

**DIFICULTADES MANIFESTADAS POR ESTUDIANTES DE 9° GRADO PARA  
REPRESENTAR ALGEBRAICAMENTE PROBLEMAS DE PALABRAS**



Tesis de Maestría

**AURA LUCÍA STERLING LÓPEZ**

**Universidad del Cauca  
Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación  
Maestría en Educación**

**DIFICULTADES MANIFESTADAS POR ESTUDIANTES DE 9° GRADO PARA  
REPRESENTAR ALGEBRAICAMENTE PROBLEMAS DE PALABRAS**



Tesis de Maestría

**AURA LUCÍA STERLING LÓPEZ**

Director: Dr. WALTER F. CASTRO GORDILLO

**Universidad del Cauca  
Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación  
Maestría en Educación  
Popayán, Agosto de 2017**

**Nota de Aceptación**

**Director:** \_\_\_\_\_

**Jurado 1:** \_\_\_\_\_

**Jurado 2:** \_\_\_\_\_

**Popayán, 2017**

## **Agradecimientos**

Quiero agradecer a aquellas personas que por su colaboración hicieron posible la culminación de este trabajo:

Al Dr. Walter F. Castro G, director de este trabajo de grado, por su paciencia, por sus conocimientos compartidos y por el acompañamiento al desarrollo de este trabajo.

Al Dr. Yilton Riascos Forero, por su colaboración, sus consejos y estar siempre atento a resolver mis inquietudes y alentarme a seguir adelante, además por haber sido un amigo que siempre ha brindado su apoyo incondicional en cada uno de los proyectos que he emprendido.

A los estudiantes y comunidad educativa de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro del municipio de Silvia Cauca por permitir la realización de esta investigación brindando su tiempo y espacios.

A los profesores de la Maestría en Educación de la Universidad del Cauca por permitirnos conocer a partir de sus enseñanzas, a mis compañeros de la Maestría por sus sugerencias, conocimientos compartidos y sobre todo por tantos momentos de risas que hicieron que los sacrificios y momentos de estrés fueran más llevaderos.

Al Msc. Weimar Pérez por su valiosa asesoría, su tiempo y sus orientaciones finales en la elaboración de este documento.

A mis padres Gladys y Alfredo, y hermanos: Adriana y Daniel por ser siempre mi guía, el cimiento del cual me sostengo y mi motivo para sacar mis proyectos adelante y poder alcanzar las metas que me he propuesto. Y por quererme siempre...

A Harrinton por su acompañamiento y colaboración en el desarrollo de este proyecto y a todas aquellas personas, familiares, amigos, por su tiempo, sus comentarios y valiosos aportes a este trabajo.

## Tabla de contenido

<b>Introducción</b> .....	3
<b>Capítulo 1</b> .....	5
<b>Contextualización del problema</b> .....	5
<b>1.1 El término Dificultad</b> .....	5
<b>1.2 Los problemas de palabras</b> .....	5
<b>1.3 Sobre el problema de investigación</b> .....	7
<b>1.3 Objetivos</b> .....	13
1.3.1 Objetivo General .....	13
1.3.2 Objetivos Específicos .....	13
<b>Capítulo 2</b> .....	15
<b>Estado del arte y marco teórico</b> .....	15
<b>2.1 Problemas de tipo aritmético y algebraico</b> .....	15
<b>2.2 Con respecto a los problemas de palabras</b> .....	16
<b>2.3 Uso de las representaciones</b> .....	17
<b>2.4 Sistemas de representación</b> .....	19
<b>2.5 Dificultades en la representación algebraica de problemas de palabras</b> .....	20
<b>Capítulo 3</b> .....	23
<b>Metodología</b> .....	23
<b>3.1 Clasificación y Selección de problemas</b> . .....	27
<b>3.2 La prueba piloto</b> .....	29
<b>3.3 Aplicación de la prueba</b> .....	31
<b>3.4 Análisis de la prueba</b> . .....	33
<b>3.6 Entrevistas</b> .....	37

<b>Capítulo 4</b> .....	38
<b>Resultados y análisis</b> .....	38
<b>4.1 Análisis de la Prueba.</b> .....	38
<b>4.2 Clasificación de respuestas de acuerdo con las categorías emergentes.</b> .....	62
<b>Capítulo 5</b> .....	65
<b>Hallazgos y conclusiones</b> .....	65
<b>5.1 Dificultades manifestadas por los estudiantes para representar algebraicamente problemas de palabras.</b> .....	65
5.1.1 Uso inadecuado de signos de operación.....	65
5.1.2 Procesos de traducción de enunciados. ....	65
5.1.3 Uso del signo igual.....	66
5.1.4 Aceptación de la falta de clausura.....	67
5.1.5 Interpretación de las letras.....	68
5.1.6 Uso del lenguaje Natural .....	68
<b>5.2 Conclusiones y recomendaciones</b> .....	69
<b>Referencias</b> .....	73
<b>Anexos</b> .....	81

## Listado de Tablas

<b>Tabla 1.</b> Categorización general de los problemas de la Prueba	31
<b>Tabla 2.</b> Tabla general de resumen de resultados de cada pregunta.	34
<b>Tabla 3.</b> Resumen de resultados de la pregunta 1.	39
<b>Tabla 4.</b> Resumen de resultados de la pregunta 2.	42
<b>Tabla 5.</b> Resumen de resultados de la pregunta 3.	45
<b>Tabla 6.</b> Resumen de resultados de la pregunta 4.	47
<b>Tabla 7.</b> Resumen de resultados de la pregunta 5.	50
<b>Tabla 8.</b> Resumen de resultados de la pregunta 6	53
<b>Tabla 9.</b> Resumen de resultados de la pregunta 7.	58
<b>Tabla 10.</b> Resumen de resultados de la pregunta 8.	61
<b>Tabla 11.</b> Clasificación de las preguntas de acuerdo con las categorías emergentes.	64

## Listado de Figuras

<i>Figura 1.</i> Ejemplo de problema de representación gráfica.....	28
<i>Figura 2.</i> Confusión de la letra “ye” con la conjunción y. ....	30
<i>Figura 3.</i> Representación algebraica de un enunciado .....	40
<i>Figura 4.</i> Uso del lenguaje natural para representar el problema 1.....	41
<i>Figura 5.</i> Termino "aumento" como una potencia .....	43
<i>Figura 6.</i> Representación numérica.....	43
<i>Figura 7.</i> Interpretaciones del término "diferencia" .....	45
<i>Figura 8.</i> Letras ignoradas en el problema 3 .....	46
<i>Figura 9.</i> Representación del cociente como la división de dos números particulares. ....	47
<i>Figura 10.</i> Representación del cociente con otros signos.....	48
<i>Figura 11.</i> Representación inadecuada de la multiplicación. ....	50
<i>Figura 12.</i> Uso inadecuado de signos de operación en el problema 5 .....	50
<i>Figura 13.</i> Respuesta poco común del problema 5.....	51
<i>Figura 14.</i> ¿Qué es una ecuación? .....	51
<i>Figura 15.</i> Representación y solución del problema 6 .....	53
<i>Figura 16.</i> Interpretación del método usado por un estudiante al resolver el problema 6 .....	54
<i>Figura 17.</i> Representación del estudiante [E4] al problema 6.....	54
<i>Figura 18.</i> Interpretación equivocada de la equivalencia.....	55
<i>Figura 19.</i> Respuesta poco común. Uso de letras.....	56
<i>Figura 20.</i> Uso inadecuado de signos de operación en la representación del área de una figura. ....	58
<i>Figura 21.</i> Representación del área de un rectángulo.....	59
<i>Figura 22.</i> Interpretación y uso de signos de operación.....	61
<i>Figura 23.</i> Transliteración del enunciado de un problema. ....	66



## Resumen

En esta investigación se estudiaron dificultades manifestadas por estudiantes del grado noveno para representar algebraicamente problemas de palabras. El interés de la misma radica en que, a pesar que los estudiantes del grado noveno de educación básica colombiana, han tenido ya cierta formación en álgebra, presentan dificultades para representar algebraicamente problemas de palabras. Esto conlleva a que presenten bajo desempeño en el curso de álgebra del grado noveno y, eventualmente, en los posteriores cursos de matemáticas, tanto de educación media como universitaria.

Los datos reportados aquí se tomaron con un grupo de 100 estudiantes del grado 9° de una institución educativa oficial. A los estudiantes se les propusieron 8 problemas de palabras para que los expresaran mediante una expresión algebraica. Además de esta prueba se entrevistó a aquellos estudiantes cuyas respuestas se consideraron interesantes para indagar más sobre sus respuestas a la prueba escrita.

Del análisis de estos datos se encontraron dificultades o conflictos relacionados con el uso del signo igual, el significado de las letras, el uso y aplicación de las operaciones, los procesos de traducción de enunciados y la aceptación de la falta de clausura. Además, se identificó que el desconocimiento del lenguaje matemático por parte de los estudiantes, ocasionó que muchos de ellos no asociaran un signo de operación adecuado para representar las relaciones presentes en los problemas de palabras.

**Palabras clave:** problemas de palabras, álgebra escolar, representación

## Abstract

In this research, we studied difficulties manifested by ninth graders to represent algebraically word problems. The interest of this research, on one hand, is that although ninth graders, have already had some formation in algebra, they present difficulties to represent algebraically word problems; which means that they perform poorly in the course of algebra of

the ninth grade and in the later courses in mathematics, both at the middle school level and at the university level.

Data reported here were taken from a group of 100 ninth grade students attending a state educational institution. These students were given 8 word problems to translate into an algebraic expression. In addition to this test, an interview was applied to those students whose answers needed to be delved in to expand the answers given in the written test.

The data analysis revealed students' difficulties related to the use of the equal sign, the meaning of letters, the use and application of operations, processes of translation of statements and acceptance of the lack of closure. In addition, it was detected that the ignorance of the mathematical language on the part of some students, caused that many of them did not associate a sign of adequate operation to represent the built-in relations in the word problems.

**Key words:** Word problems, representation, school algebra



## Introducción

Entre las problemáticas asociadas con el aprendizaje matemático escolar se encuentran las dificultades manifestadas por los estudiantes para representar en lenguaje algebraico enunciados verbales. Cuando los estudiantes resuelven problemas de palabras suelen encontrar dificultades para representarlos mediante una expresión algebraica, lo cual no permite que lleguen a una subsecuente solución del problema. Los problemas generalmente no son resueltos debido a las dificultades para identificar las relaciones entre los datos y las incógnitas y para expresarlas simbólicamente, y no por las operaciones aritméticas o algebraicas que deben realizar (Sanjosé, Valenzuela, Fortes, & Solaz-Portolés, 2007).

Se presume que una mala experiencia con el álgebra y en particular con la representación algebraica de problemas de palabras podría impedir el acceso a niveles superiores de formación y podría ser un factor causante de que los estudiantes no continúen su formación matemática (Carifio & Nasser, 1994; Godino, Castro, Aké, & Wilhelmi, 2012). La repetición o deserción escolar ocasionadas por malas experiencias con el álgebra pueden ser un factor de exclusión social, en tanto que el álgebra es una puerta de entrada a niveles superiores de formación matemática (Kaput, 2000).

El aprendizaje del álgebra se vincula con el estudio de lenguaje matemático. Para aprender este lenguaje se requiere de la construcción de estratos abstractos a partir de estratos más concretos del lenguaje (Herscovics, 1980). Este proceso puede conllevar a conflictos de significado (Godino, Batanero y Font, 2009) en el uso de símbolos y operaciones cuyos significados en aritmética son diferentes a los significados en álgebra, lo cual puede ocasionar dificultades si no se hace una transición apropiada de un dominio matemático al otro.

Un gran número de estudiantes presenta dificultad en la traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico, para decidir sobre la prioridad de las operaciones o sobre el orden en que están expresadas verbalmente (Rivera, Leyva, Amado, & Brito, 2003; Rojas & Loaiza, 2013; Martínez, 2011). Existen términos que pueden tener sentidos contradictorios en el uso cotidiano y en el uso matemático escolar (Rivera et al., 2003). Asimismo, la falta de clausura en las operaciones algebraicas y la interpretación de las letras y el uso del signo igual ocasionan



inconvenientes al tratar de representar algebraicamente el enunciado de un problema, impidiendo, en muchas ocasiones que no se pueda llegar a la solución del mismo.

Estas dificultades se hacen notorias particularmente en el grado noveno (9°) de la educación básica colombiana, pues la mayor parte de las actividades matemáticas exige que los estudiantes representen algebraicamente enunciados dados en forma verbal para luego ser resueltos usando métodos algebraicos o gráficos.

El interés de esta investigación se centra en indagar sobre las dificultades manifestadas por los estudiantes cuando abordan un problema que requiere de la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Si bien el interés de la investigación no es mejorar inmediatamente el rendimiento académico de los estudiantes, sí se pretende aportar conocimiento que puede ayudar a abordar las dificultades de formación matemática en el nivel escolar correspondiente al noveno grado de la educación secundaria.

El presente estudio comprende la aplicación de una prueba escrita y una entrevista a estudiantes de 9° grado de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro del municipio de Silvia localizado en el departamento del Cauca, Colombia. Tras aplicar la prueba y las entrevistas se identificaron dificultades en la representación algebraica de problemas de palabras que obstaculizan la posterior solución de los mismos.

El texto de la memoria de maestría está dividido en 5 capítulos. En el primer capítulo, se plantea el problema de investigación y se describen los objetivos de investigación. En el segundo capítulo, se describen brevemente los fundamentos teóricos en los que se basa la investigación. En el tercer capítulo se describe la metodología utilizada en el desarrollo de la investigación. Ya en el cuarto capítulo, se analizan los datos teniendo como base las categorías establecida para realizar el análisis de la información.

Finalmente, en el capítulo cinco, se describen los hallazgos de la investigación, se describen las conclusiones y se dan algunas recomendaciones para los docentes del área de matemáticas.

## Capítulo 1.

### Contextualización del problema

#### 1.1 El término Dificultad

De acuerdo con lo planteado por Godino, Batanero & Font (2007) en el marco del enfoque Ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática, una dificultad o un conflicto de significado<sup>1</sup> se asume como la diferencia en la interpretación de los significados asociados a los objetos matemáticos por los estudiantes (significado personal) y por la institución matemática (significado institucional). Adicional a esto, una dificultad se asocia con un significado, cuya interpretación por fuera de la institución matemática, afecta la comprensión de los objetos matemáticos, sus definiciones, sus procedimientos y sus usos. Así un significado asociado a un objeto matemático que puede ser sencillo, por ejemplo, considerar que el término matemático “cociente” se asocia a una “resta” numérica, lo denominaremos “dificultad” o “conflicto de significado”.

#### 1.2 Los problemas de palabras

Los problemas de palabras son un conjunto de problemas de enunciado verbal, cuya solución requiere o de la aplicación sucesiva de combinaciones de operaciones aritméticas elementales hasta obtener solución (método aritmético), o de la formulación de ecuaciones que se resuelven para obtener el resultado (método algebraico) (Cerdán, 2008).

Una propuesta de clasificación de los problemas de palabras podría ser: problemas de números, tiempo y viajes, mezclas, problemas lineales, problemas reducibles a ecuaciones cuadráticas, problemas de edades, problemas financieros y problemas de geometría. Sin embargo, tal clasificación no es exhaustiva y no ofrece todas las variaciones que los investigadores han considerado. Por ejemplo, Mayer (1981) clasificó mil problemas de palabras en familias; las primeras cuatro familias corresponden a problemas algebraicos de tasas (cantidad por tiempo, costo por unidad, porción por costo), problemas de números, de geometría, física y

---

<sup>1</sup> En este documento se usaran indistintamente los términos dificultad y conflicto de significado asumiendo la postura de Godino, Batanero y Font (2007).



estadística. Weaver & Kitsch (1988) clasifican los problemas de palabras en tres tipos: cantidad por cantidad, numéricos y geométricos.

En este documento se asumirán los problemas de palabras como aquellos enunciados verbales o gráficos que describen cuantitativamente una situación o un fenómeno en el cual se muestra la relación entre cantidades que pueden ser conocidas o desconocidas, cuyo propósito es determinar el valor de una o de varias de ellas (Cerdán, 2008)

Cerdán (2008) discute la ruta tradicional de la enseñanza del algebra a través de la solución y formulación de problemas.

La consideración de la solución de problemas verbales como una vía de aproximación al álgebra conlleva el estudio de la transición de la aritmética al álgebra, así como de la transición del sistema matemático de signos y los métodos para resolverlos.

Carifio y Nasser (1994) consideran que los problemas de palabras tienen dos estructuras: una, la profunda, vinculada con las ecuaciones que representan las relaciones formales, y otra superficial que considera la estructura sintáctica de la ecuación formal. En esta dirección, Cerdán (2008), afirma que un problema puede tener varias estructuras profundas que dependen de las relaciones entre las cantidades del problema.

Las relaciones aritméticas entre las cantidades involucradas en los problemas pueden ser aditivas, multiplicativas o de proporcionalidad si se trata de problemas de la vida cotidiana, pero si estos están en contextos matemáticos puede haber relaciones de divisibilidad, sistemas de numeración, progresiones, geométricos, etc. en los cuales generalmente se relacionan tres cantidades.

Identificar las relaciones existentes en el problema conlleva a un proceso de traducción que implica abordar el texto del problema y transformarlo hasta llegar a una expresión aritmética o algebraica que represente las relaciones de las cantidades del problema y pueda ser resuelto. De acuerdo con Puig & Cerdán (1990), este proceso de transformación puede iniciarse en la



construcción de un texto intermedio que muestre las relaciones y luego pasar a las ecuaciones correspondientes.

La resolución de problemas de palabras constituye un tema de gran dificultad para los estudiantes. Estas dificultades están relacionadas con dos aspectos: El semántico que suele referirse a aspectos contextuales del problema que aportan información para la comprensión del mismo y, el otro aspecto refiere tanto la identificación de relaciones entre los datos y las variables como a su representación mediante una expresión aritmética o algebraica.

Estas dificultades han concentrado la atención de investigadores como Cerdán (2010), Carifio & Nasser (1994), Clement (1982), Filloy & Rojano (1989), Palarea (1998), Socas (1997), Sanjosé, Valenzuela, Forte & Solaz-Portolés (2007) y centra el interés de esta investigación.

### **1.3 Sobre el problema de investigación.**

De acuerdo con la práctica escolar y con algunos investigadores (Kieran, 2004; Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006; Molina, 2006; Molina, 2009); en el álgebra escolar se presentan dificultades que interfieren en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos. Por su parte Socas (1997) informa que estas dificultades están asociadas con aspectos como la complejidad de los objetos matemáticos, los procesos de pensamiento matemático, los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, actitudes asociadas con los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y las dificultades asociadas con actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Así mismo, Rico (1997) establece que las dificultades en el aprendizaje se localizan principalmente en la descontextualización y abstracción de los contenidos, la utilización de un lenguaje formal, la valoración del producto, ignorando el proceso seguido y la metodología deductiva, instructiva y repetitiva y el abandono tanto de la creatividad como de la originalidad.

Adicionalmente entre las dificultades asociadas con el aprendizaje de las matemáticas, se encuentran aquellas manifestadas por los estudiantes para expresar en lenguaje algebraico,





enunciados presentados en forma verbal o escrita. Los problemas de palabras, generalmente no son resueltos por el estudiante debido a las dificultades para expresar simbólicamente las cantidades y las relaciones entre ellas, y no por las operaciones aritméticas o algebraicas que deben realizar (Sanjosé, et al. 2007).

De acuerdo con la propuesta curricular colombiana<sup>2</sup> (MEN, 2006, pp. 87), la resolución de problemas de palabras es una de las competencias que se deben alcanzar los estudiantes en los cursos de álgebra de octavo y noveno grado. La representación de problemas de palabras en lenguaje algebraico es una de las competencias matemáticas que suele estar asociada al buen desempeño en matemáticas. El poder de representar algebraicamente es una característica que será usada posteriormente en otros cursos del currículo como a lo largo de la vida académica de los estudiantes en cursos de matemáticas superiores tales como cálculo, geometría analítica, análisis matemático, álgebra lineal, en cursos relacionados con ciencias como la física o en aquellos que tienen que ver con la rama empresarial.

Las dificultades para representar algebraicamente problemas de palabras suelen crear sentimientos de tensión, miedo hacia el álgebra y cierta aversión hacia su estudio, sentimientos que se extienden hacia el estudio de las matemáticas y hacia el reconocimiento de su valor en la sociedad contemporánea, lo cual exacerba aún más las dificultades por la falta de interés (Palarea, 1999).

Así mismo Gómez-Chacón (1998); Palarea (1999); Gasco & Villarroel, (2013) expresan que las emociones juegan un papel importante en el aprendizaje llegando en dichas ocasiones a afectar el aprendizaje. Del mismo modo Carifio & Nasser (1994), Godino et. al, (2012) expresan que una mala experiencia con el álgebra, y en particular con la representación algebraica de problemas de palabras impide el acceso y permanencia en niveles superiores de formación.

Los eventuales índices de pérdida, repetición o deserción escolar se convierten entonces en un factor de exclusión social, en tanto que el álgebra es una puerta de entrada a niveles

---

<sup>2</sup> De acuerdo con los planes de estudio de las instituciones educativas, los cuales se basan, además de los lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias del MEN, en las propuestas de los libros de texto escolares.



superiores de formación matemática (Kaput, 2000). La insuficiencia para representar problemas de palabras o situaciones cotidianas en lenguaje algebraico, y el fracaso para obtener niveles de competencia exigidos por la escuela podría ocasionar que muchos estudiantes abandonen el sistema escolar, afectando así sus posibilidades de ascenso en el sistema educativo, y eventualmente negando las oportunidades de acceder a niveles superiores de formación técnica o profesional.

De otro lado, las dificultades en el aprendizaje del álgebra están asociadas, en parte, con la complejidad de sus objetos (Palarea, 1999, Palarea & Socas, 1995). Estos operan en dos niveles: el semántico puesto que operan con un significado claro y preciso, y el sintáctico dado que pueden ser operados mediante reglas sin hacer referencia directa a ningún significado.

Los errores en el uso de los signos, observados en el aprendizaje del álgebra, tales como, la limitada interpretación del signo igual, las concepciones de los alumnos acerca del significado de las letras utilizadas como variables, el rechazo de expresiones no numéricas como respuestas a un problema y la no aceptación de la falta de clausura, han sido atribuidas a la inherente abstracción del álgebra y a dificultades de orden curricular y epistémico (Brizuela & Schliemann, 2003; Schliemann, et al., 2003).

Con respecto a la interpretación del signo igual (“=”), en aritmética está asociada con el resultado de una operación en cuya escritura, generalmente, a la izquierda se escribe la operación y a la derecha el resultado. Los estudiantes trasladan este significado ‘aritmético’ al álgebra y lo confunden con el sentido de la igualdad de una ecuación (Palera, 1999; Molina, 2005; Palarea & Socas 1994). Godino y Font (2003) señalan que según la naturaleza de los elementos que aparecen en una igualdad numérica, el signo igual puede corresponder a una identidad, a una ecuación, o a una fórmula. Su significado puede cambiar en una expresión, puede pasar de una igualdad funcional a una igualdad numérica sin que ello sea percibido por los estudiantes.

En cuanto a la interpretación de las letras, Küshemann (1981) identificó 6 tipos de significados: 1) Evaluada, 2) Ignorada, no utilizada, 3) Como objeto, 4) Como incógnita específica, 5) Como número generalizado y 6) Como variable. De acuerdo con Küshemann, el



estudiante suele tener dificultades para reconocer estos significados, ocasionando con esto que los confundan cuando transitan de un enunciado verbal a un enunciado algebraico y viceversa.

También se observa que la notación usada en las operaciones tiene acepciones diferentes, mientras que en aritmética un signo de operación indica una acción que se va a realizar entre números y que está asociada con otro número llamado resultado, en álgebra los signos de operación tienen un carácter de representación, pues indican operaciones que no siempre se concluyen o se realizan (Palarea, 1999).

El estudiante no sólo necesita entender y negociar con los significados de los símbolos matemáticos y la polisemia del vocabulario sino también interpretar los términos cotidianos en función tanto de los significados matemáticos como del contexto en el cual se ubican. Arcavi (1994) sugiere que es posible que algunos errores de los estudiantes no se originen en comprensiones erróneas de los conceptos matemáticos sino en ‘trampas lingüísticas’. Estas “trampas lingüísticas” se pueden ubicar en dos categorías: las que son propias de la simbología matemática y las que provienen de los procesos de traducción de palabras a símbolos.

Se estima que ciertos hábitos inconscientes y procesos cognitivos propios del lenguaje natural pueden crear conflictos con los procesos que requieren del lenguaje formal pero que hace uso de aspectos del lenguaje natural. Por ejemplo, cuando se afirma que “x es tres veces más que y”, la propuesta usual de los estudiantes es: “ $x = y + 3$ ”; recurren así a una estructura aditiva, en lugar de a una estructura multiplicativa del tipo “ $x = 3y$ ”.

Por su parte, Malara y Navarra (2003) proponen que entre los problemas que enfrentan los estudiantes está el entender: a) ¿Por qué debe usarse el lenguaje simbólico?; b) ¿Cuáles reglas son las que cumplen ese lenguaje simbólico? y c) La diferencia entre resolver y representar.

Las dificultades relacionadas con el aprendizaje del álgebra, y particularmente con el proceso de traducción de problemas de palabras a expresiones algebraicas, son muy notorias cuando el estudiante aborda el álgebra curricular de grado noveno. En este grado se pide que los estudiantes representen algébricamente enunciados dados en forma verbal para luego ser resueltos usando métodos algebraicos o gráficos.



Así mismo, parte de las dificultades en los cursos iniciales de matemáticas universitarios están asociadas con deficiencias en los conocimientos teórico-básicos relacionados con el álgebra. Los estudiantes suelen manifestar dificultades en la comprensión de lectura más aún cuando deben interpretar términos que suelen tener sentidos contradictorios en el uso cotidiano contrastado con el uso matemático escolar (Rivera, et al., 2003). Un porcentaje alto de estudiantes manifiesta dificultades tanto en la traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico como en la toma de decisión sobre la prioridad de las operaciones o sobre el orden en que están expresadas verbalmente (Rivera, et al., 2003; Rojas & Loaiza, 2013; Martínez, 2011).

El hecho que los estudiantes tengan deficiencias en las competencias necesarias para afrontar el estudio de las matemáticas en la universidad, se traduce en bajos porcentajes de promoción y altos niveles de deserción temprana, dado que las matemáticas son parte esencial de la formación de la mayoría de carreras profesionales (López, 2005).

De acuerdo con los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional, se espera que en las pruebas Saber 9, los estudiantes alcancen en los niveles<sup>3</sup> ‘avanzado, satisfactorio y mínimo’ desempeños como: utilizar el lenguaje verbal y la representación gráfica para modelar situaciones problema; pasar de la representación algebraica a las propiedades de una función o sucesión y viceversa; establecer relaciones entre expresiones numéricas y expresiones algebraicas y construir tablas a partir de expresiones algebraicas sencillas (ICFES, 2013).

Como resultado de las pruebas nacionales que valoran las competencias, el 44 % de los estudiantes, de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro, ubicada en el municipio de Silvia, en el departamento del Cauca, se encuentran en ‘nivel insuficiente’ en los resultados de las pruebas Saber 9°, 2013<sup>4</sup> (ICFES, 2014). De acuerdo con estos resultados, una gran parte de los estudiantes obtuvieron puntuaciones bajas en tareas relacionadas con el Pensamiento Numérico y con el Pensamiento Variacional. Las pruebas incluyeron tareas que

---

<sup>3</sup> El Ministerio de Educación Nacional (MEN), a través del Instituto Colombiano para el fomento de la educación superior ICFES, realiza a todos los estudiantes de los grados 3°, 5° y 9° unas pruebas anuales denominadas Saber, la cual mide los desempeños de los estudiantes en lenguaje, matemáticas, ciencias naturales y competencias ciudadana. Estos desempeños se miden en cuatro niveles: Insuficiente, mínimo, satisfactorio y avanzado. (Antes del 2012 las pruebas Saber se realizaban cada 3 años)

<sup>4</sup> Obtenido de <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jsp>



requieren el reconocimiento de regularidades y traducción de problemas de palabras, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia, conceptos y procedimientos asociados con la variación directa, la variación lineal en contextos aritméticos y geométricos, la variación inversa y el concepto de función, entre otros; todos ellos necesarios en los procesos de representación algebraica de enunciados verbales.

De acuerdo con el informe del ICFES (2013), en esta prueba los estudiantes de la institución educativa obtuvieron resultados bajos en las competencias<sup>5</sup> de razonamiento y argumentación, y resolución de problemas. Estas competencias permiten al estudiante justificar estrategias y procedimientos para el tratamiento de situaciones problema. Entre estas competencias se encuentran los procesos de generalización de propiedades y de relaciones, identificación de patrones para expresarlos matemáticamente, traducción entre problemas de palabras a su expresión matemática y la generalización de estrategias de solución para dar respuesta a nuevas situaciones problema, entre otros.

En años anteriores, en los resultados nacionales en el área de matemáticas, alrededor del 73% de los estudiantes examinados obtuvieron puntajes inferiores a los 45 puntos en la prueba Saber 11<sup>6</sup> (ICFES, 2003). En el año 2012, el puntaje promedio obtenido por los estudiantes de la institución correspondió a 46 puntos que corresponde al nivel de desempeño medio. En cuanto a las pruebas Saber 9, en el 2009, el 26% de los estudiantes del país puntuaron en nivel insuficiente, el 52% en el nivel mínimo y sólo el 3% en nivel avanzado (ICFES, 2010). Lo que indica que hay una parte considerable de los estudiantes colombianos que no alcanza los niveles mínimos, propuestos por la autoridad educativa, en el área de Matemáticas.

Parece ser claro que a los estudiantes del grado 9° se les dificulta expresar algebraicamente problemas de palabras, a pesar que en los grados anteriores sido expuestos, según la organización curricular del área de matemáticas, a tareas que promuevan la comprensión de procesos de

---

<sup>5</sup> Se evalúan las cinco competencias matemáticas: comunicación, modelación, razonamiento, planteamiento y resolución de problemas, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. En la construcción de las pruebas estas competencias se reagruparon así: el razonamiento y la argumentación; la comunicación, la representación y la modelación; y el planteamiento y resolución de problemas. En estas últimas quedan inmersas, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

<sup>6</sup> De acuerdo con el ICFES, los puntajes inferiores a 45 puntos se encuentran en desempeño bajo.



generalización, representación, y construcción de algoritmos que favorecen la comprensión de algunos aspectos del álgebra.

Por otra parte, asumiendo que los estudiantes del grado 9° se encuentran en edades comprendidas entre los 13 y 15 años, de acuerdo con Piaget & Inhelder (1982) deberían poder realizar razonamientos abstractos o del tipo hipotético-deductivo, pues en esta etapa los sujetos deben disponer de estructuras cognitivas básicas que favorezcan la representación de expresiones verbales en lenguaje simbólico que promuevan la traducción de expresiones presentadas en lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa.

Atendiendo a los aspectos mencionados anteriormente y a la problemática descrita en el aprendizaje del álgebra escolar, se pretende investigar sobre las dificultades que manifiestan estudiantes de grado noveno, de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro, para representar algebraicamente problemas de palabras. La pregunta de investigación que se plantea es: ¿Cuáles dificultades manifiestan estudiantes del grado 9°, de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro, Silvia, Cauca, para representar algebraicamente problemas de palabras?

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo General**

Identificar dificultades -conflictos de significado- manifestados por estudiantes del grado 9°, de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro en Silvia, para representar algebraicamente problemas de palabras.

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

1. Seleccionar problemas de palabras para estudiar la representación algebraica de problemas de palabras manifestadas por estudiantes de noveno grado.
2. Analizar las representaciones de problemas de palabras usadas por los estudiantes del grado 9°.



3. Caracterizar las dificultades -conflictos de significado- manifestadas por los estudiantes en sus representaciones de los problemas de palabras.

Si bien la solución de problemas escolares referidos a la traducción de problemas de palabras a expresiones algebraicas es tan solo una parte del panorama problemático descrito, este trabajo centrará el interés en estudiar las dificultades manifestadas por estudiantes al representar algebraicamente un problema de palabras.

Se considera que el estudio propuesto aportará nuevo conocimiento tanto de carácter teórico como práctico que será útil a la comunidad de investigadores y a la comunidad de profesores de secundaria. Si bien el interés de la investigación no es mejorar inmediatamente el rendimiento académico de los estudiantes, sí que se puede aportar conocimiento que podría ayudar a abordar las dificultades de formación matemática en el nivel escolar correspondiente al noveno grado de la educación secundaria.

Los resultados de la investigación aportarán información a los profesores de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro sobre las dificultades de los estudiantes y eventualmente se podrían sugerir estrategias para mejorar los procesos de enseñanza del álgebra en su parte correspondiente a la solución de problemas de palabras.

## Capítulo 2

### Estado del arte y marco teórico

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares del Área de Matemáticas (MEN, 1998) el estudio del álgebra escolar abarca la generalización de patrones aritméticos que posteriormente se convertirán en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de razón y de cambio. Por tal motivo es importante que se involucre en el aula de clase el uso comprensivo de la variable con sus diferentes significados, la interpretación y modelación de igualdades y ecuaciones, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas de resolución de problemas.

Por otra parte, Godino, et al. (2012), sugieren que el simbolismo es el lenguaje que expresa la generalidad propia del pensamiento algebraico, resultando difícil para muchos estudiantes expresar algebraicamente dicha generalidad.

Estos autores sugieren también, que el pensamiento algebraico debe promoverse desde la educación en la escuela primaria, realizando una adecuada introducción de las reglas y procesos de la aritmética que permitan una posterior generalización, pues las dificultades en esta etapa posteriormente se trasladan a la apropiación de reglas y propiedades del álgebra.

De igual manera el MEN, por medio de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, hace hincapié en el propósito de enfocar la actividad matemática hacia la resolución de problemas de la vida cotidiana, donde el estudiante aprenda matemáticas, *haciendo matemáticas*, integrando el currículo a una variedad de problemas relacionados con el contexto, lo cual es apoyado por Godino, et al. (2012) cuando hablan del desarrollo del razonamiento algebraico.

#### 2.1 Problemas de tipo aritmético y algebraico

Los problemas de la familia de problemas aritmético-algebraicos se consideran dentro de los currículos de matemáticas, como aquellos que presentan descripciones cuantitativas de situaciones en las que un sujeto puede encontrarse en la vida cotidiana, a pesar de que sean resueltos siguiendo las reglas propias de los problemas escolares.





Pero ante el cuestionamiento de, ¿qué es lo que hace que un problema sea considerado más algebraico que aritmético? o viceversa, diversos investigadores (Puig & Cerdán, 1990; Cerdán, 1993, 2008; y Palarea & Socas, 1995) plantean que la diferencia radica en el sistema de representación o del método que se escoge para su resolución. Cabe afirmar que un problema puede ser valorado como aritmético o algebraico por la naturaleza de la relación entre variables y datos, pero puede ser resuelto por un método aritmético o algebraico. La atribución de un tipo de rótulo al problema difiere de la solución dada por los estudiantes.

Para los fines de la investigación que se pretende realizar, cuando se refiera a problemas algebraicos o problemas de álgebra elemental, se hará en un sentido curricular, es decir, a aquellos problemas de aritmética y de álgebra, que pueden ser resueltos utilizando métodos aritméticos o métodos algebraicos.

## **2.2 Con respecto a los problemas de palabras**

Los problemas de palabras son un conjunto de problemas de enunciado verbal que se resuelven aplicando sucesivamente combinaciones de operaciones aritméticas elementales hasta obtener solución (método aritmético), o a través de la formulación de ecuaciones que más tarde se resuelven para obtener el resultado (método algebraico) (Cerdán, 2008).

Teniendo en cuenta la consideración de Cerdán sobre los problemas de palabras, para estudiar las representaciones que hacen los estudiantes, en este informe de investigación de maestría se han incluido además problemas de enunciado gráfico o icónico, debido a que la representación de este tipo de problemas también aporta información sobre las dificultades que tienen los estudiantes en la representación algebraica.

De acuerdo con las investigaciones realizadas por Puig y Cerdán (1990), Nathan, Kintsch & Young (1992), Cerdán (2008) y Mayer (1981, en Weaver & Kintsch, 1988) con respecto a los problemas de palabras, estos se pueden clasificar en: problemas de números, tiempo y viajes, mezclas, problemas lineales, problemas reducibles a ecuaciones cuadráticas, problemas de edades, problemas financieros, problemas de física, de estadística y problemas de geometría.



Esta clasificación de problemas de palabras depende de las relaciones entre los elementos y las variables presentes en cada uno, no corresponde a una clasificación exhaustiva y es apenas una ilustración de la amplia gama de problemas que se consideran como *Problemas de palabras*.

Sin importar la clasificación a la cual pertenezcan los problemas de palabras, su solución constituye un tema de gran dificultad para los estudiantes, debido a que ellos deben recurrir al planteamiento de una o más ecuaciones y aplicar estrategias, operaciones y propiedades para llegar a su solución. Esto demanda una gran cantidad de inferencias y la activación de conocimiento previo específico conceptual, situacional, procedimental, estratégico y esquemático (Solaz-Portolés & Sanjosé, 2007; Nathan, Kintsch & Young, 1992). Por su parte Godino, Batanero & Font (2009) afirman que la resolución de problemas se convierte en un mega proceso debido a que requiere del desarrollo de procesos más elementales como la representación, la argumentación, la idealización y la generalización.

Por su parte Castro (2008) afirma que, de acuerdo con el enfoque del procesamiento de la información, la resolución de problemas de palabras abarca dos procesos mentales básicos: la representación del enunciado que implica la comprensión de la información suministrada en el problema y las estrategias que se deben hacer para llegar a la solución del mismo. Estas dos fases constituyen las dos etapas principales en la solución del problema: la comprensión y la solución.

La representación de las relaciones entre los elementos del problema en una expresión algebraica, supone las principales dificultades para resolverlo. Así lo corroboran Sanjosé, et al. (2007), al afirmar que los problemas generalmente no son resueltos por el estudiante debido a las dificultades para expresar simbólicamente las relaciones entre los datos y las incógnitas, y no tanto por las operaciones aritméticas o algebraicas que se deben realizar.

### **2.3 Uso de las representaciones**

En cuanto a la solución de problemas, las representaciones juegan un papel crucial, ya que se debe poder pasar de un problema representado en lenguaje natural, icónico o gráfico, a una expresión algebraica para solucionarlo a través de sucesivas transformaciones y operaciones



matemáticas, tal como lo expresan Filloy, Puig y Rojano (2008) cuando se refieren al paso desde el lenguaje natural hasta el sistema matemático de símbolos.

Es de destacar, que un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones diferentes, teniendo en cuenta que una representación no tiene sentido por sí sola, sino que debe contemplarse dentro de un sistema de significados y relaciones, en las cuales las representaciones se relacionan de manera densa unas con otras (Rico, 2009). Duval (1999a) manifiesta que existen representaciones internas y externas de un mismo objeto y que de la habilidad del sujeto para hacer un cambio o transformación entre estas dos clases de representaciones, facilita la comprensión del objeto representado por parte del sujeto.

Las representaciones externas están comprendidas por sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas, tales como la numeración en base diez, la notación formal algebraica, la recta numérica, la representación en coordenadas cartesianas o las palabras y expresiones del lenguaje ordinario. “Se considera que una representación es un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo (simbolizar, codificar, dar una imagen o representar)” (Godino, 2010, p.21). El objeto representado puede variar según el contexto o el uso de la representación.

Por otra parte, las representaciones internas son los constructos personales que tienen los sujetos para simbolizar un concepto matemático. Entre ellos se encuentran: el lenguaje natural, la imaginación visual y la representación espacial. Estas representaciones internas, pueden o no, tener semejanza con los sistemas externos de representación y son introducidas como una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que puede construir un estudiante sobre las representaciones externas. Este tipo de representaciones no se pueden detectar directamente, sino que se deben inferir a partir de conductas observables, del discurso o la producción de representaciones externas.

Cabe resaltar que las representaciones externas e internas son importantes para el proceso de comprensión, toda vez que las representaciones externas son indispensables para pensar y comunicar las ideas matemáticas a través de símbolos escritos, el lenguaje oral, dibujos y objetos



físicos. Por otro lado, para pensar sobre ideas matemáticas se requiere de representaciones internas que permitan operar sobre ellas y llegar a la conceptualización (Sfard, 1991). Es importante promover que los estudiantes desarrollen sistemas eficientes de representación interna coherentes con los sistemas de representación externa convencionalmente aceptados por las matemáticas.

Las representaciones internas o externas, sirven para trabajar en un determinado sistema conceptual y los modelos asociados con estos conceptos se consideran un pilar fundamental en la enseñanza de las matemáticas, debido al carácter abstracto de los objetos con que se opera. Vergnaud (2007) expresa que la representación se concibe como una actividad funcional, es decir como un proceso dinámico, o mejor, como un conjunto jerarquizado de procesos dinámicos, que está regida por la organización de la acción, la conducta, y más en general la actividad, siendo ella misma el producto de la acción y de la actividad, y permite una cierta simulación de lo real, y por lo tanto la anticipación.

## **2.4 Sistemas de representación**

Un sistema de representación se define como “un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto” (Fernández, 1997; p. 73). En cuanto a la solución de problemas, el mismo Fernández establece cinco sistemas posibles de representación:

- El sistema de representación de ensayo - error aplica la sustitución sistemática de valores numéricos para la incógnita, validando estos valores. En este sistema se usan notaciones numéricas y simbología aritmética, pero se establecen las relaciones entre valores conocidos y desconocidos del problema.
- El sistema de representación parte todo utiliza alguna de las siguientes reglas: combinación, igualación, cambio e igualación. Este enfoque es intuitivo y usa técnicas de recuento, hechos numéricos y métodos de recubrimiento. En este método se puede llegar a usar ecuaciones, pero no se usan las reglas sintácticas del álgebra sino operaciones aritméticas. En este método se tiene en cuenta el sentido de equivalencia en las ecuaciones.



- El sistema de representación gráfico emplea un sistema de representación visual: física, icónica, geométrica o diagramática que pueda representar las relaciones entre datos e incógnitas del problema sin recurrir a ningún otro elemento que se pueda considerar simbólico.
- El Sistema de representación simbólico se caracteriza por la utilización de lenguaje exclusivamente abstracto, usualmente alfabético, es decir algebraico. Se identifican las incógnitas y se expresan las relaciones mediante ecuaciones. Hay ausencia del uso de objetos concretos como dibujos o gráficos.
- El sistema de representación gráfico-simbólico es un híbrido entre el sistema gráfico y el simbólico, para representar las relaciones este sistema usa el lenguaje simbólico, pero con la ayuda de un gráfico o un dibujo donde se representan los datos y las incógnitas, identificando los elementos que intervienen en las relaciones y a veces las propias relaciones.

Por su parte Filloy, Puig & Rojano (2008) se refieren al sistema matemático de signos - SMS- como el sistema que permite representar matemáticamente las relaciones entre los elementos de un enunciado verbal por medio de signos conformados por números, letras y signos de operación.

Con el fin de mejorar el aprendizaje, Duval (1999b) manifiesta que es importante que se cuente con diferentes sistemas de representación del mismo objeto, pues la riqueza de representaciones de un objeto aumenta potencialmente la comprensión del mismo. Del mismo modo, la comprensión de determinado concepto requiere que el sujeto pueda pasar fácilmente de un sistema de representación a otro, siendo importante, que el sujeto no confunda la representación con el objeto representado.

## **2.5 Dificultades en la representación algebraica de problemas de palabras.**

Cuando un estudiante se enfrenta a la solución de un problema se encuentra con dificultades que están asociadas con diferentes factores tales como la cantidad de modelos mentales que deben ser construidos y procesados simultáneamente. Muchas de las explicaciones aportadas al campo de la solución de problemas proceden del análisis de la estructura semántica de los



enunciados habituales usados para enseñar y del modo en que dicha estructura semántica dificulta o facilita encontrar el conjunto de operaciones o el esquema matemático adecuado que represente la situación y conlleve a la solución del mismo (Sanjosé, et al. 2007).

Se dice además, que las fuentes de dificultades para la solución de problemas de enunciado verbal, se concentran en la construcción de los vínculos entre el modelo de la situación y en el proceso de traducción del lenguaje natural al lenguaje del álgebra. Por tanto, en una situación típica, los estudiantes de secundaria no presentarán mayores dificultades en el nivel del manejo algebraico, como en plantear las ecuaciones correctas. Sin embargo, una vez planteadas las ecuaciones, éstas serán resueltas correctamente por el estudiante (Sanjosé, et al.2007).

La comprensión semántica del enunciado y la identificación de la cantidad desconocida, según Castro (2008), son las principales fuentes de dificultad en la resolución de problemas verbales, pues se debe encontrar una representación coherente que corresponda a la situación planteada en el problema.

Particularmente, en cuanto a las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de traducción del enunciado de un problema, Solaz-Portolés & Sanjosé (2007), Cuoco (s.f) y Kieran & Filloy (1989) distinguen dos aspectos: detectar las relaciones entre los datos y las variables para expresarlas finalmente en una ecuación y el aspecto semántico que suele referirse a la interpretación del ‘contexto’ del problema que aporta información para su solución.

Entre las dificultades identificadas en investigaciones realizadas por Jupri & Drijvers (2016), Cerdán (2008), Cerdán (2010), Palarea & Socas (1994), Clement (1982) se evidencian:

- a. Relacionadas con las operaciones entre los términos de una expresión algebraica, las cuales involucran el uso de las propiedades distributiva, conmutativa, invertiva y el orden jerárquico de las operaciones. Además, el uso arbitrario de operaciones.
- b. La dificultad en identificar una letra en una expresión, como un número generalizado, como una variable o como una indeterminada.



- c. El rechazo a la falta de clausura en una expresión, pretender obtener un número como resultado de una expresión algebraica y no poder aceptar que una expresión algebraica no pueda ser simplificada.
- d. Dificultades con el uso del signo igual, no considerar el signo igual como un signo de equivalencia sino como la asociación entre una operación y su respuesta.
- e. Dificultades en la representación algebraica de un enunciado dado en lenguaje natural o gráfico.

De acuerdo con Cerdán (2008) y Clement (1982), entre las fuentes de dificultad en la representación del enunciado de un problema de palabras se encuentran:

- a. Usar letras como abreviaturas de las palabras clave del problema, que puede conllevar a usar una misma letra para representar datos diferentes.
- b. Traducir directamente las palabras del problema a símbolos, es decir, hacer la traducción sintáctica del enunciado sin analizar las relaciones entre los datos y las variables.
- c. Usar el signo igual para asociar o encadenar los pasos en la solución de un problema.

En el Enfoque Onto-Semiótico se reconoce el concepto de Conflicto de Significado, que refiere a diferencias entre los significados de los estudiantes- significado personal- y los significados institucionales- del profesor, de los libros de texto-. Las entidades primarias: lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos, sirven para identificar y reconocer los significados asociados a los diversos elementos que intervienen y que emergen durante la actividad matemática de los estudiantes (Castro, Godino y Rivas, 2011). En este trabajo reconocemos que los conflictos de significado son un constructo que ayuda a comprender las diversas acepciones que los estudiantes exhiben de los objetos matemáticos, y que favorecen reconocer la validez de ellos en tanto que determinan el desempeño de los estudiantes. Se ha usado de manera indistinta conflictos de significado y dificultades, dado que encontramos que son similares en sus acepciones, tanto en las de los diversos artículos revisados como en la propuesta de Godino y colaboradores.

## Capítulo 3

### Metodología

Para llevar a cabo la investigación se acudió a un diseño cualitativo, dado que este tipo de diseño permite la caracterización y la producción de datos descriptivos (Deslauriers, 2004). Para la investigación se analizaron formas de reconocimiento, expresión y validación manifestadas en las respuestas verbales y escritas de los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro, participantes del estudio. Así, este diseño permitió, tanto la propuesta de una serie de problemas de palabras que requerían de la representación algebraica para su solución y de la realización de entrevistas a estudiantes, cuya selección se realizó dependiendo de las respuestas a la prueba escrita.

Las dificultades para la traducción de problemas de palabras se analizaron en las producciones de los estudiantes participantes, a partir de las respuestas obtenidas de la prueba escrita y de los diálogos que surgieron en la entrevista con los estudiantes.

El tipo de entrevista realizado fue del tipo semiestructurado, en tanto que se incluyeron preguntas diseñadas con antelación y a partir de las respuestas de los estudiantes surgieron cuestionamientos posteriores. Las preguntas iniciales de la entrevista se generaron a partir de las respuestas que los estudiantes dieron durante la realización de cada tarea. La entrevista se aplicó de manera individual a aquellos estudiantes seleccionados después de hacer un análisis preliminar de las respuestas de la prueba escrita.

Los participantes del estudio fueron estudiantes matriculados en el grado 9° de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro, durante el año lectivo 2015. La institución educativa es de población mayoritaria<sup>7</sup>, de carácter mixto, ubicada en el municipio de Silvia en el departamento del Cauca. Las edades de los estudiantes oscilan entre los 14 y los 17 años de edad. Con el fin de obtener respuestas espontáneas y que los estudiantes no se sintieran presionados por la calificación, se les informó que la prueba no hacía parte de la evaluación académica del

---

<sup>7</sup> Esta es una denominación que da el Ministerio de Educación Nacional para las instituciones educativas que no tienen currículo especial como son las de población afrocolombiana y las, indígenas y que se rigen por los lineamientos y normatividad educativa emanada por el MEN.





curso de matemáticas. Si bien hay miembros de comunidades indígenas, no se consideró en esta investigación asumir su conocimiento ancestral y su eventual efecto en la formación matemática de los estudiantes, por varias razones; entre ellas se pueden mencionar que los estudiantes matriculados pertenecen a cuatro etnias diferentes; que su número-doce-era reducido en comparación con el resto de la población-98-; que acumulan nueve años de escolarización en la educación regular académica, y que nuestro problema versa sobre los problemas de representación algebraica de una población más amplia. Estudiar a esta población minoritaria sería interesante, pero no se abordó en esta investigación.

Los estudiantes seleccionados para la entrevista, fueron aquellos que aportaron respuestas que requerían ser ampliadas debido a que eran poco comunes de acuerdo con lo esperado para la prueba, y aquellos estudiantes que no respondieron alguna de las preguntas.

No se evaluó, ni la validez matemática, ni la formalización propuesta por los estudiantes en sus soluciones. El interés se enfocó en analizar las representaciones usadas por los estudiantes y las posteriores justificaciones dadas por ellos.

Atendiendo la pregunta de investigación se escogió un diseño cualitativo (Cohen, Manion y Morrison, 2000) en tanto que se indaga por el reconocimiento, la descripción y la formulación de conclusiones sobre las manifestaciones escritas por estudiantes de 9° grado cuando representan algebraicamente algunos problemas de palabras.

La investigación se realizará en siete fases:

*Fase 1:* Se recurrió a una revisión de investigaciones relacionadas con problemas de palabras con el fin de estudiar las problemáticas analizadas en dichas investigaciones, los contextos y la estructura de los problemas de palabras. Se buscaron problemas adecuados al nivel de escolaridad de los estudiantes del grado 9°, que permitieran observar dificultades de los estudiantes para representar algebraicamente los enunciados. Las categorías de estudio se enumeran en el apartado 3.5 de la tesis.



La revisión de la literatura se hizo sobre investigaciones desarrolladas alrededor del proceso de traducción de problemas de palabras, el estudio de problemas aritméticos y algebraicos (Cerdán 2008, 2010, Rodríguez, 2011); errores y dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar (Palarea, 1998; Socas, 1997, San José et al., 2007); comprensión del signo igual (Molina, 2006; Martínez, 2011; Puig, 1996; Puig y Cerdán, 1990; Clement, 1982); resolución de problemas verbales (Rodríguez, 2011; Filloy y Rojano, 1989); y el tipo de ejercicios y problemas planteados en los textos escolares para los grados 8° y 9° de la educación colombiana (Santillana, 2010a, 2010b). De esta revisión se extrajeron los problemas que se propusieron para la prueba escrita.

*Fase 2:* Una vez revisada la literatura relacionada con los problemas de palabras, se seleccionaron problemas de palabras que requerían de representaciones algebraicas para ser resueltos y que fueran coherentes con el nivel de escolaridad de los estudiantes del grado noveno. Teniendo en cuenta estos criterios, se seleccionaron 105 problemas de los que se estudiaron aspectos como: datos en el enunciado, relaciones establecidas entre los datos y posibles estrategias de solución. Estos problemas se categorizaron en problemas numéricos, geométricos, de tasas, de simbolización o de edades. Adicionalmente se estudió si la estrategia de solución podría ser de tipo algebraico o de tipo aritmético (Cerdán, 2008). Posteriormente se estudió la factibilidad de ser resueltos por los estudiantes de acuerdo con los procedimientos y con los conceptos requeridos para su interpretación y su análisis.

Estos problemas fueron sometidos a evaluación por investigadores de la Universidad de Colima,- Doctora Lilia Aké investigadora mejicana-, Universidad de los Lagos- Chile, Doctor Luis Pino-Fan-, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, Doctor Mauro Rivas Olivo reconocidos en el campo de la educación matemática, activos en la investigación sobre razonamiento algebraico elemental, ellos hicieron sugerencias y escogieron los problemas que finalmente fueron aplicados.

*Fase 3:* En esta etapa se aplicó una prueba piloto, la cual contenía 6 problemas de tipo numérico, algebraico, simbólico, geométrico y gráfico y tuvo una duración aproximada de 1 hora y media. En esta prueba participaron 36 estudiantes que estaban matriculados en el grado noveno



de una institución educativa de la misma región. La finalidad de esta prueba fue conocer de posibles inconsistencias en el planteamiento de los problemas y estimar el tiempo requerido para la solución de la misma. En este documento no se informa sobre los resultados de la prueba piloto; sin embargo, en la sección 3.2 se comentarán aspectos sobre su aplicación y su documento técnico se muestra en el Anexo 1.

*Fase 4:* Una vez realizada la prueba piloto, se realizó un análisis de los resultados de la misma, lo cual permitió mejorar los enunciados de las preguntas y proponer otras tareas que se consideraron pertinentes para obtener información de los estudiantes. Así mismo, se pudo tener información sobre el tiempo requerido para la aplicación de la prueba final al grupo de estudio.

*Fase 5:* Una vez revisados y ajustados los problemas, teniendo en cuenta la experiencia y datos obtenidos en la prueba piloto, se aplicó la prueba definitiva al grupo objeto de la investigación. Esta prueba, con 8 preguntas del mismo tipo de preguntas que la prueba piloto, se aplicó a 100 estudiantes, cuyo número corresponde a la cantidad de estudiantes matriculados en el grado noveno de la institución educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro, quienes respondieron de manera individual cada pregunta en un tiempo total aproximado de 2 horas. Previamente se solicitó autorización a la rectora de la institución para la realización de la prueba y se siguió el procedimiento de consentimiento informado (Anexo 2) para salvaguardar la integridad de los estudiantes. Si bien se planteó que los estudiantes tomaran menos tiempo para responder la prueba, la gran mayoría entregó a las dos horas.

*Fase 6:* Después de aplicada la prueba se hizo un análisis preliminar de las respuestas buscando aquellas soluciones complejas, difíciles de entender para el investigador o que hubieran omitido la respuesta. Posteriormente se identificaron los estudiantes a quienes se les pidió explicar o ampliar sus soluciones, En total fueron 18 estudiantes los seleccionados para la entrevista entrevistados previo diligenciamiento del consentimiento informado.

*Fase 7:* En esta fase se analizaron los datos, se identificaron criterios de agrupación y categorías de respuestas en correspondencia con las categorías a las que pertenecían los ejercicios planteados teniendo en cuenta la proximidad con la representación esperada y la



determinación de las relaciones entre los elementos presentes en los enunciados. Cada pregunta se agrupó de acuerdo con categorías de análisis que se presentarán en la sección 3.5. En esta etapa se detectaron dificultades que presentaron los estudiantes en la representación algebraica de los problemas de palabras. En el capítulo 4 se amplía la información correspondiente a esta fase.

### **3.1 Clasificación y Selección de problemas.**

Al revisar la literatura relacionada con investigaciones sobre problemas de palabras se hizo la selección de problemas adecuados al nivel de escolaridad de los estudiantes que requerían de la representación algebraica para su solución y que pertenecieran a alguna de las categorías que se expondrán más adelante.

La clasificación de estos problemas se hizo de acuerdo con la realizada por Cerdán (2008) y Nathan, Kintsch & Young (1992), en cuyas investigaciones se encuentran problemas de tipo numérico, algebraico, gráfico, geométricos, de relaciones lineales, de tasas y de mezclas. Esta clasificación depende de la información contenida en los enunciados, de las relaciones existentes entre los elementos de cada problema, la forma de representación y la forma de solución de los mismos. Además un problema puede estar clasificado en más de un tipo.

Los problemas de tipo numérico son aquellos cuyo enunciado se refiere a las relaciones entre números, por ejemplo ‘La diferencia entre dos números equivale a 20’ (Santillana, 2010a). Los problemas algebraicos corresponden a aquellos que en su enunciado contienen lenguaje algebraico y se requiere también de procedimientos de tipo algebraico para su solución: La diferencia de  $(2b+4a)$  y  $2b$  (Santillana, 2010). Los de tipo gráfico contienen información gráfica, numérica o ambos, por ejemplo ‘¿Cuánto pesa cada galón de aceite y cada saco de arroz en las siguientes balanzas?’(Figura 1) (Santillana, 2010b)



Figura 1. Ejemplo de problema de representación gráfica

Los problemas de tipo geométrico requieren del uso de conocimientos geométricos o presentan información con relaciones geométricas: En un triángulo, el ángulo mayor excede al menor en  $35^\circ$  y el menor excede en  $20^\circ$  a la diferencia entre el mayor y el mediano. Halla las medidas de los ángulos (Santillana, 2010b).

Un ejemplo de problemas de alcanzar es: *Un móvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 Km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 Km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.* (Tomado de Puig & Cerdán, 1990).

Problemas de relaciones lineales: *Lucía Gustín lega su fortuna a sus tres primas, María, Camila y Sofía. Ella da 15000 € de más a María que a Camila, pero da 5000 € de más a Sofía que a Camila, si su fortuna es de 158000 €, ¿Cuánto recibe María, Camila y Sofía?*;

Problemas de encontrar: *Dos aviones viajan aproximándose entre sí después de partir de ciudades que se encuentran a 1.170 kilómetros de distancia, a velocidades de 190 Km/h y 200 Km/h. Si la salida de ambos fue a la misma hora, ¿en cuántas horas se encontrarán?* (Santillana, 2010b).

Problemas de edades: *La edad actual de Susan es el triple de la edad de su hijo. Hace 6 años Susan tenía el doble de la edad que tendrá su hijo en 8 años. ¿Cuáles son las edades actuales de Susan y su hijo?* (Santillana, 2010a);

Problemas de mezclas que corresponden a las relaciones en las que se presentan combinaciones de cantidades y se requiere conocer por el valor de cada una de ellas: *Se quiere*



*mezclar dos tipos de café; uno cuesta \$5.200 el kilo y el otro, \$6.200 el kilo. Si se quiere obtener 100 kilos de café cuyo precio sea \$6.000 ¿Cuántos kilos de cada tipo se necesitan?* (Santillana, 2010b).

Y los problemas de tasas que se refieren a las relaciones existentes entre variables como, por ejemplo “*Pedro trabaja como mesero. Trabaja 6 horas en un día y gana 66 € en propinas. Si en un día de trabajo ganó 81.90 €, ¿Cuánto gana por hora de trabajo?*” (Nathan, Kintsch & Young, 1992).

Ésta no es la única forma de clasificar los problemas de palabras, ni tampoco es una clasificación exhaustiva; se tomó como referencia para realizar el posterior análisis de los datos. Esta clasificación fue realizada por los autores a manera de facilitar el análisis de los resultados de sus investigaciones.

La selección de los problemas se hizo abarcando las categorías de clasificación enunciadas anteriormente. Para cada problema se precisaron los elementos intervinientes en su solución, se resolvieron por métodos algebraicos o aritméticos, se determinó cuál era la representación esperada atendiendo a las relaciones existentes entre los elementos del problema y se estimó el tiempo requerido para su solución por parte de los estudiantes.

### **3.2 La prueba piloto.**

Con el fin de perfeccionar la prueba final, se aplicó una prueba piloto con 6 problemas previamente seleccionadas entre un conjunto de 105 problemas tomados de investigaciones relacionadas con el tema de los problemas de palabras como Nathan, Kintsch & Young (1992), Martínez (2011), Cerdán (2008), Weaver & Kintsh (1988), Puig & Cerdán (1990) y de libros de texto escolares “Hipertexto” del grado 8° y 9° (Santillana, 2010a, 2010b).

Teniendo en cuenta el tiempo requerido para resolver cada uno de los problemas y procurando que los estudiantes alcanzaran a resolver la totalidad de los problemas de la prueba, se escogieron 6 problemas clasificados en problemas de tipo numérico, algebraico, gráfico, geométrico, de mezclas, de tazas y de relaciones lineales que son los más empleados por los



libros de texto del grado noveno y que requirieran de los conocimientos y competencias matemáticas que deben tener los estudiantes de este grado de acuerdo con los estándares básicos de competencias (MEN, 2006) y de la programación de matemáticas para este grado.

Seleccionados los 6 problemas se procedió a aplicar la Prueba Piloto<sup>8</sup> a un grupo de 36 estudiantes de grado noveno de otra institución educativa del mismo municipio con características poblacionales similares (institución de carácter mixto, población mestiza, campesina e indígena, población mayoritaria contenidos programáticos en el área de matemáticas similares, currículo de acuerdo con lineamientos y estándares del MEN) (Anexo 1).

Antes de iniciar la Prueba Piloto se dieron las siguientes instrucciones: leer cada enunciado, representar usando lenguaje matemático (símbolos y signos), contestar cada pregunta en la hoja correspondiente y no borrar si se equivocaban. No se puso límite de tiempo para responder, pero tardaron una hora y media en resolver completamente la Prueba.

En esta Prueba Piloto se observaron algunas inconsistencias en la redacción de los enunciados que confundieron a los estudiantes. Una de estas inconsistencias ocasionó la confusión por el uso de la letra “ye” en la pregunta dos la cual interpretaron como una conjunción.

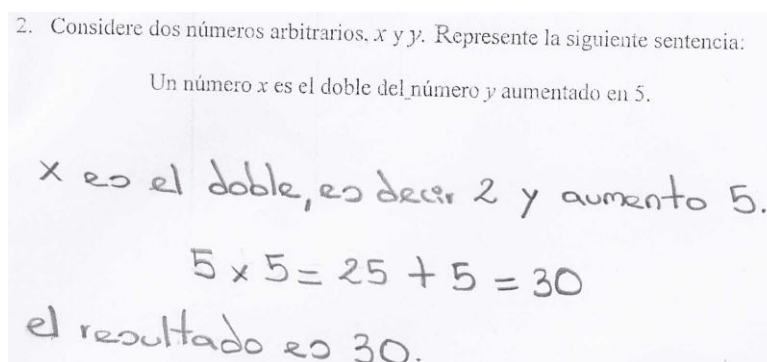


Figura 2. Confusión de la letra “ye” con la conjunción y.

<sup>8</sup> Ver en anexos el contenido de la Prueba Piloto



En la Figura 2 de puede observar que la representación dada por el estudiante al usar la letra “ye” como la conjunción “y”, ignoró la letra presente en el enunciado y representó como si el enunciado dijera: *un número x es el doble del número y aumentado en 5.*

Después de analizar las respuestas de la Prueba Piloto, se realizaron los ajustes correspondientes, se intentó evitar el uso de términos ambiguos, se amplió el número de preguntas a 8 con el fin de incluir un problema de tipo geométrico y de dividir aquellas preguntas que estaban conformadas por dos ítems.

### **3.3 Aplicación de la prueba.**

Una vez ajustada la prueba y validada por los investigadores en educación matemática, se aplicó a la población objetivo de la investigación que estuvo conformada por 100 estudiantes matriculados en el grado noveno de la institución educativa ya mencionada que asistieron el día de la prueba, previa autorización de la rectora de la institución y de la firma del consentimiento de los padres de familia.


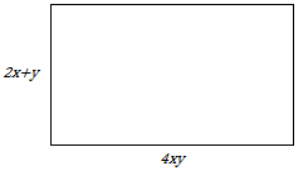
Esta Prueba constó de ocho preguntas de tipo numérico, algebraico o simbólico, geométrico y gráfico, cuya clasificación se muestra en la Tabla 1:

**Tabla 1.** Categorización general de los problemas de la prueba

<b>Número de pregunta</b>	<b>Enunciado</b>	<b>Tipo de problema</b>	<b>Tomada de:</b>
<b>1</b>	Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?	Numérica Algebraico	Martínez, 2011
<b>2</b>	Considere los números arbitrarios, x y z. Represente la sentencia: Un número x es el doble del número z aumentado en 5.	Algebraico	Santillana, 2010b
<b>3</b>	Traduce el enunciado en símbolos: La diferencia entre $(2b+4a)$ y $5b$	Algebraico	Santillana, 2010a
<b>4</b>	Traduce el siguiente enunciado en símbolos:	Numérico	Santillana, 2010b





	El cociente entre dos números es igual a 3		
5	Escribe la siguiente oración como una ecuación: “La energía E de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz v”	Algebraico	Santillana, 2010a
6	¿Cuánto pesa cada galón de aceite (oil) y cada saco de arroz en las siguientes balanzas?  	Gráfico Algebraico Sistemas de ecuaciones Lineales. Mezclas	Santillana, 2010b
	<b>Nota:</b> Las pesas al lado del aceite, pesan 10 kilogramos en la balanza del lado izquierdo y 2 kilogramos en la balanza del lado derecho.		
7	Escribe la expresión que represente el área de la siguiente figura:  	Geométrico Algebraico	Santillana, 2010b
8	Selecciona la expresión que represente el siguiente enunciado: En la bodega hay el triple de empleadas que de empleados. a. $m^3=h$ b. $3m=h$ c. $m=3h$ d. $3m+h$ e. $m= h^3$ f. $m=3+h$ g. $h= m+3$ Donde “m” representa número de mujeres y “h” representa número de hombres. <b>Nota:</b> si consideras que tu respuesta no está entre las anteriores, por favor escríbela y escribe tu comentario o explicación.	Algebraico Tasas	Adaptado de Santillana, 2010b



El grupo de 100 estudiantes, a quienes se aplicó la prueba, estaba compuesto por 59 mujeres y 41 hombres pertenecientes a los grupos poblacionales indígena, campesinos y mestizos. Para la investigación no se distinguió ni el género ni la etnia a la cual pertenecen los estudiantes<sup>9</sup>. La investigadora no fue la docente de los estudiantes examinados, esto se hizo con el fin de no generar tensión en los estudiantes y garantizar que su participación se hiciera de una manera libre, de tal manera que esta no se viera forzada por la calificación de la asignatura.

La prueba tuvo una duración de dos horas en las cuales los estudiantes resolvieron de forma individual cada una de las ocho preguntas escritas, una por hoja. Aunque se dio tiempo suficiente para responder todas las preguntas, hubo un total de 39 estudiantes que no contestaron algunas de las preguntas debido a las características de las mismas y no por falta de tiempo.

Antes de iniciar la prueba se recomendó: Leer atentamente cada uno de los enunciados, representar cada enunciado usando lenguaje matemático, escribir todo el proceso en la misma hoja del enunciado y en caso de equivocarse, no borrar, y responder cada pregunta en la hoja correspondiente. Además, se solicitó que contestaran la prueba de manera individual enfatizando en que los resultados no afectarían las calificaciones de matemáticas y se agradeció su participación, la cual era importante para el resultado de la investigación que se está desarrollando.

### **3.4 Análisis de la prueba.**

Para realizar el análisis de esta prueba, se hizo una clasificación inicial de las respuestas en: preguntas sin responder, respuestas ‘correctas’, ‘parcialmente correctas’ y respuestas ‘poco comunes’.

En las categorías correspondientes a las respuestas ‘parcialmente correctas’ y ‘poco comunes’ se analizó la interpretación y uso que tenían los estudiantes sobre el signo igual, el significado que daban a las letras y el uso e interpretación de las operaciones. Estas categorías se definieron teniendo en cuenta que Kieran y Filloy (1989), Palarea (1998) y Palarea y Socas

---

<sup>9</sup> No se tienen en cuenta el efecto que la cultura tiene sobre el aprendizaje de las matemáticas pues se considera una investigación a parte.



(1994) informan que estos temas a menudo son fuente de dificultad en el proceso de traducción algebraica. Adicionalmente, se analizaron las relaciones encontradas entre los elementos de cada enunciado.

Es pertinente aclarar que cuando se habla de respuestas ‘correctas’ se refiere a la proximidad de la respuesta del estudiante con la representación esperada en cada enunciado. Las respuestas ‘parcialmente correctas’ son consideradas como aquellas representaciones que, a pesar de contener casi todos los elementos del enunciado no presentan la representación esperada y las respuestas ‘poco comunes’ son aquellas que difieren mucho de la representación esperada o para las cuales no se logra identificar una relación coherente entre los elementos de la respuesta.

Para hacer el análisis de la prueba, las respuestas de cada pregunta se organizaron de acuerdo a la Tabla 2.

**Tabla 2.** Tabla general de resumen de resultados de cada pregunta.

<b>Enunciado:</b> (se escribe el enunciado de cada problema)		
<i>Tipo de enunciado: se refiere a si el enunciado es de tipo algebraico, numérico, gráfico, geométrico, si se analiza el uso del signo igual, el uso y significado de las letras y operaciones de acuerdo con la estructura de cada problema.</i>		
<i>Elementos del problema:</i>	<i>Expresión esperada:</i>	
Aquí se presentan los elementos que están presentes en cada problema y las relaciones existentes. Esto con el fin de facilitar el análisis de las respuestas.	Aquí aparece la expresión que se espera que los estudiantes propongan en sus respuestas teniendo en cuenta las relaciones entre los elementos de cada enunciado.	
<b>RESULTADOS</b>		
CONTESTADAS: Cantidad	SIN CONTESTAR:	Cantidad
Correctas		Cantidad
Incorrectas o poco comunes	Categoría Emergente	Cantidad
	Categoría Emergente	Cantidad
	Categoría Emergente	Cantidad
Parcialmente correctas	Categoría Emergente	Cantidad
	Categoría Emergente	Cantidad
	Categoría Emergente	Cantidad
	Categoría Emergente	Cantidad

De la aproximación a esta respuesta depende la clasificación principal de las respuestas de los estudiantes como correctas, parcialmente correctas, poco comunes y sin responder. La



comparación de las respuestas de los estudiantes con una ‘respuesta esperada’ no se hace para restringir el análisis, sino porque se requiere comparar los significados personales de los estudiantes con un representante del significado institucional. Esta comparación no se hace para determinar respuestas correctas o incorrectas, sino para identificar los ‘conflictos de significado’, es decir estamos interesados en conocer los significados atribuidos al lenguaje, símbolos, términos, operaciones que los estudiantes atribuyen y que eventualmente, altera la representación algebraica de las tareas matemáticas propuestas.

En la sección de la tabla rotulada como ‘resultados’ se encuentra el conteo de respuestas correspondientes a las preguntas contestadas, sin contestar, correctas, parcialmente correctas y poco comunes, indicando la cantidad en cada una de las categorías emergentes identificadas en cada respuesta. Cabe señalar que estas categorías emergentes corresponden a la particularidad de las respuestas de cada pregunta y por tanto no aparecen en todas las tablas de análisis de las preguntas.

Al finalizar cada tabla se realiza el comentario correspondiente ampliando la información suministrada en cada una de ellas, donde algunas de las afirmaciones se derivan de las entrevistas sostenidas con los estudiantes.

Con el fin de identificar las respuestas de los estudiantes, se ha usado la nomenclatura [En], donde n es el número con el cual se ha designado al estudiante.

### **3.5 Las categorías emergentes.**

Cuando se analizaron las respuestas se encontró que las categorías definidas *a priori* no daban cuenta de ciertas características que merecían ser estudiadas. Una vez analizadas las respuestas se propusieron varias categorizaciones posibles que fueron discutidas por el autor de este trabajo y el asesor del mismo. Después de varias propuestas, se llegó a una categorización que daba cuenta de las respuestas de los estudiantes. Las categorías son: transliteración; la no aceptación de la falta de clausura; representación numérica; letras ignoradas, uso inadecuado de



signos de operación y el uso del lenguaje natural. Cada una de estas categorías se describe a continuación.

*Transliteración:* se ha denominado así a la traducción sintáctica del enunciado, es decir, la traducción que se hace cuando se escriben números y signos en el orden de escritura de las palabras en el texto del enunciado sin tener en cuenta las relaciones existentes entre los elementos del problema. Clement (1982) la denomina como “Word Order Matching”.

*No aceptación de la falta de clausura:* de acuerdo con Socas & Palarea (1994) esta dificultad se debe a que a los estudiantes les cuesta valorar una expresión algebraica como un resultado de un problema, en este caso ellos recurren a operar erróneamente los términos en la expresión resultante del problema.

*Representación numérica:* se refiere a la representación con cantidades particulares de las relaciones entre los elementos presentes en el enunciado de los problemas, para luego operar hasta obtener un resultado numérico del problema en cuestión.

*Uso inadecuado de signos de operación:* se refiere al empleo de un signo de operación que no corresponde a la operación que representa la relación presentada en el enunciado del problema, o al hecho de realizar una operación distinta al presentado en una expresión. Por ejemplo, sumar los términos cuando hay una multiplicación en la expresión.

*Letras ignoradas:* de acuerdo con Socas & Palarea (1994), los estudiantes ignoran el significado que tienen las letras dentro de una expresión algebraica, en este caso operan los coeficientes sin importar las relaciones que hay en cada expresión.

*Uso del lenguaje Natural:* se refiere al hecho de expresar mediante enunciados verbales las relaciones entre los elementos del problema. En esta categoría también se encuentran el parafraseo que hacen los estudiantes del enunciado del problema, con el fin de tratar de dar explicación a lo que encuentran en el problema o de la respuesta del mismo.

Además de las categorías mencionadas en este apartado, surgieron otras que no se dan en todas las preguntas y se describirán en el Capítulo 4 en el análisis de cada pregunta.



### **3.6 Entrevistas.**

Con el fin de obtener más información sobre las representaciones usadas por los estudiantes y de conocer los motivos por los cuales no contestaron algunas preguntas, se seleccionaron a 18 estudiantes para ser entrevistados, 3 estudiantes de aquellos que no respondieron alguna pregunta y 15 cuyas respuestas poco comunes, para las cuales no se tenía una explicación factible, se requería indagar en detalle.

Se utilizó la entrevista semiestructurada o semi-dirigida (Deslauriers, 2004), para la cual se diseñó una guía de entrevista tendiente a indagar las cuestiones que se identificaron durante la fase 7 de análisis de datos. Se deseaba conocer sus interpretaciones sobre los enunciados presentes en la prueba escrita. Esta guía se puede ver en el Anexo 5.

Estas entrevistas se aplicaron al grupo de estudiantes un mes después de aplicada la prueba, debido a que se requería de un análisis preliminar de las respuestas, para seleccionar aquellas que se debían ampliar. Por motivos de disponibilidad de tiempo y recursos no se entrevistó a la totalidad de los estudiantes que presentaron la prueba.

En la aplicación de entrevistas se identificaron ciertos conflictos de significado que no se habían identificado durante el análisis preliminar de respuestas esperadas. Entre estos conflictos se tienen:

1. Desconocimiento del significado de ciertos términos del lenguaje matemático, por ejemplo, el de cociente.
2. Ambigüedad en el significado de algunas palabras como “diferencia”.
3. Uso inadecuado de los signos de operación.
4. Interpretación de los enunciados de las preguntas.

A pesar que en los enunciados de la prueba escrita se empleó un lenguaje verbal muy cercano al lenguaje cotidiano de los estudiantes, hubo problemas que no fueron resueltos por algunos estudiantes porque, según lo manifestaron durante la entrevista, no entendían lo que se pedía representar.



## Capítulo 4

### Resultados y análisis

En este apartado se agrupan las respuestas de los estudiantes de acuerdo con la clasificación general de análisis: sin responder, correctas, parcialmente correctas, y poco comunes. Con base en el estudio de las respuestas de los estudiantes surgieron categorías emergentes, que corresponden a categorías que no estaban contempladas anteriormente y que contienen elementos de información que se deben distinguir de las otras (Deslauriers, 2004). Las categorías surgieron mediante la revisión de las respuestas ‘parcialmente correctas’ y las ‘poco comunes’. A partir del análisis de las categorías *a priori* consideradas: el uso del signo igual, uso y significado de las letras, uso y signos operación, emergieron las siguientes categorías nombradas en la sección 3.5: la transliteración, la no aceptación de la falta de clausura, la representación numérica, letras ignoradas. Estas categorías emergentes dependen de cada pregunta por tanto no todas aparecen en el análisis de cada una de ellas.

#### 4.1 Análisis de la Prueba.

A continuación, se presenta y discuten cada una de las 8 preguntas incluidas en la prueba. Al final de cada tabla se comentan los resultados encontrados.

El análisis de las preguntas se basa en la interpretación y en el uso que los estudiantes hacen de las operaciones, el signo igual y de las letras, la interpretación de las relaciones entre los elementos de cada problema y la cercanía que tienen las respuestas de los estudiantes, con base en los elementos de análisis anteriores, con respecto a la expresión esperada.

**Tabla 3.** Resumen de resultados de la pregunta 1.

---

**Pregunta 1:**

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

*Tipo de enunciado:*

- Numérico
  - Uso de operaciones
  - Interpretación del signo igual.
-



- Igualdad abierta.

<i>Elementos del problema:</i>	<i>Expresión esperada:</i>
n: es un número	n.7+4=39
7: factor	
4: sumando	
39: resultado	

**RESULTADOS**

CONTESTADAS: 99	SIN CONTESTAR:	1
Correctas		5
Incorrectas o poco comunes	Uso del lenguaje natural	7
Parcialmente correctas	Representación Numérica	23
	Uso del igual como separador de pasos en la solución	60
	Escribe el número que corresponde a la respuesta	3
	Descripción de la respuesta usando lenguaje natural	1

En la Tabla 3 se muestra la distribución de las respuestas de los estudiantes con respecto a las categorías de análisis. De acuerdo con la clasificación de las respuestas de los estudiantes se encontró que en la pregunta 1 el 87% de los estudiantes realizaron representaciones parcialmente correctas; recurrieron a la tabla de multiplicar del 7 y buscaron un número que se aproximará al número dado y luego sumaron la cantidad que faltaba para llegar a 39. Ejemplo de ello se aprecia en la entrevista realizada al estudiante [E96]:

*Inv: Bueno, en esta pregunta se les pedía a ustedes: si multiplicamos un número por siete y le sumamos cuatro obtenemos el número treinta y nueve. ¿De qué número se trata?*

*Entonces tú dijiste: siete por cinco más cuatro... (Se muestra la hoja de respuestas)  
¿Cómo obtuviste el número cinco?*

*[E96]: ... pues... sabiendo las tablas de multiplicar, yo creo... sabiendo que siete por cinco da treinta y cinco..., y ya, más cuatro da treinta y nueve... entonces yo creo que es por saberme las tablas”*

Sólo el 5% de los examinados ofreció una respuesta aproximada a la representación esperada, la solución del problema no requiere el uso de una ecuación. Pero cuando se propone





un problema similar con cantidades mayores se recurre al uso de las ecuaciones, tal como se aprecia en la respuesta dada por [E96] durante la entrevista (Figura 3)

JRQ.

Si multiplicamos un número por 23 y le sumamos 13 obtenemos 956. (D)

$$x \cdot 23 + 13 = 956$$
$$x = ?$$

Figura 3. Representación algebraica de un enunciado

El 60% de los estudiantes, con respuestas parcialmente correctas, usaron el signo igual como un secuenciador-separador- de los pasos en la resolución del problema. En este caso usaron el igual como un signo que permitió vincular los resultados de las operaciones realizadas hasta llegar a la respuesta. Este porcentaje de estudiantes resolvieron el problema como lo hizo el estudiante [E99] en la Figura 4. Aquí él encadena cada paso de la solución con el signo igual. Parece que el signo igual se asume fuertemente con la idea de ‘resultado inmediato’, mismo que se debe realizar para continuar con el proceso. Este uso no corresponde ni al significado del signo igual como resultado ni como relación de equivalencia. Al significado de resultado se le anexa otro más: el de operación que se debe realizar en el acto, para continuar.

1. Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

$$7 \times 5 = 35 + 4 = 39$$

El número es (5)

Figura 4. El signo igual como secuenciador.



Aunque este uso del signo igual no se puede catalogar como un conflicto que impida encontrar el resultado correcto en un problema o en una ecuación, según Molina (2006) sí constituye una violación de las propiedades transitiva y simétrica de la igualdad en la representación de una ecuación. Este uso podría constituir una dificultad para resolver ecuaciones.

En la categoría de respuestas poco comunes o incorrectas se reconocieron dificultades tanto en el uso de lenguaje simbólico para representar el enunciado como en la identificación de la estructura relacional de las variables del problema. Esto se muestra en la solución dada por el estudiante [E64], Figura 5:

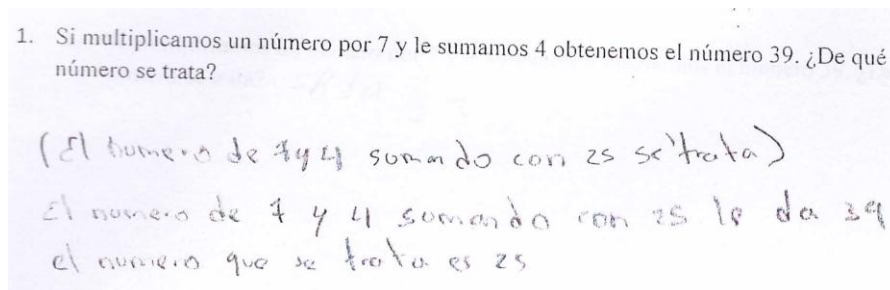


Figura 4. Uso del lenguaje natural para representar el problema 1.

Aquí el estudiante trata de explicar un procedimiento para obtener el resultado (39), y escribe los números 7 y 4 sin indicar símbolos operativos, y escribe ‘sumado con 25’ obtiene 39, para concluir que el resultado es 25. El estudiante no reconoce las relaciones existentes entre las cantidades presentes en el problema, tan solo identifica los números que, al parecer, deben ser operados para obtener un resultado numérico.

Tabla 4. Resumen de resultados de la pregunta 2.

<b>Pregunta 2:</b>	
Considere dos números arbitrarios, $x$ y $z$ . Represente la siguiente sentencia:	
<i>Un número <math>x</math> es el doble del número <math>z</math> aumentado en 5.</i>	
Tipo de pregunta:	
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Interpretación del signo igual.</li> <li>● Representación de operaciones aritméticas</li> <li>● Problema de tipo aritmético (una variable en un solo lado de la ecuación)</li> </ul>	
Elementos del problema:	Expresión esperada:
$x$ : resultado	



Es: igual	$x=2z+5$	
El doble: $2x$ (operador de $z$ )		
$z$ : número cualquiera		
5: adición		
<b>RESULTADOS</b>		
CONTESTADAS: 99	SIN CONTESTAR:	1
Correctas		0
Incorrectas o poco comunes	Uso de lenguaje natural	29
Parcialmente correctas	Uso incorrecto de operaciones	15
	Transliteración	34
	Representación numérica	21

Esta pregunta resultó de complejidad alta, produjo respuestas variadas no cercanas a la representación esperada. Si se compara esta pregunta con las demás, se aprecia que arrojó mayor cantidad de respuestas poco comunes, un 29% (Tabla 4).

Durante la entrevista, los estudiantes afirmaron no entender el enunciado o no poder representar las relaciones mencionadas; sin embargo, se evidenció que comprendían las relaciones involucradas en el problema en el ámbito numérico.

Por ejemplo, al solicitarles encontrar el doble de una cantidad numérica lo encuentran correctamente, pero cuando se pide lo mismo usando letras tienden a representar erróneamente la operación. Aun en grado noveno, los estudiantes manifiestan conflictos con el uso de las letras, las cuales parecen ser inconsistentes con interpretación como número generalizado sobre el cual opera, como incógnita, o como variable. Parece que para los estudiantes las letras y los números son incompatibles: una letra no representa un número.

En la mayoría de los casos representaron la expresión *el doble del número z* como  $zz$ , o como  $z^2$ . La expresión *aumentado en*, fue representada por algunos estudiantes como una suma, pero varios asociaron el aumento con una potencia, y lo representaron como:  $z^5$ . Por ejemplo cuando se le pidió a [E18] que representara la expresión: *un número x aumentado en 5* escribió  $x^5$ , y *5 aumentado en tres* escribió la respuesta que se muestra en la Figura 10.



$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$   
un número  $x$  aumentado en 5  
 $(x)^5$

Figura 5. Termino "aumento" como una potencia

En las respuestas parcialmente correctas se observó dificultad para representar algebraicamente el enunciado a pesar que éste daba información de las letras a usar. Es así como el 15% de los estudiantes asignaron valores particulares para representar el enunciado (Figura 6). Esto también puede estar asociado con uno de los errores reportados por Socas & Palarea (1998), que refiere a la representación algebraica conocido como el rechazo a la falta de clausura. La aparente necesidad de ver una expresión ‘cerrada’ mueve a que los estudiantes tiendan a operar de ‘alguna manera’ los términos para obtener un resultado. Si bien no se indago durante las entrevistas, parece que los estudiantes exhiben una creencia epistemológica particular muy interesante: la matemática obedece a reglas extrañas, mismas que ellos propone. Podría conjeturarse que en sus clases de matemáticas no han tenido muchas oportunidades de discutir la lógica deductiva ni la negociación de significados.

2. Considere dos números arbitrarios,  $x$  y  $z$ . Represente la siguiente sentencia:  
Un número  $x$  es el doble del número  $z$  aumentado en 5.  
 $z=8$   
 $x=16+5=21$

Figura 6. Representación numérica

El 34% de los estudiantes realizaron una transliteración o traducción sintáctica<sup>10</sup>, que consiste en escribir los términos en el orden en que aparecen en el enunciado sin tener en cuenta las relaciones existentes entre los elementos del problema, lo que condujo a que no escribieran la expresión esperada.

<sup>10</sup> Esto es lo que Clement (1982) denomina “Word Order Matching” en inglés.



Por otra parte, el 21% de los estudiantes asignó números a cada letra y realizó las operaciones indicadas obteniendo como resultado un valor numérico y no la expresión esperada. Llama la atención que los estudiantes reconocen aquí que las letras representan números, es decir letras como números generalizados. Sin embargo, en otros momentos parece que tal conocimiento no es usado por los estudiantes.

Al preguntar al estudiante [E68] la razón por la cual no contesto la pregunta, manifestó no entenderla, pero al solicitarle calcular el doble de una cantidad numérica lo hizo correctamente. Volviendo a indagar sobre la pregunta de la Prueba, el estudiante asignó valores numéricos a las letras y resolvió de la siguiente manera:

“el doble de  $z$ ...  $z$  es 2, entonces  $2+2=4$ . Si  $z$  es 4, entonces el doble de  $z$  aumentado en 5...  $4+5=9$ . X vale 9” [E68].

**Tabla 5.** Resumen de resultados de la pregunta 3.

<b>Pregunta 3:</b>	
Escribe el enunciado usando notación matemática:	
<i>La diferencia entre <math>(2b+4a)</math> y <math>5b</math></i>	
<i>Tipo de pregunta:</i>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Simbólica</li> <li>● Significado y uso de operaciones</li> </ul>	
<i>Elementos del problema</i>	<i>Expresión esperada</i>
2b, 4a , 5b: elementos a operar	
+ , -“diferencia”: operaciones suma y resta	$(2b+4a) - 5b$
( ) : agrupación de elementos	
$(2b+4a)$ : minuendo	
5b : sustraendo	
<b>RESULTADOS</b>	
CONTESTADAS: 95	SIN CONTESTAR: 5
Correctas	1
Incorrectas o poco comunes	1
Parcialmente correctas	5
	No aceptación de falta de clausura
	Letras ignoradas
	Representación alterna de la operación diferencia
	Uso inadecuado de signos de operación.
	Término ‘diferencia’ como comparación de características. (uso de lenguaje natural)
	39



En la Tabla 5 se muestra la clasificación de las respuestas de los estudiantes para la pregunta 3. En esta pregunta se identificó que los estudiantes no usan el lenguaje formal de las matemáticas. Esto se apreció cuando representan la diferencia entre los elementos dados. El 19% de los estudiantes representaron *la diferencia* usando el signo de una operación cualquiera (suma o producto), usando el conector ‘y’, otros emplearon el signo ‘<’ para notar que esos dos elementos son diferentes. Cuando se pidió al estudiante [E87] que representara la diferencia entre dos cantidades numéricas, usó el signo ‘<’ o ‘>’, y en la entrevista responde lo siguiente:

Inv. Tu afirmas que  $(2b+4a) < 5b$ , dime ¿por qué usaste este signo <?

[E87]: Si, es que... son diferentes... entonces si sumamos  $2b + 4a$  da igual a 6 y es diferente de  $5b$  porque son pares

Inv.: ¿cuáles son pares?

[E87]: estos (señala los términos que están dentro del paréntesis)”

Otros estudiantes manifestaron el mismo procedimiento de solución mediante respuestas similares.

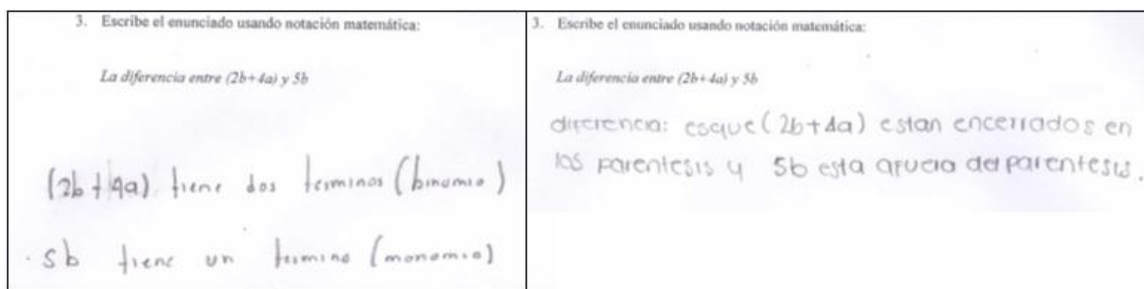


Figura 7. Interpretaciones del término "diferencia"

A la izquierda, el estudiante [E90] observó la diferencia entre dos expresiones comparando la cantidad de términos. A la derecha el estudiante [E83] determinó la diferencia entre las dos expresiones con la presencia de los paréntesis.

El 39% de los estudiantes asociaron la expresión ‘*encuentre la diferencia*’ ‘con encontrar las características que hacían diferentes a las dos expresiones  $(2b+4a)$  y  $5b$ , por ejemplo: el número de términos, tener o no paréntesis, las características de los coeficientes, ser o no ser primos, etc., Ejemplo de ello se muestra en la Figura 7. Se resalta que los estudiantes encuentran criterios diversos a los matemáticos para responder la pregunta.



El 25% de los estudiantes trató de hacer las operaciones indicadas entre los coeficientes sin tener en cuenta la parte literal en cada término. Se presentaron dos tipos de respuestas: aquellas donde los estudiantes parecen haber ignorado el valor que podía tener la letra operando solo los coeficientes de la expresión, *letra ignorada* (Küchemann, 1981) y aquellas respuestas en las que los estudiantes consideraron como incompleta una expresión algebraica que no tiene asociado un resultado por medio del signo igual, *la no aceptación de la falta de clausura* (Palarea y Socas, 1994).

3. Escribe el enunciado usando notación matemática:

La diferencia entre  $(2b+4a)$  y  $5b$

$$2b + 4a - 5b = 1a$$

Figura 8. Letras ignoradas en el problema 3

Se aprecia en la Figura 8 que el estudiante sumó  $(2+4)$  y le restó 5 para obtener el número uno. Al parecer hizo la resta entre seis y cinco, de donde obtiene uno, y a continuación escribe la primera letra 'a', la letra 'b' no se reconoce en su solución. Las letras son ignoradas. Parece natural que las ignoren dado que no juegan ningún papel, con lo cual las letras no tienen ningún significado asociado.

Tabla 6. Resumen de resultados de la pregunta 4.

---

**Pregunta 4:**

Escribe el enunciado usando notación matemática:

*El cociente entre dos números es igual a 3*

Tipo de pregunta:

- Simbólica
  - Significado y uso de operaciones
-



<i>Elementos del problema</i>	<i>Expresión esperada</i>
<i>X: número - dividendo</i>	$X/Y=3$
<i>Y: número - divisor</i>	
<i>3: resultado - cociente</i>	$\frac{X}{Y} = 3$
<i>Entre: división</i>	
	$X \div Y = 3$

### RESULTADOS

CONTESTADAS: 92	SIN CONTESTAR:	
Parcialmente correctas	Representación numérica	38
	Uso inadecuado de signos de operación.	1
	Representación verbal	6
Incorrectas o poco comunes	Cociente como producto	7
	Cociente como suma	21
	Uso del conector “y”	5
	Combinación de operaciones	14

La Tabla 6 muestra los resultados con respecto a la pregunta 4. En esta pregunta el 38% de los estudiantes recurrieron a la representación numérica del enunciado. En la Figura 9 se observa que el estudiante [E96] buscó dos números tales que su cociente fuera 3.

4. Escribe el enunciado usando notación matemática:

*El cociente entre dos números es igual a 3*

Figura 9. Representación del cociente como la división de dos números particulares.

El 48% de los estudiantes hizo una representación incorrecta del cociente al usar operaciones como la suma o la resta (21%), el producto (7%), el conector ‘y’ (5%) y combinación de varias operaciones (14%). Es extraño que los estudiantes desconozcan que la expresión ‘cociente’ refiere a la operación de división, sin embargo, cuando fueron entrevistados dijeron no saber qué es el cociente entre dos cantidades. En la Figura 10 se aprecian dos respuestas que ilustran la afirmación anterior:





4. Escribe el enunciado usando notación matemática:  <i>El cociente entre dos números es igual a 3</i>  $1+2=3$	4. Escribe el enunciado usando notación matemática:  <i>El cociente entre dos números es igual a 3</i>  6 y 9
---	---

Figura 10. Representación del cociente con otros signos  
El estudiante [E59] representa el cociente como una suma y [E97] con el conector ‘y’.

Lo mismo sucedió con el 8% de los examinados que no respondieron la pregunta, quienes manifestaron durante la entrevista no saber a qué se refiere el cociente de o el cociente entre dos cantidades. Es el caso del estudiante [E86]:

*Inv: ¿Para ti qué es el cociente entre dos números? ¿Tú qué entiendes por cociente?*

*[E86]: mmm...por cociente (niega con la cabeza)...mmm la verdad... no...*

*Inv: ¿Puedes asociar una operación matemática con el cociente?*

*[E86]: [nuevamente niega con la cabeza]*

*Inv: Bueno... en la prueba se te pedía que representaras la expresión: el cociente entre dos números es igual a 3. Tú no escribiste nada... ¿Por qué no la respondiste?*

*[E86]: (moviendo la cabeza) porque no... no entendía...*

Hubo un porcentaje de estudiantes (6%) quienes no comprendieron el enunciado y respondieron parafraseando la sentencia. A partir de sus respuestas se verifica que ciertamente no tiene una interpretación de la expresión ‘cociente’ en una acepción matemática, por ejemplo:

*“si porque el número se puede sumar multiplicar, etc. y da lo mismo” [E88].*

*“no creo, porque el cociente es el numerito que va del número con que se va a hacer el ejercicio” [E19].*

Se aprecia en estas respuestas que los estudiantes dieron explicaciones acerca de si el cociente de dos números podía ser igual a tres.



**Tabla 7.** Resumen de resultados de la pregunta 5.

<b>Pregunta 5:</b>		
Escribe la siguiente oración como una ecuación:		
<i>La energía E de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa del objeto (m) y el cuadrado de la velocidad de la luz v</i>		
Tipo de pregunta:		
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Simbólica</li> <li>● Significado y uso de operaciones</li> <li>● Uso de las letras</li> <li>● Uso del signo igual</li> </ul>		
<i>Elementos del problema</i>	<i>Expresión esperada</i>	
E: resultado		
m: factor	$E = mv^2$	
cuadrado: potencia sobre v		
v: base_factor		
<b>RESULTADOS</b>		
CONTESTADAS: 85	SIN CONTESTAR:	15
Parcialmente correctas	Uso del signo igual asociado con la equivalencia, E es el término a un lado de la expresión.	41
	Uso del signo igual asociado con la equivalencia, pero no se identifica a E como uno de los elementos de la expresión.	11
Correctas		11
Incorrectas o Poco comunes	No hay representación de la equivalencia, se usan diversas operaciones para representar las relaciones existentes. (Uso inadecuado de signos de operación).	9
	Uso de expresiones verbales para escribir el enunciado con otras palabras. Se nota falta de interpretación del enunciado. (Uso de lenguaje natural)	11
	Uso de igualdades numéricas para expresar la equivalencia sin tener relación con los elementos del enunciado. (Representación numérica)	2

En la Tabla 7 se muestran los resultados de las respuestas de los estudiantes para la pregunta 5. En esta pregunta el 11% de estudiantes representaron correctamente el enunciado. El 41% asoció la expresión ‘equivale’ con el signo igual relacionando la E con otra letra, pero la expresión escrita no representa las relaciones propuestas en el enunciado. Una de las dificultades halladas corresponde con la representación de “*el cuadrado de la velocidad*”, los estudiantes



escribieron el exponente sobre el signo de la masa, en la energía o en la expresión completa. El producto, en la mayoría de casos, se representó como una suma entre dos expresiones simbólicas y en otros casos con el uso de otros signos de operación. Se ofrece un ejemplo de este tipo de respuestas en la Figura 11.

5. Escribe la siguiente oración como una ecuación:

“La energía  $E$  de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa del objeto ( $m$ ) y el cuadrado de la velocidad de la luz  $v$ ”

$$E = (m)^2 + v$$

Figura 11. Representación inadecuada de la multiplicación.

El 11% de los estudiantes usaron el signo igual para representar la equivalencia, pero no asociaron la letra  $E$  con el resto de la expresión usando otros símbolos. Por ejemplo, el estudiante [E80] representó el enunciado de la manera que se ilustra en la Figura 12. Sin embargo, durante la entrevista representó correctamente el enunciado “*el producto entre la masa  $m$  y el cuadrado de la velocidad  $v$* ” al parecer la representación se hace compleja cuando se involucra varios elementos. Los estudiantes no establecen relaciones entre tales elementos, además no validan sus respuestas. La primera respuesta que proponen es finalmente aquella que finalmente ofrecen.

5. Escribe la siguiente oración como una ecuación:

“La energía  $E$  de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa del objeto ( $m$ ) y el cuadrado de la velocidad de la luz  $v$ ”

$$E (m + v^2) = 0$$

Figura 12. Uso inadecuado de signos de operación en el problema 5

Por otra parte, el 9% de estudiantes no usaron el igual en la ecuación y usaron diversas operaciones que no corresponden con las relaciones presentes entre los elementos del enunciado. Tal es el caso del estudiante [E46] quien representa las relaciones del enunciado como lo muestra la Figura 13:



5. Escribe la siguiente oración como una ecuación:

“La energía  $E$  de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa del objeto ( $m$ ) y el cuadrado de la velocidad de la luz  $v$ ”

$E = m^2$   
↳ conexión de dos cables + y - = m

Figura 13. Respuesta poco común del problema 5

Durante la entrevista realizada a algunos de los estudiantes que dieron respuestas como la anterior, se aprecia que reconocieron la equivalencia como una relación entre cantidades que tienen el mismo valor, pero no la representan correctamente. Así mismo, quienes no contestaron esta pregunta en la prueba escrita, en la entrevista si lograron una representación adecuada a expresiones como ‘el producto entre’..., ‘el cuadrado de’..., y ‘es equivalente a’..., aunque al solicitar la representación de expresiones que contienen la combinación de varias de estas relaciones, tuvieron dificultades en su representación, y en el caso particular de esta pregunta manifestaron no haber entendido el enunciado.

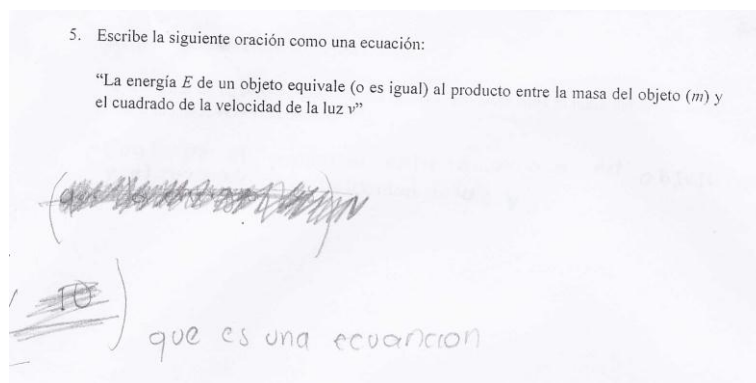


Figura 14. ¿Qué es una ecuación?

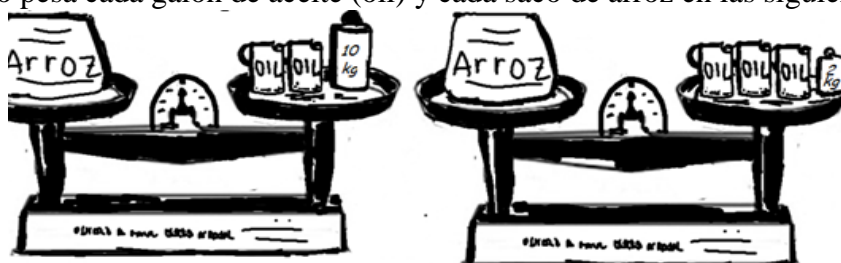
Llamó la atención la respuesta del estudiante [E10], (ver Figura 14) quien escribió en su hoja “¿Qué es una ecuación?”, lo que resalta nuevamente que los estudiantes no están familiarizados con el lenguaje algebraico. Otros estudiantes recurrieron al uso de números para representar la equivalencia sin que estos tuvieran relación con el problema en cuestión.



**Tabla 8.** Resumen de resultados de la pregunta 6

**Pregunta 6:**

¿Cuánto pesa cada galón de aceite (oil) y cada saco de arroz en las siguientes balanzas?



**Nota:** Las pesas al lado del aceite, pesan 10 kilogramos en la balanza del lado izquierdo y 2 kilogramos en la balanza del lado derecho.

Tipo de pregunta

- Simbólica
- Uso del signo igual
- Uso y significado de operaciones de adición y producto
- Uso de letras

*Elementos del problema*

x: peso de un saco de arroz.

y: peso de un galón de aceite.

10 Kg: la masa de la pesa que está en la balanza de la izquierda.

2 Kg: la masa de la pesa que está en la balanza de la derecha.

Suma: adición de los pesos de los elementos en cada balanza.

Producto: multiplicación de la cantidad de elementos de cada clase en cada balanza.

=: muestra que las pesas están en equilibrio.

*Expresión esperada*

$$x=2y+10$$

$$x=3y+2$$

**RESULTADOS**

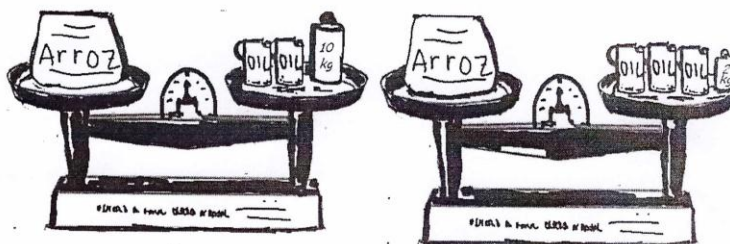
CONTESTADAS: 92	SIN CONTESTAR:	
Parcialmente correctas	Representación numérica	5
Correctas		0
Incorrectas o poco comunes	Se toma cada balanza como una situación diferente. No se hace uso del lenguaje algebraico para representar. (Representación numérica)	41
	Encuentra que los dos elementos “arroz” y “aceite” pesan lo mismo	11
	No se reconoce la equivalencia presente en cada balanza. (No reconocimiento de relaciones)	35



En esta pregunta los estudiantes no hicieron uso de la representación algebraica, en vez de ello usaron cantidades numéricas que extrajeron de la información presentada en la gráfica. Estos resultados se agrupan en la Tabla 8.

El 5% de los estudiantes encontraron la respuesta correcta para el peso del arroz y el aceite pero no acudieron a la notación algebraica para describir la situación. Por ejemplo, el estudiante [E96], resolvió el sistema teniendo en cuenta la equivalencia en el sistema formado por las dos balanzas (Figura 15).

6. ¿Cuánto pesa cada galón de aceite (oil) y cada saco de arroz en las siguientes balanzas?



Nota: Las pesas al lado del aceite, pesan 10 kilogramos en la balanza del lado izquierdo y 2 kilogramos en la balanza del lado derecho.

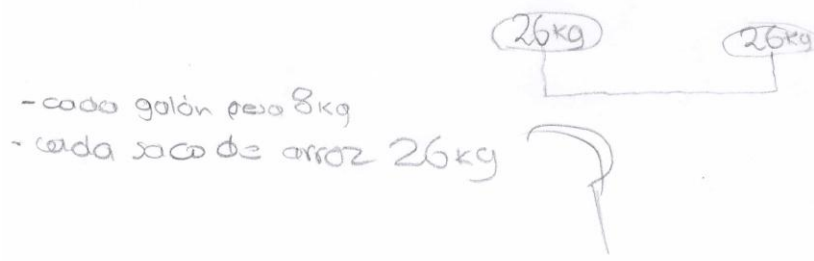


Figura 15. Representación y solución del problema 6

De acuerdo con lo explicado por él en la entrevista, el procedimiento que hizo fue el que se muestra en la Figura 26:

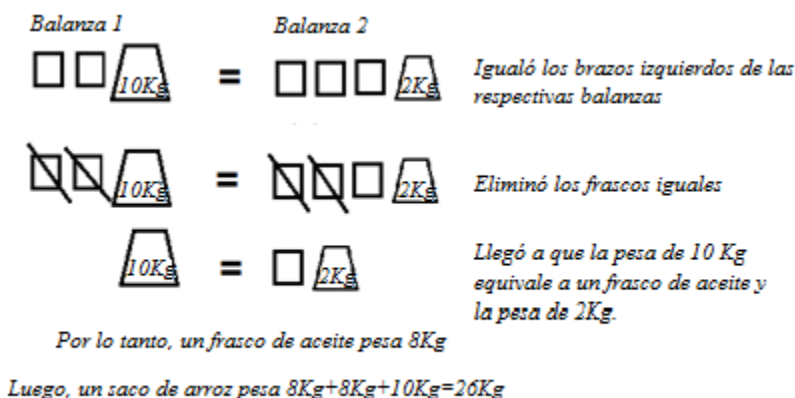
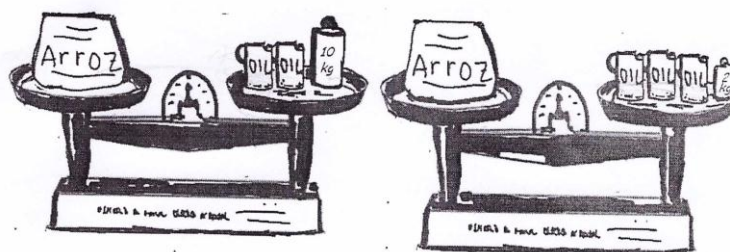


Figura 16. Interpretación del método usado por un estudiante al resolver el problema 6

Es notable que en la explicación del estudiante se aprecia el uso del equilibrio de las dos balanzas -dos condiciones-, el uso de equivalencias, la interpretación de información icónica en un formato implícito de ecuación -  $10=x+2$  - donde x representa el peso de un frasco de aceite, y la solución de la ecuación anterior, con lo cual se logra reconocer el uso implícito de ideas matemáticas potentes, que el estudiante no puede representar algebraicamente. El estudiante exhibe habilidades matemáticas notables; sin embargo, tales habilidades parecen estar desvinculadas con el uso de las mismas en el ámbito del álgebra.

6. ¿Cuánto pesa cada galón de aceite (oil) y cada saco de arroz en las siguientes balanzas?



Nota: Las pesas al lado del aceite, pesan 10 kilogramos en la balanza del lado izquierdo y 2 kilogramos en la balanza del lado derecho.

En la balanza del lado izquierdo pesam el oil  
 $14 \text{ Kg}$  Porque  $2 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 10$   
 y en el lado derecho de oil  $4 \text{ kg} + 4 \text{ kg} + 4 \text{ kg} + 2 \text{ Kg} = 14 \text{ Kg}$   
 El arroz en cada lado pesa  $14 \text{ Kg}$

Figura 17. Representación del estudiante [E4] al problema 6

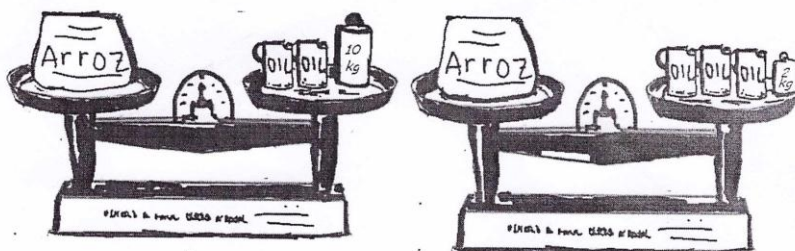




El 41% de los estudiantes ven en cada una de las balanzas un problema diferente. Para ellos las dos balanzas de la gráfica no están relacionadas, ejemplo de ello es lo que respondió [E4] y se muestra en la Figura 17.

Para el 11% de los estudiantes el arroz y el aceite pesan lo mismo, según [E11] pesan igual porque las balanzas están en equilibrio, por lo tanto, deben pesar lo mismo. (Figura 18).

6. ¿Cuánto pesa cada galón de aceite (oil) y cada saco de arroz en las siguientes balanzas?



*Nota: Las pesas al lado del aceite, pesan 10 kilogramos en la balanza del lado izquierdo y 2 kilogramos en la balanza del lado derecho.*

*Porque si pesamos los dos  
pesan iguales el aceite y el arroz  
porque si pesamos pesa más que el  
aceite la balanza se levanta  
más con el arroz*

*Figura 18. Interpretación equivocada de la equivalencia*

El 35% de los estudiantes no reconocen la relación de equivalencia entre los pesos de los objetos que están en cada brazo de las balanzas, suman los pesos del aceite de ambas balanzas y encuentran un valor para el arroz. Los estudiantes no establecen relaciones, tan solo efectúan operaciones. Se reconoce tanto la dificultad que tienen los estudiantes para identificar las relaciones entre los pesos de los objetos de cada balanza como dificultades en el desarrollo de operaciones. Se puede apreciar lo realizado por el estudiante [E85] en la Figura 19.

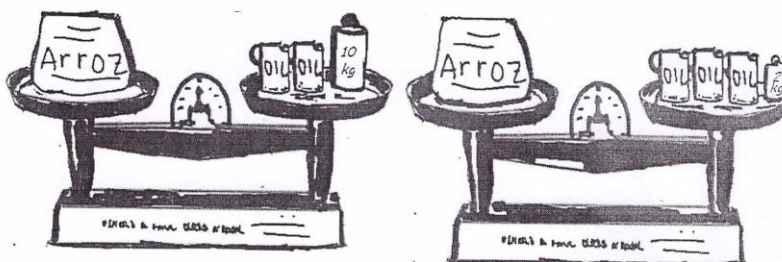
Una de las dificultades identificadas en esta pregunta fue la falta de reconocimiento de la relación de equilibrio en términos de la igualdad; además, que ningún estudiante utilizó lenguaje algebraico para representar la situación. Parece que el ‘equilibrio’ de las balanzas no se asocia





con una relación de igualdad entre las cantidades asociadas a los diversos objetos y las dos balanzas son vistas en la mayoría de los casos como dos situaciones que no están relacionadas.

6. ¿Cuánto pesa cada galón de aceite (oil) y cada saco de arroz en las siguientes balanzas?



Nota: Las pesas al lado del aceite, pesan 10 kilogramos en la balanza del lado izquierdo y 2 kilogramos en la balanza del lado derecho.

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ \hline 30 \end{pmatrix} \quad (2+2+2+2=10)$$

$$10 \overline{) 30}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1 \overline{) 30} \end{array}$$

cada galon de aceite pesa 3 kilogramos

$$4 \overline{) 2}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \overline{) 2} \end{array}$$

cada galon pesa 1 kilogramo  
el saco de arroz pesa 10 y 2 kilogramos

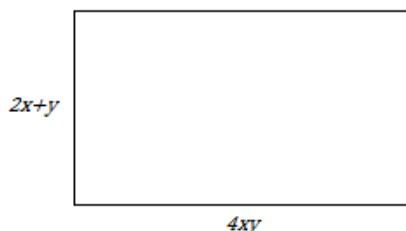
Figura 19. Respuesta poco común. Uso de letras



**Tabla 9.** Resumen de resultados de la pregunta 7.

**Pregunta 7:**

Escribe la expresión que represente el área de la siguiente figura:



Tipo de pregunta

- Geométrica
- Simbólica
- Uso y significado de operaciones de adición y producto
- Uso de letras

Elementos del problema

A: área del rectángulo  
 $4xy$ : alto-factor  
 $2x+y$ : ancho - factor  
 \*: multiplicación

Expresión esperada

$$A=4xy(2x+y)$$

**RESULTADOS**

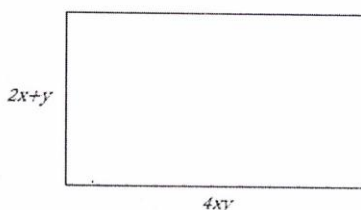
CONTESTADAS: 95	SIN CONTESTAR:	5
Parcialmente correctas	Uso del producto de los lados para encontrar el área, uso de exponentes (uso inadecuado de los signos de operación)	24
	Incompletas - identificación de los lados	11
Correctas		8
Incorrectas o poco comunes	Uso del signo igual como equivalencia entre los lados	3
	Área como suma de los lados. (uso inadecuado de signos de operación)	17
	Uso de otras operaciones y fórmulas diferentes para el área. (Uso inadecuado de operaciones)	32

En la Tabla 9 se muestra la clasificación de las respuestas de la pregunta 7. En esta pregunta, solo el 8% de los estudiantes representó correctamente el área de la figura. En las demás respuestas los estudiantes manifiestan desconocer el concepto de área de un rectángulo. Es así como el 32% de los estudiantes empleó expresiones diferentes a la usada para representar el área del rectángulo, varios acudieron a la fórmula para el área del triángulo y otros a expresiones que incluían operaciones como la potenciación, la resta o la suma. Se puede observar en la Figura 20



como el estudiante [E48] usa una expresión en la que incluye operaciones como suma y división para expresar el área de la figura dada.

7. Escribe la expresión que represente el área de la siguiente figura:



$$\frac{2xy + 4xy}{2} = \frac{6xy}{2} = 3xy$$

Figura 20. Uso inadecuado de signos de operación en la representación del área de una figura.

Durante las entrevistas se pidió hallar el área de algunos rectángulos que tenían dibujada una cuadrícula en su interior, la estrategia usada fue hacer el conteo directo de los cuadrados que recubrían la figura, otros contaron los cuadrados que había en cada lado y sumaron las cantidades. Los estudiantes exhiben sus interpretaciones sobre las ideas matemáticas de área y perímetro que están en abierto conflicto con los conceptos geométricos. Sus respuestas ofrecen evidencia que los estudiantes tienen dificultad con las expresiones que refieren al perímetro y al área de una superficie.

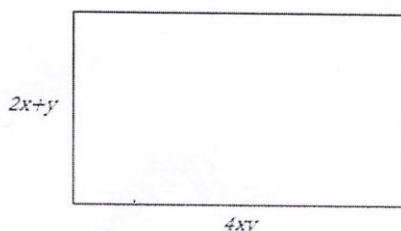
El 17% de los estudiantes sumaron las expresiones de cada lado de la figura y el 3% igualaron las dos expresiones que correspondían a la medida de los lados, evidenciando, nuevamente, poca comprensión sobre el concepto de área.

Durante la entrevista, se les presentó rectángulos, cuyas medidas eran expresiones algebraicas, para que encontrarán la expresión correspondiente tanto para el área como para el perímetro. Los estudiantes identificaron los coeficientes de las expresiones algebraicas y operaron con ellos, sin considerar las propias expresiones algebraicas. No solamente se evidencia aquí la no aceptación de la falta de clausura (Socas & Palarea, 1997) sino un desconocimiento



amplio sobre las expresiones algebraicas, su uso y sus propiedades. Parece que los estudiantes están afincados en el ámbito numérico, que no han ampliado, a pesar de estar en noveno grado. Curricularmente los estudiantes han tomado dos cursos de matemáticas que aborda el estudio del álgebra.

7. Escribe la expresión que represente el área de la siguiente figura:



$$(2x+y)^2 (4xy)^2$$

Figura 21. Representación del área de un rectángulo

El 24% de los estudiantes escribieron expresiones parcialmente correctas, usaron el producto de las expresiones correspondientes a los lados de la figura para representar el área, pero operaron los términos conforme a reglas diferentes y añadieron exponentes a estas expresiones, como lo ilustra la solución de [E47] en la Figura 21.

Parece ser que los estudiantes asocian a las relaciones geométricas del cuadrado y el rectángulo, operaciones relacionadas con el exponente 2.

El 11% de los estudiantes sólo identificaron los lados de la figura sin llegar a representar el área, y el 5% de los estudiantes no respondieron. Estos últimos, en la entrevista afirmaron no haber entendido el enunciado, pero al darles un problema parecido con valores particulares para los lados del rectángulo encontraron el área sin ningún problema. De nuevo se observa que al parecer los estudiantes están ubicados aún en el ámbito numérico, a pesar de estar en grado noveno no han iniciado la transición hacia el lenguaje algebraico (Van Ameron, 2002). De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias del área de Matemáticas, los estudiantes en



este grado deberían utilizar expresiones algebraicas para formular y resolver problemas, así como también poder asociar gráficas con sus respectivas ecuaciones (MEN, 2006).

**Tabla 10.** Resumen de resultados de la pregunta número ocho

<b>Pregunta 8:</b>		
Selecciona la expresión que represente el siguiente enunciado:		
<i>En la bodega hay el triple de empleadas que de empleados.</i>		
a.	$m^3=h$	
b.	$3m=h$	
c.	$m=3h$	
d.	$3m+h$	
e.	$m= h^3$	
f.	$m= 3+h$	
g.	$h= m+3$	
Donde “m” representa número de mujeres y “h” representa número de hombres.		
<b>Nota:</b> Si consideras que tu respuesta no está entre las anteriores, por favor escríbela y escribe tu comentario o explicación.		
<u>Tipo de pregunta</u>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Simbólica</li> <li>● Uso y significado de operaciones de adición y producto</li> <li>● Uso de letras</li> </ul>		
<i>Elementos del problema</i>		<i>Expresión esperada</i>
m: número de mujeres		
h: número de hombres		$m=3h$
triple: operador sobre h		
=: signo equivalencia entre cantidades		
<b>RESULTADOS</b>		
CONTESTADAS: 99	SIN CONTESTAR:	11
Correctas		0
Incorrectas o poco comunes	Selección de la opción a). El triple como exponente (uso inadecuado de operaciones)	50
	Selección de la opción b). Comparación de grupos (comparación estática (Clement,1982)	19
	Selección de la opción d). Transliteración	17
	Selección de la opción: Otras: $h=m$ , los grupos son iguales. (uso del signo igual)	3

La Tabla 10 muestra la distribución de las respuestas de los estudiantes con respecto a las categorías de análisis de la pregunta 8. En esta pregunta no se pidió representar el enunciado, sino seleccionar la opción que pareciera la más adecuada. Como se observa en la Tabla 10, el



50% de los estudiantes usó el exponente tres para representar el triple. coinciden en afirmar que el triple significaba tres veces algo y lo expresan de la siguiente manera: *el triple de 5, es tres veces 5 y se escribe  $5 \times 5 \times 5$ , tres veces o sea 15* [E16].

Es interesante apreciar que los estudiantes conocen el valor correcto del triple de cinco, pero utilizan mal la notación matemática estándar, adicionalmente su sentido numérico (Greeno, 1991; Slavit, 1999) no está desarrollado, dado que 15 no puede ser comparado en orden de magnitud con 125. La expresión ‘tres veces cinco’ se interpreta en el sentido de ‘escribir tres veces el número cinco’. Se conjetura que los estudiantes escriben  $(5 \times 5 \times 5)$  y lo operan como una suma. También se observa como el estudiante [E25] representa el triple de  $X$  como  $3X$  pero en el ámbito numérico lo representa inadecuadamente (Figura 22). Sorprende la coexistencia de significados diversos que operan de una manera en el ámbito numérico y de otra en el ámbito algebraico. En ese sentido el álgebra no es una extensión natural de la aritmética. Se aprecia una coexistencia entre ambos ámbitos, pero sin relaciones de complementariedad.

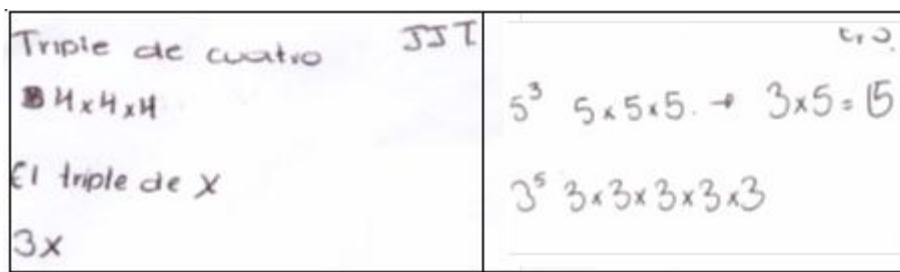


Figura 22. Interpretación y uso de signos de operación.

El estudiante [E25] representa el triple de 4 y el triple de  $x$  (izquierda) y el estudiante [E16] representa el triple de 5 y cinco veces tres.

El 19% de los estudiantes escogieron la opción b, que refiere a una comparación estática entre los grupos (Clement, 1982). Asignan valores de acuerdo con la comparación de los grupos, pero no se propone algún tipo de relación ni tampoco se valida. Dado que los estudiantes consideran que el grupo de mujeres es mayor que el grupo de hombres entonces se multiplica a ‘ $m$ ’ por tres y su representación es, según los estudiantes  $3m=h$ .

El 17% escogió la opción que corresponde a una transliteración del enunciado sin tener en cuenta las relaciones existentes entre los elementos presentes en el problema. Es decir, los



estudiantes usaron la notación  $3m$  para el *triple de mujeres*, usaron el signo '+' como una notación para el término '*que*', usaron la letra 'h' para la expresión '*hombres*' y resultando como representación del enunciado la expresión ' $3m+h$ '.

Hubo dos respuestas poco comunes, el estudiante [E25] afirma que la respuesta es ' $m=h$ ' pues dice que estos dos grupos son iguales porque se están comparando y esto denota o se interpreta como 'igualdad'.

Nadie seleccionó la opción correcta, lo cual indica conflictos profundos en la identificación de las relaciones existentes en el enunciado, tales como: razón, triple de, equivalencias, etc.

#### **4.2 Clasificación de respuestas de acuerdo con las categorías emergentes.**

En las respuestas de los estudiantes se encontraron rasgos comunes en cuanto a la representación de los enunciados. Como se observa en la Tabla 11, la categoría que obtuvo mayor porcentaje de respuestas, 28%, fue el uso inadecuado de los signos de operación; además, de las operaciones mismas. Los estudiantes tienden a representar, las relaciones que se dan entre los elementos de los enunciados de los problemas, con una operación inadecuada. No solamente no las identifican, sino que operan mal cuando las identifican correctamente. Es decir, en el caso de que identifiquen correctamente el signo de operación no aplican correctamente las propiedades de las operaciones. La identificación de la operación no se acompaña del uso y reconocimiento de las propiedades.

La representación numérica con un porcentaje del 16,25%, es otra de las categorías con mayor frecuencia. Los estudiantes tienden a utilizar números para representar las relaciones entre las variables de los enunciados, no hacen uso de letras o símbolos para generalizar el resultado de un enunciado, lo cual muestra un impedimento para usar el lenguaje algebraico en la solución de problemas.



**Tabla 11.** Clasificación de las preguntas de acuerdo con las categorías emergentes.

<b>Categorías</b>	<b>Total</b>	<b>Porcentaje</b>
Sin responder	54	6,75
Contestadas	756	94,5
Correctas	25	3,125
Parcialmente correctas	381	47,625
Poco comunes	340	42,5
<b>Categorías emergentes</b>	<b>Preguntas</b>	
Representación numérica	1,2,4,5,6	130 16,25
Uso del signo igual	1,5,6,7,8	129 16,125
No aceptación de la falta de clausura	1,5	8 1
Uso del lenguaje natural	1,2,3,4,5	94 11,75
Uso inadecuado de signos de operación	2,3,4,5,7,8	224 28
Transliteración	2,8	51 6,375
Letras ignoradas	3	20 2,5
Identificación de elementos	7	11 1,375
Comparación estática	8	19 2,375
No reconocimiento de relaciones	6	35 4,375
<b>Total</b>	<b>800</b>	<b>100%</b>

Otra categoría importante es la relacionada con el uso del signo igual. Esta categoría aparece en las preguntas 1, 5, 6, 7 y 8., con un porcentaje del 16,125%. En la Pregunta 1, el 60% de los estudiantes usó el signo igual como un secuenciador en los pasos de la resolución del problema. En la pregunta 5 el 52% de los estudiantes participantes asoció el signo igual con la equivalencia presente en el enunciado, aunque no identificó las demás relaciones del enunciado. El 9% de los estudiantes no representó la equivalencia presente en el problema.

También se nota que a los estudiantes les cuesta representar en lenguaje algebraico las relaciones presentes en los enunciados y acuden al uso del lenguaje natural para tratar de presentar la solución a los problemas o de narrar con sus propias palabras las relaciones entre los elementos de los problemas.

La transliteración es una categoría presente en las preguntas 2 y 8, con un 6,375%. Esta categoría consiste en el hecho que para representar las relaciones de un enunciado, los estudiantes escriben los términos en el orden en que estos aparecen en el enunciado, sin analizar





las relaciones existentes entre ellos. Este fenómeno ha sido reportado por Clement (1982) como una de las dificultades en la traducción de problemas de palabras.

La no aceptación de la falta de clausura es una categoría presente en la pregunta 3. De acuerdo con Socas & Palarea (1994), a los estudiantes se les dificulta aceptar que una expresión algebraica sea la solución a un problema. Parece que para que la solución esté completa, el estudiante debe ‘ver’ una conexión entre expresiones o entre números por medio del signo igual y para ello recurren a operaciones inadecuadas entre los términos de la expresión, violando las propiedades de las operaciones.

Las letras ignoradas es una categoría que también se presentó en la pregunta 3, esta categoría presente en el 2,5% de las respuestas, se da cuando los estudiantes operan los coeficientes de los términos sin atender a que estos no eran términos semejantes.

Otras categorías fueron la identificación de los elementos de un problema. Los estudiantes pueden en ocasiones identificar los elementos, pero no llegan a establecer las relaciones entre estos y plantear la ecuación que representa el problema, esto se pudo ver en la pregunta 7, en la que 11 de los 100 estudiantes, identificó los lados del rectángulo, pero no lograron representar el área del mismo. Así mismo en la pregunta 6, se observó que los estudiantes no identifican las relaciones entre los elementos del problema, es el caso que se presentó cuando los estudiantes no lograron ver las dos gráficas del problema como parte de la misma situación, además que se les dificultó representar el sistema de ecuaciones que modelaba el problema y recurrían a otro tipo de análisis para ofrecer una solución.

Como se ha mencionado en ocasiones anteriores, a los estudiantes se les dificulta representar un enunciado usando lenguaje algebraico, el uso de letras no resulta familiar para ellos y aunque traten de usar cantidades particulares tienen dificultades en identificar las relaciones y representarlas usando los signos de operación. Estas dificultades encontradas se presentan en el Capítulo 5 y se recomienda el trabajo a realizar por los docentes de matemáticas de educación básica.

## Capítulo 5

### Hallazgos y conclusiones

En este apartado del documento, se presentan los hallazgos de la investigación, se extraen las conclusiones y se dan algunas recomendaciones para futuras investigaciones.

#### **5.1 Dificultades manifestadas por los estudiantes para representar algebraicamente problemas de palabras.**

Al realizar tanto el análisis de los resultados de la Prueba como de las entrevistas que se realizaron a los estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro del Municipio de Silvia, Cauca, se reconocieron dificultades en: el uso inadecuado de signos de operación, procesos de traducción de enunciados, uso del signo igual, aceptación de la falta de clausura y la interpretación de las letras.

##### **5.1.1 Uso inadecuado de signos de operación.**

Como se pudo apreciar en las respuestas a las preguntas 2, 3, 4, 7 y 8 los estudiantes usaron signos de operación que no correspondían a la relación presentada en el enunciado del problema. En este caso los estudiantes tienden a interpretar relaciones como *el doble de*, *el triple* como una potencia. Generalmente expresaban  $x^2$ , o  $x^3$  para representar las relaciones ‘el doble’ o ‘el triple’ mencionadas. Así mismo, la interpretación de relaciones como *el cociente entre*, o *la diferencia entre* no fueron representadas por ellos con la operación correspondiente, sino que recurrieron al uso de operaciones como la suma, símbolos de desigualdad o el conector “y”.

##### **5.1.2 Procesos de traducción de enunciados.**

Con respecto a los procesos de traducción de enunciados se reconocieron dos dificultades: la representación numérica, la transliteración y la comparación estática que se describen a continuación.

La representación numérica, fue la segunda categoría con mayor frecuencia, 16,25%. Esta categoría corresponde a la dificultad que tienen los estudiantes en representar con lenguaje



algebraico, las relaciones entre los elementos del enunciado, y en lugar de ello recurren al uso de cantidades numéricas, como lo hizo el estudiante en la representación mostrada en la Figura 6.

La transliteración o traducción sintáctica se refiere, según Clement (1982), al proceso desarrollado por los estudiantes al representar las relaciones de las variables en el orden en que se presentan en el enunciado. Ejemplo de ello es lo que se presentó en la pregunta 2 (Figura 23), en la cual los estudiantes escribieron el número X seguido de dos letras Z, para indicar el doble, seguido de un 5 indicando el aumento, representación que no describe la situación presentada en el enunciado.

2. Considere dos números arbitrarios,  $x$  y  $z$ . Represente la siguiente sentencia:

Un número  $x$  es el doble del número  $z$  aumentado en 5.

Figura 23. Transliteración del enunciado de un problema.

La comparación estática, según Clement (1982) hace que el estudiante asigne valores de acuerdo con la comparación de los grupos, por ejemplo, el enunciado de la Pregunta 8 pedía seleccionar la expresión que representara el enunciado ‘*En la bodega hay el triple de empleadas que de empleados*’, como el grupo de empleadas es mayor que el de empleados, los estudiantes multiplicaron por 3, que representa *el triple*, a la letra  $m$  que representa el número de empleadas. La representación seleccionada por 19 estudiantes fue  $3m=h$ .

### 5.1.3 Uso del signo igual.

Con respecto al uso del signo igual, la mayoría de estudiantes lo usan como un secuenciador de los pasos en la resolución de una ecuación, este es uno de los usos que reporta Molina (2006) y se pudo observar en la solución de la pregunta 1. En esta pregunta el 60% de los estudiantes usaron el signo igual de la siguiente manera:  $7 \times 5 = 35 + 4 = 39$ . Aunque esto no representa una dificultad para la resolución, ni causa errores en la solución, si denota una debilidad en la representación de expresiones numéricas presentes en un problema. Es previsible que este



aspecto se presente en otras circunstancias que puedan entrar en conflicto cuando se resuelven ecuaciones, o situaciones más complejas y puede catalogarse como un obstáculo didáctico inducido por los docentes en el momento de resolver ecuaciones. La literatura reporta que el signo igual se asume mayoritariamente como un símbolo de resultado (Socas, 1997; Palarea & Socas, 1994)) y no como un símbolo de equivalencia. Sin embargo, se ha encontrado aquí que también se utiliza como un separador de operaciones (Molina, 2006), acepción que está vinculada con el sentido de ‘indicador de resultado’ que ha sido reportado por la literatura. Las dificultades encontradas con respecto al uso del signo igual están relacionadas con su uso para representar la equivalencia en el enunciado de la pregunta 5: *La energía  $E$  de un objeto equivale al producto entre la masa del objeto ( $m$ ) y el cuadrado de la velocidad de la luz.* Aquí, aunque los estudiantes usaron el signo igual como signo que representa la equivalencia, no lo usaron con expresiones que fueran equivalentes. A pesar que en la entrevista los estudiantes manifiestan relacionar la equivalencia con el signo igual se les dificulta la representación de las demás relaciones entre los elementos del problema, obteniendo finalmente expresiones no equivalentes. Además, se presentaron casos en los cuales los estudiantes no relacionaron la equivalencia con el signo igual.

#### **5.1.4 Aceptación de la falta de clausura.**

Otra de las dificultades encontradas en las representaciones de los estudiantes es la referida a la aceptación de la falta de clausura. De acuerdo con Socas & Palarea (1994) y Molina (2006) a los estudiantes les cuesta aceptar que una expresión que contenga signos de operación o que no tenga un valor numérico sea el resultado de un problema, para ellos una expresión de este tipo no tiene significado. Esta dificultad se manifestó cuando los estudiantes recurrieron al uso de números arbitrarios para representar las relaciones o realizaron operaciones incorrectas entre los términos de una expresión con el propósito de obtener una expresión simplificada o una cantidad numérica como resultado.



### 5.1.5 Interpretación de las letras.

Con respecto a la interpretación de las letras en una expresión, se observó que algunos estudiantes, operan los números como si las letras no existieran. La presencia de letras en una expresión alfanumérica los inquieta o desconcierta, y se aferran al ámbito numérico. Esto se pudo observar en la pregunta 3, en la que al solicitar que representaran *la diferencia entre*  $(2b+4a)$  y  $5b$ , operaron los coeficientes para llegar a que la solución era igual a 1. Los estudiantes al realizar operaciones entre términos, realizaron las operaciones entre los coeficientes sin tener en cuenta el papel que desempeñan las letras en los enunciados, en otras palabras, ignoraron las letras de los términos. Se puede conjeturar que tales dificultades pueden tener origen en una enseñanza para la cual las expresiones algebraicas no son más que cadenas de símbolos cuyas propiedades no son extensiones naturales de las propiedades numéricas. Para los estudiantes no existe tal cosa como ‘lenguaje algebraico’, muy por el contrario, las expresiones algebraicas son galimatías.

### 5.1.6 Uso del lenguaje Natural

Otra de las dificultades que se presentó con una frecuencia considerable fue la tendencia de los estudiantes a representar en lenguaje natural las relaciones de los elementos del problema. Los estudiantes describen con sus palabras el enunciado del problema o da una respuesta numérica que luego trata de explicar usando el lenguaje natural. A los estudiantes se les dificulta usar lenguaje algebraico para representar un problema de palabras.

Además de estas dificultades, se encontró que los estudiantes del grado 9°, a pesar que ya han tomado un curso que aborda el estudio del lenguaje algebraico desde el grado 8°, no usan adecuadamente las propiedades de las operaciones entre términos algebraicos ni reconocen la sintaxis de las expresiones algebraicas, mucho menos ‘leen’ o ‘interpretan’ tales expresiones. Es apenas natural que, ante estas dificultades, realizaran mal las operaciones y no representaran adecuadamente las relaciones entre los elementos de los enunciados de los problemas de palabras.



## **5.2 Conclusiones y recomendaciones**

Los estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro exhiben un conocimiento del lenguaje algebraico deficiente, por lo observado en esta investigación, Visto en su acepción como ‘lenguaje’ los estudiantes deben ser expuestos a situaciones en las cuales puedan usar, comprender y refutar situaciones que involucran el álgebra. Tal vez la inclusión de aspectos del ámbito ‘resolución de problemas’ ayude a convencer a los estudiantes que el lenguaje del álgebra es natural, que es cercano, que ayuda a resolver problemas de la vida cotidiana, y que vale la pena comprender y usar tal lenguaje y tal conocimiento matemático.

Es importante que los docentes conozcan sobre las dificultades que tienen los estudiantes tanto en la representación algebraica como en las operaciones algebraicas con el fin de generar estrategias de enseñanza que expongan a los estudiantes al uso e interpretación del lenguaje algebraico. Con esto, a largo plazo, se podrían disminuir las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en los siguientes niveles escolares, tanto en educación media como en universitaria. Parece obvio afirmar que las dificultades que los estudiantes manifiestan, con el álgebra, en grado noveno, continuarán afectando tanto la comprensión como el desempeño de los estudiantes, en tanto que, en los grados décimo y undécimo, el álgebra se utiliza para estudiar las funciones, el cambio, la variación y la resolución de problemas tanto en cálculo como en física y química.

Tomando como referencia lo sugerido por Godino, et al. (2012), Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), la enseñanza del álgebra desde la educación primaria debe incluir el estudio de funciones, analizar situaciones con la ayuda de símbolos, el estudio de patrones numéricos y geométricos, la determinación de reglas generales y el reconocimiento de estructura. Existen diversos estudios que no solo informan sobre los resultados exitosos de la enseñanza de características algebraicas en los grados cuarto, quinto, sexto y séptimo, sino de las competencias notables de los estudiantes para resolver problemas que incluyen algunas características algebraicas. En este documento, se mostró el caso de un estudiante con competencias matemáticas notables para resolver un sistema de ecuaciones; quien usó el método descrito en la



Figura 16 para resolver el Problema 6, pero sus conocimientos algebraicos no están a la altura de sus competencias matemáticas y no le permitieron representar la situación usando lenguaje algebraico.

Durante las entrevistas se pudo apreciar que los estudiantes sí que pueden resolver los problemas matemáticos, una vez que se discute con ellos el significado de las expresiones algebraicas; las dificultades de los estudiantes no se deben a falta de motivación, o de talento, sino a que sus conocimientos algebraicos corresponden a un mal proceso en el paso de la aritmética al álgebra.

En cuanto a la metodología que se utilizó, se puede afirmar que el uso de una prueba piloto inicial para determinar el nivel de conocimientos algebraicos de los estudiantes fue importante, pues inicialmente se tenía la idea, errónea, que los estudiantes tenían un conocimiento algebraico sólido y queríamos indagar sobre la resolución de problemas de palabras; sin embargo el diseño de la prueba piloto descartó esta hipótesis e indagó sobre el nivel de conocimiento algebraico de los estudios, nos permitió ubicar a la población y en consonancia, diseñar una prueba final que indagara sobre dificultades de los estudiantes en un ámbito temático más cercano a ellos.

No se pudo disponer de más tiempo para entrevistar a un número mayor de estudiantes debido a las dificultades técnicas y el excesivo tiempo que tal actividad requiere. Como la idea es continuar con la actividad investigativa, se pretende llegar a proponer algunas sugerencias metodológicas para los profesores de grado sexto, séptimo y octavo, para abordar la enseñanza del álgebra; así mismo, diseñar una batería de actividades para los estudiantes que aborden algunas de las dificultades reconocidas en esta investigación.

Parece urgente que los profesores que enseñan matemáticas, en el contexto de los Colegios y Escuelas de Silvia Cauca, sean informados de las conclusiones de esta investigación, para que, tomada a manera de diagnóstico, sirva para ofrecer a los estudiantes mejores oportunidades en su formación matemática.

Si bien es cierto que algunos términos del lenguaje matemático pueden no ser claros para los estudiantes de etnia indígena, lo mismo es válido para los otros estudiantes. En cualquier caso, se



recomienda que los profesores discutan los diversos significados que tales términos tienen tanto en el ámbito cotidiano como en el ámbito de las matemáticas escolares. Podría ser interesante que los profesores indagaran por los eventuales significados que estos términos tienen para grupos poblaciones diversos y los comparara, esto podría ser una actividad matemática interesantes para los estudiantes, pues la matemática se localiza en el currículo escolar en tanto que se vincula con el entorno social y cultural.

Aunque esta investigación no estaba dirigida específicamente a una población de carácter netamente indígena, sino a un grupo de estudiantes de una institución de carácter mayoritario con currículo estandarizado de acuerdo con la normatividad de la educación colombiana, el hecho de contar con representantes de este tipo de comunidades dentro del grupo a quien se aplicó la prueba pudo haber influido en los resultados de la misma. Se reconoce que la cosmovisión, la cultura y la lengua influyen en la manera como los estudiantes se acercan al aprendizaje de las matemáticas y queda como un tema para una próxima investigación, indagar sobre los significados que tienen para este tipo de comunidades los términos y signos algebraicos o cómo los elementos culturales pueden llegar a convertirse en un obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas dentro del currículo de las matemáticas tradicionales.

Entre las cuestiones que esta investigación deja abiertas se puede mencionar las siguientes, unas de carácter pragmático y otras de carácter teórico:

- 1) *Pragmático*: Elaborar una propuesta de gestión para lograr que los estudiantes alcancen tanto los conocimientos como las competencias mínimas para enfrentar los cursos de matemáticas de nivel superior.
- 2) *Pragmático*: Diseñar una propuesta de desarrollo profesional para que los profesores que enseñan matemáticas- con formación en matemáticas o sin formación- puedan cambiar sus creencias epistémicas sobre la matemática y sobre su enseñanza. Creemos que esto podría ayudar a los estudiantes a superar sus conflictos de significado.
- 3) *Teórico*: Explorar el concepto de ‘conflicto de significado’ expresado en términos de diagramas de flujo, para encontrar los significados que los estudiantes atribuyen a ciertos





conceptos que impiden que resuelvan los ejercicios matemáticos correspondientes al grado de escolaridad en el cual están matriculados.

- 4) *Teórico*: Expresar los conflictos de significado identificados o dificultades, en términos de las entidades duales propuestas por el Enfoque Onto-semiótico de la cognición y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007).
- 5) *Teórico*: Proponer niveles de algebrización para lograr que los profesores promuevan el desarrollo de competencias de naturaleza algebraica desde los grados sexto.
- 6) *Pragmático*: Estudiar si los estudiantes de etnias indígenas tienen dificultades particulares generadas por la cosmovisión de su cultura ancestral, y determinar si tales dificultades pueden agruparse en función de la etnia.



## Referencias

- Arcavi, A. (1994). "Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics". *For the Learning of Mathematics*. 14(3), 24-35.
- Brizuela, B. M. & Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25<sup>th</sup> Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, 2. 137-144. Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.
- Carifio, J., & Nasser, R. (1994). Algebra Word Problem: A Review of the Theoretical Models and related Research Literature. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, . New Orleans.
- Carraher, D., Schliemann, Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*. 37(2), 87-115.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. *Martínez, E. C. (2008). Resolución de problemas. Investigación en educación matemática XII* (pág. 6). Granada: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. SEIEM. Obtenido de Dialnet.
- Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmetico - algebraicos*. (Tesis Doctoral). Valencia: Universitat de Valencia. Servei de Publicacions.
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 99-110.
- Clement, J. (1982). Algebra Word Problem Solutions: Thought Processes Underlying a Common Misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(1), 16-30.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education*. New York: Routledge.



- Cuoco, A. (s.f). An Action to Process Approach to Solving Algebra Word Problems. Massachuset: Education Development Center.
- Deslauriers, J.-P. (2004). *Investigación cualitativa. Guía práctica*. Pereira: Papiro.
- Duval, R. (1999a). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning*. . Documento presentado en el 21th encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cuernava, Mexico (ERIC Document Reproduction Service No. ED 466 379)
- Duval, R. (1999b). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Trauduccion al Español por Vega, M, Universidad del Valle, Santiago de Cali.
- Fernández, F. (1997). *Evaluacion de Competencias en el Algebra Elemental a través de problemas verbales*. Granada, España: Tesis Doctoral Universidad de Granada.
- Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las ciencias*, 327-342.
- Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2): 19-25.
- Gasco, J.& Villarroel, J.D. (2013). The Motivation of Secondary School Students in Mathematical Word Problem Solving. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*. España. 12(1), 83-106. ISSN: 1696-2095. 2013, no. 32. Disponible en <http://dx.doi.org/10.14204/ejrep.32.13076>
- Godino, J. (2010). *Marcos Teóricos de Referencia en el Aprendizaje Matemático*. Retrieved noviembre 2014, from Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de las Matematicas: Disponible en <http://www.ugr.es/local/jgodino>



Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. On line: [<http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>]

Godino, J., Aké, L., Gonzanto, M. & Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*. 199-219.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2009). Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. *The International Journal on Mathematics Education*, 127-135.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema*, 483-511.

Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento Algebraico para Maestros*. Retrieved Septiembre 17, 2014, from Proyecto Edumat-Maestros: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/>

Gómez-Chacón, I. (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*. 16(3), 431 -450.

Greeno, J. (1991). "Number Sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain." *Journal for Research in Mathematics Education*. 170-218.

Herscovics, N. (1980). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. *Research Issues In The Learning And Teaching Of Algebra.*, 60-86.

ICFES (2003). Resultados de la Evaluación en Colombia 2002-2003. Ministerio de Educación Nacional. *En: Revolución Educativa, Colombia Aprende*. Bogotá.

ICFES (2010). *Resultados pruebas Saber 5° y 9°. Resultados Nacionales*. Resumen Ejecutivo. Bogotá: ICFES.



ICFES (2013). *Orientaciones para la lectura e interpretación de los reportes de resultados para establecimientos educativos y sus sedes-jornadas*. Bogotá, D.C., Colombia.

ICFES (2014). *ICFES Saber 3°. 5° y 9°*. Recuperado el Julio de 2014, de <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteSedeJornada.jsp>

Jupri, A., & Drijvers, P. (2016). Student Difficulties in Mathematizing Word Problem in Algebra. *Eurasian Journal of Mathematics, Science & Tecnología Education*, 2481-2501.

Kaput, J. (2000). Teaching and Learning a New Algebra with Understanding. *National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*. Dartmouth, Massachusetts: ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 662.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Refleitions on its main activities. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.) *The future of the teaching and learning of algebra*. 35 – 44. Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgerba escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 229-240.

Küchemann, D.E. (1981) Algebra. En: *Children's understanding of mathematics*. Hart. K. (Ed.). London.

López, A. (2005). *Deficiencias matemáticas que afectan el aprendizaje del cálculo diferencial en estudiantes de ingeniería una universidad privada*. (Tesis de Maestría). Bucaramanga.: Universidad Industrial de Santander.

Malara, N. & Navarra. G. (2003). Influences of a Procedural Vision of Arithmetic in Algebra Learning. Bellaria. *Work Group 2- CERME 3*.

Martínez, M. (2011). *Utilizacion del metodo geometrico Lineal (MGL) para la resolucion de Problemas de Algebra Elemental*. (Tesis Doctoral).Granada.



Mayer (1981). Frequency Norms and structural Analysis of Algebra Story Problems Into Families, Categories and Templates. *Instructional Science*, 10, 135-175.

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Molina, M. (2005). *Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado. Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo de Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual*. Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del Pensamiento Relacional y Comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. (Tesis Doctoral). Granada: Universidad de Granada. ISBN 8433842145.

Molina, M. (2009). Una propuesta de Cambio Curricular: Integración del Pensamiento Algebraico en Educación Primaria. *PNA* 3(3), 135-156.

Nathan, M., Kintsch, W. y E. Young (1992). A Theory of Algebra-Word- Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments. *Cognition and Instruction*, 9(4), 329-389.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. (Tesis Doctoral). España: Universidad de la Laguna.

Palarea, M. (1999). La adquisición del Lenguaje Algebraico: Reflexiones de una investigación. *Números. Revista didáctica de las Matemáticas*. 40.3-28.



Palarea, M. & Socas, M. (1994) *Algunos Obstáculos Cognitivos del lenguaje algebraico*. Seminario Nacional Sobre Lenguaje y Matemáticas. Universidad de la Laguna. Revista Suma. No.16.

Palarea, M. & Socas, M. (1995). Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos. *Suma*, 20, 29 – 35.

Piaget, J & Inhelder, B. (1982) *Psicología del Niño*. Morata. 11ª Edición. Madrid

Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Granada: COMARES.

Puig, L., & Cerdan, F. (1990). A cerca del caracter aritmetico o algebraico de los problemas verbales. *Segundo simposio Internacional de educacion matematica.*, Cuernavaca.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemática. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. 39 – 55. Barcelona: HORSORI.

Rico, L. (2009). Sobre nociones de represenación y comprensión en la Investigacion en Educación Matemática. *PNA*, 1-14.

Rivera, R., Leyva, E., Amado, M., & Brito, R. (2003). Estudio del dominio del lenguaje algebraico que poseen los estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad Autónoma de Baja California. Instituto Tecnológico de Mexicali. . *Revista Mosaicos Matemáticos*. 11. , 115-120.

Rodríguez, S. (2011). Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria. (Tesis de Máster). Granada. Universidad de Granada.

Rojas, A., & Loaiza, W. (2013). Diagnóstico Sobre Errores Algebraicos En Estudiantes Que Ingresan A La Universidad. *II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática 2013*. Duitama, Boyacá, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Pereira.



Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M. d., & Solaz-Portolés, J. J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias Vol. 6, N°3*, 538-561.

Santillana. (2010 a). *Hipertexto Matemáticas 8*. Bogotá: Santillana.

Santillana. (2010 b). *Hipertexto Matemáticas 9*. Bogotá: Santillana.

Schliemann, A., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A. & Lara-Roth, S., (2003). Algebra in Elementary School. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 4, 127–134

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. In L. Rico, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* 125-154. Barcelona: Horsori.

Solaz-Portolés, J.J. y V. Sanjosé (2007a). Cognitive Variables in Science Problem Solving. *Journal of Physics Teacher Education on Line*, 4(2), 25-32.

Slavit, D. (1999). "The Role Of Operation Sense In Transition From Arithmetic To Algebraic Thought." *Educational Studies in Mathematics*. 251-274.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Madrid: Trillas.

Vergnaud, G. (2007). ¿En qué sentido la teoría de campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? *V Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo.*, 285-302. Madrid.





*Aura Lucía Sterling López*

Weaver, C., & Kintsch, W. (1988). *The Conceptual Estructural Word Problems*. Boulder: University of Colorado. Institute of Cognitive Science.



## **Anexos**

### **Anexo 1. Prueba Piloto**

Nombres y Apellidos: \_\_\_\_\_ Edad: \_\_\_\_\_

- Lee atentamente cada uno de los siguientes enunciados.
- Representa cada enunciado usando lenguaje matemático.
- Escriba todo el proceso, si se equivoca, no borre pero continúe aparte.
- Responda cada pregunta en la hoja correspondiente.

1. Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

\_\_\_\_\_ (Pág. 1)

2. Considere dos números arbitrarios,  $x$  y  $y$ . Represente la siguiente sentencia:

Un número  $x$  es el doble del número  $y$  aumentado en 5.

\_\_\_\_\_ (Pág. 2)

3. Traduce el enunciado en símbolos:

- a. La diferencia entre  $(2b+4a)$  y  $5b$
- b. El cociente entre dos números es igual a 3

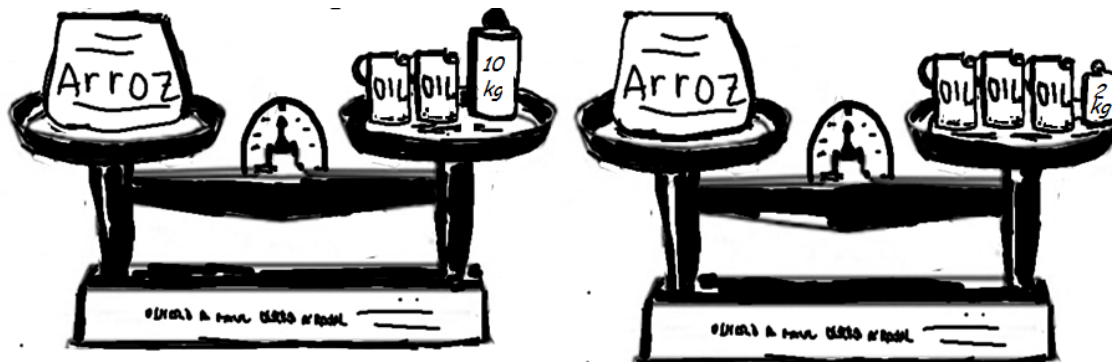
\_\_\_\_\_ (Pág. 3)

4. Escribe la siguiente oración como una ecuación: “La energía  $E$  de un objeto equivale al producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz  $v$ ”

\_\_\_\_\_ (Pág. 4)



5. ¿Cuánto pesa cada galón de aceite (oil) y cada saco de arroz en las siguientes balanzas?



**Nota:** Las pesas al lado del aceite, pesan 10 kilogramos en la balanza del lado izquierdo y 2 kilogramos en la balanza del lado derecho.

\_\_\_\_\_ (Pág. 5)

6. Selecciona la expresión que represente el siguiente enunciado:

- En la bodega hay el triple de empleadas que de empleados.
- b.  $m^3=h$
- c.  $3m=h$
- d.  $m=3h$
- e.  $3m+h$
- f.  $m= h^3$
- g.  $m= 3+h$
- h.  $h= m+3$

Donde “m” representa número de mujeres y “h” representa número de hombres.

**Nota:** si consideras que tu respuesta no está entre las anteriores, por favor escríbela y escribe tu comentario o explicación.

\_\_\_\_\_ (Pág. 6)



## **Anexo 2. Modelo de Consentimiento Informado**

Silvia, noviembre 10 de 2015

Señor(a):

**PADRE O MADRE DE FAMILIA**

Grado 9°

Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro

Cordial Saludo

Con el visto bueno de la rectora de la institución se está desarrollando la Investigación titulada “ *Dificultades manifestadas por estudiantes de 9° grado para representar algebraicamente problemas de palabras*” la cual tiene como objetivo identificar aquellas dificultades que tienen los estudiantes en esta parte importante de la solución de problemas matemáticos. Por tal motivo, le estoy solicitando muy comedidamente su autorización para entrevistar a su hijo (a) y así poder obtener una información más confiable en la investigación.

Los resultados de la investigación servirán para que los docentes diseñen estrategias para el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes y la participación de los estudiantes no repercute en las calificaciones.

Por favor diligenciar el formato adjunto y regresarlo el día de mañana.

Agradezco mucho su atención y colaboración.

Atentamente,

AURA LUCÍA STERLING LÓPEZ

Maestrante en Educación Matemática

Universidad del Cauca



## CONSENTIMIENTO INFORMADO

### PADRES O ACUDIENTES DE ESTUDIANTES

Yo \_\_\_\_\_ identificado con cédula de ciudadanía Número \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ padre (madre o acudiente) del estudiante \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ años de edad del grado 9° de la INSTITUCIÓN EDUCATIVA NUESTRA SEÑORA DEL PERPETUO SOCORRO, he sido informado de que se está realizando la investigación denominada “ *Dificultades manifestadas por estudiantes de 9° grado para representar algebraicamente problemas de palabras*” en la cual se requiere que mi hijo(a) sea entrevistado(a).

Como padres entendemos que:

La participación de mi hijo(a) en esta entrevista no tendrá repercusiones o consecuencias en sus actividades escolares, evaluaciones o calificaciones en el curso.

La participación de mi hijo(a) en la entrevista no generará ningún gasto, ni recibiremos remuneración alguna por su participación.

No habrá ninguna sanción para mi hijo(a) en caso de que no autorice su participación.

La identidad de mi hijo(a) no será publicada y las imágenes y sonidos registrados durante la grabación se utilizarán únicamente para los propósitos de la investigación.

La investigadora garantizará la protección de las imágenes de mi hijo(a) y el uso de las mismas, de acuerdo con la normatividad vigente.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados, y de forma consciente y voluntaria **DOY EL CONSENTIMIENTO** para la participación de mi hijo (a) en la entrevista.

Lugar y Fecha, \_\_\_\_\_

Firma: \_\_\_\_\_

Cédula No.: \_\_\_\_\_ De : \_\_\_\_\_



### **Anexo 3. Solicitud de autorización para realizar la investigación en la IE Nuestra Señora del Perpetuo Socorro**

Silvia, junio de 2015

Hermana

**AYLEM YELA ROMO**

Rectora

IE Nuestra Señora del Perpetuo Socorro

E S D

Cordial Saludo

Como docente de la institución y como estudiante de Maestría en Educación de la Universidad del Cauca, me dirijo a usted de manera respetuosa para solicitarle comedidamente, me otorgue autorización para realizar unas pruebas escritas y algunas entrevistas a los estudiantes del grado 9° con el fin de obtener información que sirva de base para adelantar la investigación denominada "DIFICULTADES MANIFESTADAS POR ESTUDIANTES DE 9° GRADO PARA REPRESENTAR ALGEBRICAMENTE PORBLEMAS DE PALABRAS".

Esta investigación se hace con el interés de conocer las dificultades que tienen los estudiantes en los procesos de traducción algebraica los cuales son fundamentales en el aprendizaje del algebra y posteriores cursos de las matemáticas escolares. Adicionalmente, la información encontrada podrá servir para que los docentes del área de matemáticas busquen estrategias adecuadas que permitan disminuir las dificultades halladas.

Agradezco mucho la atención prestada y colaboración para el buen desarrollo de la investigación.

Sin otro particular y deseando éxitos en sus labores, se despide de usted,

Atentamente,

  
AURA LUCÍA STERLING LÓPEZ

Docente del área de matemáticas

Estudiante maestría en Educación UNICAUCA





## Autorización

	<p>INSTITUCION EDUCATIVA NUESTRA SEÑORA DEL PERPETUO SOCORRO" DE SILVIA CAUCA. AUTORIZADA POR SECRETARIA DE EDUCACION Y CULTURA DEL DEPARTAMENTO DE CAUCA. RESOLUCION No.04922 DEL 6 JULIO DE 2015 CODIGO DANE 119743000088 NIT. 800.030.455-8</p>
--	--

Silvia Cauca, Septiembre 11 de 2015.

Licenciada.  
AURA LUCIA STERLING L  
Docente Area de Matematicas  
Silvia Cauca.

Cordial Saludo:

Por medio de la presente, se le autoriza realizar las pruebas escritas y algunas entrevistas a los estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Nuestra Señora del Perpetuo Socorro de Silvia Cauca, para adelantar la investigación denominada **“DIFICULTADES MANIFESTADAS POR ESTUDIANTES DE 9°. GRADO PARA REPRESENTAR ALGEBRAICAMENTE PROBLEMAS DE PALABRAS”**.

Agradezco su valioso aporte en beneficio de nuestros Estudiantes;

Atentamente

HNA. AYLEM DEL CARMEN YELA ROMO  
RECTORA



#### **Anexo 4. Prueba**

##### **TAREA**

- Lee atentamente cada uno de los siguientes enunciados.
- Representa cada enunciado usando lenguaje matemático.
- Escriba todo el proceso, si se equivoca, no borre, pero continúe aparte.
- Responda cada pregunta en la hoja correspondiente.

1. Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

\_\_\_\_\_ Pág. 1

2. Considere dos números arbitrarios,  $x$  y  $z$ . Represente la siguiente sentencia:

Un número  $x$  es el doble del número  $z$  aumentado en 5.

\_\_\_\_\_ Pág. 2

3. Traduce el enunciado en símbolos:

La diferencia entre  $(2b+4a)$  y  $5b$

\_\_\_\_\_ Pág. 3

4. Traduce el siguiente enunciado en símbolos:

El cociente entre dos números es igual a 3

\_\_\_\_\_ Pág. 4



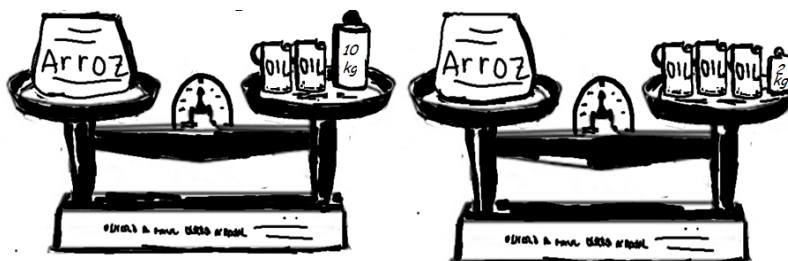


5. Escribe la siguiente oración como una ecuación:

“La energía E de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz v”

\_\_\_\_\_ Pág. 5

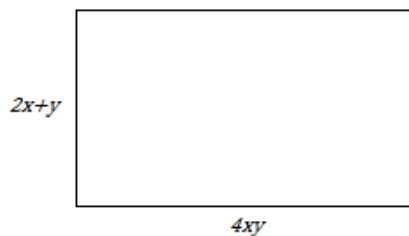
6. ¿Cuánto pesa cada galón de aceite (oil) y cada saco de arroz en las siguientes balanzas?



**Nota:** Las pesas al lado del aceite, pesan 10 kilogramos en la balanza del lado izquierdo y 2 kilogramos en la balanza del lado derecho.

\_\_\_\_\_ Pág. 6

7. Escribe la expresión que represente el área de la siguiente figura:



\_\_\_\_\_ Pág. 7

8. Selecciona la expresión que represente el siguiente enunciado:

- En la bodega hay el triple de empleadas que de empleados.

i.  $m^3=h$



*Dificultades manifestadas por estudiantes de 9° grado  
para representar algebraicamente problemas de palabras*

- j.  $3m=h$
- k.  $m=3h$
- l.  $3m+h$
- m.  $m= h^3$
- n.  $m= 3+h$
- o.  $h= m+3$

Donde “m” representa número de mujeres y “h” representa número de hombres.

**Nota:** *si consideras que tu respuesta no está entre las anteriores, por favor escríbela y escribe tu comentario o explicación.*



### Anexo 5. Preguntas guía para entrevista semiestructurada

1. Si multiplicamos un número por 7 y la sumamos 4 obtenemos el 39. ¿de qué número se trata?

- ¿Cómo hallaste el número? ¿Explícame el procedimiento?
- Representa la siguiente situación:

Si multiplicamos un por 23 y le sumamos y le sumamos 13 obtenemos el 956. ¿De qué número se trata?

2. Considere dos números arbitrarios,  $x$  y  $z$ . Represente la siguiente sentencia:

*Un número  $x$  es el doble de un número  $z$  aumentado en 5.*

- ¿Cómo entiendes la expresión “el doble de”, dame unos ejemplos (ellos probablemente darán ejemplos con números, entonces se pregunta “¿Y si usamos letras...?”
- ¿Cómo representas “el doble de 5”
- ¿Cómo representas el doble de un número cualquiera? ¿Cómo representas “el doble de  $x$ ”
- Lee la expresión:  $2x$
- ¿Qué es aumentar? ¿Cómo se representa el aumento en matemáticas, con qué símbolo o con que operación se puede representar?
- Si digo: un número aumentado en 3, ¿Qué indica esto? ¿Cómo lo interpretas? ¿De qué operación matemática se trata?
- Lee la expresión siguiente  $(x^2 + z^1)^5$

3. Traduce el enunciado en símbolos: la diferencia entre  $(2b+4a)$  y  $5b$ .

- ¿Para ti qué es la diferencia entre dos cantidades? Por ejemplo: la diferencia entre 7 y 8.
- ¿Cómo representas esa diferencia?
- Si te digo: encuentra la diferencia entre  $a$  y  $b$ , ¿Cómo representas esa diferencia?

De acuerdo con lo que respondiste en la prueba:

*La diferencia entre  $(2b+4a)$  y  $5b$*

¿Es  $(2b+4a)$  menor que  $5b$ ? ¿Qué te informa que es así? ¿Cómo le explicarías a un compañero?



4. Traduce el siguiente enunciado en símbolos:

El cociente entre dos números es igual a 3.

- Para ti, ¿Qué es el cociente entre dos números?
- ¿A qué operación se refiere?
- Representa el cociente entre 37 y 12
- Cuéntame... ¿Qué quisiste expresar aquí?

entre 2 y 1.



$$4a - 1y = 3ay$$

$$8 - 5 = 3 \quad a6 - b3 = 3$$

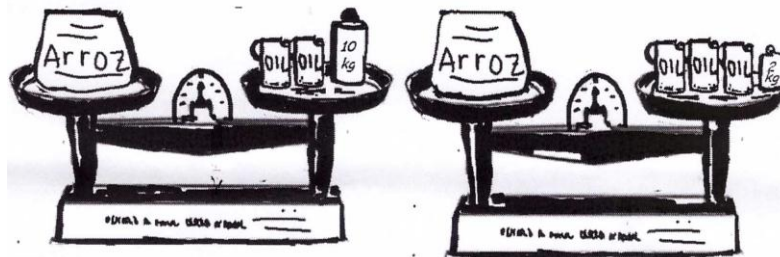
(Indagar sobre el uso de las letras y los números que aparecen allí, qué significado tienen para el estudiante)

5. Escribe la siguiente oración como una ecuación:

“La energía E de un objeto equivale (o es igual) al producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad de la luz v”

- ¿Qué entiendes por equivalencia?
- ¿Cómo representas la equivalencia entre dos expresiones?
- ¿Cómo representas: el producto de la masa por el cuadrado de la velocidad?

6. ¿Cuánto pesa cada galón de aceite (oil) y cada saco de arroz en las siguientes balanzas?



Nota: Las pesas al lado del aceite, pesan 10 kilogramos en la balanza del lado izquierdo y 2 kilogramos en la balanza del lado derecho.

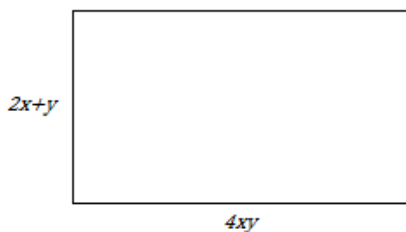


- ¿Qué situación ves aquí? ¿Podrías describir lo que ves? ¿Podrías explicar lo que ves aquí a un amigo? ¿Qué significa que las balanzas no estén inclinadas?

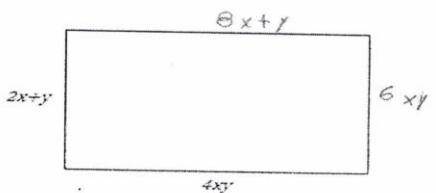
Para aquellos que no respondieron la pregunta:

- ¿Qué se está pidiendo hacer en este ejercicio? ¿Qué te dificultó resolver el problema? ¿Qué parte te parece difícil o qué parte no entiendes?
- ¿Qué información puedes obtener de esta grafica?
- Dime ¿Qué datos cosas o datos puedes obtener de esta grafica?
- ¿Crees que se puede asociar una ecuación con la información de la gráfica? Trata de escribirla.

7. Escribe la expresión que representa el área de la siguiente figura:



- Se solicita hallar el área de figuras elaboradas en papel cuadriculado y pedir la representación.
- Teniendo en cuenta lo que escribiste:



Cómo obtengo esto #?  
 R: 8?  
 ¿6?  
 toda la expresión de donde sale.

$7x+y - 2x+y + 3x + 4xy - 5xmy + 6xy - 2x+y + 8x+y - 9xy + 70xy+x$

- ¿Cómo le explicarías esto que hiciste a un amigo?
- ¿Qué significa por ejemplo el 3 que multiplica a la x? si tu amigo no entiende qué significa la expresión  $4xy$  cómo le explicarías a qué se refiere este término
- ¿Las dos ecuaciones son respuestas a la pregunta? ¿Cómo las obtuviste?

8. Selecciona la expresión que represente el siguiente enunciado:

*En la bodega hay el triple de empleadas que de empleados.*



*Dificultades manifestadas por estudiantes de 9° grado  
para representar algebraicamente problemas de palabras*

- a)  $m^3=h$
- b)  $3m=h$
- c)  $m=3h$
- d)  $3m+h$
- e)  $m= h^3$
- f)  $m= 3+h$
- g)  $h= m+3$

*Donde “m” representa número de mujeres y “h” representa número de hombres.*

***Nota:** si consideras que tu respuesta no está entre las anteriores, por favor escríbela y escribe tu comentario o explicación.*

- ¿Cómo representas el triple de una expresión?
- Dijiste que la respuesta no estaba entre las opciones y escribiste esta respuesta, ¿Cómo la obtuviste?

$m^{60} = h^{50}$

es  $m^{60}$  porque si es el triple y  $20+20+20$  da 60  
y el 50, es de hombres.