UNA APROXIMACIÓN ALEATORIA A LA INTEGRAL DE LEBESGUE

CRISTIAN SNEIDER PÉREZ NARVÁEZ

FABIÁN ERNESTO LEMOS ZAMBRANO

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas de la Educación

Departamento de Matemáticas

Popayán

2010

UNA APROXIMACIÓN ALEATORIA A LA INTEGRAL DE LEBESGUE

CRISTIAN SNEIDER PÉREZ NARVÁEZ
FABIÁN ERNESTO LEMOS ZAMBRANO

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad de seminario presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático otorgado por la Universidad del Cauca.

Director
Dr. LUIS EDUARDO MONTOYA

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán
2010

Nota de aceptación

Director

Dr. Luis Eduardo Montoya

Comité evaluador

Ph.D Francisco Enríquez

Mg. Carlos Julio Restrepo

Fecha de sustentación: Popayán, 05 febrero de 2010

Agradecimientos

Al profesor Luis Eduardo Montoya por su valiosa colaboración.

A los profesores Francisco Enríquez y Carlos Restrepo, miembros del comité de seguimiento, por todos sus aportes.

A la Universidad del Cauca.

A nuestros padres, amigos y a todas aquellas personas que de una u otra forma colaboraron en la realización del presente trabajo.

Índice general

Introducción

Una de las teorías importantes en Matemática por sus aplicaciones en ecuaciones diferenciales, volumen, trabajo, centros de masa, presión hidrostática, flujo sanguíneo, etc., es la teoría de integración de Riemann desarrollada por el alemán Bernhard Riemann (1826-1866). Sin embargo, surgen problemas cuando tratamos de hacer interactuar a la integral de Riemann con otras operaciones, especialmente con operaciones de paso al límite (por ejemplo, el límite de una sucesión de funciones integrables puede no ser integrable). Una generalización de la integral de Riemann es la integral de Lebesgue, matemático francés (1875-1941), la cual ayuda a solucionar algunas dificultades que presenta la integral de Riemann. Este nuevo concepto de integral se comporta mucho mejor en combinación con otras operaciones y resulta muy útil en áreas como matemática aplicada, física-matemática y teoría de funciones.

Algunos autores han dedicado parte de sus trabajos al estudio de sumas aleatorias de Riemann de una función f y su relación con la integral de Lebesgue a través de algunos tipos de convergencia. Es así como en 1982 Caslav V. Stanojevic y John C. Kieffer, en [11], prueban que si $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de particiones de $[0,1]$ tal que la respectiva sucesión $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ de tamaños de dichas particiones tiende a cero, entonces la sucesión $\{S_{\mathcal{P}_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ de sumas aleatorias de Riemann de una función real f, definida en $[0,1]$ y Lebesgue-integrable converge casi seguro a su integral de Lebesgue. Dichas sumas se construyen de manera análoga a las sumas de Riemann, tomando una partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[0,1]$ pero seleccionando aleatoriamente puntos $T_k(x) \overset{not}{=} t_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$, donde T_k es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente sobre I_k, es decir, para cada $k = 1, 2, ..., n$ todos los puntos de I_k tienen la misma posibilidad de ser seleccionados; evaluando f en dichos puntos y obteniendo expresiones de la forma:

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\lambda(I_k),$$

donde λ es la medida de Lebesgue. Años más tarde (1996), Alexander R. Pruss, en [9], considera una sucesión de particiones $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $[0,1]$ tal que $\mathcal{P}_n$ se divide en subconjuntos λ-medibles $\{I_{n1}, I_{n2}, ..., I_{nn}\}$ con $\lambda(I_{nk}) = \frac{1}{n}$, y prueba que si f es Lebesgue medible y $\int_{[0,1]} |f|^2 d\lambda < \infty$, entonces la sucesión de sumas aleatorias de Riemann de f, $\{S_{\mathcal{P}_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguro a $\int_{[0,1]} f d\lambda$. Recientemente, en el año 2008, Jack Grahl, en [6], generalizó el resultado anterior probando que si $f \in \mathcal{L}^p([0,1])$, con $p > 1$ y $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de particiones de $[0,1]$ tal que la sucesión de tamaños $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p-1}$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n|^{p-1} < \infty,$$

entonces la sucesión de sumas aleatorias de Riemann de f, $\{S_{\mathcal{P}_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguro a $\int\limits_{[0,1]} f d\lambda$.

En este trabajo analizaremos y expondremos en detalle este y otros resultados presentados por J. Grahl en [6], con el fin de dar a conocer una manera alternativa de aproximar la integral de Lebesgue de una función real f definida en $[0,1]$ y Lebesgue integrable.

Primero, presentamos algunos conceptos y resultados de teoría de la probabilidad y de teoría de la medida necesarios para el entendimiento y desarrollo de los capítulos posteriores. En el segundo capítulo definimos las sumas aleatorias de Riemann de la función f determindas por la partición $\mathcal{P}$, y demostramos que si $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de particiones de $[0,1]$ tal que la sucesión de tamaños de las particiones tiende a cero cuando n tiende a infinito, entonces la sucesión de sumas aleatorias converge en probabilidad a la integral de Lebesgue de dicha función. En el tercer capítulo mostramos que es posible construir funciones y sucesiones de particiones de $[0,1]$ tales que la correspondiente sucesión de sumas aleatorias de Riemann no converge casi seguro a la integral de Lebesgue de la función construida. Finalmente damos condiciones suficientes para que la convergencia casi segura de una sucesión de sumas aleatorias de Riemann de una función f a la integral de Lebesgue de f se cumpla. En los apéndices A y B mencionamos algunos resultados que son de gran utilidad en la prueba de los teoremas.

Capítulo 1

Algunos conceptos y resultados de teoría de la medida y teoría de la probabilidad

En el desarrollo de nuestro trabajo tanto la teoría de la medida como la teoría de la probabilidad juegan un papel importante, por ello en este capítulo presentaremos algunas definiciones y teoremas de estas áreas. Los teoremas no serán demostrados pero daremos referencias para su respectiva consulta.

1.1. Medida

Nociones como la longitud de un segmento, el área de una región del plano cartesiano, el volumen de un cuerpo limitado por una superficie en el espacio euclidiano tridimensional, la integral de una función no negativa definida sobre un intervalo de números reales o sobre una región en el plano cartesiano nos dan una idea de la noción de medida de un conjunto. En esta primera sección expondremos dicho concepto y en particular estudiaremos la medida de Lebesgue.

Definición 1. *Sea Ω un conjunto diferente de vacío. La colección $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de Ω se llama una* **σ-álgebra** *de conjuntos si satisface las siguientes condiciones:*

A1. $\Omega \in \mathfrak{F}$.

A2. *Si $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$.*

A3. *Si $A \in \mathfrak{F}$ entonces $A^c \in \mathfrak{F}$, donde A^c denota el complemento del conjunto A.*

A la pareja $(\Omega, \mathfrak{F})$ se le llama **espacio medible** *y a los elementos de $\mathfrak{F}$ se les llama* **conjuntos medibles**.
Si se cumple **A1**, **A3**, *y la condición* **A2** *sólo se cumple para una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{F}$, es decir, si se cumple* **A1**, **A3** *y:*

A4. *Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{F}$.*

Entonces decimos que $\mathfrak{F}$ es un **álgebra de conjuntos** *de Ω.*

Proposición 1. *Sea $\mathfrak{C}$ una colección no vacía de subconjuntos de Ω. Existe una única σ-álgebra de conjuntos de Ω notada $\sigma(\mathfrak{C})$ tal que:*

(i) $\mathfrak{C} \subseteq \sigma(\mathfrak{C})$.

(ii) *Si $\mathfrak{D}$ es otra σ-álgebra que contiene a $\mathfrak{C}$, entonces $\sigma(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{D}$.*

$\sigma(\mathfrak{C})$ se denomina σ-álgebra minimal generada por $\mathfrak{C}$ y a $\mathfrak{C}$ se le llama un generador de $\sigma(\mathfrak{C})$.

La demostración de esta proposición puede ser consultada en [3], pág. 5.

Ejemplo 1:(σ-álgebra de Borel)
Sean $\Omega = \mathbb{R}$ y $\mathfrak{F}$ la colección formada por todos los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$. La σ-álgebra generada por $\mathfrak{F}$ se llama **σ-álgebra de Borel** en $\mathbb{R}$ y se denota por $\mathfrak{B}$; a los elementos de $\mathfrak{B}$ se les llama borelianos.

Definición 2. *Sea $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espacio medible. Una* **medida** *sobre $(\Omega, \mathfrak{F})$ es una función $\mu : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que:*

M1. *para todo $A \in \mathfrak{F}$, $\mu(A) \geq 0$.*

M2. $\mu(\phi) = 0$.

M3. $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, *para toda sucesión* $E_1, E_2, \ldots$ *de conjuntos de* $\mathfrak{F}$ *disyuntos dos a dos.* **(**σ**-aditividad)**.

Para cada $A \in \mathfrak{F}$, *el número* $\mu(A)$ *se denomina* **la medida de A** *y la tripla* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ *se llama* **espacio de medida**.
Si se cumplen **M1.**, **M2.** *y* **M3.** *cuando* $\mathfrak{F}$ *es un álgebra y* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{F}$, *decimos que* μ *es una* **premedida**.

Ejemplo 2:(Medida de probabilidad)
Sean $\Omega \neq \phi$ y $\mathfrak{F}$ una σ-álgebra sobre Ω. Una medida P sobre $(\Omega, \mathfrak{F})$ que satisface $P(\Omega) = 1$ es llamada **medida de probabilidad** sobre $(\Omega, \mathfrak{F})$. Al espacio $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ se le llama **espacio de probabilidad**. En este caso, los elementos de $\mathfrak{F}$ reciben el nombre de **eventos**.

Definición 3. *Sean* $\mathfrak{M}$ *una colección de subconjuntos de* Ω *y* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de subconjuntos de* $\mathfrak{M}$, *decimos que:*

- $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión creciente si* $E_n \subseteq E_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$
- $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión decreciente si* $E_{n+1} \subseteq E_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$

Definición 4. *Sean* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ *un espacio de medida y* $\mathfrak{C}$ *una subcolección de elementos de* $\mathfrak{F}$. *Decimos que una función* $\mu : \mathfrak{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *es* **σ-finita** *si para todo* $E \in \mathfrak{C}$, *existe una sucesión* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de conjuntos de* $\mathfrak{C}$ *tal que* $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ *y* $\mu(C_n) < \infty$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *(la sucesión puede escogerse disyunta dos a dos o creciente).*

Teorema 1. *Sea* μ *una medida definida sobre el espacio* $(\Omega, \mathfrak{F})$. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$, *para todo* $A, B \in \mathfrak{F}$.

2. *Si* $A, B \in \mathfrak{F}$ *y* $B \subseteq A$ *entonces* $\mu(B) \leq \mu(A)$. *Además,*

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B).$$

En el caso que $\mu(B)$ *sea finito, se tiene que*

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

3. *Si* $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{F}$ *entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

4. *Si* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión creciente de elementos de* $\mathfrak{F}$, *entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

5. *Si* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión decreciente de elementos de* $\mathfrak{F}$, *entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Para la demostración de este teorema ver [3], pág. 13.

Definición 5. *Sean* $\Omega \neq \phi$, $\mathcal{P}(\Omega)$ *la colección de todos los subconjuntos de* Ω *y* $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *una función.* μ^* *se llama* **medida exterior de** Ω, *si:*

i. $\mu^*(\phi) = 0$.

ii. μ^* *es monótona, es decir si* $E \subseteq F$ *entonces* $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

iii. μ^* *es contablemente subaditiva, es decir para toda sucesión de conjuntos* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathcal{P}(\Omega)$ *se tiene:*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Ejemplo 3:

Para cada entero positivo n sean a_n y b_n números reales tales que $a_n < b_n$ e $I_n = (a_n, b_n)$ el correspondiente intervalo abierto determinado por estos dos números. Además, sea $l(I_n) := b_n - a_n$ la longitud de I_n.

Para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, denotemos por $\mathit{\Gamma}_A$ la colección formada por todas las sucesiones de intervalos abiertos, de longitud finita, que cubren el conjunto A; es decir,

$$\mathit{\Gamma}_A := \left\{ \{I_n\}_{n=1}^{\infty} : l(I_n) < \infty \text{ y } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}.$$

Definimos

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathit{\Gamma}_A \right\}.$$

Mostremos que λ^* es una medida exterior sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(i) Para cada $\epsilon > 0$, consideremos la sucesión de intervalos $\{I_n\}_{n=0}^{\infty} = \{(0, 0 + \frac{\epsilon}{2^n})\}_{n=0}^{\infty}$. Como $\phi \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ y $l(I_n) = \frac{\epsilon}{2^n} < \infty$, entonces $\{I_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Gamma_{\phi}$. Además,

$$\sum_{n=0}^{\infty} l(I_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon,$$

por lo tanto

$$0 \leq \lambda^*(\phi) \leq \epsilon, \quad \text{para todo } \; \epsilon > 0.$$

En consecuencia $\lambda^*(\phi) = 0$.

(ii) Sean A_1, A_2 subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A_1 \subseteq A_2$ y $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de intervalos abiertos tal que $A_2 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, entonces $A_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, por tanto:

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma_{A_2}\right\} \subseteq \left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) : \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma_{A_1}\right\},$$

y en consecuencia,

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma_{A_2}\right\} \geq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) : \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma_{A_1}\right\},$$

es decir $\lambda^*(A_2) \geq \lambda^*(A_1)$.

(iii) Sea $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Por la definición de λ^*, para cada $\epsilon > 0$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una colección de intervalos abiertos de longitud finita $\{A_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $B_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,i}$ y

$$\lambda^*(B_i) > \sum_{n=1}^{\infty} l(A_{n,i}) - \frac{\epsilon}{2^i}, \qquad (*)$$

entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,i}\right) \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} l(A_{n,i}) - \frac{\epsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} l(A_{n,i}) - \epsilon.$$

Usando la desigualdad $(*)$ obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(B_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} l(A_{n,i}) - \epsilon \geq \lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) - \epsilon$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(B_i) \geq \lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right).$$

Definición 6. *Sean* $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$ *una medida exterior y* $E \subseteq \Omega$. *Decimos que* E *es* μ^***-medible** *si para todo* $A \subseteq \Omega$ *se tiene:*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Nota: Como $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$, entonces por la subaditividad de μ^*, se tiene que $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$. Así que para demostrar que un conjunto es μ^*-medible basta ver que:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

El siguiente resultado nos permite obtener una medida a partir de una medida exterior restringiéndola a los conjuntos medibles respecto a dicha medida exterior.

Teorema 2. *Sean* μ^* *una medida exterior en* Ω *y* $\mathfrak{M}$ *la colección de subconjuntos de* Ω *que son* μ^**-medibles. Entonces* $\mathfrak{M}$ *es una* σ*-álgebra y la función* μ^* *restringida a* $\mathfrak{M}$ *define una medida sobre* $\mathfrak{M}$.

La demostración de este teorema puede ser consultada en [3], pág. 24.

Definición 7. *Consideremos nuevamente la medida exterior definida sobre* $\mathbb{R}$ *vista en el ejemplo 2:*

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathit{\Gamma}_A \right\}.$$

Sea $\mathfrak{L} := \{B \subseteq \mathbb{R} : B \text{ es } \lambda^* - \text{medible}\}$. $\mathfrak{L}$ *es llamada* σ**-álgebra de Lebesgue**. *Los elementos de* $\mathfrak{L}$ *se denominan* **Lebesgue medibles** *y la restricción* λ*, de* λ^* *a* $\mathfrak{L}$*, se denomina* **medida de Lebesgue**.

Observaciones

- La medida exterior λ^* de cualquier intervalo en $\mathbb{R}$ coincide con su longitud.
- Como los intervalos de la forma $(a, b]$, (a, b), $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ son Lebesgue medibles y generan la σ-álgebra de Borel. Luego todo conjunto de Borel es Lebesgue medible; es decir, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{L}$.
- Si restringimos la medida de Lebesgue a los conjuntos de Borel, obtenemos el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$.

- En nuestro trabajo consideraremos el espacio de medida $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda)$, donde $\mathfrak{B}([0,1])$ es la σ-álgebra de Borel en $[0,1]$ (la cual se obtiene intersectando todos los conjuntos borelianos con el segmento $[0,1]$) y λ es la medida de Lebesgue restringida a $\mathfrak{B}([0,1])$.

Para finalizar esta sección, presentamos un resultado conocido como teorema de extensión de Carathéodory, el cual nos dice que es posible extender una premedida definida sobre un álgebra a una medida definida sobre la σ-álgebra generada por el álgebra. (Para su demostración consultar [3], pág. 30).

Teorema 3. *Sea $\mathfrak{m}_0$ un álgebra de subconjuntos de Ω y m una premedida sobre $\mathfrak{m}_0$, m σ-finita sobre $\mathfrak{m}_0$. Si existe una suceión $\{A_n\}_{n\in n}$ de elementos de $\mathfrak{m}_0$ tal que*

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad y \quad m(A_n) < \infty \quad para\ todo \quad n \in \mathbb{N},$$

entonces existe una única medida v, extensión de m, sobre $\sigma(\mathfrak{m}_0)$.

1.2. Funciones Medibles

Definición 8. *Sean $(\Omega, \mathfrak{F})$ y $(\Omega', \mathfrak{F}')$ espacios medibles. Una aplicación $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ se dice $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}'$ medible si para cada $A \in \mathfrak{F}'$ se tiene que $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$.*

Definición 9. *Si $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ es un espacio de probabilidad y $(\Omega', \mathfrak{F}')$ es un espacio medible, entonces una función $X : \Omega \longrightarrow \Omega'$ se llama* **elemento aleatorio** *si X es una función $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}'$ medible. Si $\Omega' = \mathbb{R}$ y $\mathfrak{F}' = \mathfrak{B}$, X se llama* **variable aleatoria real** *y la denotamos por* **v.a**.

En la siguiente proposición se presentan algunas afirmaciones las cuales nos ofrecen diferentes alternativas para probar que una función es $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}'$ medible.

Proposición 2. *Sean $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espacio medible y $f : D \subseteq \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una aplicación, donde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $c \in \overline{\mathbb{R}}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es $\mathfrak{F} - \mathfrak{B}$ medible.*

2. *El conjunto $\{x \in \Omega : \ f(x) > c\} \in \mathfrak{F}$.*

3. *El conjunto* $\{x \in \Omega : \; f(x) \geq c\} \in \mathfrak{F}$.

4. *El conjunto* $\{x \in \Omega : \; f(x) < c\} \in \mathfrak{F}$.

5. *El conjunto* $\{x \in \Omega : \; f(x) \leq c\} \in \mathfrak{F}$.
Estas proposiciones implican:

6. *El conjunto* $\{x \in \Omega : \; f(x) = c\} \in \mathfrak{F}$.

La demostración de esta proposición puede ser consultada en [3], pág. 40.

Definición 10. *Una función* $f : D \subseteq \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *se dice* **Lebesgue-medible** *si* f *satisface cualquiera de las condiciones* $(2), (3), (4)$ *o* (5) *de la proposición anterior.*

Ejemplos:

- Sea $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espacio medible, $(\Omega', \mathfrak{F}') = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, c un número real cualquiera pero fijo y $f_c : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la función constante de valor c, entonces f_c es Lebesgue-medible. En efecto: Sea $a \in \mathbb{R}$,

$$f_c^{-1}((-\infty, a]) = \begin{cases} \phi, & \text{si } a < c, \\ 0, & \text{si } a \geq c. \end{cases}$$

  Por tanto, $f_c^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega : \; f_c(\omega) \leq a\} \in \mathfrak{F}$.

- Sea A un elemento fijo de $\mathfrak{F}$. **La función indicadora** de A, denotada por I_A y definida como

$$I_A(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w \in A, \\ 0, & \text{si } w \notin A. \end{cases}$$

  es Lebesgue-medible. En efecto: Sea $a \in \mathbb{R}$,

$$I_A^{-1}((-\infty, a]) = \begin{cases} \phi, & \text{si } a < 0, \\ A^c, & \text{si } 1 < a < 0 \\ \Omega, & \text{si } a \geq 1. \end{cases}$$

  Por tanto, $I_A^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega : \; I(\omega) \leq a\} \in \mathfrak{F}$.

- Sea $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es Lebesgue-medible. En efecto:
  Sean $a \in \mathbb{R}$ y $F = \{x \in E : f(x) \geq a\}$. Probemos que F es cerrado:
  - Si $F = \phi$, entonces $F^{'} \subseteq F$, por tanto F es cerrado, luego F es medible.
  - Si $F \neq \phi$, sea $x_0 \in F^{'}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de F tal que
  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0;$$
  puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$, se tiene que $f(x_n) \geq a$, en consecuencia
  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$
  entonces, usando la continuidad se concluye que $f(x_0) \geq a$, luego $x_0 \in F$. Dado que x_0 es arbitrario, F es cerrado y por tanto F es medible.

En adelante, si no hay lugar a confusión, a las funciones $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}^{'}$ medibles las llamaremos medibles.
El siguiente teorema nos brinda un método para construir medidas usando aplicaciones medibles. La demostración de este resultado puede ser consultada en [3], pág. 48.

Teorema 4. *Sean* $T : (\Omega, \mathfrak{F}) \longrightarrow (\Omega^{'}, \mathfrak{F}^{'})$ *una aplicación medible y* μ *una medida definida sobre* $(\Omega, \mathfrak{F})$*, entonces la aplicación:*

$$\mu_T(B) := \mu(T^{-1}(B)), \quad B \in \mathfrak{F}^{'}.$$

define una medida sobre $\Omega^{'}$ *llamada la* **medida transportada por** T*. En el caso particular cuando* $X : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}^{)}$ *es una variable aleatoria, tenemos que*

$$P_X(B) := P(X \in B) := P(\{w : X(w) \in B\})$$

es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *llamada* **distribución de la v.a X**.

1.3. Funciones Integrables

En esta sección introduciremos el concepto de integral de una manera más general que la que se da en los cursos básicos de cálculo. Para ello, inicialmente definiremos la integral de una función **simple** o **elemental**, luego veremos que toda función con valores no negativos se puede aproximar mediante funciones simples y con ello definiremos la integral de una función no negativa. Finalmente, daremos la definición de integral de una función arbitraria, utilizando el hecho de que ella puede expresarse como la diferencia de dos funciones no negativas.

Definición 11. *Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice simple o elemental si f es $\mathfrak{F}-\mathfrak{B}-$medible y sólo toma un número finito de valores diferentes, por lo que si f es una función elemental con valores $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, entonces se puede expresar en la forma*

$$f(w) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{E_i}(w) \qquad (**)$$

donde los $E_i := \{w : f(w) = a_i\} \in \mathfrak{F}$, son disyuntos dos a dos y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. A la representación anterior se le llama **representación estándar o canónica** *de la función simple f.*

Observaciones:

- La expresión para f como combinación lineal de funciones indicadoras no es única.
- De la anterior definición, una función simple toma valores constantes a_i en los conjuntos E_i.
- Las funciones constantes son funciones simples.
- La suma, la diferencia y el producto de funciones simples son funciones simples.

A continuación daremos la definición de integral para funciones simples no negativas.

Definición 12. *Sea f una función simple no negativa con representación estándar $(**)$. Definimos la integral de f respecto de la medida μ, en el espacio de medida $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ como:*

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

Ejemplo: Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida como sigue:

$$f(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in \mathcal{Q} \bigcap [0,1], \\ 0, & \text{si } \omega \in \mathcal{I} \bigcap [0,1], \end{cases}$$

donde $\mathcal{Q}$ es el conjunto de los números racionales e $\mathcal{I}$ es el conjunto de los números irracionales. Esta función es conocida como **función de Dirichlet**.
Notemos que f es una función simple y $f(\omega) = 0 \cdot I_{\mathcal{I}}(\omega) + 1 \cdot I_{\mathcal{Q}}(\omega)$. Entonces:

$$\int\limits_{[0,1]} f d\lambda = 0 \cdot \mu(\mathcal{I} \cap [0,1]) + 1 \cdot \mu(\mathcal{Q} \cap [0,1]) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

Observaciones:

- Si no hay confusión respecto del espacio de medida, denotaremos la integral simplemente como $\int f d\mu$.
- $0 \leq \int f d\mu \leq +\infty$.
- La integral de f es independiente de la representación de f.

En adelante cuando consideremos funciones numéricas medibles definidas sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ entenderemos que son funciones de $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ en $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ Lebesgue-medibles.

Definición 13. *Sea f una función medible arbitraria. Definimos*

$$f^+ := max\{f, 0\} \quad y \quad f^- := max\{-f, 0\}.$$

f^+ se llama la parte positiva de f y f^- la parte negativa de f. f^+ y f^- son medibles y observemos que $|f| = f^+ + f^-$ y $f = f^+ - f^-$.

Ahora daremos la definición de integral de una función medible no negativa.

Definición 14. *Si f es una función medible no negativa definida en Ω y de valor real, definimos su integral respecto de la medida μ como:*

$$\int\limits_{\Omega} f d\mu := sup \left\{ \int\limits_{\Omega} s d\mu : 0 \leq s \leq f, s - simple \right\}.$$

Para una función no negativa la integral siempre existe aunque podría ser $+\infty$. Se dice que f es μ-integrable si $\int\limits_{\Omega} f d\mu$ es finita.

Por último, si f es una función medible arbitraria, puesto que $f = f^+ - f^-$, entonces definimos

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu,$$

siempre y cuando esta diferencia no sea de la forma $+\infty - \infty$, o sea que una de las dos integrales $\int_\Omega f^+ d\mu$ ó $\int_\Omega f^- d\mu$ debe ser finita. Se dice que f es μ-integrable si $\int_\Omega f d\mu$ es finita, o sea $\int_\Omega f^+ d\mu$ y $\int_\Omega f^- d\mu$ son finitas.

En el caso particular en que μ es la medida de Lebesgue λ sobre $\mathbb{R}$, f se dice Lebesgue integrable si $\int_\mathbb{R} f d\lambda$ es finita, o sea si $\int_\mathbb{R} f^+ d\mu$ y $\int_\mathbb{R} f^- d\mu$ son finitas, lo cual denotamos por $f \in \mathfrak{L}$.
Si $A \in \mathfrak{F}$, definimos

$$\int_A f d\mu := \int_\Omega f I_A d\mu.$$

Definición 15. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en Ω a valor real, entonces:*

- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente si $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente si $f_{n+1} \leq f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 5. Teorema de la convergencia monótona. *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones medibles no negativas definidas en Ω a valor real y*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad x \in \Omega.$$

Entonces, se tiene que

$$\int_\Omega f_n d\mu \longrightarrow \int_\Omega f d\mu.$$

La demostración de este teorema puede ser consultada en [3], pág. 58.

Conjuntos de medida nula

En el desarrollo tanto de la teoría de la medida como de la teoría de la probabilidad es frecuente el uso de la expresión casi siempre (c.s) ó en casi todas partes (en ctp). A continuación precisaremos cuando usar dicha expresión.

Definición 16. *Sean* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ *un espacio de medida y* p *una proposición. Si* p *se verifica para los elementos de un conjunto medible* $E \subseteq \Omega$*, salvo para los elementos de un subconjunto de* E *de medida cero, es decir,* $\mu(\{x \in E : \neg p\}) = 0$*. Entonces se dice que* p *se verifica casi siempre (c.s), o también en casi todas partes (en ctp) de* E*, o bién para casi todo* x *en* E $(\dot{\forall}\, x \in E)$.

1.4. Algunos conceptos de teoría de la probabilidad

En esta sección relacionamos lo visto para funciones medibles y medidas en general, con algunas nociones de la teoría de la probabilidad.
En el desarrollo de nuestro trabajo consideraremos variables aleatorias contínuas. Presentamos entonces la definición de dicho concepto. Es importante aclarar que existen dos tipos más de variables aleatorias: las variables aleatorias discretas y las mixtas.

Definición 17. *Sea* X *una variable aleatoria real, definida sobre el espacio de medida* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$*. Se llama* **función de distribución de probabilidad acumulada** F_X *(fda) de la variable aleatoria* X *a:*

$$F_X(x) := P_X(X \in (-\infty, x]) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Decimos que X *es una v.a continua si* F_X *es continua.*
Si F_X *es continua y existe una función* f_X*, no negativa, tal que*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du, \quad \textit{para cada } x \textit{ en } \mathbb{R},$$

entonces decimos que f_X *es una* **función de densidad de probabilidad** *(fdp) para la v.a* X*. En este caso, en los puntos de diferenciabilidad de* F_X *tenemos que:*

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x).$$

1.4.1. Valor esperado y varianza de una variable aleatoria

Definición 18. *Sean* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variable aleatoria real,* $X \geq 0$ *o P-integrable. El* **valor esperado de X** *es:*

$$E(X) := \int_{\Omega} X dP.$$

Se llama **varianza de X**, *denotada por Var(X) o V(X) a:*

$$V(X) := E[X - E(X)]^2.$$

En caso de que $E(X) = \infty$, decimos que X no posee varianza.
Si $E(X) < \infty$, al número

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

lo llamamos desviación estándar de X.

1.4.2. Propiedades de la esperanza y de la varianza

Sean $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X, X_1, X_2 variables aleatorias:

1. $P(A) = E(I_A)$, para todo $A \in \mathfrak{F}$.
2. Si c es un número real fijo y X_c una v.a definida como $X_c(\omega) = c$ para todo $\omega \in \Omega$, entonces $E(X_c) = c$.
3. Si $X_1 \leq X_2$ entonces $E(X_1) \leq E(X_2)$.
4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $E(aX_1 + bX_2) = aE(X_1) + bE(X_2)$.
5. $|E(X)| \leq E(|X|)$.
6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $V(aX + b) = a^2 V(x)$.

La demostración de estas propiedades pueden ser consultadas en [2], pág. 72.
Debido a que en nuestro proyecto trabajaremos con variables aleatorias con distribución uniforme, daremos a continuación la siguiente definición:

Definición 19. *Sea X una v.a real. X se distribuye uniformemente en el segmento $[a, b]$, lo cual denotamos $X \sim \mathcal{U}\ [a, b]$, si su función de densidad de probabilidad f_X está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & si \quad a \leq x \leq b, \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

La función de distribución de probabilidad acumulada F_X de X está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & si \quad a \leq x \leq b, \\ 1, & si \quad x > b \end{cases}$$

La esperanza y la varianza de X están dadas por:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad , \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Definición 20. (Independencia de eventos)

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad.

- *Dos eventos $A, B \in \mathfrak{F}$ son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*
- *Sea n un entero positivo mayor o igual que dos y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ elementos de $\mathfrak{F}$. Decimos que los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes, si para toda escogencia de subíndices $i_1, i_2, \ldots, i_k$, $2 \leq k \leq n$ del conjunto de índices $\{1,2,\ldots,n\}$, se tiene que:*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_K}).$$

- *Sea $(A_i)_{i \in I}$ una colección de eventos en $\mathfrak{F}$, con I un conjunto de índices arbitrario, contable o no contable. Decimos que los eventos son independientes si para toda escogencia finita de subídices $i_1, i_2, \ldots, i_n$, $(n \geq 2)$ del conjunto de índices I se tiene que $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots A_{i_n}$ son independientes.*

Ahora, introduciremos la definición de límite superior y límite inferior de una sucesión de conjuntos de Ω.

Definición 21. *Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de Ω. Los eventos denominados límite superior y límite inferior de dicha sucesión, están dados por:*

$$\limsup_{n \to \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad y \quad \liminf_{n \to \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \ , \quad respectivamente.$$

A continuación mencionaremos dos resultados (conocidos como lemas de Borel-Cantelli), que serán de gran utilidad en el desarrollo del presente trabajo y cuyas demostraciones pueden ser consultadas en [3], pág. 18. El primer lema nos dice que si tenemos una sucesión de eventos tal que la suma de las probabilidades de dichos eventos es convergente, entonces el evento lìmite superior de esta sucesión tiene probabilidad cero.

Teorema 6 (Primer Lema de Borel-Cantelli). *Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{F}$ y*

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty, \quad \textit{entonces} \quad P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

El segundo lema nos dice que si tenemos una sucesión de eventos independientes tal que la suma de las probabilidades de dichos eventos es infinita, entonces el evento límite superior de esta sucesión tiene probabilidad uno. Este lema también es válido si se cambia espacio de probabilidad por espacio de medida.

Teorema 7 (Segundo Lema de Borel-Cantelli). *Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Si $A_1, A_2, \ldots$ son eventos independientes en $\mathfrak{F}$, y si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty, \quad \textit{entonces} \quad P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

1.5. Espacios $\mathcal{L}^p(\mu)$; Modos De Convergencia

Para el desarrollo de nuestro trabajo precisamos abordar de manera sucinta tres tipos de convergencia de una sucesión de funciones medibles, en particular de variables aleatorias, a saber: convergencia en p-media, en medida y casi segura. En esta sección definiremos dichos conceptos para funciones de valor real definidas sobre el espacio de medida $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$.

Definición 22. *Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice* p**-veces** μ**-integrable** $(1 \leq p < \infty)$ *si es medible y si $|f|^p$ es μ-integrable.*

Definición 23. *Consideremos la relación de equivalencia $'' \approx ''$ sobre el conjunto de funciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ p-veces μ-integrables de la siguiente forma:*

$$f \approx g \quad \textit{en } \Omega \textit{ si y sólo si } \; f = g \textit{ en ctp.}$$

El espacio $\mathcal{L}^p(\mu)$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia determinadas por la relación $'' \approx''$.
Si sobre $\mathcal{L}^p(\mu)$ definimos la suma de clases y el producto por escalar como:

$$[f] + [g] := [f + g], \quad \alpha[f] := [\alpha f], \ \alpha \in \mathbb{R} \ \textit{respectivamente},$$

tenemos que $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Si además consideramos la función $||[f]||_p : \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$||[f]||_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

tenemos que $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un espacio vectorial normado.

Para mayor comodidad de ahora en adelante, identificamos con f a la clase de equivalencia $[f]$.

Definición 24. *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{L}^p(\mu)$ y $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia f en p-**media** y se escribe $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} f$ si:*

$$||f_n - f||_p \to 0, \ n \to \infty, \quad es \ \ decir : \ \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

Definición 25. *Sean $f, f_1, f_2 \ldots$ funciones numéricas medibles, definidas sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$. Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **casi siempre** hacia f respecto a la medida μ en Ω y se escribe $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f$ si:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad c.s.$$

En el caso particular, cuando $\mu = P$ es una medida de probabilidad, X una variable aleatoria y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, decimos que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **casi seguro** *o* **con probabilidad uno** *hacia X en Ω si:*

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1.$$

En otras palabras,
$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} X \iff P(A) = 1, \ donde \ A := \{w \in \Omega : X_n(w) \to X(w)\}.$

Definición 26. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles definidas sobre* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ *con valores en* $\mathbb{R}$. *Decimos que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en medida** *a una función medible* f *en* Ω, *y lo notamos por* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ *si:*

$$\text{para cada } \alpha > 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} \mu(\{w \in \Omega : |f_n(w) - f(w)| \geq \alpha\}) = 0.$$

En el caso que $\mu = P$ *sea una medida de probabilidad,* X *sea una variable aleatoria y* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias y se satisfaga que:*

$$\text{para cada } \alpha > 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \alpha) = 0,$$

entonces se dice que X_n **converge en probabilidad o estocásticamente** *hacia* X, *en* Ω *y lo denotamos por* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$.

A continuación damos algunas propiedades de la convergencia casi siempre de sucesiones de funciones.

Teorema 8. *Sean* f, g *funciones y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones de funciones medibles definidas todas en* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, *tales que* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f$ *y* $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} g$. *Entonces:*

1. $f_n + g_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f + g$.
2. $f_n g_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} fg$.
3. $af_n + bg_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} af + bg;\ \ a, b \in \mathbb{R}$.
4. $\frac{f_n}{g_n} \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} \frac{f}{g}$; *donde* $\mu(\{\omega \in \Omega : g_n(\omega) = 0\}) = \mu(\{\omega \in \Omega : g(\omega) = 0\}) = 0$.
5. $f_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f^2$.
6. $\frac{1}{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} \frac{1}{f}$; *donde* $\mu(\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) = 0\}) = \mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) = 0\}) = 0$.

Las propiedades anteriores se cumplen si en lugar de convergencia casi siempre, se tiene convergencia en medida.

Capítulo 2

Convergencia en probabilidad de una sucesión de sumas aleatorias de Riemann

En este capítulo presentamos el concepto más novedoso del presente trabajo, a saber: la **suma aleatoria de Riemann** de una función medible, de valor real y definida sobre el intervalo cerrado $[0, 1]$. Además, mostraremos en detalle que dada una sucesión de sumas aleatorias de Riemann de una función con las características anotadas previamente, dicha sucesión converge en probabilidad a la integral de Lebesgue de la función dada, siempre que la respectiva sucesión de tamaños de las particiones tienda a cero.

2.1. Sumas e integrales de Riemann

Las sumas de Riemann de una función de valor real, definida y acotada sobre un intervalo cerrado y acotado de números reales, constituyen una manera de abordar el problema de integración de Riemann de ese tipo de funciones. Previo al concepto de suma de Riemann necesitamos el de partición finita de un intervalo cerrado y acotado de números reales.

Definición 27. *Sean a y b números reales cualesquiera con $a < b$. Si n es un entero positivo, el conjunto de $n+1$ puntos del intervalo cerrado $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ con $x_0 = a,\ x_n = b$ y $x_k < x_{k+1}$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$, se llama una* **partición finita** *o simplemente una partición de $[a, b]$. Para $k = 1, \cdots, n$ el subintervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ se denomina el k-***ésimo subintervalo** *de la partición $\mathcal{P}$. Denotaremos por $\mathfrak{P}([a, b])$ el conjunto de todas las particiones finitas del intervalo $[a, b]$.*

Recordemos que $\lambda(A)$ denota la medida de Lebesgue de $A \subseteq \mathbb{R}$ y por lo tanto, para cada $k = 1, \cdots, n$ tenemos que $\lambda(I_k) = x_k - x_{k-1} \stackrel{not}{=} |I_k|$.

Definición 28. *Sean $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$ e $I_1, \cdots, I_n$ los correspondientes subintervalos determinados por la partición $\mathcal{P}$. La* **norma** *o* **tamaño** *de la partición $\mathcal{P}$ denotada por $\|\mathcal{P}\|$, está dada por:*

$$\|\mathcal{P}\| := max\{|I_k| : \ k = 1, \cdots, n\}.$$

Definición 29. *Sean f una función de valor real definida y acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición de dicho intervalo. Una suma de la forma*

$$SR(\mathcal{P}, f) := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)|I_k|,$$

donde t_k es un punto arbitrario de I_k para $k = 1, \cdots, n$, se llama una **suma de Riemann** *de f determinada por $\mathcal{P}$. Decimos que la función f es Riemann integrable en $[a, b]$ si existe un número real L con la propiedad de que, dado $\epsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\epsilon \in \mathfrak{P}([a, b])$ tal que para toda partición $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}([a, b])$, $\mathcal{P}_\epsilon \subseteq \mathcal{P}$ y para toda selección de puntos $t_k \in I_k$ se tiene que*

$$|SR(\mathcal{P}, f) - L| < \epsilon.$$

Notación:

1. $\overline{A}$ denota la adherencia del conjunto A.

2. $\mathcal{R}([a, b])$ denota el conjunto de las funciones Riemann integrables sobre el intervalo $[a, b]$. Si no hay lugar a confusión notaremos dicho conjunto simplemente por $\mathcal{R}$.

3. Al conjunto de las funciones Lebesgue-integrables en $[a, b]$ lo denotaremos por $\mathcal{L}^1([a, b])$. Si no hay lugar a confusión notaremos dicho conjunto simplemente por $\mathcal{L}^1$.

2.2. Sumas aleatorias de Riemann

De acuerdo con lo que mencionamos anteriormente, para obtener una suma de Riemann de una función sobre una partición de un intervalo, es necesario seleccionar arbitrariamente un punto en cada uno de los subintervalos determinados por la partición. Así, el hecho de tomar un punto arbitrario en el subintervalo I_k puede asociarse probabilísticamente a la realización de una variable aleatoria que se distribuye uniformemente sobre I_k; es decir, con esta mirada aleatoria, cada punto de I_k tiene la misma posibilidad de ser escogido. Teniendo en cuenta esa mirada aleatoria, construiremos las sumas aleatorias de Riemann, para funciones de valor real, definidas en el intervalo $[0,1]$ y que sean Lebesgue-medibles.

Definición 30. *Sean $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición de $[0,1]$.*
Para cada $k = 1, 2, \cdots, n$, consideremos la v.a $T_k : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, uniformemente distribuida sobre I_k, con $T_k(x) \in I_k$. Supongamos además que T_i y T_j son mutuamente independientes para todo $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.
Para cada $k = 1, 2, \cdots, n$, definimos la v.a $X_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, como:

$$X_k(x) = |I_k| f(T_k(x))$$

La **suma aleatoria de Riemann de f determinada por** $\mathcal{P}$ *está dada por:*

$$S_{\mathcal{P}}(f) := \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} |I_k| Y_k, \quad donde \;\; Y_k = f \circ T_k, \;\; k = 1, 2, \cdots, n.$$

Observaciones

1. Una realización de una suma aleatoria de Riemann de f determinada por $\mathcal{P}$ es una suma de Riemann de f determinada por $\mathcal{P}$, ya que para cada x en $[0,1]$

$$S_{\mathcal{P}}(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = SR(\mathcal{P}, f),$$

   donde $t_k = T_k(x)$.

2. Para cada $k = 1, 2, \cdots, n$, sea φ_{T_k} la función de densidad de T_k. Si para todo entero positivo r, $\int_{I_k} f^r d\lambda$ es finita, entonces existen el r-ésimo momento de Y_k y de X_k y

están dados por:

$$E[(Y_k)^r] = E[(f \circ T_k)^r] = \int\limits_{[0,1]} f^r \cdot \varphi_{T_k} d\lambda = \frac{1}{|I_k|} \int\limits_{I_k} f^r d\lambda \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} E[X_k^r] &= E[|I_k|^r (Y_k)^r] = |I_k|^r E[(Y_k)^r] \\ &= |I_k|^r \int\limits_{I_k} f^r \frac{1}{|I_k|} d\lambda \\ &= |I_k|^{r-1} \int\limits_{I_k} f^r d\lambda. \end{aligned}$$

En particular,

$$E[Y_k] = \frac{1}{|I_k|} \int\limits_{I_k} f d\lambda \quad \text{y} \quad E[X_k] = \int\limits_{I_k} f d\lambda.$$

3. La esperanza matemática de la suma aleatoria de Riemann de la función f sobre la partición $\mathcal{P}$ está dada por:

$$E[S_{\mathcal{P}}(f)] = E\left[\sum_{k=1}^{n} |I_k|(Y_k)\right] = \sum_{k=1}^{n} |I_k| E[Y_k] = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{I_k} f d\lambda = \int\limits_{[0,1]} f d\lambda,$$

esto quiere decir que los valores de $S_{\mathcal{P}}(f)$ aproximan la integral de Lebesgue de dicha función.

4. Sean $\mathcal{M}$ el espacio vectorial de las funciones medibles en $[0,1]$ y $\mathcal{V}$ el conjunto de las variables aleatorias definidas en algún espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}, P)$. Para cada partición $\mathcal{P}$ de $[0,1]$, $\quad S_{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}$, definida como

$$S_{\mathcal{P}}(f) := \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} |I_k| Y_k,$$

es lineal. En efecto:

Sean f, g funciones Lebesgue medibles definidas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, y $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[0,1]$, entonces para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{P}}(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k=1}^{n} |I_k|[(\alpha f + \beta g) \circ T_k] = \sum_{k=1}^{n} |I_k|([\alpha f \circ T_k] + [\beta g \circ T_k]) \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} |I_k|[f \circ T_k] + \beta \sum_{k=1}^{n} |I_k|[g \circ T_k] \\
&= \alpha S_{\mathcal{P}}(f) + \beta S_{\mathcal{P}}(g).
\end{aligned}$$

Además, si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [0,1]$, entonces:

$$S_{\mathcal{P}}(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| f(T_k(x)) \leq \sum_{k=1}^{n} |I_k| g(T_k(x)) = S_{\mathcal{P}}(g)(x),$$

y por lo tanto, $S_{\mathcal{P}}(f) \leq S_{\mathcal{P}}(g)$; esto quiere decir que $S_{\mathcal{P}}$ es monótona creciente.

5. Sean $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ y $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ una partición de $[0,1]$, donde $x_k = \frac{k}{n}$, con $k = 0, 1, \cdots, n$. A $\mathcal{P}_n$ la llamamos una partición regular del intervalo $[0,1]$ y en este caso $||\mathcal{P}_n|| = \frac{1}{n}$.

   Dado que f es una función medible y como T_j y T_k son independientes para cada $j \neq k$, $j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, entonces $Y_j = f \circ T_j$ y $Y_k = f \circ T_k$ son independientes para todo $j \neq k$; $j, k = 1, 2, \cdots, n$ [ver teorema 10, apéndice A]. Además,

$$E[S_n] = n \cdot E[S_{\mathcal{P}_n}(f)], \quad es\ decir, \quad \frac{E[S_n]}{n} = E[S_{\mathcal{P}_n}(f)] = \int\limits_{[0,1]} f d\lambda.$$

   Ahora, si $V[Y_k] < \infty$ para todo $k = 1, 2, \cdots, n$, en virtud de la ley débil de los grandes números [ver teorema 11, apéndice A] tenemos que:
   Para cada $\epsilon > 0$,

$$\mathcal{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - \frac{E[S_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right) \to 0, \ n \to \infty$$

   Esto es, para cada $\epsilon > 0$,

$$P\left(\left| S_{\mathcal{P}_n}(f) - \int\limits_{[0,1]} f d\lambda \right| \geq \epsilon \right) \to 0, \ n \to \infty$$

   En resumen, si tomamos la sucesión $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de particiones regulares de $[0,1]$, se tiene que la respectiva sucesión de sumas aleatorias de Riemann $\{S_{\mathcal{P}_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ de f converge en probabilidad a $\int\limits_{[0,1]} f \, d\lambda$.

La generalización del anterior resultado la presentamos en la siguiente sección y es el resultado central del presente capítulo.

2.3. Convergencia en probabilidad

Teorema 9. *Sean f una función real cuya integral de Lebesgue sobre $[0,1]$ existe y $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de $[0,1]$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathcal{P}_n|| = 0.$$

Entonces la correspondiente sucesión $\{S_{\mathcal{P}_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ de sumas aleatorias de Riemann de f converge en probabilidad a la integral de Lebesgue de dicha función; es decir:

(i) Si $\int\limits_{[0,1]} f d\lambda$ es finita, entonces para todo $\epsilon > 0$, tenemos que :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S_{\mathcal{P}_n}(f) - \int\limits_{[0,1]} f d\mu\right| > \epsilon\right) = 0.$$

(ii) Si $\int\limits_{[0,1]} f d\lambda = +\infty$, entonces para todo $M > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(S_{\mathcal{P}_n}(f) < M\right) = 0.$$

(iii) Si $\int\limits_{[0,1]} f d\lambda = -\infty$, para todo $M < 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(S_{\mathcal{P}_n}(f) > M\right) = 0.$$

Para demostrar este teorema probaremos primero los siguientes resultados:

2.3.1. Densidad del conjunto $\mathcal{R}$ en el conjunto $\mathcal{L}^1$.

Lema 1. *El conjunto de las funciones Riemann-integrables en $[a,b]$ es denso en el espacio de las funciones Lebesgue-integrables sobre $[a,b]$.*

Demostración. Debemos probar que $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{L}^1$.

1. Veamos que $\mathcal{L}^1 \subseteq \overline{\mathcal{R}}$.
   Supongamos que $f \geq 0$ es una función en $\mathcal{L}^1$. Si $f \in \mathcal{R}$ entonces $f \in \overline{\mathcal{R}}$, ya que $\mathcal{R} \subseteq \overline{\mathcal{R}}$.
   Supongamos que $f \notin \mathcal{R}$ y sean $\epsilon > 0$ y $B_\epsilon(f) := \{g \in \mathcal{L}^1 : d(f,g) < \epsilon\}$, donde d es la

métrica inducida por la norma en $\mathcal{L}^1$, es decir $B_\epsilon(f) = \{g \in \mathcal{L}^1 : \int\limits_{[0,1]} |f-g|d\lambda < \epsilon\}$.
Como f es Lebesgue integrable y

$$\int\limits_{[a,b]} fd\lambda := sup\left\{\int\limits_{[a,b]} sd\lambda : 0 \leq s \leq f, s - simple\right\},$$

entonces existe una función simple φ, con $0 \leq \varphi \leq f$ tal que:

$$\int\limits_{[a,b]} fd\lambda - \frac{\epsilon}{2} < \int\limits_{[a,b]} \varphi d\lambda \leq \int\limits_{[a,b]} fd\lambda, \quad esto\ es, \quad \int\limits_{[a,b]} |f-\varphi|d\lambda < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como φ es simple y no negativa, existen n números reales, digamos
$0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, tales que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i},$$

donde $E_i := \{x \in [a,b] : \varphi(x) = a_i\}$ y χ_{E_i} es la función indicadora de E_i para $i = 1, 2 \cdots, n$.

Notemos que φ es una función acotada sobre $[a,b]$, en particular, $\varphi(x) \leq N$ para todo $x \in [a,b]$, donde $N = max\{a_i : i = 1, 2 \cdots, n\}$.

Ahora bien, dado $\epsilon' > 0$, tenemos que para cada $i = 1, 2 \cdots, n$, existen $I_{i_1}, I_{i_2}, \cdots, I_{i_{k(i)}}$ intervalos abiertos disyuntos, tales que si $G_i = \bigcup\limits_{r=1}^{k(i)} I_{i_r}$, entonces $\lambda(E_i \Delta G_i) < \epsilon'$ [ver teorema 12, apéndice A].

Observemos que χ_{G_i} es una función escalonada [ver definición 31, apéndice A] definida en $G_i \cup [a,b]$. Para ver esto, analizaremos el caso en el que $G_i \subset [a,b]$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $I_{i_j} = (a_{i_j}, b_{i_j})$, con $b_{i_j} < a_{i_{j+1}}$ para $j = 1, \cdots, k(i) - 1$ y $b_{i_{k(i)}} < b$. El conjunto $\mathcal{P} = \{a, a_{i_1}, b_{i_1}, a_{i_2}, b_{i_2}, \cdots, a_{i_{k(i)}}, b_{i_{k(i)}}, b\}$ es una partición de $[a,b]$ tal que χ_{G_i} es constante en cada uno de los subintervalos determinados por dicha partición.

Además, como

$$\chi_{E_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E_i, \\ 0, & \text{si } x \notin E_i, \end{cases} \qquad \chi_{G_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in G_i, \\ 0, & \text{si } x \notin G_i, \end{cases}$$

tenemos que:

$$(\chi_{E_i} - \chi_{G_i})(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E_i \cap G_i^c = E_i - G_i, \\ 0, & \text{si } x \in (E_i \cap G_i) \cup (E_i^c \cap G_i^c), \\ -1, & \text{si } x \in E_i^c \cap G_i = G_i - E_i \end{cases}$$

así,

$$(|\chi_{E_i} - \chi_{G_i}|)(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (E_i - G_i) \cup (G_i - E_i) = E_i \Delta G_i, \\ 0, & \text{si } x \in (E_i \cap G_i) \cup (E_i^c \cap G_i^c) = (E_i \Delta G_i)^c, \end{cases} = \chi_{E_i \Delta G_i}(x).$$

Luego,

$$0 \leq \int\limits_{[a,b]} |\chi_{E_i} - \chi_{G_i}| d\lambda = \int\limits_{[a,b]} \chi_{(E_i \Delta G_i)} d\lambda = \lambda(E_i \Delta G_i) < \epsilon^{'}.$$

Por tanto, si $h = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_{G_i}$, tenemos que:

$$\int\limits_{[a,b]} |\varphi - h| d\lambda = \int\limits_{[a,b]} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{G_i} \right| d\lambda = \int\limits_{[a,b]} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i (\chi_{E_i} - \chi_{G_i}) \right| d\lambda \quad (1)$$

y como para todo $x \in [a, b]$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i (\chi_{E_i} - \chi_{G_i}) \right| (x) \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| |\chi_{E_i} - \chi_{G_i}|(x) \ , \quad (2)$$

entonces de (1) y (2), teniendo en cuenta la desigualdad triangular y la linealidad de la integral de Lebesgue, tenemos

$$\begin{aligned} \int\limits_{[a,b]} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i (\chi_{E_i} - \chi_{G_i}) \right| d\lambda &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \int\limits_{[a,b]} |(\chi_{E_i} - \chi_{G_i})| \, d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{[a,b]} \chi_{(E_i \Delta G_i)} d\lambda \\ &< \sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon^{'} \leq \epsilon^{'} \sum_{i=1}^{n} N \\ &= \epsilon^{'} n N \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon^{'} = \frac{\epsilon}{2nN}$, obtenemos

$$\int\limits_{[a,b]} |\varphi - h| d\lambda < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[a,b]} |f-h|d\lambda &= \int\limits_{[a,b]} |f-\varphi+\varphi-h|d\lambda \\
&\leq \int\limits_{[a,b]} |f-\varphi|d\lambda + \int\limits_{[a,b]} |\varphi-h|d\lambda \\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon
\end{aligned}$$

Así, dado $\epsilon > 0$ hemos encontrado una función h, escalonada en $[a,b]$ y por tanto Riemann-integrable en $[a,b]$ tal que:

$$\int\limits_{[a,b]} |f-h|d\lambda < \epsilon.$$

Es decir, hemos probado que $\mathcal{L}^1 \subset \overline{\mathcal{R}}$ cuando consideramos funciones no negativas.

Ahora, si $f \in \mathcal{L}^1$ es una función arbitraria, podemos expresar a f como la diferencia de dos funciones no negativas f^+ y f^-: $f = f^+ - f^-$. Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, existen funciones $h_1, h_2 \in \mathcal{R}$ tales que:

$$\int\limits_{[a,b]} |f^+-h_1|d\mu < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \int\limits_{[a,b]} |f^--h_2|d\mu < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[a,b]} |f-(h_1-h_2)|d\lambda &= \int\limits_{[a,b]} |(f^+-h_1)-(f^--h_2)|d\lambda \\
&\leq \int\limits_{[a,b]} |f^+-h_1|d\lambda + \int\limits_{[a,b]} |f^--h_2|d\lambda \\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.
\end{aligned}$$

Luego, dado $\epsilon > 0$ existe una función $g = (h_1 - h_2) \in \mathcal{R}([a,b])$ tal que,

$$\int\limits_{[a,b]} |f-g|d\lambda < \epsilon;$$

lo que quiere decir que $g \in B_\epsilon(f)$. Esto es, $B_\epsilon(f) \cap \mathcal{R} \neq \phi$. Por lo tanto, $\mathcal{L}^1 \subseteq \overline{\mathcal{R}}$.

2. $\overline{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{L}^1$.

Si $f \in \overline{\mathcal{R}}$, entonces para todo $\epsilon > 0$ se cumple que $B_\epsilon(f) \cap \mathcal{R} \neq \phi$. Es decir, existe $g \in \mathcal{R}$ tal que

$$\int_{[a,b]} |f - g| d\mu < \epsilon.$$

Como $|f| = |f - g + g| \leq |f - g| + |g|$, entonces

$$\int_{[a,b]} |f| d\lambda \leq \int_{[a,b]} |f - g| d\lambda + \int_{[a,b]} |g| d\lambda < \epsilon + \int_{[a,b]} |g| d\lambda < \infty,$$

puesto que $\int_{[a,b]} |g| d\lambda = \int_a^b |g| dx < \infty$. Luego, $|f| \in \mathcal{L}^1$ y por tanto $f \in \mathcal{L}^1$. Así que $\overline{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{L}^1$. De (1) y (2) se sigue el lema 1.

□

Proposición 3. *Sea f una función Lebesgue integrable en $[0,1]$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada partición $\mathcal{P}$ de $[0,1]$ con $||\mathcal{P}|| < \delta$ se tiene que:*

$$P\left(\left|S_{\mathcal{P}}(f) - \int\limits_{[0,1]} f d\mu\right| > \epsilon\right) < \epsilon.$$

Demostración. Sean $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$ y $\epsilon > 0$ dado.

Si $\epsilon > 1$, el resultado es inmediato.

Sea $0 < \epsilon \leq 1$. Como el espacio de las funciones Riemann integrables en $[0,1]$ es denso en el espacio $\mathcal{L}^1([0,1])$, entonces para la función f, existe una función g, Riemann integrable en $[0,1]$ tal que $g \in B_{\frac{\epsilon^2}{4}}(f)$; es decir, g es tal que

$$\int\limits_{[0,1]} |f - g| d\lambda < \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Si $h = f - g$, entonces como $f, g \in \mathcal{L}^1([0,1])$ tenemos que $h \in \mathcal{L}^1([0,1])$. Por tanto f puede expresarse como: $f = g + h$, donde g es Riemann integrable en $[0,1]$ y $\int_{[0,1]} |h| d\lambda < \frac{\epsilon^2}{4}$.

Como g es Riemann integrable en $[0,1]$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $\mathcal{P}$ de $[0,1]$, con $||\mathcal{P}|| < \delta$, cada suma de Riemann $SR(\mathcal{P}, g)$ de g determinada por $\mathcal{P}$ difiere de la integral de g en menos de $\frac{\epsilon}{2}$; es decir

$$\left|SR(\mathcal{P}, g) - \int_{[0,1]} g d\lambda\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Además, por la observación (1) tenemos que para cada x en $[0,1]$

$$S_{\mathcal{P}}(g)(x) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| g(T_k(x)) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| g(t_k) = SR(\mathcal{P}, g),$$

donde $t_k = T_k(x)$, por tanto

$$\left| S_{\mathcal{P}}(g)(x) - \int\limits_{[0,1]} g d\lambda \right| < \frac{\epsilon}{2}. \qquad (*)$$

Ahora, como $o < \epsilon \leq 1$ entonces

$$\left| \int\limits_{[0,1]} h d\lambda \right| \leq \int\limits_{[0,1]} |h| d\lambda < \frac{\epsilon^2}{4} \leq \frac{\epsilon}{4} \ . \qquad (**)$$

Por otra parte, si $\omega_0 \in \{\omega \in [0,1] : |S_{\mathcal{P}}(h)(\omega) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda| > \frac{\epsilon}{2}\} \overset{not}{=} A$, entonces:

$$\left| S_{\mathcal{P}}(h)(\omega_0) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda \right| > \frac{\epsilon}{2}.$$

En consecuencia,

$$|S_{\mathcal{P}}(h)(\omega_0)| + \left| \int\limits_{[0,1]} h d\lambda \right| \geq \left| S_{\mathcal{P}}(h)(\omega_0) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda \right| > \frac{\epsilon}{2},$$

y por la desigualdad (**) tenemos que:

$$|S_{\mathcal{P}}(h)(\omega_0)| + \frac{\epsilon}{4} > |S_{\mathcal{P}}(h)(\omega_0)| + \left| \int\limits_{[0,1]} h d\lambda \right| > \frac{\epsilon}{2};$$

luego

$$|S_{\mathcal{P}}(h)(\omega_0)| > \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{4}$$

y en consecuencia

$$\omega_0 \in \left\{ \omega \in [0,1] : |S_{\mathcal{P}}(h)(\omega)| > \frac{\epsilon}{4} \right\} \overset{not}{=} B,$$

es decir, $A \subseteq B$ y usando la monotonía de la medida de probabilidad P obtenemos:

$$P\left(\left| S_{\mathcal{P}}(h) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda \right| > \frac{\epsilon}{2} \right) \leq P\left(|S_{\mathcal{P}}(h)| > \frac{\epsilon}{4} \right) \quad (***),$$

Por la desigualdad de Chebyschev [ver lema 2, apéndice A] tenemos que:

$$P\left(|S_{\mathcal{P}}(h)| > \frac{\epsilon}{4}\right) \leq \frac{E|S_{\mathcal{P}}(h)|}{\frac{\epsilon}{4}}.$$

Pero

$$E\,|S_{\mathcal{P}}(h)| = \int_{[0,1]} |h| d\lambda < \frac{\epsilon^2}{4},$$

por tanto

$$P\left(|S_{\mathcal{P}}(h)| > \frac{\epsilon}{4}\right) \leq \frac{E|S_{\mathcal{P}}(h)|}{\frac{\epsilon}{4}} < \frac{\frac{\epsilon^2}{4}}{\frac{\epsilon}{4}} = \epsilon$$

y por (***) obtenemos:

$$P\left(\left| S_{\mathcal{P}}(h) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda \right| > \frac{\epsilon}{2}\right) < \epsilon.$$

De la aditividad de las sumas aleatorias de Riemann y de la integral de Lebesgue, tenemos que

$$\begin{aligned}
C &:= \left\{ \omega \in [0,1] : \left| S_{\mathcal{P}}(f)(\omega) - \int\limits_{[0,1]} f d\lambda \right| > \epsilon \right\} \\
&= \left\{ \omega \in [0,1] : \left| S_{\mathcal{P}}(g+h)(\omega) - \int\limits_{[0,1]} (g+h) d\lambda \right| > \epsilon \right\} \\
&= \left\{ \omega \in [0,1] : \left| \left(S_{\mathcal{P}}(g)(\omega) - \int\limits_{[0,1]} g d\lambda \right) + \left(S_{\mathcal{P}}(h)(\omega) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda \right) \right| > \epsilon \right\}
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$P\left(\left| S_{\mathcal{P}}(f) - \int\limits_{[0,1]} f d\lambda \right| > \epsilon \right) = P\left[\left| \left(S_{\mathcal{P}}(g) - \int\limits_{[0,1]} g d\lambda \right) + \left(S_{\mathcal{P}}(h) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda \right) \right| > \epsilon \right]. \quad (1)$$

Ahora, como el conjunto C está contenido en el conjunto

$$D := \left\{ \omega \in [0,1] : \left| S_{\mathcal{P}}(g)(\omega) - \int_{[0,1]} g d\lambda \right| + \left| S_{\mathcal{P}}(h)(\omega) - \int_{[0,1]} h d\lambda \right| > \epsilon \right\},$$

entonces

$$\begin{aligned}
&P\left[\left| \left(S_{\mathcal{P}}(g) - \int_{[0,1]} g d\lambda \right) + \left(S_{\mathcal{P}}(h) - \int_{[0,1]} h d\lambda \right) \right| > \epsilon \right] \\
&\leq P\left(\left| S_{\mathcal{P}}(g) - \int_{[0,1]} g d\lambda \right| + \left| S_{\mathcal{P}}(h) - \int_{[0,1]} h d\lambda \right| > \epsilon \right). \quad (2)
\end{aligned}$$

Además, si $\omega_0 \in D$ entonces:

$$\left|S_{\mathcal{P}}(g)(\omega_0) - \int\limits_{[0,1]} g d\lambda\right| + \left|S_{\mathcal{P}}(h)(\omega_0) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda\right| > \epsilon;$$

pero sabemos que para toda partición $\mathcal{P}$ de $[0,1]$ tal que $||\mathcal{P}|| < \delta$ tenemos que

$$\left|S_{\mathcal{P}}(g)(\omega_0) - \int\limits_{[0,1]} g d\lambda\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En consecuencia

$$\left|S_{\mathcal{P}}(h)(\omega_0) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda\right| > \frac{\epsilon}{2},$$

es decir

$$\omega_0 \in \left\{\omega \in [0,1] : \left|S_{\mathcal{P}}(h)(\omega) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda\right| > \frac{\epsilon}{2}\right\} = A;$$

por tanto $D \subseteq A$ y por monotonía de la medida de probabilidad P se concluye que para toda partición $\mathcal{P}$ de $[0,1]$ con $||\mathcal{P}|| < \delta$,

$$P\left(\left|S_{\mathcal{P}}(g) - \int\limits_{[0,1]} g d\lambda\right| + \left|S_{\mathcal{P}}(h) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda\right| > \epsilon\right) \leq P\left(\left|S_{\mathcal{P}}(h) - \int\limits_{[0,1]} h d\lambda\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) < \epsilon. \quad (3)$$

Por tanto de (1), (2) y (3), para toda partición $\mathcal{P}$ de $[0,1]$ con $||\mathcal{P}|| < \delta$, se cumple

$$P\left(\left|S_{\mathcal{P}}(f) - \int\limits_{[0,1]} f d\lambda\right| > \epsilon\right) < \epsilon,$$

como se quería mostrar. $\square$

Proposición 4. *Sea f una función Lebesgue medible.*

(i) Si $\int_{[0,1]} f d\lambda = +\infty$, entonces para cada $\epsilon > 0$ y cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $\mathcal{P}$ con $||\mathcal{P}|| < \delta$,

$$P(S_{\mathcal{P}}(f) < M) < \epsilon.$$

(ii) Si $\int_{[0,1]} f d\lambda = -\infty$, entonces para cada $\epsilon > 0$ y cada $M < 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $\mathcal{P}$ con $||\mathcal{P}|| < \delta$,

$$P(S_{\mathcal{P}}(f) > M) < \epsilon.$$

Demostración. (i) Sean f una función arbitraria Lebesgue-medible, $\epsilon > 0$ y $M > 0$. Como $f = f^+ - f^-$ y $\int_{[0,1]} f d\lambda = +\infty$ entonces $\int\limits_{[0,1]} f^+ d\lambda = +\infty$ y $\int\limits_{[0,1]} f^- d\lambda = a$, $a \geq 0$. Veamos que existe una función g Lebesgue-integrable, tal que $g < f$ y $\int\limits_{[0,1]} g d\lambda = M + \epsilon$.
Sabemos que

$$\int\limits_{[0,1]} f^+ d\lambda = \sup A = +\infty, \quad donde \quad A = \left\{ \int\limits_{[0,1]} s d\lambda : 0 \leq s < f^+, s - simple \right\},$$

además $0 \leq \int\limits_{[0,1]} s d\lambda < +\infty$ para cada s en A. (En la nota siguiente a esta prueba damos un ejemplo particular de una función no nula, la cual satisface las condiciones del conjunto A y tiene la propiedad de que su integral de Lebesgue es finita).
Como $\sup A = +\infty$, entonces A es un conjunto no acotado superiormente, por tanto para $M + \epsilon + a$ existe una función $\varphi \in A$ tal que: $\int\limits_{[0,1]} \varphi d\lambda \geq M + \epsilon + a$.

- Si $\int\limits_{[0,1]} \varphi d\lambda = M + \epsilon + a$, entonces definimos la función $g := \varphi - f^-$. Observemos que $\varphi - f^- < f^+ - f^- = f$, es decir $g < f$ y
$$\int\limits_{[0,1]} g d\lambda = \int\limits_{[0,1]} (\varphi - f^-) d\lambda = \int\limits_{[0,1]} \varphi d\lambda - \int\limits_{[0,1]} f^- d\lambda = M + \epsilon + a - a = M + \epsilon.$$
- Si $\int\limits_{[0,1]} \varphi d\lambda > M + \epsilon + a$, entonces $\int\limits_{[0,1]} \varphi d\lambda - (M + \epsilon + a) = k > 0$. Definamos la función $s = \varphi - k$ y notemos que $s < f^+$, ya que $\varphi < f^+$ y $k > 0$; además
$$\int\limits_{[0,1]} s d\lambda = \int\limits_{[0,1]} \varphi d\lambda - \int\limits_{[0,1]} k d\lambda = \int\limits_{[0,1]} \varphi d\lambda - k = M + \epsilon + a.$$

Sea $g := s - f^-$. Tenemos que $g < f^+ - f^- = f$, es decir $g < f$ y

$$\int_{[0,1]} g d\lambda = \int_{[0,1]} s d\lambda - \int_{[0,1]} f^- d\lambda = M + \epsilon + a - a = M + \epsilon.$$

Como g es Lebesgue integrable, por la proposición anterior tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $\mathcal{P}$, con $||\mathcal{P}|| < \delta$ se cumple que

$$P\left(|S_{\mathcal{P}}(g) - (M + \epsilon)| > \epsilon\right) < \epsilon. \qquad (1)$$

Además, si $\omega \in V = \{x \in [0,1] : S_{\mathcal{P}}(g)(x) < M\}$ entonces $S_{\mathcal{P}}(g)(\omega) < M$. Por tanto $S_{\mathcal{P}}(g)(\omega) - M - \epsilon < -\epsilon$, luego $-[S_{\mathcal{P}}(g)(\omega) - (M + \epsilon)] > \epsilon$ y así $|S_{\mathcal{P}}(g)(\omega) - (M+\epsilon)| > \epsilon$. Es decir, $\omega \in T = \{x \in [0,1] : |S_{\mathcal{P}}(g)(x) - (M + \epsilon)| > \epsilon\}$. Entonces $V \subseteq T$, de lo cual deducimos que

$$P(S_{\mathcal{P}}(g) < M) \leq P(|S_{\mathcal{P}}(g) - (M + \epsilon)| > \epsilon). \qquad (2)$$

Además como $g < f$, por la monotonía de las sumas aleatorias de Riemann tenemos que $S_{\mathcal{P}}(g) \leq S_{\mathcal{P}}(f)$ y en consecuencia

$$\{x \in [0,1] : S_{\mathcal{P}}(f)(x) < M\} \subseteq \{x \in [0,1] : S_{\mathcal{P}}(g)(x) < M\},$$

lo cual implica que:

$$P(S_{\mathcal{P}}(f) < M) \leq P(S_{\mathcal{P}}(g) < M). \qquad (3)$$

Por lo tanto de $(1), (2)$ y (3), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $\mathcal{P}$ de $[0,1]$ con $||\mathcal{P}|| < \delta$, tenemos que

$$P(S_{\mathcal{P}}(f) < M) < \epsilon.$$

(ii) Si $\int_{[0,1]} f d\lambda = -\infty$, entonces $\int_{[0,1]} -f d\lambda = -\int_{[0,1]} f d\lambda = +\infty$. Luego, aplicando el resultado de la primera parte a la función $-f$, tenemos que para cada $\epsilon > 0$ y cada $M^* > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $\mathcal{P}$ con $||\mathcal{P}|| < \delta$, se cumple que:

$$P(S_{\mathcal{P}}(-f) < M^*) < \epsilon,$$

y por la linealidad de la suma aleatoria de Riemann, tenemos que:

$$P[S_{\mathcal{P}}(f) > -M^*] < \epsilon.$$

Tomando $M = -M^* < 0$, obtenemos el resultado.

$\square$

Nota:

1. Teniendo en cuenta que $\int_{[0,1]} f^+ d\lambda = +\infty$, construyamos de manera explícita una función simple $0 < s < f^+$ cuya integral de Lebesgue es finita.

   Sea $M > 0$. Definamos los conjuntos:

   $$B = \{x \in [0,1] : f^+(x) < M\} \;\; y \;\; B^c = \{x \in [0,1] : f^+(x) \geq M\}.$$

   Notemos que $\lambda(B^c) \neq 0$, puesto que si $\lambda(B^c) = 0$, entonces la función h definida como:

   $$h(x) = \begin{cases} f^+(x), & \text{si x} \in B, \\ M, & \text{si x} \in B^c, \end{cases}$$

   cumple que $h \approx f^+$ en $[0,1]$ y por tanto $\int_{[0,1]} h d\lambda = \int_{[0,1]} f d\lambda$. Además, $h(x) \leq M$ para todo $x \in [0,1]$, y por ello

   $$\int_{[0,1]} f^+ d\lambda = \int_{[0,1]} h d\lambda \leq M < +\infty,$$

   lo que contradice el hecho de que $\int_{[0,1]} f^+ d\lambda = +\infty$.

   Definamos la función:

   $$s(x) = \begin{cases} M, & \text{si x} \in B^c, \\ 0, & \text{si x} \in B. \end{cases}$$

   Observemos que s es una función simple tal que $s(x) < f^+(x)$ para todo $x \in [0,1]$ y

   $$\int_{[0,1]} s d\lambda = \int_{B} s d\lambda + \int_{B^c} s d\lambda = 0 + M\lambda(B^c) = M\lambda(B^c) < \infty,$$

   como la queríamos construir.

2. El teorema 9 es consecuencia inmediata de las proposiciones 3 y 4. En efecto:

   a) De la proposición 3 sabemos que:

   Si f es Lebesgue integrable, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $||\mathcal{P}|| < \delta$, entonces

   $$P\left(\left|S_{\mathcal{P}}(f) - \int_{[0,1]} f d\lambda\right| > \epsilon\right) < \epsilon.$$

Ahora, por hipótesis del teorema 9 sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathcal{P}_n|| = 0,$$

entonces dado $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$||\mathcal{P}_n|| < \delta,$$

y así, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $n \geq N$, entonces $||\mathcal{P}_n|| < \delta$ y

$$P\left(\left|S_{\mathcal{P}_n}(f) - \int\limits_{[0,1]} f d\lambda\right| > \epsilon\right) < \epsilon,$$

lo cual es equivalente a afirmar que para cada $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S_{\mathcal{P}_n}(f) - \int\limits_{[0,1]} f d\lambda\right| > \epsilon\right) = 0.$$

b) La proposición 4 nos dice que:
Si f es Lebesgue-medible, con $\int\limits_{[0,1]} f d\lambda = +\infty$, entonces para cada $\epsilon > 0$ y cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $||\mathcal{P}|| < \delta$, entonces

$$P\left(S_{\mathcal{P}}(f) < M\right) < \epsilon.$$

Sea $M > 0$. Por hipótesis del teorema 9 sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathcal{P}_n|| = 0,$$

de manera análoga a lo hecho en el anterior ítem, tenemos que
Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $n \geq N$, entonces $||\mathcal{P}_n|| < \delta$ y

$$P\left(S_{\mathcal{P}_n}(f) < M\right) < \epsilon,$$

es decir, para cada $\epsilon > 0$ y cada $M > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(S_{\mathcal{P}_n}(f) < M\right) = 0.$$

Cuando $\int\limits_{[0,1]} f d\lambda = -\infty$, razonamos de manera análoga.
Así, el teorema 9 queda demostrado.

Capítulo 3

Convergencia casi segura de una sucesión de sumas aleatorias de Riemann

Como vimos en el capítulo anterior, dada una función f Lebesgue-integrable, definida en $[0,1]$ y de valor real y dada una sucesión de particiones de $[0,1]$, cuya correspondiente sucesión de tamaños tiende a cero, tenemos que la sucesión de sumas aleatorias de Riemann de f converge en probabilidad a la integral de Lebesgue de dicha función.
En este capítulo mostraremos inicialmente que dados $2 \leq p < \infty$ y $0 < \epsilon \leq p-1$ es posible construir funciones en $\mathcal{L}^{p-\epsilon}$ y sucesiones de particiones de $[0,1]$, cuyas sucesiones de tamaños están en l_{p-1}, es decir, $\{||\mathcal{P}_n^*||\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p-1}$ y tales que la correspondiente sucesión de sumas aleatorias de Riemann no converge casi seguro a la integral de Lebesgue de la función construida. Finalmente presentaremos el resultado central de este trabajo: el establecimiento de condiciones suficientes para que una sucesión de sumas aleatorias de Riemann de una función converja casi seguro a la integral de Lebesgue de dicha función.

3.1. Ejemplo de una sucesión de sumas aleatorias de Riemann de una función f que no converge casi seguro a $\int_{[0,1]} f d\lambda$.

Teorema 10. *Para cada* $2 \leq p < \infty$ *y* $0 < \epsilon \leq p-1$*, existe una función* $f \in \mathcal{L}^{p-\epsilon}$ *y una sucesión* $\{\mathcal{P}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ *de particiones de* $[0,1]$*, con* $\{||\mathcal{P}_n^*||\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p-1}$ *tal que:*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}_n^*}(f) = \int_{[0,1]} f d\lambda\right) = 0.$$

Demostración. Sean $2 \leq p < \infty$ y $0 < \epsilon \leq p-1$. Existe un entero positivo $m \geq 3$ tal que $m > p-1 \geq \epsilon$. En particular, podemos tomar $m = [p-1]+2$, donde $[x]$ denota la parte entera del número x.
Notemos que $\dfrac{p-1}{\epsilon} \geq 1$ y $\dfrac{m}{\epsilon} > 1$.

(i) **Construcción de f.**
Definimos una sucesión $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales de la siguiente manera:
$d_n := c_1 n^{-m/\epsilon}$, donde c_1 es una constante positiva y se escoge de tal manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n < 1;$$

lo cual es posible ya que como $\dfrac{m}{\epsilon} > 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-m/\epsilon}$ converge y por lo tanto podemos escoger, por ejemplo,

$$c_1 = \frac{1}{\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-m/\epsilon}\right] + 1}.$$

Sea $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de subintervalos de $[0,1]$, disyuntos, tales que $|J_k| = d_k$, $k = 1, 2, \cdots$.
Para cada $k = 1, 2, \cdots$ consideremos el intervalo D_k, contenido en J_k, tal que $|D_k| = e_k d_k$, donde

$$e_k := c_2 k^{\beta}, \quad 0 < c_2 < 1 \quad \text{y} \quad 1 - \frac{m(p-1)}{\epsilon} < \beta < (m-1) - \frac{m(p-1)}{\epsilon}.$$

Sea f la función definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{d_k}, & \text{si } x\in D_k, \quad k=1,2,\cdots\\ 0, & \text{si } x\in (J_k-D_k), \ \ k=1,2,\cdots\\ 0, & \text{si } x\in \left([0,1]-\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}J_k\right).\end{cases}$$

Notemos que $m\leq \dfrac{m(p-1)}{\epsilon}$, de donde $m-1\leq \dfrac{m(p-1)}{\epsilon}-1$; así $(m-1)-\dfrac{m(p-1)}{\epsilon}\leq -1$ y por tanto $\beta<-1$. Por esta razón $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_2n^{\beta}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e_n$ converge.
Escogemos $0<c_2<1$ de tal manera que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_2n^{\beta}<\frac{1}{2}$. En particular, $c_2<\dfrac{1}{\left[2\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{\beta}\right]+1}$ cumple dicha condición.

(ii) **Construcción de la sucesión de particiones $\{\mathcal{P}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$.**
Consideremos inicialmente una sucesión $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de particiones de $[0,1]$, tal que para cada $k\in\mathbb{N}$, J_k es uno de los subintervalos generados por $\mathcal{P}_k$ y $||\mathcal{P}_k||=|J_k|=d_k$ y supongamos que $\{S_{\mathcal{P}_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de sumas aleatorias de Riemann independientes. A partir de $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$ construimos la sucesión $\{\mathcal{P}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ de acuerdo con la siguiente correspondencia :

$$\begin{array}{lllll}
\mathcal{P}_1^*\longrightarrow\mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_{M_1+1}^*\longrightarrow\mathcal{P}_2 & \mathcal{P}_{M_1+M_2+1}^*\longrightarrow\mathcal{P}_3 & \cdots & \mathcal{P}_{M_1+M_2+\cdots+M_{k-1}+1}^*\longrightarrow\mathcal{P}_k\\
\mathcal{P}_2^*\longrightarrow\mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_{M_1+2}^*\longrightarrow\mathcal{P}_2 & \mathcal{P}_{M_1+M_2+2}^*\longrightarrow\mathcal{P}_3 & \cdots & \mathcal{P}_{M_1+M_2+\cdots+M_{k-1}+2}^*\longrightarrow\mathcal{P}_k\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\mathcal{P}_{M_1}^*\longrightarrow\mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_{M_1+M_2}^*\longrightarrow\mathcal{P}_2 & \mathcal{P}_{M_1+M_2+M_3}^*\longrightarrow\mathcal{P}_3 & \cdots & \mathcal{P}_{M_1+M_2+\cdots+M_{k-1}+M_k}^*\longrightarrow\mathcal{P}_k,
\end{array}$$

donde $M_k:=\left[\frac{1}{e_k}\right]$ para cada $k\in\mathbb{N}$.

Notemos que:

$\mathcal{P}_n^* = \mathcal{P}_1$ si $1 \leq n \leq M_1$,

$\mathcal{P}_n^* = \mathcal{P}_2$ si $M_1 + 1 \leq n \leq M_1 + M_2$,

$\mathcal{P}_n^* = \mathcal{P}_3$ si $M_1 + M_2 + 1 \leq n \leq M_1 + M_2 + M_3$,

$\vdots$

$\mathcal{P}_n^* = \mathcal{P}_k$ si $\left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} M_i\right) + 1 \leq n \leq \sum\limits_{i=1}^{k} M_i, \quad k = 2, 3, \cdots$

En síntesis, definimos

$$\mathcal{P}_n^* := \begin{cases} \mathcal{P}_1 & \text{si} \quad 1 \leq n \leq M_1 \\ \mathcal{P}_k & \text{si} \quad \sum\limits_{i=1}^{k-1} M_i < n \leq \sum\limits_{i=1}^{k} M_i, \quad k = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, la partición $\mathcal{P}_k$ se repite M_k veces en la sucesión $\{\mathcal{P}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, por tanto $S_{\mathcal{P}_k}(f)$ se repite M_k veces en la sucesión $\left\{S_{\mathcal{P}_n^*}(f)\right\}_{n=1}^{\infty}$, de aquí que

$$\left\{ S_{\mathcal{P}^*_{\sum\limits_{i=1}^{k-1} M_i+1}}(f),\ S_{\mathcal{P}^*_{\sum\limits_{i=1}^{k-1} M_i+2}}(f), \cdots, S_{\mathcal{P}^*_{\sum\limits_{i=1}^{k} M_i}}(f) \right\}$$

es una sucesión finita de v.a las cuales tienen distribución de probabilidad igual a la de $S_{\mathcal{P}_k}(f)$ y suponiendo que esta es una sucesión de variables aleatorias independientes, tenemos que dicha sucesión es una muestra aleatoria de tamaño M_k de una población con la misma distribución de probabilidad de $S_{\mathcal{P}_k}(f)$, $k = 1, 2, \cdots$.

Bajo esta consideración y por el hecho de que $\{S_{\mathcal{P}_k}(f)\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de v.a independientes, tenemos que $\left\{S_{\mathcal{P}_n^*}(f)\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de v.a independientes.

Veamos que $\{\mathcal{P}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de particiones requerida.

(iii) **Cumplimiento de las hipótesis.**

(a) Para mostrar que $\{||\mathcal{P}_n^*||\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p-1}$, probaremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||\mathcal{P}_n^*||^{p-1} < \infty.$$

En efecto, por la construcción de $\{\mathcal{P}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}||\mathcal{P}_n^*||^{p-1} = \sum_{n=1}^{M_1}||\mathcal{P}_n^*||^{p-1} + \sum_{n=M_1+1}^{M_1+M_2}||\mathcal{P}_n^*||^{p-1} + \cdots + \sum_{\sum_{i=1}^{k-1}M_i+1}^{\sum_{i=1}^{k}M_i}||\mathcal{P}_n^*||^{p-1} + \cdots$$

$$= M_1||\mathcal{P}_1||^{p-1} + M_2||\mathcal{P}_2||^{p-1} + \cdots + M_k||\mathcal{P}_k||^{p-1} + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} M_k||\mathcal{P}_k||^{p-1} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k d_k^{p-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{e_k}\right] d_k^{p-1}$$

y como $\left[\frac{1}{e_k}\right] \leq \frac{1}{e_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}||\mathcal{P}_n^*||^{p-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k^{p-1}}{e_k};$$

por tanto es suficiente mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k^{p-1}}{e_k} < \infty. \qquad (1)$$

Ahora,

$$\frac{d_k^{p-1}}{e_k} = \frac{c_1^{p-1}k^{-m(p-1)/\epsilon}}{c_2k^{\beta}} = \frac{c_1^{p-1}}{c_2}k^{-\beta-(m(p-1)/\epsilon)} = \frac{c_1^{p-1}}{c_2}k^{\alpha},$$

donde $\alpha = -\beta - \frac{m(p-1)}{\epsilon}$. Pero como $\beta > 1 - \frac{m(p-1)}{\epsilon}$ entonces $\alpha < -1$ lo cual implica que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k^{p-1}}{e_k}$ converge y en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty}||\mathcal{P}_n^*||^{p-1}$ converge.

(b) Debido a que

$$\int_{[0,1]} f^{p-\epsilon}d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} d_ke_k\frac{1}{d_k^{p-\epsilon}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{d_k^{p-1-\epsilon}},$$

para probar que $f \in \mathcal{L}^{p-\epsilon}$ basta mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{d_k^{p-1-\epsilon}} < \infty. \qquad (2)$$

Como

$$\frac{e_k}{d_k^{p-1-\epsilon}} = \frac{c_2\ k^{\beta}}{c_1^{p-1-\epsilon}\quad k^{m(p-1-\epsilon)/\epsilon}} = \frac{c_2}{c_1^{p-1-\epsilon}}\quad\frac{k^{\beta}}{k^{-m(p-1)/\epsilon}\quad k^{m}} = \frac{c_2}{c_1^{p-1-\epsilon}}\quad k^{-\alpha-m},$$

y $\beta < (m-1) - \frac{m(p-1)}{\epsilon}$ entonces $\alpha + m > 1$ y por tanto se satisface (2).

(iv) $\left\{S_{\mathcal{P}_n^*}(f)\right\}_{n=1}^{\infty}$ **no converge casi seguro a** $\int\limits_{[0,1]} fd\lambda$**.**

Como $\int\limits_{[0,1]} fd\lambda = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e_k$ entonces

$$\int\limits_{[0,1]} fd\lambda < \frac{1}{2}, \qquad (3)$$

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $P\left[S_{\mathcal{P}_k}(f) > 1\right] \geq e_k$ puesto que si el punto $t_k \in J_k$ es escogido en D_k, entonces $f(t_k) = \dfrac{1}{d_k}$ y por tanto el término de la suma de Riemann correspondiente a ese intervalo es 1 y cualquier otro término de dicha suma es no negativo. Además, la probabilidad de escoger t_k en D_k es $\dfrac{|D_k|}{|J_k|} = \dfrac{|e_k d_k|}{|d_k|} = e_k$ Como la partición $\mathcal{P}_k$ se repite M_k veces en nuestra sucesión de particiones $\{\mathcal{P}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[S_{\mathcal{P}_n^*}(f) > 1\right] = \sum_{k=1}^{\infty} M_k P\left[S_{\mathcal{P}_k}(f) > 1\right] \geq \sum_{k=1}^{\infty} M_k e_k.$$

Ahora, para $k = 1, 2, \cdots$ tenemos que

$$e_k M_k = e_k[1/e_k] \leq e_k \frac{1}{e_k} = 1,$$

y

$$e_k[1/e_k] \geq e_k\left(\frac{1}{e_k} - 1\right) = 1 - e_k;$$

es decir, $1 - e_k \leq e_k M_k \leq 1$. Además $\lim\limits_{k\to\infty}(1 - e_k) = 1$, puesto que $\lim\limits_{k\to\infty} e_k = 0$. Entonces $\lim\limits_{k\to\infty} e_k M_k = 1$; luego $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k e_k = \infty$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[S_{\mathcal{P}_n^*}(f) > 1\right] = \infty.$$

Además, como $\left\{\left[S_{\mathcal{P}_n^*}(f) > 1\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de eventos independientes, entonces por el segundo lema de Borel-Cantelli [ver teorema 7, página 17] tenemos que

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}[S_{\mathcal{P}_n^*}(f) > 1]\right) = 1, \quad \text{es decir} \quad P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(S_{\mathcal{P}_k^*}(f) > 1)\right) = 1.$$

Consideremos el conjunto

$$A := \left\{x \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}_n^*}(f)(x) \neq \int\limits_{[0,1]} fd\lambda\right\}.$$

Nuestro objetivo es probar que $P(A)=1$ y para ello mostraremos que

$$\limsup_{n\to\infty}\left[S_{\mathcal{P}_n^*}(f)>1\right]\overset{not}{=}B\subseteq A.$$

En efecto:

Sea $x_0\in[0,1]$ tal que $x_0\notin A$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty}S_{\mathcal{P}_n^*}(f)(x_0)=\int\limits_{[0,1]}f d\lambda.$$

Por tanto, para cada $\epsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$, tal que para todo entero positivo $k\geq n_0$, tenemos que

$$\left|S_{\mathcal{P}_k^*}(f)(x_0)-\int\limits_{[0,1]}f d\lambda\right|<\epsilon,$$

en particular, para $\epsilon=\dfrac{1}{2}$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para cada $k\geq n_0$, tenemos

$$S_{\mathcal{P}_k^*}(f)(x_0)-\int\limits_{[0,1]}f d\lambda<\frac{1}{2},\quad\text{es decir}\quad S_{\mathcal{P}_k^*}(f)(x_0)<\frac{1}{2}+\int\limits_{[0,1]}f d\lambda.$$

Además por (3) sabemos que $\int\limits_{[0,1]}f d\lambda<\frac{1}{2}$ y en consecuencia, para todo $k\geq n_0$

$$S_{\mathcal{P}_k^*}(f)(x_0)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

y por lo tanto $x_0\notin[S_{\mathcal{P}_k^*}(f)>1]$. Luego, $x_0\notin\bigcup\limits_{k=n_0}^{\infty}\left[S_{\mathcal{P}_k^*}(f)>1\right]$, de donde tenemos que $x_0\notin B$. O sea que $B\subseteq A$, lo cual implica que $P(B)\leq P(A)$, y en consecuencia $P(A)=1$. Esto quiere decir que $\left\{S_{\mathcal{P}_n^*}(f)\right\}_{n=1}^{\infty}$ no converge casi seguro a $\int\limits_{[0,1]}f d\lambda$.

$\square$

3.2. Condiciones suficientes para la convergencia casi segura de una sucesión de sumas aleatorias de Riemann de una función f a su integral de Lebesgue.

Finalizaremos este trabajo con el teorema 11, con el cual alcanzamos nuestro principal objetivo. Antes de enunciarlo y demostrarlo, probaremos dos lemas los cuales son de suma importancia en dicha prueba.

Lema 2. *Si x e y son números reales y $1 < p \leq 2$, entonces*

$$|x+y|^p \leq |x|^p + 2|y|^p + py|x|^{p-1}\, signx.$$

Demostración. Si $x = 0$, el resultado es inmediato. Supongamos que $x \neq 0$, entonces

$$|x+z|^p = \left|x\left(1+\frac{z}{x}\right)\right|^p = |x|^p |1+y|^p,$$

donde $y = \frac{z}{x}$. Si el lema es válido para $x = 1$; es decir, si se cumple que

$$|1+y|^p \leq 1 + 2|y|^p + py, \quad \text{para todo } 1 < p \leq 2 \text{ y todo } y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

entonces

$$|x|^p |1+y|^p \leq |x|^p + 2|xy|^p + py|x|^p, \text{ esto es}$$
$$|x+xy|^p = |x|^p + 2|z|^p + p\frac{z}{x}|x|^p, \text{ de donde}$$
$$|x+z|^p = |x|^p + 2|z|^p + pz|x|^{p-1}\, sign(x)$$

Luego, para probar este lema es suficiente probar (1).

Si $p = 2$ obtenemos fácilmente la desigualdad, ya que

$$|1+y|^2 = (1+y)^2 = 1 + y^2 + 2y \leq 1 + 2|y|^2 + 2y.$$

Sea $1 < p < 2$. Si $y = 0$, la desigualdad (1) se cumple trivialmente.

Si $y \neq 0$, consideremos la función:

$$f(y) := \frac{|1+y|^p - 1 - py}{|y|^p}.$$

Probemos que $f(y) \leq 2$ para todo $y \in \mathbb{R} - \{0\}$:

- Si $y > 0$, entonces
$$f(y) := \frac{(1+y)^p - 1 - py}{y^p}.$$
Notemos que $f(y)$ es acotada, ya que:
$$\lim_{y\to+\infty} \frac{(1+y)^p - 1 - py}{(y)^p} = \lim_{y\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^p - \frac{1}{y^p} - \frac{p}{y^{p-1}}\right] = 1.$$
Sean $h(y) = (1+y)^p - 1 - py$ y $g(y) = y^p$. Tenemos que en $(0,+\infty)$
$h'(y) = p(1+y)^{p-1} - p$ y $g'(y) = py^{p-1}$ satisfacen las condiciones del teorema 20 (Regla de L'Hospital) [Apéndice B], entonces
$$\lim_{y\to0^+} \frac{h'(y)}{g'(y)} = \lim_{y\to0^+} \frac{p(1+y)^{p-1} - p}{py^{p-1}} = \lim_{y\to0^+} \frac{p(p-1)(1+y)^{p-2}}{p(p-1)y^{p-2}} = \lim_{y\to0^+} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{2-p} = 0.$$
De igual manera, las funciones h y g cumplen las condiciones del teorema 20 en $(0,+\infty)$ y por tanto
$$\lim_{y\to0^+} \frac{h(y)}{g(y)} = \lim_{y\to0^+} \frac{(1+y)^p - 1 - py}{y^p} = \lim_{y\to0^+} \frac{p(1+y)^{p-1} - p}{py^{p-1}} = 0.$$
Observemos que
$$f'(y) = p\ y^{-1-p}\left[1 + py - y - (1+y)^{p-1}\right] = p\ y^{-1-p}\left[1 + (p-1)y - (1+y)^{p-1}\right].$$
Ahora, como $0 < p-1 < 1$, utilizando la concavidad de la función logarítmica, tenemos que $\ln[1+(p-1)y] > (p-1)\ln(1+y)$ [Ver apéndice B, lema 7]. Por tanto $1+(p-1)y > (1+y)^{p-1}$; es decir $1+(p-1)y-(1+y)^{p-1} > 0$, lo cual implica que $f'(y) > 0$.
Por lo anterior, tenemos que f es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$. Además, como $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = 1$, tenemos que $f(y) < 1$ para todo $y \in (0,+\infty)$.

- Si $-1 \le y < 0$, entonces
$$f(y) := \frac{(1+y)^p - 1 - py}{(-y)^p}.$$
Haciendo $x := -y$ tenemos que:
$$f(y) = f(-x) = \frac{(1-x)^p - 1 + px}{x^p} \overset{not}{=} f_0(x), \quad \text{donde } 0 < x \le 1.$$

Observemos que $f_0(1) = p - 1$. Aplicando dos veces la regla de L'Hospital, [ver Teorema 20, apéndice B], tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f_0(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-x)^p - 1 + px}{x^p}, \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{p(1-x)^{p-1} + p}{px^{p-1}}, \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{p(p-1)(1-x)^{p-2}}{p(p-1)x^{p-2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{2-p} \\
&= 0 \quad , \qquad\qquad\qquad \text{ya que } 2-p>0.
\end{aligned}$$

Además,

$$f_0'(x) = p\ x^{-1-p}\left[1 + x - px - (1-x)^{p-1}\right] = p\ x^{-1-p}\left[1 - (p-1)x - (1-x)^{p-1}\right],$$

y como $0 < p-1 < 1$, entonces por la concavidad de la función logarítmica tenemos que $1+(p-1)y-(1+y)^{p-1} > 0$, es decir $1-(p-1)x-(1-x)^{p-1} > 0$, por lo tanto $f_0'(x) > 0$. En consecuencia f_0 es estrictamente creciente en $(0,1]$. Además, como $f_0(1) = p-1$, entonces f_0 está acotada superiormente por $p-1$ sobre el intervalo $(0,1]$, esto es $f_0(x) \leq p-1 < 1$ para cada $x \in (0,1]$, o lo que es lo mismo $f(y) < 1$ para todo $y \in [-1,0)$.

- Si $y < -1$, entonces $f(y) = \dfrac{(-1-y)^p - 1 - py}{(-y)^p}$ y sustituyendo $-y$ por x tenemos que $f(-y) = f_1(x) = \dfrac{(x-1)^p - 1 + px}{x^p}$, donde $x > 1$. Notemos que f_1 es continua en $(1,+\infty)$.

  Observemos que

  $$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^p - \frac{1}{x^p} + \frac{p}{x^{p-1}}\right] = 1.$$

  Supongamos que en $x = x_0 \in (1,+\infty)$, la función f_1 alcanza su valor máximo, es decir $f_1(x_0) \geq f_1(x)$, para todo $x \in (1,+\infty)$.

  Nota: Dicho máximo no puede ser $+\infty$ pues si lo fuera, $f_1(x_0) = +\infty$ y como $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$, tendríamos que f_1 no es continua en x_0.

  Como f_1 es derivable en $(1,+\infty)$ entonces en x_0 se debe cumplir que:

  $$f_1'(x_0) = p\ x_0^{-1-p}\left[x_0 + x_0(x_0-1)^{p-1} + 1 - (x_0-1)^p - px_0\right] = 0.$$

Como $p\ x_0^{-1-p} \neq 0$, entonces x_0 debe satisfacer:

$$(x_0-1)^p - 1 + px_0 = x_0 + x_0(x_0-1)^{p-1},$$

dividiendo cada uno de los términos de la ecuación anterior entre x_0^p tenemos:

$$f_1(x_0) = \frac{(x_0-1)^p - 1 + px_0}{x_0^p} = \frac{1}{x_0^{p-1}} + \frac{(x_0-1)^{p-1}}{x_0^{p-1}},$$

y por lo tanto, el valor máximo de la función f_1 está dado por:

$$f_1(x_0) = \frac{1}{x_0^{p-1}} + \frac{(x_0-1)^{p-1}}{x_0^{p-1}}.$$

Como

$$\frac{1}{x_0^{p-1}} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{(x_0-1)^{p-1}}{x_0^{p-1}} < 1,$$

entonces $f_1(x_0) < 2$ y por tanto $f_1(x) < 2$ para cada $x \in (1,\infty)$; es decir, $f(y) < 2$ para cada $y \in (-\infty,-1)$.

Ahora, si la función f_1 no alcanza su valor máximo en $(1,+\infty)$ entonces $f_1(x) < 1$ para todo $x \in (1,+\infty)$, puesto que f_1 es continua en $(1,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f_1(x) = p-1 < 1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$.

Por lo tanto, $f(y) \leq 2$ para todo $y \in \mathbb{R}-\{0\}$ y todo $1 < p < 2$ como se quería mostrar. El lema 2 queda completamente demostrado.

□

Lema 3. *Sea* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias no negativas tal que la suma de sus valores esperados converge; es decir,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E[X_n] < \infty$. *Entonces* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0$.

Demostración. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E[X_n] < \infty$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $E[X_n]$ existe; luego por la desigualdad de Chebyschev [ver lema 4, apéndice A] tenemos que para todo $\alpha > 0$, $P[X_n \geq \alpha] \leq \dfrac{E[X_n]}{\alpha}$, esto implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n \geq \alpha] \leq \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] < \infty,$$

y por el primer lema de Borel-Cantelli obtenemos $P\left[\limsup_{n\to\infty}[X_n \geq \alpha]\right] = 0$, es decir, $P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}[X_k \geq \alpha]\right] = 0$.

Definamos los conjuntos

$$A := \left\{x \in [0,1] : \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}[X_k(x) \geq \alpha]\right\}, \ B := \left\{x \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} X_n(x) \neq 0\right\}$$

y demostremos que $B \subseteq A$.
Sea $x_0 \in [0,1]$ tal que $x_0 \notin A$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \notin \bigcup_{k=N}^{\infty}[X_k(x) \geq \alpha]$; es decir, $X_k(x_0) < \alpha$ para todo $k \geq N$, y esto significa que $\lim_{n\to\infty} X_n(x_0) = 0$, en consecuencia $x_0 \notin B$. Por lo tanto $B \subseteq A$.
Ahora, como $P(A) = 0$, entonces $P(B) = 0$ y esto implica que $P(B^c) = 1$, lo cual quiere decir que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0$. □

Presentamos a continuación el resultado central de este trabajo.

Teorema 11. *Sean* $1 < p < \infty$, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función en* $\mathcal{L}^p$ *y* $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de particiones de* $[0,1]$ *tal que* $\{||\mathcal{P}_n||\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p-1}$. *Entonces la sucesión de sumas aleatorias de Riemann* $\{S_{\mathcal{P}_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge casi seguro a* $\int_{[0,1]} f d\lambda$, *cuando* n *tiende a infinito.*

Demostración. Sean p, f y $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ como en las hipótesis del teorema.

1. Primero supongamos que $1 < p \leq 2$.
   Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\{I_{1,n}, I_{2,n}, \cdots, I_{l(n),n}\}$ el conjunto de subintervalos de $[0,1]$ determinados por la partición $\mathcal{P}_n$.
   Para cada $k = 1, 2, \cdots, l(n)$ definimos la función f_n de la siguiente manera:
   f_n es constante sobre $I_{k,n}$ y tiene la misma integral que f sobre dicho subintervalo.
   En otras palabras para $k = 1, 2, \cdots, l(n)$, si $x \in I_{k,n}$, entonces

$$f_n(x) := \frac{1}{|I_{k,n}|}\int_{I_{k,n}} f d\lambda,$$

   y sean $T_{k,n}$ variables aleatorias independientes, uniformemente distribuidas sobre $I_{k,n}$, tales que $T_{k,n}(x) \overset{not}{=} t_{k,n} \in I_{k,n}$ para cada $x \in [0,1]$, como en la definición de suma aleatoria de Riemann.

Es fácil ver que $S_{\mathcal{P}_n}(f_n)$ es constante e igual a $\int\limits_{[0,1]} f d\lambda$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $x \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{P}_n}(f_n)(x) &= \sum_{k=1}^{l(n)} |I_{k,n}|\, f_n[T_{k,n}(x)] = \sum_{k=1}^{l(n)} |I_{k,n}|\, f_n(t_{k,n}) \\ &= \sum_{k=1}^{l(n)} |I_{k,n}| \frac{1}{|I_{k,n}|} \int\limits_{I_{k,n}} f d\lambda = \sum_{k=1}^{l(n)} \int\limits_{I_{k,n}} f d\lambda, \end{aligned}$$

es decir,

$$S_{\mathcal{P}_n}(f_n)(x) = \int\limits_{[0,1]} f d\lambda.$$

Si definimos $\widetilde{f_n}$ como

$$\widetilde{f_n}(x) := f(x) - f_n(x), \text{ para todo } x \in [0,1],$$

entonces como las sumas aleatorias de Riemann son lineales, tenemos que

$$S_{\mathcal{P}_n}(f) = S_{\mathcal{P}_n}(f_n + \widetilde{f_n}) = S_{\mathcal{P}_n}(f_n) + S_{\mathcal{P}_n}(\widetilde{f_n}).$$

Por tanto para probar que $S_{\mathcal{P}_n}(f)$ converge casi seguro a $\int\limits_{[0,1]} f d\lambda$ cuando $n \to \infty$, basta probar que $S_{\mathcal{P}_n}(\widetilde{f_n}) \longrightarrow 0$ casi seguro, cuando $n \to \infty$.

Veamos que la función f_n está acotada por $\widehat{f}$, **el operador maximal de Hardy-Littlewood de** f, el cual está definido de la siguiente forma: para cada $x \in [0,1]$,

$$\widehat{f}(x) := \sup_{\delta>0} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{(x-\delta,x+\delta)\cap[0,1]} |f|^p \, d\lambda.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $k = 1, 2, \cdots, l(n)$ supongamos que $I_{k,n} = [x_{k-1,n}, x_{k,n}]$ y $\overline{x}_{k,n} = \dfrac{x_{k-1,n} + x_{k,n}}{2}$ es el punto medio de $I_{k,n}$, entonces para todo $x \in I_{k,n}$

$$f_n(\overline{x}_{k,n}) = f_n(x) = \frac{1}{|I_{k,n}|} \int\limits_{I_{k,n}} f d\lambda.$$

Si $\overline{\delta}_{k,n} = \dfrac{x_{k,n} - x_{k-1,n}}{2} > 0$ y $\overline{I}_{k,n} := (\overline{x}_{k,n} - \overline{\delta}_{k,n}, \overline{x}_{k,n} + \overline{\delta}_{k,n})$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| = |f_n(\overline{x}_{k,n})| &= \frac{1}{|I_{k,n}|}\left|\int\limits_{I_{k,n}} f d\lambda\right| \leq \frac{1}{|I_{k,n}|}\int\limits_{I_{k,n}} |f|\, d\lambda \\
&= \frac{1}{\left|2\overline{\delta}_{k,n}\right|}\int\limits_{\overline{I}_{k,n}} |f|\, d\lambda \leq \frac{1}{\left|2\overline{\delta}_{k,n}\right|}\int\limits_{\overline{I}_{k,n}} |f|^p\, d\lambda \\
&\leq \sup_{\delta>0} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{(x-\delta,x+\delta)} |f|^p\, d\lambda
\end{aligned}$$

ya que

$$\frac{1}{\left|2\overline{\delta}_{k,n}\right|}\int\limits_{\overline{I}_{k,n}} |f|^p\, d\lambda \;\in\; \left\{\frac{1}{|2\delta|}\int\limits_{(x-\delta,x+\delta)\cap[0,1]} |f|^p\, d\lambda : \delta > 0,\ x \in [0,1]\right\}$$

Por tanto, $|f_n(x)| \leq \widehat{f}(x)$ para todo $x \in [0,1]$ y todo $n \in \mathbb{N}$.
Como $\widetilde{f}_n(x) = f(x) - f_n(x)$ para todo $x \in [0,1]$ y todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_{[0,1]} \left|\widetilde{f}_n\right|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int\limits_{[0,1]} |f - f_n|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int\limits_{[0,1]} (|f| + |f_n|)^p\, d\lambda\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\int\limits_{[0,1]} \left(|f| + \left|\widehat{f}\right|\right)^p d\lambda\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

y por la desigualdad Minkowsky,

$$\left[\int\limits_{[0,1]} \left(|f| + \left|\widehat{f}\right|\right)^p d\lambda\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_{[0,1]} |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{[0,1]} \left|\widehat{f}\right|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Luego,

$$\left(\int\limits_{[0,1]} \left|\widetilde{f}_n\right|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_{[0,1]} |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{[0,1]} \left|\widehat{f}\right|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} := c$$

y como $\int\limits_{[0,1]} |f|^p\, d\lambda$ es finita entonces $\int\limits_{[0,1]} \left|\widehat{f}\right|^p d\lambda$ es finita [ver Teorema 21, apéndice B], por tanto c es finita. Así hemos probado que $\int\limits_{[0,1]} \left|\widetilde{f}_n\right|^p d\lambda$ está acotada por la constante c^p que no depende de n.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $k = 1, 2, \cdots, l(n)$ consideremos las v.a

$$\widetilde{X}_{k,n} := |I_{k,n}| \, \widetilde{f}_n(T_{k,n}).$$

Entonces, la suma aleatoria de Riemann de $\widetilde{f}_n$ generada por la partición $\mathcal{P}_n$ está dada por

$$S_{\mathcal{P}_n}(\widetilde{f}_n) = \sum_{k=1}^{l(n)} \widetilde{X}_{k,n}.$$

Recordando que $\varphi_{k,n}$ denota la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $T_{k,n}$, tenemos que

$$\begin{aligned} E\left[\widetilde{X}_{k,n}\right] &= |I_{k,n}| \, E\left[\widetilde{f}_n(T_{k,n})\right] \\ &= |I_{k,n}| \int\limits_{I_{k,n}} \widetilde{f}_n \cdot \varphi_{k,n} d\lambda = |I_{k,n}| \int\limits_{I_{k,n}} \widetilde{f}_n \frac{1}{|I_{k,n}|} d\lambda \\ &= \int\limits_{I_{k,n}} (f - f_n) \, d\lambda = \int\limits_{I_{k,n}} f d\lambda - \int\limits_{I_{k,n}} f_n d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E\left[S_{\mathcal{P}_n}(\widetilde{f}_n)\right] = \sum_{k=1}^{l(n)} E\left[\widetilde{X}_{k,n}\right] = 0.$$

Además, ya que $E\left[\widetilde{X}_{k,n}\right] = 0$ para cada $n \in N$ y $k = 1, 2, \cdots, l(n)$, tenemos la siguiente desigualdad:

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{l(n)} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right) \leq 2 \sum_{k=1}^{l(n)} E\left(\left|\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right), \qquad (*)$$

que se sigue del lema (2), calculando las respectivas esperanzas y haciendo inducción. En efecto, del lema 2 sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p \leq \left|\sum_{k=1}^{m-1} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p + 2\left|\widetilde{X}_{m,n}\right|^p + p(\widetilde{X}_{m,n}) \left|\sum_{k=1}^{m-1} \widetilde{X}_{k,n}\right|^{p-1} sign\left(\sum_{k=1}^{m-1} \widetilde{X}_{k,n}\right).$$

Como la esperanza matemática de una suma finita de variables aleatorias es la suma de las esperanzas [ver apéndice B, teorema 16] y las variables aleatorias $\widetilde{X}_{m,n}$

y $\left|\sum_{k=1}^{m-1} \widetilde{X}_{k,n}\right|^{p-1}$ son independientes [ver apéndice B, teorema 15], tenemos que para todo $m \in \mathbb{N}$, el valor de $E\left(\left|\sum_{k=1}^{m} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right)$ es a lo más

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{m-1} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right)+2E\left(\left|\widetilde{X}_{m,n}\right|^p\right)+pE\left(\widetilde{X}_{m,n}\right)E\left(\left|\sum_{k=1}^{m-1} \widetilde{X}_{k,n}\right|^{p-1}\right) sign\left(\sum_{k=1}^{m-1} \widetilde{X}_{k,n}\right).$$

Pero como $E\left(\widetilde{X}_{m,n}\right) = 0$, obtenemos

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{m} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right) \leq E\left(\left|\sum_{k=1}^{m-1} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right) + 2E\left(\left|\widetilde{X}_{m,n}\right|^p\right). \qquad (**)$$

Para probar (*), haremos inducción sobre m.

- Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left|\widetilde{X}_{1,n}\right|^p \leq 2\left|\widetilde{X}_{1,n}\right|^p$. Por tanto,

$$E\left(\left|\widetilde{X}_{1,n}\right|^p\right) \leq 2E\left(\left|\widetilde{X}_{1,n}\right|^p\right).$$

- De (**), para $m = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
E\left(\left|\sum_{k=1}^{2} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right) &\leq E\left(\left|\widetilde{X}_{1,n}\right|^p\right) + 2E\left(\left|\widetilde{X}_{2,n}\right|^p\right) \\
&\leq 2E\left(\left|\widetilde{X}_{1,n}\right|^p\right) + 2E\left(\left|\widetilde{X}_{2,n}\right|^p\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{2} E\left(\left|\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right).
\end{aligned}$$

- Supongamos que para $r \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{r} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right) \leq 2\sum_{k=1}^{r} E\left(\left|\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right). \qquad (H.I)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
E\left(\left|\sum_{k=1}^{r+1}\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right) &= E\left(\left|\sum_{k=1}^{r}\widetilde{X}_{k,n}+\widetilde{X}_{r+1,n}\right|^p\right) \text{ y por (**), tenemos}\\
&\leq E\left(\left|\sum_{k=1}^{r}\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right)+2E\left(\left|\widetilde{X}_{r+1,n}\right|^p\right) \text{ y por (H.I), obtenemos}\\
&\leq 2\sum_{k=1}^{r}E\left(\left|\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right)+2E\left(\left|\widetilde{X}_{r+1,n}\right|^p\right)\\
&= 2\sum_{k=1}^{r+1}E\left(\left|\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática, tenemos que para todo entero positivo m,

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{m}\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right) \leq 2\sum_{k=1}^{m}E\left(\left|\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right),$$

con lo cual queda demostrado (*).

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{k=1}^{l(n)}\left|\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right) &= \sum_{k=1}^{l(n)}E\left(\left|\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right)\\
&= \sum_{k=1}^{l(n)}\left|I_{k,n}\right|^{p-1}\int\limits_{I_{k,n}}\left|\widetilde{f}_n\right|^p d\lambda\\
&\leq \sum_{k=1}^{l(n)}\left\|\mathcal{P}_n\right\|^{p-1}\int\limits_{I_{k,n}}\left|\widetilde{f}_n\right|^p d\lambda\\
&= \left\|\mathcal{P}_n\right\|^{p-1}\int\limits_{[0,1]}\left|\widetilde{f}_n\right|^p d\lambda \qquad (***)
\end{aligned}$$

Además, de (*) tenemos que si $r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{r} E\left(\left|\sum_{k=1}^{l(n)} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right) \leq 2\sum_{n=1}^{r}\sum_{k=1}^{l(n)} E\left(\left|\widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right)$$
$$\overset{(***)}{\leq} 2\sum_{n=1}^{r} \|\mathcal{P}_n\|^{p-1} \int\limits_{[0,1]} \left|\widetilde{f}_n\right|^p d\lambda,$$

Tomando el límite cuando $r \to +\infty$, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\left|\sum_{n=1}^{l(n)} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p\right) \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{P}_n\|^{p-1} \int\limits_{[0,1]} \left|\widetilde{f}_n\right|^p d\lambda$$
$$\leq 2c^p \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{P}_n\|^{p-1} < \infty,$$

ya que $\{\|\mathcal{P}_n\|\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p-1}$. Además como $\left|\sum\limits_{n=1}^{l(n)} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p$ son variables aleatorias no negativas y la suma de sus valores esperados es finita, entonces por el lema 3 tenemos que $\left|\sum\limits_{n=1}^{l(n)} \widetilde{X}_{k,n}\right|^p \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0$, es decir $\left|S_{\mathcal{P}_n}(\widetilde{f}_n)\right|^p \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0$, de donde $S_{\mathcal{P}_n}(\widetilde{f}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0$ como queríamos mostrar.

2. Si $2 < p < \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las funciones

$$f_n^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A_n \\ 0, & \text{si } x \in A_n^c \end{cases} \quad y \quad f_n^{**}(x) := f(x) - f_n^* = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in A_n \\ f(x), & \text{si } x \in A_n^c, \end{cases}$$

donde $A_n := \{x \in [0,1] : |f(x)| < ||\mathcal{P}_n||^{-1/p}\}$.
Notemos que $f_n^*(x) < ||\mathcal{P}_n||^{-1/p}$ para todo $x \in [0,1]$ y $f = f_n^* + f_n^{**}$, lo cual, por la aditividad de las sumas aleatorias de Riemann, implica que
$S_{\mathcal{P}_n}(f) = S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*) + S_{\mathcal{P}_n}(f_n^{**})$. Además,

$$\int\limits_{[0,1]} f_n^* d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{[0,1]} f d\lambda, \quad \int\limits_{[0,1]} f_n^{**} d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{y} \quad f_n^{**} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} 0. \qquad (1)$$

En efecto, como $||\mathcal{P}_n||^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ya que $||\mathcal{P}_n|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, entonces cualquier subsucesión de $\left\{||\mathcal{P}_n||^{1/p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a cero, en particular podemos construir una subsucesión $\left\{||\mathcal{P}_{n_k}||^{1/p}\right\}_{k=1}^{\infty}$ decreciente, la cual tiende a cero; de aquí que la subsucesión

$\left\{||\mathcal{P}_{n_k}||^{-1/p}\right\}_{k=1}^{\infty}$ es creciente y tiende a infinito; lo cual implica que la sucesión de conjuntos $\{A_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente y

$$\lim_{k\to\infty} A_{n_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}.$$

Veamos que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k} = [0,1]$. Sea $x_0 \in [0,1]$; como $||\mathcal{P}_n||^{-1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x_0)| < ||\mathcal{P}_{n_j}||^{-1/p}$, es decir $x_0 \in A_{n_j}$, esto es $x_0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$, por tanto $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$, además es claro que $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k} \subseteq [0,1]$.
De lo anterior concluimos que $f_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} f$. Además, $|f_n^*| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego, por el teorema de la convergencia dominada [ver teorema 18, apéndice B], tenemos que $\int\limits_{[0,1]} f_n^* d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{[0,1]} f d\lambda$, y como $f_n^{**}(x) := f - f_n^*$, entonces $\int\limits_{[0,1]} f_n^{**} d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue [ver teorema 19 Apéndice B], tenemos $f_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} f$, lo cual implica que $f_n^{**} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} 0$.
Ahora nuestro objetivo es probar que $S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} \int\limits_{[0,1]} f d\lambda$ y $S_{\mathcal{P}_n}(f_n^{**}) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0$.
Empezamos mostrando la primera afirmación:

Como $f_n^*(x) < ||\mathcal{P}_n||^{-1/p}$ para todo $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces por el lema 5 [ver apéndice B] tenemos que para cada $m, n \in \mathbb{N}$,

$$E\left(\left|\int\limits_{[0,1]} f_n^* d\lambda - S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*)\right|^{2m}\right) \leq c\,||\mathcal{P}_n||^{\frac{-2m}{p}}\,||\mathcal{P}_n||^{m} = c\,||\mathcal{P}_n||^{m-\frac{2m}{p}} = c\,||\mathcal{P}_n||^{m(1-\frac{2}{p})},$$

por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\left|\int\limits_{[0,1]} f_n^* d\lambda - S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*)\right|^{2m}\right) \leq c\sum_{n=1}^{\infty} ||\mathcal{P}_n||^{m(1-\frac{2}{p})}.$$

Además sabemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||\mathcal{P}_n||^{p-1} < \infty$, puesto que $\{||\mathcal{P}_n||\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p-1}$, entonces si escogemos $m < \dfrac{p-1}{1-\frac{2}{p}}$, tenemos que $||\mathcal{P}_n||^{p-1} > ||\mathcal{P}_n||^{m\left(1-\frac{2}{p}\right)}$ y en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} ||\mathcal{P}_n||^{m\left(1-\frac{2}{p}\right)} < \infty$, lo cual implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\left|\int\limits_{[0,1]} f_n^* d\lambda - S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*)\right|^{2m}\right) < \infty,$$

entonces el lema 3 nos permite concluir que:

$$\left| \int_{[0,1]} f_n^* d\lambda - S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*) \right|^{2m} \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0$$

y por tanto

$$\left| \int_{[0,1]} f_n^* d\lambda - S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0, \qquad (2)$$

y esto implica que $S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} \int_{[0,1]} f d\lambda$. En efecto:

Sea $x_0 \in [0,1]$ tal que $x_0 \in \left\{ x \in [0,1] : \lim\limits_{n\to\infty} \left| \int_{[0,1]} f_n^* \ d\lambda - S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*)(x) \right| = 0 \right\} \overset{not}{=} A$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \int_{[0,1]} f_n^* \ d\lambda - S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*)(x_0) \right| &= \left| \lim_{n\to\infty} \left(\int_{[0,1]} f_n^* \ d\lambda - S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*)(x_0) \right) \right| \\ &= \left| \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n^* \ d\lambda - \lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*)(x_0) \right| = 0, \end{aligned}$$

de aquí que

$$\lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*)(x_0) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n^* \ d\lambda \overset{por(1)}{=} \int_{[0,1]} f \ d\lambda,$$

es decir $x_0 \in \left\{ x \in [0,1] : \lim\limits_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*)(x) = \int_{[0,1]} f \ d\lambda \right\} \overset{not}{=} B$, por lo tanto $P(A) \leq P(B)$, pero por (2) sabemos que $P(A) = 1$, en consecuencia $P(B) = 1$, esto significa que $S_{\mathcal{P}_n}(f_n^*) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} \int_{[0,1]} f d\lambda$.

Ahora mostraremos que $S_{\mathcal{P}_n}(f_n^{**}) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $k = 1, 2, \cdots, l(n)$ definimos las v.a $X_{k,n}^{**} := |I_{k,n}| \ f_n^{**}(T_{k,n})$, donde las v.a $T_{k,n}$ son independientes y uniformemente distribuidas sobre el respectivo intervalo $I_{k,n}$.
Recordando que $\varphi_{T_{k,n}}$ denota la función de densidad de $T_{k,n}$ y $f \in \mathcal{L}^p$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
E\left(|X_{k,n}^{**}|^p\right) &= E\left(|I_{k,n}|^p |f_n^{**}(T_{k,n})|^p\right) = |I_{k,n}|^p E\left(|f_n^{**}(T_{k,n})|^p\right) \\
&= |I_{k,n}|^p \int\limits_{I_{k,n}} |f_n^{**}|^p \; \varphi_{T_{k,n}} \; d\lambda = |I_{k,n}|^p \int\limits_{I_{k,n}} |f_n^{**}|^p \; \frac{1}{|I_{k,n}|} \; d\lambda \\
&= |I_{k,n}|^{p-1} \int\limits_{I_{k,n}} |f_n^{**}|^p \; d\lambda < \infty,
\end{aligned}
$$

por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $k = 1, 2, \cdots, l(n)$, $E\left(|X_{k,n}^{**}|^p\right) < \infty$. Además, como $X_{k,n}^{**}$ son v.a independientes entonces del lema 6 [ver apéndice B] se sigue que

$$
E\left|S_{\mathcal{P}_n}(f_n^{**})^p\right| = E\left|\left(\sum_{k=1}^{l(n)} X_{k,n}^{**}\right)^p\right| \leq \text{máx}\left\{2^p \sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|^p, \;\; 2^{p^2}\left(\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p\right\} \overset{not}{=} M,
$$

y si escogemos una constante $c \geq 2^{p^2}$, obtenemos $M \leq cN$, donde

$$
N := \text{máx}\left\{\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|^p, \;\; \left(\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p\right\}.
$$

En efecto:
si $\;M = 2^p \sum\limits_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|^p$, entonces $\;2^p \sum\limits_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|^p \geq 2^{p^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p$,

es decir

$$
\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|^p \geq 2^{p^2-p}\left(\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p \geq \left(\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p,
$$

esto significa que $\;N = \sum\limits_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|^p$; además como

$$
2^p \sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|^p \leq c \sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|^p,
$$

tenemos que $\;M \leq cN$.

Supongamos ahora que $\;M = 2^{p^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p$:

- Si $N = \left(\sum\limits_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p$, tenemos que $\;M \leq cN$

- Si $N = \sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|^p$, entonces $N \geq \left(\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p$, y $cN \geq 2^{p^2}\left(\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p$, es decir $M \leq cN$.

Por tanto, como $E\left|S_{\mathcal{P}_n}(f_n^{**})^p\right| \leq M$ y $M \leq cN$, entonces

$$E\left|S_{\mathcal{P}_n}(f_n^{**})^p\right| \leq cN = c\max\left\{\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|^p, \quad \left(\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p\right\}. \qquad (3)$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$cN \leq c'||\mathcal{P}_n||^{p-1}, \qquad (4)$$

para una constante c' adecuada. En efecto:

(i) Supongamos que $N = \sum_{n=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|^p$. Como f_n^{**} converge a cero en $\mathcal{L}^p$, entonces $\int_{[0,1]} |f_n^{**}|^p$ es acotada y como

$$\begin{aligned} c\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**p}\right| &= c\sum_{k=1}^{l(n)} |I_{k,n}|^{p-1} \int_{I_{k,n}} |f_n^{**}|^p \, d\lambda \\ &\leq c||\mathcal{P}_n||^{p-1} \sum_{k=1}^{l(n)} \int_{I_{k,n}} |f_n^{**}|^p \, d\lambda \\ &= c||\mathcal{P}_n||^{p-1} \int_{[0,1]} |f_n^{**}|^p d\lambda, \end{aligned}$$

por tanto si tomamos $c_1 = c\max\left\{\int_{[0,1]} |f_n^{**}|^p d\lambda, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$ tenemos que $cN \leq c_1||\mathcal{P}_n||^{p-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Supongamos que $N = \left(\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p$.

Como $2 < p < \infty$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{[0,1]} |f_n^{**}| d\lambda \leq \int_{[0,1]} |f_n^{**}|^p d\lambda \quad \text{y} \quad ||\mathcal{P}_n||^{\frac{1}{p}} < ||\mathcal{P}_n||,$$

en consecuencia, tenemos que

$$||\mathcal{P}_n||^{\frac{1}{p}} \int_{[0,1]} |f_n^{**}| d\lambda \leq ||\mathcal{P}_n|| \int_{[0,1]} |f_n^{**}|^p d\lambda,$$

es decir,

$$\int\limits_{[0,1]} |f_n^{**}| d\lambda \leq ||\mathcal{P}_n||^{1-\frac{1}{p}} \int\limits_{[0,1]} |f_n^{**}|^p d\lambda = ||\mathcal{P}_n||^{\frac{p-1}{p}} \int\limits_{[0,1]} |f_n^{**}|^p d\lambda. \qquad (5)$$

Tenemos también que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right| = E\left(\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right) = E\left(S_{\mathcal{P}_n}(|f_n^{**}|)\right) = \int\limits_{[0,1]} |f_n^{**}| d\lambda. \qquad (6)$$

Por lo tanto de (5) y (6) se sigue que

$$\left(\sum_{k=1}^{l(n)} E\left|X_{k,n}^{**}\right|\right)^p \leq ||\mathcal{P}_n||^{p-1} \left(\int\limits_{[0,1]} |f_n^{**}|^p d\lambda\right)^p.$$

Luego, tomando

$$c_2 = c \,\text{máx}\left\{\left(\int\limits_{[0,1]} |f_n^{**}|^p d\lambda\right)^p, \quad n \in \mathbb{N}\right\} = c\left(\text{máx}\left\{\int\limits_{[0,1]} |f_n^{**}|^p d\lambda, \quad n \in \mathbb{N}\right\}\right)^p,$$

obtenemos $cN \leq c_2 ||\mathcal{P}_n||^{p-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Esto significa que debemos tomar $c' = \text{máx}\{c_1\ ,\ c_2\}$ para que (4) se cumpla.

Ahora, de (3) y (4) tenemos que $E\,|S_{\mathcal{P}_n}(f_n^{**})^p| \leq c' ||\mathcal{P}_n||^{p-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\,|S_{\mathcal{P}_n}(f_n^{**})^p| \leq c' \sum_{n=1}^{\infty} ||\mathcal{P}_n||^{p-1} < \infty,$$

y así aplicando nuevamente el lema 3 concluimos que $S_{\mathcal{P}_n}(f_n^{**}) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0$; además como ya mostramos que $S_{\mathcal{P}_n}(f_n^{*}) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} \int\limits_{[0,1]} f d\lambda$, entonces por la aditividad de las sumas aleatorias de Riemann tenemos que $S_{\mathcal{P}_n}(f) \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} \int\limits_{[0,1]} f d\lambda$, como queríamos mostrar.

$\square$

Apéndice A

Anexos del capítulo 2

En este apartado exponemos algunos resultados y definiciones usadas en el capítulo 2.

Teorema 12. *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ variables aleatorias reales independientes y $g_1, \cdots, g_k$ funciones reales Borel-medibles. Entonces $g_1(X_1), g_2(X_2), \cdots, g_k(X_k)$ son variables aleatorias independientes.*

La demostración puede ser consultada en [10].

Teorema 13. *(Ley débil de los grandes números) Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes (no necesariamente con la misma distribución), cada una de las cuales tiene media (esperanza) y varianza finitas. Se supone que las varianzas están uniformemente acotadas por $M < \infty$. Consideremos la variable aleatoria $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Entonces $\frac{S_n - E(S_n)}{n}$ converge en probabilidad a cero, es decir, dado $\epsilon > 0$,*

$$P\left(\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| \geq \epsilon\right) \to 0, \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty.$$

La demostración puede ser consultada en [2].

Lema 4. *(desigualdad de Chebyschev) Sea X una variable aleatoria cuyo valor esperado existe, entonces para todo $\alpha > 0$; se satisface:*

$$P(|X| \geq \alpha) \leq \frac{E\,|X|}{\alpha}.$$

La demostración puede ser consultada en [2].

Teorema 14. *Sean* λ^* *la medida exterior sobre* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *definida en el ejemplo 3 del capítulo 1 y* $E \neq \phi$ *un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *tal que* $\lambda^*(E) < \infty$. E *es medible si y sólo si para cada* $\epsilon > 0$ *existen intervalos finitos y disyuntos* $I_1, I_2, \cdots, I_n$ *tales que*

$$\lambda^* \left(E \Delta \bigcup_{i=1}^{n} I_i \right) < \epsilon.$$

La demostración puede ser consultada en [4].

Definición 31. *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Decimos que* f *es una función escalonada si existe una partición* $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ *de* $[a, b]$ *tal que* f *es constante en cada uno de los subintervalos generados por* $\mathcal{P}$. *Es decir, para cada* $i = 1, 2, \cdots, n$, *existe* $a_i \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x) = a_i, \quad \textit{para todo } x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Apéndice B

Anexos del capítulo 3

En este apartado exponemos algunos resultados que son usados en el capítulo 3.

Teorema 15. *Sean* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *v.a independientes,* Y *una v.a definida en términos de* $X_1, X_2, \cdots, X_k$ *y* Z *una v.a definida en términos de* $X_{k+1}, X_{k+2}, \cdots, X_n$*; donde* $1 \leq k < n$*. Entonces* Y *y* Z *son independientes.*

Teorema 16. *Si* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *son v.a cuyos valores esperados existen, entonces el valor esperado de la suma de las v.a también existe y es igual a la suma de los valores esperados, es decir*

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E[X_n].$$

Teorema 17. *Si* X *e* Y *son v.a inependientes, cuyos valores esperados existen, entonces el valor esperado de* XY *también existe y es igual al producto de los valores esperados de las v.a, es decir* $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Las demostraciones de los anteriores resultados pueden ser consultadas en [2].

Lema 5. *Sea* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que* $|f| < M$*, para algún* $M \in \mathbb{R}$*, entonces para cualquier partición* $\mathcal{P}$ *de* $[0,1]$ *y cualquier* $m \in \mathbb{N}$ *tenemos*

$$E\left(\left|\int\limits_{[0,1]} f d\lambda - S_{\mathcal{P}}(f)\right|^{2m}\right) \leq c\ M^{2m}\ ||\mathcal{P}||^{m},$$

donde c *es una constante que depende solo de* m.

La demostración del anterior lema puede ser consultada en [5].

Lema 6. *Sean $p > 1$ y $X_1, X_2, \cdots, X_n$ v.a independientes tales que $E[|X|^p] < \infty$, para cada $k = 1, 2, \cdots, n$. Entonces*

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p\right) \leq \text{máx}\left\{2^p \sum_{k=1}^{n} E\left|X_k\right|^p, \quad 2^{p^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E\left|X_k\right|\right)^p\right\}.$$

Teorema 18 (Teorema de la convergencia dominada). *Si $f, g, f_1, f_2, \cdots,$ son funciones medibles, con $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, g es μ integrable y $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f$, entonces f es μ integrable y*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n d\mu = \int\limits_{[0,1]} f d\mu.$$

La demostración puede ser consultada en [3].

Teorema 19 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue). *Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión c.s convergente en $\mathcal{L}^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Suponiendo que existe una función numérica $g \geq 0$ p-veces μ-integrable tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces:*

1. *Existe una función real medible f tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f$.*
2. *Para cada función real medible f con $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} f$, se satisface que $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ y $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} f$.*

La demostración puede ser consultada en [3].

Lema 7. *Para cada $y \in \mathbb{R}^+$ y $0 < k < 1$, $\ln(1 + ky) > k\ln(1 + y)$.*

Teorema 20 (Regla de L'Hospital). *Sean las funciones $h(x)$ y $g(x)$:*

(i) *diferenciables en el intervalo (a, b);*

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} h(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$;

(iii) $g'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$;

(iv) *existe el límite* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{h'(x)}{g'(x)}$ *finito o infinito, igual a $+\infty$ ó $-\infty$.*

Entonces existe el límite $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ *y*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{h'(x)}{g'(x)}.$$

La demostración puede ser consultada en [8].

Teorema 21. *Sea f una función definida en $\mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{L}^p$, con $1 < p \leq +\infty$, entonces $\widehat{f}$, el operador maximal de Hardy-Littlewood de f está en $\mathcal{L}^p$ y*

$$||\widehat{f}||_p \leq A_p ||f||_p,$$

donde A_p depende sólo de p.

La demostración puede ser consultada en [12].

Bibliografía

[1] Apostol, Tom M. *Análisis Matemático.* Segunda edición, Reverté, Barcelona, 1977.

[2] Blanco, Liliana. *Probabilidad.* Primera edición, Universidad Nacional De Colombia-Unibiblos, Bogotá, 2004.

[3] Blanco, Liliana y Muñoz, Myriam. *Introducción a la teoría avanzada de la probabilidad.* Primera edición, Universidad Nacional De Colombia-Unibiblos, Bogotá, 2002.

[4] De Barra, G. *Introduction to Measure Theory.* First edition, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1974.

[5] Evans, M.J y Humke, P.D. *Almost every sequence integrates.* Acta Math. Hungar, in press, 117 (1-2) (2007), 35-39.

[6] Grahl, Jack. *A ramdom approach to the Lebesgue integral.* J. Math. Anal. Appl. 340(2008) 358-365.

[7] Kolmogorov, A.N. y Fomin, S.V. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.* Nauka. Moscú, 1989.

[8] Kudriávtsev, L.D. *Curso de análisis matemático.* MIR. Moscú, 1983.

[9] Pruss, A.R. *Ramdomly sampled Riemann sums and complete convergence in the law of large number for a case without identical distribution.* Proceedings of the American Mathematical Society. Volume 124, Number 3, March 1996, 919-929.

[10] Roussas, G.G. *A First Course in Mathematical Statistics*. First edition, Addison-Wesley, Madison, 1973.

[11] Stanojevic, Caslav V. y Kieffer, John C. *The Lebesgue integral as the almost sure limit of ramdom Riemann sums*. Proc. Amer. Math. Soc.85 (1982)389.

[12] Stein, E.M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. First edition, Princeton University Press, Princeton, 1970.