtenidos con la Teoría de la Elasticidad y los obtenidos con el software MTA. Este hecho tiene su explicación en la formulación de la teoría de la elasticidad para deformaciones planas (ver ecuación 3.9 b). Aquí, el término $(1 - 2m)$ se indetermina cuando $m = 0.5$ y no converge con valores muy cercanos a 0.5.

6.2 EJEMPLO 2

Para el cumplimiento del objetivo trazado en el desarrollo de este trabajo, a continuación se reproducirá, utilizando el software MTA, el comportamiento de un muro reforzado con geotextiles y sometido a una sobrecarga externa, el cual fue construido a escala e instrumentado¹¹.

6.2.1 Construcción e instrumentación del muro a escala

A continuación se describen las características principales de la construcción, instrumentación y procedimiento de carga del modelo a escala, como aparece en la bibliografía consultada.

El muro se construyó dentro de una estructura de carga rígida en el laboratorio buscando tener un mayor control de las condiciones de prueba. Se construyen dos



estructuras tipo, una, con relleno de material granular y la otra con relleno de material cohesivo. Ambos muros fueron construidos por etapas bajo condiciones de deformación plana.¹¹

Cada muro tenía una cara conformada por bloques de madera y 12 capas de refuerzo. La geometría del muro y dimensiones, es como se muestra en la figura 6.8.

Una vez el muro fue construido en su altura total, sobre la parte superior de éste, fue colocada una capa de arena de aproximadamente 24 pulgadas. El procedimiento de cargue del muro consistió en la aplicación de una presión vertical sobre la capa de arena.¹¹

La presión fue aplicada en cinco incrementos iguales de 3 psi cada uno hasta alcanzar una presión de 15 psi. El primer incremento de 3 psi incluía la presión ejercida por la capa de arena colocada sobre la superficie del muro. El tiempo transcurrido entre incremento e incremento fue de 30 minutos. Al final, la carga de 15 psi fue mantenida por 100 horas, permitiendo la aparición del fenómeno del creep. Al cabo de este tiempo, se continuaron con iguales incrementos de carga hasta alcanzar una condición de falla del muro o hasta que los mecanismos de medición y carga alcanzaran su capacidad.¹¹

El prototipo fue instrumentado de manera de medir el comportamiento durante la construcción, haciendo mediciones en cada incremento de carga, al final de la carga de 15 psi y cumplidas las 100 horas. Las mediciones de comportamiento incluían el movimiento de la cara del muro (en ambas direcciones, horizontal y vertical), movimiento interno del relleno (incluyendo el desplazamiento de la superficie de éste), desplazamientos y deformaciones sobre la longitud del refuerzo en diferentes capas y los esfuerzos normal y cortante dentro de la cara a diferentes alturas. Para algunas de las mediciones de comportamiento, se uso más de un instrumento con el fin de chequear la consistencia de las medidas.¹¹

6.2.2 Desarrollo del ejemplo

Los resultados obtenidos con el software serán comparados con los medidos en el modelo a escala real.

Se aclara al lector de este documento, que las condiciones de borde y muchos de los valores de las propiedades de los materiales que constituyen el muro, han sido asumidos dentro de un rango razonable de valores que se pueden inferir de la información que se tiene disponible del muro construido a escala e instrumentado, que se ha adoptado como modelo para la calibración de este software, esto por cuanto la literatura es netamente informativa de los resultados obtenidos en dicho estudio.

Frente a la duda que puede gestarse de la escogencia del mencionado modelo para la calibración del software que se está presentando en este trabajo, cuya literatura puede consultarse en la referencia bibliográfica 11 página 3, se aclara que localmente no se tiene información de muros de este tipo construidos que cuenten con instrumentación que permita la medición de su comportamiento y que se hubiesen podido tomar como modelo para la calibración.



Configuración del muro:

Geometría:

Altura total: 141 pulgadas

Base de arena: 7 pulgadas

Sobre capa de arena: 24 pulgadas

Cuerpo del muro reforzado: 110 pulgadas

Longitud del muro: 78 pulgadas

Características de los materiales de relleno:

Han sido tomadas, las características que fueron deducidas de la información disponible del muro referencia para la calibración. De esta información, fueron tomados, también, los parámetros que se utilizan en la aplicación de la teoría de no linealidad adoptada (modelo hiperbólico de Kondner).

Suelo cohesivo:

E= 1754.4 psi

Peso unitario= 120 Lb/pie³

Cohesión= 1.91 psi,

Angulo de fricción= 26°

Poisson= variación entre 0.36 y 0.43

Parámetros de Kondner:

$$R_f = 0.83$$

$$n = 0.06$$

$$K = 144$$

Suelo Granular:

E= 12000 psi

Peso unitario= 107 Lb/pie³

Cohesión= 0 psi

Angulo de fricción= 49°

Poisson= 0.35

Parámetros de Kodner:

$$R_f = 0.86$$

$$n = 0.59$$

$$K = 908$$

Configuración carga externa:

De acuerdo a la literatura del muro referencia para la calibración, éste fue sometido a incrementos de carga iniciándose inmediatamente después de la construcción del



muro, tomándose registro de las deformaciones presentes en el suelo cohesivo a 15 psi, carga que fue mantenida por 100 horas. Seguidamente se continuó con el incremento de carga en las mismas proporciones hasta que el mecanismo alcanzó su capacidad, tomándose registro de deformaciones a cargas de 33 psi y 34 psi. Para el suelo granular, siguiendo el mismo procedimiento de carga, se llevo a 15, 27 y 29 psi.

Debido a la rutina que fue implementada para la carga del muro referencia, en las lecturas de deformación registradas en cada una de las cargas finales está actuando el efecto del paso del tiempo en la acomodación de las partículas de suelo y fenómeno de creep.

Con relación a lo anterior, se aclara que el modelo desarrollado solo está hecho para análisis a corto plazo, sin tener en cuenta el comportamiento tiempo dependiente del suelo, fenómeno de creep, ni la anisotropía característica de la masa de suelo del relleno. Por tanto, la comparación de los resultados obtenidos con el programa frente a los del muro referencia, estarán centrados básicamente en la primera carga de 15 psi. No obstante, se medirán los desplazamientos que se presentan a cargas mayores.

Condiciones de borde

Se han configurado dos tipos de apoyo, uno en la base del muro con restricción de movimiento en x y y , y un segundo tipo, en los laterales del muro, con restricción de movimiento en sentido x .

En la figura 6.8 se muestra un corte longitudinal de la estructura donde se visualiza la configuración externa de ésta.

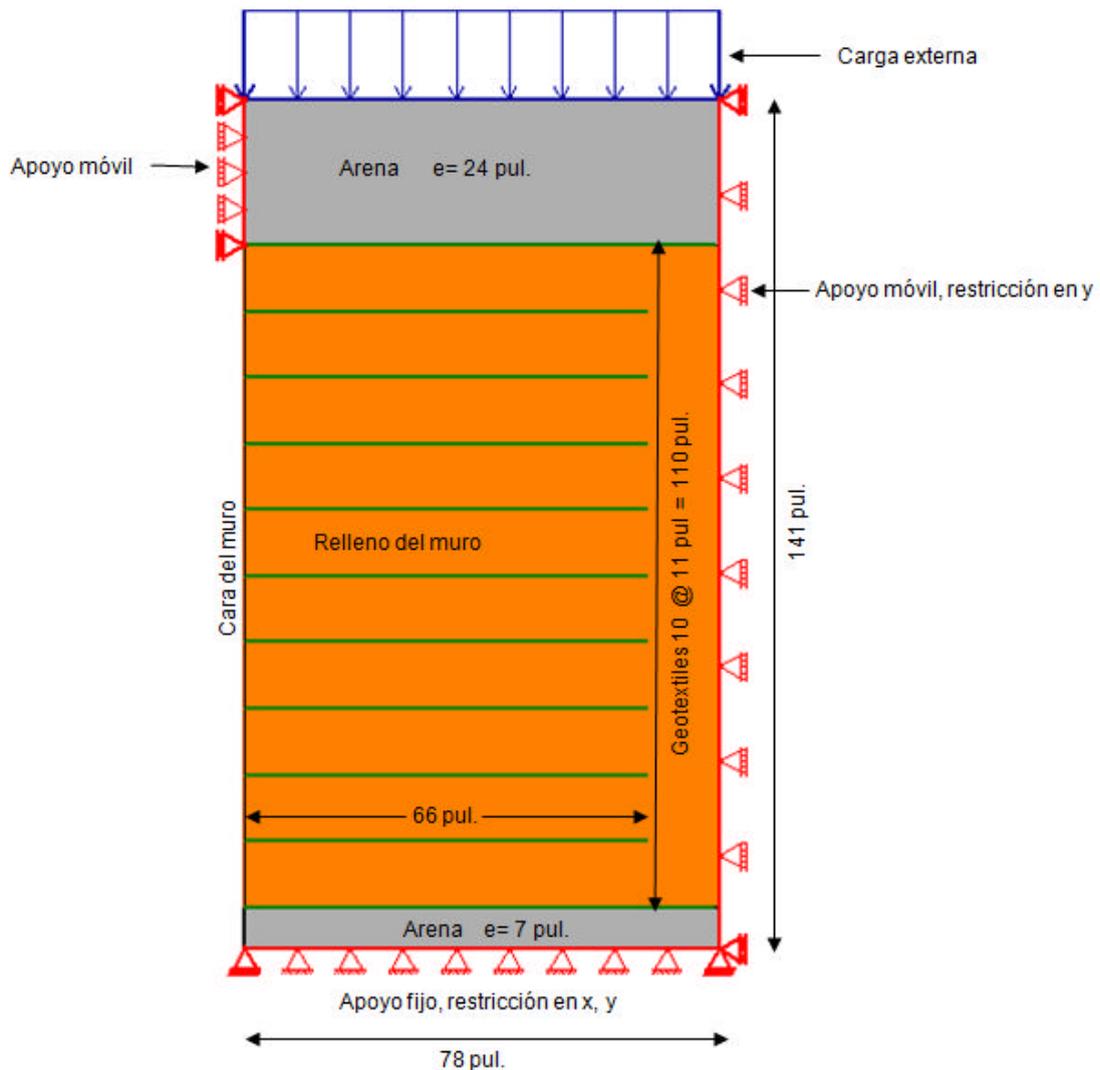


Figura 6.8. Configuración geométrica del muro y de carga

6.2.3 Análisis del muro en estudio utilizando el software MTA

A continuación se presentarán cada uno de los pasos seguidos para la obtención final de resultados utilizando la herramienta desarrollada.

1. Configuración del sistema

Antes de iniciar con el desarrollo del ejercicio, se debe configurar el sistema, es decir, unidades del sistema, parámetros de convergencia, parámetros de análisis, etc.

2. Diagramación geométrica de la estructura de contención



Utilizando el menú **Crear** en la barra de herramientas del programa se diagrama la geometría del muro, elementos de refuerzo (geotextiles), condiciones de carga y de apoyo.

3. Asignación de materiales

En el menú **Bases** de la barra de herramientas se configuran los distintos materiales constitutivos de la estructura. Una vez creados se asignan a cada componente geométrico que los representa. En esta misma etapa se asignan las características y condiciones de falla y comportamiento de los materiales.

4. Configuración de la malla de elementos finitos

Dentro de las propiedades de cada componente geométrico del cuerpo del muro, se dan los espaciamientos en x y y que tendrá cada elemento de la malla MEF.

Una vez estipulado el espaciamiento, en el menú **Análisis** se procede a crear físicamente la malla para elementos finitos y la formación de los mismos mediante el proceso de triangulación.

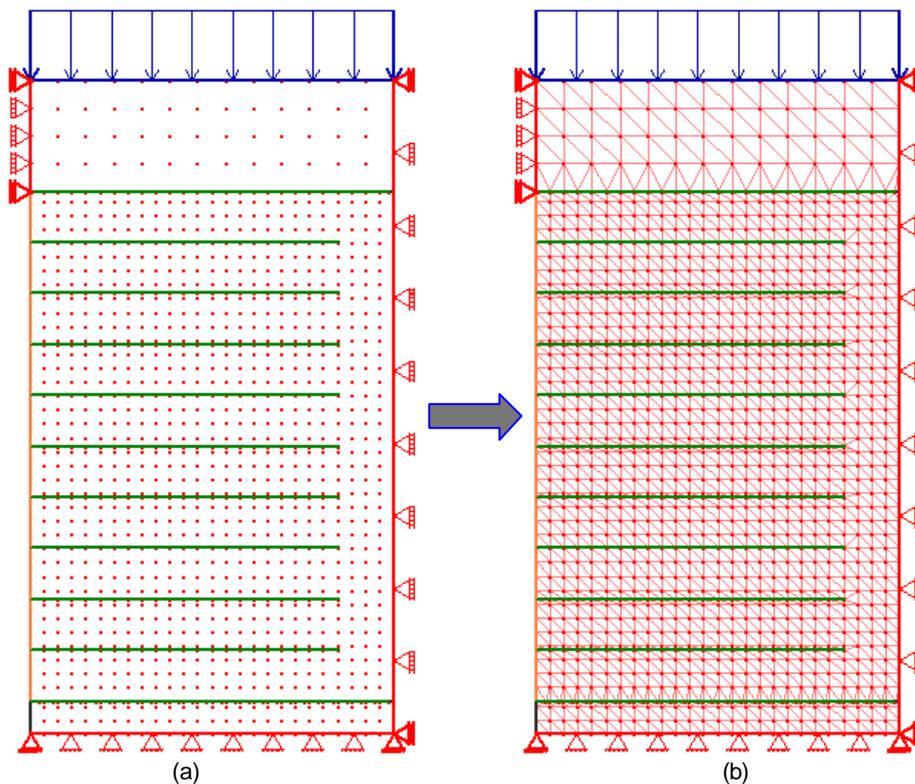


Figura 6.9. (a) Nodos de la MEF; (b) Malla de Elementos Finitos



5. Cálculo de desplazamientos y Esfuerzos

Cumplido el paso anterior, se procede al cálculo de los esfuerzos y desplazamientos de cada nodo de la malla.

En el manual que acompaña el software objeto de este trabajo, se detalla cada uno de los pasos descritos anteriormente. Aquí, solo se indicarán los resultados obtenidos para efectos de la calibración.

6.2.4 Resultados

6.2.4.1 Relleno con suelo Cohesivo

Para este tipo de relleno y cada una de las cargas analizadas (15, 33 y 34 psi) se realizó una sensibilización de los esfuerzos y desplazamientos obtenidos de acuerdo a una variación el valor de la relación de Poisson. Como se menciono anteriormente, este valor varía en el rango de 0.36 a 0.43, esto dado que de los tres ensayos triaxiales (UU, CD, CU) reportados en la literatura del muro referencia, se pueden inferir estos valores.

De cada carga se presentan los valores de desplazamiento máximos encontrados con cada valor m , en sentido x y sentido y .

CARGA DE 15 psi		
m	$\Delta(x)$ pul.	$\Delta(y)$ pul.
Valores muro referencia	1.0	2.57
0.36	0.84	2.64
0.38	0.85	2.44
0.40	0.90	2.32
0.43	1.06	2.22

CARGA DE 33 psi		
m	$\Delta(x)$ pul.	$\Delta(y)$ pul.
Valores muro referencia	2.50	5.71
0.36	1.23	4.21
0.38	1.56	4.61
0.40	1.62	4.35
0.43	2.24	4.47

CARGA DE 34 psi		
m	$\Delta(x)$ pul.	$\Delta(y)$ pul.
Valores muro referencia	9.40	13.40
0.36	1.20	4.28
0.38	1.46	4.74
0.40	1.97	4.93
0.43	2.33	4.97

Con respecto a los valores de desplazamiento máximo presentados en el muro referencia, se identificó para cada carga analizada en el software MTA, el valor de la

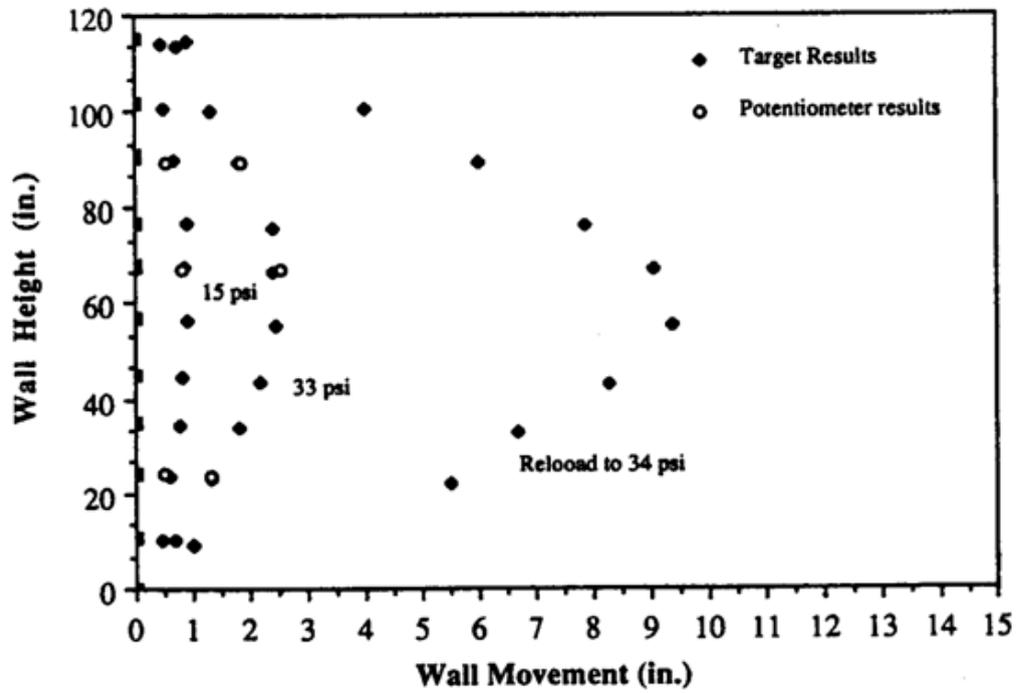


variable m para el cual los desplazamientos obtenidos se acercan más a los de referencia, así, para las tres carga de 15, 33 y 34 psi, los valores de desplazamiento serán los obtenidos con un $m = 0.43$.

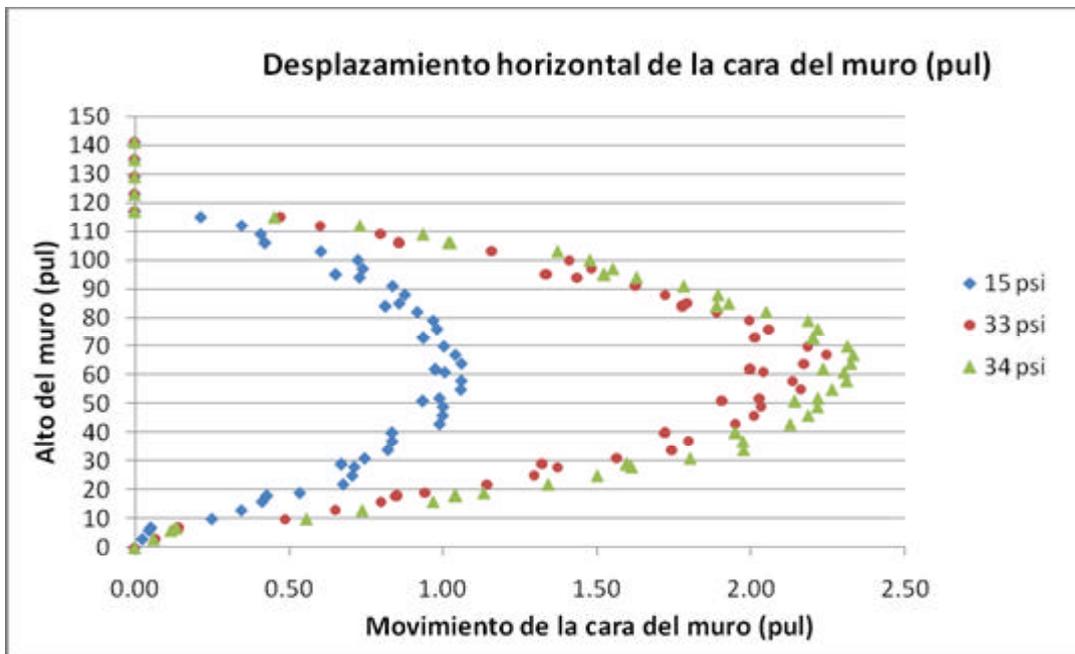
Como dicho anteriormente, los valores de desplazamiento obtenidos con el software MTA, en las cargas 33 y 34 psi, no alcanzan los valores referencia debido a que sobre éstos está más marcada la influencia del paso del tiempo, el reacomodo de las partículas y el desarrollo de creep, efectos que no han sido simulados en el software desarrollado, puesto que el modelo reológico adoptado para la simulación de la no linealidad en los suelos, es un modelo elastoplástico. Es decir, que el software desarrollado analiza cada carga como la aplicada inmediatamente después de construido el muro y no como un incremento sucesivo de cargas durante un período de tiempo, acumulando deformaciones.

No obstante, aunque en el modelo a escala tomado como referencia, a la carga total de 15 psi se llega después de 120 min, será esta la carga que se tome como referencia para la calibración, considerando que durante dicho tiempo, la estructura de suelo no ha sufrido grandes modificaciones en sus propiedades.

A continuación se presenta gráficamente los desplazamientos presentados en el muro, para cada una de las cargas analizadas. En el caso de los resultados obtenidos con el software MTA, se han tomado los valores resultantes del análisis con el valor de m seleccionado.

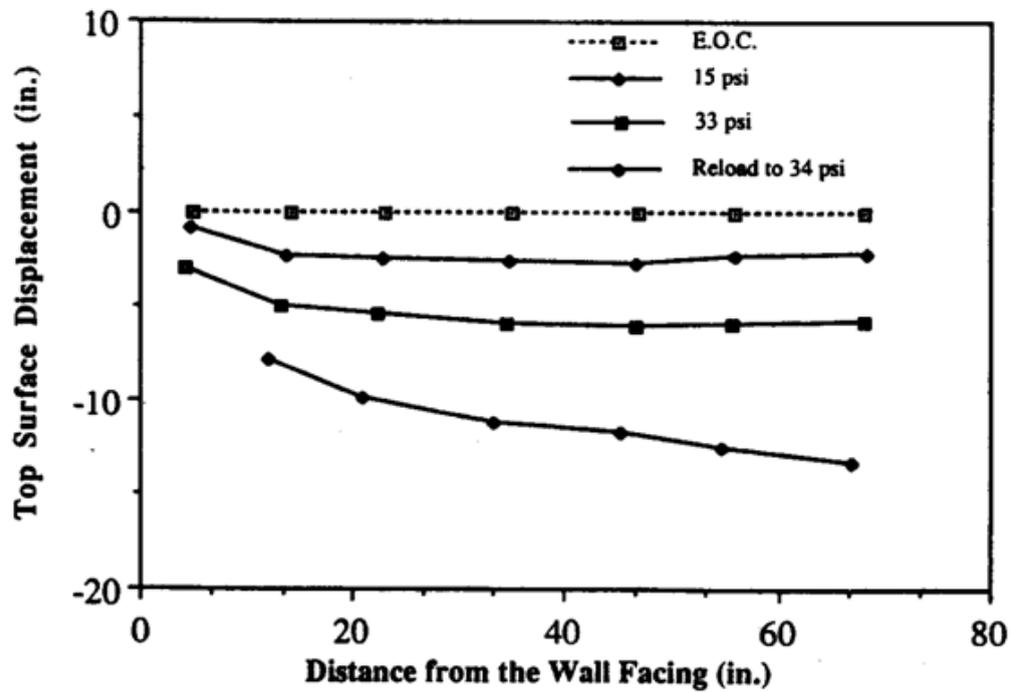


(a)

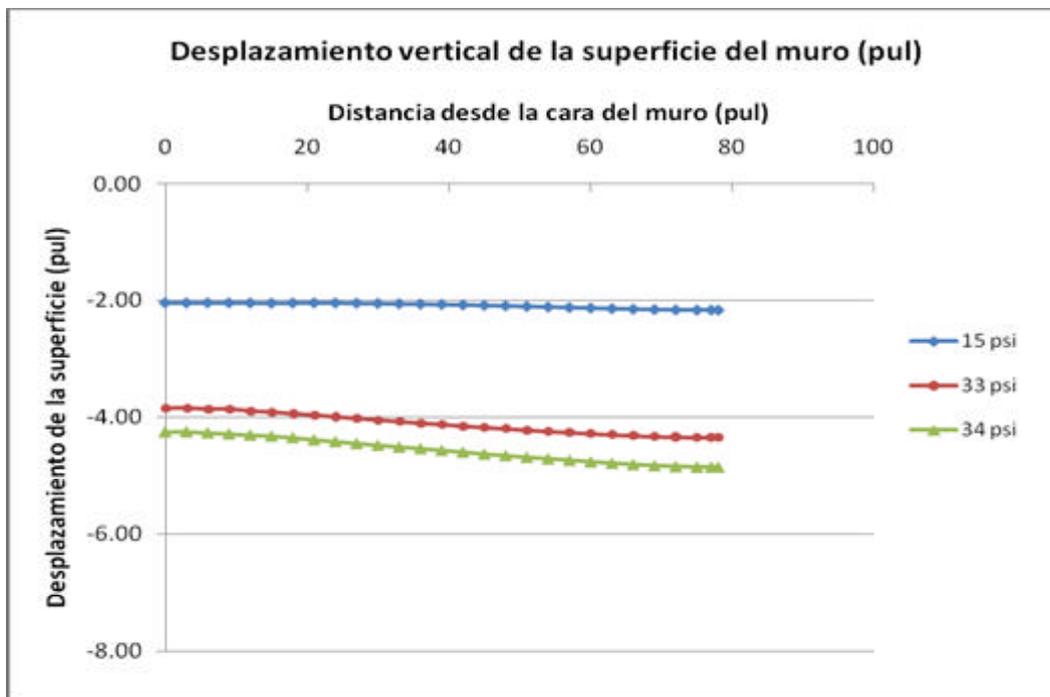


(b)

Figura 6.10. Desplazamiento horizontal de la cara del muro. (a) Muro referencia¹¹; (b) Análisis con MTA



(a)



(b)

Figura 6.11. Desplazamiento vertical de la superficie del muro
(a) Muro referencia¹¹; (b) Análisis con MTA



En las gráficas se puede claramente apreciar que el comportamiento de movimiento del muro en ambos casos presenta la misma tendencia. No obstante, mientras que entre las cargas de 33 y 34 psi se presenta una gran diferencia en los desplazamientos del muro referencia, con tan solo un incremento de 1 psi, en el análisis con MTA no se observa dicho fenómeno dadas las razones que ya han sido aclaradas anteriormente.

6.2.4.2 Relleno con suelo granular

De igual manera que en el relleno con suelo cohesivo, se analiza el comportamiento del muro con MTA, frente a las cargas impuestas de 15, 27 y 29 psi. Para este tipo de relleno se tienen unos únicos parámetros del suelo obtenidos de la información suministrada de un ensayo CD realizado a una muestra del suelo utilizado para el muro referencia, por tanto no se presenta sensibilización de alguna variable.

Los resultados obtenidos en el análisis son:

Carga	Muro referencia		Análisis con MTA	
	$\Delta(x)$ pul.	$\Delta(y)$ pul.	$\Delta(x)$ pul.	$\Delta(y)$ pul.
15 psi	1.51	2.0	1.36	4.14
27 psi	4.0	4.0	2.33	6.66
29 psi	7.55	8.24	2.29	6.79

En la figura 6.12 y 6.13 se muestran los resultados de desplazamiento obtenidos en el muro a escala tomado como referencia y los obtenidos del análisis con el software MTA.

Gráficamente, en primera instancia se puede apreciar que, los resultados arrojados por MTA, tienen la misma tendencia de los que presentó el modelo a escala tomado como referencia.

En el caso de este tipo de relleno, se puede apreciar una mayor diferencia de los resultados de desplazamiento en sentido **y** con respecto a los del muro referencia. Este hecho se explica por el mayor grado de anisotropía que presenta este tipo de suelo; generalmente los suelos granulares presentan un mayor módulo en sentido **y** que en sentido **x**, fenómeno que no fue simulado en el software desarrollado, dado que para el análisis con EF se utilizó una matriz de rigidez netamente isótropa.

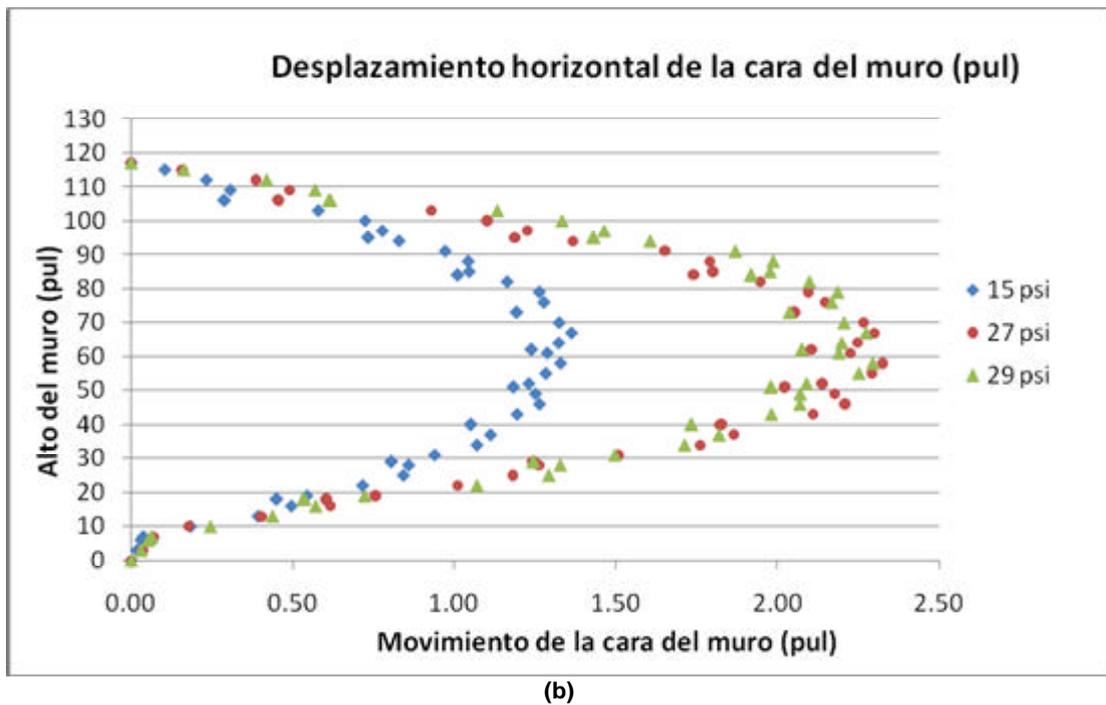
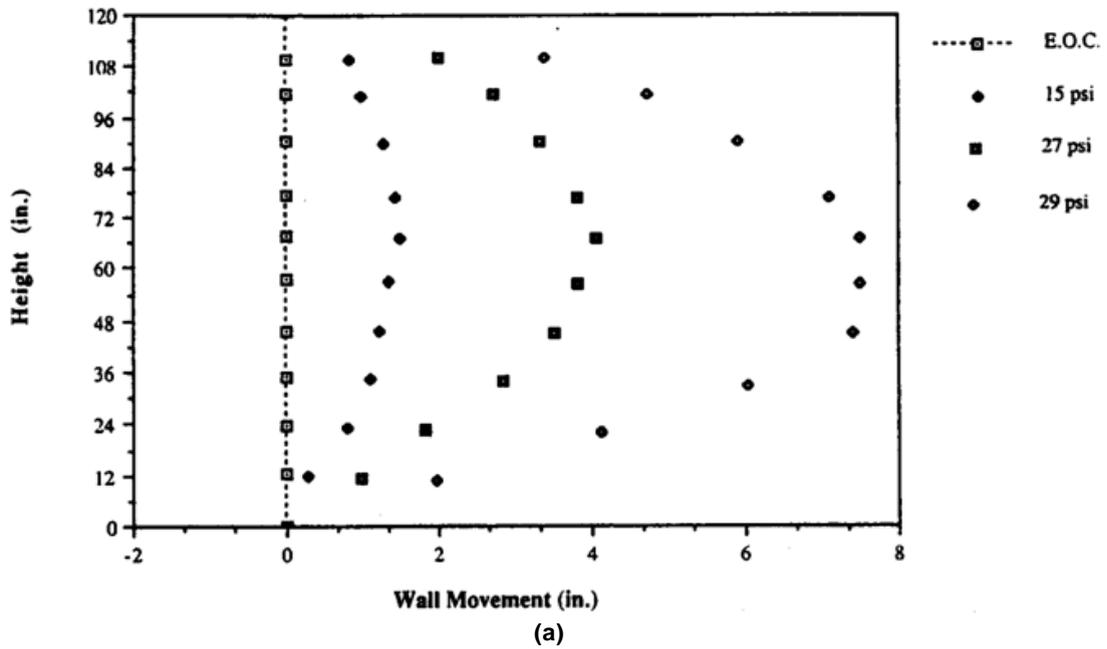
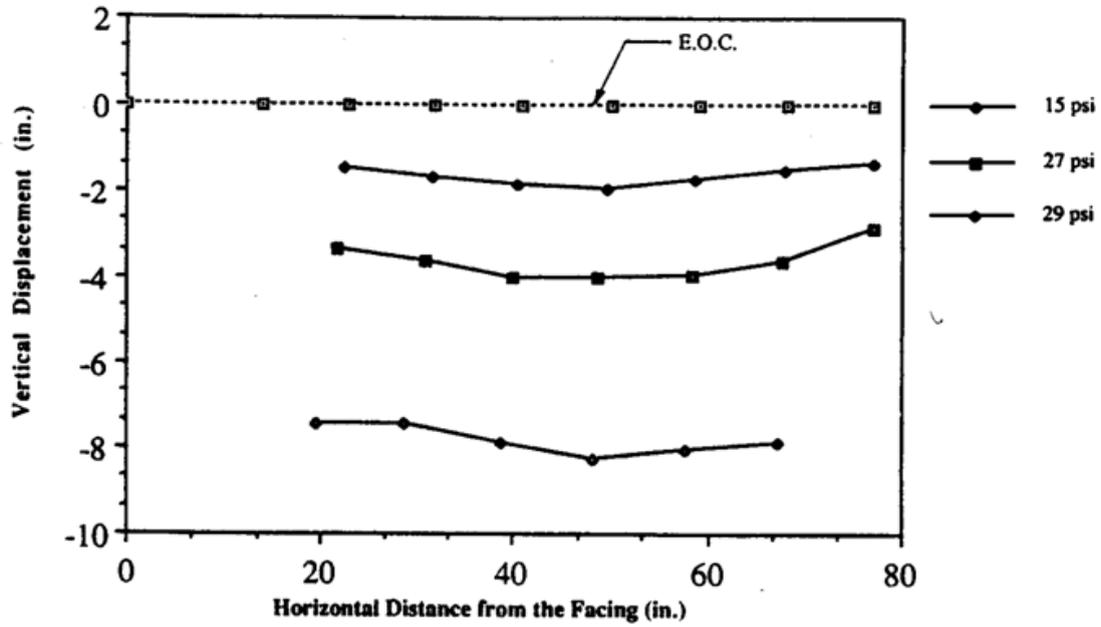
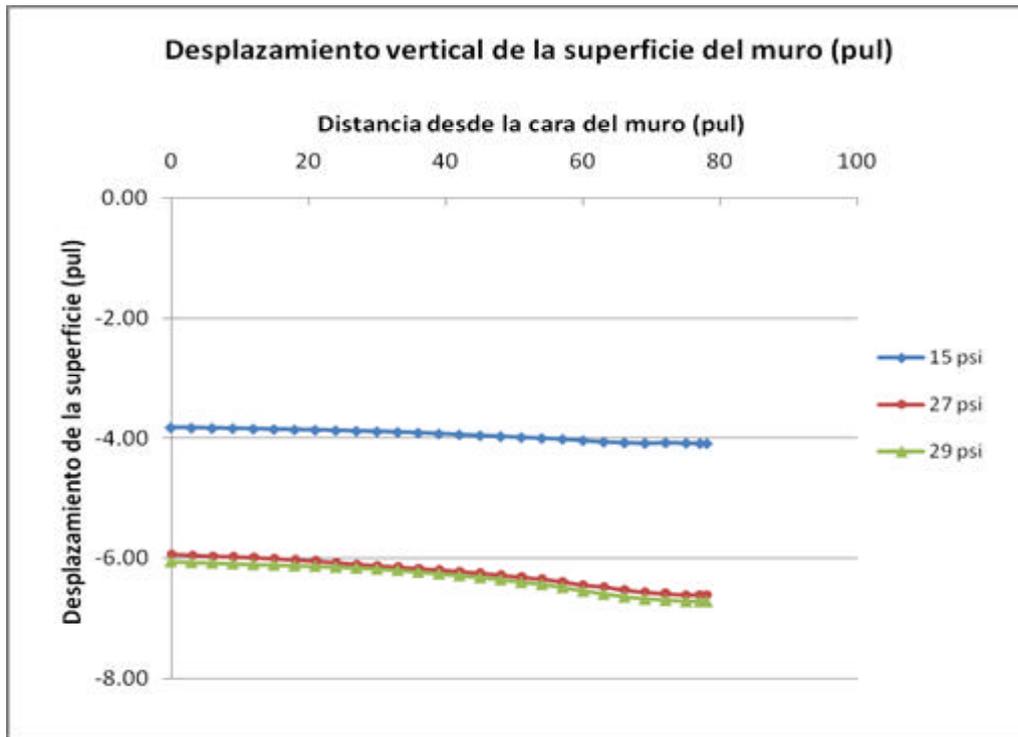


Figura 6.12. Desplazamiento horizontal de la cara del muro. (a) Muro referencia¹¹; (b) Análisis con MTA



(a)



(b)

Figura 6.13. Desplazamiento vertical de la superficie del muro
(a) Muro referencia¹¹; (b) Análisis con MTA



6.2.4.3 Comportamiento del refuerzo

El software MTA permite obtener los valores de la distribución de la deformación axial y esfuerzos a lo largo del material de refuerzo. Estos han sido abstraídos para tres alturas diferentes: $0.15H$, $0.52H$ y $0.88H$ (H altura total del muro, medida desde la base), mismas para las cuales, en el muro a escala se registró el valor de la deformación axial del geotextil.

En las figuras 6.12 y 6.13 se muestran los resultados obtenidos con MTA y se establece la comparación con los registrados en el muro referencia.

Los valores de deformación que se presentan a lo largo del geotextil obtenidos con MTA son bastante concordantes con los registrados en el muro a escala, fluctuando dentro del mismo rango de valores tanto el relleno cohesivo como el granular.

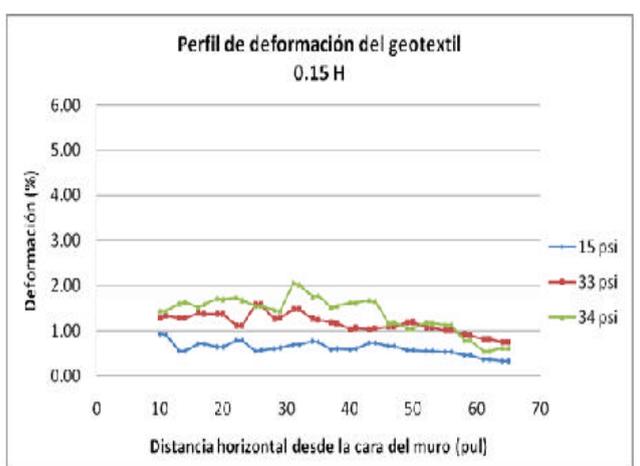
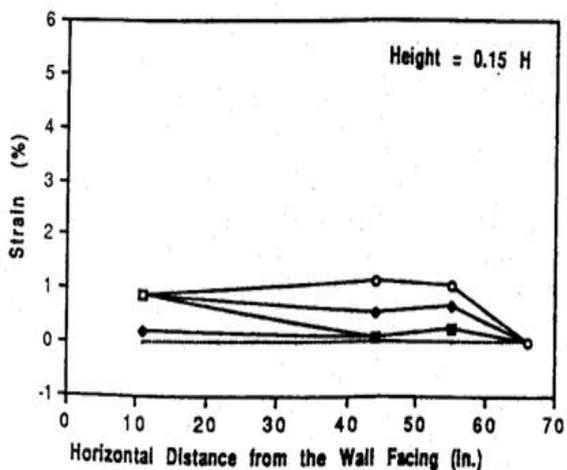
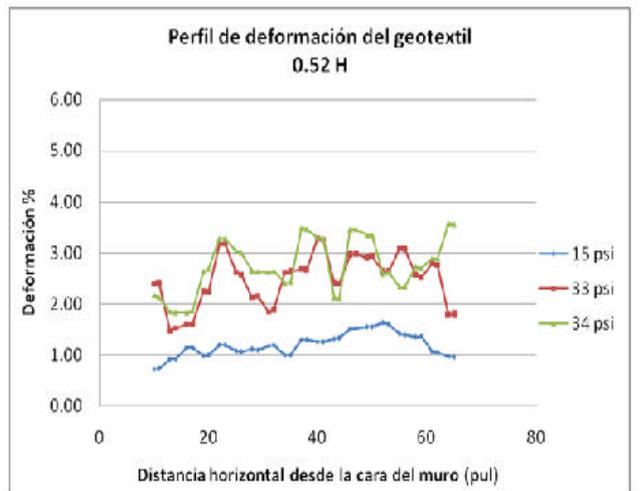
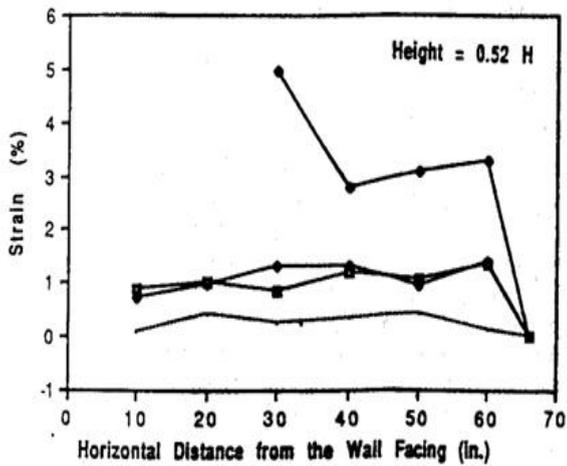
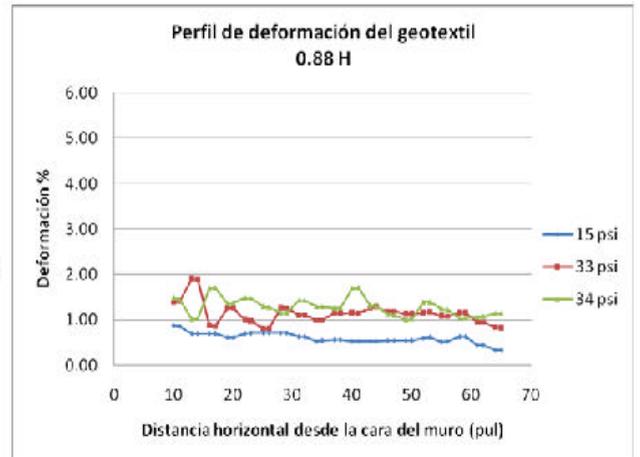
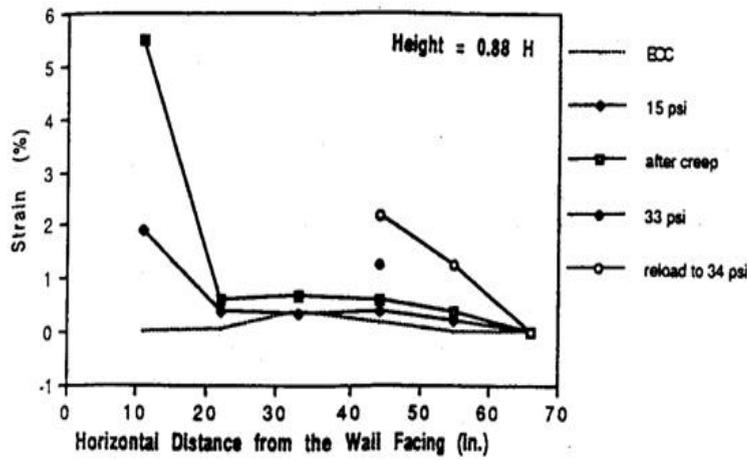


Figura 6.14. Distribución de la deformación axial en el geotextil de refuerzo a diferentes alturas: relleno cohesivo. Izquierda: muro referencia¹¹; Derecha: MTA

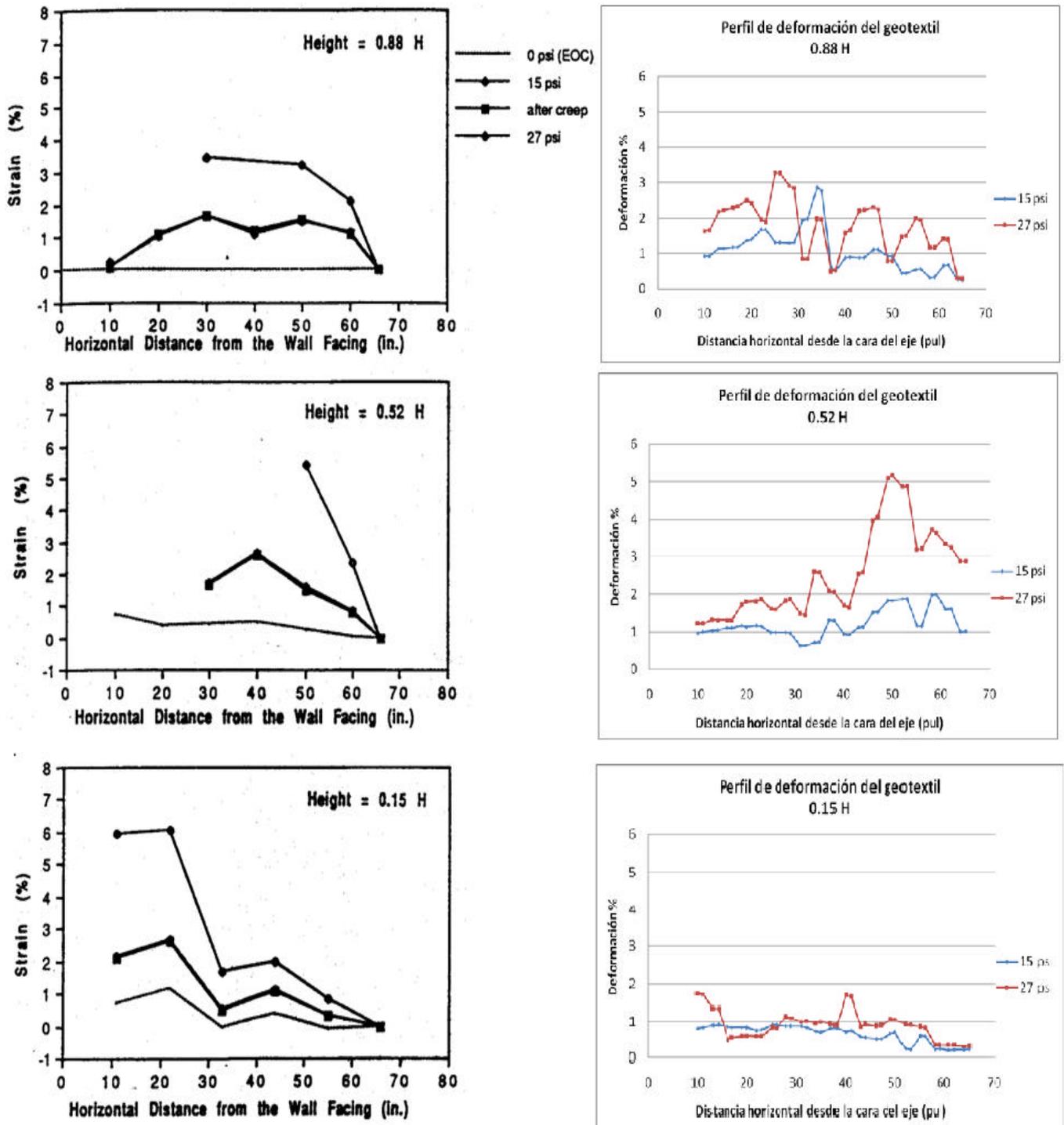


Figura 6.15. Distribución de la deformación axial en el geotextil de refuerzo a diferentes alturas: relleno granular. Izquierda: muro referencia¹¹; Derecha: MTA



7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- El Método de Elementos Finitos hoy por hoy puede convertirse en una de las herramientas más versátiles y apropiadas para estimar el comportamiento de un material, y su campo de aplicación es bastante amplio.
- En el trabajo desarrollado se tuvo en cuenta la no linealidad de los materiales de relleno del muro y del refuerzo. Para el caso de los suelos se implementó la teoría de *Kondner* (modelo hiperbólico) aplicado a una matriz de comportamiento cuasi-elastoplástico para materiales isotrópicos. Para el resto de los materiales, incluido el refuerzo se permite incluir una curva de comportamiento propia de cada material, de acuerdo a unas condiciones de ensayo, suministrada por el usuario. Tener en cuenta la no linealidad en el comportamiento de un material permite hacer una estimación mucho más realista de éste.
- Los resultados obtenidos de la evaluación con el software MTA, tanto en el campo lineal como no lineal son bastante acordes a los obtenidos y medidos con otras metodologías, tal como se deduce en los ejemplos ilustrados.
- Para el análisis en deformaciones planas no es posible el análisis con un valor de Relación de Poisson igual o cercano a 0.5, lo que se explica por la formulación de la teoría de la elasticidad para este tipo de comportamiento.
- Se encontró un alto grado de aproximación de los resultados del análisis con MTA versus los medidos reportados para el muro a escala tomado como referencia para la calibración. A continuación, gráficamente se puede apreciar la comparación de los resultados obtenidos con MTA en la predicción del comportamiento del muro frente al muro referencia y a otras metodologías con las cuales se intentó simular dicho comportamiento (Referencia 11).

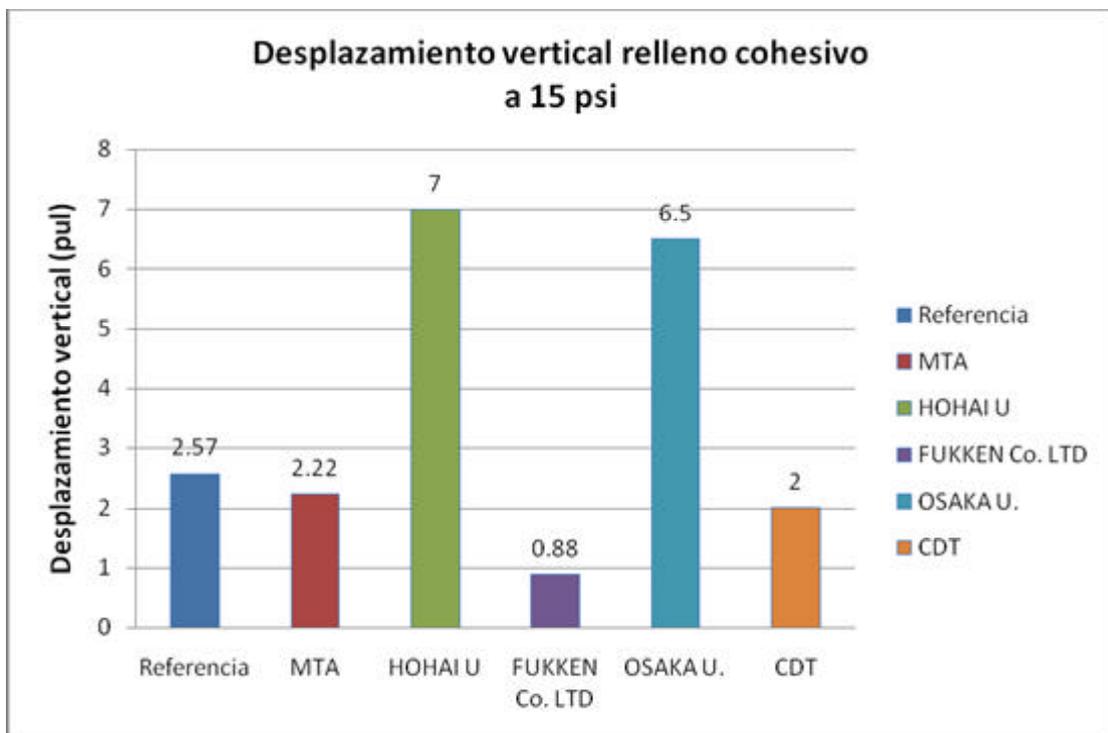
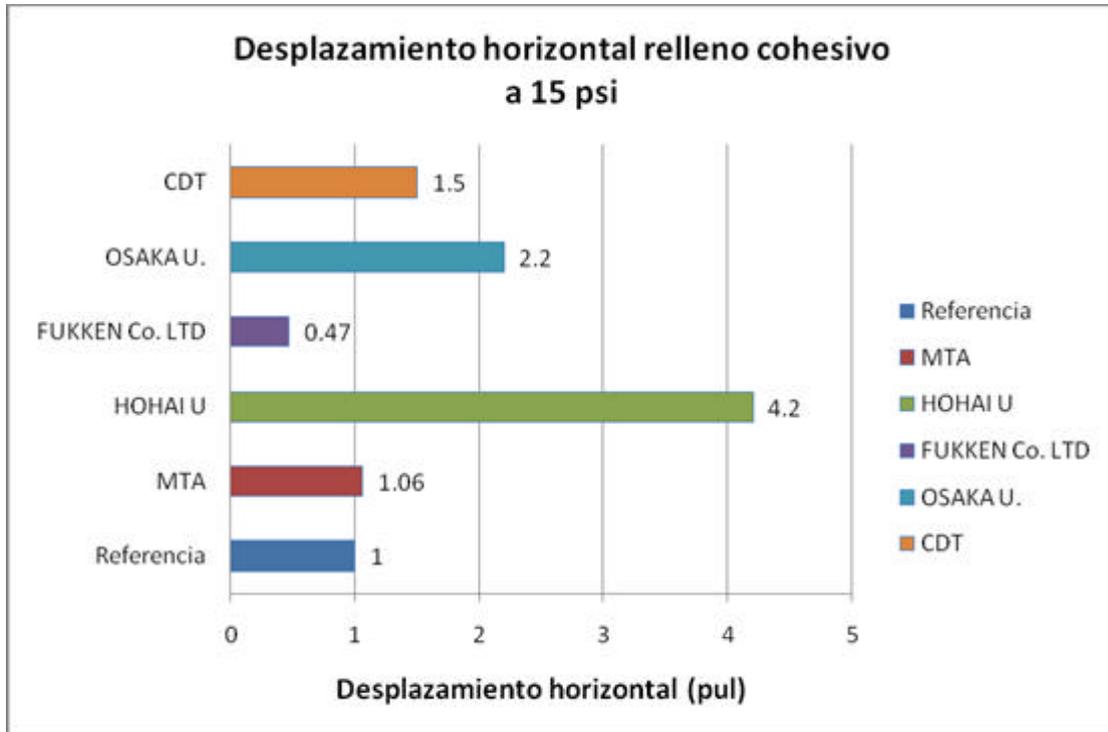


Figura 6.16. Comparación de resultados MTA vs. Muro referencia y otros. Relleno cohesivo

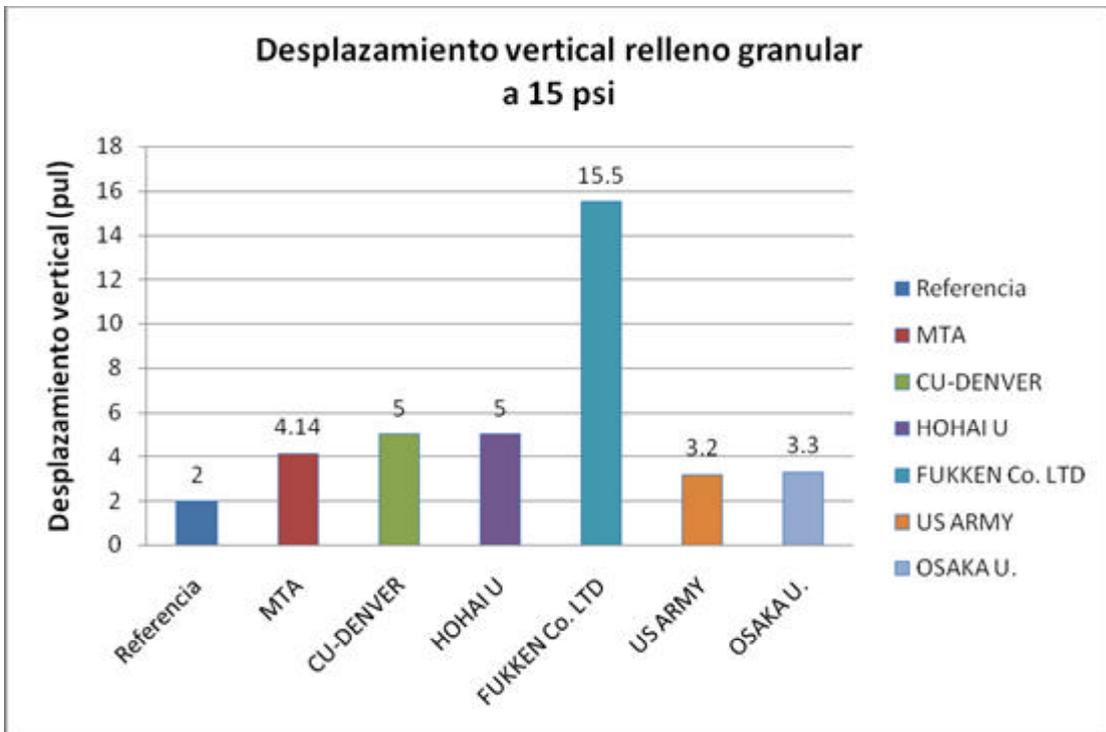
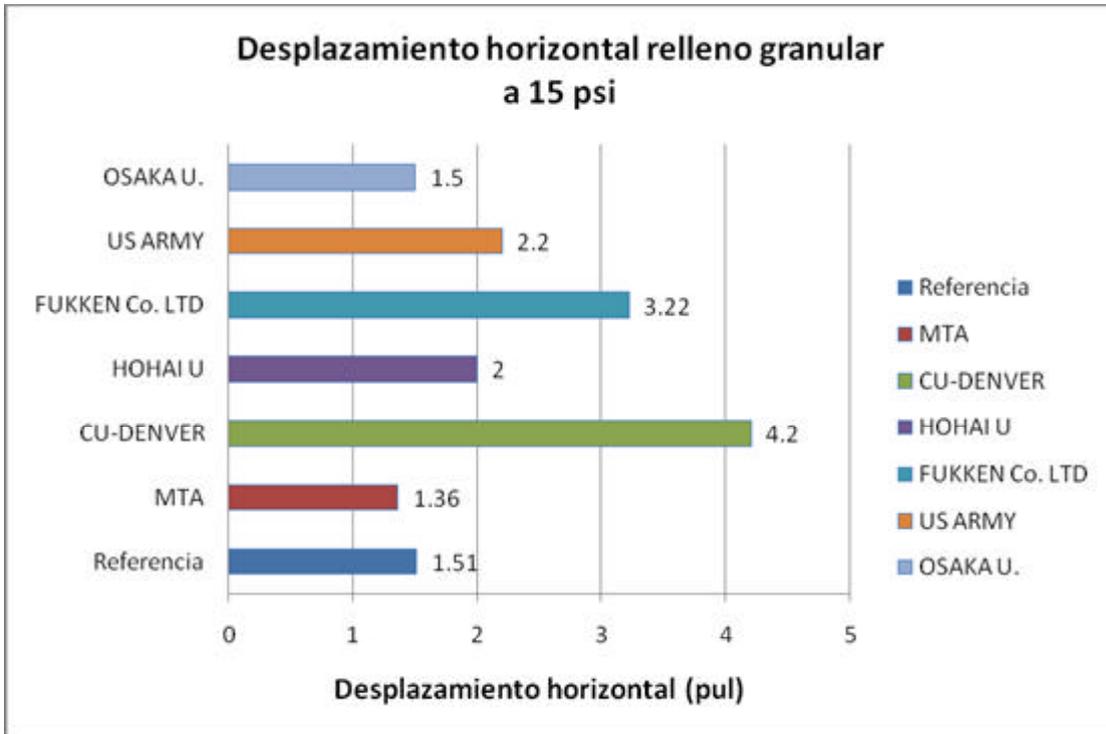


Figura 6.17. Comparación de resultados MTA vs. Muro referencia y otros. Relleno granular



- Como resultado de esta investigación se tiene la implementación del software MTA (**Muros de Tierra Armada**) para el cálculo de esfuerzos y deformaciones en muros de tierra armada, en donde han sido aplicados todos los conceptos que se incluyen en este documento.
- MTA a pesar de ser un software desarrollado pensando en ser un aplicativo para el análisis del comportamiento de tierra armada, su aplicación es posible en el análisis de otro tipo de estructuras tales como, estructuras en concreto, tuberías, láminas, etc.
- Es importante que el usuario del software MTA tenga el conocimiento necesario y suficiente de los conceptos que en él se manejan, de modo que pueda configurar el sistema y suministrar la información solicitada de manera adecuada, e igualmente tenga la capacidad de interpretar los resultados finales.
- Dado que la MEF se genera de manera automática, es recomendable que el tamaño de cada elemento maestro triangular sea estudiado con antelación, de tal forma que los resultados del análisis representen de forma bastante aproximada el comportamiento real del objeto analizado.
- El uso y resultados arrojados por el software MTA son responsabilidad única del usuario, en ningún momento comprometen a los diseñadores de la aplicación ni a la Universidad del Cauca. Se recomienda analizar todos los datos introducidos y arrojados por el sistema para así efectuar un manejo racional de la herramienta.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Rivera Caicedo, Luciano, (2004), “Muros de contención de suelo reforzado con cintas metálicas y geosintéticos”, editorial Universidad del Cauca, primera edición.
2. www.google.com, “Tipología de muros de contención”
3. www.arquitectuba.com.ar
4. www.google.com, “Estabilidad de edificios y construcciones”
5. Cook, Robert Davis., (1974), “Concepts and Applications of Finite Element Analysis”, copyright by John Wiley & Sons, Inc.
6. Chandrupatla & Belegundu, “Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingeniería”, Prentice Hall, segunda edición.
7. Hurtado, Jorge Eduardo, “Introducción al análisis estructural por elementos finitos”, Universidad Nacional de Colombia, Manizales.
8. Moaveni, Saeed, (1999), “Finite Element Analysis, Theory and Application with ANSYS”, Prentice Hall.
9. Solano F., Efraín, (2003), “Tesis de maestrías: Generación del modelo digital de un terreno a partir de datos topográficos”, Universidad del Cauca, Popayán.
10. Duncan, James M. and Chang, Chin-Yung, “Nonlinear Analysis Of Stress And Strain in Soil”, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Vol. 96 NO.SM5, September 1970
11. Jonathan T.h. Wu, (1992), “Geosynthetic-Reinforced Soil Retaining Walls”, University of Colorado at Denver.
12. Dr. phil. nat. Hans F. Winterkorn, PhD Hsai-Yang Fang, “Foundation Engineerin Handbook”, Litton Educational Publishing, Inc., 1975