Dificultades en el Aprendizaje de la Demostración en Geometría Euclidiana en estudiantes de noveno grado

Yajaira García Angulo

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Popayán-Cauca

2022

Dificultades en el Aprendizaje de la Demostración en Geometría Euclidiana en estudiantes de noveno grado

Yajaira García Angulo

PhD Aldo Iván Parra Sánchez

Director

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Popayán-Cauca

2022

Diego Ramiro Correa Cuene

Evaluador de la práctica pedagógica

Aldo Iván Parra Sánchez

Director de la práctica pedagógica

Popayán-Cauca, mayo 2022

Dedicatoria

A mis padres María Lauriana Angulo y Uriel Aníbal García, quienes me trajeron a este mundo e infundieron en mí el amor, la perseverancia y el respeto.

A Jhon Edinson Mina, por llegar en el momento indicado e invertir parte de sus sueños para acompañar los míos.

A mis hermanos y sobrinos que ven en mí, un ejemplo digno y admirable a seguir.

Y a todas aquellas personas que tienen propósitos, sueños y no los han podido cumplir por los obstáculos, dificultades que hay en la vida, pero, siguen luchando para alcanzarlos.

Agradecimientos

A Dios por darme las fuerzas para cumplir este proyecto.

A Jhon Edinson Mina, por su apoyo incondicional, sus consejos, su confianza y todas las enseñanzas.

A mi director Aldo Iván Parra Sánchez, por sus orientaciones y comprensión en la preparación y desarrollo de esta práctica pedagógica.

A los docentes del programa de licenciatura en Matemáticas, en especial a la docente Maribel del Carmen Díaz por enseñarme la belleza de las matemáticas.

Al colegio Nuestra Señora de Fátima, directivos y docentes por permitirme vivir esta inolvidable experiencia.

Y a todas las personas que participaron en este proceso de forma directa o indirecta.

Tabla de contenido

Lista de anexos

Lista de tablas

Lista de gráficos

Lista de registros

Lista de mapas de calor

Resumen

En la presente sistematización se describe el desarrollo de una práctica pedagógica docente orientada a la investigación en el aula de clase, la cual tuvo como objetivo identificar y clasificar las dificultades al aprender a demostrar en geometría euclidiana en estudiantes de noveno grado del colegio Nuestra Señora de Fátima. Se especifican los principales elementos de la intervención en el aula de clase y los análisis de los datos obtenidos durante este proceso. Igualmente, se resalta la importancia que tiene la demostración para la construcción de aprendizaje significativo.

El análisis de los datos obtenidos se realizó teniendo en cuenta el trabajo de Samper y Morales (2015) titulado dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclidiana y Socas (1997) dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria.

Palabras claves: dificultades en el aprendizaje, aprendizaje significativo, demostración, geometría euclidiana.

Introducción

Una de las funciones de los docentes es procurar que los estudiantes estén construyendo conocimiento significativo, y para ello plantean objetivos de enseñanza-aprendizaje en el desarrollo de las distintas temáticas. Es importante realizar investigaciones dentro del aula de clase que les permitan a los profesores observar si los estudiantes están teniendo dificultades en su aprendizaje, y generar acciones que les ayuden a prevenir o dar solución a estas problemáticas.

El objetivo de la enseñanza de las matemáticas en la secundaria no es únicamente que los estudiantes aprendan las tradicionales reglas aritméticas, las unidades de medición, algunas nociones geométricas, entre otras, también se pretende que los estudiantes empleen razonamientos deductivos, inductivos e inferenciales, apliquen conceptos y desarrollen habilidades matemáticas para desenvolverse en la vida cotidiana.

Existen investigaciones en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que dan cuenta de que los estudiantes presentan dificultades, algunas de estas asociadas a la misma disciplina y otras son de distinta naturaleza, y se manifiestan en forma de errores.

En el desarrollo de esta práctica pedagógica se realizó una experiencia de enseñanza-aprendizaje del tema demostraciones, haciendo uso de los elementos fundamentales de la geometría euclidiana, semejanza y congruencia de triángulos, las cuales permitieron identificar y clasificar las dificultades que presentan los estudiantes de noveno grado del colegio Nuestra Señora de Fátima de la ciudad de Popayán, al realizar demostración en geometría euclidiana. Es importante conocer estas dificultades toda vez que la demostración matemática es un elemento didáctico relacionado con el desarrollo de habilidades mentales, que trasciende del simple dominio de procesos algorítmicos y mecánicos. Se asume la demostración matemática como un proceso formativo que implica actividades de comunicación, descubrimiento, verificación y sistematización de pensamiento matemático, que son imprescindibles en la construcción de conocimiento matemático significativo.

Las actividades de esta práctica pedagógica se realizaron en la asignatura de geometría euclidiana, porque esta brinda un escenario adecuado, ya que se encarga del estudio de las propiedades y de las medidas de figuras en un plano o en un espacio, para representar distintos aspectos de la realidad. Esta área del conocimiento provee importantes herramientas sobre cómo se construye una demostración, más precisamente cómo efectuar los pasos lógicos para el desarrollo de un argumento. La geometría ayuda a que los estudiantes potencien su capacidad de razonamiento visual, inductivo, deductivo e inferencial.

En este documento podemos encontrar justificaciones que sustentan la importancia y necesidad de realizar este tipo de trabajo en el aula de clase: los antecedentes, teorías, definiciones y conceptos que sustentan esta práctica pedagógica, la metodología que direccionó la intervención en el aula de clase, la forma como se realizan los análisis y la discusión de los datos obtenidos durante este tiempo. Por último, se presentan las conclusiones y recomendaciones personales sobre la experiencia vivida durante la inmersión en el aula y algunos anexos.

1. Justificación

La identificación de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas es una actividad de gran importancia en el quehacer de los docentes. Por tal motivo, en distintas partes del mundo, existen investigaciones que permiten identificar y clasificar dificultades, y al mismo tiempo realizar acciones para corregir los problemas asociados a tales dificultades. Tales investigaciones propician una enseñanza adecuada y facilitan un mejor aprendizaje de las matemáticas.

La enseñanza de la demostración en geometría para el grado noveno está incluida en los estándares básicos de competencias emanados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), como parte del pensamiento espacial y sistemas geométricos en la aplicación y justificación de criterios de congruencia y semejanza de triángulos.

Al hacer demostraciones deductivas en geometría se busca que los estudiantes se involucren en una dinámica propia del quehacer matemático. La realización de demostraciones de forma individual (pero sobre todo grupal) pone en acción todos los conocimientos construidos durante el proceso de aprendizaje, que posteriormente se formulan para ser validados e institucionalizados, acción que ayuda al estudiante a construir su conocimiento matemático (Laréz, 2014).

En este orden de ideas, Sánchez (2014) afirma que: “el bajo nivel que muestran generalmente los estudiantes en la comprensión y en la elaboración de pruebas, demostraciones y el mencionado papel que juegan las validaciones en la propia matemática parece que justificaría la introducción de la demostración en la educación secundaria” (p. 25).

Para Herrera (2015) la demostración abre un espacio de discusión entre el profesor y los estudiantes, poniendo así el conocimiento matemático en funcionamiento, por ello la importancia de demostrar en las aulas.

Así mismo, "la demostración como elemento en la didáctica matemática está estrechamente ligada al desarrollo de habilidades mentales y de pensamiento imprescindibles en la formación integral de los estudiantes" (Ortiz y Jiménez, 2006, p. 239). Considerando lo anterior, y teniendo en cuenta la teoría del aprendizaje significativo[1] planteada por David Ausubel (1991), las demostraciones en la secundaria son fundamentales para un aprendizaje significativo de las matemáticas. De acuerdo con esto, y según lo propuesto por Martín Socas, es importante identificar y clasificar las dificultades en el aprendizaje que presentan los estudiantes al realizar demostraciones geométricas, particularmente aquellas que están asociadas a los procesos de pensamiento matemático y a la complejidad de los objetos matemáticos.

Por consiguiente, se considera que es importante la identificación y clasificación de las dificultades en el aprendizaje de las demostraciones en geometría, toda vez que la demostración sirve como apoyo en la construcción de conocimiento para los estudiantes, y es una herramienta didáctica de verificación o validación de la temática para los docentes.

[1] Ausubel (1991) sobre el aprendizaje significativo afirma: los nuevos conocimientos se incorporan en la estructura cognitiva del estudiante, que desde los primeros cursos se va construyendo especialmente por representaciones concretas que en el caso de la matemática son apoyadas por el uso de figuras geométricas. Para la incorporación de los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos se requiere de esfuerzos deliberados del estudiante.

2. Antecedentes

La importancia que tienen las demostraciones matemáticas en el aprendizaje de los estudiantes, ha sido apoyada, explicada y evidenciada por autores como Larios, Crespo y Herrera, los cuales muestran con sus investigaciones las distintas funciones que tienen las demostraciones matemáticas en un aula de clase. Según Larios (2002) cuando la demostración en la escuela es vista como una forma de validación o verificación del conocimiento matemático adquiere dos funciones: I) *la demostración que prueba* (utilizada para ver que un hecho es verdadero), y II) *la demostración que explica* (utilizada para ver por qué un hecho es verdadero). Larios desarrolló en su investigación la idea de que las demostraciones matemáticas no deben ser eliminadas de los currículos matemáticos, sino todo lo contrario, toda vez que las demostraciones matemáticas son las que garantizan la construcción del conocimiento, y porque el proceso continuo de elaboración o construcción de demostración matemática es lo que ayuda que los estudiantes potencien y desarrollen el pensamiento matemático.

Igualmente, Crespo (2005) justifica que a través de las demostraciones y argumentaciones lógicas es posible evitar la tendencia de los procesos algorítmicos de la matemática en el aula de clase, que privilegian el aprendizaje mecánico de fórmulas y hacen la aplicación de las mismas de forma rutinaria. Las demostraciones en las aulas de matemáticas presentan una gran diversidad de formas y aparecen en los distintos niveles educativos a través de varios tipos de argumentaciones. El pensamiento deductivo es uno de ellos, este se va construyendo lentamente a lo largo de las etapas de la escuela, y su desarrollo no debe restringirse únicamente a los contenidos matemáticos, porque no solo está marcado por una concepción epistemológica de la comunidad científica, sino también por una concepción cultural de la sociedad que valora la fundamentación racional.

Del mismo modo, Herrera (2015) evidencia que la demostración también posee una función formativa, en tanto implica actividades de comunicación, explicación, descubrimiento, verificación y de sistematización del pensamiento matemático, estas funciones son las que deben tener en cuenta los docentes en formación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las demostraciones en las aulas de clase.

Sin embargo, existen investigaciones que dan cuenta que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se presentan dificultades, errores y obstáculos. A continuación, se describirán algunas de tales investigaciones, como parte de los antecedentes en la identificación de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente el aprendizaje de la elaboración de las demostraciones.

Socas en 1997 realizó una investigación en donde dice que las dificultades en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria, son de naturalezas distintas, algunos de sus orígenes están situados en el macrosistema educativo (ministerio de educación, la institución, currículo), pero en general su procedencia se concreta en el microsistema educativo (estudiantes, materia, profesor e institución escolar). Igualmente, estas dificultades pueden abordarse desde distintas perspectivas, enfatizando en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los estudiantes, currículo matemático y métodos de enseñanza.

En el marco de una teoría del conocimiento algebraico, Socas da algunas recomendaciones que permiten dar solución o controlar estos problemas, realiza una identificación, categorización, y ejemplificación de las dificultades, errores y obstáculos que presentan los estudiantes de secundaria en España, para comprender y trabajar con este componente algebraico. Dichas dificultades las categoriza como asociadas a:

- La complejidad de los objetos de las matemáticas.

- Los procesos de pensamiento matemático.
- Los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
- La falta de una actitud racional hacia las matemáticas.

En este mismo sentido, autores como Harel, Sowder, Samper y Morales plantean que aprender a elaborar demostraciones en matemáticas es una de las temáticas en donde más se evidencian dificultades. Por ejemplo, Harel y Sowder (1998)[2] consideran que "las dificultades para aprender a demostrar obedecen a la variedad de formas como los estudiantes se convencen a sí mismos o persuaden a otros de la certeza de una observación" (p.189).

Considerando lo anterior, en la investigación realizada por Samper y Morales en (2015) se evidencia la existencia de algunas dificultades en el aprendizaje de las demostraciones geométricas que presentaron un grupo de estudiantes de primer semestre de la Universidad de la Amazonía en los programas de licenciatura en matemática y física, que son de naturaleza y orígenes distintos. De acuerdo con lo planteado por Samper y Morales, y haciendo una correspondencia de estas dificultades con la investigación de Socas, estas obedecen a las asociadas al proceso de pensamiento matemático y a la complejidad de los objetos matemáticos, que se relacionan con los prerrequisitos de aritmética de los números reales, el álgebra y/o teoría de conjuntos, con la comprensión y manejo de enunciados de un teorema, el trabajo dentro de un sistema axiomático y el uso de la lógica matemática como guía y sustento del razonamiento requerido para producir una justificación. Unas de las conclusiones a las que llegaron los autores, es que estos tipos de dificultades provienen de la educación básica.

[2] Citados por (Fiallo et al., 2013, p.189)

Teniendo en cuenta que el objetivo de esta práctica pedagógica es identificar y clasificar las dificultades que presentan los estudiantes al aprender a construir demostraciones en geometría euclidiana, es fundamental conocer las formas como los estudiantes realizan las demostraciones. Arias (2011) investigó sobre los procesos de demostración que realizan los estudiantes de grado undécimo de la Escuela Normal Superior de la ciudad de Popayán, aplicando una estrategia de resolución de situaciones problema (en la construcción de demostraciones) para obtener los datos, los cuales permitieron evidenciar algunas de las demostraciones que realizaron los estudiantes y poder inferir que estas son de tipo visual (gráficos), experiencias mentales y reproducción de argumentaciones. Adicionalmente en el proceso de análisis de los datos obtenidos, Arias se da cuenta que los estudiantes realizan las demostraciones de manera mecánica como si siguieran una receta, además de evidenciar algunos errores que conllevan a dificultades de este proceso.

Por último, Fiallo et al. (2013) presentaron un estudio en donde realizaron una recopilación bibliográfica de las principales investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. En ese trabajo se expone una estructura organizacional de las distintas líneas de investigación, entre ellas se incluyen las concepciones y dificultades de los estudiantes al aprender a demostrar; según los autores, el principal investigador de esta línea es Nicolás Balacheff "quien con sus distintos trabajos de investigación permite ver los procesos de demostración utilizados por los estudiantes al resolver un problema, revisando cómo los estudiantes llegan a la convicción de la validez de la solución propuesta, a través de la discusión verbal" (Fiallo et al., 2013, p. 188). Otros autores como Ibañes y Ortega (2003) en sus pesquisas muestran que: "los estudiantes van evolucionando en el reconocimiento, distinción e identificación de las demostraciones matemáticas, basados en razones externas al proceso y en las funciones que le asignan, logrando una caracterización cada vez mejor del mismo" (Fiallo et al., 2013, p.188).

Arzarello et al. (1998) “bosqueja un modelo para interpretar las dificultades en los procesos de exploración de situaciones geométricas, cuando se están formulando conjeturas (fase ascendente de la actividad) y produciendo sus demostraciones (fase descendente de la actividad)” (Fiallo et al., 2013, p.189). El modelo está basado en los diferentes tipos de control del sujeto con respecto a la situación y el paso de una fase a la otra.

3. Objetivos

Las demostraciones geométricas en el contexto educativo se asumen como un proceso social, donde los estudiantes reflexionan, dialogan y descubren propiedades, estos son capaces de comunicar y argumentar su validez, integrándose así dentro del conjunto de conceptos y relacionándolas con lo construido a lo largo del proceso de aprendizaje (Laréz, 2014). Por ello se plantean a continuación el objetivo general y los objetivos específicos.

3.1. Objetivo General

Identificar y clasificar las dificultades en el aprendizaje de las demostraciones directas en geometría euclidiana que presentan los estudiantes de noveno grado del colegio Nuestra Señora de Fátima.

3.2. Objetivos Específicos

- Realizar una experiencia de enseñanza-aprendizaje sobre el tema de demostraciones matemáticas, encaminadas al uso de demostraciones directas en geometría euclidiana.
- Describir las dificultades presentadas por los estudiantes al aprender a elaborar demostraciones directas en geometría euclidiana.
- Determinar posibles causas de las dificultades asociadas a la disciplina de las matemáticas.
- Proponer a partir de la experiencia vivida algunas recomendaciones que permitan evitar, controlar y/o disminuir las dificultades presentadas por los estudiantes.

4. Marco teórico

El desarrollo de esta práctica pedagógica investigativa se fundamentó en la teoría establecida por Socas (1997) acerca de las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria y en el artículo realizado por Samper y Morales (2015) sobre las dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclidiana.

El primer texto es útil porque brinda algunas clasificaciones sobre las dificultades del aprendizaje de las matemáticas. El segundo texto posee un objetivo bastante similar al nuestro y lo usaremos para estructurar la parte metodológica, para describir, interpretar y analizar los datos obtenidos.

Así mismo, para preparar y desarrollar las intervenciones en el aula de clase, se tuvo en cuenta la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau (2007). Esta teoría se caracteriza por la construcción de un aprendizaje significativo. Usaremos esta teoría para que los estudiantes comprendan el significado y el papel que tiene la demostración en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y para que reflexionen sobre cómo se puede descubrir, argumentar y comunicar lo aprendido durante este proceso.

De estos referentes tomaremos algunas definiciones y nociones fundamentales, que hemos organizado en tres grupos, dificultades, demostraciones y finalmente las situaciones didácticas, que presentamos a continuación:

4.1. Dificultad

Para estudiar las dificultades que están relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas, se asume como definición la noción propuesta por Pérez y Merino (2008), que refiere al "problema o conflicto que surge cuando una persona intenta realizar o desarrollar algo. Las dificultades, por lo tanto, son inconvenientes o barreras que hay que superar para conseguir un determinado objetivo".

La noción de dificultad puede aplicarse a diversas ideas o situaciones, "las dificultades en el aprendizaje son aquellas que sufren ciertos estudiantes que, pese a no sufrir de una discapacidad o no tener una inteligencia que resulte inferior a la de sus compañeros, no logran conseguir un buen rendimiento académico" (Pérez y Merino, 2008).

4.1.1. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

Para Socas (1997), el aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades en los estudiantes y estas son de naturaleza distinta. Las dificultades se conectan y se refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculo y se manifiestan en los estudiantes en modo de error. Este autor clasifica en cinco categorías las dificultades que obedecen a la naturaleza de su origen: las dos primeras asociadas a la propia disciplina (complejidad objetos matemáticos y procesos de pensamiento matemático), una tercera categoría ligada a los procesos de la enseñanza de las matemáticas; las dificultades en conexión con los procesos cognitivos de los alumnos constituyen una cuarta categoría y finalmente, una quinta categoría relacionada con la falta de una actitud racional hacia las matemáticas.

Para el desarrollo de la práctica pedagógica, se trabajó específicamente con las dificultades asociadas a la propia disciplina, las cuales se definen a continuación:

Dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos.

Este tipo de dificultad se relaciona con el lenguaje en la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos y el uso del lenguaje cotidiano como mediador en la interpretación de los signos. Es un conflicto que involucra el uso del lenguaje cotidiano u ordinario dentro de un contexto matemático. Algunas nociones matemáticas que ejemplifican este tipo de conflicto son: *raíz, semejanza, producto, índice, función,* las cuales tienen un significado en el contexto matemático que es distinto al lenguaje cotidiano, por lo que el uso de tales palabras puede producir dificultades, a causa de la confusión semántica implícita.

El lenguaje matemático opera en dos niveles, el nivel *semántico* (los signos son dados con un significado claro y preciso) y el nivel *sintáctico* (los signos que pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado), es decir, los objetos matemáticos (números, lenguaje algebraico, función, etc.) se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes; el estatus operativo, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso; y el estatus conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Son estos los aspectos que ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de los conceptos matemáticos.

Dificultad asociada a los procesos de pensamiento matemático.

Este tipo de dificultad se relaciona con las rupturas implícitas en los modos de pensamiento matemático; los ejemplos, los dibujos en el pizarrón, las imágenes estandarizadas, pueden generar errores. Los procesos de pensamiento matemático se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y en la ruptura que se da necesariamente en la relación con los modos de pensamiento matemático. Esta dificultad en general no se puede evitar, ya que forma parte del proceso normal de construcción de conocimiento matemático.

Veamos un ejemplo de ruptura que se da en relación con los modelos de pensamiento matemático y es propuesto por Socas (1997): el modelo aditivo en la escuela primaria puede crear una dificultad al modelo multiplicativo, cuando se introduce el concepto de multiplicación como adición repetida en el sistema de los números naturales, $a + a + \ldots + a$ b veces $a = ba$. Esta adición no puede dar sentido a la multiplicación para el sistema numérico de los enteros, en particular cuando se operan números negativos. Se puede evidenciar que los modelos implícitos que generan ciertos modos de pensamiento se convierten en dificultades para el proceso de pensamiento matemático en algunos momentos.

4.2. Demostración

Una demostración, según el Diccionario Larousse (2010, p. 323) es un *razonamiento* que deduce la verdad de una proposición partiendo de axiomas que se han enunciado (citado por Laréz 2014). Por su parte, Harel y Sowder definen la demostración como el proceso empleado por un individuo para quitar o eliminar las dudas sobre la verdad de una proposición (cita en Lárez, 2014, p. 186).

Para fundamentar este concepto, se establecerá la definición de demostración en un contexto netamente matemático, luego la demostración en un contexto escolar o institucional y finalmente la demostración en geometría, siendo estas dos últimas las que hacen parte del desarrollo de este trabajo direccionado a la investigación.

Knowless (1998, p. 1) presenta el significado formalista de la demostración matemática diciendo:

> Una demostración en una teoría matemática es una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales es o bien un axioma o bien una proposición que ha sido derivada de los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría. Un teorema es una proposición así derivada por una demostración (citado por Martínez, 2001, p. 30).

También, es importante señalar que existen dos tipos de demostraciones matemáticas para proposiciones de la forma $P \to Q$:

1. *La demostración directa*[3]*:* una proposición $P \to Q$, será verdadera si es una tautología, es decir, si cada vez que la proposición P es verdadera se consigue necesariamente que la proposición Q sea verdadera.

2. *La demostración indirecta*[4]*:* existen dos tipos, *la demostración por contrarrecíproca y la demostración por reducción al absurdo.*

2.1. La demostración por contrarrecíproca: consiste que en lugar de demostrar $P \to Q$, se demuestra $\sim Q \to \sim P$ se basa en la equivalencia de la lógica llamada *contraposición*

$$P \to Q \equiv \sim Q \to \sim P.$$

2.2. La demostración por reducción al absurdo: este tipo de demostración se basa en la equivalencia lógica llamada *neutra*, para proceder con la demostración se trabaja igual que

[3] Bartle y Sherbert (2004), Roberts (2010) citados por Alfaro, Flores y Valverde (2019).

[4] Bartle y Sherbert (2004), Roberts (2010) citados por Alfaro, Flores y Valverde (2019).

como si fuera una demostración directa, es decir, se supone que $P \wedge \sim Q$ es verdadera hasta deducir que una proposición es una contradicción.

No obstante, cabe señalar que el concepto de demostración matemática ha evolucionado históricamente, por ello es importante mencionar a Crespo y Farfán (2005) quienes nos dicen:

> Lo que es una demostración y cuándo es válida una construcción o comprensión relativa al contexto sociocultural que se considere. La mayor parte de las ciencias, incluyendo a las matemáticas, utiliza la inducción junto con la intuición para enunciar proposiciones. En las matemáticas, el razonamiento inductivo permite observar patrones en búsqueda de regularidades para la generalización y formulación de conjeturas. Estas conjeturas deben ser validadas o rechazadas, por lo tanto, se deben hacer demostraciones que requieren la deducción de la demostración matemática (citado por Alfaro, Flores y Valverde, 2019, p. 61).

La definición de demostración está sujeta al contexto en el que se está trabajando, esta definición fue fundamental para el desarrollo de esta práctica pedagógica, lo que nos permite finalmente proceder a definir la demostración matemática en un contexto escolar o institucional como sigue:

4.2.1. Demostraciones matemáticas en el contexto escolar o institucional

Harel y Sowder (1996), Duval (1999), Crespo (2005) y Balacheff (2008) proponen como definición de demostración al proceso argumentativo que un estudiante realiza para justificar inferencias matemáticas de acuerdo a los criterios de validación matemática establecidos y aceptados por la comunidad del aula de clase; eso se le denomina Demostración Escolar (citados por Hernández y Jiménez, 2016). Haciendo uso de la misma definición Hanna (1989)[5] dice que la demostración escolar se divide en cuatro etapas:

1. Descubrir las regularidades de una situación.
2. Mostrar ejemplo y contraejemplos.
3. Formular conjeturas o refutaciones.
4. Explicar argumentativamente para convencer.

El trabajo escolar con demostraciones adquiere una dinámica particular cuando se aborda la geometría, esta última entendida como "una parte de las matemáticas que se encarga de estudiar las propiedades y las medidas de una figura en un plano o un espacio" (Pérez y Merino, 2012). Para representar distintos aspectos de la realidad, la geometría apela a los denominados sistemas formales o axiomáticos (compuestos por símbolos que se unen respetando reglas y que forman cadenas, las cuales también pueden vincularse entre sí) y a nociones como rectas, curvas y puntos, entre otras. La presencia de dichos sistemas formales o axiomáticos hace importante establecer para la geometría escolar el papel de la demostración y los razonamientos.

Razonamiento en geometría

Duval (1998) define el razonamiento en geometría como:

> "Cualquier proceso que permite sacar una nueva información dada se considera un razonamiento. Está referida a los procesos discursivos internos o externos para nombrar, argumentar y a la organización deductiva de proposiciones definidas,

[5] citada por Hernández y Jiménez, 2016.

entre otros, a partir de una teoría" (citado por Samper, Leguizamón y Camargo, 2001, p. 148).

De lo anterior Samper, Leguizamón y Camargo (2001) deducen que los procesos de razonamientos son considerados como todas las acciones que las personas realizan para comunicar y explicar a los otros y a ellos mismos lo que ven, lo que piensan y lo que concluyen. Se reconocen como funciones del razonamiento comprender, explicar y convencer, además de demostrar. Los autores también distinguen tres tipos de razonamientos presentes en el desarrollo de las demostraciones:

Razonamiento visual[6]*:* Integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones mentales de los objetos bidimensionales o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones.

Razonamiento intuitivo o informal[7]*:* Tiene que ver con las ideas espontáneas que se emiten en el lenguaje natural, a través de la descripción, la explicación y la formulación de argumentos, producto del establecimiento de asociaciones u oposiciones.

---

[6] Clements y Battista, 1992, citado por Samper, Leguizamón y Camargo, 2001.

[7] Samper, Leguizamón y Camargo, 2001.

Razonamiento inferencial[8]*:* Integra procesos inductivos, abductivos y deductivos y hace referencia a la elaboración de discursos formales encaminados a la construcción de demostraciones para probar la validez de una afirmación.

4.2.2. Demostración en geometría

Según Laréz (2014), la demostración en geometría no se trata solo de recordar una serie de axiomas y proposiciones previas ya demostradas, ella busca que los estudiantes se involucren de una forma dinámica y propia del quehacer matemático, consiste en una tarea que convoca la ejercitación de habilidades cognitivas básicas, por ejemplo: la lectura comprensiva, el razonamiento, el análisis, la evaluación, entre otras, así mismo ayuda a que los estudiantes puedan reflexionar, dialogar y descubrir propiedades con el fin que estos adquieran la capacidad de comunicar y argumentar su validez. Igualmente, dota a los estudiantes de cualidades “matemáticamente potenciadoras” porque constituye una experiencia de aprendizaje a través de las cuales los estudiantes en su condición de resolutores interactúan con el medio, con la matemática y con sus compañeros, acción que los ayuda a construir su conocimiento matemático. (Tirapegui, citado en Laréz, 2014).

4.3. Dificultades en el aprendizaje de las demostraciones geométricas

Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), clasifican algunas dificultades que surgen cuando los estudiantes construyen demostraciones de afirmaciones en geometría euclidiana (como se cita en Samper y Morales, 2015). Estas dificultades las categorizan como sigue:

---

[8] Samper, Leguizamón y Camargo, 2001.

1. El trabajo dentro de un sistema axiomático.
2. El uso de la lógica matemática como guía y sustento del razonamiento requerido para producir una justificación.
3. Los prerrequisitos de aritmética de los números reales, álgebra o teoría de conjuntos.
4. Comprensión y manejo del enunciado de un teorema.

En la primera categoría se trabaja sujeto a un sistema axiomático que requiere que los estudiantes formulen definiciones, verifiquen si las condiciones exigidas en las hipótesis de un teorema se cumplan antes de usarlo, respalden las afirmaciones que se realizan a partir del sistema teórico y den uso adecuado de los términos matemáticos. La segunda categoría hace referencia al uso incorrecto de la lógica matemática, lo cual se da frecuentemente porque los estudiantes no tienen el conocimiento conceptual y procedimental de los conectivos lógicos y de las tautologías asociadas o porque no saben cómo hacer pruebas directas o indirectas.

La tercera categoría tiene que ver con el uso de la aritmética de los números reales, las propiedades del álgebra y de la teoría de conjuntos. Especialmente se identifican dificultades que tienen que ver con el conocimiento tanto conceptual como procedimental de los conceptos y las propiedades matemáticas. Por último, en la categoría cuarta se identifican algunas dificultades que son habilidades que los estudiantes adquieren con la producción de demostraciones, como la identificación de las hipótesis y tesis de un enunciado o teorema, con la contextualización y descontextualización de los conceptos y propiedades de los objetos matemáticos.

Finalmente, es fundamental señalar que esta práctica pedagógica se realizó en la asignatura de geometría, toda vez que esta constituye el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación y ha sido considerada durante mucho tiempo como el lugar del currículo escolar donde los estudiantes aprenden a razonar y a conocer la estructura axiomática de la matemática (Laréz, 2014), específicamente en la construcción de demostraciones directas en geometría euclidiana que involucran los temas de semejanza y congruencia de triángulos.

4.4. Teoría de las situaciones didácticas

La teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau es un modelo diseñado para ayudar a los docentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje con la finalidad de que los estudiantes puedan contribuir a la construcción de aprendizajes significativos. Dentro de esta teoría, se define lo que es una situación, según Brousseau (2007) es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado, para el autor una situación permite al sujeto alcanzar un estado favorable dentro de un medio.

En el desarrollo de las situaciones didácticas, Brousseau identifica esquemas de las situaciones, los cuales llama tipología de las situaciones didácticas que intervienen en la construcción de conocimiento matemático significativo. Para identificar cada una de estas situaciones es necesario establecer un problema al que se le debe dar una solución, con la intención de validar e institucionalizar un saber matemático, estas situaciones son de: acción, formulación, validación e institucionalización. Se describen a continuación.

4.4.1. Situación de acción

Es aquella donde el sujeto actúa, se retroalimenta al tomar decisiones, proponiendo una posible solución del problema propuesto. Se produce un intercambio de información representada en forma de acción y decisiones, los estudiantes deben actuar sobre un medio que les ha planteado el profesor, poniendo en práctica el conocimiento construido durante todo el proceso enseñanza-aprendizaje. Es decir, cada estudiante debe utilizar sus cursos y conocimientos previos para encontrar estrategias que le permitan llegar a una solución del problema o situación planteada.

4.4.2. Situación de formulación

En esta situación es donde los estudiantes formulan la información, se retoma el problema poniendo en juego cada decisión tomada en la situación acción; este proceso facilita reconocer, identificar, descomponer, describir y reconstruir el problema planteado, para comunicar las distintas soluciones posibles al problema.

4.4.3. Situación de validación

Como su nombre lo indica, se valida la situación de acción y formulación, se discute el cómo los estudiantes dan solución al problema planteado, se verifica y corrige con el fin de validar el aprendizaje construido durante el proceso de enseñanza.

4.4.4. Situación de institucionalización

Se verifica si el objetivo de enseñanza-aprendizaje fue alcanzado con éxito, el profesor toma el control de esta situación para complementar la solución del problema retomando lo planteado en las situaciones de acción, formulación y validación. El docente realiza conclusiones a partir de lo producido por los estudiantes, sistematizando, ordenando la información con el propósito de reconocer y establecer acuerdos sobre las teorías utilizadas durante el desarrollo del problema y estableciendo una conexión con las teorías enseñadas.

La función de la situación de institucionalización es la de establecer y dar estatus oficial al conocimiento, en esta situación se formalizan y estructuran los conceptos y definiciones, se entabla relación entre los conocimientos que los estudiantes están construyendo (producciones de los estudiantes) con lo establecido cultural o científicamente, modificando el lenguaje habitual, teniendo en cuenta la simbología matemática.

5. Contexto escolar

La práctica pedagógica se desarrolló en el colegio Nuestra Señora de Fátima de la Policía Metropolitana de Popayán, localizada en la zona urbana de la ciudad, es un lugar comercial, con fácil acceso, ubicada en el barrio la Esmeralda, estrato tres (3) según el DANE. Este es un colegio que cuenta con un régimen especial, el cual es direccionado por el Ministerio de Educación Nacional y el Ministerio de Defensa, dirigido por la Dirección de Bienestar Social, ofrece el servicio semiprivado de educación mixta (hombres-mujeres), tiene dos jornadas mañana y tarde con modalidad académica.

De acuerdo con los resultados de las pruebas de estado en los últimos cinco años este centro educativo se encuentra entre los primeros cinco puestos a nivel Departamental y entre los veintidós colegios que pertenecen a la policía nacional ha ocupado el primer puesto con las mejores calificaciones en dicha prueba.

Según la misión y visión de este colegio es fundamental potenciar en los estudiantes los razonamientos deductivo e inductivo, toda vez que permite que estos desarrollen habilidades y competencias de gran utilidad para su vida cotidiana, por tal razón el grupo de docentes encargados de la asignatura de matemáticas o como es llamada en este colegio la asignatura de razonadores trabajan en ello utilizando la demostración en geometría como una herramienta didáctica. Para el grupo de docentes es conveniente que la asignatura de geometría se trabaje como una materia independiente, ya que en esta área del conocimiento los estudiantes aprenden interactuando con la realidad.

El docente encargado de guiar o impartir la asignatura de matemática o razonadores en el grado noveno es egresado de la Universidad del Cauca del programa de licenciatura en matemática, con veintidós (22) años de experiencia, de los cuales seis (6) años fue director del colegio.

Para el desarrollo de la práctica pedagógica se contó con dos grupos de estudiantes de noveno grado, los cuales suman un total de cincuenta y cuatro (54) de los cuales treinta y tres (33) niños y veintiún (21) niñas, entre las edades de trece (13) y quince (15) años, los estudiantes son de estrato socioeconómico 2 y 3 y la mayoría de ellos son familiares de algún miembro de la Policía Nacional.

6. Metodología

Para el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca, la práctica pedagógica es un espacio curricular que pretende aproximar al estudiante a la realidad profesional, que se manifiesta en los ámbitos socio-culturales y el sistema educativo colombiano (artículo 6, resolución N° 024). Por este motivo surge el trabajo aquí descrito, toda vez que como futura docente que se preocupa por el proceso de enseñanza-aprendizaje es importante identificar aquellos factores que no permiten alcanzar los objetivos de enseñanza.

Cualquier proceso de investigación tiene un carácter continuo y organizado en etapas, que permiten delimitar el principal objetivo de una práctica pedagógica de carácter investigativo. La organización de estas etapas de forma ordenada ayuda en el desarrollo de las tareas para llevar a cabo la investigación, este aspecto es clave para planificar el proceso de avance de las fases de intervención en el aula de clases y de la sistematización del desarrollo de la práctica pedagógica.

Para indagar sobre las dificultades que presentaron los estudiantes, este trabajo está enmarcado dentro de la investigación cualitativa, que es un enfoque basado en la recolección y análisis de datos sin medición, por medio de descripción y observación. Su propósito consiste en reconstruir la realidad, tal y como lo observan los actores de un sistema social previamente definido (Baptista, Collado, y Samperi, 2014). En este enfoque se define al docente como protagonista del proceso investigativo, centrándose hacia el mejoramiento continuo de su quehacer como docente, por medio de una reflexión consciente sobre las problemáticas que se presentan en el acto del proceso de enseñanza-aprendizaje. De igual manera, este enfoque le permite al docente preguntarse por el mismo acto educativo al que contribuye, y así poder reflexionar en torno a él con el fin de cambiar, modificar o transformar su quehacer pedagógico.

La intervención en el aula fue desarrollada con cincuenta y cuatro (54) estudiantes de noveno grado del colegio Nuestra Señora de Fátima, dividido en dos grupos de veintisiete (27) estudiantes, el cual tiene su plan educativo institucional (PEI) sujeto a los estándares básicos de competencias, lineamientos curriculares y derechos básicos de aprendizaje del Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Por motivo de la emergencia sanitaria que vive actualmente el país, la interacción con los estudiantes fue bajo la modalidad de la virtualidad por medio de la aplicación *Zoom* de manera sincrónica. Para la presentación de la información (desarrollo de los temas o explicación de las guías) se utilizó el programa *Genially*, en algunas ocasiones se utilizó *Microsoft PowerPoint* y el programa de *GeoGebra* para la creación de las representaciones de los objetos geométricos y para construir conocimiento se hace uso las situaciones didácticas.

La intervención en el aula de clases tuvo lugar durante el segundo periodo académico de la institución educativa, que inició el día 19 de abril y culminó el 18 de junio del año 2021, con una duración de cuatro (4) horas semanales, divididas en noventa (90) minutos por cada curso y ciento ochenta (180) minutos de asesorías. En algunas ocasiones se dedicaba más tiempo para las clases y asesorías, con la intención de moderar o controlar las dificultades que presentaban los estudiantes a medida que se avanzaba en el desarrollo de la secuencia de aprendizaje.

Las actividades que fueron utilizadas para fortalecer y desarrollar el tema de demostración deductiva en geometría (semejanza y congruencia de triángulos), fueron elaboradas en conjunto con el director de la práctica pedagógica, con el propósito de alcanzar los objetivos de enseñanza-aprendizaje establecidos por el colegio.

La elaboración de la secuencia de aprendizaje fue estructurada teniendo como guía a Diaz (2013), quien sugiere que “las secuencias de aprendizaje deben responder a los siguientes principios: vinculación contenido-realidad, vinculación contenido-conocimiento, y experiencias de los alumnos; uso de las Apps y recursos de red; obtención de evidencias de aprendizaje” (p. 19). En esta línea de ideas, las secuencias de aprendizaje se desarrollaron en tres momentos: *apertura (inicio), desarrollo y cierre.*

Las actividades de apertura (inicio)

El sentido de esta actividad es hacer diagnósticos sobre los conocimientos previos de los estudiantes, la cual se desarrolla con el fin de activar la atención, establecer los propósitos, incrementar la atención y motivación, dar una visión preliminar del tema y recordar los conocimientos previos de los estudiantes (Díaz, 2013).

Las actividades de desarrollo

Se realizan con el propósito de que los estudiantes interactúen con la nueva información (nuevo conocimiento), se busca que los estudiantes procesen la información, esto puede ser mediante material que hayan consultado o que haya sido entregado con antelación por el docente. De igual manera, este pone en juego estrategias de enseñanza y promueve en los estudiantes estrategias de aprendizaje. Otra finalidad de esta actividad es focalizar la atención de los estudiantes y realizar prácticas de ejercicios relacionados con el tema o contenido (Diaz, 2013).

Las actividades de cierre

Es el momento en el cual se realiza la revisión y resumen de los puntos claves tratados durante las clases, se reflexiona sobre lo aprendido, se busca relacionar los nuevos contenidos con las experiencias y conocimientos previos de los estudiantes, se realiza una retroalimentación para identificar avances, dificultades o deficiencias en lo aprendido que es lo que permite mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje. A partir de estas actividades se busca que los estudiantes logren una reelaboración de la base conceptual reorganizando su estructura de pensamiento cuando interactúa con la nueva información a la que tuvo acceso (Díaz, 2013).

El análisis de la información (datos) se llevó a cabo mediante el modelo de Wolcott (1994), el cual tiene tres componentes principales: *la descripción*[9]*, el análisis*[10] *y la interpretación*[11]. Para llevar a cabo el desarrollo de la práctica pedagógica y obtener los datos, se ejecutó la investigación en tres (3) fases, que buscaron enfatizar en el quehacer docente como formador e investigador de su actuar pedagógico:

Fase I

- Elaboración del material de trabajo; preparación de las clases (secuencia de aprendizaje), prueba diagnóstica, actividades-talleres.
- Se explicó en qué consiste la prueba diagnóstica y se envió mediante correo electrónico o *WhatsApp* a los estudiantes para que la pudieran desarrollar en clase.
- Se analizaron los resultados de la prueba diagnóstica y se discutió en la sesión siguiente de la presentación de la misma, con el objetivo de mostrar una de las formas en que se puede desarrollar cada uno de los puntos de esta prueba, en la búsqueda de validar e institucionalizar algunos conceptos o definiciones.

---

[9] Es una manera de mantenerse cerca de los datos recopilados originalmente. La estrategia utilizada para esto es tratar los datos descriptivos como hechos. Se espera que los datos "hablen por sí mismos".

[10] Es ampliar y extender la explicación más allá de una pura descripción. Requiere un análisis que procede de manera cuidadosa y sistemática para identificar los factores claves y las relaciones entre estos.

[11] La meta es darle sentido a lo que está ocurriendo en la investigación para alcanzar un entendimiento o explicación más allá de los límites de lo que puede ser explicado con el grado usual de certeza asociado al análisis. Puede seguir al análisis o emerger de la descripción.

Fase II

- Se inició el desarrollo del plan de trabajo (secuencia de aprendizaje) que se realizó en conjunto con el director de la práctica pedagógica.
- Se orientaron las clases de forma virtual en la búsqueda de construir conocimiento significativo en conjunto con los estudiantes, con el propósito de alcanzar los objetivos y desempeños propuestos.
- Los estudiantes presentaron cuatro (4) actividades, diseñadas para fortalecer y construir aprendizaje significativo y así permitirles actuar y formular posibles respuestas, para posteriormente validar e institucionalizar el saber matemático trabajado en cada una de las sesiones.
- Cada actividad fue revisada, analizada y discutida en las clases dirigidas. Para cada actividad entregada se realizó la respectiva validación e institucionalización de contenido.

Fase III

Se analizaron los datos obtenidos en la *fase I* y *fase II*, siguiendo la secuencia de Wolcott, la cual nos dice que primero se describe lo que se observa, luego se analiza y finalmente se interpreta la información obtenida, con la intención de identificar y clasificar las dificultades que presentan los estudiantes de noveno grado al elaborar demostraciones directas en geometría euclidiana. Esta secuencia permite reflexionar sobre el proceso realizado.

6.1. Descripción de la práctica pedagógica: Intervención en el aula

Como se mencionó anteriormente, la inmersión en el aula de clases tuvo una duración de treinta y seis (36) horas, las cuales equivalen a un periodo académico en el colegio Nuestra Señora de Fátima. Un periodo académico consta de diez (10) semanas, las cuales se distribuyen de la siguiente manera: nueve (9) semanas de clases directas y una (1) semana para realizar recuperaciones (ver anexo G).

Durante las nueve (9) semanas se desarrolló el tema de demostración y los tipos de demostraciones, la explicación de estos temas se realizó haciendo uso de los elementos fundamentales (básicos) de la geometría euclidiana, semejanza y congruencia de triángulos. Estos fueron desarrollados con el propósito de alcanzar los objetivos de enseñanza-aprendizaje y desempeños que se pretendían evaluar. Cada tema se evaluó con una actividad, la cual era discutida en clase con la intención que los estudiantes pudieran mostrar cómo estaban elaborando o produciendo demostraciones.

Para la intervención en el aula y docencia dirigida se tomó como base el modelo teórico de enseñanza-aprendizaje de las situaciones didácticas de Brousseau (2007). En la búsqueda de construir aprendizajes significativos es importante que los estudiantes tengan evidencia de la forma como se está construyendo conocimiento, por tal razón la importancia de realizar la socialización de las actividades desarrolladas por ellos, y de formalizar, validar e institucionalizar los saberes aprendidos.

6.2. Descripción de las actividades presentadas en las clases

Para lograr los objetivos propuestos para el desarrollo de este trabajo y los objetivos de enseñanza-aprendizaje establecidos para la intervención en el aula de clase, cada actividad se planeó bajo algunos parámetros, en la búsqueda de la construcción de aprendizaje significativo. Con estas actividades se procuró que los estudiantes actuaran y formularan posibles respuestas sobre las preguntas planteadas a partir de los temas desarrollados en clase, posteriormente fueron examinadas con el propósito de validar e institucionalizar los conocimientos construidos.

Se realizaron cinco (5) actividades, dos en horas de clases y las otras tres fueron dejadas como tarea para entregar al día siguiente e incluso el mismo día. A continuación, se presentan los desempeños y habilidades que se evaluaron en cada actividad desarrollada:

6.2.1. Prueba diagnóstica

Objetivo: Identificar los conocimientos previos y dificultades en la compresión de los conceptos trabajados con anterioridad.

Como su nombre lo indica, se buscaba identificar aquellos conocimientos que los estudiantes han construido durante su recorrido académico, es decir reconocer las habilidades y desempeños trabajados con anterioridad. Esta actividad consistía de siete (7) preguntas (ver anexo B) en las cuales se evaluaron algunos desempeños donde se pretendía que los estudiantes establecieran:

- Relaciones entre los conceptos de Semejanza-Homotecias-Proporcionalidad.
- Conocimiento conceptual y procedimental de semejanza de triángulos.
- Relaciones entre los conceptos de Congruencia-Reflexión-Igualdad.
- Conocimiento conceptual y procedimental de la congruencia entre triángulos.
- Identificar las hipótesis y tesis de un enunciado o teorema.
- Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos.
- Conocimiento conceptual de los tipos de ángulos según sus medidas y posición.
- Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulos entres rectas paralelas y una recta transversal.
- Interpretación de los objetos matemáticos.
- Comprensión y manejo del teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo.
- Comprensión y manejo del principio de sustitución y propiedad o concepto de igualdad.

- Establezca los respaldos teóricos, explícitos y apropiados de las proposiciones que conforman la justificación.

6.2.2. Actividad en clase: Elementos fundamentales de la geometría (postulado de adición de medida de ángulos)

Objetivo: Reconocer y propiciar un acercamiento de los estudiantes con los conceptos fundamentales (básicos) de la geometría euclidiana e introducir la construcción de demostraciones directas.

Esta actividad constaba de dos (2) preguntas (ver anexo C), con esta actividad se buscaba evidenciar si los estudiantes comprenden y manejan algunos postulados y teorías, además que los estudiantes establecieran algunas relaciones como:

- Identificar las hipótesis y la tesis de un enunciado o teorema.
- Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos.
- Conocimiento conceptual de los tipos de ángulos según sus medidas (amplitud).
- Interpretación de los objetos matemáticos.
- Comprensión y manejo del principio de sustitución y propiedad o concepto de igualdad.
- Establezca los respaldos teóricos, explícitos y apropiados de las proposiciones que conforman la justificación.

6.2.3. Actividad Nro. 1: Elementos fundamentales de la geometría euclidiana

Objetivo: Promover en los estudiantes el significado de la demostración como herramienta de construcción, validación y comunicación de conocimiento matemático.

Esta actividad tenía tres (3) preguntas (ver anexo D), los desempeños y habilidades que se evalúan en esta actividad se describen a continuación:

- Identificar las hipótesis y la tesis de un enunciado o teorema.
- Comprensión y manejo del principio de sustitución y propiedad o concepto de igualdad.
- Representación e interpretación de los objetos y enunciados matemáticos.
- Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos.
- Conocimiento conceptual de congruencia.
- Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal.
- Establezca los respaldos teóricos, explícitos y apropiados de las proposiciones que conforman la justificación.

6.2.4. Actividad Nro. 2: Congruencia de triángulos

Objetivo: Fomentar en los estudiantes el interés por realizar demostraciones y fortalecer los conocimientos construidos.

El desarrollo de esta actividad tenía como intención que los estudiantes comprendieran la necesidad de elaborar demostraciones. Para ello se hizo uso de los criterios de congruencia, los elementos fundamentales de la geometría euclidiana y de más teorías utilizadas para justificar, argumentar, conjeturar el por qué dos triángulos son congruentes.

En esta actividad se propusieron cuatro (4) preguntas (ver anexo E), en el desarrollo de la actividad se evaluaron los desempeños y habilidades que se describen a continuación:

- Identificar las hipótesis y la tesis de un enunciado o teorema.
- Relaciones entre los conceptos de Congruencia-Reflexión-Igualdad.
- Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal.

- Representación e interpretación de los objetos y enunciados matemáticos.
- Establezca los respaldos teóricos, explícitos y apropiados de las proposiciones que conforman la justificación.
- Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos.
- Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de segmentos.
- Conocimiento conceptual y procedimental de congruencia entre triángulos.

6.2.5. Actividad Nro. 3: Semejanza de triángulos

Objetivo: Fortalecer los conocimientos construidos en las sesiones de clase a partir del proceso de producción de la demostración deductiva.

En la elaboración y desarrollo de esta actividad se busca fortalecer y evidenciar los siguientes desempeños y habilidades:

- Identificar las hipótesis y la tesis de un enunciado o teorema.
- Relaciones entre los conceptos de Semejanza-Homotecias-Proporcionalidad
- Representación e interpretación de los objetos y enunciados matemáticos.
- Establezca los respaldos teóricos, explícitos y apropiados de las proposiciones que conforman la justificación.
- Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de segmentos.
- Conocimiento conceptual y procedimental de las propiedades de los números reales (propiedad transitiva).
- Conocimiento conceptual y procedimental de la semejanza de triángulos.

- Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal.
- Comprensión y manejo del principio de sustitución y el concepto o propiedad de igualdad

Para esta actividad se realizaron cuatro (4) preguntas, las cuales tenían seis literales (ver anexo F). Con la descripción de los objetivos de enseñanza-aprendizaje se facilita la identificación y clasificación de aquellos factores que dificultan (errores) la producción de demostraciones directas.

7. Resultados y discusiones

Debido a que esta práctica pedagógica fue desarrollada con el objetivo de promover la construcción de aprendizaje significativo, los datos que se obtuvieron durante las clases orientadas de manera virtual fueron descritos, analizados e interpretados con la finalidad de observar si los estudiantes estaban presentando algún tipo de dificultad para el desarrollo de la temática o en la elaboración de las demostraciones directas. Con esta información se crearon algunas estrategias de enseñanza-aprendizaje, para ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que estaban presentando, y facilitar la comprensión de la temática trabajada durante las clases dirigidas.

Como cada clase dirigida tenía unos objetivos de enseñanza-aprendizaje, para alcanzarlos se buscó que los estudiantes tomaran el control de lo que estaban aprendiendo y por esta razón se abrieron espacios de discusión para comunicar, explicar, descubrir, verificar y sistematizar los conocimientos construidos.

7.1. Descripción, análisis e interpretación de los datos obtenidos durante la intervención en el aula de clases

Para el análisis de los registros se tuvo en cuenta lo planteado por Socas (1997) el cual dice que las dificultades se manifiestan en los estudiantes en forma de error, también lo establecido por Samper y Morales (2015) cuando categorizan y subcategorizan las dificultades evidenciadas en el aprendizaje de la demostración deductiva en un grupo de estudiantes universitarios. Para el análisis de los datos recolectados durante la intervención en las aulas de clases o clases dirigidas se procedió de la siguiente forma:

1. Se describen los desempeños esperados para desarrollar cada una de las preguntas de las actividades.

2. Se analizan e interpretan las demostraciones presentadas por cada estudiante, para clasificar quienes alcanzaron los desempeños esperados y quienes no lo hicieron.
3. Se identifica la cantidad de estudiantes que no alcanzaron los desempeños esperados (presentaron algún tipo de sub-dificultad[12] ($\boldsymbol{SD}$)).
4. Se determina y clasifica cada sub-dificultad con respecto a los desempeños esperados, pero no alcanzados, las distintas observaciones realizadas, los análisis de las respuestas dadas por los estudiantes en cada pregunta.
5. Se realiza el proceso de verificación con el fin de identificar la cantidad de estudiantes que no alcanzaron los desempeños esperados y cuántos presentaron otros tipos de dificultades en el desarrollo de cada pregunta por cada actividad.
6. Se procede a verificar en términos generales la cantidad de estudiantes que presentaron dicha sub-dificultades ($\boldsymbol{SD}$).
7. Finalmente, se relacionan las sub-dificultades con las dificultades descritas y categorizadas por Samper y Morales (2015).

A continuación, se presenta para cada actividad una descripción de los desempeños esperados, pero no alcanzados por los estudiantes y la cantidad de estudiantes que presentaron algún tipo de dificultad para alcanzar los desempeños. Además, se realizan tablas y gráficas de frecuencia para cada actividad, esto para facilitar la interpretación de la frecuencia con la que se evidenciaron estas sub-dificultades en cada actividad desarrollada por los estudiantes.

[12] $\boldsymbol{SD}$: Errores en los que incurren los estudiantes en el proceso de construcción de demostraciones directas.

7.1.1. Resultados prueba diagnóstica

Esta prueba se realizó considerando aspectos relevantes de la producción de demostraciones en congruencia y semejanza de triángulos, relaciones entre homotecia-semejanza, reflexión-congruencia e implicaciones de las propiedades de cada concepto, entre otros.

Durante la aplicación de esta prueba suscitaron comentarios de algunos estudiantes en los que manifestaron su inconformidad porque, según ellos, se les estaban evaluando temas que ya habían visto o trabajado en el periodo anterior. Sin embargo, aunque esta temática fue trabajada con anterioridad, se desarrolló la secuencia de aprendizaje diseñada, encaminada a la elaboración o producción de demostraciones directas.

Cantidad de estudiantes que entregaron la actividad: *45*

Noveno A: *22*

Noveno B: *23*

Tabla 1

Descripción de los desempeños evaluados en la prueba diagnóstica

Descripción de los desempeños esperados **Prueba diagnóstica**	**Cantidad de estudiantes que presentaron sub-dificultad**
P1. Establece relaciones entre triángulos semejantes y proporcionalidad	18
P4. Establecimiento del hecho que se debe demostrar Establecimiento de las condiciones válidas de un enunciado o teorema	25

P5. Conocimiento conceptual y procedimental del resultado de la formación de ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal	25
P5. Comprensión y manejo del principio de sustitución	31
P6. Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal	25
P6. Establecimiento del hecho que se debe demostrar Establecimiento de las condiciones válidas de un enunciado o teorema	25
P7. Comprensión y manejo del teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo	27

Tabla 2

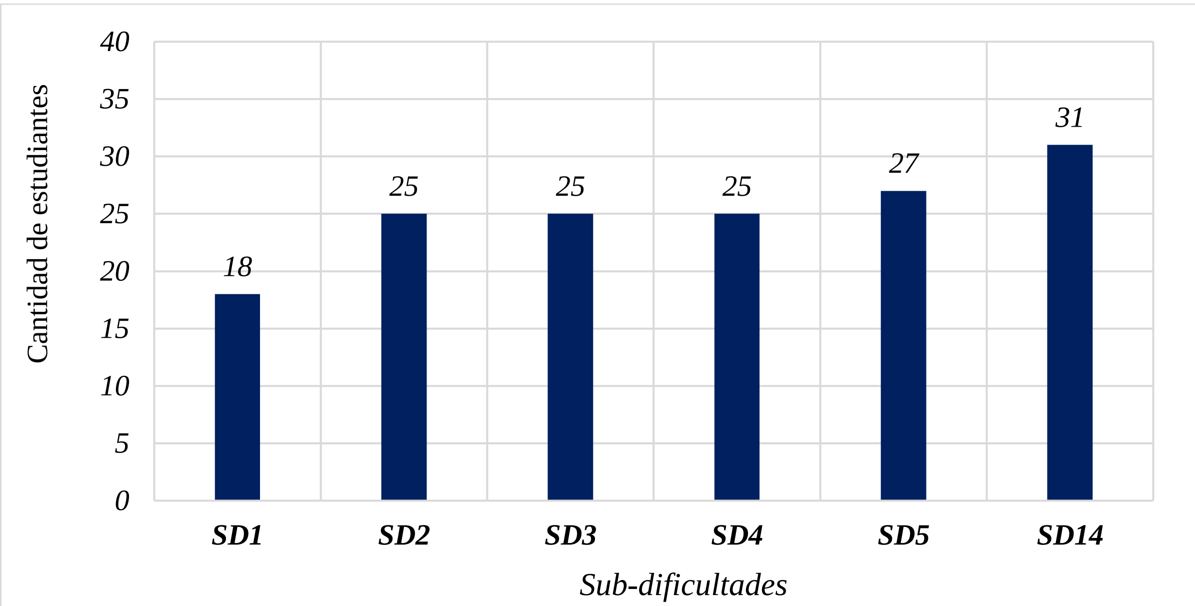
Sub-dificultades identificadas en la prueba diagnóstica

Sub-dificultades	**Cantidad de estudiantes**
SD1. Establece relación entre los conceptos de homotecia-semejanza-proporcionalidad	18
SD2. Establecimiento del hecho que se debe demostrar	25
SD3. Establecimiento de las condiciones válidas del enunciado o teorema	25
SD4. Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulo entre rectas paralelas y una recta transversal	25
SD5. Comprensión y manejo del teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo	27
SD14. Comprensión y manejo del principio de sustitución	31

En la tabla 2 se observa que la sub-dificultad con una mayor frecuencia es la *SD14***,** la cual nos dice que a los estudiantes les resulta difícil comprender y manejar el principio de sustitución y la de menor frecuencia es la *SD1* los estudiantes no logran establecer una relación entre los conceptos de homotecia, semejanza y proporcionalidad.

Gráfico 1

Sub-dificultades identificadas en la prueba diagnóstica



Con los resultados de la prueba diagnóstica se pudo evidenciar que los estudiantes presentaron dificultades para dar solución a muchas de las preguntas propuestas para esta actividad, entre las cuales se pueden encontrar: por ejemplo, que los estudiantes no establecen algunas relaciones entre los conceptos, no identifican correctamente las hipótesis y la tesis, entre otras dificultades que se enfrentaron, a pesar que estos conceptos o temas ya los habían trabajado en sus clases presenciales y en sus clases sincrónicas.

7.1.2. Resultados de la actividad en clase

Cantidad de estudiantes que entregan actividad: *49*

Noveno A: *26*

Noveno B: *23*

Tabla 3

Descripción de los desempeños evaluados en la actividad en clase

Descripción de los desempeños esperados Actividad en clase	**Cantidad de estudiantes que presentaron sub-dificultad**
P1. Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos	12
P1. Conocimiento conceptual de ángulos suplementarios	12
P1. Comprensión y manejo del principio de sustitución y propiedad o concepto de igualdad	12
P1. Establecimiento del hecho que se debe demostrar Establecimiento de las condiciones válidas del enunciado	15
P2. Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos	28
P2. Comprensión y manejo del principio de sustitución y propiedad o concepto de igualdad	12
P2. Establecimiento del hecho que se debe demostrar Establecimiento de las condiciones válidas del enunciado	20

Tabla 4

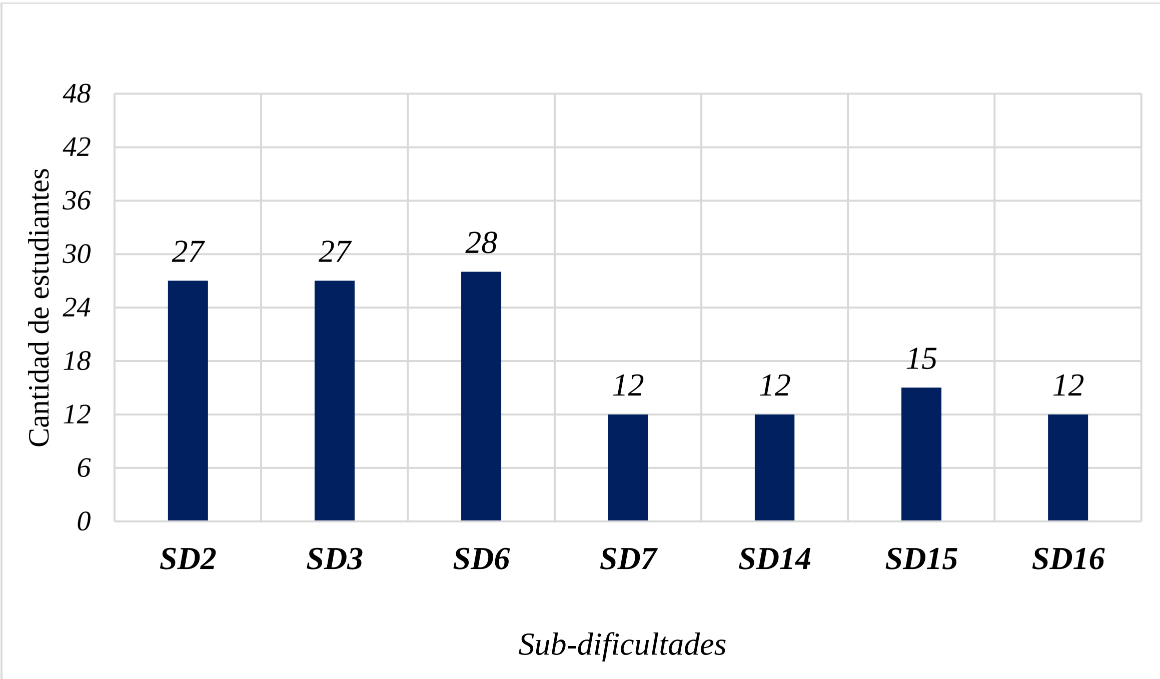
Sub-dificultades identificadas en la actividad en clase

Sub-dificultades	**cantidad de estudiantes**
SD2. Establecimiento del hecho que se debe demostrar	27
SD3. Establecimiento de las condiciones válidas del enunciado o teorema	27
SD6. Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos	28
SD7. Comprensión y manejo del concepto o propiedad de igualdad	12
SD14. Comprensión y manejo del principio de sustitución	12
SD15. Particularización y descontextualización de un enunciado expresado en forma general	15
SD16. Conocimiento conceptual de los tipos de ángulos	12

En la tabla 4 se puede notar que las sub-dificultades con una mayor frecuencia son las *SD2*, *SD3* y *SD6*, los estudiantes no identifican los elementos de una demostración, es decir no reconocen las *hipótesis* (lo que se da o se conoce) y la *tesis* (lo que se debe probar) y hay falencias en la comprensión conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos. Así mismo, se registran las sub-dificultades con una menor frecuencia que son las *SD14* y *SD16*, los estudiantes no comprenden y manejan el principio de sustitución y desconocen algunos conceptos de los tipos de ángulos que se forman según su amplitud y posición.

Gráfico 2

Sub-dificultades identificadas en la actividad en clase



7.1.3. Resultados de la actividad Nro. 1

Cantidad de estudiantes que entregan actividad: *50*

Noveno A: *28*

Noveno B: *22*

Tabla 5

Descripción de los desempeños evaluados en la actividad Nro. 1

Descripción de los desempeños esperados Actividad Nro. 1	Cantidad de estudiantes que presentaron sub-dificultad

P1. Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos	20
P1. Establecimiento de las condiciones válidas del enunciado o teorema Establecimiento del hecho que se debe demostrar	20
P1. Representación de objetos y enunciados matemáticos	10
P2. Comprensión y manejo del principio de sustitución y la propiedad o concepto de igualdad	14
P2. Establecimiento del hecho que se debe demostrar Establecimiento de las condiciones válidas del enunciado o teorema	26
P3. Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulo entre rectas paralelas y una recta transversal	4

Tabla 6

Sub-dificultades identificadas en la actividad Nro. 1

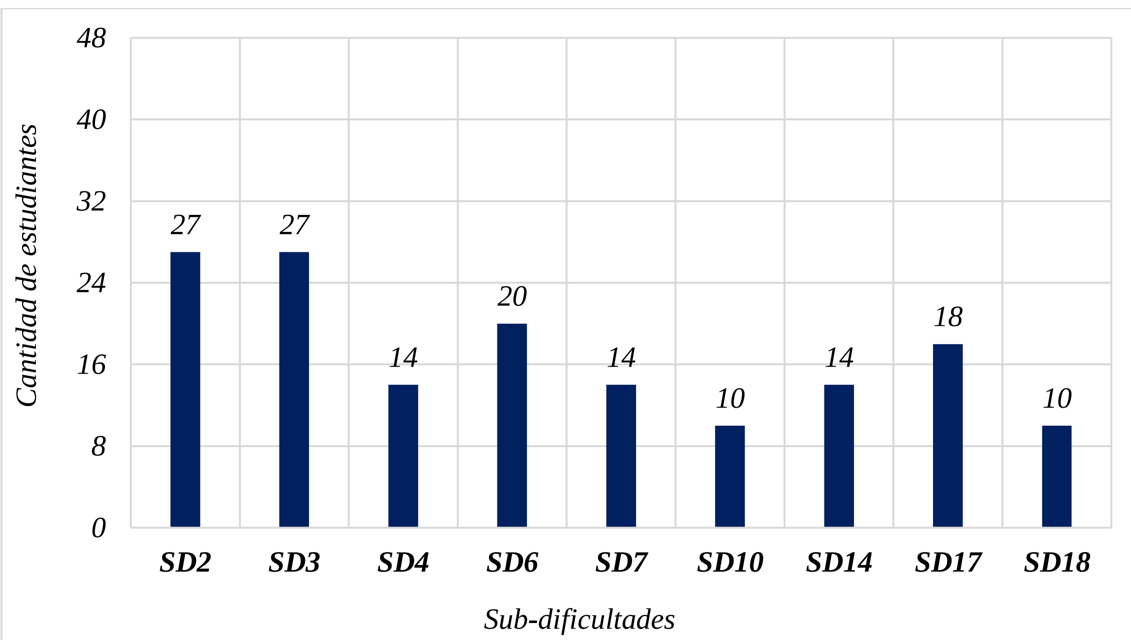
Sub-dificultades	**Cantidad de estudiantes**
SD2. Establecimiento del hecho que se debe demostrar	27
SD3. Establecimiento de las condiciones válidas del enunciado o teorema	27
SD4. Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal	14
SD6. Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos	20
SD7. Comprensión y manejo del concepto o propiedad de igualdad	14
SD10. Representación de objetos y enunciados matemáticos	10
SD14. Comprensión y manejo del principio de sustitución	14

SD17. Verificación del cumplimiento de las condiciones de las hipótesis del hecho geométrico que se pretende usar	18
SD18. Respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación	10

En la tabla 6 se refleja que las sub-dificultades con una mayor frecuencia son las *SD2* y *SD3* donde los estudiantes no identifican los elementos de una demostración y las de menor frecuencia son *SD10* y *SD18* los estudiantes no logran realizar algunas representaciones geométricas, además de no darle un respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación en las demostraciones directas.

Gráfico 3

Sub-dificultades identificadas en la actividad Nro. 1



7.1.4. Resultado de la actividad Nro. 2

Cantidad de estudiantes que entregan actividad: *50*

Noveno A: *26*

Noveno B: *24*

Tabla 7

Descripción de los desempeños evaluados en la actividad Nro. 2

Descripción de los desempeños esperados Actividad Nro. 2	**Cantidad de estudiantes que presentaron sub-dificultad**
P1. Conocimiento conceptual y procedimental de congruencia de triángulos	24
P1. Representación de objetos y enunciados matemáticos	14
P2. Interpretación de la representación geométrica	20
P2. Establecimiento del hecho que se debe demostrar. Establecimiento de las condiciones válidas del enunciado o teorema	21
P2. Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de segmentos	30
P3. Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos	26
P3. Establecimiento de las condiciones válidas del enunciado Establecimiento del hecho que se debe demostrar	23
P4. Conocimiento conceptual y procedimental del concepto de congruencia entre triángulos	31

Tabla 8

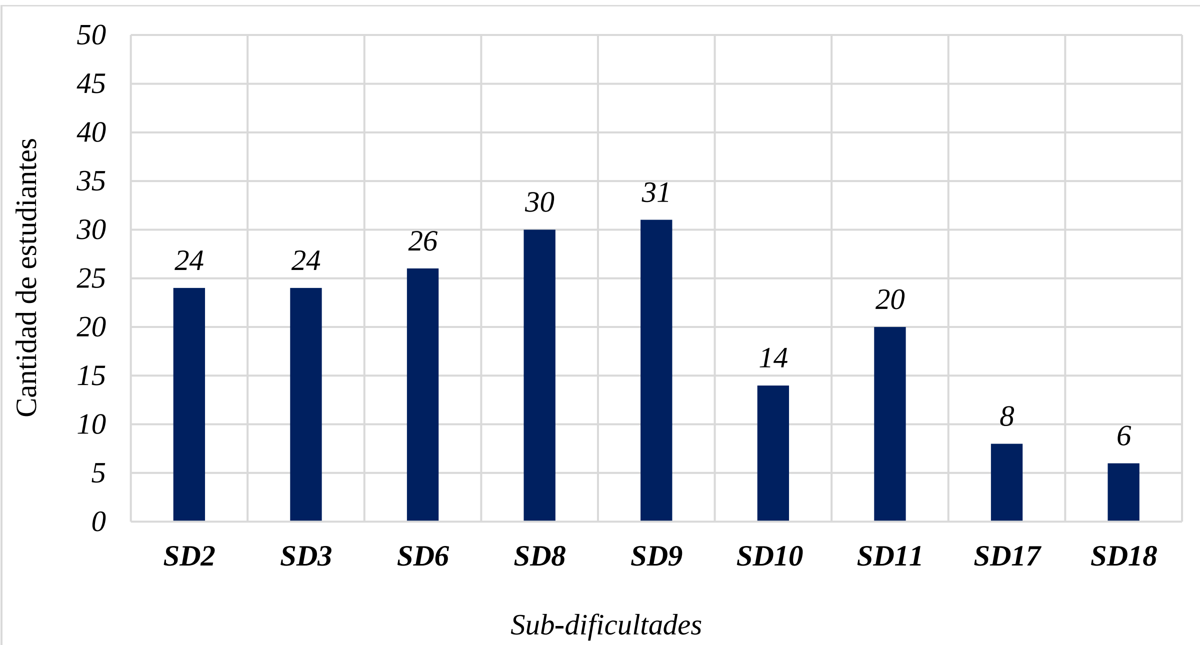
Sub-dificultades identificadas en la actividad Nro. 2

Sub-dificultades	Cantidad de estudiantes
SD2. Establecimiento del hecho que se debe demostrar	24
SD3. Establecimiento de las condiciones válidas del enunciado o teorema	24
SD6. Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos	26
SD8. Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de segmentos	30
SD9. Conocimiento conceptual y procedimental de la congruencia entre triángulos	31
SD10. Representación de objetos y enunciados matemáticos	14
SD11. Interpretación de la representación geométrica	20
SD17. Verificación del cumplimiento de las condiciones de las hipótesis del hecho geométrico que se pretende usar	8
SD18. Respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación	6

En la tabla 8 se puede ver que las sub-dificultades con una mayor frecuencia son las *SD8* y *SD9*, a los estudiantes se les dificulta utilizar el postulado de adición de medidas de segmentos y tienen una falta de conocimiento conceptual y procedimental de la congruencia entre triángulos, además no identifican en que problemas deben utilizar algunas definiciones o postulados, igualmente desconocen los criterios de congruencia y las condiciones que deben cumplirse antes de hacer uso de estos criterios. Así mismo se puede observar las sub-dificultades con una menor frecuencia como lo son las *SD17* y *SD18* los estudiantes no verifican el cumplimiento de las condiciones de las hipótesis del hecho geométrico que se pretende usar y no le dan un respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación en las demostraciones directas.

Gráfico 4

Sub-dificultades identificadas en la actividad Nro. 2



7.1.5. Resultados de la actividad Nro. 3

Cantidad de estudiantes que entregan la actividad: *48*

Noveno A: *22*

Noveno B: *26*

Tabla 9

Descripción de los desempeños evaluados en la actividad Nro. 3

Descripción de los desempeños esperados Actividad Nro. 3	**Cantidad de estudiantes que presentaron dificultad**
P1a. Interpretación de la representación geométrica	18
P1a. Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulo entre rectas paralelas y una recta transversal	18
P1b.Conocimiento conceptual y procedimental de la propiedad transitiva	20
P2. Conocimiento conceptual y procedimental del concepto de semejanza entre triángulos	4
P2. Establece la relación entre proporcionalidad y semejanza de triángulos	4
P3. Interpretación de la representación geométrica	18
P3. Conocimiento conceptual y procedimental de la propiedad transitiva	25
P3. Conocimiento conceptual y procedimental del concepto de semejanza entre triángulos	25
P4. Conocimiento conceptual y procedimental del concepto de semejanza entre triángulos	20

Tabla 10

Sub-dificultades identificadas en la actividad Nro. 3

Sub-dificultades	**Cantidad de estudiantes**
SD4. Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal	18
SD11. Interpretación de la representación geométrica	18
SD12. Conocimiento conceptual y procedimental de la propiedad transitiva	25
SD13. Conocimiento conceptual y procedimental de semejanza entre triángulos	25
SD18. Respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación	3

En la tabla 10 se registran las sub-dificultades con mayor frecuencia las cuales son *SD12* y *SD13,* en donde se describe que los estudiantes presentaron dificultad para comprender el concepto de la propiedad transitiva y desconocen el proceder para hacer uso de la misma y tienen una falta de conocimiento conceptual y procedimental de los criterios de semejanza. A su vez la sub-dificultad con una menor frecuencia es la *SD18* los estudiantes no dan un respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación en las demostraciones directas.

Gráfico 5

Sub-dificultades identificadas en la Actividad Nro. 3

Por último, en la descripción, análisis e interpretación de los datos obtenidos se identificaron dieciocho (18) sub-dificultades las cuales fueron clasificadas según los distintos desempeños y habilidades evaluados en cada actividad realizada, así mismo en cada descripción de los resultados se observa que sub-dificultades se evidenciaron con una mayor o menor frecuencia.

7.1.6. Consolidado de resultados de las actividades

Con el objetivo de conocer con qué frecuencia o regularidad se presentaron estas sub-dificultades en las actividades, se realiza la tabla 11 y el gráfico 6 para determinar en forma general que cantidad de estudiantes no lograron alcanzar los desempeños de aprendizaje.

Tabla 11

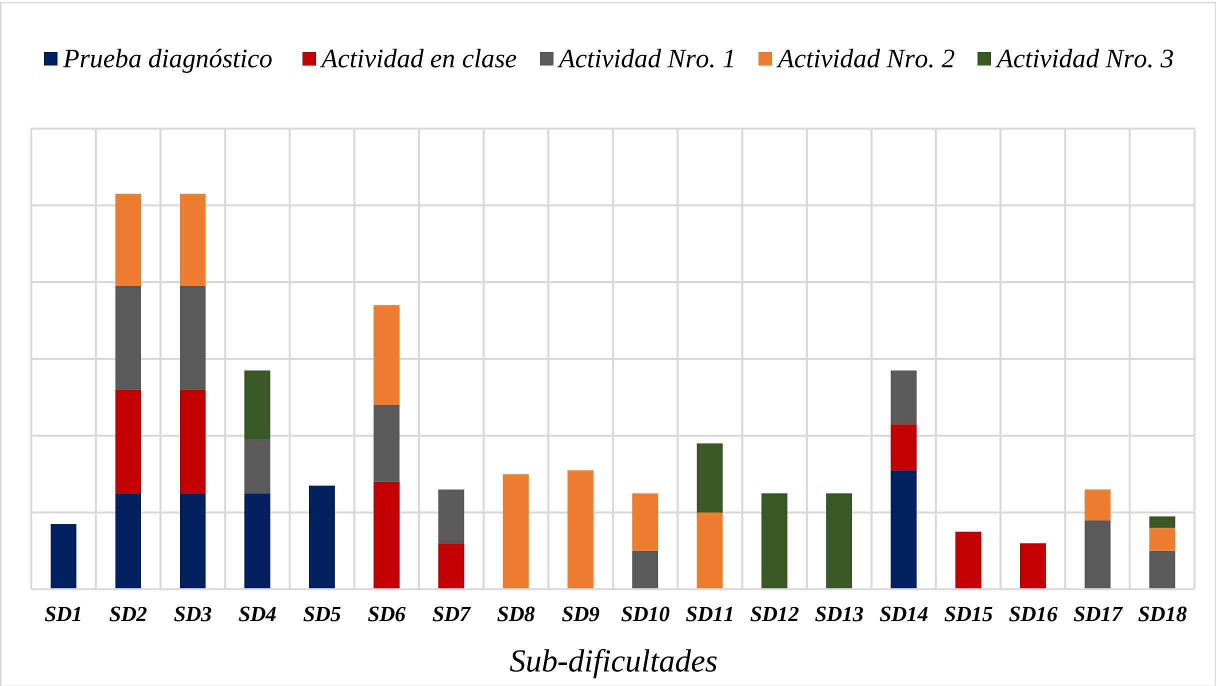
Tipo de sub-dificultades identificadas en el desarrollo de cada actividad

Tipo de Sub-dificultades	Prueba Diagnóstica	Actividad en clase	Actividad Nro. 1	Actividad Nro. 2	Actividad Nro. 3
SD1	18				
SD2	25	27	27	24	
SD3	25	27	27	24	
SD4	25		14		18
SD5	27				
SD6		28	20	26	
SD7		12	14		
SD8				30	
SD9				31	
SD10			10	14	
SD11				20	18
SD12					25
SD13					25
SD14	31	12	14		
SD15		15			
SD16		12			
SD17			18	8	
SD18			10	6	3

En la tabla 11 se registra la frecuencia con la que se presentaron las sub-dificultades en cada actividad, también se puede observar que en la actividad Nro. 3 la mayoría de los desempeños evaluados en todas las actividades fueron superados, en la gráfico 6 se observan las sub-dificultades que se evidenciaron en las actividades desarrolladas por los estudiantes al producir o elaborar demostraciones y en qué actividad se pudieron identificar de acuerdo con los desempeños evaluadas. Así mismo, se puede ver qué sub-dificultad fue constante o no durante el proceso de inmersión en el aula de clase, según los desempeños que se evaluaron con estas actividades.

Gráfico 6

Tipo de sub-dificultades identificadas en el desarrollo de las actividades



Como se puede notar en el gráfico 6 algunas de las sub-dificultades se evidenciaron en varias de las actividades desarrolladas, como por ejemplo: establecimiento del hecho que se debe demostrar (*SD2*), establecimiento de las condiciones válidas de un enunciado o teorema (*SD3*), representación e interpretación de los objetos y enunciados matemáticos (*SD10* y *SD11*), conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal (*SD4*), respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación (*SD18*), verificación del cumplimiento de las condiciones de las hipótesis del hecho geométrico que se pretende usar (*SD17*), que se trabajaron como sub-dificultades transversales (desempeños evaluados en cuatro (4) y cinco (5) de las actividades) por lo fundamental e importancia que estas tiene en el desarrollo de las actividades y lo esencial para la elaboración de demostraciones.

Algunas de estas sub-dificultades están asociadas a la comprensión de los conceptos, definiciones, postulados o teoremas matemáticos, entre otros. Sin embargo, otras sub-dificultades están directamente relacionada con la definición y elaboraciones de las demostraciones, es decir aquellas donde los estudiantes deben hacer uso no solo de la teoría matemática, sino también del mismo concepto de demostración, como por ejemplo: establecimiento del hecho que se debe demostrar (*SD2*), establecimiento de las condiciones válidas de un enunciado o teorema (*SD3*), respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación (*SD18*), y verificación del cumplimiento de las condiciones de las hipótesis del hecho geométrico que se pretende usar (*SD17*).

Conforme el gráfico 6 las sub-dificultades donde establece el hecho que se debe demostrar y las condiciones válidas de un enunciado o teorema *(SD2 y SD3)*, se evidenciaron en la prueba diagnóstica, actividad en clase, actividad Nro.1 y actividad Nro.2, pero en la actividad Nro.3 desaparecen. Esto se debió al proceso de enseñanza-aprendizaje diseñado para orientar las clases, al constante proceso de producción de demostraciones y a la participación continua de los estudiantes durante las clases, entre otros. Esto ayudó a que los estudiantes desarrollaran habilidades para identificar las hipótesis y la tesis de un teorema o enunciado.

Las representaciones de los objetos o enunciados matemáticos *(SD10)*, es una sub-dificultad que se reflejó en la actividad Nro. 1 y la actividad Nro. 2, los estudiantes no realizan las representaciones de los objetos o enunciados matemáticos. Esto sucede porque a los estudiantes se les dificulta la comprensión de algunos conceptos matemáticos o enunciados del problema planteado. En las otras actividades no se presentó esta sub-dificultad debido a las asesorías, a las clases dirigidas, donde los estudiantes pudieron examinar y explorar en lo aprendido, además el objetivo de las primeras clases era que los estudiantes aprendieran o entendieran como pasar de lo escrito a las representaciones, se buscó que los estudiantes identificaran los elementos matemáticos que les permitieran construir las representaciones geométricas, también se dedicó más tiempo para que ellos contribuyeran a la construcción de su propio conocimiento matemático, esta estrategia ayudó a que esta sub-dificultad no fuera constante.

La sub-dificultad de la interpretación de los objetos o enunciados matemáticos *(SD11)*, se reflejó en la actividad Nro. 2 y actividad Nro. 3. En las primeras actividades no se evidenció esta sub-dificultad, dado que leer e interpretar las representaciones geométricas era el principal objetivo de las primeras clases, se muestra la importancia de leer, observar y describir las representaciones geométricas, que permiten en este caso elaborar o producir demostraciones. El hecho que esta sub-dificultad no se presentara en las primeras actividades, pero si al final, da muestra que los estudiantes trabajan o desarrollan las actividades de forma mecánica y no reflexionan sobre lo aprendido.

La formación de ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal *(SD4)*, es una sub-dificultad que se evidenció de manera alternada (intermitente) que se identifica en la prueba diagnóstica, luego en la actividad Nro. 1 y finalmente en la actividad Nro. 3. Esta sub-dificultad al igual que las anteriores se trató de controlar de la misma forma como se trabajaron las sub-dificultades ya mencionadas y el uso del programa *GeoGebra* para representar la forma como se construyen los ángulos que se forman entres estas rectas. Sin embargo, su comportamiento alternado o intermitente hizo un poco difícil su tratamiento, pero es importante reconocer que la constante evolución y retroalimentación de los contenidos matemáticos ayudan a que los estudiantes reduzcan las dificultades y así poder construir aprendizajes matemáticos significativo.

El respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación *(SD18)*, es una sub-dificultad que se comenzó a observar en las actividades desde la Nro. 1 hasta la Nro. 3. Esta sub-dificultad es un poco constante, los estudiantes no justifican teóricamente sus afirmaciones y toman como una demostración la representación geométrica, al igual que las sub-dificultades evidenciadas durante este proceso se buscó disminuir y controlar con algunas estrategias de enseñanza-aprendizaje y las situaciones didácticas, pero a pesar de todo el trabajo realizado no desaparecen. Sin embargo, cuando se realizan demostraciones en las clases dirigidas los estudiantes se esfuerzan por justificar sus afirmaciones.

La verificación del cumplimiento de las condiciones de las hipótesis del hecho que geométrico que se pretende usar *(SD17)*, se evidenció en la actividad No.1 y No.2, los estudiantes hacen uso de teoremas o postulado matemáticos para justificar un hecho, empero estos no verifican si es posible utilizarse para una situación en particular, es decir, realizan afirmaciones y justificaciones sin examinar que el teorema o postulado se cumple, omiten revisar las condiciones bajo las cuales es posible usar estos. Esta sub-dificultad se pudo controlar y manejar con el trabajo realizado en conjunto con los estudiantes y debido a que estos pudieron comprender un poco en qué consiste una demostración.

Las sub-dificultades que presentaron los estudiantes de noveno grado del colegio Nuestra Señora de Fátima cuando producen demostraciones directas en geometría euclidiana y la cantidad de estudiantes que presentaron estas sub-dificultades se reflejan en la tabla 12 y el gráfico 7, en estas se puede observar la frecuencia con la que se identificaron cada sub-dificultad durante todo el proceso de intervención en el aula de clase.

Tabla 12

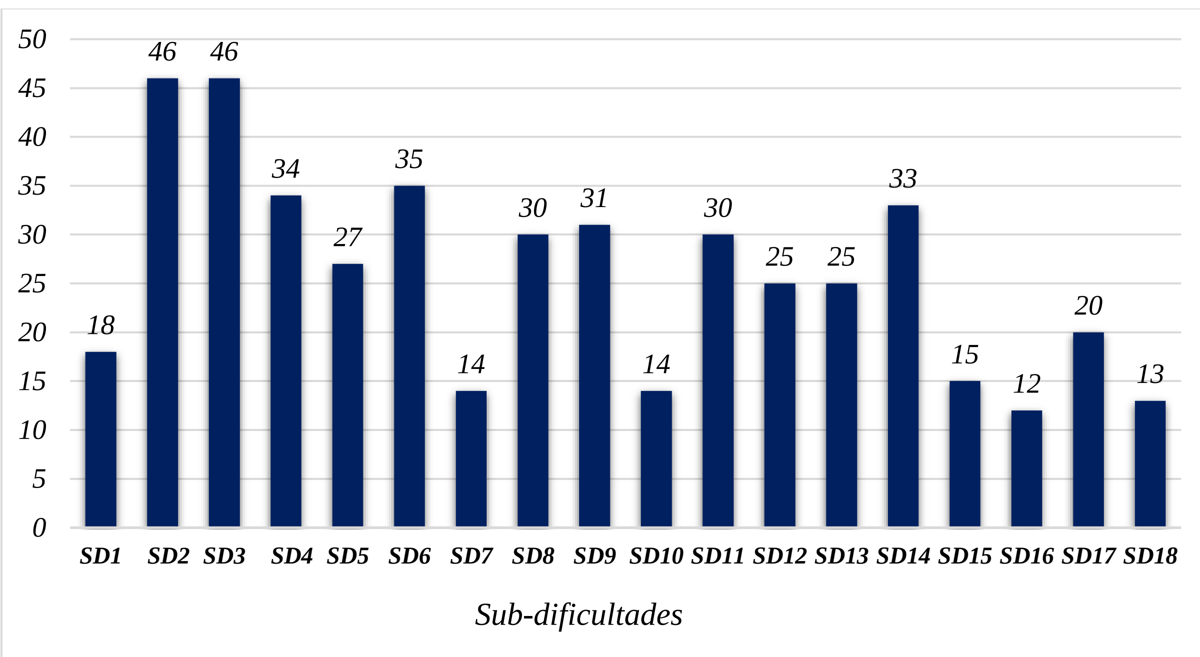
Cantidad de estudiantes que presentaron sub-dificultad al aprender a realizar demostraciones en geometría euclidiana

Sub-Dificultades en el aprendizaje en la demostración en geometría euclidiana en estudiantes de noveno grado.	Cantidad de estudiantes
SD1. Establece relación entre los conceptos de homotecia-semejanza-proporcionalidad	18
SD2. Establecimiento del hecho que se debe demostrar	46
SD3. Establecimiento de las condiciones válidas del enunciado o teorema	46
SD4. Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal	34
SD5. Comprensión y manejo del teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo	27
SD6. Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos	35
SD7. Comprensión y manejo del concepto o propiedad de igualdad	14
SD8. Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de segmentos	30
SD9. Conocimiento conceptual y procedimental de la congruencia entre triángulos	31
SD10. Representación de objetos y enunciados matemáticos	14
SD11. Interpretación de la representación geométrica	30

SD12. Conocimiento conceptual y procedimental de la propiedad transitiva	25
SD13. Conocimiento conceptual y procedimental de la semejanza entre triángulos	25
SD14. Comprensión y manejo del principio de sustitución	33
SD15. Particularización y descontextualización de un enunciado expresado en forma general	15
SD16. Conocimiento conceptual de los tipos de ángulos	12
SD17. Verificación del cumplimiento de las condiciones de las hipótesis del hecho geométrico que se pretende usar	20
SD18. Respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación	13

Gráfico 7

Estudiantes que presentaron sub-dificultad al construir demostraciones en geometría euclidiana



En la tabla 13 se especifica la cantidad de estudiantes que realizaron y entregaron las distintas actividades, la cual es utilizada para elaborar el gráfico 8 en donde se observa el porcentaje de estudiantes que presentaron algún tipo de sub-dificultades identificadas en las actividades según la cantidad de estudiantes que las entregaron. Para calcular este porcentaje se tuvieron en cuenta las actividades en donde se evalúan los desempeños y donde se identificaron estas sub-dificultades.

Tabla 13

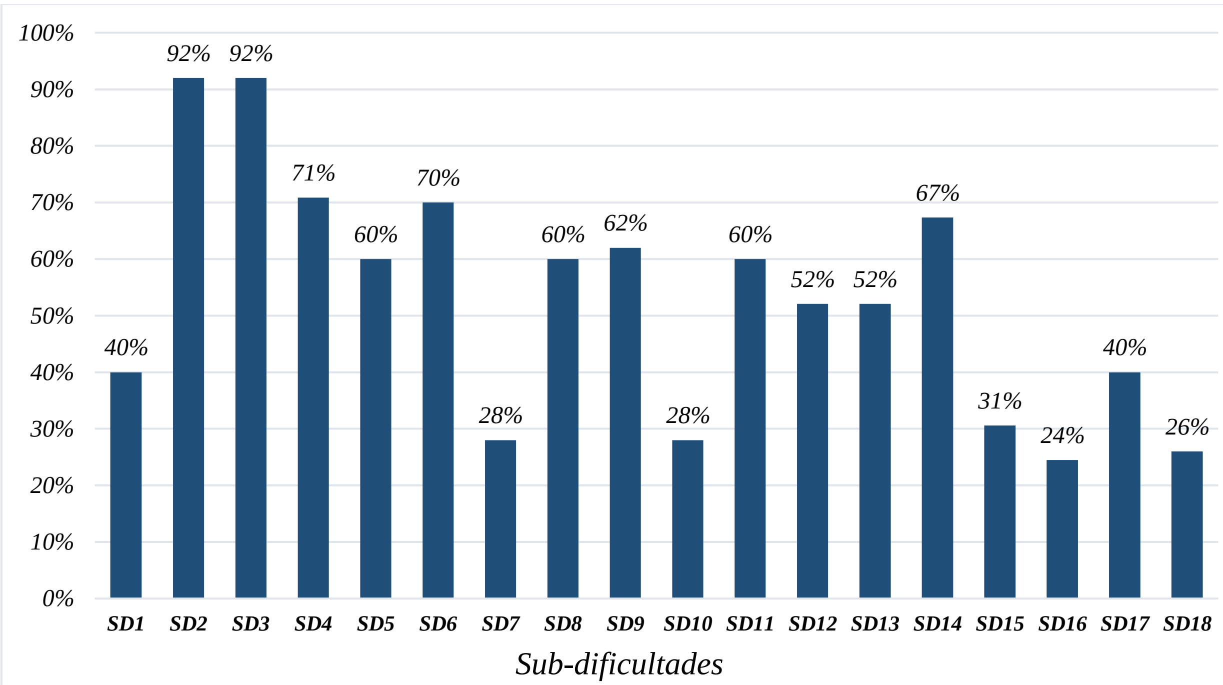
Cantidad de estudiantes por actividades vs cantidad de estudiantes que presentaron sub-dificultades

Sub-dificultades	Estudiantes por actividad	Estudiantes que presentaron sub-dificultad
SD1	45	18
SD2	50	46
SD3	50	46
SD4	48	34
SD5	45	27
SD6	50	35
SD7	50	14
SD8	50	30
SD9	50	31
SD10	50	14
SD11	50	30
SD12	45	25
SD13	45	25
SD14	49	33
SD15	49	15
SD16	49	12

SD17	50	20
SD18	50	13

Gráfico 8

Porcentaje de estudiantes que presentaron algún tipo de sub-dificultad al aprender a demostración en geometría euclidiana



Identificar aquellas sub-dificultades que presentaron mayor porcentaje nos permite crear estrategias y diseñar actividades en donde estas sean la prioridad, dar solución al problema que tienen una mayor frecuencia ayuda a dar solución a las que no. En el gráfico 8 se registra los porcentajes de estudiantes que presentaron algún tipo de sub-dificultad, en ella se puede ver que las sub-dificultades establecimiento del hecho que se debe demostrar (*SD2)* y establecimiento de las condiciones válidas del enunciado o teorema (*SD3)* tienen un mayor porcentaje, conocimiento conceptual de los tipos de ángulos (*SD16)* y respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación *(SD18)* el porcentaje menor.

Aunque muchas de los desempeños no se evalúan en todas las actividades, es importante reconocer que los estudiantes de noveno grado de este colegio presentaron dificultad en el aprendizaje de las demostraciones que están asociadas directamente con las matemáticas, ya que, de acuerdo con el personal del colegio, ninguno de los estudiantes pertenecientes a este curso han presentado algún tipo de documento o han sido diagnosticado con algún tipo de dificultad o problema cognitivo que les impida aprender.

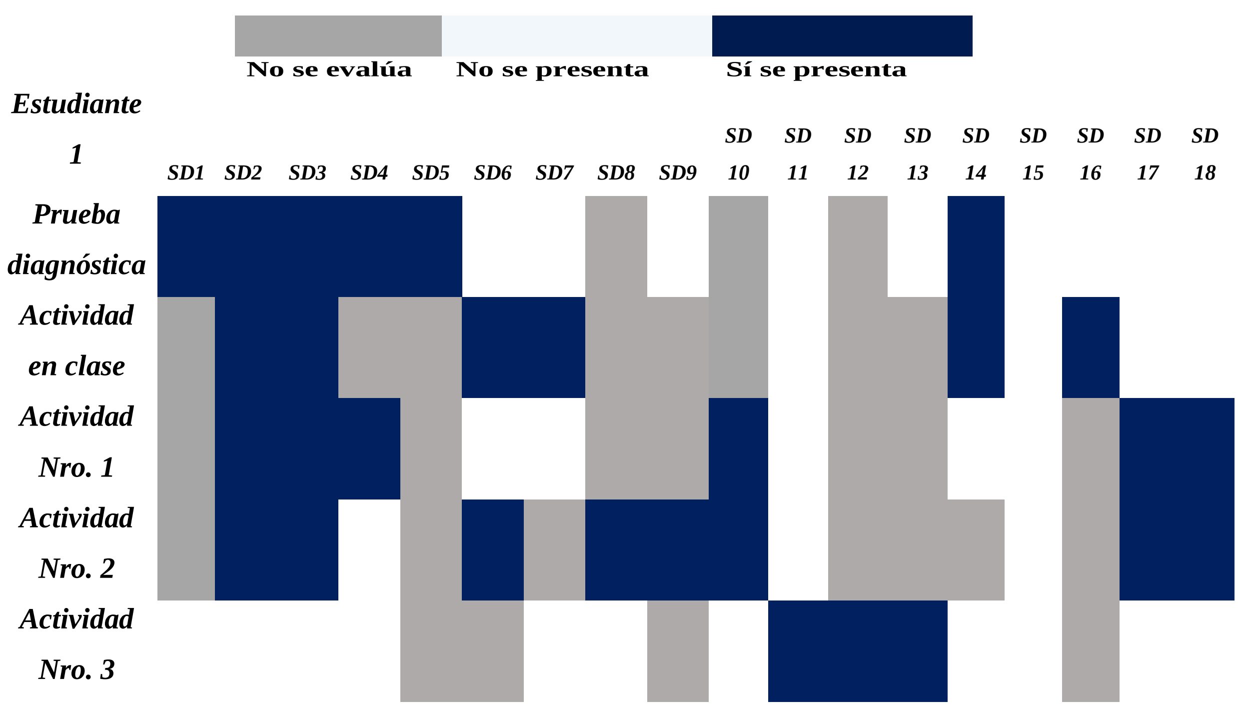
Como uno de los objetivos es proponer recomendaciones que sean útiles para controlar o disminuir las dificultades que presentaron los estudiantes en el aprendizaje de las demostraciones en geometría euclidiana, se mostrarán ejemplos de cuándo y cómo los estudiantes superan o no los objetivos de enseñanza-aprendizaje. Determinar si los estudiantes mejoran o no en el aprendizaje de las demostraciones o bien en el desarrollo de las actividades permite saber si el trabajo realizado con ellos tuvo resultado o no, en qué casos funcionó y con estos resultados tomar decisiones con el proceso de enseñanza-aprendizaje. En los casos en donde no se refleja algún tipo de sub-dificultades, no significa que esta no lo sea para el estudiante, sino que el tipo de problema que se estructura o resuelve no permite evidenciarla u observarlas.

En la descripción, análisis e interpretación de los datos obtenidos nos centramos en el progreso (evolución) y retrocesos (involución) de aquellos estudiantes que entregaron las cincos (5) actividades, con el propósito de identificar si estos superaron o no los distintos desempeños evaluados. En el desarrollo de este proceso nos encontramos con cuatro *esquemas de trayectorias* de las sub-dificultades, en donde se observa que algunos estudiantes superan los desempeños evaluados, empero otros no lo logran.

En los siguientes mapas de calor se muestran los *esquemas de trayectorias*[13] de las sub-dificultades identificadas en las distintas actividades desarrolladas por los estudiantes, cada *esquema de trayectoria* representa una cantidad de estudiantes, y se distribuye como sigue: el *esquema de trayectoria 1* tiene a tres (3) estudiantes (ver mapa de calor 1), cuatro (4) en el *esquema de trayectoria 2* (ver mapa de calor 2), cinco (5) en el *esquema de trayectoria 3* (ver mapa de calor 3) y dieciocho (18) en el *esquema de trayectoria 4* (ver mapa de calor 4) de una muestra de treinta (30) estudiantes que entregaron la totalidad de las actividades.

Mapa de calor 1

Esquema de trayectoria 1: Sub-dificultades vs Actividades

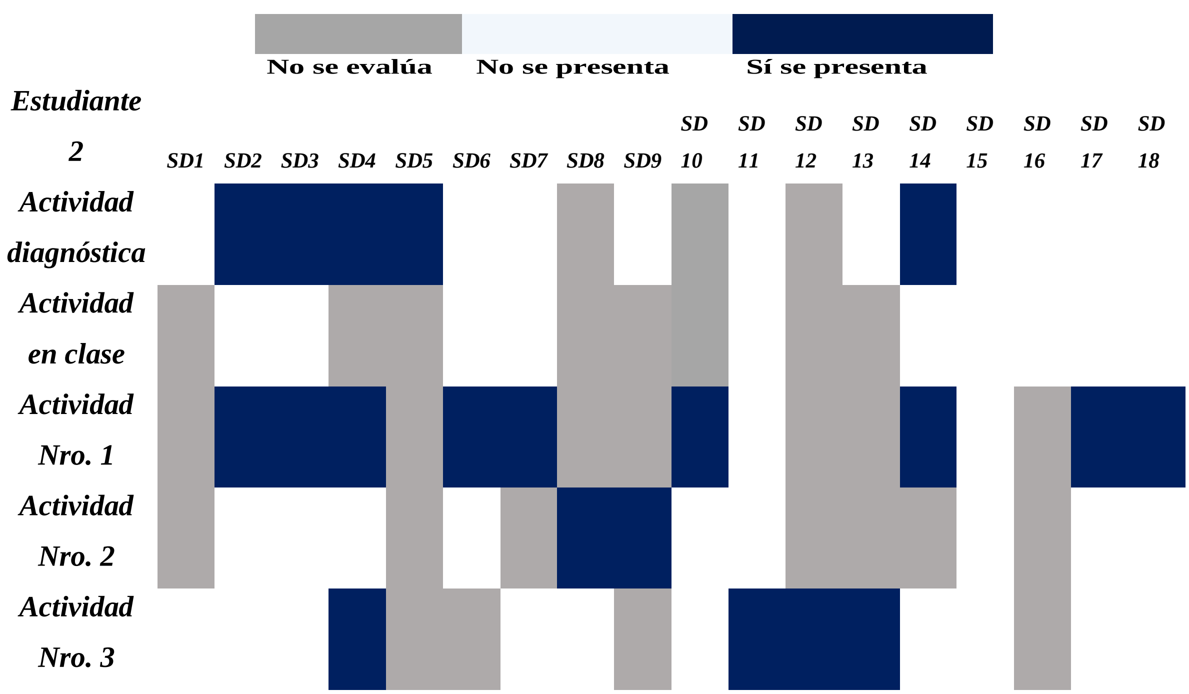


[13] El color azul indica que se evidenció algún tipo de sub-dificultad, el blanco que no hay evidencia de la misma y el color gris que no se evalúa en esa actividad.

En el mapa de calor 1 se observa que los estudiantes presentaron sub-dificultades en todas las actividades realizadas durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje, aunque las *SD2 y SD3* desaparecen en la última actividad. En esta se identificó un tipo de estudiantes que no logra superar muchos de los desempeños evaluados, sin importar todos los esfuerzos realizados para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los estudiantes no obtienen buenos resultados en el desarrollo de las actividades por la actitud con la asumieron el trabajo que se estaba realizando, ya que por lo general participaban poco en las clases, no asistían a las asesorías, no seguían las reglas establecidas, y aunque realizaban las actividades no las entregaban en los tiempos acordados. Estos estudiantes se conectaban a las clases simplemente porque parte de la nota dependía de eso.

Mapa de calor 2

Esquema de trayectoria 2 : Sub-dificultades vs Actividades

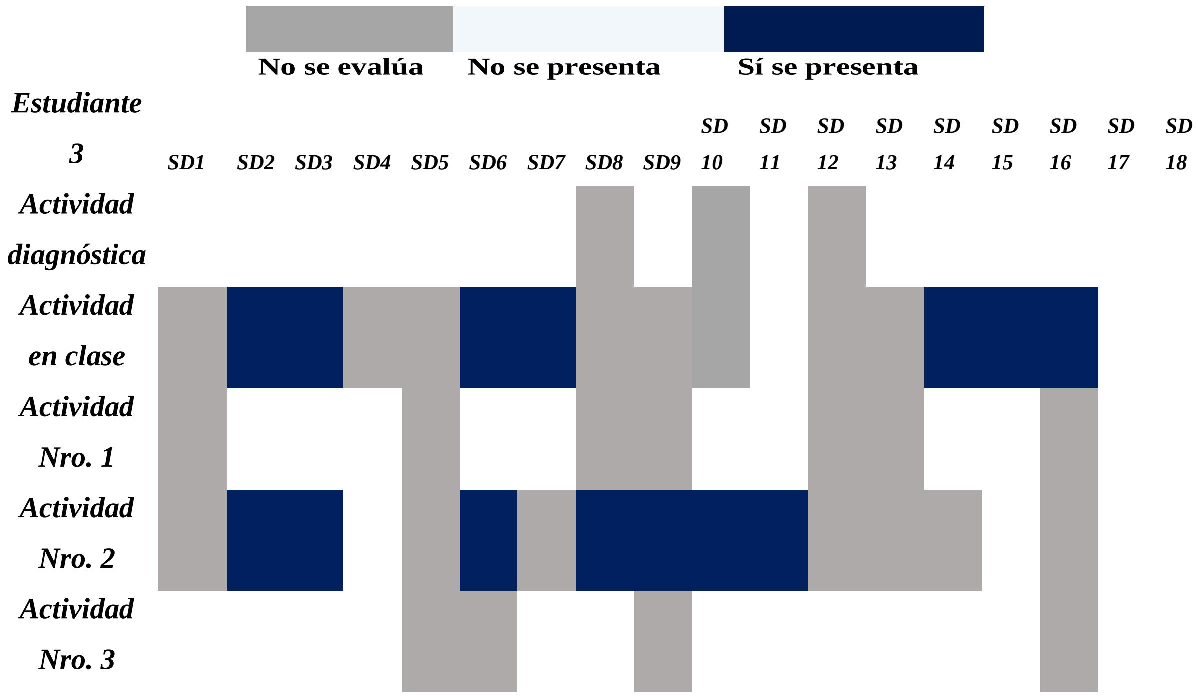


Como se registra en el mapa de calor 2 los estudiantes que pertenecen a este esquema presentaron sub-dificultades de manera alternada, es decir, en la prueba diagnóstica, actividad Nro.1 y actividad Nro. 3, también en la actividad Nro. 2 se evidenciaron únicamente dos sub-dificultades (*SD8* y *SD9*), mientras que en la actividad en clase no se identifica ninguna. Esto se debió a que, los estudiantes realizan las demostraciones como si estas fueran una “receta”: siguen un algoritmo matemático y no reflexionan sobre el proceso que se estaba realizando. En distintas conversaciones con ellos comentaban que si era posible que las demostraciones se pudieran elaborar o desarrollar como si esta fuera una ecuaciones o funciones matemáticas, que si existían un método general para elaborar cualquier demostración.

Estos estudiantes eran aquellos que su actitud en las clases cambiaba dependiendo de los resultados o notas de las actividades: si la nota era baja, en la siguiente clase se tornaban activos, participativos, asistían a las asesorías y realizaban preguntas para despejar las distintas dudas que tenían del tema que se estaba desarrollando. Por lo contrario, si la nota era buena o regular, en la siguiente clase no se conectaban.

Mapa de calor 3

Esquema de trayectoria 3 : Sub-dificultades vs Actividades

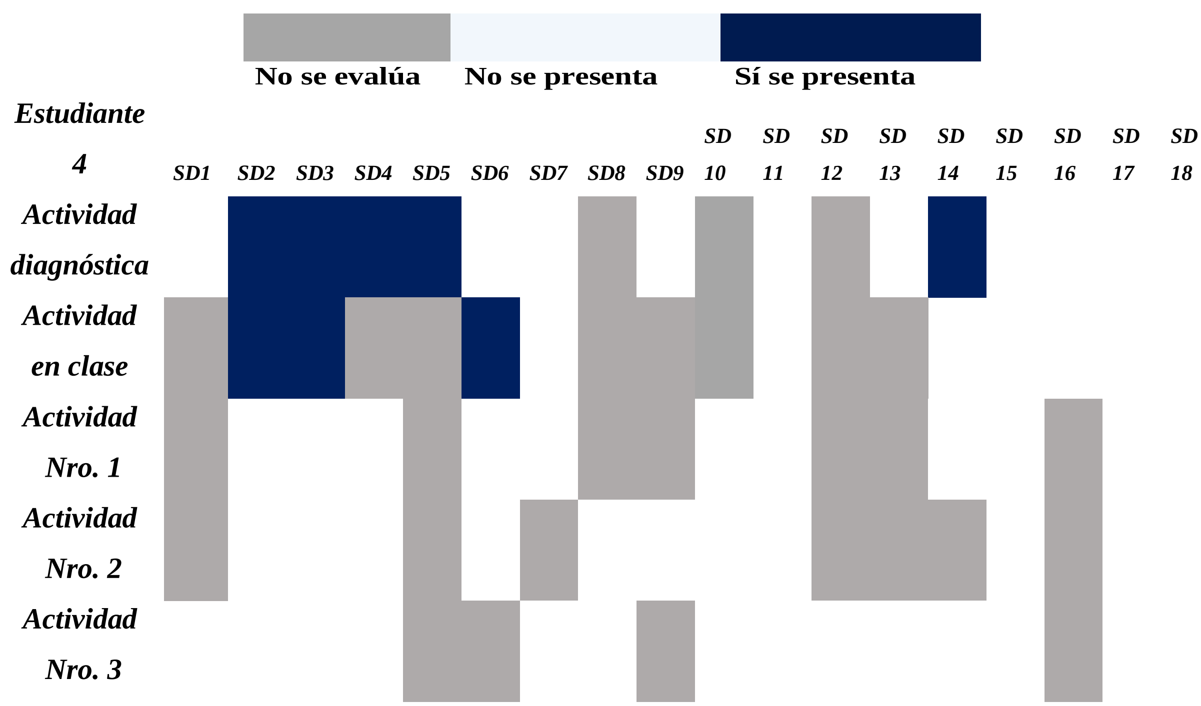


En el mapa de calor 3 se tienen los resultados de algunos estudiantes, y la forma como se evidenciaron las sub-dificultades en las distintas actividades. Al igual que el esquema anterior de manera alternada, pero el orden cambia, en este caso no se identifica ningún tipo de sub-dificultad en la prueba diagnóstico, actividad Nro. 1, actividad Nro. 3, mientras que, en la actividad en clase y la actividad Nro. 2 si se presentaron. Estos resultados me sorprendieron mucho porque esperaba que estos estudiantes no presentaran aquellas sub-dificultades que son transversales. Con los resultados de la prueba diagnóstica se pudo observar que estos estudiantes tenían conocimientos previos de lo que es una demostración y qué se debe tener en cuenta para poder elaborar una. Pero esto no fue así, el resultado de la siguiente actividad mostró todo lo contrario.

A aquellos estudiantes que corresponden a este esquema iniciaron el desarrollo de la secuencia de aprendizaje con una actitud un poco distinta, la comunicación en clase y la asistencia a las asesorías eran pocas, de dos horas de asesoría solo asistían a una y siempre había una situación para no asistir o retirarse antes de terminar las clases, pero todo esto cambió con los resultados de la actividad en clase, ellos esperaban buenos resultados, como en la prueba diagnóstico. Sin embargo, esto no fue de esta forma, por lo contrario, los resultados no fueron los esperados, entonces a partir de esto los estudiantes decidieron tomar el curso con mayor responsabilidad, la asistencia a las asesorías era más notoria, la participación en clase aumentó, empero los resultados no fueron los mejores. Estos estudiantes eran bien particulares, toda vez que con ellos las distintas estrategias diseñadas para la ejecución de la secuencia de aprendizaje no funcionaron como se esperaba.

Mapa de calor 4

Esquema de trayectoria 4 : Sub-dificultades vs Actividades



En el mapa de calor 4 se puede notar que los estudiantes presentaron algún tipo de sub-dificultad en la prueba diagnóstica y la actividad en clase que no les permitió elaborar demostraciones, pero en las siguientes actividades no hay evidencia de sub-dificultad alguna. Este tipo de estudiantes estaba conformado por aquellos que siguieron las reglas establecidas desde el inicio del periodo académico. Su participación en clase fue constante, asistieron a las asesorías, realizaban las actividades y las entregaban dentro del tiempo acordado. Todo esto les ayudó a superar los desempeños evaluados, lo que les permitió obtener buenos resultados en las actividades. Con todos los estudiantes se realizó el mismo proceso y seguimiento académico, lo que cambia es la actitud y responsabilidad con la que se asumió el trabajo que se estaba realizando.

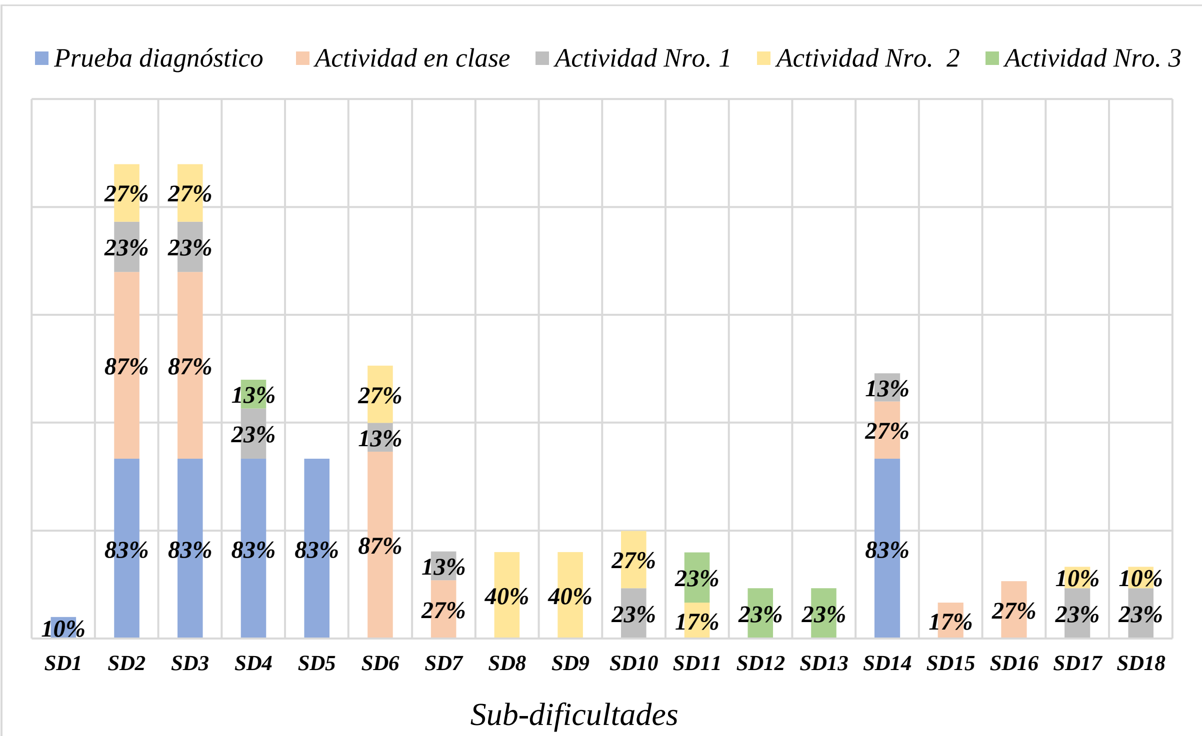
Conforme al análisis de los datos y lo registrado en los mapas de calor se puede afirmar que el *10%* de los estudiantes presentaron algún tipo de sub-dificultad durante todo el proceso de intervención en el aula o bien en el desarrollo de las actividades. El *30%* presentó sub-dificultades de manera alternada, superándolas en algunas actividades, pero en otras no y el *60%* de los estudiantes superaron las sub-dificultades a partir de la actividad Nro. 1. Con estos resultados podemos concluir que emplear las situaciones didácticas para dirigir las clases facilitó que los estudiantes formularan y expusieran la forma como elaboraban las demostraciones, permitiendo que contribuyeran a la construcción de su propio conocimiento.

Por otra parte, las distintas sub-dificultades que se iban presentando se utilizaron como una herramienta para activar y potenciar los razonamientos deductivos e inductivos. También el uso del programa de *GeoGebra* ayudó que los estudiantes comprendieran las distintas temáticas desarrolladas y el concepto de demostración y con ello superar las dificultades que se presentaron.

Ahora bien, es importante conocer la frecuencia con la que se identificaron estas sub-dificultades en cada actividad en la muestra de treinta (30) estudiantes, por tal razón se realiza el gráfico 9.

Gráfico 9

Porcentaje de estudiantes que presentaron algún tipo de sub-dificultad por actividad



En el gráfico 9 se observan los porcentajes de estudiantes que presentaron algún tipo de sub-dificultades, se puede ver que después de algunas actividades ciertas sub-dificultades desaparecen, sin embargo, aparecen otras, pero esto es debido a que en las actividades no se evalúan los mismos desempeños.

Para analizar el progreso o retroceso de los estudiantes y poder ver si las estrategias y los recursos utilizados para controlar o disminuir las sub-dificultades funciona o no, es importante enfocarse en aquellos desempeños (sub-dificultad) que se evalúan en todas las actividades. En relación a esto veamos lo siguiente:

- En el gráfico 9 se puede observar que el porcentaje de las sub-dificultades *SD2* y *SD3* pasa de *83%* a *27%*, es notable que la cantidad disminuye, además de desaparecer en la actividad Nro. 3. Esto se dio por el trabajo realizado donde se sugiere a los estudiantes que antes de iniciar a construir una demostración es fundamental identificar las hipótesis y la tesis. Se señala lo importancia de saber dentro de una demostración "*lo que se tiene o se conoce"* y "*lo que se debe probar o bien a dónde se debe llegar"* para poder realizar el proceso de una forma correcta. Con esto se promueven hábitos que permiten desarrollar habilidades en los estudiantes para identificar las hipótesis y la tesis.
- La sub-dificultad *SD11* en las actividades en donde se identificó pasa del *17%* al *23%*, en este caso la cantidad de estudiantes que presentaron esta sub-dificultad aumenta, pero en una cantidad pequeña. No obstante, en las tres (3) primeras actividades no se identifica ningún estudiante con esta sub-dificultad. Esto es porque se muestra a los estudiantes la importancia de leer, observar, describir las representaciones geométricas que se plantean en un problema para identificar los datos que proporcionan y así construir demostraciones directas. Con este resultado se pudo evidenciar que los estudiantes realizan las demostraciones o bien memorizan los conceptos y procesos matemáticos para después repetirlos sin hacer una interpretación, interiorización de estos.
- *SD15* es una sub-dificultad que se presentó únicamente en la prueba diagnóstico y tuvo un porcentaje de *17%*, la disminución de la cantidad de estudiantes surge por el trabajo realizado, bastó con comunicarle a los estudiantes que, si particularizan una demostración asignando valores, por ejemplos a los ángulos o segmentos no están dando respuesta a la

demostración propuesta, sino que están resolviendo algo en particular y no en general, porque descontextualizan el enunciado del problema.

- *SD17* y *SD18* estas sub-dificultades en donde se evidenció pasa de *23%* al *10%* es bastante evidente que el porcentaje de estudiantes que presentaron estas sub-dificultades disminuye, esto sucedió debido a que se invita a los estudiantes a justificar todo lo que afirman a partir de las teorías que se están trabajando en clases y lo que conocen, también a que verifiquen todo lo que usan para justificar sus respuestas.

De igual modo, es sustancial observar el comportamiento de otras sub-dificultades en las que incurren los estudiantes que limitan o impiden un buen aprendizaje de las temáticas trabajadas, las cuales dificultan la elaboración de demostraciones. Veamos algunas de estas sub-dificultades:

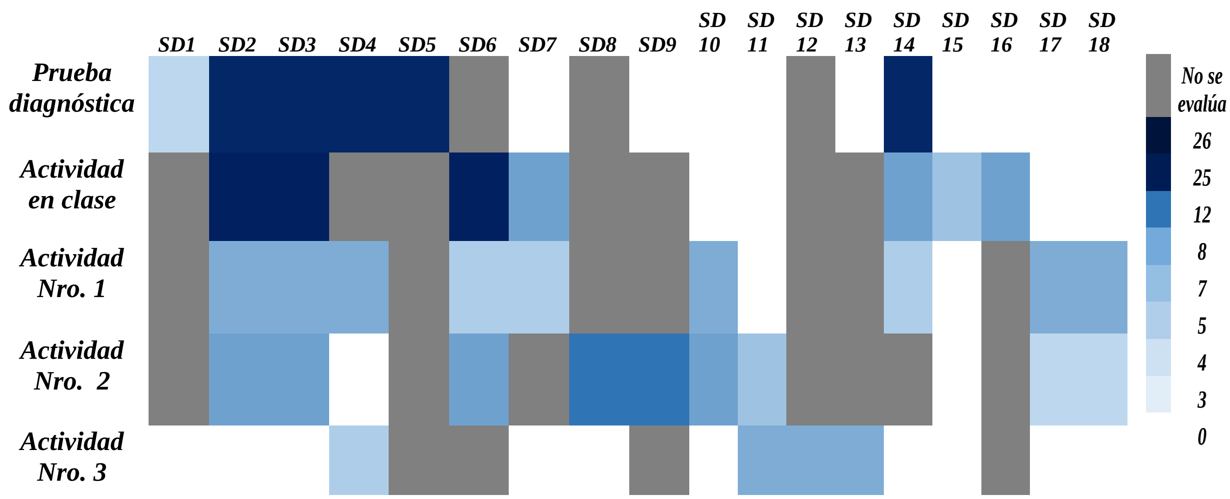
- *SD4* esta sub-dificultad en las actividades que se evidenció pasa del *83%* al *13%*, la cantidad de estudiantes que presentaron esta sub-dificultad disminuye. Esta disminución sucede porque se enfatiza en la construcción de los tipos de ángulos que se forman entre rectas paralelas y una recta transversal por medio del programa GeoGebra, el cual sirvió como recurso didáctico para realizar las representaciones de estos ángulos.
- La sub-dificultad *SD10* en las actividades que se identificó se presentó con porcentajes de *23%* al *27%*, aumentando la cantidad de estudiantes. Esto ocurrió toda vez que los estudiantes tienen dificultad en la comprensión y manejo de algunas definiciones, teoremas, postulados, entre otros, que no permite que estos realicen una representación geométrica de manera correcta. En las actividades que no se evidenció fue por la sugerencia y construcción continua de las representaciones geométricas en donde se muestra como se deben relacionar las definiciones para poder realizar las representaciones de la mejor manera.

Como se puede notar (gráfico 9 y los mapas de calor) las sub-dificultades que son transversales el porcentaje de estudiantes que presentaron estas disminuye, aunque en algunas actividades aumenta en una cantidad mínima, pero al final desaparece o simplemente no se evidenciaron, lo que permite concluir que el trabajo realizado con cada sub-dificultad funcionó. Trabajar cada sub-dificultad de forma independiente ayudó a controlar o disminuir un poco estos factores, así mismo, tomar la demostración como una estrategia para evaluar si los estudiantes estaban construyendo aprendizaje significativo, la cual permitió verificar o validar las distintas temáticas que les sirvieron de apoyo a los estudiantes para la construcción de conocimiento en el momento en donde debían poner a juicio todo lo aprendido, también fue una buena estrategia de enseñanza-aprendizaje.

Para finalizar dando una visión de conjunto, se realiza el mapa de calor 5 en donde se tiene la cantidad de estudiantes que entregaron las cinco actividades y que presentaron algún tipo de sub-dificultad.

Mapa de calor 5

Esquema de trayectoria final: Sub-dificultades vs Actividades



En este mapa de calor se describen las frecuencias de las sub-dificultades que se evidenciaron en las distintas actividades. Es notorio cómo la mayoría de estas disminuyen tras cada actividad hasta incluso desaparecer en la actividad Nro. 3. Podemos concluir que el trabajo realizado tuvo el éxito esperado en la muestra de treinta (30) estudiantes.

7.1.7. Registro de las dificultades identificadas

Para ilustrar la forma en que cada sub-dificultad está asociada a una dificultad, (ver marco teórico), presentaremos algunos ejemplos y comentarios realizados durante el desarrollo de estas actividades en clase (clases de forma virtual) que muestran la forma cómo se evidenciaron estas sub-dificultades:

Dificultades relacionadas con prerrequisito de la aritmética de los números reales, álgebra y/o teoría de conjunto:

Para la construcción de la demostración directa en geometría euclidiana, se tienen algunas premisas en el planteamiento de un problema que involucran mediciones de segmentos o ángulos, en donde las propiedades de los números reales, los procesos algebraicos y la teoría de conjuntos son indispensables para el desarrollo de las demostraciones.

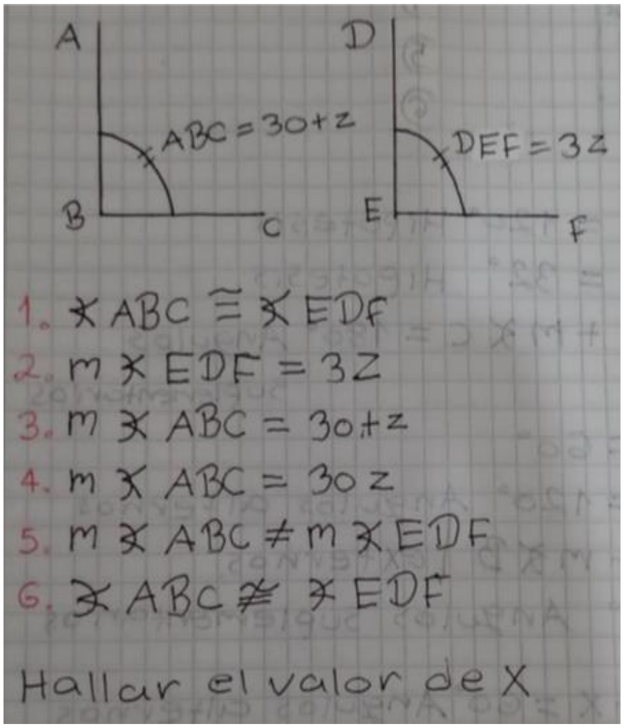
A. Comprensión y manejo del principio de sustitución y el concepto (o propiedad) de igualdad (SD14 y SD7)

El ejemplo utilizado para estas sub-dificultades (ver anexo D, pregunta 2) muestra que los estudiantes tienen problemas para comprender e identificar los conceptos de sustitución e igualdad, y los procesos algebraicos para resolver ecuaciones.

Consideremos el siguiente ejemplo (registro 1) para evidenciar las sub-dificultades de la comprensión y el manejo del principio de sustitución y el concepto de igualdad. A la izquierda se tiene una imagen donde el estudiante elabora una demostración, y a la derecha se realizan algunas observaciones de la misma.

Registro 1

Ejemplificación o evidencia



El estudiante concluye que los ángulos no son congruentes, creo que esto sucedió porque no comprende y no maneja el principio de sustitución, ni el concepto de igualdad, no reconoce algunos procesos algebraicos, además de no conocer lo que significa que dos ángulos sean congruentes.

Durante la clase el estudiante preguntaba: ¿Cómo se puede calcular Z?
Con esta pregunta se infiere que el estudiante desconoce algunos procesos algebraicos, en específico el planteamiento de ecuaciones de primer grado.

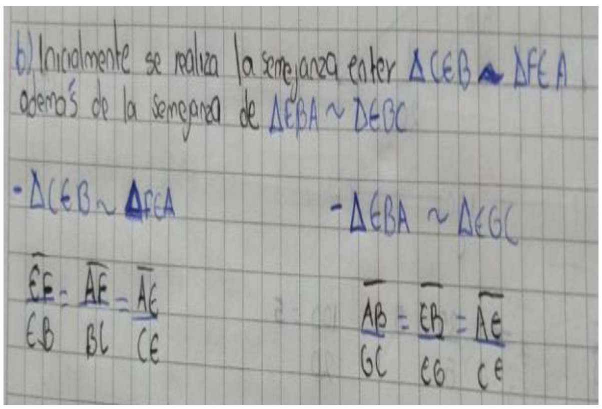
En el registro 1 vemos un procedimiento incorrecto cuando el estudiante concluye que los ángulos son diferentes. Él describe en una columna los datos que brinda el problema, hace algunas implicaciones, sin embargo, no hace uso de los mismos para dar respuesta a la pregunta.

B. *Conocimiento conceptual y procedimental de las propiedades de los números reales (SD12)*

Conocer las propiedades de los números reales es fundamental para el desarrollo de algunas demostraciones, entender cuándo y cómo utilizar estas propiedades es necesario. En el siguiente ejemplo (registro 2) se puede observar en la primera columna que el estudiante no reflexiona o identifica sobre la propiedad que le permite concluir la respuesta, en la segunda columna se explica un poco cuál es la dificultad con la que se enfrentó el estudiante. Para ilustrar esta sub-dificultad se utilizó el desarrollo de la actividad Nro.3 (ver anexo F, pregunta 3. b).

Registro 2

Ejemplificación o evidencia



El estudiante no concluye su respuesta, al ser indagado del porqué no concluye, este responde preguntando por cuál propiedad de los números reales le permitiría concluir $\frac{\overline{EB}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EB}}$. Esto permite deducir que no comprende la propiedad transitiva de los números reales.

En la imagen del registro 2 se puede ver la producción de una demostración inconclusa, aunque el estudiante identifica que para realizar la demostración primero tenía que establecer la semejanza de los triángulos relacionados, para luego afirmar la proporcionalidad de los lados, no reflexiona debe hacer uso de la propiedad transitiva de los números reales, para concluir $\frac{\overline{EB}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EB}}$. Esta sub-dificultad se refleja claramente durante las clases cuando se discute sobre el problema o demostración planteada y los estudiantes hacen comentarios sobre el trabajo realizado, con lo que muestran la falta de conocimiento y comprensión de algunas propiedades de los números reales.

Dificultades relacionadas con la comprensión y manejo del enunciado de un teorema y/o problema planteado:

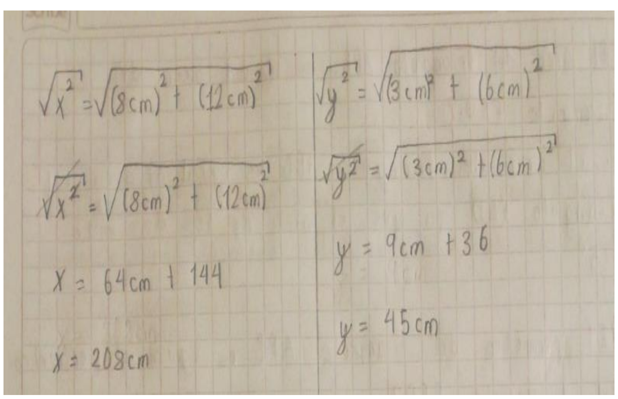
En la producción de demostraciones es esencial conocer y comprender los distintos conceptos, teoremas, postulados y el planteamiento del problema, entre otros, para construir una demostración correctamente. Su desconocimiento genera que los estudiantes incurran en errores.

A. *Establece relación entre los conceptos de homotecia-semejanza-proporcionalidad (SD1)*

En relación con este aspecto, en ocasiones los estudiantes logran hallar la longitud del segmento solicitado, pero lo hacen de forma incorrecta, utilizando teorías que no tienen ninguna relación con el planteamiento del problema. Como se puede observar en el desarrollo de esta pregunta (registro 3), el triángulo no tiene ningún ángulo que mida 90° (recto), sin embargo, el estudiante lo relación con el teorema de Pitágoras. Para dar evidencia de la forma como se presentó esta sub-dificultad se utiliza el desarrollo de la prueba diagnóstica (ver anexo, pregunta 1).

Registro 3

Ejemplificación o evidencia



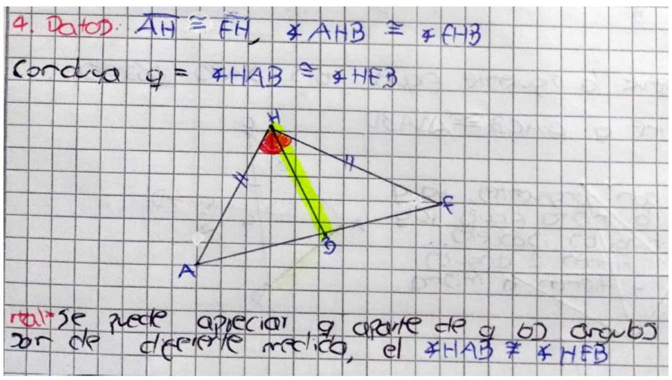
El estudiante asume que los triángulos propuestos son rectángulos y no relaciona la semejanza que viene de la homotecia, por tal razón no usa la proporcionalidad que implica la semejanza.

B. *Establecimiento del hecho que se debe demostrar y las condiciones válidas del enunciado (SD2 y SD3)*

Cuando no se logran identificar las hipótesis y la tesis, se dificulta la elaboración de demostraciones y se puede llegar a conclusiones incorrectas. Un ejemplo de esta situación es el registro 4 obtenido de la solución de la pregunta 4 de la actividad Nro. 2 (ver anexo E).

Registro 4

Ejemplificación o evidencia



El estudiante no da respuesta a la pregunta correctamente, toda vez que concluyen que las medidas de los ángulos son diferentes, esto se debe a que no identifican las hipótesis (lo que se da o se conoce) y la tesis (lo que debe probar) que se plantea en el problema.

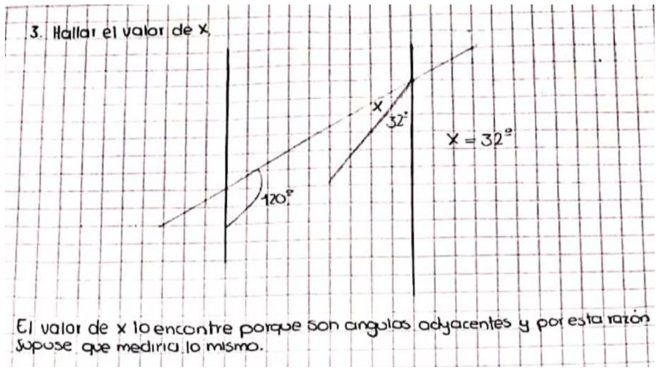
En el registro 4 se puede observar que el estudiante asume que a partir de la representación geométrica es posible observar que estos ángulos son diferentes, por tal razón no reflexiona sobre la demostración propuesta.

C. *Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulo entre rectas paralelas y una recta transversal, y de los tipos de ángulos (SD4 y SD16)*

El desconocimiento de algunos elementos o resultados de la geometría euclidiana lleva al estudiante a formular afirmaciones sin verificar que estas puedan ser utilizadas. Para ilustrar esta sub-dificultad veamos como ejemplo el desarrollo de la actividad Nro. 1 pregunta 3 (ver anexo D). En el registro 5 se puede observar el trabajo realizado por un estudiante el cual determina el valor del ángulo sin tener en cuenta la posición y amplitud de este.

Registro 5

Ejemplificación o evidencia



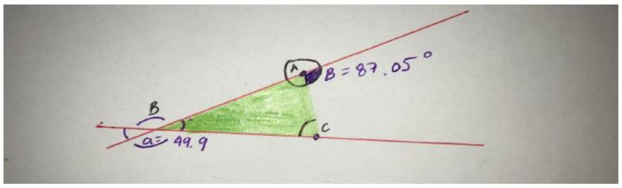
El estudiante concluye que los ángulos tienen la misma medida porque son adyacentes, desconociendo los tipos de ángulos que se forman entre rectas paralelas y una recta transversal, y el concepto de ángulos adyacentes.

D. *Comprensión y manejo del teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo (SD5)*

Este teorema nos dice que en la geometría euclidiana la medida de ningún ángulo interno de un triángulo puede ser mayor o igual a 180°. En el siguiente ejemplo (registro 6) se muestra la producción de un estudiante en donde se puede ver que desconoce este teorema.

Registro 6

Ejemplificación o evidencia[14]



Las medidas de los ángulos del triangulo ABC son

- Angulo A= 180*
- Angulo B= 90*
- Angulo C= 90*

Porque si no mi analisis no es erroneo los angulos que son rectos equivalen a 180 entonces como el triángulo

ABC tienen dos equivalen a 90* grados y el restante es el más grande entonces puedo decir que su valor es de 90*

El estudiante desconoce que la suma interna de los ángulos de un triángulo suma 180° en la geometría euclidiana, por tal razón asigna valores a los ángulos iguales a 180°, dando como resultado que no se cumpla este teorema.

En la ilustración del registro 6 es claro que el estudiante no está seguro de la respuesta, pero esto se debe a que desconoce qué tipos de ángulos y qué propiedades deben cumplir los ángulos que están dentro de un triángulo en la geometría euclidiana, además de no utilizar ninguna de las hipótesis del enunciado. En la discusión del desarrollo de esta actividad el estudiante pregunta: ¿Por qué el ángulo no puede medir 180°?, lo que nos permite inferir que desconocía el teorema.

E. *Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de ángulos (SD6)*

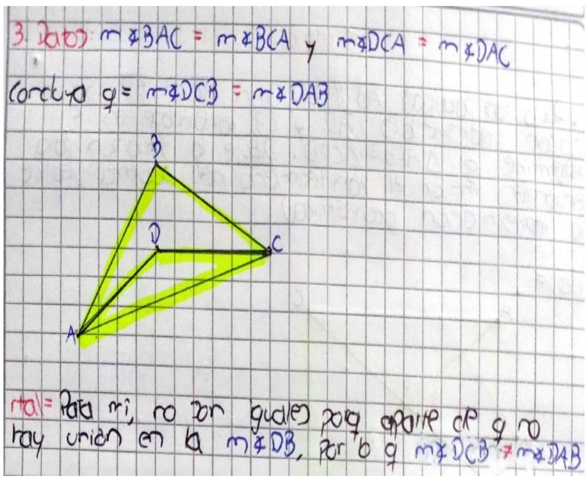
Es importante identificar cuándo y cómo se puede hacer uso del postulado de adición de medidas de ángulos, porque en algunas demostraciones es indispensable este postulado para su elaboración. El desconocimiento conceptual y procedimental de este postulado conlleva a dar

[14] Para ilustrar esta sub-dificultad se toma el desarrollo de la prueba diagnóstica pregunta 7 (ver anexo B).

conclusiones incorrectas. Para ilustrar esta sub-dificultad se toma el desarrollo de la pregunta 3 de la actividad Nro. 3 (ver anexo E).

Registro 7

Ejemplificación o evidencia



Durante la discusión de la elaboración de la demostración en el aula de clase algunos estudiantes afirmaban que no era posible demostrar que la medida de los ángulos era igual y de ser así preguntaban: ¿cómo se podría hacer para que $m\sphericalangle DCB = m\sphericalangle DAB$?

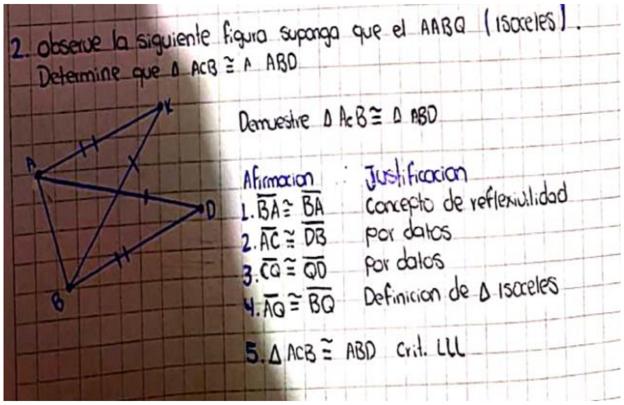
El desconocimiento del uso del postulado es lo que induce al estudiante a concluir que los ángulos no son iguales.

F. *Conocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de segmentos (SD8)*

Para la producción de algunas demostraciones es esencial determinar cuándo y cómo se deben utilizar algunos resultados o elementos de la geometría euclidiana, porque en muchas ocasiones generan en los estudiantes dificultades que no permiten que estos puedan elaborar demostraciones. El desconocimiento conceptual y procedimental del postulado de adición de medidas de segmento es uno de ellos.

Registro 8

Ejemplificación[15] *o evidencia*



El estudiante elabora una demostración en la que concluye que los triángulos son congruentes bajo el criterio lado-lado-lado. Sin embargo, esta demostración está incompleta toda vez que para hacer uso de este criterio se debe establecer también la congruencia entre los segmentos $\overline{BC}\ y\ \overline{AD}$.

En el registro 8, en la producción del estudiante se puede interpretar como si este no identificara qué lados de los triángulos deben cumplir con esta condición para poder justificar bajo este criterio la afirmación de la conclusión. Pero esto no es así, debido a que durante la clase el estudiante se muestra confundido con el proceso, porque no entendía cómo proceder para hacer que los segmentos $\overline{BC}\ y\ \overline{AD}$ fueran congruentes.

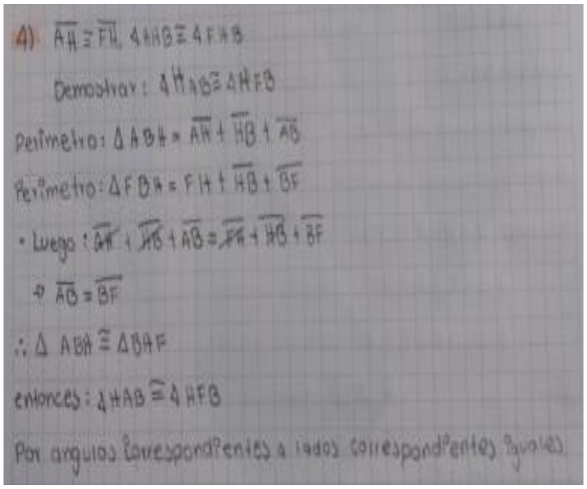
G. *Conocimiento conceptual y procedimental de la congruencia entre triángulos (SD9)*

Para la elaboración de demostraciones de congruencia de triángulos es esencial conocer y entender los criterios de congruencia, además de identificar de forma correcta las hipótesis que plantean estos para poder utilizarlos, así mismo lo que se deduce de la congruencia entre triángulos. En el desarrollo de la pregunta 4 de la actividad Nro. 2 se observar la manera como se evidenció esta sub-dificultad (ver anexo E).

15 Para ilustrar esta sub-dificultad se toma el desarrollo de la pregunta 2 de la actividad Nro. 2, ver el anexo E.

Registro 9

Ejemplificación o evidencia



El estudiante asume la congruencia de los triángulos sin establecer dicha congruencia. Esto sucede cuando afirma que los perímetros de los triángulos son iguales, y concluye que los triángulos son congruentes, por esta razón los ángulos también lo son.
Este desconoce que para poder concluir que dos triángulos son congruentes se debe establecer las condiciones necesarias.

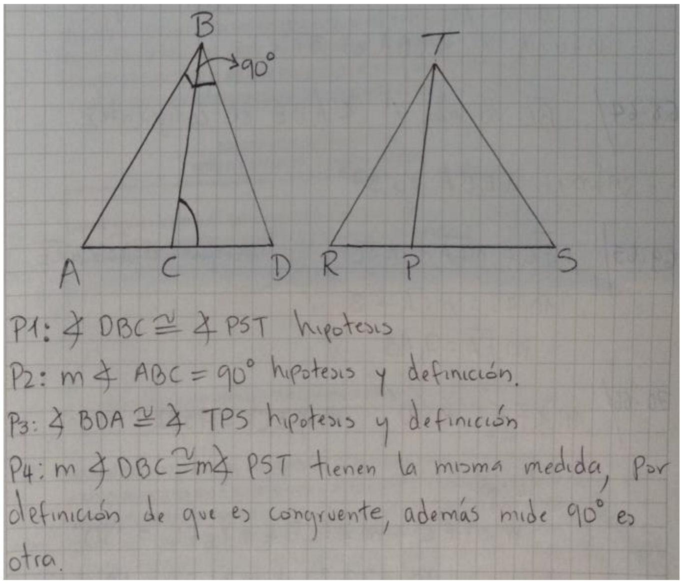
En la producción (registro 9) el estudiante hace uso de lo debe demostrar para poder concluir su respuesta. Esta sub-dificultad se puede ver más clara durante el desarrollo de la demostración en clase, cuando el estudiante afirma que la única forma de ver la congruencia entre figuras geométricas (triángulos) es a través de la igualdad de perímetros o áreas. Esta afirmación permite inferir que este desconoce cómo proceder para probar la congruencia entre triángulos y los criterios de congruencia según la geometría euclidiana.

H. Representación de los objetos y enunciados matemáticos (SD10)

Detrás de una incorrecta o inadecuada representación de los objetos matemáticos, enunciados o no realizar la representación, se tiene una falta de comprensión y manejo de algunas definiciones, conceptos, teoremas, postulados, entre otros. Observemos en el siguiente ejemplo (registro 10) como se evidencia esta sub-dificultad y cuáles fueron los factores que dificultaron la construcción de la representación del enunciado.

Registro 10

Ejemplificación[16] *o evidencia*



Para realizar la representación de los objetos matemáticos y enunciados, se debe conocer, comprender y manejar los conceptos o resultados involucrados, como es el caso del ejemplo aquí planteado. El estudiante no maneja lo que significa “colineal”, y algunos asumieron la representación como una demostración o justificación.

Para la ilustración del registro 10, en la producción realizada por el estudiante se puede observar que este no comprende el enunciado del problema planteado y algunos conceptos involucrados en la construcción de la representación, toda vez que durante el desarrollo de esta actividad en clase suscitaron algunas preguntas como: ¿qué es ***colineal*** ?, ¿cuál es la posición que debe ocupar cada punto y segmento que forma un ángulo?, lo que permitió inferir que el estudiante desconocía algunos conceptos que enunciaba el problema y la representación correcta de la formación de ángulos, por tal razón no realiza la representación geométrica solicitada.

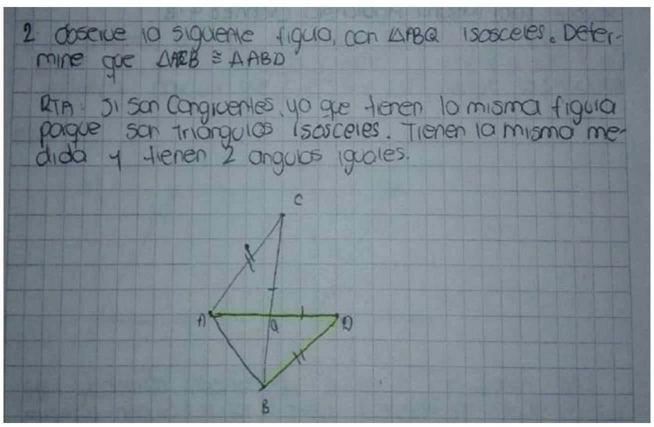
I. *Interpretación de las representaciones de las geométricas (SD11)*

[16] Respuesta a la pregunta 1 actividad Nro. 1, anexo D

En la geometría euclidiana las representaciones de los objetos o enunciados matemáticos hacen parte del planteamiento del problema, por ello la importancia de interpretar, leer, describir de forma correcta estas representaciones. Para mostrar la forma como se presentó esta sub-dificultad se toma como ejemplo el desarrollo de la actividad Nro.2 pregunta 2 (ver anexo E).

Registro 11

Ejemplificación o evidencia



El estudiante interpreta de forma incorrecta la representación geometría y el enunciado al asumir que los triángulos ΔACB y ΔABD son isósceles, por esta razón son congruentes (iguales).

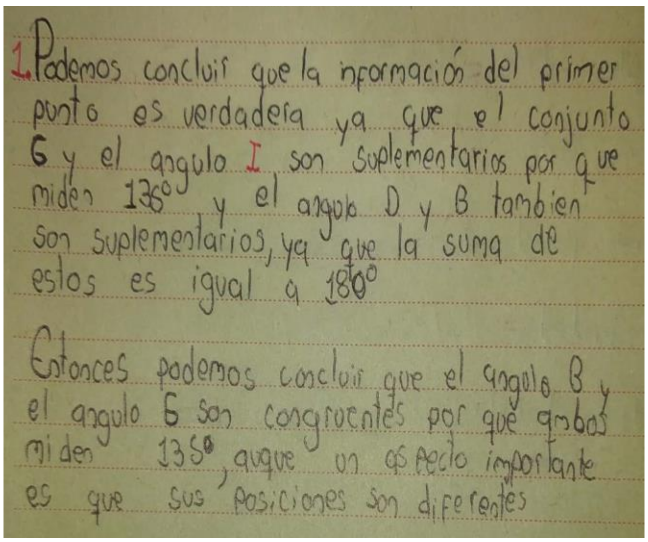
En el registro 11 el estudiante no identifica cuál es el triángulo isósceles y por ello asume que $\Delta ACB \cong \Delta ABD$ bajo la justificación que son isósceles.

J. *Particularización y descontextualización de un enunciado expresado en forma general, y conocimiento conceptual de los tipos de ángulos (SD15 y SD16)*

Estas sub-dificultades se evidenció cuando los estudiantes asignan valores o bien particularizan un problema establecido, descontextualizando la situación planteada. Lo que implica el desconocimiento de algunos resultados o elementos de la geometría euclidiana, como por ejemplo la identificación y la definición de los tipos de ángulos, además del postulado de adición de medidas de ángulos. Durante el desarrollo de la actividad realizada en clase, con la pregunta 2 se pudo evidenciar esta sub-dificultad, por la manera como el estudiante realizó la pregunta (ver anexo C).

Registro 12

Ejemplificación o evidencia



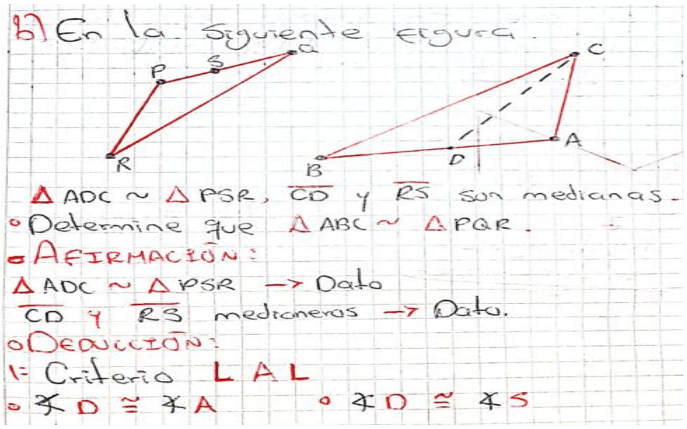
El estudiante asigna algunos valores para los ángulos que cumple con la condición de ser suplementario, descontextualizando el problema propuesto.
Con esto se puede ver que el estudiante no comprende, ni maneja el postulado de adición de medidas de ángulo y cuáles ángulos son suplementarios.
Durante las clases preguntaban; ¿Cómo es posible establecer esa congruencia?

K. *Conocimiento conceptual y procedimental de la semejanza entre triángulos (SD13)*

Es fundamental conocer y entender los criterios de semejanza, identificar de forma correcta las hipótesis que plantean estos para poder utilizarlos, además de lo que implica la semejanza entre triángulos.

Registro 13

Ejemplificación o evidencia[17]



El estudiante hace uso del criterio lado-ángulo-lado para establecer la semejanza entre los triángulos, pero no verifica las condiciones necesarias para poder llegar a la conclusión.

En el registro 13 se puede observar la producción de un estudiante, en la que concluye la semejanza de los triángulos ΔABC y ΔPQR sin establecer las condiciones del criterio, es decir que dos lados correspondientes de los triángulos deben ser proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos debe ser congruente. En la imagen de este registro es evidente que el estudiante no establece ninguna de las hipótesis del criterio utilizado para justificar la semejanza entre los triángulos. Cuando se elabora la demostración en clase, el estudiante muestra inquietud con respecto a las hipótesis de los criterios de semejanza.

Dificultades relacionadas con el trabajo dentro de un sistema axiomático:

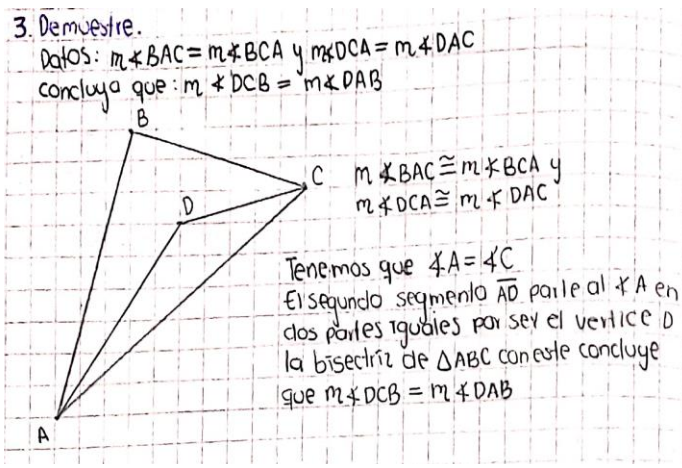
A. *Verificación del cumplimiento de las condiciones de las hipótesis del hecho geométrico que se pretende usar (SD17)*

[17] Desarrollo de la actividad Nro. 3 pregunta 1.b (ver anexo F).

Cuando se aduce a algún hecho geométrico del sistema para justificar una afirmación, con frecuencia el estudiante omite la verificación de las condiciones bajo las cuales es posible usar un teorema o postulado (ver anexo E, pregunta 3).

Registro 14

Ejemplificación o evidencia



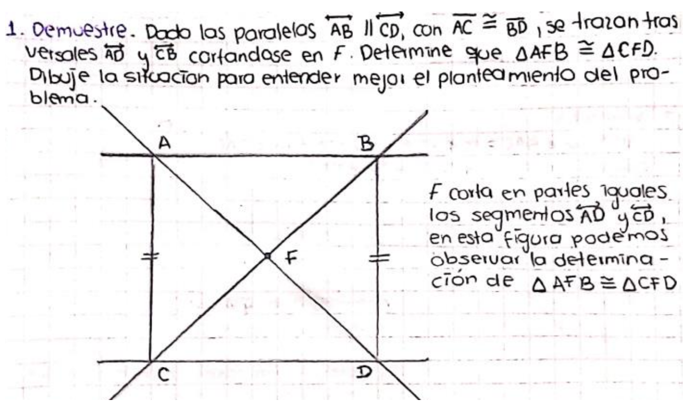
El estudiante afirma que el segmento $\overline{AD}$ es bisectriz de los ángulos, por ello son congruentes, asume un hecho geométrico sin verificar las hipótesis del teorema, postulado o resultado que se pretende usar para justificar la afirmación.

B. *Respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación (SD18)*

Este es uno de los puntos problemáticos para los estudiantes, además de asumir que una representación geométrica es una demostración, por tal razón omiten producir este proceso de argumentación. Veamos el siguiente ejemplo tomado del desarrollo de la actividad Nro. 3 pregunta 1 (ver anexo E).

Registro 15

Ejemplificación o evidencia



El estudiante asume que a partir de una representación geométrica justifica la congruencia de los triángulos, sin dar ninguna argumentación o construir los pasos de la demostración.

Con base al análisis realizado a los datos obtenidos, se puede analizar que:

Las sub-dificultades que se evidenciaron con una mayor frecuencia en la construcción de demostraciones directas son *SD2*[18] y *SD3*[19], las cuales pertenecen a la categoría de la *comprensión y manejo del enunciado de un teorema y/o problema planteado*. Por otro lado, se identificaron las sub-dificultades con una frecuencia menor *SD16*[20], que pertenece a la categoría de la *comprensión y manejo del enunciado de un teorema y/o problema,* y *SD18*[21] relacionada con *el trabajo dentro de un sistema axiomático*. Estas dificultades se presentaron porque los estudiantes no identifican correctamente las hipótesis y las conclusiones o tesis de los datos que proporciona un problema, además hacen afirmaciones sin justificar, y en ocasiones toman como una demostración una representación geométrica.

---

[18] Establecimiento del hecho que se debe demostrar.
[19] Establecimiento de las condiciones válidas de un enunciado o teorema.
[20] Conocimiento conceptual de los tipos de ángulos.
[21] Respaldo teórico, explícito y apropiado de las proposiciones que conforman la justificación.

Del mismo modo, se puede concluir que el *70%* de los estudiantes presentaron dificultades relacionadas con el *prerrequisito de aritmética de los números reales, álgebra y/o teoría de conjuntos*, el *92%* con *la compresión y manejo de enunciados de un teorema y/o problemas planteados* y un *48%* con *el trabajo dentro de un sistema axiomático*, de cincuenta (50) estudiantes que entregaron actividades. Todas estas dificultades evidenciadas en este proceso son de dos tipos relacionadas con la misma disciplina según lo planteado por Socas (1997) las cuales son aquellas que están asociadas a la *complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático*s.

Finalmente, se pueden hacer algunas deducciones con las distintas intervenciones y las actividades desarrolladas por los estudiantes: ellos reconocen el concepto de demostración, producen demostraciones de forma grupal durante las clases dirigidas. Sin embargo, al realizar demostraciones individuales es cuando se evidencian múltiples dificultades en la interpretación de los elementos o resultados matemáticos utilizados para construir o verificar la verdad de un hecho, un teorema o un enunciado.

Las opiniones que los estudiantes tienen sobre las demostraciones no son muy favorables, toda vez que durante las clases manifestaban que les tocaba recordar muchos temas que ya habían visto, y además no entendían cómo usar los teoremas, definiciones, entre otros, en una demostración, con esto es evidente que los estudiantes están acostumbrados a memorizar los procesos matemáticos o bien los algoritmos, lo que no permite activar y potenciar los razonamientos deductivos e inductivos.

8. Conclusiones y recomendaciones

Después del proceso de inmersión en el aula de clase, se puede concluir que con el desarrollo de este trabajo se lograron los objetivos establecidos para esta práctica pedagógica, entre los cuales encontramos realizar una experiencia de enseñanza-aprendizaje sobre el tema de demostraciones deductivas en geometría euclidiana, y con ello poder identificar y clasificar las dificultades que presentaron los estudiantes al aprender a realizar demostraciones directas.

Según la descripción, análisis e interpretación de los datos obtenidos se pudo evidenciar que más del noventa por ciento (90%) de los estudiantes que participaron de esta práctica pedagógica presentaron algún tipo de dificultad que no les permitió elaborar demostraciones directas, lo que nos permite inferir que la manera como se está construyendo conocimiento matemático en este colegio, específicamente con los estudiantes de grado noveno, no es la más adecuada si se tiene en cuenta el concepto de aprendizaje significativo.

Igualmente, con este trabajo se concluye que los estudiantes de noveno grado del colegio Nuestra Señora de Fátima se evidenciaron tres tipos de dificultades en la construcción de demostraciones directas en geometría euclidiana. Estas dificultades se presentaron por la importancia que se le resta a la demostración en las aulas de clases, desconocimiento de la definición y producción de demostraciones, la falta de comprensión y manejo de enunciados de un teorema o planteamiento del problema, la falta de conocimiento conceptual y procedimental de las propiedades de los números reales, del álgebra y de la teoría de conjunto. En términos generales, la causa de las dificultades está asociada a la misma disciplina: al abandono de las demostraciones en las aulas de clase como una herramienta didáctica para la construcción de aprendizaje significativo y a la forma de comunicar los objetos matemáticos que en muchas ocasiones se particularizan de tal manera que los estudiantes no logran aplicar estos en un contexto diferente al que fue aprendido, que impulsan o desarrollan el aprendizaje por memorización produciendo en ellos hábitos que limitan el desarrollo y fortalecimiento de los distintos razonamientos del individuo.

Es importante reconocer que el grado noveno es la finalización de la educación básica secundaria, lo que nos permite deducir que los estudiantes están pasando a la educación media con muchas dificultades, no solo en la elaboración de demostraciones directas en geometría euclidiana, sino en varias ramas de las matemáticas como se puede notar en los análisis aquí descritos.

El objetivo de la enseñanza de las matemáticas en la secundaria no es únicamente que los estudiantes aprendan las tradicionales reglas aritméticas, las unidades de medidas, o unas cuantas nociones geométricas. Alternativamente, consideramos que la principal finalidad de tal enseñanza es que los estudiantes activen y potencien los razonamientos deductivos e inductivos, y aplicar los conceptos en distintos contextos, además desarrollar habilidades matemáticas para desenvolverse en la vida cotidiana. Las demostraciones en geometría permiten cumplir este objetivo de la enseñanza de las matemáticas y los docentes deberían dirigir sus clases hacia este propósito, preocuparse por el conocimiento que sus estudiantes están construyendo y permitir que estos contribuyan a la construcción del mismo y no solo interesarse por los resultados que arrojan las pruebas saber 11°.

La enseñanza de la demostración a los estudiantes no solo tiene la finalidad de que ellos aprendan a elaborar demostraciones, sino que entiendan la importancia y el significado que tiene la demostración en la contribución y construcción de los conocimientos, por ello la importancia no solo de elaborar demostraciones en las aulas de clases, sino de mostrar el alcance que tiene la demostración como una herramienta didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje y la construcción de aprendizaje significativo. Hacer uso de la demostración como una herramienta didáctica para construir conocimiento brinda espacios de debate donde es posible comunicar y verificar lo aprendido.

Convertir las dificultades en fortalezas para fomentar la elaboración de demostración es una de las estrategias que permitieron mejorar la forma como se presentan las temáticas, debido a que de esta manera se incentiva a los estudiantes a contribuir a la construcción de su propio aprendizaje y potenciar el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Así mismo realizar pruebas diagnóstico cada inicio de periodo académico para identificar las dificultades en las que incurren los estudiantes y con ello crear estrategias de enseñanza-aprendizaje que fortalezcan las distintas temáticas desarrolladas con anterioridad.

Los docentes deben ser una guía constante en el proceso de construcción de conocimiento para los estudiantes, facilitando espacios de discusión, argumentación, reflexión y cooperación, que permitan contribuir a adquirir conocimientos teóricos y procedimentales, y con ello poder cambiar la actitud con respecto a las matemáticas, este objetivo se puede realizar con las actividades en donde el desarrollo de demostraciones en geometría sea fundamental, toda vez que este es un ambiente cooperativo y reflexivo, que le da al estudiante la facultad de entender mejor su entorno, priorizando el desarrollo autónomo y un pensamiento libre que facilita fomentar y alentar un espíritu crítico que ayudará a reconocer las dificultades y crear estrategias para superar las mismas.

Bibliografía

Alfaro-Carvajal, C., Flores, M., y Valverde, S. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas, y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Eficiencia*, 33(2), 55-75. Recuperado de: http://dx.doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Arias, C. (2011). Los procesos demostrativos de los estudiantes de educación media en el área de matemáticas. [Tesis pregrado, no publicada]. Universidad del Cauca, Popayán.

Crespo, R. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/228791538

Brousseau, G. (1986). Fundamento y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (2007). Introducción a la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Díaz, A. (2013). Secuencia de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencia o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Revista de currículo y formación de profesores*, 17(3), 11-33. Granadas, España.

Fiallo, J., Camargo, L., y Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista integración escuela de matemática*, 31(2), 181-205.

García, A. (2010). Análisis de datos cualitativos [resumen tesis doctoral]. Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras.

Hernández, C. y Jiménez, J. (2016). La demostración matemática en el aula, una estrategia para reducir el abandono escolar. [Posters]. VI Clabes conferencia latinoamericana sobre el abandono en la educación superior, Quito, Ecuador.

Herrera, J. (2015). Las funciones de la demostración en la formación inicial de docentes en matemáticas. [Tesis pregrado, no publicada]. Universidad del Cauca, Popayán.

Laréz, J. (2014). Las demostraciones geométricas como instancias de resolución de problemas. *Revista del centro de investigaciones educativa paradigma*, XXXV (2), 183 – 198. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7301866

Larios, V. (2002). Demostraciones y conjetura en le escuela media. *Revista electrónica de didáctica de las matemáticas*, 2 (3), 46-55.

Martínez, A. (2011). La demostración en matemática una aproximación epistemológica y didáctica. [Seminario]. Quinto simposio de la sociedad española de investigación en Educación Matemática. Almería, España.

Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=2606

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Obtenido de Estándares Básicos de Competencias.

Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles340021_recurso_1.pdf

Ortiz, H., y Jiménez, F. (2006). La demostración elemento vivo de la didáctica de la matemática. *Scientia Et Technica*, 2 (31), 237-240.

Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4830598

Palilla, L., Ruiz, C., Romero, I., Villegas, M., y Villanueva, J. (2019). Guía para docentes Aprender a aprender matemáticas 9°. Carvajal soluciones de comunicación S.A.S (Norma).

Pérez, J., y Merino M. Publicado: 2008. Actualizado: 2012. Definición: Definición de dificultad Recuperado de: https://definicion.de/dificultad/

Pérez, J., y Merino M. Publicado: 2008. Actualizado: 2012. Definición: Definición de dificultad Recuperado de: https://definicion.de/dificultad/

Samper, C., y Morales, S. (2015). Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclidiana. *Revista de investigación Universidad de la Amazonia.* 4 (6), 55-68.

Recurado de: https://amazoniainvestiga.info/index.php/amazonia/article/view/685

Samper, C., Leguizamón, C., y Camargo, L. (2001). Razonamiento matemático. *Revista EMA investigación e innovación en educación matemática.* 6(2), 141-158.

Sampieri, R., Collado, R., y Baptista, P. (2014). Definiciones de los enfoques cuantitativo y cualitativo, sus similitudes y diferencias. Punta Santa Fe (Ed). *Metodología de investigación* (pp. 2-31). México: McGraw-Hill.

Sánchez, E. (2014). Iniciación a la demostración en estudiantes de educación secundaria obligatoria y sus indecencias en la resolución de problemas. Ejemplos de aplicación en la comunidad de Madrid. [Tesis doctorado]. Madrid, España.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria, en Rico, L. et al. (eds.). *La educación matemática en la enseñanza* *secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori. Recuperado de: https://psicolog.org/captulo-v-dificultades-obstculos-y-errores-en-el-aprendizaje.html

Anexos

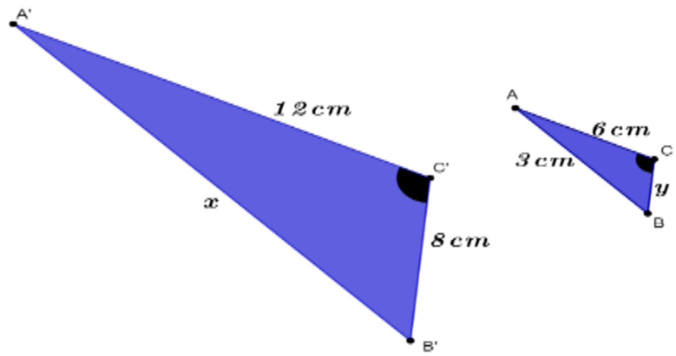
Anexo A

Ilustración del colegio Nuestra Señora de Fátima

Anexo B

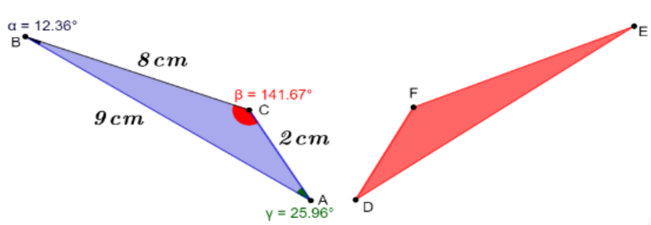
Prueba Diagnóstico

1. la siguiente transformación geométrica (homotecia).



De acuerdo con las longitudes que se pueden observar en la imagen, calcule las longitudes de los lados y, x de cada triángulo (recuerde los conceptos de semejanza y proporcionalidad).

2. Si realizamos una reflexión al ΔABC, dando como resultado el ΔDEF. Tal como se observa en la siguiente imagen:



a. ¿Qué pasa con el área y el perímetro del triángulo generado?
b. ¿Qué sucede con las longitudes de los lados y los ángulos del triángulo generado?

3. ¿Qué diferencia se puede observar entre la homotecia y la reflexión realizada a los triángulos?
4. Lea atentamente los siguientes enunciados y determine los elementos de una demostración (hipótesis y conclusión).

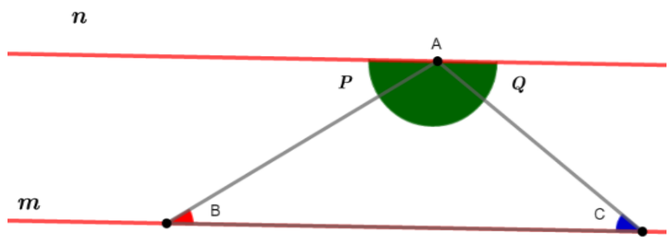
a. Un número es divisible por dos, si termina en cero o cifra par.
b. Si el punto D está en el punto medio de $\overline{AB}$ entonces $\overline{AD} = \overline{DB}$.
c. Un número es par, porque es divisible por 4.

5. Lea la siguiente demostración y escriba la justificación de las afirmaciones realizadas.

Problema por demostrar:

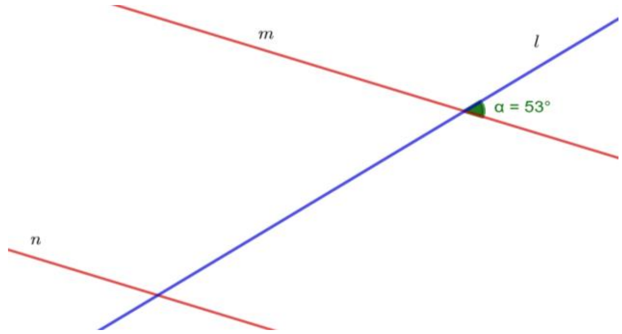
Si $\sphericalangle PAQ, \sphericalangle ABC, \sphericalangle ACB$ son ángulos internos de un triángulo, entonces $m\sphericalangle PAQ + m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle ACB = 180°$.

Demostración:



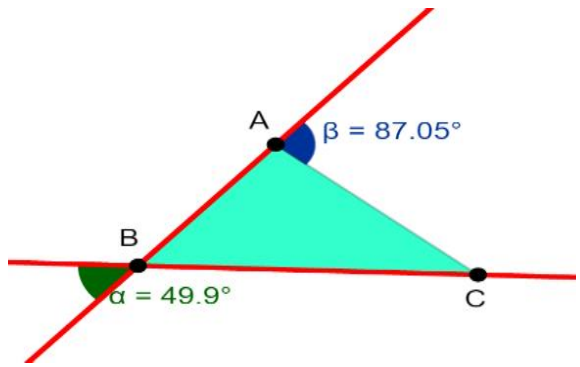
Afirmación	***Justificación (¿porque se puede hacer esas afirmaciones?)***
Se construye una recta m que pase por A y sea paralela a la recta BC. las rectas $m\ y\ n$ paralelas, $m \parallel n$	Es posible hacer rectas paralelas por puntos externos
Los ángulos P, A y Q. $m\sphericalangle P + m\sphericalangle PAQ + m\sphericalangle Q = 180°$.	
$m\sphericalangle P = m\sphericalangle ABC$	El segmento AB es transversal a m y n, generando ángulos alternos internos
$m\sphericalangle Q = m\sphericalangle ACB$	
$m\sphericalangle PAQ + m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle ACB = 180°$.	

6. Si el ángulo $\alpha = 53°$(color verde) como se observa en la siguiente figura,



¿Cuál es el valor de cada uno de los ángulos restantes formada entre las dos rectas paralelas y la recta transversal?

7. En el triángulo ΔABC, los ángulos $\alpha = 49.9° \ y \ \beta = 87.05°$ como se puede ver en la siguiente imagen:

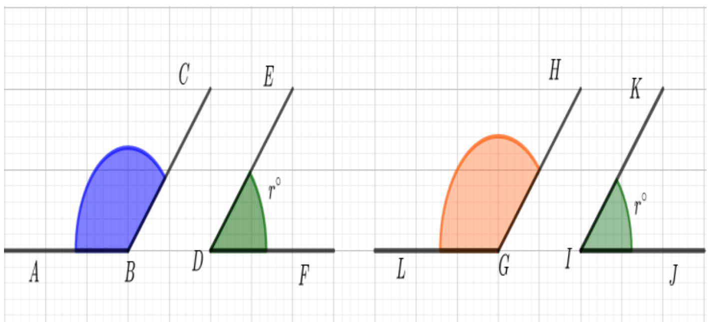


encontrar las medidas de los tres ángulos internos del triángulo ΔABC.

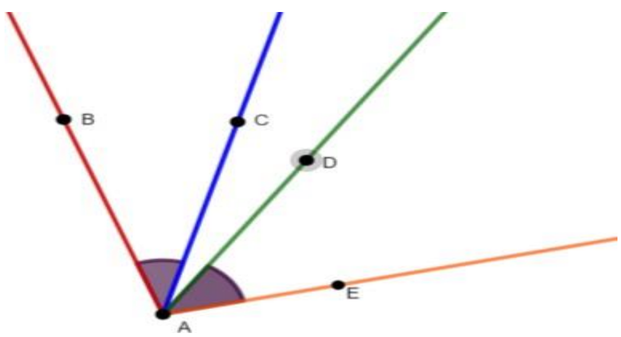
Anexo C

Actividad en clase

1.Si $\sphericalangle D \cong \sphericalangle I$, $\sphericalangle D\ y\ \sphericalangle B$ son suplementario y además $\sphericalangle I\ y\ \sphericalangle G$ son suplementario, entonces podemos concluir que: $\sphericalangle B \cong \sphericalangle G$.



2. ¿Cree usted que si $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle DAE$ podemos deducir que $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle CAE$?



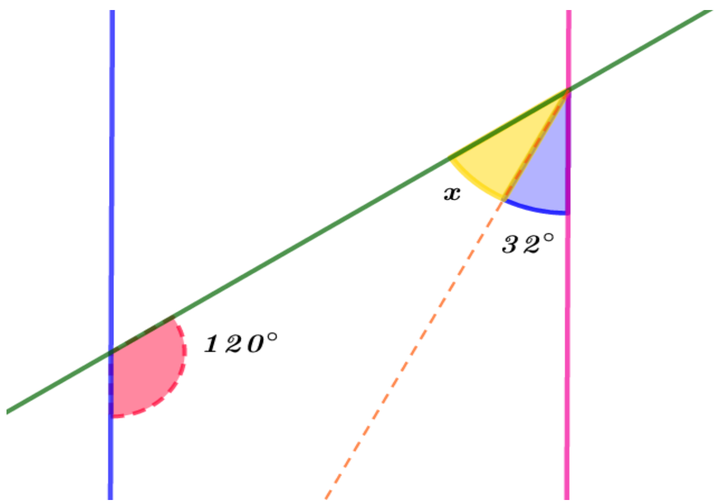
Anexo D

Actividad Nro. 1

1. Sean los segmentos $\overline{BD}, \overline{BA}$ y $\overline{BC}$ ***no colineales***[22] entre si y $\overline{SP}, \overline{SR}$ y $\overline{ST}$ ***no colineales*** entre si. Tal que estos forman ángulos que cumplen con lo siguiente: $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle RSP$ y $\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle PST$. Demuestre que: $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle RST$. Realiza una representación geométrica de la situación.

2. Dado $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$ y $m\sphericalangle DEF = 3z$ y $m\sphericalangle ABC = 30 + z$. ¿Cuál es el valor de $\sphericalangle ABC$? dibuje la situación

3.Hallar el valor de x



Justifique cada paso (demuestre como encontró el valor de x)

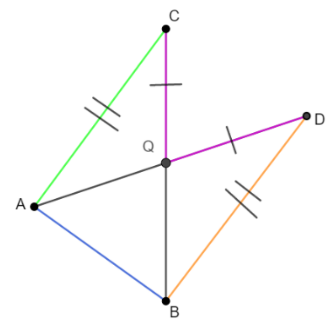
[22] A un conjunto de puntos situados sobre un mismo segmento se dice que es colineal

Anexo E

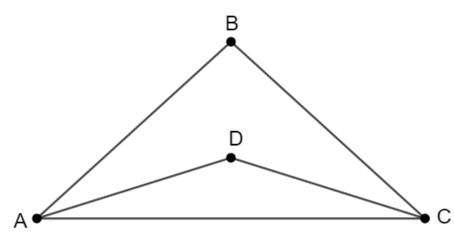
Actividad Nro. 2

1. Dado las paralelas $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, con $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, se trazan transversales $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{CB}$ cortándose en F. Determine que $\Delta AFB \cong \Delta CFD$. Dibuje la situación para entender mejor el planteamiento del problema.

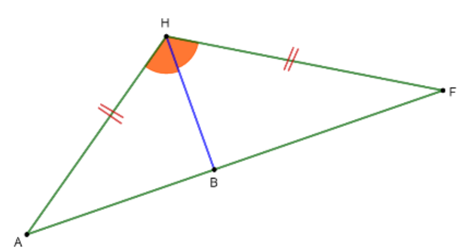
2. Observe la siguiente figura, donde ΔABQ isósceles.
   Determine que $\Delta ACB \cong \Delta ABD$.



3. Datos: $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA$ y $m\sphericalangle DCA = m\sphericalangle DAC$
   Concluya que: $m\sphericalangle DCB = m\sphericalangle DAB$



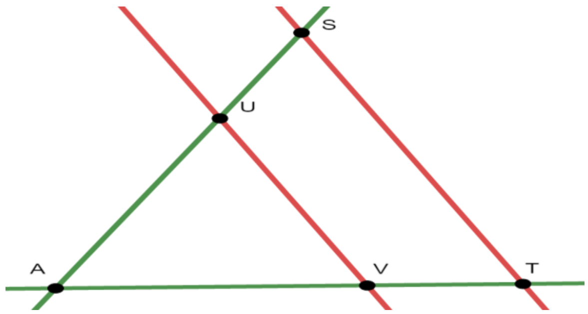
4. Datos: $\overline{AH} \cong \overline{FH}$, $\sphericalangle AHB \cong \sphericalangle FHB$
   Concluya que: $\sphericalangle HAB \cong \sphericalangle HFB$



Anexo F

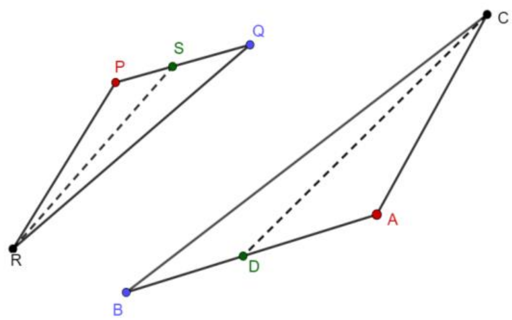
Actividad Nro. 3

1. Analice y demuestre los siguientes enunciados:
   a. Dado las paralelas $\overleftrightarrow{UV} \parallel \overleftrightarrow{ST}$, como se observa en la figura. Determine que $\Delta AUV \sim \Delta AST$.



Además, si $\overline{AU} = 3cm, \overline{US} = 2cm$, $\overline{UV} = 4cm$, determine $\overline{ST}$.

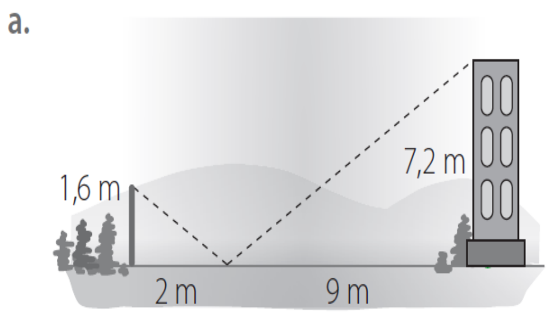
   b. En la siguiente figura

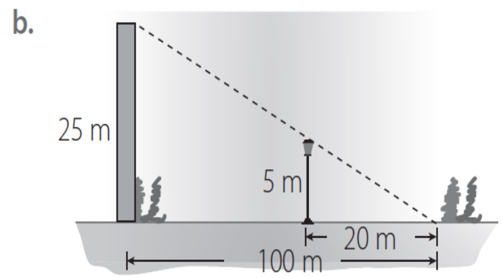


$\Delta ADC \sim \Delta PSR$, $\overline{CD}$ y $\overline{RS}$ son medianas. Determine que $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

2. Analice y demuestre:

   En las siguientes imágenes, observe atentamente y use los datos para determinar si los triángulos rectángulos son semejantes o no.



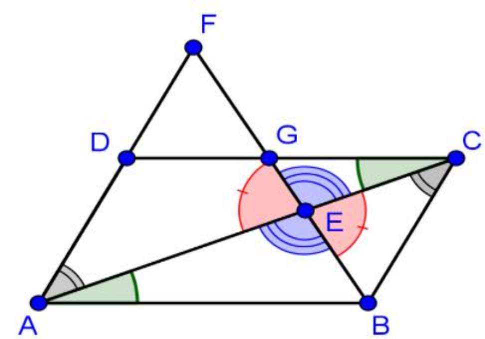


3. Analice y demuestre:

Se da un paralelogramo ABCD, una recta que pasa por B corta a $\overline{AC}$ en E, $\overline{DC}$ en G y a la prolongación de $\overline{AD}$ en F. Como se observa en la imagen siguiente:

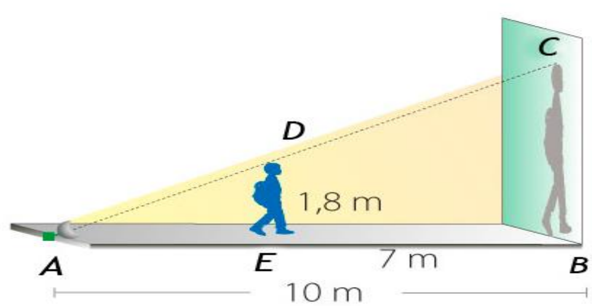
a. Demostrar que: $\Delta FEA \sim \Delta CEB$

b. Demuestre que: $\frac{\overline{EB}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EB}}$



4. Analiza y demuestre la siguiente situación:

Una lámpara se ubica al nivel del piso alumbrando una pantalla que está a $10m$ de ella. Si una persona de 1,8m de estatura se para entre la lámpara y la pantalla a $7m$ de esta, ¿Cuán alta es la sombra que se forma en la pantalla ($m\overline{CB}$)?



Anexo G

Descripción de la intervención en el aula de clase

Semana 1

Presentación por parte del docente encargado de la asignatura ante los estudiantes. En esa misma semana se explica la prueba diagnóstica (ver anexo B) y el desarrollo de la misma, esta prueba tuvo una duración de sesenta (60) minutos.

Semana 2 y 3

Tema 1: Elementos fundamentales o básicos de la geometría euclidiana, entre los cuales se trabajaron: ángulos, tipos de ángulos, rectas perpendiculares, rectas paralelas y rectas transversales y los ángulos que se forman entre estas rectas.

Objetivo del proceso enseñanza-aprendizaje:

- Recordar los conceptos y propiedades de los ángulos, las rectas perpendiculares, las rectas paralelas, las rectas transversales, ángulos que se forman entre estas rectas, los ángulos internos y los ángulos externos de un triángulo.
- Combinar los conceptos de ángulos, rectas perpendiculares, rectas paralelas, rectas transversales, ángulos internos y ángulos externos para construir demostraciones o argumentaciones que permitieran verificar teoremas, proposiciones, entre otros.

Se da inicio a la clase con una discusión o debate con los estudiantes respecto a las respuestas que ellos dieron a cada una de las preguntas de la prueba diagnóstica, con la finalidad de aclarar los problemas (dificultades) que presentaron los estudiantes al realizar esta actividad. En este proceso los estudiantes formularon respuestas, las cuales presentaron en clase, con ello se pudo validar e institucionalizar los conocimientos construidos.

Posteriormente se realiza una introducción del tema, se trabaja la primera tarea que constaba de dos (2) preguntas, esta actividad se realiza durante la clase, tuvo una duración de treinta (30) minutos (ver anexo C).

Semana 4 y 5

Tema 2: Métodos de demostración, directa, indirecta y contraejemplo.

Se inicia la clase con un pequeño resumen de los temas tratados o trabajados en las semanas pasadas, la actividad realizada en clase, es decir, discusión del desarrollo de la primera tarea. Se da apertura de la sesión de clase realizando algunas preguntas referentes al tema de demostración, toda vez que los estudiantes han trabajado estos temas con anterioridad, además de tener la guía de trabajo, las cuales se envían con una semana antes del inicio del desarrollo del tema y se deja la segunda actividad (ver anexo D).

Objetivo del proceso enseñanza-aprendizaje: Con el desarrollo de los temas se busca que los estudiantes:

- Interpreten las teorías que le permitan realizar demostración deductiva en el contexto geométrico.
- Realicen procesos sencillos de demostraciones geométricas.
- Expliquen e identifiquen los métodos de demostraciones e identificar el método de demostración más útil para dar solución a un problema.

Semana 6 y 7

Temas 3: Congruencia de triángulos, criterios y propiedades.

Se inicia la clase con un pequeño resumen sobre la definición y tipos de demostración, nos centramos en la producción de demostración directa. Se discute la segunda tarea realizada con anterioridad por los estudiantes, se trabajaron algunos ejemplos que le permitieron a los estudiantes analizar cómo se están construyendo o produciendo demostraciones en geometría y se deja la tercera actividad (ver anexo E).

Objetivo del proceso enseñanza-aprendizaje: Con el desarrollo de los temas se busca que los estudiantes:

- Elaboren demostraciones directas de la congruencia entres triángulos.
- Expliquen y comprendan los criterios y propiedades de la congruencia de triángulos.
- Expliquen y analicen algunos resultados de congruencia entre triángulos.

Semana 8 y 9

Temas 4: Semejanza de triángulos, criterios y propiedades.

Se discute la actividad de congruencia de triángulos, se relaciona la semejanza con la congruencia de triángulo para introducir el tema de semejanza de triángulo, se presentan algunos ejemplos, se construyen o realizan algunas demostraciones en conjunto con los estudiantes y se deja la última actividad (ver anexo F).

Objetivo del proceso enseñanza-aprendizaje: Con el desarrollo de los temas se busca que los estudiantes:

- Elaboren demostraciones directas de la semejanza entres triángulos.
- Expliquen y comprendan los criterios y propiedades de la semejanza de triángulos.
- Expliquen y analicen algunos resultados de semejanza entres triángulos.

Semana 10

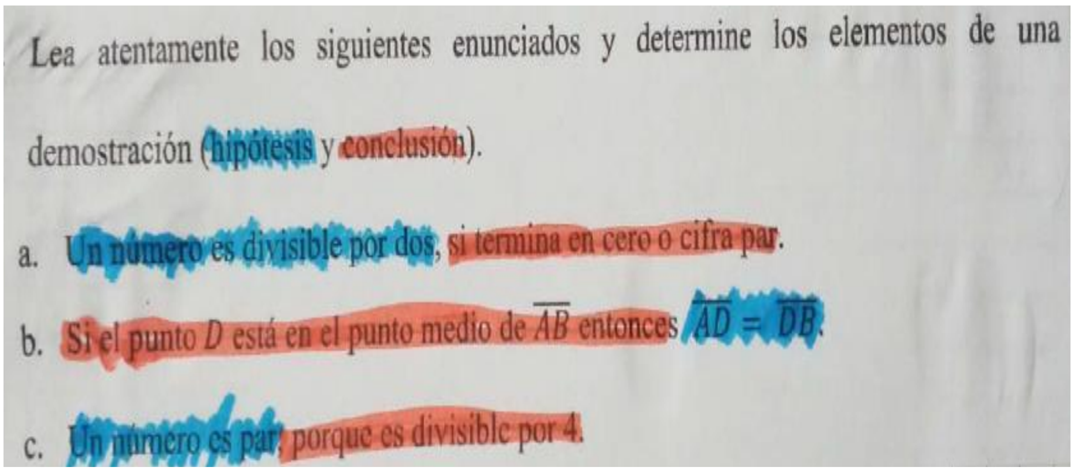
Se discute el desarrollo de la actividad de semejanza de triángulos, se finaliza el trabajo de la inmersión en el aula de clase haciendo algunas observaciones sobre el mejoramiento de la elaboración de las demostraciones directas y se deja la actividad de recuperación final para los estudiantes que no alcanzaron los objetivos propuestos.

En todas las actividades y las clases dirigida se solicita a los estudiantes que identifiquen las hipótesis (lo que se da o se conoce) y la tesis (lo que se debe probar), y que justifique cada afirmación que se hace, pero antes debe verificar que el postula, axioma o teorema que va utilizar se cumpla para la afirmación que se realiza.

Anexo H

Algunos ejemplos de las sub-dificultades en el aprendizaje de la demostración directa en geometría euclidiana

A. Establecimiento del hecho que se debe demostrar *(SD2)* y establecimiento de las condiciones válidas del enunciado *(SD3).* Ver anexo B, pregunta 4.



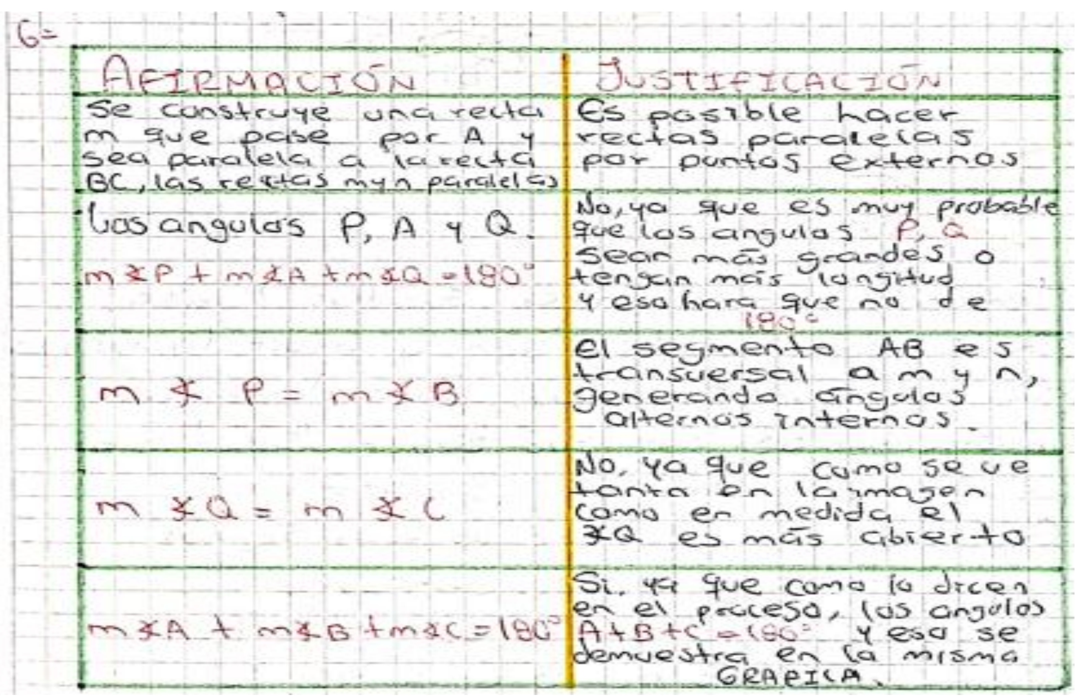
Lea atentamente los siguientes enunciados y determine los elementos de una demostración (hipótesis y conclusión).

a. Un número es divisible por dos, si termina en cero o cifra par.

b. Si el punto D está en el punto medio de $\overline{AB}$ entonces $\overline{AD} = \overline{DB}$.

c. Un número es par, porque es divisible por 4.

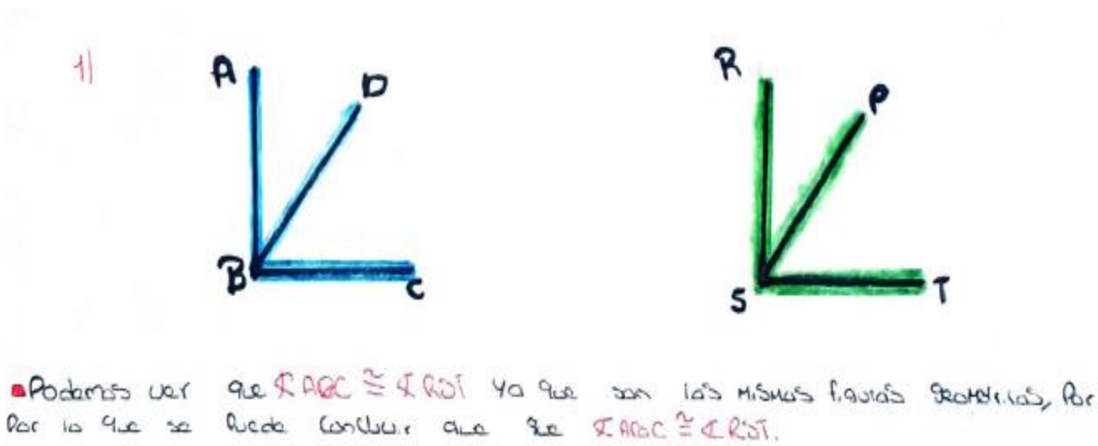
B. Comprensión y manejo del principio de sustitución *(SD14)*. Ver anexo B, pregunta 5.



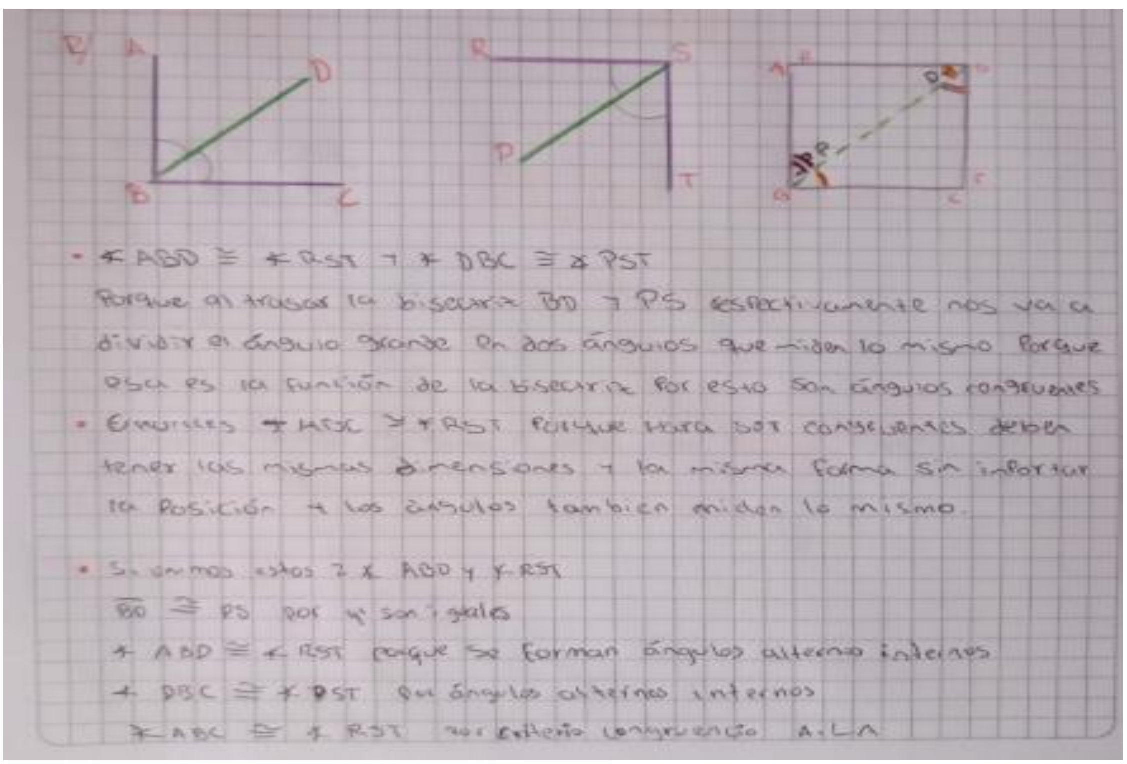
6=

AFIRMACIÓN	JUSTIFICACIÓN
Se construye una recta m que pase por A y sea paralela a la recta BC, las rectas m y n paralelas	Es posible hacer rectas paralelas por puntos externos
Los angulos P, A y Q. $m\angle P + m\angle A + m\angle Q = 180°$	No, ya que es muy probable que los angulos P, Q sean más grandes o tengan más longitud y eso hara que no de 180°
$m\angle P = m\angle B$	El segmento AB es transversal a m y n, generando ángulos alternos internos.
$m\angle Q = m\angle C$	No, ya que como se ve tanto en la imagen como en medida el $\angle Q$ es más abierto
$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$	Si, ya que como lo dicen en el proceso, los angulos A+B+C = 180° y eso se demuestra en la misma GRAFICA.

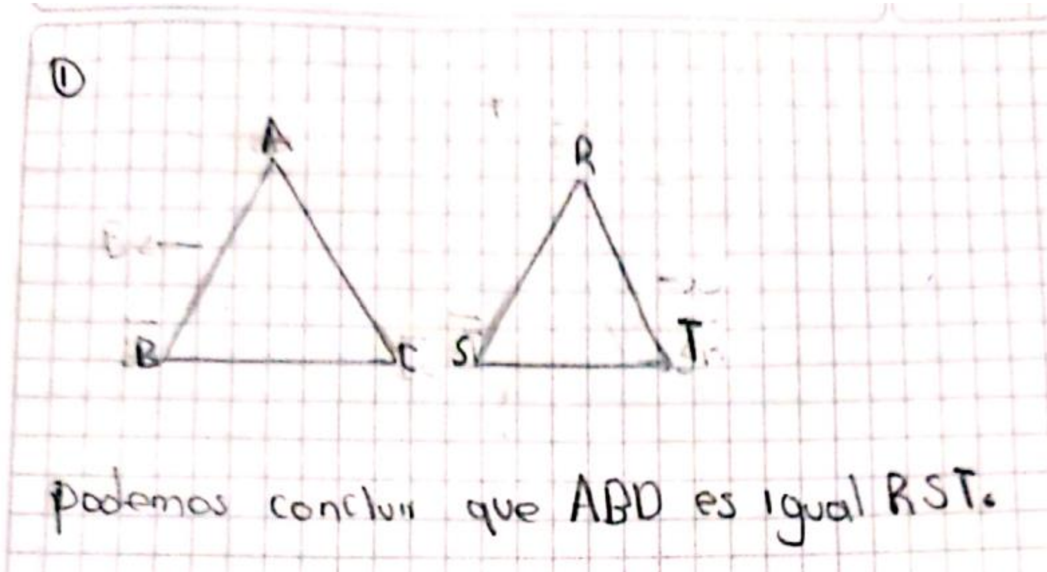
C. Respaldo teórico, explicito y apropiado, de las proposiciones que conforman la justificación *(SD18)*. Ver anexo D, pregunta 1.



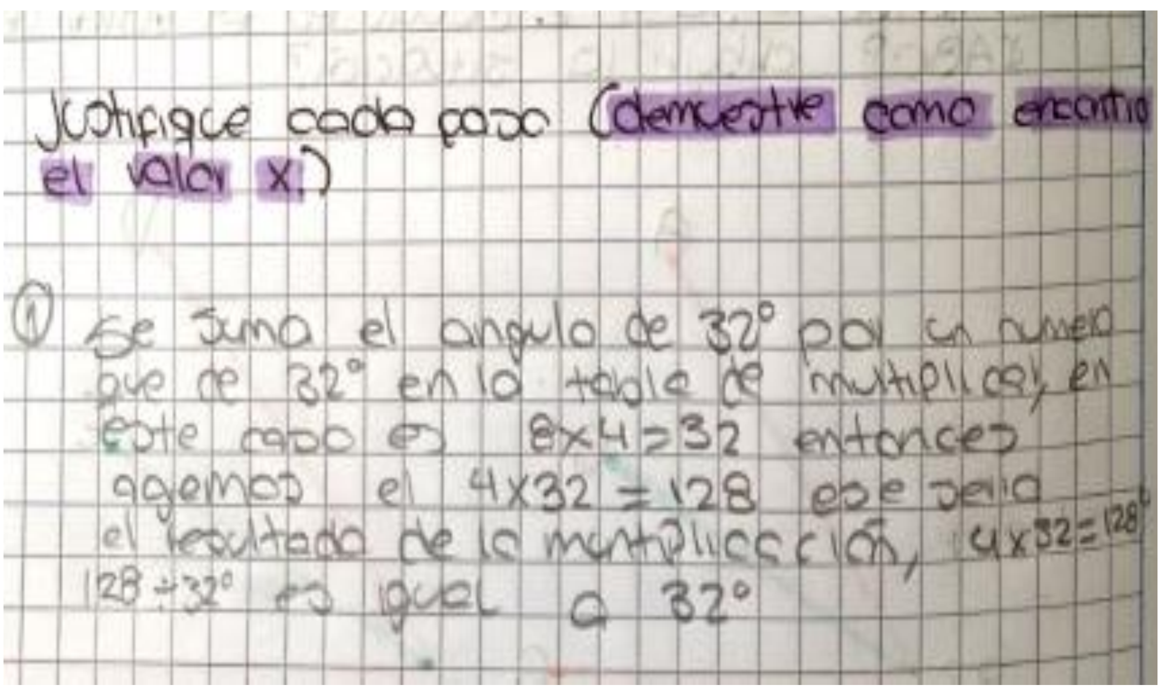
D. Verificación del cumplimiento de las condiciones de las hipótesis del hecho geométrico que se pretende usar *(SD17)*. Ver anexo D, pregunta 1.



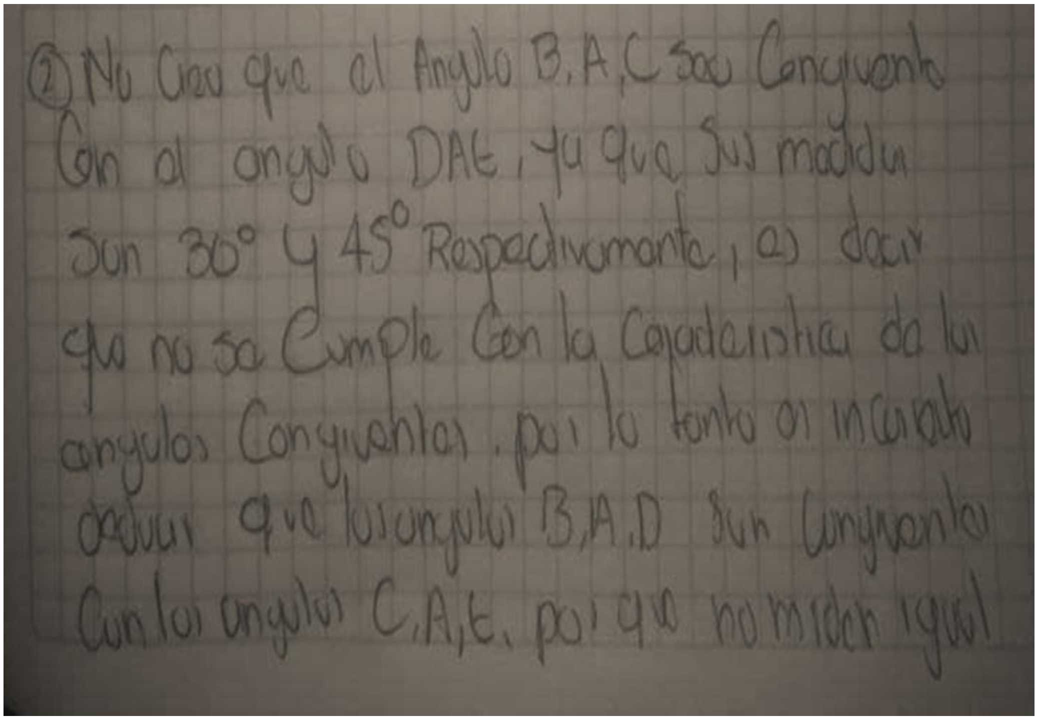
E. Representación de los objetos y enunciados matemáticos *(SD10).* Ver anexo D, pregunta 1.



F. Conocimiento conceptual y procedimental de la formación de ángulo entre rectas paralelas y recta transversal *(SD4).* Ver anexo D, pregunta 3.



G. Particularización y descontextualización de un enunciado expresado en forma general *(SD15)*. Ver anexo C, pregunta 2.



2 No Creo que el Angulo B,A,C sea Congruente Con el angulo DAE, ya que sus medidas son 30° y 45° Respectivamente, es decir que no se Cumple Con la Caracteristica de los angulos Congruentes. por lo tanto es incorrecto deducir que los angulos B,A,D son Congruentes Con los angulos C,A,E. por que no miden igual