Contrato didáctico configurado con estudiantes de grado noveno en la resolución de ecuaciones cuadráticas

Ronald Miguel Chilito Guauña

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Licenciatura en Matemáticas

Popayán

2022

Contrato didáctico configurado con estudiantes de grado noveno en la resolución de ecuaciones cuadráticas

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Ronald Miguel Chilito Guauña

Director

Mg. Ángel Hernán Zúñiga Solarte

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Licenciatura en Matemáticas

Popayán

2022

Nota de acceptación

____
____
____
____

Director: ____________________________________

Mg. Ángel Hernán Zúñiga Solarte

Jurado: ____________________________________

Gladis Jazmín Escobar Mosquera.

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 22 de Abril 2022

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al profesor Ángel Hernán Zúñiga Solarte quien además de transmitirme su vocación investigadora, me orientó, ayudó y estimuló constante y directamente en la construcción de mi trabajo de grado durante estos años. Agradezco la plena confianza que siempre me ha brindado, así como la dedicación y la atención que en todo momento me ha ofrecido.

Agradezco a la profesora Gladis Escobar por sus consejos en el aula y su experiencia con el curso.

Agradezco a la Institución Educativa Técnica Tomás Cipriano de Mosquera por permitirme el ingreso a sus instalaciones, y el apoyo que ahí se me dio durante el tiempo que realicé la práctica. Quisiera también hacer extensivo mi agradecimiento a los estudiantes del grado noveno por su buen comportamiento durante este proceso.

Índice

Pág.

Índice de tablas

Pág.

Índice de figuras

Pág.

Presentación

Este trabajo es una sistematización realizada a partir de la práctica pedagógica en la Institución Educativa Técnica Tomás Cipriano de Mosquera en el grado noveno, que consistió en la enseñanza del área de matemáticas, en el tópico de resolución de la ecuación cuadrática. El practicante durante su acompañamiento, percibió varias dificultades en algunos estudiantes en la materia, como las operaciones con números reales o expresiones algebraicas, por este motivo planeó una estrategia pedagógica, que consistió en la elaboración de un plan de aula que se caracterizó por retomar temas de años anteriores, talleres, participación en clase y exámenes, teniendo en cuenta las sugerencias de la docente titular y el plan curricular de la institución, donde surge la interacción entre el docente y estudiante, lo cual conlleva al objeto de estudio, a reflexiones y conclusiones, en ese orden de ideas este documento se divide en cinco capítulos:

Capítulo 1: Contexto Institucional de la Práctica Pedagógica, se determinan las características de la institución, población, misión y visón institucional.

Capítulo 2: Enseñanza en el aula, se precisa lo enseñado por el practicante en la resolución cuadrática, la preparación de un diseño de aula, que concuerda con el plan curricular del colegio y concuerda con los temas (trabajos, ejercicios en el recinto, casos de factorización), para la resolución de la ecuación cuadrática.

Capítulo 3: Objeto de estudio y marco conceptual, hace referencia al vínculo que se puede establecer entre docente y estudiante, teniendo en cuenta las definiciones de algunos autores sobre el contrato didáctico.

Capítulo 4: Análisis de los registros, se establecerá si existe un contrato didáctico entre el docente y estudiante, mediante la realización de la resolución de la ecuación cuadrática, es decir, se establece un acuerdo, mediante una estrategia didáctica, donde están involucrados dos individuos, para llegar a un objetivo que puede ser cognitivo, metodológico o de comportamiento, mediante los ejercicios que ellos desarrollan, teniendo en cuenta los referentes teóricos del anterior capítulo.

Capítulo 5: Conclusiones, se realiza una pequeña reflexión sobre la sistematización, el aprendizaje que adquirió el practicante con sus estudiantes durante su estadía en el colegio.

Capítulo 1. Contexto Institucional de la Práctica Pedagógica

Este capítulo hace mención a la Institución Educativa Técnica Tomás Cipriano de Mosquera (IE-TCM) donde se realizó la práctica pedagógica. Se optó por realizar la práctica pedagógica en esta institución por su enfoque técnico y empresarial, debido a que brinda una formación académica y laboral para futuros jóvenes interesados en las nuevas tecnologías. La práctica se realizó en el año lectivo 2012, jornada de la tarde, con los estudiantes del grado noveno B, en el área de matemáticas. La IE-TCM cuenta con tres jornadas: en la mañana funcionan los grados de primaria; en la jornada de la tarde educación media y en la jornada nocturna educación de adultos.

1.1 Sedes

La Institución Educativa Técnica Tomás Cipriano de Mosquera tiene dos sedes: la sede principal donde se realizó la práctica pedagógica, que desarrolla la actividad curricular en tres periodos académicos y se encuentra ubicada en el barrio Tomás Cipriano en la Carrera 23 # 11-20; la otra sede se llama Manuela Beltrán y está ubicada en la Calle 11 # 21-00 en el Retiro Alto. Ambas sedes comparten una característica en común, pertenecen a barrios de estrato medio y brindan su apoyo a los estudiantes de escasos recursos para ayudar a materializar su proyecto de vida, enfocando los esfuerzos hacia los estudios profesionales, carreras técnicas, tecnológicas y empresariales, la (IE-TCM) cuenta con una sede principal, para los grados de primaria y bachillerato, donde por cada grado existe dos grupos, el A y B, en la jornada de la tarde

1.2 Plan de estudio Institucional

El plan de estudios de la Institución se basa en la pedagogía tradicional, pero está a sujeta a cambios e innovaciones, según los estándares que sugiere el ministerio de educación; una de sus características o aportes fundamentales es el reconocimiento de la "escuela" como una "institución formadora", cuyo encargo social es el de educar a todas las capas sociales y como estado tener la capacidad de llevar a cabo la política de la orientación social propia de toda república democrática.

Ahora bien, teniendo en cuenta los aspectos anteriores, la práctica pedagógica fue realizada en beneficio de los estudiantes y siguiendo el plan de estudios que en su momento era el sugerido por el ministerio de educación, es decir, que todo va enfocado a que los estudiantes, aprendan y apliquen conceptos matemáticos, en el proceso de esta práctica se les brindaron conocimientos de la ecuación cuadrática, en el siguiente capítulo enfatizaremos más sobre este particular.

La IE-TCM cuenta con un plan de área de matemáticas, en el cual se hace énfasis en el pensamiento variacional y sistema algebraico en grado noveno. Aquí se abordan los casos de factorización, ecuaciones de primer y segundo grado, problemas de modelación, estudios de la función cuadrática y su gráfica, para ser enseñados en el marco del año lectivo (IETCM, 2011).

La enseñanza de la ecuación y función cuadrática se constituyó en el objeto de enseñanza en la práctica pedagógica. El programa institucional incluye los siguientes ítems;

1. Comprender patrones, relaciones y funciones.
2. Representar y analizar situaciones, y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.
3. Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
4. Analizar el cambio en contextos diversos (IETCM, 2011, p.18)

La práctica pedagógica asumió la enseñanza de los contenidos previstos para el tercer periodo, los cuales son:

- Factorización de polinomios
- Productos notables de polinomios
- Ecuaciones de primer grado

- Ecuaciones 2x2
- Ecuaciones 3x3
- Ecuaciones cuadráticas con una incógnita
- Problemas que se modelan con ecuaciones de primer grado con dos o tres incógnitas
- Problemas que se resuelven con ecuaciones cuadráticas
- Estudio especial de la pendiente de una recta
- Estudio la función cuadrática y su gráfica (IETCM, 2011, p.26).

Durante la inmersión en las actividades educativas en la IETCM realizada por el practicante se consideró apropiado retomar temas de estudio del año académico anterior, con el fin de que los estudiantes estuvieran familiarizados con ellos y así lograr, durante el tercer trimestre, el desarrollo de la práctica para la enseñanza de la ecuación cuadrática.

1.3 Problemática Escolar

Durante dos semanas el practicante fue asistente de aula, con el objetivo de conocer a los estudiantes; hubo observación a las clases de la docente titular, aprendiendo sobre el manejo y control de la disciplina; algunas veces existió participación, ayudando a los estudiantes a llevar a la práctica ciertos ejercicios en grupo, lo que generó empatía y un ambiente de confianza propicio para el posterior abordaje de la práctica pedagógica.

Durante la estadía del practicante en el grado noveno, se pudieron evidenciar falencias de la mayoría de los estudiantes en conceptos matemáticos, como la realización de operaciones aritméticas y algebraicas, que no recordaban muy bien de manera explícita los métodos de los casos de factorización o algunas propiedades de los números reales; se constató gracias a los trabajos que se realizaron en el salón de clase a través de talleres, abordaje de las actividades de la herramienta denominada calendario matemático, entre otros. La falencia operatoria con números enteros y con expresiones algebraicas que tenían los estudiantes fueron atendidas por medio de la ejercitación de esas operaciones por medio de talleres en clase y con la supervisión del practicante. Por la anterior razón y en acuerdo con la profesora titular se incluye en el plan de área de matemáticas del grado noveno en el tercer trimestre un repaso o enseñanza de los casos de factorización que serán de gran ayuda para la resolución de la ecuación cuadrática y la enseñanza de la resolución de la ecuación lineal. Más adelante, se procedió a enseñar la resolución de la ecuación cuadrática y su gráfica, este diseño y desarrollo particular se especifica en el capítulo 2.

1.4 Generalidades

Cuando se realizó la práctica pedagógica en la Institución, los estudiantes cursaban el tercer trimestre del año (en total son 3 periodos por año). El primer compromiso que se adquirió fue cumplir con la misión y visión establecida por el plantel, y aportar desde la práctica a los procesos de aprendizaje de matemáticas en un trabajo similar al que ejecutaba la docente titular.

La misión de la Institución se orienta al compromiso vital y permanente que tiene con el desarrollo social, comunitario y humanístico mediante el ejercicio de una educación critica, responsable y creativa, posibilitando la formación integral e impulsando el conocimiento de la ciencia, tecnología y cultura, puestas al servicio de la sociedad para propender por el mejoramiento de la calidad de vida individual (desde el paso a la educación superior, hasta la posibilidad de potenciar sus capacidades para ejercer el trabajo digna y eficazmente) y colectiva (IETCM, s.f.).

La Institución cuenta con 800 estudiantes aproximadamente, cada grado se divide en dos salones, y cada salón cuenta con 36 a 44 estudiantes. El grado noveno B tenía 36 estudiantes entre hombres y mujeres, de edades entre los 13 a 16 años, en su mayoría de barrios de estrato medio-bajo, jóvenes con diversas personalidades, algunos prestaban poca atención a las clases. Se evidenció que varios de ellos presentaban problemas de consumo de sustancias psicoactivas, por tal razón, se debía prestar atención constante en el momento del ingreso de los estudiantes a las aulas durante los descansos, de cualquier manera, la relación de los estudiantes y el practicante durante el tercer trimestre fue buena y respetuosa.

Capítulo 2. Enseñanza en el aula

En este capítulo se presenta la manera en la que se desarrolló la enseñanza de la ecuación cuadrática. Se inició con un trabajo de repaso de los casos de factorización y ecuación lineal, para dar lugar a la enseñanza de ecuación y función cuadrática, con el acompañamiento y supervisión de la docente titular. Las herramientas y actividades de enseñanza utilizadas fueron: talleres, ejemplos, exámenes, participación en el aula, trabajos para la casa y salidas al tablero.

Se tomó como libro guía el *Algebra de Baldor* y el libro *Desafíos matemáticos 9 (1998)* que cuenta con diversos ejemplos y ejercicios en la temática de interés del curso. Se utilizaron las definiciones y ejemplos de estos libros para enseñar los siguientes contenidos.

- Repaso de los casos de factorización
- Resolución de ecuación cuadrática mediante casos de factorización y fórmula cuadrática
- Función Cuadrática

2.1 Proceso de enseñanza

Con base en el plan curricular de la institución, los tiempos de cada periodo y objetivos que estos implican, se elaboró un plan de aula para la enseñanza de las temáticas matemáticas de resolución de la ecuación y función cuadrática que incluyó las siguientes actividades: repaso de algunos casos de factorización; ejercitación del proceso de resolución de ecuación cuadrática mediante casos de factorización y en aplicación de la fórmula cuadrática.

Metodológicamente las temáticas fueron presentadas a partir de sus enunciaciones matemáticas, seguido de una explicación por parte del practicante de su significado a través de una ejemplificación que conducía a la realización por parte de los estudiantes de ejercicios similares a los explicados. Para ser resueltos de forma individual se diseñaron y revisaron talleres sobre cada una de las temáticas enseñadas. La evaluación se realizó a través de pruebas escritas que privilegiaron la forma y contenidos de los talleres, en tal sentido, la resolución de talleres se consolidó como el espacio de repaso de lo visto en clase y al tiempo en preparación para atender las pruebas escritas.

El plan de aula diseñado por el practicante se presenta en la tabla 1.

Tabla 1.

Diseño plan de aula

Bloque o eje temático	**Tema a desarrollar**	**Planeación docente descripción de actividades**	**Criterios de evaluación**	**Recursos y materiales**	**Duración**
PENSAMIENTO VARIACIONAL **Sistemas de ecuaciones** **Función cuadrática**	-Repaso de algunos casos de factorización -Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales - Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Sistemas -Formular general para resolver una ecuación de segundo grado	**Motivación:** -Planteamiento de situación -Problema Ejemplo - Preguntas previas - Consulta -Juego o dinámica -Retroalimentación **Desarrollo:** - Aplicación de taller - Trabajo individual o grupal **Evaluación:** - Escrita, Quiz. - Ejercicios al tablero - Participación	Cognitivo: Identifica los conceptos básicos de las propiedades de los números reales. Procedimental: Talleres, Evaluaciones escritas y orales, Exposiciones Actitudinal: Responsabilidad Cumplimiento Orden Respeto Convivencia	**Secundaria** Calculadora	7 semanas

- Consulta

Fuente. Información del Plan de estudio de la IETCM, 2011, p.18

En consonancia con el sistema institucional de evaluación se asume que la calificación definitiva que los estudiantes obtienen en esta unidad temática proviene del promedio de calificaciones obtenidas en la dimensión del ser y la del saber hacer; entiéndase que al calificar la primera dimensión se calificó usando como criterio predominante la disciplina del estudiante en el aula y la segunda dimensión se calificó a través de los exámenes y talleres. El practicante les explicó a los estudiantes los porcentajes de la nota en la materia, es decir que se iba a evaluar la nota del ser y del saber hacer, los cuales se caracterizo de la siguiente manera: la nota del ser tenía un porcentaje del 20% donde se tenía en cuenta la participación y la disciplina en el aula, y la nota del saber hacer del 80% de los talleres y el examen.

Del conjunto de actividades de enseñanza previstas en el plan de aula se detallan las relativas a la resolución de ecuación cuadrática haciendo uso de los casos de factorización o la formula cuadrática, con el fin de hallar las raíces de la ecuación. Teniendo presente lo anterior, se clasificó el conjunto de ecuaciones a resolver según tipos de ecuaciones de segundo grado y casos de factorización correspondientes para su resolución, es decir, se enseña algunos casos de factorización, los cuales son necesarios, se describieron los tipos de ecuaciones que se enseñaron en el aula. Con este propósito se pretendía que el estudiante identificara la ecuación y el caso correspondiente; luego, se procedía a revisar con detalle las operaciones aritméticas o algebraicas; uno de los objetivos era usar lo menos posible la calculadora, en ocasiones se utilizó cuando se debían aplicar las fórmulas cuadráticas.

Los tipos de ecuaciones que se enseñaron tienen las siguientes características:

a. $ax^2 + bx = 0$, donde no aparece el término independiente

b. $x^2 - a^2 = 0$, donde no aparece el término que acompaña a la variable de grado uno

c. $x^2 + bx + c = 0$, en esta ecuación si aparecen todos los términos, pero la variable que está al cuadrado permanece con el valor numérico de uno.

d. $ax^2 + bx + c = 0$, esta ecuación si tiene todos sus términos que la identifican.

A continuación, se describen en detalle las actividades de enseñanza realizadas, exceptuando las relativas a los métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Detalle descriptivo que pretende dar paso al proceso de reflexión sobre el contrato didáctico que se configuró alrededor del tema de la resolución de ecuación cuadrática.

2.1.1 Repaso de los casos de factorización

En este apartado se dará información detallada de la manera como se presentaron y desarrollaron los casos de factorización para el entendimiento de los estudiantes.

2.1.1.1 Factor común. De acuerdo con Álgebra de Baldor, el factor común es aquel número o letra que se encuentra repetida en toda la expresión algebraica. Si es coeficiente, es el máximo común divisor de todos los coeficientes de la expresión algebraica. Si es parte literal, es aquella que se repite en cada término de la expresión algebraica con el menor exponente (Baldor, 1972, p.144).

A partir de esta definición se decide dar algunos ejemplos para mejorar su explicación a los estudiantes.

Ejemplo 1. Agrupar los términos comunes que se encuentran en el polinomio:

$ax + bx + cx$ **,** fue el primer ejemplo que se presentó a los estudiantes para identificar la variable común en esta expresión; se procedió a resolverla de la siguiente manera: $x(a + b + c)$**,** se les informa a los estudiantes que la variable *x* se distribuye en cada factor, es decir que multiplica a las demás variables; en las propiedades de los números reales, este proceso significa la "distribución de la multiplicación respecto a la suma´´, en su forma general, sean *a*, *b* y *c* que pertenecen a los números reales, entonces $a*(b + c) = a*b + a*c$.

Ejemplo 2. Factorizar la siguiente expresión mediante factor común: $3yx + 3z + 3w$, donde el factor común es el número 3; este ejemplo muestra que no sólo las variables son comunes, sino que los números también lo son. Luego de esta aclaración se les informa que se procede como el anterior ejemplo de tal forma: $3*(yx + z + w)$.

Ejemplo 3. Factorizar la siguiente expresión mediante factor común: $15xy + 3x + 12xz$, con este ejemplo se explica a los estudiantes que la variable en común es la *x*, pero que también el número 3 es el mínimo común múltiplo de 15 y 12, es decir el 15 = 3*5 y 12 = 3*4; a continuación, se procede a factorizar con lo que obtenemos $3x*(5y + 1 + 4z)$.

A partir de estos ejemplos, se deja claro a los estudiantes que es un método necesario para desarrollar ecuaciones cuadráticas.

2.1.1.2 Diferencia de cuadrados. Se llama el conjugado de (a + b) a (a – b) si el producto $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, donde cada factor es el conjugado del otro. Donde siempre la diferencia de cuadrados es igual al producto de la suma por la diferencia de sus bases. (Baldor, 1972, p.100).

Ejemplo 1. Factorizar la siguiente expresión. $x^2 - 25$. Como se observa el primer término ´´*x*´´ ya está elevado al cuadrado, pero el 25 no, entonces se explica que hay que buscar un número que multiplicado por sí mismo de 25 o hallar la raíz de dicho número, cuyo resultado es 5, porque $5*5=5^2=25$; luego se sustituye esta expresión haciendo uso de las propiedad de los exponentes, obteniendo $x^2 - 5^2$, y luego se aplica la diferencia de cuadrados, es decir: $x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$.

Ejemplo 2. Factorizar la siguiente expresión. $9x^2 - 25y^2$. En esta expresión la variable ya está al cuadrado, pero el número *9* no lo está, entonces se busca un número que multiplicado por sí mismo de *9* o su raíz, el cual es *3*, ya que $3*3 = 3^2 = 9$; luego se reemplaza este término en la expresión, análogamente se hace para el segundo término, el cual es el *5*, porque $5*5 = 5^2 = 25$, por tanto la expresión queda: $(3x)^2 - (5y)^2$; ahora se procede a realizar la diferencia de cuadrado y la respuesta da como resultado $(3x + 5y)(3x - 5y)$; aquí se utiliza la propiedad de los exponentes así, sean a y b números reales, sea n un número natural, se tiene que $(a * b)^n = a^n * b^n$.

Ejemplo 3. Factorizar la siguiente expresión algebraica por medio de diferencia de cuadrados: $4x^2 - 25 = (2x)^2 - (5)^2 = (2x + 5)(2x - 5)$. En este ejemplo se les explica a los estudiantes que el número *4* y *5* son números cuadrados, es decir que el *4* se puede ver como $2*2 = 2^2$ y el *25* es igual $5*5 = 5^2$, por otra parte el primer término es *4x*, por lo tanto se debe encontrar la raíz de todo el término y colocarla en paréntesis; ya que la variable *x* se encuentra elevada al cuadrado y el *4* es un número cuadrado entonces se coloca dentro de un paréntesis sus raíces así, $(2x)$ y lo mismo se hace con el *25*, obteniendo la siguiente expresión: $(2x)^2 - (5)^2$; con este hecho se les explica a los estudiantes cómo aplicar esta definición, entonces se procede a abrir un paréntesis y se coloca la raíz del primer factor $4x^2$, donde se les informa que la raíz es la expresión que está dentro del paréntesis $(2x)$, luego de este paso se coloca la raíz del segundo factor *5* con un signo positivo y se cierra el paréntesis, siguiendo el esquema de la definición; ahora se utiliza la diferencia de cuadrados $(2x+5)(2x-5)$ como se procedió en el ejemplo 2 y la propiedad de los exponentes. Ahora se coloca como ejercicio en el aula la siguiente expresión: $9x^2 - 25$.

2.1.1.3 Trinomio de la forma. $x^2 + bx + c$. *Este tipo de trinomio tiene las siguientes características.*

1. Tiene un término literal positivo elevado al cuadrado y con coeficiente uno, $1(x^2)$

2. Posee un término que tiene la misma letra que el término anterior pero elevado a uno; bx^1 (puede tener un coeficiente negativo o positivo).

3. Tiene un término independiente de la letra que aparece en los otros dos (puede tener un coeficiente negativo o positivo).

Luego de tener en cuenta estas características, se procede a dar los pasos para factorizar este polinomio:

1. Se descompone el trinomio en dos factores binomios cuyo primer término será la raíz cuadrada del término $x^{2.}$
2. El signo del primer binomio será el mismo signo que tenga el término "*bx*", el signo del segundo binomio será igual a la multiplicación de los signos de "*bx*" y de "*c*".
3. Si los dos factores tienen signos iguales entonces se buscan dos números cuya suma sea igual que el valor absoluto del factor "*b*" de "*bx*", y cuyo producto sea igual al valor absoluto del factor "*c*", estos números son los segundos términos de los factores binomios.
4. Si los dos factores tienen signos diferentes entonces se buscan dos números cuya diferencia sea igual que el valor absoluto del factor "*b*" de "*bx*", y cuyo producto sea igual al valor absoluto del factor "c", el mayor de estos números será el segundo término del primer factor binomio, y el menor de estos números será el segundo término del segundo factor binomio (Baldor, 1972, p.149).

A continuación, se procede a dar un ejemplo explicativo; factorizar $x^2 + 10x + 24$. Para desarrollar este polinomio se tienen en cuenta los pasos ya mencionados:

- $(x \quad)(x \quad)$. se descompone el primer término en factor de sus cuadrados.
- $(x + \ )\ (x + \ )$. se multiplican los signos de los *10* y *24*.
- $(x + 4)\ (x + 6)$. Se explica a los estudiantes que deben encontrar dos números que multiplicados den como resultado *24* y que la suma de estos dos de *10*, por lo tanto, los candidatos son el *6* y *4*, ya que $6 * 4 = 24$ *y* $6 + 4 = 10$.

Se deja como ejercicio en el aula los siguientes trinomios:

- $m^2 + 8m + 15$
- $a^2 - 2a - 24$

Con el objetivo de identificar si los estudiantes entienden los procesos explicados por el profesor en el aula, se propone que el estudiante tome como guía el ejemplo elaborado.

2.1.1.4 Trinomio de la forma. $ax^2 + bx + c$. Este tipo de trinomio se diferencia del anterior debido a que el término al cuadrado ($\mathbf{x}^2$) se encuentra precedido por un coeficiente diferente de uno (debe ser positivo). Este se trabaja de manera distinta, como se sugiere a continuación:

1. Se multiplica el coeficiente "*a*" del factor "ax^2" por cada término del trinomio, dejando esta multiplicación indicada en el término "*bx*" de la manera "*b(ax)",* y en el término "ax^2" de la manera ´´$(ax)^2$´´.

2. Se descompone el trinomio en dos factores binomios cuyo primer término será la raíz cuadrada del término ´´$(ax)^2$ ´´la que sería "*ax".*

3. Al producto resultante se le divide entre el factor "*a*", con el fin de no variar el valor del polinomio.

4. El signo del primer binomio será el mismo signo que tenga el término "*bx*", el signo del segundo binomio será igual a la multiplicación de los signos de "*bx*" y de "*c*".

5. Se buscarán los segundos términos de los binomios según los pasos tres y cuatro del caso del trinomio anterior (Baldor, 1972, p.163).

A continuación, se procede con el ejemplo explicativo: factorizar el siguiente trinomio: $3m^2 + 8m + 5$.

El primer paso que se debe realizar es identificar qué valor numérico acompaña a la variable que está al cuadrado, en este caso el valor es el número 3, luego este valor multiplicará al polinomio; esta labor se procede mediante un paréntesis de la siguiente forma, $3(3m^2 + 8m + 5)$, luego se aplica la propiedad de los números reales de la distribución, es decir el número *3* multiplica cada término que está dentro del paréntesis de la siguiente manera, $3(3m^2) + 3(8m) + 3(5)$, ahora se explica que $3*3=3^2=9$ y por propiedades de los exponentes se obtiene que $3(3m^2) = (3m)^2$; se intercambia de posición el segundo término por la conmutatividad de los números reales, es decir $3(8m)= 8(3m)$, obteniendo una nueva expresión del polinomio el cual queda como, $(3m)^2 +8(3m) + 15$, de este paso se factoriza como se realizó en el anterior caso, es decir $(3m + \ )(3m + \ )$, pero como se multiplico el número 3, hay que dividir por el mismo; por lo tanto, el polinomio queda de esta manera $\frac{(3m+\ )(3m+\ )}{3}$, luego se buscan dos números que multiplicados den *15* y sumados *3*, los candidatos son *5* y *3*, ahora los colocamos dentro de los paréntesis, $\frac{(3m+3)(3m+5)}{3}$ para finalizar se usa el factor común en el primer paréntesis, es decir factorizamos el *3*, de tal manera $3*(m + 1)$ y como el *3* está dividiendo se cancela y así se obtiene el polinomio ya factorizado de la siguiente manera, $(m + 1)(3m +5)$.

Con este último caso enseñado a los estudiantes se culmina el repaso de factorización, y se les informa que este tipo de trinomios tienen una fórmula que es de gran ayuda para resolver ecuaciones de segundo grado, por tanto, este trinomio se desarrollará mediante dicha fórmula y no por este caso de factorización; de esta forma se continuará con la explicación de la ecuación cuadrática, donde se aplicarán los casos vistos para su desarrollo y así obtener la solución.

2.1.1.5 Resolución de la ecuación cuadrática mediante casos de factorización y fórmula cuadrática

- ***Ecuación lineal.*** Se realizó un breve repaso sobre la ecuación lineal mediante ejemplos sencillos y después dar paso al estudio de la ecuación cuadrática. Los ejemplos que se realizaron en el aula fueron los siguientes:

Hallar el valor de **x** para que se cumpla la igualdad:

- $x + 5 = 0$
- $2x + 10 = 0$
- $5x + 4 = 2x + 6$

Con estos tres ejemplos se recordó a los estudiantes las características de la ecuación lineal y cómo se desarrolla utilizando el despeje de la variable, cada ejemplo tiene un nivel de dificultad.

A continuación, se desarrollan las 3 ecuaciones.

1). $x + 5 = 0$. Este tipo de ecuación es de nivel básico, la idea es dejar el valor de la variable x sola, luego se suma el opuesto del 5 en ambos lados de la igualdad obteniendo el siguiente resultado: $x + 5 -5= 0 -5$, de ahí se tiene que $5 -5 = 0$ y $0 – 5 = -5$; luego, la ecuación lineal queda $x =-5$.

Otra forma de resolver esta ecuación es explicar a los estudiantes que se toma el número 5 y se pasa al otro lado de la igualdad, pero con el signo contrario, de esta forma se obtiene el mismo resultado y con menos pasos.

2). $2x +10 = 0$. Es una ecuación de nivel medio, y para resolverla se hace el mismo procedimiento que en la anterior ecuación; es decir, se pasa el número 10 al otro lado de la igualdad, pero con signo contrario, y se obtiene lo siguiente: $2x =-10$; sin embargo, la variable x está acompañada por el 2, entonces se necesita despejarla y la manera correcta es dividir por ½ en ambos lados de la ecuación de esta forma, $(\frac{2}{2})\ x = \frac{10}{2}$; ahora se obtiene $x = 5$. Otra manera rápida de explicar la forma como se resuelve es que, cuando la variable x está acompañada con un número, se divide este número al otro lado de la igualdad y así se obtiene el mismo resultado.

3). $5x + 4 = 2x + 6$. Esta ecuación es de nivel más difícil, ya que se combinan los pasos que se realizaron en las anteriores ecuaciones; además, se informa al estudiante que cuando se despeja, a un lado de la igualdad se dejan las variables y en el otro los números, de la siguiente forma. $5x - 2x = 6 - 4$, teniendo en cuenta que cuando se hace el despeje la variable como el número cambia de signo, luego el resultado que es $3x = 2$, ahora se divide por ⅓ y la solución es $x = ⅔$.

Luego de este repaso rápido de la solución de la ecuación lineal, se procede a dar la definición de la ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado, para que los estudiantes identifiquen y reconozcan las diferencias de su desarrollo con respecto a la ecuación lineal.

2.1.1.6 Ecuación Cuadrática. De acuerdo con el texto guía Desafíos Matemáticos 9 (1998) Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática de una variable es una ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos cuyo grado máximo es dos, es decir, una ecuación cuadrática puede ser representada por un polinomio de segundo grado o polinomio cuadrático.

La expresión canónica general de una ecuación cuadrática de una variable es: $ax^2 + bx + c = 0$, para $a \neq 0$.

Donde x representa la variable, y donde a, b y c son constantes; a es el coeficiente cuadrático distinto de 0, b el coeficiente lineal y c es el término independiente.

Este polinomio se puede representar mediante una gráfica de una función cuadrática o parábola. Esta representación gráfica es útil, porque la intersección de esta gráfica con el eje horizontal coincide con las soluciones de la ecuación “y dado que pueden existir dos, una o ninguna intersección, estos pueden ser el número de soluciones reales de la ecuación”.

Posteriormente a que se definiera el concepto de ecuación de segundo grado, se procede a dar ejemplos y cómo resolverlos, mediante factorización. El primer ejemplo utilizando factor común que se realizó fue $ax^2 + bx = 0$ que se resuelve de la siguiente forma: $x*(ax + b) = 0$, entonces $x = 0$ o $x=-b/a$ con a diferente de cero, usamos la propiedad de los números reales, la cual es: si $(a*b) = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Después de la definición, y justificación matemática del proceso de resolución de una ecuación cuadrática, se desarrollan en clase algunos ejemplos, como los siguientes:

1) $x^2 + 3x = 0$. El primer paso que se realiza para resolver esta ecuación es notar que la variable en común es la x, y se usa el factor común, luego la ecuación se transforma en $x*(x + 3) = 0$; de ahí se aplica una propiedad de los números reales ($ab= 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$), luego se tienen dos opciones, $x = 0$ o $x + 3 = 0$, donde es evidente un valor para x el cual es cero, la segunda ecuación es lineal y fácil de resolver y cuyo valor nos da $x = -3$, es decir que la ecuación tiene dos soluciones.

2) $6x^2 + 4x = 0$. Análogo al anterior ejercicio, la ecuación queda expresada de la siguiente manera $x*(6x + 4) = 0$, donde las raíces resultan ser $x = 0$ o $6x + 4 = 0$, de la segunda ecuación que es lineal, donde en el repaso de la ecuación lineal se le explicó al estudiante la forma de su desarrollo, tal que obtenemos el valor de x, el cual es $x = \frac{-4}{6}$.

Ahora se resolverán ecuaciones cuadráticas usando diferencia de cuadrados y de la forma $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$, donde se usarán como ejemplo, los ejercicios que se usaron para explicar los respectivos casos de factorización.

Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1) $9x^2 - 25 = 0$

2) $x^2 - 25 = 0$

3) $x^2 + 10x + 24 = 0$

4) $3x^2 + 8x + 15 = 0$

Se realizó la solución de cada una de estas ecuaciones, teniendo en cuenta que cuando se explicó los casos de factorización fueron usadas, por lo tanto, es más fácil volver a hacer la factorización. Ya se sabe que la primera ecuación su factorización es igual $(3x + 5)(3x - 5)$, luego se reemplaza e iguala a cero, es decir $(3x + 5)(3x - 5) = 0$, y se utiliza la propiedad de los números reales que se presentó en las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$; aquí se extraen dos ecuaciones lineales, tales son: $3x + 5 = 0$ o $3x - 5 = 0$, luego se despeja la variable x, y se obtienen las raíces de la ecuación uno, luego estos valores son, $x = \frac{5}{3}$ o $x = \frac{-5}{3}$.

La ecuación número dos, se resolvió usando diferencias de cuadrados como la anterior ecuación, sin embargo, en esta se pueden hallar las soluciones mediante el ensayo y el error, es decir, se dieron valores a la variable x, y se procedió de la siguiente manera: si $x=2$, entonces la ecuación $2^2 - 25 = 4 - 25 = -19$, lo cual no da cero; luego resultaron valores a x como el 3, 4 y 5, de esta manera se mostró que el valor que satisface la ecuación era el número 5, ya que $5^2 = 25$, por tanto $25 - 25 = 0$, pero esa no es la única solución ya que el valor -5 también satisface la ecuación así, $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$; otra forma de resolverla es de acuerdo a una ecuación lineal; se pasa el valor de 5 al otro lado de la igualdad con signo contrario y se obtiene la expresión $x = \sqrt{25}$, entonces con la ayuda de la calculadora se saca la raíz de 25 y se obtiene 5 como respuesta. Se aclara que en este tipo de ecuaciones una forma rápida de obtener el valor de las raíces es haciendo cualquiera de los dos pasos, pero no se está teniendo en cuenta el valor de la otra raíz ya que la ecuación cuadrática tiene dos valores en sus raíces, es decir $x = -\sqrt{25}$,para obtener el valor de $x = -5$; luego se procede por diferencias de cuadrado para que los estudiantes noten de donde sale el -5, $(x + 5)(x - 5) = 0$, de aquí resultan dos ecuaciones lineales y se tienen los valores para x que son, $x = 5$ o $x=-5$.

En la ecuación número tres, se les comenta a los estudiantes que los pasos utilizados en el ejemplo anterior, como despejar la variable o dar valores a la variable x, en esta ecuación no son útiles ya que es complicado buscar valores para la variable x que satisfagan la ecuación, y no se puede despejar ya que se tiene un valor que acompaña a la variable y un término independiente; por esta razón se utiliza el caso de factorización del trinomio, como este polinomio ya se factorizó antes, se procede a hallar sus raíces, $(x + 4)(x + 6) = 0$, de donde resulta $x + 4 = 0$ o $x + 6 = 0$ y se obtienen las raíces así $x = -4$ o $x = -6$.

En la ecuación número cuatro, se procede a factorizar este polinomio; anteriormente su factorización había dado como resultado $(m + 1)(3m +5)$, entonces este factor se iguala a cero, de tal manera que queda expresado $(m + 1)(3m +5) = 0$; de aquí surgen dos ecuaciones lineales que son: $m + 1 = 0$ o $3m +5 = 0$, resolviendo estas ecuaciones se obtiene el valor de las raíces así, $m = -1$ o $m = \frac{-5}{3}$.

De acuerdo con lo anterior se logró exponer un grupo de ecuaciones cuadráticas y la identificación de los casos de factorización con el fin de familiarizar al estudiante con el análisis de los tipos de ecuación y la factorización que los resuelve.

Ahora bien, se les informa a los estudiantes que existe una fórmula para resolver cualquier ecuación cuadrática y hallar sus raíces, denominada “la fórmula cuadrática”.

- Las ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$, se pueden resolver usando una fórmula especial llamada fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- El "±" quiere decir que tienes que hacer más y menos, ¡así que normalmente hay dos soluciones!
- La parte b^2 - $4ac$ se llama discriminante, porque sirve para "discriminar" (decidir) entre los tipos posibles de respuesta:

1) Sí es positivo, hay dos soluciones
2) Sí es cero sólo hay una solución,
3) Y si es negativo hay dos soluciones que incluyen números imaginarios.

Con la ayuda de la ecuación cuadrática se muestra a los estudiantes cómo se resuelve la ecuación número cuatro, evidenciando que este método implica cálculos matemáticos más sencillos.

Se decide dar un ejemplo en el tablero:

Hallar las raíces de la siguiente ecuación, mediante la fórmula cuadrática $3x^2 + 8x + 5 = 0$.

Primero se explicó a los estudiantes que es importante identificar los valor de a, b y c que se encuentran en la ecuación, procediendo de la siguiente manera; para hallar el valor de a, es necesario tener en cuenta que es el número que acompaña a la variable x que está al cuadrado, el valor de b es el número que acompaña a la variable x que tiene grado uno y el valor de c, es el valor independiente; Luego de estas aclaraciones se identifica qué valor acompaña a la variable x que está al cuadrado; en este caso es el valor 3, por tanto $a = 3$; Análogamente se realiza para b y c, y se obtienen los valores *b = 8* y *c = 5***.** Ahora se reemplazan estos valores en la ecuación de la siguiente manera:

Se coloca *x* el signo igual, como *b = 8* y es positivo, entonces se deja el signo menos de la fórmula, es decir, -*8*. Se deja igual la expresión del + o - y se escribe la raíz cuadrada, adentro se coloca *8* elevado al cuadrado, el signo menos y el número cuatro de la fórmula y se multiplican los valores de a y c que son: *a* = *3* y b = *8,* y se obtiene dentro de la raíz lo siguiente 8^2 - *4(3)(8*) y toda expresión se divide por *2(3),* ya que *a* = *3.* Es decir, se genera la siguiente expresión.

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2-4(3)(5)}}{2(3)}$. Resolviendo esta operación se obtiene que $x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{6}$, luego $x = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{6}$, entonces $x = \frac{-8 \pm 2}{6}$; luego se obtienen dos valores para la variable *x***,** y se distinguen colocando dos subíndices 1 y 2 ya que el signo $\pm$ dará esos valores de esta forma: $x_1 = \frac{-8+2}{6}$ y $x_2 = \frac{-8-2}{6}$, de donde se obtiene el valor para $x_1 = \frac{-10}{6}$ y x_2 = -1. Si se comparan los dos métodos para desarrollar esta ecuación, se evidencia que es más fácil y rápido con la fórmula cuadrática, solo es cuestión de reemplazar en la fórmula y obtener los mismos resultados.

Verifiquemos que las soluciones son correctas:

Con *x* = -1 en la ecuación, tenemos: $3(-1)^2$ +8(-1) +5 = 3-8+5= 0, por tanto, *x* =-1 es una raíz.

Ahora, con $x = \frac{-10}{6}$ tenemos: $3(\frac{-10}{6})^2 + 8(\frac{-10}{6})$ +5 = $3(\frac{-5}{3})^2 - 8(\frac{-5}{3})$ +5 = 0, por tanto, *x* == $\frac{-10}{6}$ también es una raíz de la ecuación.

De esta forma, los estudiantes compararon los dos métodos enseñados en el aula y concluyeron que; con la fórmula, es más rápido llegar a la respuesta, debido a que solo es cuestión de reemplazar y hacer operaciones aritméticas; por otro lado, el método por factorización es un poco más complicado, porque se olvidan de seguir los pasos que caracteriza a cada caso de factorización, por esta razón optan por resolver la ecuación cuadrática por medio de la fórmula.

2.1.1.7 Grafica de una ecuación cuadrática. No se profundizó en este tema debido a la falta de tiempo, sin embargo, se explicó cómo se grafica la ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2$ mediante tabulación.

Tomando como ejemplo la ecuación $x^2 = 0$, se procedió a realizar la gráfica, antes explicando de la nueva variable que se va a utilizar para realizar la tabulación, se les presento a los estudiantes la siguiente expresión $y = x^2$ con el fin de explicar de manera muy sencilla el concepto de la imagen y preimagen en una gráfica de una ecuación cuadrática, donde la variable *x* es la variable independiente y la variable *y* es la variable que depende de los valores que tome *x*. El primer paso realizado fue darle valores a la variable **x**, tanto positivos como negativos y ubicarlos en el plano cartesiano de la siguiente manera:

- Sea $x = 1$ entonces $y = 1^2 = 1$
- sea $x = 2$ entonces $y = 2^2 = 4$
- sea $x = 3$ entonces $y = 3^2 = 9$
- sea $x = 0$ entonces $y = 0^2 = 0$
- sea $x = -1$ entonces $y = (-1)^2 = 1$
- sea $x = -2$ entonces $y = (-2)^2 = 4$
- sea $x = -3$ entonces $y = (-3)^2 = 9$

Luego de realizar esta evaluación se realizó una tabla de valores y se procedió a elaborar la figura.

Tabla *2.*

Valores

Y	9	4	1	0	1	4	9
X	-3	-2	-1	0	1	2	3

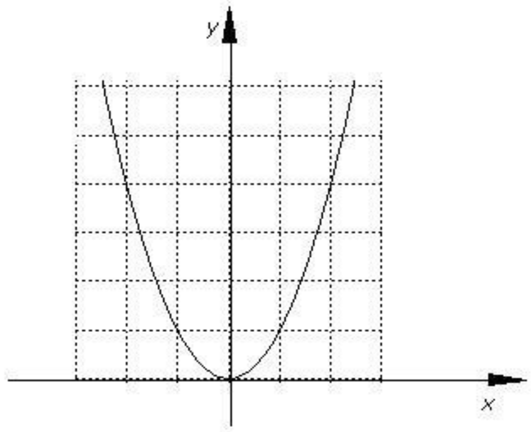

Figura 1. Graficación de valores

Fuente. Elaboración propia

Por último, se realizó un examen para constatar si los estudiantes tenían claro los temas; se observó que la mayoría de los estudiantes optaron por la ecuación cuadrática resuelta por factorización y fórmula cuadrática, y la gráfica de la ecuación cuadrática, donde se les pidió que graficaran la ecuación mediante tabulación.

Por otra parte, es importante mencionar que; durante la enseñanza de los casos de factorización, ecuación y función cuadrática, los estudiantes presentaron falencias en operaciones, propiedades y ubicación de puntos en el plano cartesiano, por lo tanto, se proyectó desarrollar actividades de refuerzo atendiendo estos detalles más específicos, para que ellos puedan comprender y superar estas falencias de conocimientos en las matemáticas escolares precedentes o conocimientos previos.

Capítulo 3. Objeto de estudio y marco conceptual

En este capítulo se establecerá que las interacciones que surgieron entre el docente practicante y los estudiantes en la resolución de la ecuación cuadrática cómo el objeto de estudio, desde la perspectiva del contrato didáctico de la Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau.

En el anterior capítulo se explicó la manera como se llevó a cabo la enseñanza de esa temática por parte del practicante, mediante ejemplos o ejercicios, los cuales involucraban algún caso de factorización para la resolución de cada ecuación que el estudiante debía identificar y luego aplicarlo para obtener la respuesta, teniendo en cuenta las sugerencias o explicaciones que se establecieron en el aula por parte del docente practicante. El practicante es el guía, pues establece reglas y busca que el estudiante resuelva los ejercicios propuestos.

La estructura del plan de aula se caracteriza como del paradigma del ejercicio, porque la enseñanza se desarrolló a través de la presentación formal de contenidos, ejemplificación del contenido y ejercitación a través de tareas, talleres y exámenes; de este modo el practicante enseñó los diferentes tipos de ecuaciones de segundo grado y la forma como se desarrollaban.

3.1 Interacción entre el docente y estudiante, como objeto de estudio.

Durante la práctica pedagógica se identificaron las falencias de algunos estudiantes cuando se pidió aplicar el caso de factorización adecuado para la resolución de la ecuación cuadrática, esto se debió a que ellos no recordaban o no diferenciaban qué tipo de ecuación era y los casos indicados para resolverla, por esta razón se diseñó el plan de aula, que se caracteriza por el repaso de los casos de factorización tales como, factor común, diferencia de cuadrados y trinomio cuadrado perfecto, y resolución de ecuaciones lineales. Una de las metas fue aclarar los conceptos y guiar a los estudiantes en el desarrollo de las ecuaciones por medio de casos de factorización y ejemplos, esto se realizó por medio de la interacción que se estableció entre estudiante y profesor, a través de explicaciones o ejemplos en el aula.

Otra dificultad que se evidenció, es que los estudiantes no recordaban de manera explícita las propiedades de los números reales y de las potencias, factores comunes y la ley de los signos, algunos de ellos identificaban el caso adecuado, pero cuando realizaban operaciones aritméticas o alguna propiedad de las potencias las efectuaban de manera incorrecta, por lo cual no llegaban a la respuesta correcta.

En este punto, una de las preguntas que surge es ¿por qué se les dificulta las operaciones aritméticas y algebraicas que se necesitan para resolver las ecuaciones?

Con el fin de tratar de responder a esta pregunta se diseñó el mencionado plan de aula que consistió en el repaso de algunos casos factorización, operaciones aritméticas y propiedades de los números reales, esto se realizó mediante una serie de ejemplos, donde el proceso fue explicado, mediante técnicas matemáticas para la resolución de ecuaciones cuadráticas, las técnicas correctas de factorización; además, durante los ejercicios se efectuaron las observaciones pertinentes frente a los errores cometidos. De esta manera se procedió a dejar diversos ejercicios que los estudiantes realizaran de manera individual o en grupo, lo cual tuvo buenos resultados porque la cantidad de errores en los ejercicios fue mínima.

Para resolver ecuaciones cuadráticas, una de las técnicas fundamentales es que el estudiante identifique el caso de factorización adecuado de manera explícita o implícita, otra, es la del ensayo y el error, dándole valores a la variable y hallar una solución, pero esta técnica no es muy eficaz, porque, por lo general solo se hallará una de las raíces y requiere más tiempo; debido a esto se debe realizar de manera constante ejercicios de resolución de ecuaciones, de esta manera el estudiante cada vez que resuelva ejercicios no vuelva a cometer los mismos errores de tipo aritméticos o algebraicos, es decir, que una de las maneras de aprender matemáticas es la aplicación correcta de propiedades, operaciones algebraicas o aritméticas en los ejercicios para llegar a la respuesta correcta, tal como sugiere Thompson (1992 como se citó en Ruiz, Alfaro y Gamboa, 2004) en el siguiente párrafo; donde señala que existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos y los términos geométricos y teoremas; saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza de la matemática que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido.

Continuando con este enunciado de Thompson (como se citó en Ruiz et al., 2004) en la práctica, se da lugar a pensar ,¿sí el estudiante analiza los procesos de desarrollo que realiza el profesor cuando explica un tema?, una posible respuesta podría ser, que por lo general solo imita estos pasos como una guía para la resolución, luego de tener un mayor entendimiento, elabora una estrategia para desarrollar los ejercicios usando como base lo que el profesor le explicó, de tal manera llega a la solución correcta o por el contrario identifica los errores aritméticos o algebraicos, los cuales hacen que no obtenga una solución o respuesta correcta, es fundamental la presencia del profesor para guiar al estudiante y señalar los errores o por el contrario felicitar si está aplicando una propiedad o aplicación de propiedades matemáticas.

Una perspectiva alternativa acerca del significado y la naturaleza de la matemática que se pretende que el estudiante aborde, consiste en considerarla como una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados deben ser juzgados en relación con el ambiente social y cultural (Vilanova et al., s.f, p.1).

En este sentido, el objeto de estudio podría resumirse en la interacción o guía que se teje entre docente y estudiantes cuando se enseña la ecuación cuadrática, a partir de preguntas, indagaciones, intercambio de ideas de ambas partes o felicitaciones, y la relación que se establece entre los individuos implicados en el desarrollo de una solución matemática, el estudiante tenga mayor confianza a la hora de enfrentarse a cualquier tipo de ecuación y llegar a las soluciones.

3.2 Marco conceptual

En este apartado se desarrollan los conceptos necesarios para los estudiantes durante el proceso de resolución de una ecuación cuadrática. La práctica pedagógica tomó como base la Teoría de las Situaciones y el contrato didáctico para la elaboración de los análisis del capítulo 4. Las situaciones didácticas se refieren a una teoría de la enseñanza que busca las condiciones suficientes para elaborar una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea. La Teoría de Situaciones está sustentada en una concepción constructivista en el sentido piagetiano del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau (1986) de esta manera:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (s.p)

El rol fundamental que esta teoría otorga a la “situación” en la construcción del conocimiento se ve reflejado en la descripción que tomamos de Brousseau (1999),

> Hemos llamado “situación” a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la

> adquisición ´anterior` de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso genético. (s.p)

La situación didáctica es una situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado. Brousseau (1982 citado por Gálvez, 1995 como se citó en Ávila, 2001) la definía de esta manera:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. (p.4)

Como se mencionó al comienzo de este párrafo, se tomará como fuente principal de las situaciones didácticas el contrato didáctico, el cual se establece en la interacción del docente y el estudiante, en la resolución de la ecuación cuadrática. El profesor toma el papel de guía que establece condiciones y términos en beneficio del estudiante, por otra parte, el estudiante es la persona que sigue la guía del profesor y sus sugerencias a fin de resolver un problema. Por consiguiente, el profesor tiene el deber de explicar y orientar a los estudiantes, elaborar trabajos como talleres y exámenes, para determinar si los estudiantes están entendiendo el tema que se está enseñando o necesitan refuerzos; el deber del estudiante es preguntar cuando tenga dudas al resolver una ecuación y así construir el conocimiento puesto en escena.

3.2.1 Contrato didáctico

Tomando como referencia a Samuel Joshua y Jacques Dupin (1998) se define el contrato didáctico de la siguiente manera:

> Es la existencia del contrato didáctico lo que permite que la estructura didáctica funcione de una manera relativa equilibrada. A través de mecanismos más implícitos que explícitos, un "contrato" se teje entre profesor y los alumnos en relación de un saber. Este contrato fija roles, lugares y funciones de cada parte. Fija las actividades esperadas tanto del profesor como de los alumnos, lugares respectivos de cada uno respecto del saber tratado, y de igual forma, las condiciones generales en las cuales estas relaciones con los saberes evolucionaron en el transcurso de una enseñanza. (p.5)

3.2.2 Funciones del contrato didáctico

Anderson y Cols (1996 como se citó en García y Fortea, 2006) señalan los siguientes beneficios o razones para emplear contratos de aprendizaje,

- *Relevancia:* Cuando los estudiantes han identificado sus propias necesidades, las actividades se vuelven con toda probabilidad más significativas, relevantes e interesantes para ellos. Los contratos reconcilian las necesidades/intereses de los alumnos con las demandas.
- *Estructura:* Proporciona un esquema formal conocido y compartido por profesores y alumnos para estructurar las actividades de aprendizaje. Al mismo tiempo proporcionan un alto grado de flexibilidad.
- *Equidad:* Se entiende como diversidad de contenidos y procesos, no como oferta educativa "igual" para todos. Los contratos capacitan a los profesores a responder a

las necesidades diversas de un amplio rango de estudiantes. Facilitan el acceso a los contextos y la equidad dentro de los cursos.

Si se cumple alguna de las tres características de manera implícita o explicita, se está estableciendo un contrato didáctico, es decir que cumple con la definición que proponen Samuel Joshua y Jacques Dupin, porque en cada una de las clasificaciones se presenta una relación entre el docente, estudiante y conocimiento.

Los contratos didácticos pueden ser utilizados para las siguientes finalidades educativas:

- Promover la autonomía y responsabilidad del alumno.
- Incrementar la motivación e implicación del alumno en su propio aprendizaje (toma de decisiones).
- Estimular la actividad del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Atender a las características personales de cada estudiante: responder a las necesidades, intereses, etc. del estudiante como individuo.
- Dirigir académicamente el trabajo independiente del estudiante.
- "Democratizar" la educación, promoviendo procesos de negociación y participación del estudiante en el proceso de la docencia: desde el establecimiento de los objetivos y contenidos a la evaluación.
- Promover la capacidad de autoevaluación y pensamiento crítico del estudiante; especialmente se estimula la capacidad de autorreflexión sobre el propio aprendizaje.

Se pretende que el estudiante tome conciencia, sea un individuo responsable y adquiera decisiones frente a un problema propuesto por el profesor, este contrato hace fin a estas cualidades de formación hacia los estudiantes y como objetivo principal se establece la necesidad de generar conocimiento para resolver un problema propuesto por el docente, siendo un individuo objetivo y analítico cuando llega a la respuesta; se espera que el estudiante mediante el proceso de resolver una ecuación cometa errores aritméticos o algebraicos y de estos el docente corrija, explique paso a paso cuál fue el error y el estudiante aprenda de ello y no lo vuelva hacer en otros ejercicios.

3.2.3 ¿Por qué puede fracasar? dificultades y limitaciones en el contrato didáctico establecido entre profesor y estudiante

- La confusión inicial, el ponerse en marcha, tanto por parte del alumno como del profesor.
- El que no sea aprobado por la "cultura dominante" del departamento y/o la titulación.
- La falta de interiorización, o, por el contrario, su excesiva rutinización.
- Dificultades que surgen del mismo proceso: no haber logrado que el contrato sea manejable, el acceso al profesor, el tiempo que necesita la negociación y los mecanismos de seguimiento. (Unican, 1995, p.4)

El contrato no se podrá establecer entre profesor y estudiantes, cuando el profesor no tiene claro un tema o no se enseña alguna propiedad importante para el desarrollo de un ejercicio, creando confusiones a los estudiantes; otro aspecto puede ser que en el programa que plantea la Institución, ciertos temas no le dan el enfoque que se merece, por tal razón el profesor omite ciertos temas y por tanto el estudiante no tiene conocimientos de ellos, pero esto puede generar problemas en el transcurso de su educación; también por motivos de tiempo, el profesor no puede asesorar al estudiante en algún tema en específico, quedando él, solo con los conocimientos previos que el profesor enseñó en el aula, con lo cual generará dudas y equivocados procedimientos cuando resuelve un ejercicio matemático.

Capítulo 4. Análisis de los registros

En este capítulo se analizan los registros obtenidos en la práctica pedagógica realizada en la Institución Educativa Técnica Tomás Cipriano de Mosquera, los cuales se organizaron de acuerdo a cada tipo de ecuación y características de las resoluciones generadas por los estudiantes. Se describieron las diferentes interacciones que surgieron entre el docente y los estudiantes, a partir de los ejercicios de las ecuaciones cuadráticas que se propusieron y de las cuales es posible reconocer el contrato didáctico que surge, teniendo en cuenta la definición de Samuel Joshua y Jacques Dupin.

4.1 Clasificación de los registros

El conjunto de los registros obtenidos en el transcurso de la docencia directa, fueron organizados teniendo en cuenta la obtención de las raíces de cada forma de la ecuación; las cuales fueron: $a)\ x^2 - a^2 = 0,\ b)\ ax^2 \pm ax = 0\ c)\ x^2 + bx + c = 0\ y\ d)\ ax^2 + bx + c = 0,$ se establece este orden de: *a*) hasta *d*), porque cada una de las ecuaciones presentó un proceso matemático diferente de resolución para hallar las raíces. Por tal razón, las ecuaciones de a) y *b*) se resolvieron utilizando el caso de "términos semejantes", por medio de la raíz de un número y diferencia de cuadrados. La ecuación *c*) se aplicó el trinomio cuadrado perfecto y con la ecuación d) se utilizaron dos métodos para su resolución, los cuales fueron: el caso especial del trinomio cuadrado perfecto y la fórmula cuadrática. Para concluir las diferentes interacciones que representan la forma en que se acordó el contrato didáctico, los estudiantes desarrollaron procesos para encontrar las raíces del conjunto de registros de cada forma de la ecuación. Se seleccionaron los más representativos de las formas que toma la relación entre el profesor y estudiantes, cuando se aborda cada una de las temáticas enseñadas.

4.2 Realizaciones didácticas y reconocimiento del contrato didáctico emergente

4.2.1 Registros en relación con la ecuación de la forma $x^2 - a^2 = 0$.

Se propuso en un ejercicio en clase, la siguiente ecuación $x^2 - 9 = 0$:

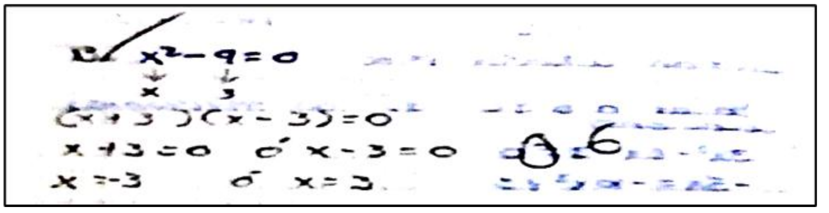

Figura 2. E1 resuelve ecuación $x^2 - 9 = 0$

Fuente. Elaboración propia

Desarrollo de E1

El estudiante transformó la ecuación inicial en la ecuación *(x – 3) (x + 3) = 0,* es decir, factorizó la ecuación y con el uso de la propiedad de los reales: *si, a*b = 0 entonces a = 0 o b = 0* logra obtener dos ecuaciones lineales, *x + 3 = 0 o x – 3 = 0*, que le permite establecer dos raíces de la ecuación inicial, *x = 3 o x = -3.*

El docente en su rol de evaluador (cuando revisó el ejercicio y verificó el proceso para la obtención de las raíces), observó que el estudiante cumplió con las expectativas que se tenían, porque él realizó procesos matemáticos correctos; por tanto, el estudiante en su rol de desarrollador de procesos y procedimientos matemáticos obtuvo un reconocimiento del docente por realizar de manera correcta el ejercicio; además, se le enfatizó en la importancia de haber prestado atención a las indicaciones hechas en el aula, realizar los ejercicios propuestos y preguntar sobre sus dudas en temáticas que desconocía o no recordaba. Estos hechos hicieron que el estudiante, además de adquirir conocimiento, recibiera una buena calificación, generando en él una motivación adicional que se reflejaría en las sesiones siguientes.

El profesor y el estudiante establecieron así una interacción de conocimiento que es característica de la presencia de un ambiente educativo y pedagógico que propicia realizaciones didácticas satisfactorias; es decir, el profesor desarrolló una metodología de enseñanza de procedimientos para la obtención de raíces de una ecuación cuadrática, la cual fue atendida plenamente por el estudiante analizado y, tal resultado permite indicar que la relación didáctica se sostuvo gracias al rol que cada uno asumió y la existencia de formas de relacionarse que permitieron que el estudiante desarrollara el ejercicio sin errores.

Desarrollo de E2

Se presenta otra solución de otro estudiante:

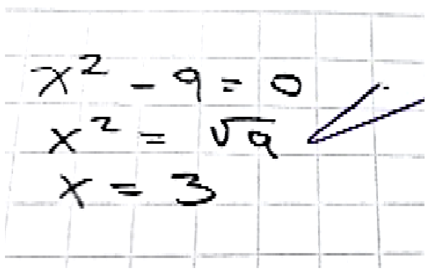

Figura 3. E2 resuelve la ecuación

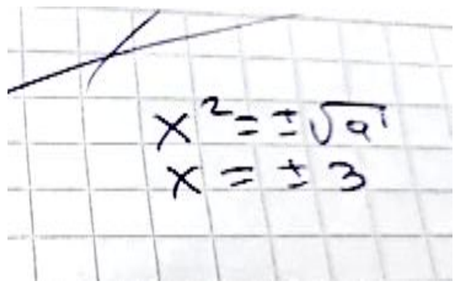

Figura 4. Profesor muestra la existencia de la otra raíz

Fuente. Elaboración propia.

El estudiante al resolver la ecuación: $x^2 - 9 = 0$, realizó la siguiente transformación: $x^2 = 9$, es decir, realizó un despeje, posteriormente sacó la raíz cuadrada $\sqrt{9}$ y así obtuvo $x = 3$.

Cuando el estudiante realizó la revisión de este ejercicio, notó que la calificación obtenida no era satisfactoria, por tal razón le surgió una duda en su rol de resolutor: pidió una explicación al docente para aclarar cuales procesos matemáticos tenían un error, el docente en su rol de guía y evaluador realizó la aclaración del proceso matemático del estudiante y le notificó que solo había obtenido una raíz positiva; es decir, que el estudiante cumplió ¨en parte¨ con su rol de resolutor, pero gracias a la interacción de los dos individuos en un contexto de aclaraciones de dudas, de enseñanza de un proceso matemático de resolución, hizo que el estudiante identificará la importancia de aplicar las sugerencias hechas en clases por el docente para hallar las raíces de esta forma de ecuación, el profesor establece un nuevo rol de consejero para que el estudiante reflexione y le recalca la importancia de aplicar los casos de factorización y la aplicación adecuada de las propiedades para obtener una respuesta correcta; este rol por parte de ambos en un ámbito escolar hace que las relaciones entre docente y estudiante sean más de empatía para ambos, ya que con las dudas que presentan los estudiantes se propicia que el docente se cuestione y realice mejores explicaciones, la importancia de no omitir pasos matemáticos en la resolución de la ecuación en beneficios para el estudiante y a su vez el estudiante analizado tendrá más confianza para desarrollar la ecuación, con el fin de poder obtener el conjunto solución.

Solución de un estudiante de un ejercicio del taller

El ejercicio propuesto es el siguiente: $9x^2 - 25 = 0$. A continuación se analizarán los resultados del estudiante.

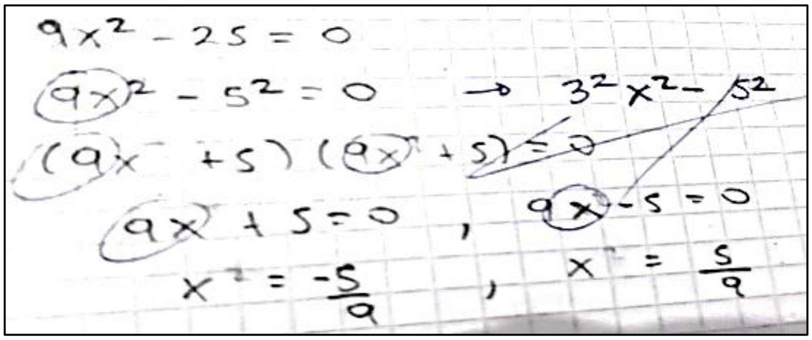

Figura 5. Solución de un estudiante

Fuente. Elaboración propia

Desarrollo del estudiante

El estudiante transformó la ecuación $9x^2 - 25 = 9x^2 - 5^2$; donde aplica la diferencia de cuadrados y las propiedades de los exponentes, obteniendo la siguiente expresión: $(9x + 5)\ (9x - 5) = 0$; de aquí resultaron dos ecuaciones lineales que son: $9x + 5 = 0$ *o* $9x - 5 = 0$, haciendo uso de manera implícita de la propiedad antes mencionada, luego despejó y así tiene las raíces de la ecuación, donde los valores de la variable resultan ser, $x = -5/9$ *o* $x = 5/9$.

Cuando se hizo la revisión del ejercicio, el docente en un contexto de evaluación señaló con un círculo el error inicial que estaba cometiendo el estudiante, con el fin que él identificara el error, pero aun así él no comprendía cual era, por tal razón el docente toma el rol de explicar con detalle el error que el estudiante había cometido, de cómo era la manera correcta de aplicar la diferencia de cuadrados, posteriormente el docente realizó una explicación a modo de estrategia con un ejemplo del mismo ejercicio para despejar dudas del estudiante y con el fin que lograra entender la importancia de aplicar la propiedad de las potencias; el estudiante en su rol de aprendiz, identificó el error y las implicaciones de no obtener un resultado satisfactorio, posteriormente con esta interacción en el ámbito escolar entre los dos individuos, se estableció una relación de conocimientos que surgió por parte del estudiante cuando realizó un proceso matemático incorrecto, lo cual hizo que el docente le explicara las consecuencias de este tipo de error en la resolución de ecuaciones, con el fin que el estudiante reflexione, realice preguntas para aclarar dudas, con el propósito de que no los vuelva a repetir; con los consejos que el docente le hizo al estudiante se establece una brecha entre ambas partes a modo de beneficio para el joven y así logre aplicar el caso correcto a este tipo de ecuaciones.

Del conjunto de registro anteriores, se puede establecer la importancia de los roles que surgieron en la relación con los estudiantes, las expectativas del docente frente a la resolución correcta de la ecuación por parte del estudiante, la reacciones de motivación del estudiante cuando es felicitado por realizar un buen procedimiento matemático, la importancia del rol de guía en un ámbito escolar por parte del profesor hacia el estudiante cuando se le señalaron los errores que cometió y posteriormente la aclaración por medio de ejemplos escritos o de manera verbal. Cuando se indica qué pasos son los correctos, se genera que el estudiante sienta motivación y esto sucede cuando el estudiante pregunta y presta atención a cada una de las sugerencias del docente, finalmente la interacción que surge de manera implícita o explicita de los dos roles por parte de los sujetos participantes en la relación didáctica, con el fin de hallar el conjunto solución de la ecuación, cuando establece las reglas, en este caso fue la debida aplicación correcta de las operaciones aritméticas y casos de factorización.

4.2.2. Ecuación de la forma $\boldsymbol{ax^2 - ax = 0}$.

Ejercicio $\boldsymbol{15x^2 - 5x = 0}$ propuesto de un examen.

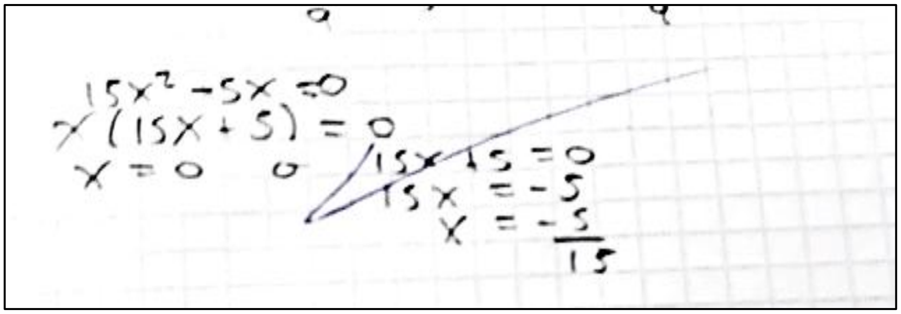

Figura 6. Resolución de un estudiante.

Fuente. Elaboración propia

Desarrollo del estudiante.

El estudiante identificó que la variable *x* es el factor común en la ecuación y aplicó el caso de términos semejantes, luego transformo la ecuación a otra equivalente y obtuvo la siguiente, *x (15x + 5) = 0*, en seguida usó la propiedad de los números reales, *si, a·b = 0 entonces a = 0 o b = 0*, donde obtuvo *x = 0 o 15x + 5 = 0*, despejó el número *5*, de aquí obtuvo *15x = -5*, después despejó 15 pasándolo a dividir y dejando sola la variable *x*, luego obtuvo la raíz *x =- 5/15*.

En esta resolución de la ecuación cuadrática se pudo analizar que el estudiante identificó el caso adecuado para su resolución, él está cumpliendo el rol de resolutor que se establece en un contexto de evolución, el docente esperaba que en esta ecuación por ser de dificultad baja la realizara como él le había sugerido, pero en cambio notó que el estudiante solo agrupó la variable sin tener en cuenta que los números 15 y 5 son divisibles, este hecho hace que el docente en su rol de guía le explique con detalle que podía haber usado esta característica de estos dos números para factorizar mejor, porque en la docencia directa se enfatizó este proceso matemático, y es una de las reglas establecidas en el contrato en la resolución de este tipo de ecuación simplificar la raíz si da como resultado una fracción; esta interacción hizo que el estudiante analizado reflexionara y tuviera presente lo importante de no omitir procesos matemáticos para obtener las soluciones de la ecuación.

En este registro el docente toma el rol de explicar o de aclarar al estudiante, por qué los procesos matemáticos realizados por él fueron correctos, no se presentaron errores en su desarrollo, pero se le realizó una sugerencia por haber omitido un paso matemático, con lo cual hizo que se estableciera una interacción en un ámbito escolar de enseñanza y no evaluativo, es decir que la calificación que se le dio al estudiante fue correcta, pero lo importare fue que el estudiante identifico la importancia de realizar todos los pasos matemáticos para obtener una respuesta exacta, la cual es la que sugiere el docente en este tipo de contrato.

4.2.3 Ecuación de la forma x^2 – bx + c = 0.

Se propone como ejercicio en el cuaderno, que el estudiante resuelva la siguiente ecuación: $x^2 + 2x - 8 = 0$. Se evidenciarán 3 opciones de solución de algunos estudiantes.

Estudiante 1

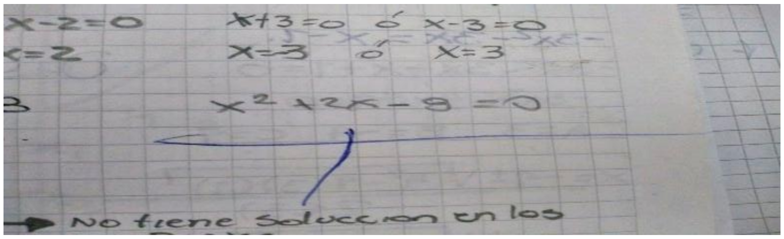

Figura 7. E1 no realiza ningún proceso matemático.

Este estudiante no realizó ningún tipo de operación matemática, dejó el espacio en blanco porque no pudo resolverlo, se evidenció de esta manera que las interacciones en el aula por parte del docente no tuvieron el propósito esperado por parte del estudiante, no tuvo comprensión, no entendió, no repasó, entre otras cosas.

Estudiante 2

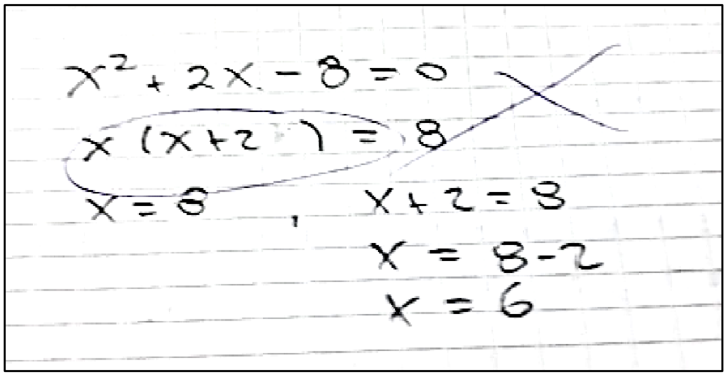

Figura 8. E2 realizó el siguiente ejercicio

Fuente. Elaboración propia.

Desarrollo del E2

El estudiante aplicó agrupación a los dos primeros términos con paréntesis, luego despejó el número en la ecuación y obtuvo la siguiente expresión: $x\ (x + 2) = 8$, aplicó la propiedad de los reales *si*, $a*b = 0$ *entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$, de aquí obtiene que $x = 8$ *o* $x + 2 = 8$, y determina que las raíces son $x = 0$ *o* $x = 6$.

En el ámbito escolar es frecuente encontrar este tipo de errores que el estudiante cometió, cuando el docente realizo la revisión de este ejercicio por ser de dificultad media esperaba ciertos tipos de errores, por tal razón, se le notificó al estudiante la confusión inicial que presentó cuando agrupa términos semejantes de manera errónea a este tipo de ecuación, en un contexto escolar evaluativo, por parte del docente calificó con nota baja este ejercicio, por eso cuando se realizó la interacción entre ambos, se le explicó de manera explícita el error cometido y se le aclaró al estudiante cual debía ser el proceso matemático correcto, que por tal razón no obtuvo las raíces correctas, esta confusión entre los casos de factorización reflejó que los conceptos hechos por el docente en el aula no fueron entendidos por el estudiante, por tal razón en un ámbito escolar de resolución de ecuaciones dentro de la interacción de las partes, se precisa que el estudiante pregunte con el fin de no volver a comer este tipo de errores, este contrato es muy explícito para el desarrollo de dicha ecuación.

Es común que los estudiantes confundan los casos de factorización cuando los aplican a la resolución de la ecuación cuadrática en un contexto de resolver, es fundamental aplicar las sugerencias hechas por el docente que se dan en el aula, la aplicación de las propiedades y realizar las preguntas para aclarar los temas con dudas, con el fin de generar un ámbito escolar de dialogo, donde ambas partes den sus puntos de vista con el fin de un mejor entendimiento ameno para el estudiante y establecer acuerdos didácticos donde se presenten más ejemplos, ejercicios en el aula o para realizarlos en otros espacios que no sean escolares, para verificar si los temas establecidos en los acuerdos fueron claros, con la condición que el estudiante los realice a manera honesta que es su rol fundamental y, por parte del docente de revisarlos como rol de guía y señalar los errores cometidos o por el contrario felicitar si el estudiante realiza procesos matemáticos adecuados y obtiene el conjunto solución correcto.

Desarrollo del E3.

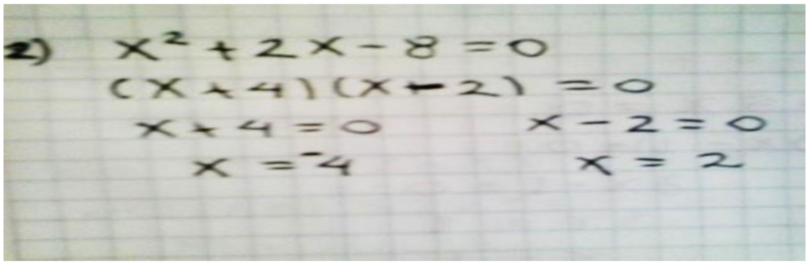

Figura 9. Resolución de esta forma de ecuación.

Fuente. Elaboración propia

En este ejercicio el estudiante resolvió la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$, aplicó de manera correcta el trinomio cuadrado perfecto y trasformó la ecuación de la siguiente manera:

$(x + 4)(x - 2) = 0$, posteriormente aplicó la propiedad de los reales mencionada previamente y obtuvo las dos siguientes ecuaciones lineales $x + 4 = 0$ *o* $x - 2 = 0$, realizó el despeje de manera correcta y encontró las dos soluciones de la ecuación cuadrática, $x = -4$ *o* $x = 2$.

En este ejercicio el estudiante cumplió con su rol de resolutor usando de manera correcta las propiedades de los números reales y la resolución de la ecuación lineal, aplicó de manera correcta el caso de factorización y así obtuvo las dos raíces que satisfacen la ecuación cuadrática.

En un contexto escolar el profesor en su rol de evaluador de la solución obtenida por parte del estudiante, notó que los procesos que se hicieron fueron los correctos, estableciendo un tejido de conocimiento y obteniendo unas soluciones que satisfacen la ecuación, lo cual es lo que el profesor esperaba en un buen proceso matemático, por tanto, las interacciones que surgieron en las explicaciones en el aula o individuales al estudiante cuando tenía alguna dificultad en este tipo de ejercicio quedaron aclaradas, lo que supone que el estudiante realizó los ejercicios o siguió las recomendaciones hechas por el docente, lo que derivó en la obtención de las respuestas correctas y lo cual hizo motivar al estudiante por obtener una buena nota, donde se sigue estableciendo una confianza hacia el docente.

Solución de un estudiante de la ecuación de esta forma, pero con signos negativos

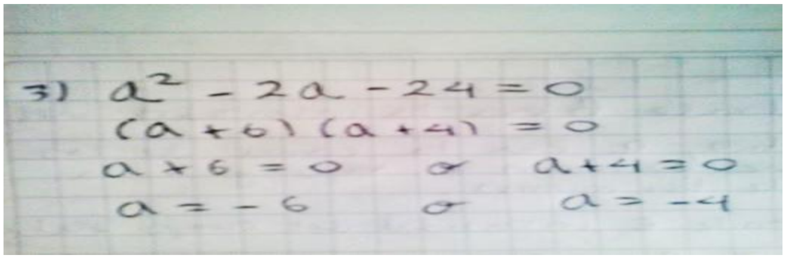

Figura 10. Solución del estudiante.

Fuente. Elaboración propia

Desarrollo del estudiante

El estudiante identifico el caso de factorización, luego buscó dos números que multiplicado de como resultado 24, obteniendo los números 6 y 4, luego aplicó el trinomio cuadrado perfecto y la propiedad de los reales mencionada en otros ejemplos de este tipo de ecuación y transformó la ecuación *(a +6) (a+4) = 0,* obtuvo dos ecuaciones lineales, realizó el respectivo despeje y así tuvo dos raíces solución.

Cuando se hizo la socialización de la nota al estudiante, en un contexto evaluativo por parte del profesor, se le explicó que los errores que había cometido, a pesar que había identificado el caso de factorización adecuado para la resolución estaban incorrectos, por no aplicar de manera correcta las propiedades de los números reales en la ley de los signos y la parte aritmética presentó confusión en las operaciones, es decir que no quedaron claras las características de este caso, cuando en el aula se explicó este tipo de ejercicio se enfatizó en verificar los números que cumplen con la condición y aplicar la ley de los signos cuando se multiplica, el resultado aritmético cuando se suma o resta; en un ámbito escolar estas recomendaciones son necesarias para aclarar y recordar al estudiante que en matemáticas se deben seguir los procesos matemáticos de resolución para la obtención de las raíces por parte del estudiante, estas recomendaciones hacen que la relación entre el docente sea más amena cuando se presenten dudas o revisión de algún ejercicio para verificar si los pasos hechos son correctos. Esta interacción es lo que el profesor espera, que el estudiante pregunte, indague y realice los ejercicios propuestos dentro o fuera del aula para conservar un ambiente escolar agradable para ambas partes y que al final el estudiante pueda resolver la ecuación con el fin de establecer un conocimiento matemático adecuando para el estudiante.

En este conjunto de registros, se pudo analizar las diferentes interacciones y roles que se manifestaron en el contrato, por parte del docente, uno de los roles fue revisar con detalle los procesos matemáticos realizados por los estudiantes, posteriormente su rol cambió y pasa al rol de guía, para aclarar, corregir o felicitar al estudiante en su resolución de la ecuación; también se identificó un rol de compresión con el estudiante, el cual consistió en prestar atención a las la explicaciones de los procesos matemáticos hechos por estudiante en este tipo de ecuación con el fin de señalarle los errores cometidos y dar paso a las explicaciones mediante ejemplos explícitos de las propiedades o caso de factorización, donde el estudiante en su rol de aprendiz escucha con atención estas sugerencias, hace preguntas, propone ejercicios de este tipo para intentar resolverlos con el fin de poder encontrar las raíces y, por parte del docente es revisar paso a paso cada proceso matemático para la obtención del conjunto solución, estos hechos son los que emergen de una interacción con el estudiante, para que así sea más precavido cuando resuelva las ecuaciones en el sentido de identificar el caso y la debida aplicación de las propiedades de los números reales.

4.2.4 Solución de un estudiante la ecuación de la forma ax^2 – bx + c =0, aplicando la formula cuadrática.

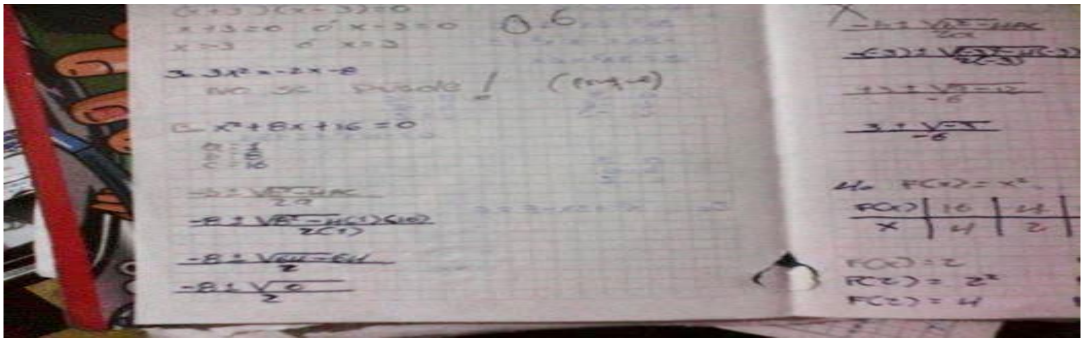

Figura 11. Desarrollo de un estudiante.

Fuente. Elaboración propia.

Solución del estudiante.

El estudiante identificó los valores *a =1, b=8 y c=16* y los reemplazó en la formula cuadrática para poder obtener las raíces de la ecuación. Realizó las operaciones aritméticas de la formula, el valor de *b = 8* y el cuadro es el valor de 64, multiplica -4 (1)(16) y tiene como resultado -64 dentro de la raíz, que matemáticamente es conocido como el discriminante de la formula, realizó bien la resta entre estos valores y da el resultado de $\sqrt{0}$, pero el estudiante no continuó con el procedimiento y quedó en la siguiente expresión $\frac{-8\pm\sqrt{0}}{2}$.

Cuando el docente revisó el ejercicio, esperaba que el estudiante aplicara de manera correcta la formula cuadrática porque en el aula de clases se enfatizó que los procesos matemáticos son de reemplazar los valores numéricos; en un ámbito escolar aprenderse las fórmulas se les dificulta a los estudiantes con los signos u operaciones aritméticas, en este caso, el estudiante reemplazó los valores en la formula, pero no continuó con las operaciones básicas para llegar a la solución, donde solo faltaba simplificar, por tal razón, cuando el docente establece una interacción, se le explicó la importancia de continuar hasta el final con cada uno de los pasos matemáticos, con el fin que el estudiante comprenda la importancia de hallar el conjunto solución. Este tipo de ecuaciones que se solucionan con la formula cuadrática, en un contexto escolar, ayuda al docente a que se tenga una mejor relación con el estudiante cuando se hace se le explica el manejo de la calculadora, en analizar que sucede con las raíces negativas y si no se reemplaza bien los términos, los errores que pueden llegar a tener y por tal razón no obtienen la solución correcta.

Del conjunto de registros anteriores, se puede decir a modo de mirada retrospectiva que el contrato didáctico se materializó a través del ejercicio de roles específicos entre el docente practicante y el conjunto de estudiantes que afrontaron los procesos y procedimientos matemáticos necesarios en la resolución de la ecuación cuadrática. El docente practicante estableció reglas a seguir en la solución de ejercicios, propuso ideas, revisó procedimientos, guío al estudiante y escuchó sugerencias con el fin de ayudarlos a desarrollar un mejor proceso matemático; por otra parte, el conjunto de estudiantes escuchó, preguntó, tomó apuntes y realizó con persistencia y dedicación trabajos que hicieron posible obtener soluciones apropiadas de un conjunto de ecuaciones cuadráticas.

Por tal razón, al analizar todos los resultados anteriores de los estudiantes, se pudo establecer que la mayoría obtuvieron las raíces correctas, es decir que el contrato al ser estricto se mantuvo, lo cual era de esperarse por parte del docente, cuando el estudiante siguió cada una de las sugerencias establecidas cuando el docente explicó de manera personal o grupal, en los errores posibles o las propiedades de los números reales que eran necesarias para aplicar el caso de factorización indicado para obtener un resultado en la resolución de la ecuación..

Capítulo 5. Conclusiones

El diseño del plan de aula estructurado por el docente practicante incorporó activa y propositivamente la atención a las falencias de algunos estudiantes en el uso de los casos de factorización y realización de operaciones en conjuntos numéricos de los enteros, racionales y reales, como instrumentos conceptuales y procedimentales que contribuyen en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

La docencia directa puso en evidencia que las falencias operatorias más frecuentes que se presentaron cuando el estudiante resolvía la ecuación cuadrática, se pueden clasificar como errores aritméticos y errores algebraicos.

- Error Aritmético: Se manifestó cuando el estudiante aplicaba el caso de factorización en la ecuación y sumó, restó, multiplicó o dividió un término mal, sin verificar si ese proceso aritmético era correcto, o cuando se operó de manera errónea entre los coeficientes que intervienen en la fórmula cuadrática utilizada para la resolución de la ecuación cuadrática.
- Error Algebraico: Surgió cuando el estudiante factorizó equivocadamente la ecuación cuadrática, es decir, omitió términos y pasos en el contexto de la representación simbólica de la ecuación objeto de resolución o, en otras palabras, realiza operaciones entre variables sin tener en cuenta el grado de esta o aplica de forma errada las propiedades de los números reales.

El conjunto de falencias señaladas como errores de tipo aritmético y algebraico fueron atendidas a través de clases de refuerzo como se describió en el capítulo de docencia directa.

Las falencias en el uso de los casos de factorización en la resolución de ecuaciones cuadráticas se presentaron por una inapropiada identificación del caso que debería ser usado en la resolución de dicha ecuación. En la docencia directa el proceso de identificación del caso de factorización a ser usado en la resolución de la ecuación, se definía según la forma de la ecuación a resolver.

La estrategia pedagógica del docente practicante se caracterizó por las interacciones permanentes con el estudiantado, es decir, acudió al llamado de ayuda o atendió y respondió las preguntas presentadas durante la resolución de la ecuación cuadrática, revisó los desarrollos de los ejercicios, aclaró, corrigió o felicitó los éxitos obtenidos por cualquier estudiante.

El docente practicante realizó una iteración permanente con el estudiantado toda vez que pedían aclaración del desarrollo de un ejercicio ante la presencia de dificultades al realizar alguna operación aritmética o algebraica, o solicitaban revisión del resultado obtenido en el ejercicio propuesto; a través de la revisión que realizaba el docente practicante, este procedía a seleccionar a un estudiante para que desde el tablero, se precisara los procesos y procedimientos correctos en la resolución de un ejercicio que había sido propuesto en clase.

La estrategia utilizada por el docente practicante fue seguida en todas sus instrucciones por un grupo de estudiantes que tuvo en la mayoría de los casos éxito y en otros casos no produjo este resultado, por la presencia de los errores operatorios aritméticos y algebraicos antes señalados.

Para la configuración del contrato, una parte fundamental eran identificar los errores que se evidenciaron en los ejercicios que algunos estudiantes realizaron, es decir, que, con ello el docente abordaba el tipo de error y de manera explícita desarrollaba los pasos matemáticos correctos para que el estudiante observara, preguntara e intentara volver a resolver, teniendo claro cuál fue el error y no volverlo a cometer.

El plan de aula y la estrategia pedagógica utilizada configuró un contrato didáctico que se caracterizó por ser instruccional, rígido y centrado en procesos y procedimientos matemáticos que se desarrollan en la resolución de una ecuación cuadrática.

Este contrato estableció una estrategia a modo de guía para el estudiante, con el fin que él pudiera identificar cada forma de la ecuación y el caso de factorización para su resolución; demostrando que al estudiante le quedó claro el tema de la forma en la que el profesor esperaba, y se establecía en el contrato de una manera implícita, porque el estudiante aplicaba lo visto en clases, recordando propiedades matemáticas, las recomendaciones del docente, cuando explicaba los pasos matemáticos para el conjunto solución.

Esta configuración del contrato establecida, surgió de dos maneras, implícita y explicita, es decir, el docente como guía, establece reglas, las cuales consistieron en el uso de los casos de factorización para la resolución de cada forma de la ecuación, donde el estudiante aplicaba esta herramienta matemática; por otra parte, el estudiante en su rol de aprendiz, en el proceso de la resolución cometía errores, lo cual hizo que se asesorara de manera permanente con el docente y aclaraba dudas; este contrato al ser estricto, ayudaba al estudiante a seguir los pasos matemáticos para llegar a las raíces, es decir, el estudiante seguía cada paso sugerido por el docente, recordando que caso de factorización era el adecuado y que propiedades matemáticas serían las adecuadas para así tener una solución satisfactoria para el docente, si el estudiante resolvía el ejercicio de manera exitosa, se le felicitaba para motivarlo y fomentar el conocimiento hacia las matemáticas.

Es importante aclarar que, en el contrato didáctico establecido por el docente, lo fundamental de las interacciones que surgieron entre los individuos, pretendía que el estudiante identificara cada ecuación cuadrática y aplicara de manera explícita el caso de factorización que la resuelva, efectuando de manera adecuada las operaciones y propiedades de los números reales, con el fin de llegar a las soluciones y así el contrato se mantendría estable. Por el diseño de plan de aula, el contrato sufrió rupturas cuando se hizo la interacción y el estudiante continuaba presentando errores que se mencionaron anteriormente, lo cual él manifestaba que no comprendía el tema y por tal razón no obtenía el conjunto solución esperado.

El contrato que emergió entre el docente practicante y los estudiantes, se caracterizó por el seguimiento paso a paso del procedimiento enseñado para resolver las ecuaciones cuadráticas consideradas y haciendo uso de la factorización como herramienta matemática. Esta característica del contrato indica que los estudiantes podían, en unos casos, encontrar como útil el examen de las propiedades de los números reales, la equivalencia de las distintas expresiones algebraicas utilizadas, y la pertinencia del uso de los casos de factorización según las características de la ecuación objeto de resolución, adquiriendo habilidades y capacidades como solucionadores de ecuaciones cuadráticas; mientras que en otros casos, no encontraron utilidad alguna el examen de dichas propiedades numéricas, ni las reglas algebraicas involucradas, trayendo como consecuencia que el contrato tuvo expresiones de rigidez y predominó la poca crítica de la validez de los resultados obtenidos en el conjunto solución.

Por lo tanto, la configuración del contrato se pudo establecer con los estudiantes por su diseño de ser estricto, lo cual la mayoría de los estudiantes al seguir las instrucciones del docente pudieron obtener de manera exitosa las soluciones correctas de la ecuación cuadrática, que es lo que esperaba el docente en su momento y así verificar que las interacciones que surgieron entre las dos partes cumplieron con el propósito de establecer un conocimiento en la resolución de la ecuación cuadrática.

Reflexión

Los estudiantes de la Institución Tomás Cipriano de Mosquera del grado noveno lograron vivir una nueva experiencia de aprendizaje a través de un modelo práctico de enseñanza integral implementado durante la práctica pedagógica en el marco del plan de aula. Además, representa una vivencia enriquecedora para el practicante, quien se enfrenta a una de las realidades académicas actuales más fuertes. Significa un reto preparar las clases y valorar a los estudiantes de acuerdo con sus características.

Durante la práctica pedagógica muchos estudiantes lograron interiorizar los conceptos a través de repasos, preguntas, ejercicios en casa y exámenes, a través de los cuales el profesor realizó las aclaraciones pertinentes para que los estudiantes fortalecieran su capacidad de análisis de ecuaciones y la resolución a través de la factorización. Este proceso se reflejó en el buen desempeño académico del curso, concluyendo que se logró establecer una relación en beneficio del conocimiento entre docente y estudiante, pues ellos se encargaron de resolver la ecuación a través de estrategias guiadas por el profesor; en este punto, el objeto de estudio se logra en tanto la enseñanza se hace práctica y se alcanzan las propuestas del plan de aula.

El profesor estableció un plan para la resolución de la ecuación cuadrática, el estudiante identificó los pasos que realizó el profesor y estableció en qué momento se utilizan; en este aspecto, el objetivo principal de la práctica tuvo en cuenta los casos de factorización que ayudan a resolver las ecuaciones; después de establecer si el estudiante realizaba correctamente el plan o qué dificultades se presentaban durante el proceso de la solución.

Se logró que el estudiante resolviera ecuaciones cuadráticas, mediante el plan elaborado por el profesor, teniendo en cuenta los pasos aritméticos y algebraicos que surgen en el transcurso del desarrollo operatorio que llevará a la respuesta, por otra parte, algunos estudiantes no siguieron el plan de manera explícita, si no que utilizaban conocimientos previos de cursos anteriores y las resolvían de manera parcial, es decir ,no obtienen las dos soluciones, pero se da a entender que existe un tejido de manera implícita entre profesor y estudiante.

También se puede concluir que durante la práctica se estableció una relación entre el contrato didáctico del profesor y el estudiante, cuando el estudiante a pesar de no resolver la ecuación al utilizar el plan ideal, indaga o pregunta del por qué no ha llegado a la respuesta; no obstante, también surgen rupturas en el contrato cuando el estudiante utilizó operaciones aritméticas que no se enseñaron o son las que recuerda de cursos anteriores y las aplica solo por cumplir o desarrollar un examen; en este punto se evidencia la falta de atención que se presentó durante el proceso de enseñanza.

El objetivo principal de esta práctica, dicho anteriormente era establecer la relación del estudiante y profesor en la resolución de la ecuación cuadrática, y que el estudiante pudiera identificar los caminos que tiene para el desarrollo de esta, y decidir qué camino es más viable para su desenvolvimiento y poder así aplicar estos procesos en otros cursos.

Finalmente, fue evidente que por más modificaciones que se realicen al plan de aula, los estudiantes van a presentar dificultades para identificar los tipos de ecuaciones y los casos de factorización adecuados para su resolución, por lo tanto, el plan de aula no tuvo un éxito total, porque varios estudiantes no lograron resolver de una manera correcta las ecuaciones que se presentaron durante la práctica. Es de vital importancia la empatía que debe existir entre el docente y los estudiantes, es necesario escucharlos, dialogar con ellos, resolver sus dudas y apoyarlos en su proceso de aprendizaje. A través de esta experiencia fue posible evidenciar su interés por la materia, entendiendo lo que hay detrás de los errores que cometen cuando fallan en un examen o no pueden entender un tema, no se trata solamente de asignar una nota al alumno, sino de establecer una relación “académica” basada en el respeto y la solidaridad, pues solo así, se logrará mejorar la atención y el aprendizaje en el área de matemática, a este proceso se le denomina; contrato didáctico.

Referencias

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana. *Educación Matemática Vol. 13 No. 3,* pp. 5-21. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol13/02Avila.pdf

Baldor, A. (1972). *Algebra elemental de Baldor.* Editorial.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de matemáticas astronomía y física. Versión castellana 1993.

García Bacete, F. J. y Fortea Bagán, M. A. (2006). Ficha metodológica coordinada por Universitat Jaume I. Contrato didáctico o contratos de aprendizaje. http://msuarez.webs.uvigo.es/WEB_Deseno_Material_5b.pdf

Guía Desafíos matemáticos 9. (1998). Editorial Norma.

Institución Educativa Técnica Tomás Cipriano de Mosquera. (2011). Diseño curricular de áreas.

---------. (s.f.). *Modelo pedagógico*. [mensaje en un blog]. http://www.tomascipriano.edu.co/pei/modelo-pedagogico

Iparraguirre, L, y Buteler, L. (2015). *Trabajos de enseñanza "fundamentos y métodos de la didáctica*". Argentina, Córdoba.

Joshua, S., y Dupin, J. (1998). *Introducción a la didáctica de las ciencias y las matemáticas.* Colombia, Cali.

Ruiz, A., Alfaro, C y Gamboa, R. (2004). Aprendizaje de las matemáticas: conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas. http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Uniciencia/Articulos/Volumen2/Parte12/articulo22.html

Unican. (1995). Contrato de aprendizaje.

Vilanova, S; Rocerau, M; Valdez, G; Oliver, M; Vecino, S.; Medina, P; Astiz, M y Álvarez, E. (s.f.). La educación matemática, el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista iberoamericana de educación*. https://rieoei.org/historico/ deloslectores/ 203Vilanova.PDF

Anexos

Luego de resolver la ecuación cuadrática por casos de factorización y la fórmula cuadrática, se propone desarrollar los siguientes puntos.

1) Hallar *a, b* y c de las siguientes ecuaciones.

- $9x^2 + 6x + 10 = 0$
- $3x^2 – 9x = 0$
- $-6x^2 + 10 = 0$

2) Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por método de factorización

- $15x^2 - 5x = 0$
- $9x^2 = 3x$
- $x^2 + 2x -8 = 0$
- $x^2 + 6 = 7x$
- $a^2 - 4a - 6 = 0$

3) Un triángulo tiene como área 24 cm^2 y la altura mide **x + 2** y la base mide **x.** Hallar los valores de la altura y la base.

Examen

1) Hallar el *a, b* y *c* de las siguientes ecuaciones:

a. $3x^2 - 6x -3 = 0$

b. $-5x = -10 x^2 + 2$

c. $2 = 3x^2 - 6x$

2) Resolver las siguientes ecuaciones por factorización:

a. $x^2 + 2x - 8 = 0$

b. $x^2 - 9 = 0$

c. $x^2 + 4x = -45$

3) Resolver por formula general:

a. $3x^2 = -2x - 8$

b. $x^2 + 8x + 16 = 0$

c. $-3x^2 - 3x = x - 1$

4) Graficar las siguientes ecuaciones:

a. $f(x) = x^2$

b. $f(x) = -x^2 + 1$

Algunos pasos que utilizaron los estudiantes cuando resolvieron los puntos del examen fueron:

En el punto (1): cuando se les pide a los estudiantes que identifiquen los valores de *a, b* y *c*, la gran mayoría lo que hacen es dar el valor de *a* al primer término de la ecuación, y similarmente para las demás letras, no tienen en cuenta la expresión general, donde se puede identificar qué valor le corresponde a la letra *a*, ya que es la que acompaña a la variable que está al cuadrado.

Otros, por el contrario, organizaban la ecuación e identifican qué número acompañaban a la variable que está al cuadrado y luego las demás letras; estos procesos se identificaron igual que en el taller que se les realizó, es decir todavía conservan los mismos errores.

En el punto (2): algunos estudiantes optan por resolver este punto, ya que identificaron rápidamente que era una diferencia de cuadrados y conocían su factorización, sin embargo, en los otros dos puntos se notó la gran dificultad al resolver, lo mismo que sucedió con el taller, debido a que los puntos que se plantearon en el examen, eran muy similares a los del taller, por lo tanto, se observaron las mismas falencias.

Por otra parte, fueron pocos los estudiantes que identificaron como resolver esta ecuación, que es del tipo $x^2 + bx + c = 0$, donde identifican los valores que multiplicados les del valor **c** y sumados el valor de **b**, encontrar estos valores es lo que les dificulta, es por esta razón que, así como el taller pocos encontraron estos valores.

En el punto (3): en los dos primeros ítems, los estudiantes identificaron los valores de *a*, *b* y *c*, y solo reemplazaron la fórmula cuadrática, los otros resultados los obtuvieron a través de la calculadora; algunos olvidaron colocar los signos o elevar el cuadrado donde va el valor de b, o el 4 de la discriminante lo omitieron, por esta razón no llegaron a las raíces de la ecuación; otros estudiantes si reemplazaron bien los valores en la fórmula y llegaron a la solución.

El tercer ítem se quedó sin resolver porque la mayoría no lo entendió. En ambos lados de la igualdad se encuentra la variable x, donde en un lado está sola y en el otro lado está acompañada por el número 3, luego toman como valor de $b = 3$ y es ahí donde se presenta el problema cuando reemplaza en la ecuación. Algunos estudiantes identificaron que el primer paso que se debía realizar era despejar la variable y el -1.

En el punto (4): en este punto, los estudiantes dan valores a la variable x, con el fin de establecer la tabla de tabulaciones, pero la mayoría sólo tomó valores como $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, no tuvieron en cuenta los valores negativos ni el valor del cero, por esta razón sólo grafica una rama de la parábola, por otra parte si la función es negativa y esta corrida, así como en el ítem (b), realizan el mismo procedimiento dando solo tres valores, y grafica esta función igual que la anterior, no identifican la una de la otra; Otros por el contrario, si tienen en cuenta el signo menos y cuando realizan la tabulación notan que la parábola abre hacia abajo y notan la diferencia de la otra ecuación.