

**DISEÑO DE UN CONTROLADOR DE VELOCIDAD PARA UN  
MOTOR DE INDUCCIÓN UTILIZANDO CONTROL VECTORIAL**

**DIANA FERNANDA MORALES RINCÓN  
JORGE OLMEDO VANEGAS SERNA**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES  
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL  
POPAYÁN  
2005**



**Diseño de un Controlador de Velocidad para un Motor de  
Inducción utilizando Control Vectorial**

**Diana Fernanda Morales Rincón  
Jorge Olmedo Vanegas Serna**

**Universidad del Cauca  
Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones  
Departamento de Electrónica, Instrumentación y Control  
Popayán  
2005**

**Diseño de un Controlador de Velocidad para un Motor de  
Inducción utilizando Control Vectorial**

**Diana Fernanda Morales Rincón  
Jorge Olmedo Vanegas Serna**

Trabajo de grado para optar el título de  
Ingeniero en Automática Industrial

Director  
Ing. Jaime Oscar Díaz Chávez

**Universidad del Cauca  
Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones  
Departamento de Electrónica, Instrumentación y Control  
Popayán  
2005**

Nota de aceptación

---

---

---

---

Presidente del Jurado

---

Jurado

---

Jurado

Popayán \_\_\_\_\_

A Dios, mi Señor  
por llenarme de bendiciones  
A Libia y Ángel, mis padres  
que batalla tras batalla  
me sacaron adelante

Jorge.

A la magia de la vida y su Creador  
por permitirme alcanzar mis metas.  
A Francelina y Jaime, mis padres y  
a mi prima Alba, quienes con sus  
grandes esfuerzos y sacrificios me  
me ayudaron para ser lo que soy

Diana

## **AGRADECIMIENTOS**

Los autores expresan sus agradecimientos a:

Jaime Díaz, nuestro director, por todo el apoyo que nos ha prestado y el tiempo que nos ha dedicado.

Los miembros del Departamento de Electrónica, Instrumentación y Control por su apoyo y ayuda logística.

A nuestros compañeros de estudio a lo largo de estos años con los cuales hemos compartido trabajo, ilusiones, y por qué no decirlo, alguna que otra explosión.

Por último, queremos desde aquí agradecerles a nuestros padres todo el apoyo que nos han prestado. Ellos siempre han confiado en nosotros y se han sacrificado para darnos lo mejor. Sin duda son ellos los que han dado sentido a todo el trabajo que a continuación se describe.

## CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
1. DESCRIPCIÓN Y MODELADO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN CON ROTOR JAULA DE ARDILLA.....	5
1.1. CONCEPTOS BÁSICOS .....	5
1.1.1. Ley de Ampere: .....	5
1.1.2. Densidad del Flujo Magnético: .....	6
1.1.3. Flujo Magnético: .....	6
1.1.4. Ley de Faraday: .....	7
1.1.5. Fuerza Inducida sobre un Conductor: .....	8
1.1.6. Voltaje Inducido sobre un Conductor Móvil en un Campo Magnético:.....	9
1.2. CONSTITUCIÓN FÍSICA DEL MOTOR.....	10
1.2.1. Estator: .....	11
1.2.2. Rotor: .....	12
1.2.3. Caja de conexión: .....	13
1.2.4. Rodamientos: .....	14
1.2.5. Ventilador: .....	14
1.3. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DEL MOTOR .....	14
1.4. CAMPO MAGNÉTICO GIRATORIO.....	16
1.4.1. Campo magnético producido por una bobina: .....	17
1.4.2. Campo magnético producido por tres bobinas: .....	20
1.5. BOBINAS DE ESTATOR DISTRIBUIDAS SINUSOIDALMENTE .....	22
1.6. INDUCTANCIAS DEL ESTATOR (ROTOR EN CIRCUITO ABIERTO) .....	26
1.6.1. Inductancia de Magnetización de Una Fase del Estator .....	26
1.6.2. Inductancia Mutua del Estator.....	28
1.6.3. Inductancia de Magnetización por Fase.....	29
1.6.4. Inductancia del Estator.....	30
1.7. BOBINADOS EQUIVALENTES EN UN ROTOR JAULA DE ARDILLA.....	30



1.7.1. Inductancias del Bobinado del Rotor (Estator con Circuito Abierto): .....	31
1.8. INDUCTANCIAS MUTUAS ENTRE LAS BOBINAS DE FASE DEL ESTATOR Y DEL ROTOR.....	32
1.9. USO DE VECTORES ESPACIALES PARA REPRESENTAR DISTRIBUCIONES DE CAMPO SINUSOIDAL EN EL AIRE DEL ENTREHIERRO.....	33
1.9.1. Relación entre Fasores y Vectores Espaciales en Estado Estable Sinusoidal:	36
1.9.2. Componentes de Fase de Vectores Espaciales: .....	37
1.10. FLUJOS ENLAZADOS .....	37
1.10.1. Flujo Enlazado del Estator (Rotor en Circuito Abierto):.....	37
1.10.2. Flujo Enlazado del Rotor (Estator en Circuito Abierto):.....	39
1.10.3. Flujos Enlazados del Estator y del Rotor (Corrientes Simultáneas de Estator y de Rotor): .....	40
1.11. ECUACIONES DE VOLTAJE DEL ESTATOR Y DEL ROTOR EN TÉRMINOS DE VECTORES ESPACIALES .....	41
2. TÉCNICAS DE CONTROL PARA EL MOTOR DE INDUCCIÓN.....	43
2.1. CONTROL ESCALAR.....	43
2.2. CONTROL VECTORIAL.....	46
2.2.1. Control Vectorial Directo: .....	47
2.2.2. Control Vectorial Indirecto: .....	48
2.3. CONTROL DIRECTO DE PAR.....	49
2.4. SELECCIÓN DE LA TÉCNICA DE CONTROL A UTILIZAR.....	52
3. CONTROL VECTORIAL.....	53
3.1. REPRESENTACIÓN DEL BOBINADO-dq .....	53
3.1.1. Representación del Bobinado-dq del Estator:.....	54
3.1.2. Bobinas-dq del Rotor (alineadas a lo largo de los mismos ejes-dq como en el estator): .....	56
3.1.3. Inductancia Mutua entre las Bobinas-dq del Estator y del Rotor: .....	57
3.2. RELACIONES ENTRE LAS CANTIDADES DEL ESTATOR Y EL ROTOR CON LAS CANTIDADES EN LAS BOBINAS-dq A UNA VELOCIDAD $\omega_d$ ARBITRARIA	59
3.2.1. Relación de Variables en las Bobinas-dq a Variables en las Bobinas de Fase: .....	61
3.2.2. Flujo Enlazado de las Bobinas-dq en Términos de sus Corrientes:.....	62

3.2.3. Ecuaciones de Voltaje de las Bobinas-dq del Estator:.....	64
3.2.4. Ecuaciones de Voltaje de las Bobinas-dq del Rotor: .....	67
3.2.5. Obtención de Flujos y Corrientes con Voltajes como Entradas: .....	68
3.3. PAR ELECTROMAGNÉTICO.....	70
3.3.1. Par sobre la Bobina del eje-d del Rotor: .....	70
3.3.2. Par sobre la Bobina del eje-q del Rotor: .....	72
3.3.3. Par Electromagnético Neto .....	73
3.4. ELECTRODINÁMICA .....	74
3-5. CIRCUITOS EQUIVALENTES DE LOS EJES-dq.....	75
3.6. CONDICIONES DE PRODUCCIÓN DE PAR ÓPTIMO .....	76
3.7. MODELO DEL MOTOR CON EL EJE-d ALINEADO A LO LARGO DEL FLUJO	
ENLAZADO DEL ROTOR $\vec{\lambda}_r$ .....	78
3.7.1. Cálculo de $\omega_{dA}$ .....	80
3.7.2. Cálculo de $T_{em}$ .....	81
3.7.3. Dinámicas del Flujo Enlazado del Rotor en el Eje-d: .....	81
3.7.4. Modelo del Motor: .....	82
3.8. ESQUEMA DEL CONTROL VECTORIAL.....	83
3.8.1. La Corriente de Referencia $i_{sq}^*(t)$ .....	84
3.8.2. La Corriente de Referencia $i_{sd}^*(t)$ .....	84
3.8.3. Transformación y Transformación Inversa de las Corrientes de Estator: .....	85
3.8.4. Modelo del Motor para Estimar Variables: .....	85
3.8.5. La Unidad de Procesamiento de Potencia (PPU): .....	86
3.9. CALCULO DE LOS VOLTAJES A SER APLICADOS EN EL ESTATOR.....	87
3.10. MODELO EN VARIABLES DE ESTADO.....	88
4. DISEÑO DEL CONTROLADOR.....	91
4.1. INTRODUCCION .....	91
4.2. DISEÑO DEL CONTROLADOR DE FLUJO.....	95
4.3. DISEÑO DEL CONTROLADOR DE CORRIENTE DEL EJE-d .....	97
4.4. DISEÑO DEL CONTROLADOR DE VELOCIDAD .....	98
4.5. DISEÑO DEL CONTROLADOR DE CORRIENTE DEL EJE-q .....	100
4.6. SELECCIÓN DE LA FRECUENCIA DE CORTE Y EL MARGEN DE FASE.....	101

4.7. IMPLEMENTACION DEL DEBILITAMIENTO DE CAMPO .....	102
5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES .....	107
5.1. RESULTADOS .....	107
5.1.1. Arranque en Línea: .....	107
5.1.2. Variación del Par de Carga: .....	110
5.1.3. Seguimiento de un Perfil de Velocidad: .....	113
5.1.4. Comportamiento del Sistema ante Variación de los Parámetros del Motor: ...	115
5.2. CONCLUSIONES .....	118
REFERENCIAS .....	120

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1: Regla de la mano derecha para flujo magnético.....	7
Figura 1-2: Fuerza inducida sobre un conductor.....	9
Figura 1-3: Regla de la mano derecha para fuerza inducida .....	9
Figura 1-4: Voltaje Inducido sobre un Conductor Móvil en un Campo Magnético .....	10
Figura 1-5: Corte de un motor de inducción con rotor jaula de ardilla.....	10
Figura 1-6: Núcleo del estator .....	11
Figura 1-7: Bobinado trifásico del estator.....	12
Figura 1-8: Estator del motor de inducción.....	12
Figura 1-9: Láminas típicas del rotor .....	13
Figura 1-10: Rotor jaula de ardilla .....	13
Figura 1-11: Rodamientos .....	14
Figura 1-12: Ventiladores .....	14
Figura 1-13: Principio de funcionamiento del motor de inducción.....	15
Figura 1-14: Entrehierro .....	17
Figura 1-15: Campo magnético debido a una bobina en un estator sin rotor .....	18
Figura 1-16: Campo magnético debido a una bobina en un estator con rotor .....	19
Figura 1-17: Bobinado trifásico del estator.....	20
Figura 1-18: Campo magnético giratorio debido a tres bobinas con alimentación trifásica.....	21
Figura 1-19: Bobina para la fase-a distribuida sinusoidalmente.....	23
Figura 1-20: Campo magnético distribuido sinusoidalmente.....	25
Figura 1-21: Bobinado trifásico del estator.....	26
Figura 1-22. Inductancia de magnetización e inductancia de dispersión de una fase .....	27
Figura 1-23: Inductancia mutua.....	28
Figura 1-24: Circuito del rotor representado por tres bobinas de fase .....	31
Figura 1-25: Representación del vector espacial de la fmm .....	34
Figura 1-26: Interpretación física del vector espacial de la corriente de estator. ....	35
Figura 1-27: Relación entre un vector espacial y un fasor en estado estable sinusoidal....	36

Figura 1-28: Vectores espaciales del estator alineados (rotor en circuito abierto).....	39
Figura 1-29: Vectores espaciales del rotor alineados (estator en circuito abierto).....	40
Figura 2-1: Característica par electromagnético – velocidad para todas las frecuencias ..	44
Figura 2-2: Control Escalar .....	45
Figura 2-3: Control vectorial directo .....	47
Figura 2-4: Control vectorial indirecto.....	48
Figura 2-5: Vectores espaciales de voltaje en función de la conectividad del puente inversor .....	50
Figura 2-6: Control directo de par.....	51
Figura 3-1: Representación de la fmm del estator mediante el bobinado-dq equivalente. a) vector espacial de corriente del estator $\vec{i}_s(t)$ . b) conjunto de dos bobinas ortogonales d- q. c) proyecciones del vector $\vec{i}_s(t)$ a lo largo de los ejes d y q .....	54
Figura 3-2: Representación de la fmm del rotor mediante las corrientes de las bobinas-dq equivalentes.....	57
Figura 3-3: Representación del estator y del rotor por medio de corrientes en las bobinas- dq equivalentes.....	58
Figura 3-4: Transformación de cantidades de fase a cantidades en las bobinas-dq .....	60
Figura 3-5: Bobinas equivalentes dq y $\alpha\beta$ del estator .....	65
Figura 3-6: Bobinas equivalentes dq y $\alpha\beta$ del rotor.....	67
Figura 3-7: Cálculo de los flujos enlazados y las corrientes de las bobinas-dq .....	70
Figura 3-8: Par sobre el eje-d del rotor.....	71
Figura 3-9: Par sobre el eje-q del rotor.....	73
Figura 3-10. Modelo del motor de inducción en términos de las bobinas-dq .....	74
Figura 3-11: Circuitos equivalentes de las bobinas-dq.....	76
Figura 3-12: Condición de par óptimo y par no óptimo .....	77
Figura 3-13: Ortogonalidad entre los vectores de corriente y flujo en un motor DC .....	78
Figura 3-14: Representación de la fmm del estator y del rotor mediante las corrientes de las bobinas equivalentes dq. El eje-d está alineado con $\vec{\lambda}_r$ .....	79
Figura 3-15: Circuitos dinámicos con el eje-d alineado con $\vec{\lambda}_r$ .....	80
Figura 3-16: Circuito simplificado del eje-d con una excitación de corriente.....	82
Figura 3-17: Modelo del motor con el eje-d alineado con $\vec{\lambda}_r$ .....	83

Figura 3-18: Esquema de Control Vectorial Directo con PPU controlada par corriente.....	84
Figura 3-19: PPU controlada por corriente.....	86
Figura 3-20: Esquema de Control vectorial Directo con PPU controlada por voltaje .....	87
Figura 4-1: Representación del sistema de control realimentado .....	91
Figura 4-2: Diagrama de Bode de la función de transferencia de lazo abierto .....	92
Figura 4-3: Ancho de banda de la función de transferencia de lazo cerrado .....	93
Figura 4-4: Técnica de control vectorial seleccionada .....	94
Figura 4-5: Diseño del controlador del lazo de flujo de enlace del rotor .....	95
Figura 4-6: Diseño del controlador del lazo de corriente del eje-d .....	97
Figura 4-7: Diseño del controlador del lazo de velocidad.....	100
Figura 4-8: Operación típica del debilitamiento de campo .....	103
Figura 4-9: Par máximo y nominal versus velocidad.....	104
Figura 4-10: Restricciones de voltaje del debilitamiento de campo .....	105
Figura 4-11: Flujo enlazado versus velocidad .....	106
Figura 5-1: Arranque desde línea en lazo abierto .....	108
Figura 5-2: Arranque desde línea en lazo cerrado.....	109
Figura 5-3: Voltajes y corrientes en el motor durante el arranque en lazo cerrado.....	110
Figura 5-4: Variación del par de carga en lazo abierto.....	111
Figura 5-5: Variación del par de carga en lazo cerrado .....	112
Figura 5-6: Voltajes y corrientes en el motor durante la variación del par de carga .....	113
Figura 5-7: Seguimiento de perfil de velocidad .....	114
Figura 5-8: Voltajes y corrientes durante el seguimiento de perfil de velocidad .....	115
Figura 5-9: Comportamiento del sistema con $L_m$ mal estimado .....	116
Figura 5-10: Comportamiento del sistema con $R_r$ mal estimado .....	117
Figura A-1: Accionamiento Eléctrico .....	A1
Figura B-1: Representación de la bobina de la fase-a distribuida sinusoidalmente.....	B1
Figura B-2: Cálculo de la distribución de campo en el aire del entrehierro.....	B3
Figura C-1: Líneas de campo magnético en motores de inducción con múltiples polos...	C1
Figura D-1: Inductancia de la bobina .....	D1
Figura D-2: Diferencial de Volumen del aire del entrehierro .....	D5
Figura E-1: Flujo enlazado de la bobina-a debido a $i_a$ .....	E1
Figura E-2: Flujo enlazado en la bobina-b debido a $i_a$ .....	E3

Figura H-1: Componentes de fase de un vector espacial .....	H2
Figura J-1: Par sobre el eje-d del rotor.....	J1
Figura K-1: Diagrama del flujo de potencia en un motor de inducción.....	K1
Figura K-2: Circuito equivalente por fase de estado estable.....	K2
Figura K-3: Circuito equivalente aproximado por fase .....	K4
Figura M-1: Punto de cruce entre las curvas de par .....	M4

## LISTA DE APÉNDICES

APÉNDICE A: ACCIONAMIENTO ELÉCTRICO.....	A1
APÉNDICE B: DENSIDAD DE CONDUCTOR E INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO PARA UN MOTOR DE INDUCCIÓN DE DOS POLOS .....	B1
APÉNDICE C: DENSIDAD DE CONDUCTOR E INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO PARA UN MOTOR DE INDUCCIÓN DE MÚLTIPLES POLOS.....	C1
APÉNDICE D: INDUCTANCIA DE MAGNETIZACIÓN DE UNA FASE .....	D1
APÉNDICE E: FLUJO ENLAZADO EN LA BOBINA-b DEBIDO A $i_a$ .....	E1
APÉNDICE F: FACTOR DE ACOPLAMIENTO MUTUO DEL BOBINADO TRIFÁSICO ...	F1
APÉNDICE G: RELACIÓN ENTRE FASOR Y VECTOR ESPACIAL EN ESTADO ESTABLE SINUSOIDAL .....	G1
APÉNDICE H: COMPONENTES DE FASE DE VECTORES ESPACIALES.....	H1
APÉNDICE I: FACTOR DE RELACIÓN DE VUELTAS ENTRE LAS BOBINAS-dq CON RESPECTO A LAS TRES BOBINAS DE FASE .....	I1
APÉNDICE J: CORRIENTE NETA " $i_{neta}$ " QUE PRODUCE EL PAR SOBRE EL EJE-d DEL ROTOR.....	J1
APÉNDICE K: CÁLCULO DEL PAR MÁXIMO EN LOS MOTORES DE INDUCCIÓN.....	K1
APÉNDICE L: PARÁMETROS DEL MOTOR DE INDUCCIÓN .....	L1
APÉNDICE M: PUNTO DE CRUCE ENTRE LAS CURVAS DE PAR MAXIMO Y PAR NOMINAL .....	M1
APÉNDICE N: CÁLCULO DEL FLUJO DE REFERENCIA VERSUS VELOCIDAD .....	N1



## NOMENCLATURA

$v$  : voltaje como función del tiempo.

$i$  : corriente como función del tiempo.

$\lambda$  : flujo enlazado como función del tiempo.

$\hat{V}$  : valor máximo de voltaje.

$\hat{I}$  : valor máximo de corriente.

$\hat{\lambda}$  : valor máximo de flujo enlazado.

$\bar{V} = \hat{V} \angle \theta_v$  : fasor de voltaje.

$\bar{I} = \hat{I} \angle \theta_i$  : fasor de corriente.

$\bar{\lambda} = \hat{\lambda} \angle \theta_\lambda$  : fasor de flujo enlazado.

$\vec{v}(t) = \hat{V} \cdot e^{j\theta}$  : vector espacial de voltaje.

$\vec{i}(t) = \hat{I} \cdot e^{j\theta}$  : vector espacial de corriente.

$\vec{\lambda}(t) = \hat{\lambda} \cdot e^{j\theta}$  : vector espacial de flujo enlazado.

$e^{j\theta}$  : notación exponencial y su significado es  $\cos \theta + j \cdot \sin \theta$ .

$a, b, c$  : fases del estator.

$A, B, C$  : fases del rotor.

$d, q$  : bobinas-dq.

$s$  : estator.

$r$  : rotor.

$m$  : magnetización.

$m$  : rotor como en  $\theta_m$  o  $\omega_m$ .

$mech$  : mecánica como en  $\theta_{mech}$  o  $\omega_{mech}$ .

$\ell$  : dispersión como en  $L_{\ell s}$ .

\* : valor de referencia como en  $\omega_{mech}^*$  .

$p$  : número de polos ( $p \geq 2$  , número par)

$\theta$  : posición angular, todos los ángulos están en radianes eléctricos.

$\theta_{mech}$  : posición angular del rotor en radianes mecánicos (reales),  $\theta_{mech} = (2/p) \cdot \theta_m$  .

$\omega$  : velocidad angular, todas las velocidades están en radianes eléctricos por segundo.

$\omega_{mech}$  : velocidad angular del rotor en radiales mecánicos (reales) por segundo.

$fl$  : flujo enlazado representado en los archivos de Matlab / Simulink.

## GLOSARIO

**BOBINA CONCENTRADA:** bobina en la cual todos sus conductores están concentrados o ubicados en una sola ranura.

**BOBINA DISTRIBUIDA:** bobina en la cual todos sus conductores están distribuidos en varias ranuras.

**ESPIRA:** elemento básico de una bobina que forma un solo ciclo de conducción.

**FUERZA MAGNETOMOTRIZ (fmm):** es la fuerza o presión externa requerida para establecer un flujo magnético dentro de un material.

**PERMEABILIDAD:** es una medida de la facilidad con que se establecen líneas de flujo magnético dentro de un material.

**POLO MAGNÉTICO:** es una consecuencia observada de la forma en que las líneas de campo magnético son canalizadas.

**RELUCTANCIA:** es determinada por las características físicas de un material y proporciona una indicación de la oposición de ese material para el establecimiento de líneas de flujo magnético dentro del material.

**RPM:** revoluciones por minuto.

**SI:** sistema internacional de unidades basado en el sistema métrico.

## **RESUMEN**

Este trabajo, el cual tiene como objetivo contribuir al enriquecimiento académico del control de accionamientos eléctricos en nuestro medio y fortalecer la nascente línea de investigación en Accionamientos Eléctricos del Grupo de Investigación en Automática Industrial, presenta los fundamentos teóricos necesarios para el diseño de un controlador de velocidad para un motor de inducción con rotor jaula de ardilla utilizando control vectorial, específicamente control vectorial directo. En este trabajo se desarrolla el modelo del motor de inducción para analizar su operación bajo condiciones dinámicas. El diseño del controlador parte de los parámetros del motor y la frecuencia de conmutación de la PPU para calcular las constantes de los controladores PI. Este trabajo también valida el diseño del controlador mediante simulación utilizando Matlab/Simulink para dicho propósito.

## **ABSTRACT**

This work, which has as objective to contribute to the academic enrichment of the control of electric drives in our environment and to strengthen the very beginning of the research line in Electric Drives of the Group of Research in Industrial Automatic, introduces the necessary theoretical foundations for the design of a controller of speed for an induction motor with rotor squirrel cage using vector control, specifically direct vector control. In this work the induction motor model is developed to analyze its operation under dynamic conditions. The controller's design uses the motor parameters and the switching frequency power-processing unit (PPU) to estimate the constants of the PI controllers. This work also confirms the controller's design by means of simulation using Matlab/Simulink for this purpose.

## INTRODUCCIÓN

Los convertidores electromecánicos de energía son dispositivos que permiten interconectar sistemas eléctricos y mecánicos. Son fundamentales en diversas aplicaciones de la vida moderna. Desde los grandes generadores sincrónicos que convierten la energía térmica o hidráulica en enormes volúmenes de potencia y energía eléctrica, hasta el pequeño ventilador que refrigera los circuitos del computador con que se escribió este trabajo, satisfacen las mismas leyes físicas y principios básicos.

Desde el descubrimiento, por parte de los antiguos griegos, de la propiedad del ámbar de atraer pequeñas partículas después de un proceso de frotación con paño o un trozo de cuero, hasta Ampère quien formula y explica teóricamente el principio de generación de los campos magnéticos a partir de la corriente eléctrica y Faraday quien investiga en sentido contrario y establece los principios de generación de electricidad a partir del campo magnético, se desarrollaron las bases fundamentales de la conversión electromecánica de energía, las cuales en una secuencia vertiginosa, centrada en la mitad del siglo XIX, causan las invenciones de máquinas eléctricas que utilizan los principios electromagnéticos, primero para generar y luego para utilizar la electricidad.

La máquina de inducción es uno de los convertidores electromecánicos de energía más ampliamente difundidos en la actualidad y ha permitido expandir el rango de aplicaciones de los accionamientos eléctricos<sup>1</sup>. Es común desde hace mucho tiempo enumerar las ventajas que posee la máquina de inducción cuando se compara con otros convertidores electromecánicos de energía; mínimo costo de inversión y mantenimiento, así como la gran robustez mecánica, son las principales consideraciones en tal sentido. Desde que Tesla desarrolló el principio de funcionamiento de esta máquina y construyó los primeros prototipos a finales del siglo XIX un enfrentamiento se lleva a cabo nada más ni nada

---

<sup>1</sup> Este término se precisa en el apéndice A

menos que contra el gran convertidor electromecánico de la época; la máquina de corriente continua. Las importantísimas consecuencias de estas discusiones iniciales han perdurado durante los siglos XX y XXI, y han definido en buena parte el desarrollo de los sistemas modernos de generación, transmisión y consumo de energía eléctrica.

A pesar de la industrialización de la máquina de inducción, la máquina de corriente continua se utiliza en aquellas aplicaciones puntuales que requieren control de velocidad o generación de corriente continua. El control de velocidad de la máquina de corriente continua de excitación independiente resulta esencialmente sencillo. La independencia existente entre las bobinas de campo y armadura permite controlar por separado las corrientes que generan el flujo de magnetización por un lado y el par electromagnético por otro. Gobernando estas variables se tiene control completo de la máquina, observándose respuestas dinámicas muy veloces con reducidas oscilaciones.

La conversión DC/AC, a través de la electrónica de potencia, permite la construcción de fuentes confiables y seguras de corriente alterna cuya frecuencia y tensión son controlables. Esto determina la incorporación de la máquina de inducción en el campo del control de velocidad. Sin embargo, el sistema de control de velocidad de una máquina de inducción no es una tarea fácil, ya que es un sistema no lineal, multivariable, altamente acoplado y sus parámetros varían con la temperatura y grado de saturación magnética<sup>2</sup> durante su operación. No es evidente el impacto que tienen unas variables del sistema sobre el comportamiento de las otras, y resulta complicado establecer relaciones entre las consignas del controlador que garanticen una respuesta rápida del sistema.

Un concepto interesante para el control de velocidad de una máquina de inducción puede ser controlar la corriente y/o la tensión en cada bobina del estator, de tal forma que las variables que producen el par puedan ser controladas independientemente. Esta idea es central en el desarrollo del modelo de la máquina de inducción en términos de las bobinas-dq.

---

<sup>2</sup> Los parámetros del motor de inducción varían en mayor proporción con respecto al grado de saturación magnética en motores de potencias altas.

El modelo de la máquina de inducción en términos de las bobinas-dq desacopla las variables que producen el par electromagnético. Sobre este modelo se pueden aplicar las técnicas de control clásico de las máquinas de corriente continua.

De cualquier forma, existe en la actualidad un esfuerzo muy importante a nivel internacional por obtener las mejores características posibles de la máquina de inducción. Esto ha sido impulsado, no solamente por el avance de la electrónica de potencia y de las fuentes de potencia controlables, sino que también por el desarrollo de los sistemas de adquisición y procesamiento de información en tiempo real. Se refuerza, por estas razones, la necesidad de conocer más y mejor el comportamiento dinámico de la máquina de inducción. En las últimas tres décadas se han realizado importantes contribuciones en esta dirección [9-16]. Desde la década de los 70's, todos estos desarrollos conceptuales y teóricos han comenzado a plasmarse en técnicas novedosas de control de la máquina de inducción que se están incorporando rápidamente en diversos equipos comerciales.

Aun cuando los métodos de análisis de la máquina de inducción en régimen transitorio pueden parecer fuera del alcance al común de los ingenieros, se demostrará mediante este trabajo que los principios de la operación dinámica de la máquina de inducción son relativamente simples y accesibles a cualquier profesional con una formación matemática elemental pero sólida.

Además de esta introducción, este trabajo se compone de cinco capítulos. En el capítulo uno, se hace una descripción general de la máquina de inducción con rotor jaula de ardilla y el modelado matemático de dicha máquina en coordenadas a-b-c. En el capítulo dos se revisan las tendencias actuales en el estado del arte del control dinámico de las máquinas de inducción. En el capítulo tres se explica la estrategia de control vectorial o por campo orientado para el control de la velocidad de una máquina de inducción. En el capítulo cuatro se explica el procedimiento de diseño de los controladores PI para la estrategia de control vectorial o por campo orientado explicada en el capítulo tres. En el capítulo cinco se presentan los resultados y conclusiones de las simulaciones realizadas utilizando Matlab/Simulink y se plantean algunas reflexiones importantes sobre la necesidad de profundizar y globalizar algunas de las ideas expuestas. También se plantean algunas recomendaciones finales para la continuación de esta investigación.

El futuro de la tecnología depende de las máquinas, seguramente durante el siglo XXI los convertidores electromecánicos continuarán siendo muy importantes para el desarrollo de la humanidad. Por lo tanto, es necesario desarrollar más y mejor esta área del conocimiento.



# 1. DESCRIPCIÓN Y MODELADO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN CON ROTOR JAULA DE ARDILLA

## 1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Según [1], el campo magnético y su acción es el elemento fundamental por medio del cual la energía se convierte de una forma en otra en los motores. Cuatro principios básicos describen cómo se utiliza el campo magnético en los motores:

- Un conductor cargado de electricidad produce un campo magnético a su alrededor.
- Un campo magnético variable en el tiempo induce un voltaje en una bobina estacionaria, si pasa a través de dicha bobina.
- Un conductor por el cual circula una corriente en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza inducida sobre él.
- Un conductor en movimiento en presencia de un campo magnético estacionario experimenta un voltaje inducido en él.

En esta sección se definen y tratan los principios que describen el campo magnético y su acción en los motores. Los numerales 1.1.1 a 1.1.6 fueron tomados de [1].

**1.1.1. Ley de Ampere:** es la ley básica que rige la producción de un campo magnético. La ley de Ampere es un principio de conservación que relaciona la integral de la intensidad del campo magnético alrededor de un contorno cerrado con la corriente que pasa a través del área encerrada por el contorno.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{net} \quad (1-1)$$

En unidades del SI,  $I_{net}$  se mide en amperios y  $H$  se mide en amperios – vueltas por metro. La intensidad  $H$  del campo magnético es, en cierto sentido, una medida del “esfuerzo” que una corriente realiza para establecer un campo magnético.

**1.1.2. Densidad del Flujo Magnético:** en cualquier instante de tiempo  $t$ , para una intensidad  $H$  del campo magnético dada, la densidad de líneas de flujo depende de la permeabilidad magnética  $\mu$  del material sobre el cual la intensidad  $H$  del campo magnético actúa.

$$B = \mu \cdot H \quad (1-2)$$

En unidades del SI,  $\mu$  se mide en henrios por metro y  $B$  se mide en webers por metro cuadrado (conocido como Tesla). Si pensamos en  $H$  como la causa de la magnetización y en  $B$  como el efecto, entonces la constante  $\mu$  indica la magnitud del efecto inducido.

**1.1.3. Flujo Magnético:** un campo magnético se representa mediante líneas de flujo magnético, éstas existen en bucles continuos, es decir, van del polo norte al sur y regresan al polo norte. El flujo magnético total en un área dada se determina por la ecuación 1-3.

$$\phi = \int_A B \cdot dA \quad (1-3)$$

En unidades del SI,  $A$  se mide en metros cuadrados y  $\phi$  se mide en webers.

Un campo magnético está presente en todos los conductores que llevan una corriente eléctrica. La dirección de las líneas de flujo magnético alrededor de un conductor se encuentra simplemente colocando el pulgar de la mano derecha en la dirección de la corriente y observando la dirección de los otros dedos como se muestra en la Figura 1-1a. Si el conductor se enrolla en un núcleo, la dirección de las líneas de flujo magnético se determina colocando los dedos de la mano derecha en la dirección de la corriente

alrededor del núcleo y en tal caso el pulgar apuntará en la dirección del polo norte del flujo magnético inducido como se muestra en la Figura 1-1b. Este método para hallar la dirección de las líneas de flujo magnético se conoce como la regla de la mano derecha.

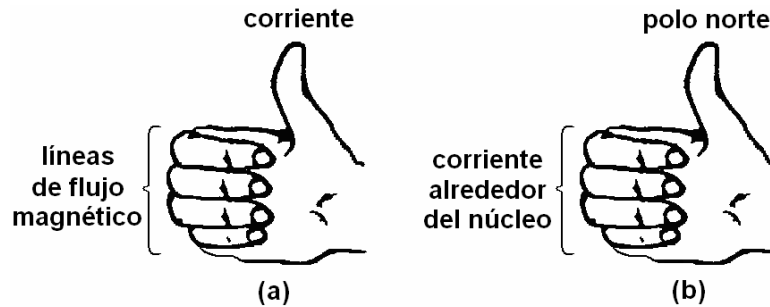


Figura 1-1: Regla de la mano derecha para flujo magnético [2]

**1.1.4. Ley de Faraday:** es la base de operación de los transformadores. La ley de Faraday establece que si un flujo magnético cambiante atraviesa una espira conductora, se inducirá un voltaje en la espira conductora proporcional a la tasa de cambio en el flujo con relación al tiempo.

$$e_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (1-4)$$

En unidades del SI,  $e_{ind}$  se mide en voltios. El signo menos de la ecuación es una expresión de la ley de Lenz. Ésta establece que la dirección del voltaje inducido en la espira es tal que si sus extremos se pusieran en cortocircuito, produciría una corriente que causaría un flujo magnético para oponerse al cambio de flujo magnético inicial. Ya que el voltaje inducido se opone al cambio que lo causa, se incluye el signo menos en la ecuación 1-4.

Si se coloca una bobina de  $N$  espiras en la región de un flujo magnético cambiante, se inducirá un voltaje en la bobina. Para hallar el voltaje inducido en la bobina, se tomará la magnitud del voltaje inducido en la  $i$ -ésima espira de la bobina dado por la ecuación 1-5.

$$e_i = -\frac{d(\phi_i)}{dt} \quad (1-5)$$

Como hay  $N$  espiras en la bobina conductora, el voltaje total sobre ésta es:

$$e_{ind} = \sum_{i=1}^N e_i \quad (1-6)$$

$$e_{ind} = -\sum_{i=1}^N \frac{d(\phi_i)}{dt} \quad (1-7)$$

$$e_{ind} = -\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \phi_i \right) \quad (1-8)$$

El término entre paréntesis en la ecuación 1-8 se denomina flujo enlazado por la bobina y la ley de Faraday puede enunciarse en términos del flujo enlazado así:

$$e_{ind} = -\frac{d\lambda}{dt} \quad (1-9)$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \phi_i \quad (1-10)$$

En unidades del SI,  $\lambda$  se mide en vueltas – webers.

Cuando el flujo magnético que pasa por las  $N$  espiras de la bobina es el mismo, el flujo enlazado se expresa por:

$$\lambda = N \cdot \phi \quad (1-11)$$

**1.1.5. Fuerza Inducida sobre un Conductor:** el concepto básico involucrado se ilustra en la Figura 1-2. La Figura muestra un conductor presente en un campo magnético uniforme de densidad de flujo magnético  $B$ , que entra a la página. El conductor en sí mismo tiene  $l$  metros de longitud y contiene una corriente de  $i$  amperios. La fuerza inducida sobre el conductor se da por:

$$F = i \cdot (l \times B) \quad (1-12)$$

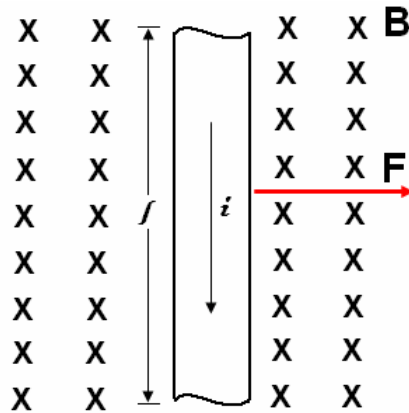


Figura 1-2: Fuerza inducida sobre un conductor [1]

En unidades del SI,  $F$  se mide en newtons y  $l$  se mide en metros. La dirección de la fuerza se puede obtener utilizando la regla de la mano derecha mostrada en la Figura 1-3.

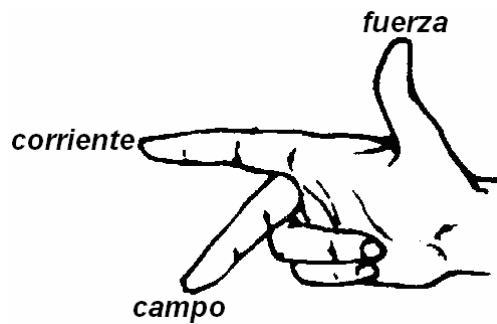


Figura 1-3: Regla de la mano derecha para fuerza inducida [2]

**1.1.6. Voltaje Inducido sobre un Conductor Móvil en un Campo Magnético:** si un conductor con una orientación apropiada se mueve a través de un campo magnético, se obtiene la inducción de un voltaje en dicho conductor. Esto se muestra en la Figura 1-4. El voltaje inducido en el conductor se expresa por:

$$e_{ind} = (v \times B) \cdot l \quad (1-13)$$

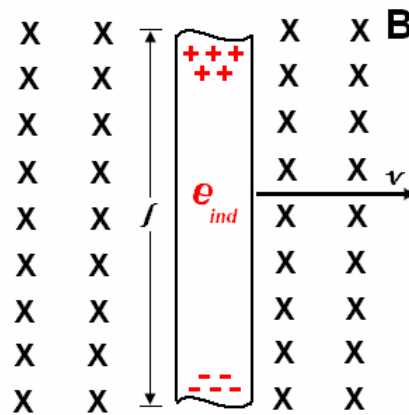


Figura 1-4: Voltaje Inducido sobre un Conductor Móvil en un Campo Magnético [1]

## 1.2. CONSTITUCIÓN FÍSICA DEL MOTOR

El motor de inducción con rotor jaula de ardilla consiste de una parte estática, conocida como estator, y una rotante, llamada rotor. El estator y el rotor están separados por una pequeña distancia llamada entrehierro. Además del estator y el rotor, el motor de inducción con rotor jaula de ardilla contiene un ventilador, una caja de conexiones, cojinetes, rodamientos y el eje para conexión de la carga mecánica; tal como se muestra en la Figura 1-5.

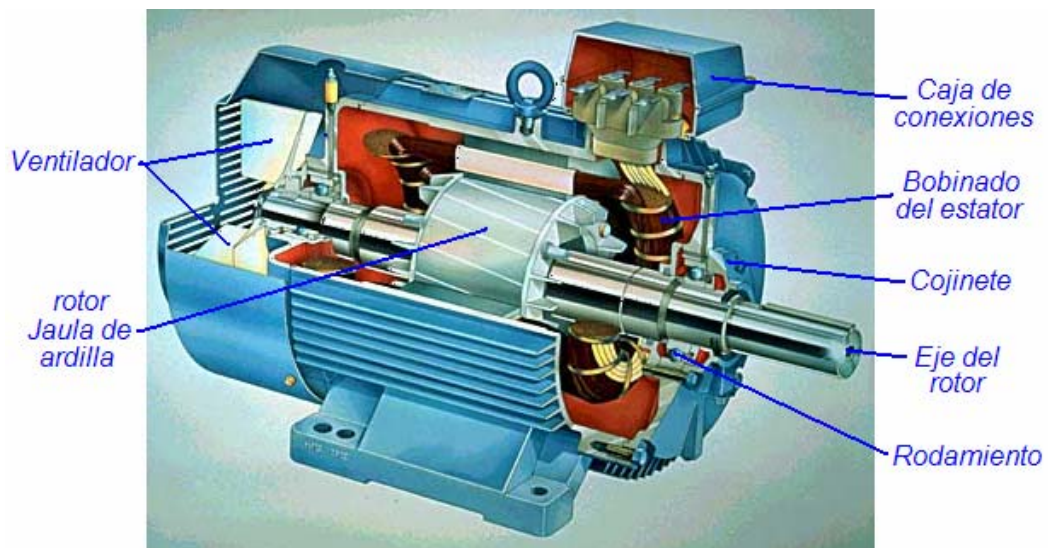


Figura 1-5: Corte de un motor de inducción con rotor jaula de ardilla [16]

**1.2.1. Estator:** consiste de un yugo (carcasa o armazón cilíndrica que provee soporte físico), un núcleo y un bobinado trifásico. El núcleo proporciona una trayectoria de retorno al flujo para complementar el circuito magnético y se construye de láminas ferromagnéticas con ranuras, unidas entre sí. La Figura 1-6a muestra una lámina típica. Entre las ranuras se coloca un papel aislante, el cual aísla el núcleo del bobinado trifásico. La Figura 1-6b muestra el núcleo con el papel aislante entre las ranuras. El bobinado trifásico se inserta en las ranuras del núcleo, tal como se muestra en la Figura 1-6c.

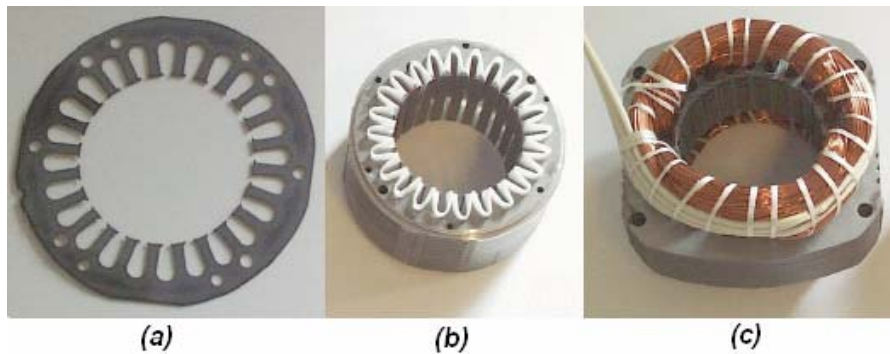


Figura 1-6: Núcleo del estator [17]

El bobinado trifásico consta de tres bobinas separadas entre sí 120 grados eléctricos ( $2\pi/3$  radianes), representados esquemáticamente en la Figura 1-7a. Estas tres bobinas generalmente se conectan en configuración “ye” ( $Y$ ) uniendo los terminales  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$ , como se muestra esquemáticamente en la Figura 1-7b.

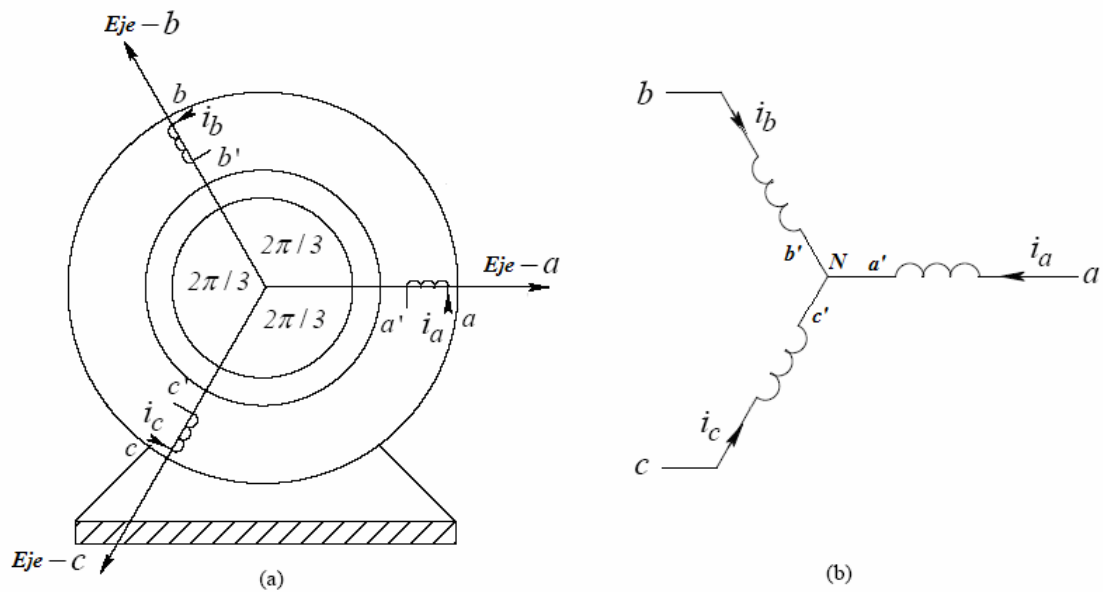


Figura 1-7: Bobinado trifásico del estator [4]

En la Figura 1-8 se muestra un estator en ausencia del rotor, con sus respectivos componentes.

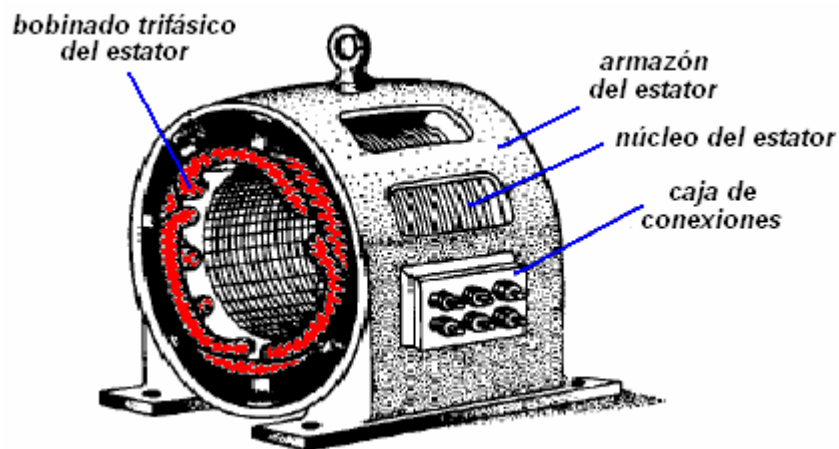


Figura 1-8: Estator del motor de inducción [17]

**1.2.2. Rotor:** está constituido por un núcleo, unas barras de cobre o aluminio, unos anillos de cobre o aluminio y el eje para conexión de la carga mecánica. El núcleo, al igual



que el del estator, está formado por láminas ferromagnéticas con ranuras, unidas entre sí. La Figura 1-9 muestra algunas láminas típicas.

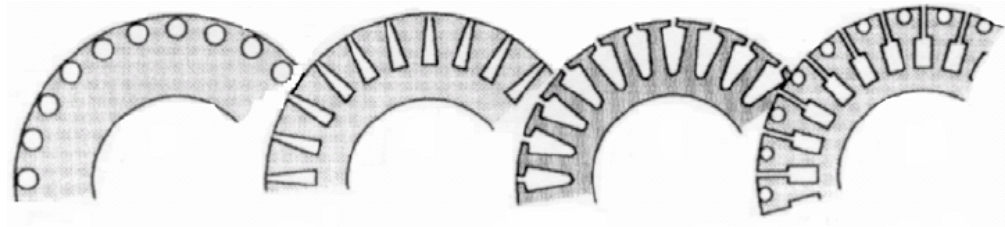


Figura 1-9: Láminas típicas del rotor [17]

En las ranuras del núcleo del rotor se colocan las barras y se cortocircuitan por ambos extremos mediante los anillos, formando así el bobinado del rotor. El bobinado del rotor, sin el núcleo, por su aspecto exterior, se parece a una jaula de ardilla; de allí el nombre del rotor. El conjunto núcleo y barras cortocircuitadas se acopla al eje, denominado eje del rotor. En la Figura 1-10 se observan dos rotores con sus respectivos componentes.

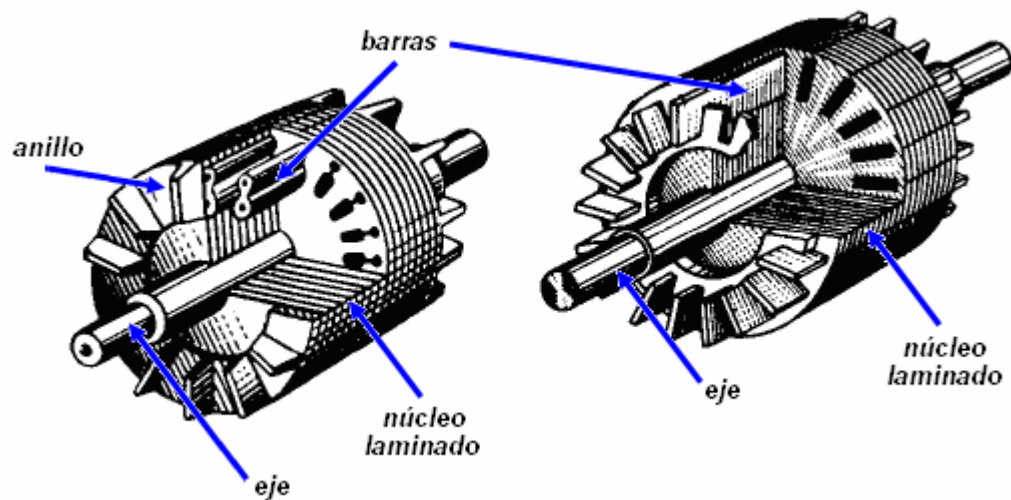


Figura 1-10: Rotor jaula de ardilla [17]

**1.2.3. Caja de conexión:** a ella llegan los terminales del bobinado trifásico del estator y su función es de permitir el acceso a ellos. En la caja de conexión se realizan las conexiones necesarias para la configuración y alimentación eléctrica del bobinado trifásico del estator.

**1.2.4. Rodamientos:** son elementos de forma circular y van acoplados en los extremos del eje del rotor. Su función es permitir la rotación del eje del rotor. En la Figura 1-11 se muestran algunos rodamientos.



Figura 1-11: Rodamientos [16]

**1.2.5. Ventilador:** es un elemento que va acoplado en uno de los extremos del eje del rotor. Su función es enfriar el motor a través de la circulación de aire a medida que el eje del rotor gira. En la Figura 1-12 se muestran dos tipos de ventiladores.

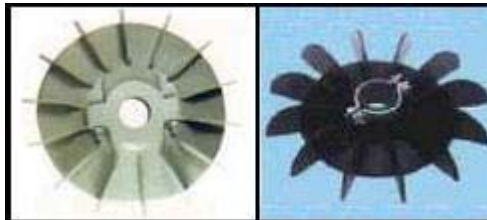


Figura 1-12: Ventiladores [16]

### 1.3. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DEL MOTOR

El principio de funcionamiento del motor de inducción con rotor jaula de ardilla, se puede ilustrar con el dispositivo que se muestra en la Figura 1-13a [2]. El dispositivo consta de un imán permanente suspendido de un hilo sobre un disco de cobre o aluminio que gira en un cojinete colocado en una placa fija de hierro. El campo magnético del imán permanente se completa a través de la placa de hierro, debido a que el disco presenta mayor reluctancia al paso de las líneas de flujo. El pivote debe estar relativamente sin fricción y el imán permanente debe tener la suficiente densidad de flujo magnético para

realizar la trayectoria mostrada por la línea azul en la Figura 1-13a. Cuando gira el imán en el hilo, se observará que el disco que está debajo gira con él, independientemente de la dirección de giro del imán.

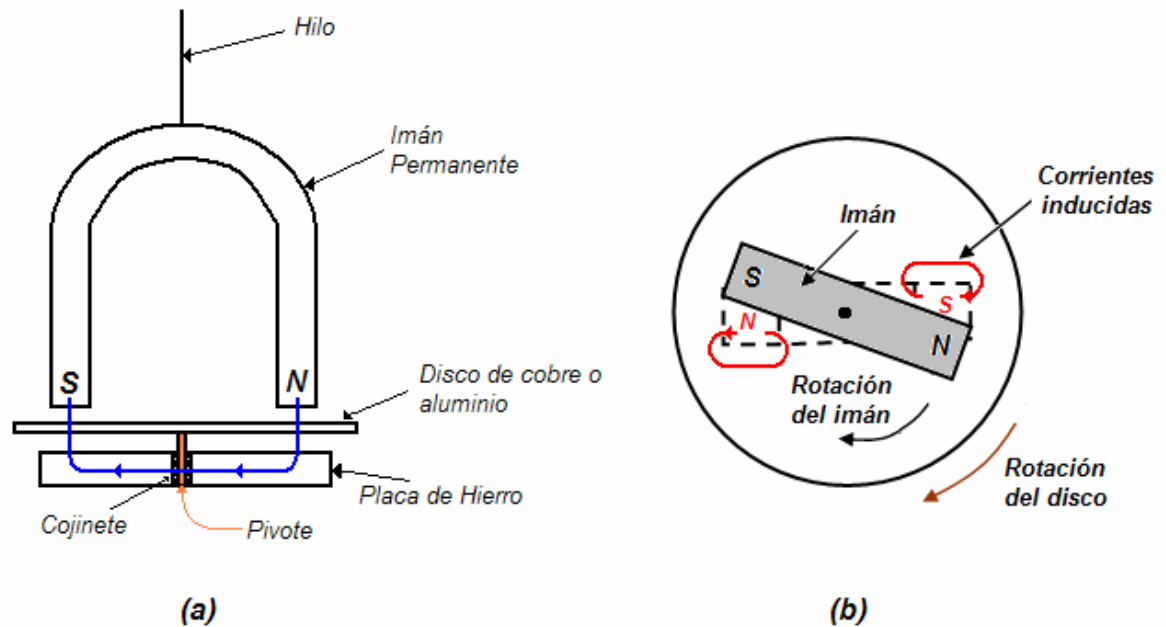


Figura 1-13: Principio de funcionamiento del motor de inducción

El disco sigue el movimiento del imán, como se muestra en la Figura 1-13b, debido a las corrientes inducidas por el movimiento relativo entre el disco (conductor) y el campo magnético. Por la ley de Lenz, la dirección del voltaje inducido y de las corrientes consecuentes produce un campo magnético que tiende a oponerse a la fuerza o movimiento que produjo el voltaje inducido. Por lo tanto, se genera un polo S unitario en el disco en un punto bajo el polo N giratorio del imán y un polo N unitario en el disco bajo el polo S giratorio del imán. El movimiento del disco es el resultado de la interacción entre los campos magnéticos.

Por lo tanto, siempre que el imán continúe moviéndose, se producirán corrientes inducidas y polos de signo contrario en el disco. El disco, por lo tanto, gira en la misma dirección que el imán, pero gira a velocidad menor. Si el disco girara a la misma velocidad del imán, no habría movimiento relativo entre el conductor y el campo magnético y no se inducirían corrientes en el disco.

El dispositivo de la Figura 1-13 se puede asemejar al motor de inducción con rotor jaula de ardilla por las siguientes razones: el imán permanente en movimiento se refiere al campo magnético giratorio que se produce en el estator del motor, el disco de cobre o aluminio se refiere a las barras cortocircuitadas del rotor y la placa de hierro se refiere al núcleo ferromagnético del rotor. En el motor de inducción con rotor jaula de ardilla el campo magnético giratorio del estator induce voltaje en las barras del rotor. Este voltaje inducido produce corriente, debido a que las barras del rotor están cortocircuitadas. Por la ley de Lenz, la dirección de la corriente produce un campo magnético que tiende a oponerse a la fuerza o movimiento que produjo el voltaje inducido. Por lo tanto, el par electromagnético en el rotor es el resultado de la interacción entre los campos magnéticos del estator y del rotor, y su dirección es la misma que la dirección de giro del campo magnético del estator.

Igual que en el dispositivo de la Figura 1-13, la velocidad del rotor no puede ser igual a la velocidad del campo magnético giratorio. Si fuera así, la corriente inducida sería cero y no se produciría par electromagnético. De lo anterior se concluye que la inducción es el principal fenómeno físico del motor de inducción, de allí su nombre.

#### **1.4. CAMPO MAGNÉTICO GIRATORIO**

Para el desarrollo de esta sección y las posteriores se asumen las siguientes condiciones:

- El material magnético del estator y del rotor tienen permeabilidad infinita. Por lo tanto el flujo magnético se concentra en el aire del entrehierro.
- El material magnético del estator y del rotor está operando en la zona lineal de la curva de magnetización. Por lo tanto la intensidad  $H$  del campo magnético es directamente proporcional a la fuerza magnetomotriz  $F$ .
- El espacio del entrehierro es constante como se muestra en la Figura 1-14a. Por lo tanto, se desprecia los espacios adicionales del entrehierro mostrados en la Figura 1-14b. Estos espacios son causados por las ranuras del estator.

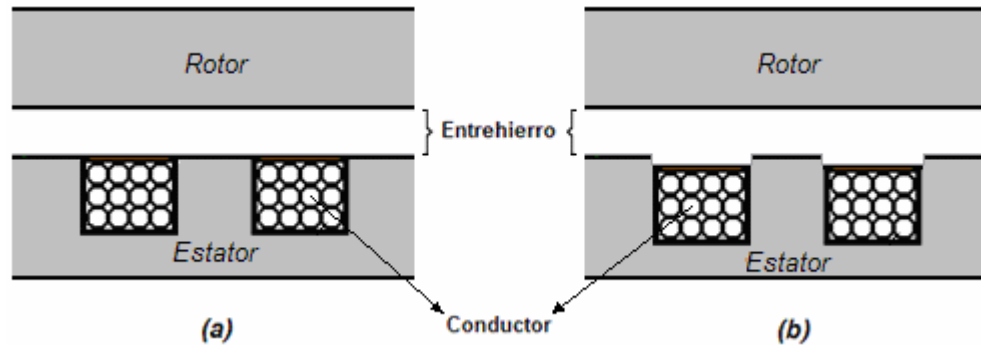


Figura 1-14: Entrehierro

En la sección anterior se hizo referencia a un campo magnético giratorio que se produce en el estator del motor. Para explicar cómo se produce dicho campo magnético giratorio, primero se estudiará el campo magnético producido por una bobina concentrada, su representación y su distribución en el entrehierro, para luego estudiar el campo magnético producido por las tres bobinas del estator.

**1.4.1. Campo magnético producido por una bobina:** en la Figura 1-15a se muestra una bobina concentrada (conductores  $AA'$ ) insertada en las ranuras del estator (no hay presencia de rotor). A través de la bobina está fluyendo una corriente, la cual sale por el conductor  $A$  y entra por el conductor  $A'$ . Esta corriente produce líneas de campo magnético en forma circular alrededor de cada conductor y orientadas según la regla de la mano derecha. La trayectoria de las líneas de campo magnético mostrada en la Figura 1-15a es correcta si se desprecia el material ferromagnético del estator.

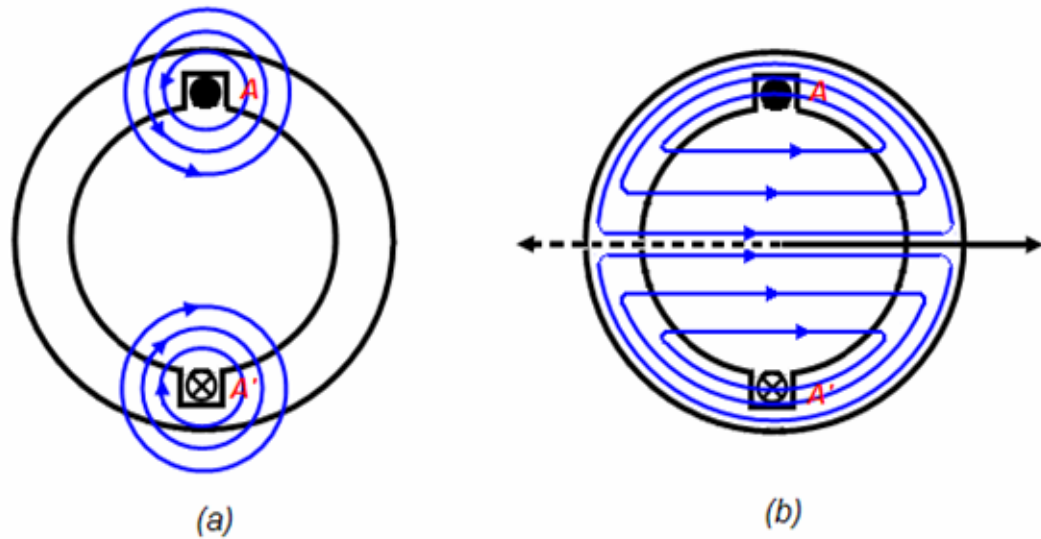


Figura 1-15: Campo magnético debido a una bobina en un estator sin rotor

Si se tiene en cuenta el material ferromagnético del estator, las líneas de campo magnético cambian su trayectoria, debido a que el estator ofrece una trayectoria de menor reluctancia (ver Figura 1-15b). En la Figura 1-15b se representa la dirección del campo magnético generado por la bobina concentrada mediante una flecha negra que apunta hacia el lado derecho, la cual sigue la regla de la mano derecha para la bobina. Si la corriente cambia de sentido, la dirección del campo magnético generado por la bobina cambia, como lo representa la flecha negra a trazos que apunta hacia el lado izquierdo en la Figura 1-15b. Ya que la representación del campo magnético en la Figura 1-15b muestra que éste cambia su dirección sobre la misma línea, a esta línea se le denomina “eje magnético de la bobina”.

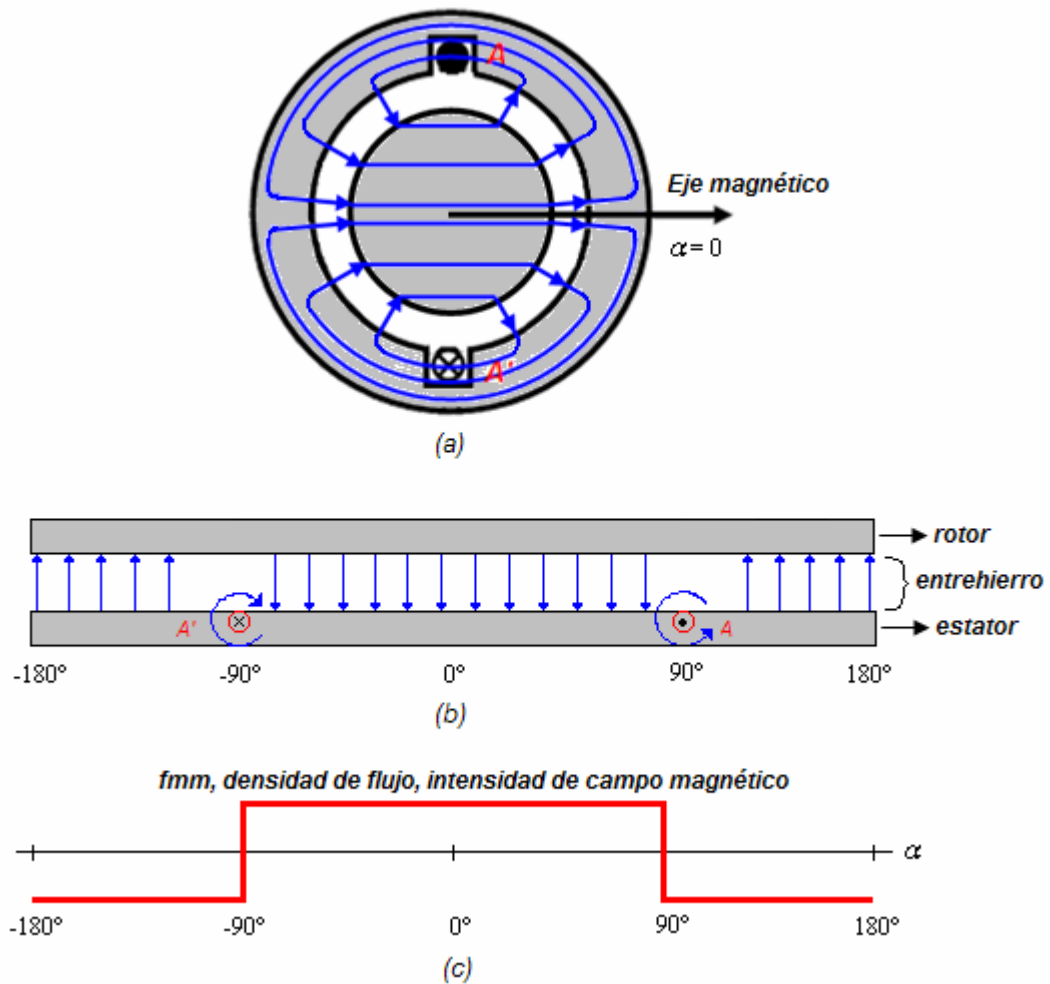


Figura 1-16: Campo magnético debido a una bobina en un estator con rotor

Al insertar el rotor del motor en la Figura 1-16b y teniendo en cuenta su material ferromagnético, la trayectoria de las líneas de flujo magnético cambia como se muestra en la Figura 1-16a, donde a través del entrehierro las líneas de flujo magnético saltan perpendicularmente entre estator y rotor. La Figura 1-16b es un corte y estiramiento del circuito magnético, donde el entrehierro en forma de anillo se muestra de manera horizontal y el estator se muestra bajo el rotor. El eje magnético de la bobina está a cero grados, el conductor  $A$  está a 90 grados y el conductor  $A'$  está a -90 grados. En la Figura 1-16c se muestra la distribución del campo magnético en el aire del entrehierro del motor (fmm, densidad de flujo e intensidad de campo); aquí se trata el campo magnético hacia fuera, desde el rotor hacia el estator, como positivo. Observe que la distribución de

campo magnético es de forma rectangular, sin embargo en los motores de inducción la distribución ideal es una distribución de campo magnético sinusoidal [1].

**1.4.2. Campo magnético producido por tres bobinas:** en la Figura 1-17b se observan tres bobinas idénticas e individuales, separadas entre sí 120 grados eléctricos ( $2\pi/3$  radianes) dentro de las ranuras del estator (conductores  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$ ). Las bobinas conducen corrientes también desplazadas 120 grados en su fase o en el tiempo con una secuencia  $ABC$  tal como se muestra en la Figura 1-17a. Las corrientes están identificadas mediante colores de tal forma que el color azul corresponde a la fase  $A$ , el color rojo a la fase  $B$  y el color verde a la fase  $C$ . Teniendo en cuenta que un valor positivo de corriente por la bobina  $AA'$  entra por el conductor  $A$  y sale por el conductor  $A'$ , se puede determinar la dirección del campo magnético producido por la bobina utilizando la ley de la mano derecha.

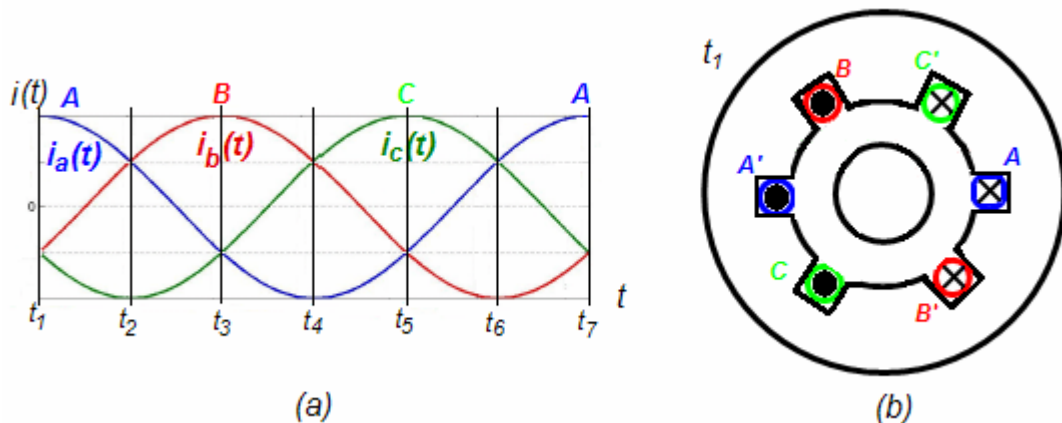


Figura 1-17: Bobinado trifásico del estator

Para hallar el campo magnético producido por las tres bobinas del estator, primero se encontrará el campo magnético producido por cada bobina y luego se sumarán vectorialmente para hallar el campo magnético resultante. En el instante de tiempo  $t_1$  que se indica en la Figura 1-18a, la corriente de la fase  $A$  está en su valor máximo positivo y las corrientes de las fases  $B$  y  $C$  están en un valor menor que su máximo negativo. Estas corrientes al fluir por sus respectivas bobinas, producen los campos magnéticos que se muestran en la Figura 1-18b. La dirección de estos campos magnéticos fue



obtenida utilizando la regla de la mano derecha. Obsérvese que la sumatoria vectorial de campos magnéticos produce un campo magnético resultante  $\phi_R$ . Ya que en un material las líneas de flujo magnético salen por el polo norte y entran al material por el polo sur, de la misma manera, las líneas de flujo del campo magnético resultante  $\phi_R$  entran al estator por el polo sur y sale del estator por el polo norte como se muestra en la Figura 1-18b.

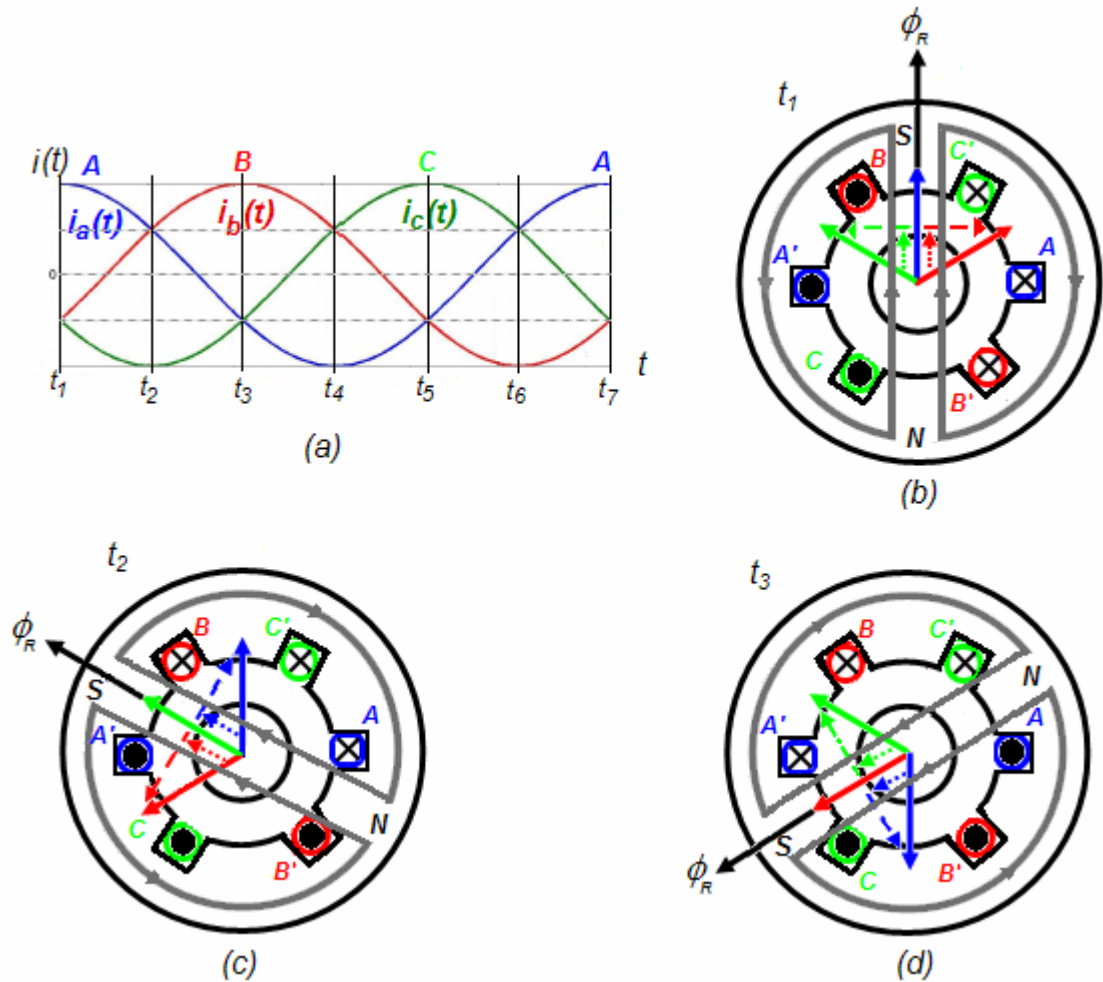


Figura 1-18: Campo magnético giratorio debido a tres bobinas con alimentación trifásica

Si se sigue el mismo procedimiento para el instante de tiempo  $t_2$  que se indica en la Figura 1-18a, las corrientes de las fases  $A$  y  $B$  están en un valor menor que su máximo positivo y la corriente de la fase  $C$  está en su valor máximo negativo. Estas corrientes al fluir por sus respectivas bobinas, producen los campos magnéticos que se muestran en la

Figura 1-18c. Esta vez la sumatoria vectorial de campos magnéticos produce un campo magnético resultante  $\phi_R$  de la misma magnitud que la que había en el instante de tiempo  $t_1$  pero girado 60 grados. Así, en el instante de tiempo  $t_2$ , 60 grados eléctricos después que el instante de tiempo  $t_1$ , el campo magnético resultante ha girado 60 grados pero su magnitud es constante. En el instante de tiempo  $t_3$  que se indica en la Figura 1-18a, el campo magnético resultante  $\phi_R$  habrá girado otros 60 grados tal como se muestra en la Figura 1-18d. Como conclusión de las Figuras 1-18b, 1-18c y 1-18d, el campo magnético del estator es un campo magnético único, de magnitud constante y giratorio. La velocidad del campo magnético giratorio varía directamente con la frecuencia, pero inversamente con el número de polos magnéticos [1], y es expresada por la siguiente ecuación:

$$\omega_{syn} = \frac{4\pi \cdot f}{p} \quad (1-14)$$

En unidades del SI,  $f$  se mide en hertz y  $\omega_{syn}$  se mide en radianes por segundo.

## 1.5. BOBINAS DE ESTATOR DISTRIBUIDAS SINUSOIDALMENTE

En el motor de inducción, cada bobina de fase del estator idealmente debe producir un campo magnético radial ( $F$ ,  $H$  y  $B$ ) distribuido sinusoidalmente en el aire del entrehierro [1]. Teóricamente, esto requiere que cada bobina de fase del estator esté distribuida sinusoidalmente [3]. Para visualizar esta distribución sinusoidal, considere la bobina para la fase-a mostrada en la Figura 1-19. Esta bobina está formada por la conexión en serie de cinco bobinas, cada una con un recorrido de 180 grados. El terminal 1' se conecta con el terminal 2, el terminal 2' se conecta con el terminal 3 y así sucesivamente. Note que el número de conductores en las ranuras del estator incrementa fuera del eje magnético, alcanzando su máximo en  $\theta = 90^\circ$ , además, como las bobinas están conectadas en serie los conductores transportan la misma corriente.

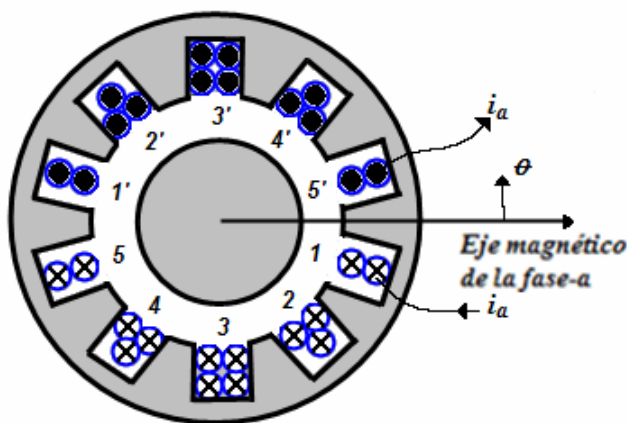


Figura 1-19: Bobina para la fase-a distribuida sinusoidalmente

La expresión para la distribución sinusoidal de densidad de conductor en la bobina para la fase-a de un motor de inducción de dos polos es (ver demostración en Apéndice B),

$$n_s(\theta) = \frac{N_s}{2} \cdot \text{sen}(\theta) \quad (1-15)$$

Donde  $N_s$  es el número total de vueltas de la bobina y  $\theta$  el ángulo medido en la dirección opuesta a las manecillas del reloj con respecto al eje magnético de la fase-a.

En un motor con múltiples polos (con  $p > 2$ ), la máxima densidad de conductor permanece en  $N_s/2$  (ver demostración en Apéndice C) [3], tal y como aparece en la ecuación 1-15 para un motor de dos polos, excepto que el ángulo  $\theta$  está expresado en radianes eléctricos. Por lo tanto, siempre se expresarán ángulos en todas las ecuaciones a lo largo de este trabajo por  $\theta$  en radianes eléctricos, de esa manera se crean las expresiones aplicables a motores de dos polos así como también a motores con múltiples polos.

La expresión para la intensidad del campo magnético en el aire del entrehierro producida por la corriente de la bobina para la fase-a en un motor de inducción de dos polos está dada por (ver demostración en Apéndice B),

$$H_a(\theta) = \frac{N_s}{2 \cdot \ell_g} \cdot i_a \cdot \cos(\theta) \quad (1-16)$$

Donde  $\ell_g$  es la distancia del aire del entrehierro e  $i_a$  la corriente de la bobina para la fase-a.

Para un motor de múltiples polos, la distribución de intensidad de campo magnético en el aire del entrehierro está dada por (ver demostración en apéndice C):

$$H_a(\theta) = \frac{N_s}{p \cdot \ell_g} \cdot i_a \cdot \cos(\theta) \quad (1-17)$$

Utilizando la ecuación 1-17, la densidad de flujo radial  $B_a(\theta)$  y la fmm  $F_a(\theta)$  actuante sobre el aire del entrehierro en un ángulo  $\theta$  pueden ser escritas como:

$$B_a(\theta) = \mu_o \cdot H_a(\theta) = \left( \frac{\mu_o \cdot N_s}{p \cdot \ell_g} \right) \cdot i_a \cdot \cos(\theta) \quad (1-18)$$

$$F_a(\theta) = \ell_g \cdot H_a(\theta) = \frac{N_s}{p} \cdot i_a \cdot \cos(\theta) \quad (1-19)$$

En la Figura 1-20 se muestra la distribución del campo magnético en el aire del entrehierro del motor (fmm, densidad de flujo e intensidad de campo), producida por la corriente de la bobina para la fase-a; aquí se trata el campo magnético hacia fuera, desde el rotor hacia el estator, como positivo. Sólo la ranura donde la densidad de conductor es máxima se muestra en la Figura 1-20a. Observe que la distribución de campo magnético es de forma co-sinusoidal.

La distribución de campo radial en el aire del entrehierro alcanza el máximo a lo largo del eje magnético de la fase-a, y en cualquier instante de tiempo la amplitud es linealmente proporcional al valor de  $i_a$  en ese tiempo. Nótese que independientemente de la corriente positiva o negativa en la fase-a, la distribución de densidad de flujo producida por ella en

el aire del entrehierro siempre tiene su máximo (positivo o negativo) a lo largo del eje magnético de la fase-a.

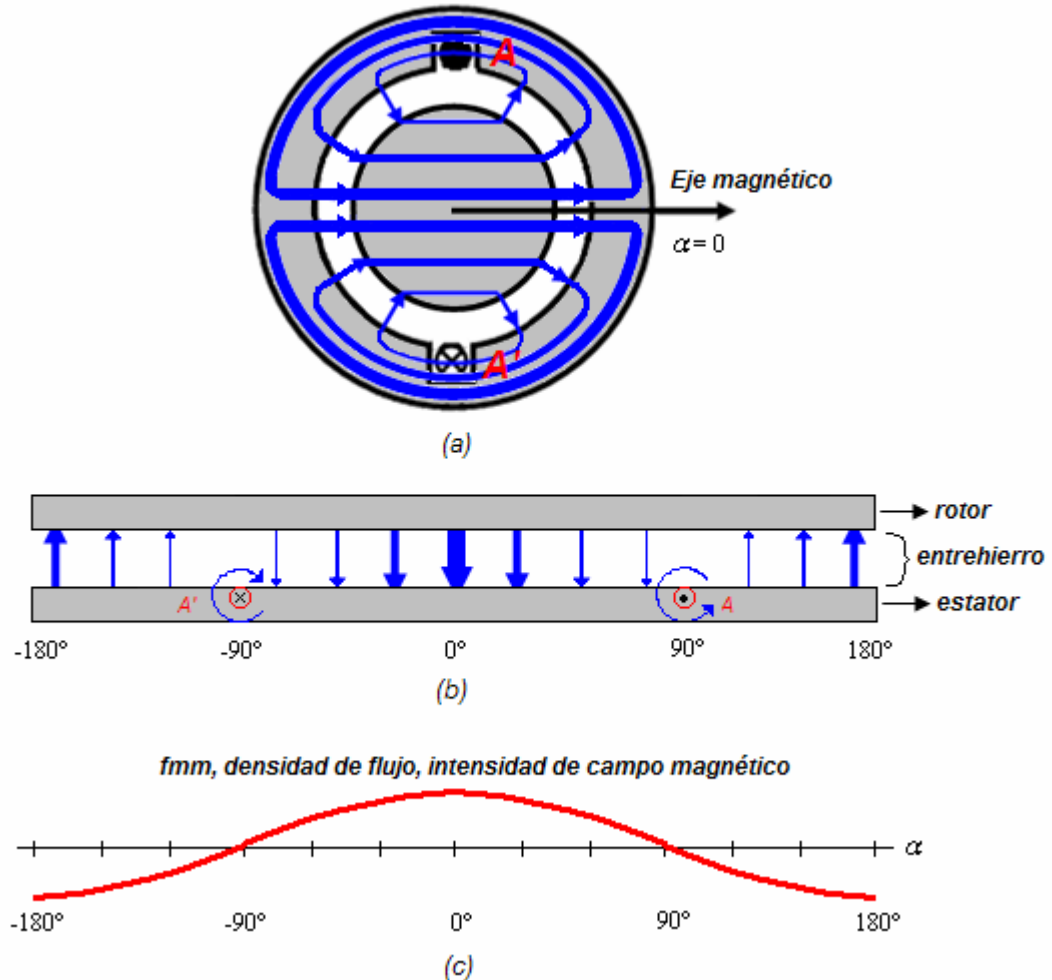


Figura 1-20: Campo magnético distribuido sinusoidalmente

Hasta ahora, sólo se ha considerado la bobina para la fase-a, la cual tiene su eje magnético a lo largo de  $\theta = 0^\circ$ . Hay otras dos bobinas idénticas distribuidas sinusoidalmente para la fase-b y la fase-c, con ejes magnéticos a lo largo de  $\theta = 120^\circ$  y  $\theta = 240^\circ$  respectivamente, como se representa esquemáticamente en la Figura 1-21a. Estas tres bobinas generalmente se conectan en configuración “ye” (Y) uniendo los terminales  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$ , como se muestra esquemáticamente en la Figura 1-21b. Por lo tanto, en cualquier tiempo:

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0 \quad (1-20)$$

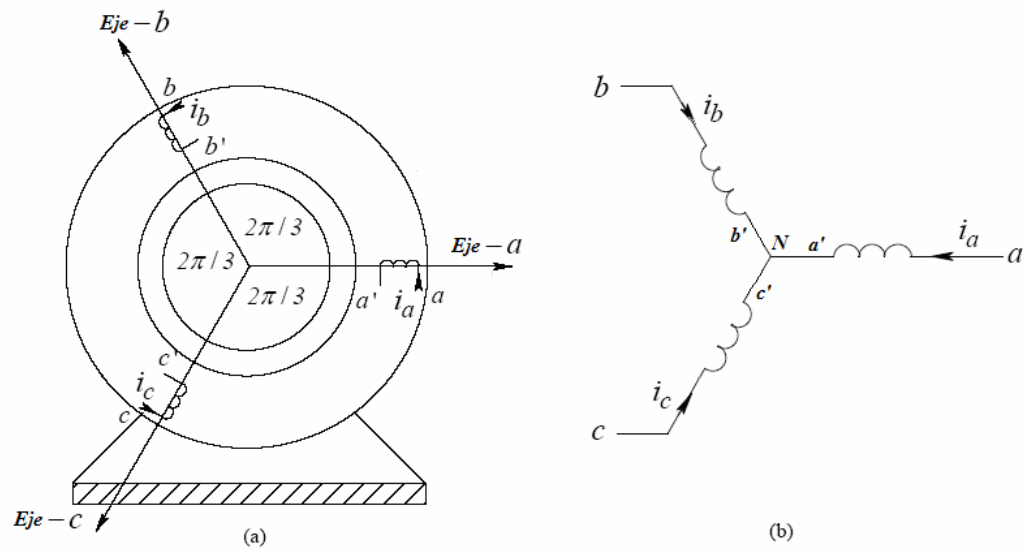


Figura 1-21: Bobinado trifásico del estator [4]

Las distribuciones de campo en el aire del entrehierro debido a las corrientes  $i_b$  e  $i_c$  son idénticas en forma sinusoidal a aquella debido a  $i_a$ , pero alcanzan el máximo a lo largo de sus respectivos ejes magnéticos de la fase-b y la fase-c.

## 1.6. INDUCTANCIAS DEL ESTATOR (ROTOR EN CIRCUITO ABIERTO)

Para definir las inductancias del bobinado de estator, se asumirá que el rotor está presente pero está eléctricamente inerte, es decir, está eléctricamente en circuito abierto. El análisis de esta sección se realizará para la fase-a del estator, pero de forma similar aplica para las fases b y c.

**1.6.1. Inductancia de Magnetización de Una Fase del Estator  $L_{m,1-fase}$**  : como se muestra en la Figura 1-22a, al excitar teóricamente sólo la fase-a mediante una corriente

$i_a$ , se producen dos componentes de flujo equivalentes, representadas en la Figura 1-22b:

- Flujo de magnetización, el cual cruza el aire del entrehierro y enlaza el rotor y otras fases del estator.
- Flujo de dispersión, el cual enlaza solamente la fase-a.

Por lo tanto, la auto-inductancia de una bobina de fase de estator es

$$L_{s,auto} = \frac{\lambda_a}{i_a} \Big|_{i_a, \text{solamente}} = \underbrace{\frac{\lambda_{a,dispersion}}{i_a}}_{L_{\ell s}} + \underbrace{\frac{\lambda_{a,magnetizacion}}{i_a}}_{L_{m,1-fase}} \quad (1-21)$$

$$L_{s,auto} = L_{\ell s} + L_{m,1-fase} \quad (1-22)$$

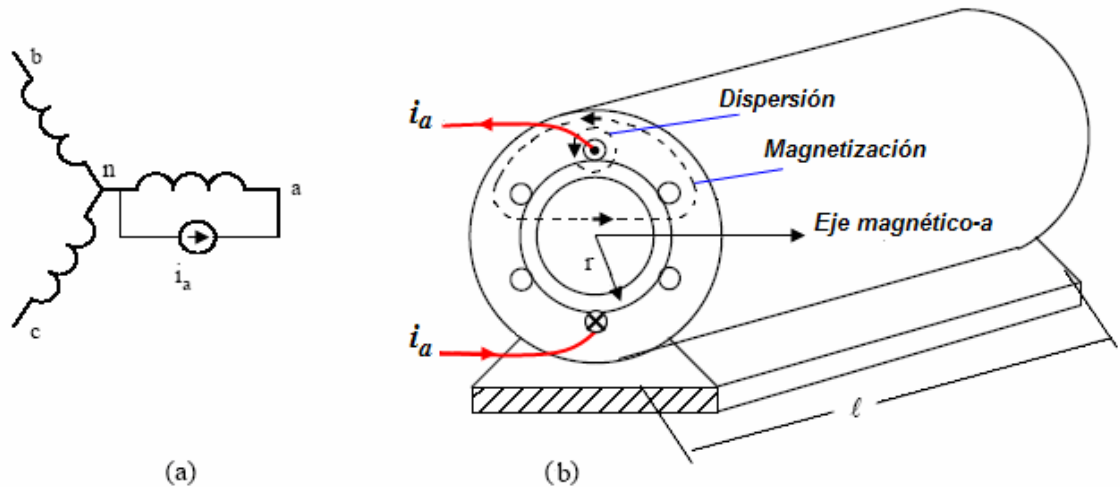


Figura 1-22. Inductancia de magnetización e inductancia de dispersión de una fase [4]

Para calcular el flujo de dispersión y la inductancia de dispersión asociada  $L_{\ell s}$  se requiere un sofisticado análisis de elementos finitos, pero la inductancia de magnetización de una fase  $L_{m,1-fase}$  puede ser fácilmente calculada igualando la energía almacenada en el aire del entrehierro a la energía almacenada en la bobina de una fase  $(L_{m,1-fase} \cdot i_a^2)/2$  (ver

desarrollo en el Apéndice D). La energía almacenada en el aire del entrehierro se obtiene integrando la densidad de energía  $B_a^2(\theta)/(2 \cdot \mu_0)$  sobre el volumen del aire del entrehierro [3], donde la densidad de flujo  $B_a(\theta)$  esta dada por la ecuación 1-18.

$$L_{m,1-fase} = \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot r \cdot \ell}{\ell_g} \left( \frac{N_s}{p} \right)^2 \quad (1-23)$$

Donde,  $\ell$  es la longitud del rotor a lo largo de su eje de apoyo,  $r$  el radio medio del aire del entrehierro,  $N_s$  es igual al número de vueltas por fase y  $p$  es igual al número de polos.

**1.6.2. Inductancia Mutua del Estator  $L_{mutua}$**  : como se muestra en la Figura 1-23, la inductancia mutua  $L_{mutua}$  entre dos fases de estator puede ser calculada teóricamente excitando la fase-a con  $i_a$  y calculando el flujo enlazado de la fase-b.

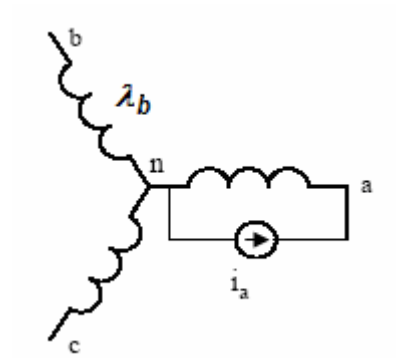


Figura 1-23: Inductancia mutua [4]

$$L_{mutua} = \frac{\lambda_b}{i_a} \Big|_{i_b=i_c=0, \text{rotor abierto}} \quad (1-24)$$

Note que solamente el flujo de magnetización (no el de dispersión) producido por  $i_a$  enlaza la bobina de la fase-b. Por lo tanto, el flujo enlazado en la bobina de la fase-b



debido a  $i_a$  es el flujo magnético enlazado de la bobina de la fase-a multiplicado por el coseno del ángulo entre las dos bobinas, (demostrado en el Apéndice E) el cual en este caso es 120 grados:

$$\lambda_{b,debido a i_a} = \cos(120^\circ) \cdot \lambda_{a,magnetización\ debido\ a\ i_a} \quad (1-25)$$

$$\lambda_{b,debido a i_a} = -\frac{1}{2} \cdot \lambda_{a,magnetización\ debido\ a\ i_a} \quad (1-26)$$

Por lo tanto, utilizando las ecuaciones 1-21 y 1-26, la ecuación 1-24 queda

$$L_{mutua} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{a,magnetización\ debido\ a\ i_a}}{i_a} \quad (1-27)$$

$$L_{mutua} = -\frac{1}{2} \cdot L_{m,1-fase} \quad (1-28)$$

La misma inductancia mutua existe entre la fase-a y la fase-c, y entre la fase-b y la fase-c.

**1.6.3. Inductancia de Magnetización por Fase  $L_m$ :** bajo la condición que el rotor está en circuito abierto y las tres fases están excitadas como se muestra en la Figura 1-21b, de tal manera que la suma de las tres corrientes de fase sea cero como es dado por la ecuación 1-20, la inductancia de magnetización por fase es (ver demostración en el Apéndice F)

$$L_m = \frac{\lambda_{a,magnetización}}{i_a} \Bigg|_{i_a+i_b+i_c=0, \text{ rotor abierto}} = \frac{3}{2} \cdot L_{m,1-fase} \quad (1-29)$$

Utilizando la ecuación 1-23,

$$L_m = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot r \cdot \ell}{\ell_g} \cdot \left( \frac{N_s}{p} \right)^2 \quad (1-30)$$

Note que la inductancia de magnetización de una fase  $L_{m,1-fase}$  no incluye el efecto de acoplamiento mutuo de las otras dos fases, mientras que la inductancia de magnetización por fase  $L_m$  si lo incluye. Por ello, el factor de  $3/2$ .

**1.6.4. Inductancia del Estator  $L_s$ :** debido a las tres corrientes de estator (no incluyendo el flujo de enlace debido a las corrientes del rotor), el flujo enlazado total de la fase-a puede ser expresado como

$$\lambda_a \Big|_{rotor\ abierto} = \lambda_{a,dispersión} + \lambda_{a,magnetización} \quad (1-31)$$

$$\lambda_a \Big|_{rotor\ abierto} = L_{\ell s} \cdot i_a + L_m \cdot i_a \quad (1-32)$$

$$\lambda_a \Big|_{rotor\ abierto} = L_s \cdot i_a \quad (1-33)$$

Donde, la inductancia del estator  $L_s$  es,

$$L_s = L_{\ell s} + L_m \quad (1-34)$$

Por simetría, la inductancia del estator para las fases b y c está dada también por la ecuación 1-34.

## 1.7. BOBINADOS EQUIVALENTES EN UN ROTOR JAULA DE ARDILLA

En la elaboración de las ecuaciones para el análisis dinámico, se reemplazará la jaula de ardilla en el rotor por un conjunto de tres bobinas de fase distribuidas sinusoidalmente, de tal forma que se manifiesten los mismos efectos del estator. El número de vueltas en cada fase de estas bobinas equivalentes de rotor puede ser seleccionado arbitrariamente. Sin embargo, el más simple, por lo tanto una elección obvia es asumir que cada fase del rotor tenga  $N_s$  vueltas (similares a las bobinas del estator), como es mostrado en la Figura

1-24a. Los voltajes y corrientes en estas bobinas son definidos en la Figura 1-24b. Las tres corrientes de fase del rotor suman cero en cualquier instante de tiempo.

$$i_A(t) + i_B(t) + i_C(t) = 0 \quad (1-35)$$

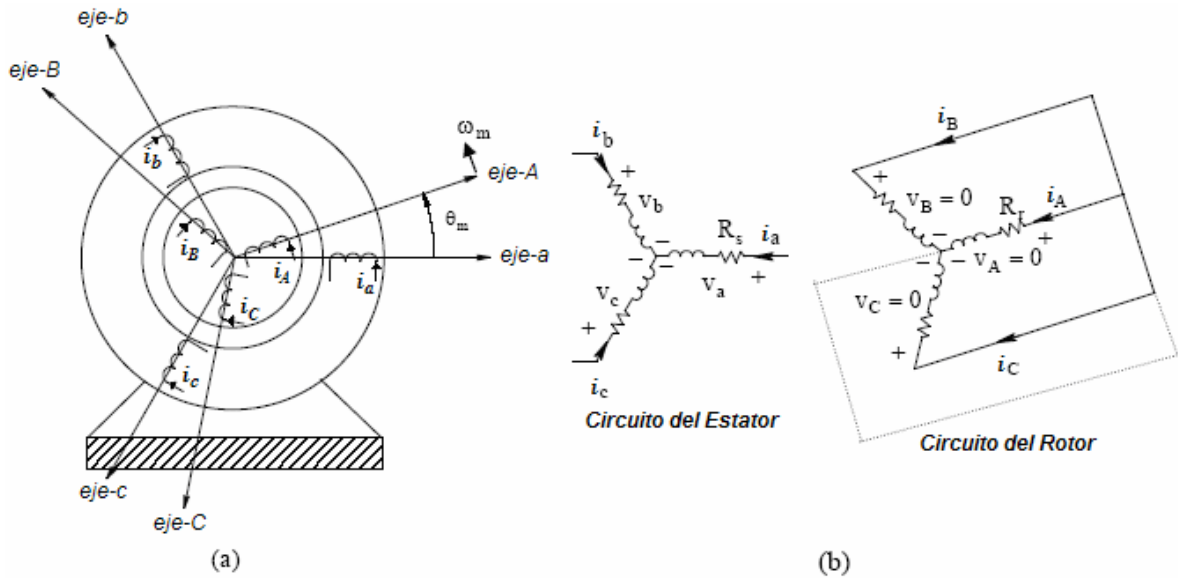


Figura 1-24: Circuito del rotor representado por tres bobinas de fase [4]

Note que similar a las bobinas del estator, una corriente positiva hacia el interior de una bobina de rotor produce líneas de flujo en dirección hacia el exterior en forma radial.

**1.7.1. Inductancias del Bobinado del Rotor (Estator con Circuito Abierto):** el flujo de magnetización producido por cada bobina equivalente del rotor tiene el mismo camino magnético al cruzar el aire del entrehierro y el mismo número de vueltas como las bobinas de fase del estator. Por lo tanto, cada fase del rotor tiene la misma inductancia de magnetización  $L_{m,1-fase}$  como el mismo flujo magnético producido por la bobina de fase del estator, aunque su inductancia de dispersión  $L_{lr}$  puede ser diferente que  $L_{ls}$ . Similarmente,  $L_{mutua}$  entre dos fases del rotor sería la misma que aquella entre dos fases del estator. Las igualdades anteriores también implican que la inductancia de

magnetización por fase  $L_m$  en el circuito del rotor (bajo la condición que en cualquier tiempo,  $i_A + i_B + i_C = 0$ ) es la misma que aquella en el estator.

$$L_m = \frac{3}{2} \cdot L_{m,1-fase} \quad (1-36)$$

y

$$L_r = L_{\ell_r} + L_m \quad (1-37)$$

Note que con la elección del mismo número de vueltas en las tres fases equivalentes de las bobinas del rotor como en las bobinas del estator, la inductancia de dispersión del rotor  $L_{\ell_r}$  en la ecuación 1-37 es la misma que  $L'_{\ell_r}$  en el circuito equivalente de estado estable por fase de un motor de inducción [3] donde el rotor está reflejado en el estator. Lo mismo aplica para la resistencia de estas bobinas de rotor equivalentes, es decir,  $R_r = R'_r$ .

## 1.8. INDUCTANCIAS MUTUAS ENTRE LAS BOBINAS DE FASE DEL ESTATOR Y DEL ROTOR.

Si  $\theta_m = 0$ , en la Figura 1-24a, de tal forma que el eje magnético de la fase-a del estator esté alineado con el eje magnético de la fase-A del rotor, la inductancia mutua entre las dos fases está en su máximo positivo y es igual a  $L_{m,1-fase}$ . En cualquier otra posición del rotor (incluyendo  $\theta_m = 0$ ), esta inductancia mutua entre la fase-a del estator y la fase-A del rotor puede ser expresada como

$$L_{a.A} = L_{m,1-fase} \cdot \cos(\theta_m) \quad (1-38)$$

Expresiones similares pueden ser escritas para las inductancias mutuas entre cualquiera de las fases del estator y cualquiera de las fases del rotor. La ecuación 1-38 muestra que

la inductancia mutua y por lo tanto el flujo enlazado entre las fases del estator y del rotor varían con la posición  $\theta_m$  a medida que el rotor gira.

## 1.9. USO DE VECTORES ESPACIALES PARA REPRESENTAR DISTRIBUCIONES DE CAMPO SINUSOIDAL EN EL AIRE DEL ENTREHIERRO

En cualquier instante de tiempo  $t$ , cada bobina de fase produce una distribución de densidad de flujo sinusoidal (o fmm) en el aire del entrehierro, la cual puede ser representada por un vector espacial (de longitud apropiada) a lo largo del eje magnético de esa fase (u opuesto, si la corriente de fase en ese instante es negativa). Éstos vectores espaciales de la fmm son  $\vec{F}_a^a(t)$ ,  $\vec{F}_b^a(t)$  y  $\vec{F}_c^a(t)$ , como se muestra en la Figura 1-25a. Al representar una distribución de campo en el aire del entrehierro con un vector espacial, se debería notar lo siguiente:

- El máximo de la distribución de campo está representado mediante la magnitud del vector espacial  $\hat{F}_s(t)$ .
- El ángulo, donde la distribución de campo tiene su máximo positivo, medido con respecto al eje magnético de la fase-a está representado mediante la orientación del vector espacial  $\theta_{F_s}$ .

Similar a los fasores, los vectores espaciales son expresados mediante números complejos. Los vectores espaciales son denotados mediante una “ $\rightarrow$ ” por encima de la cantidad instantánea y el superíndice “a” indica que el eje-a del estator es el eje de referencia.

Asumiendo que no hay saturación magnética, la distribución de la fmm resultante en el aire del entrehierro debida a las tres fases en ese instante de tiempo  $t$  puede ser representada simplemente, utilizando suma vectorial, por el vector espacial resultante

mostrado en la Figura 1-25b, donde el subíndice “s” representa las cantidades del estator combinadas:

$$\vec{F}_s^a(t) = \vec{F}_a^a(t) + \vec{F}_b^a(t) + \vec{F}_c^a(t) = \hat{F}_s(t) \cdot e^{j\theta_{F_s}} \quad (1-39)$$

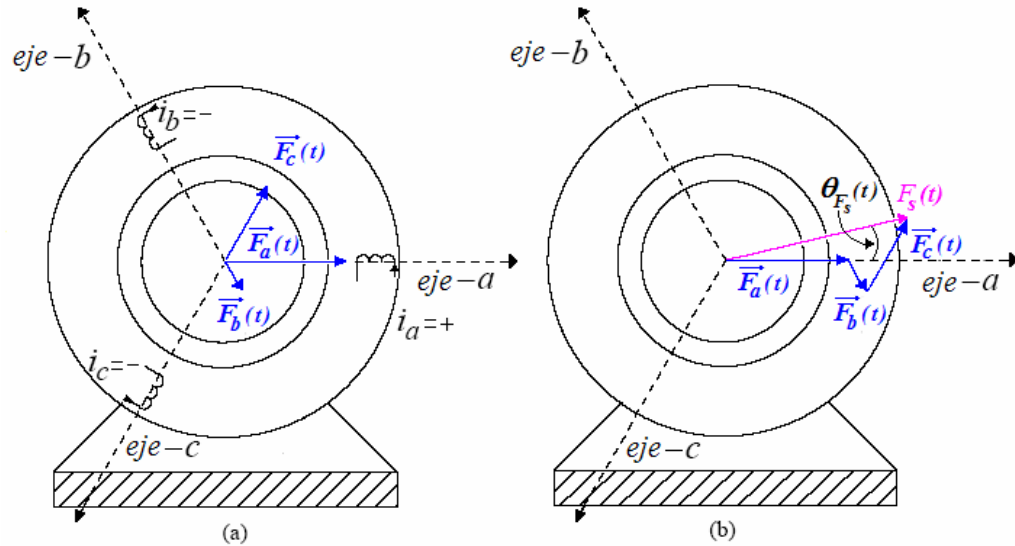


Figura 1-25: Representación del vector espacial de la fmm [4]

La explicación anterior provee un principio físico básico para entender los vectores espaciales. Se debe notar que distinto a los fasores, los vectores espaciales son también aplicables bajo condiciones dinámicas.

Es fácil visualizar el uso de los vectores espaciales para representar distribuciones de campo ( $F$ ,  $B$  y  $H$ ), las cuales están distribuidas sinusoidalmente en el aire del entrehierro en cualquier instante de tiempo. Sin embargo, distinto a las cantidades de campo, las corrientes, los voltajes y los flujos enlazados de las bobinas de fase son cantidades escalares, las cuales no son fáciles de visualizar. Los vectores espaciales de corriente, voltaje y flujo enlazado resultantes para el estator son calculados por la multiplicación de los valores de fase instantáneos respectivos con las orientaciones de los bobinados de estator mostrados en la Figura 1-26a.

$$\vec{i}_s^a(t) = i_a(t) \cdot e^{j0} + i_b(t) \cdot e^{j2\pi/3} + i_c(t) \cdot e^{j4\pi/3} = \hat{I}_s(t) \cdot e^{j\theta_{i_s}(t)} \quad (1-40)$$

$$\vec{v}_s^a(t) = v_a(t) \cdot e^{j0} + v_b(t) \cdot e^{j2\pi/3} + v_c(t) \cdot e^{j4\pi/3} = \hat{V}_s(t) \cdot e^{j\theta_{v_s}(t)} \quad (1-41)$$

y

$$\vec{\lambda}_s^a(t) = \lambda_a(t) \cdot e^{j0} + \lambda_b(t) \cdot e^{j2\pi/3} + \lambda_c(t) \cdot e^{j4\pi/3} = \hat{\lambda}_s(t) \cdot e^{j\theta_{\lambda_s}(t)} \quad (1-42)$$

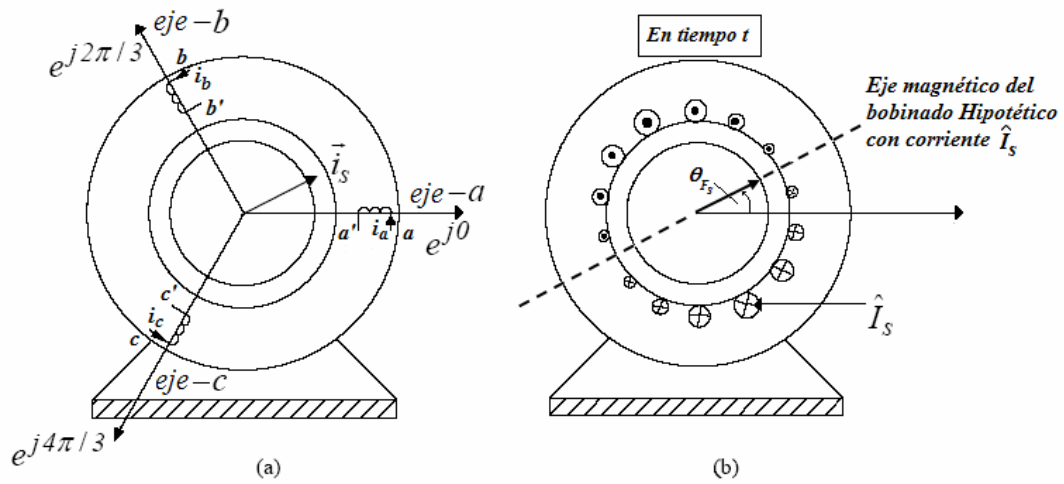


Figura 1-26: Interpretación física del vector espacial de la corriente de estator [4].

El vector espacial de la corriente de estator  $\vec{i}_s^a(t)$  se presta a sí mismo para una muy útil y simple interpretación física mostrada por la Figura 1-26b, note que en la ecuación 1-39,  $\vec{F}_s^a(t) = (N_s/p) \cdot \vec{i}_s^a(t)$ :

En un instante de tiempo  $t$ , la corriente  $\vec{i}_s^a = \hat{I}_s \cdot e^{j\theta_{i_s}}$  produce la misma fmm actuando sobre el aire del entrehierro (por lo tanto la misma distribución de densidad de flujo) que la producida por las tres corrientes de fase del estator de la Figura 1-26a. Es decir, una corriente igual a  $\hat{I}_s$  fluyendo a través de una bobina equivalente distribuida sinusoidalmente, como la mostrada en la Figura 1-26b, con su eje magnético orientado en  $\theta_{i_s} = \theta_{F_s}$ , produce la misma fmm que las tres corrientes de fase del estator. Esta bobina equivalente tiene el mismo número de vueltas  $N_s$  distribuido sinusoidalmente como cualquiera de las bobinas de fase.

La anterior explicación física no solo permite al vector espacial de la corriente de estator ser visualizado, sino que también simplifica la obtención del par electromagnético, el cual ahora se puede calcular sencillamente sobre esta bobina equivalente, en lugar de tener que calcularlo separadamente sobre cada una de las bobinas de fase y luego sumarlos. Ecuaciones de vectores espaciales similares se pueden escribir en el circuito del rotor con el eje-A como referencia.

### 1.9.1. Relación entre Fasores y Vectores Espaciales en Estado Estable Sinusoidal:

bajo una condición de estado estable sinusoidal balanceado, los fasores de voltaje y corriente de la fase-a tienen la misma orientación que los vectores espaciales de voltaje y corriente en el tiempo  $t = 0$ , como es mostrado para el caso de la corriente en la Figura 1-27.

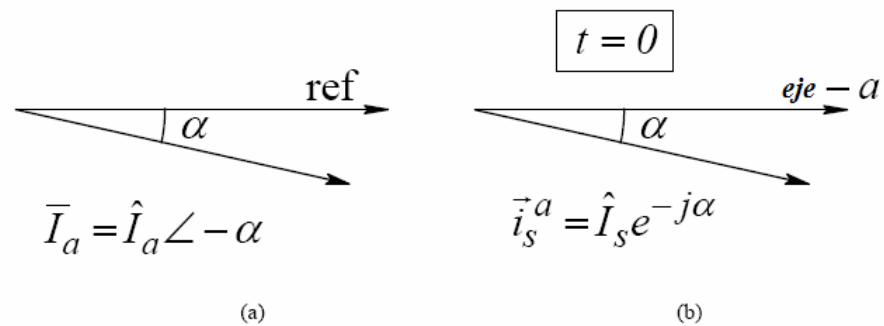


Figura 1-27: Relación entre un vector espacial y un fasor en estado estable sinusoidal [4]

La demostración de la afirmación anterior se muestra en el Apéndice G.

$$\vec{i}_s^a(0) = \hat{I}_s \cdot e^{-j\alpha} \tag{1-43}$$

Comparando el fasor de corriente  $\bar{I}_a = \hat{I}_a \angle -\alpha$  de la fase-a con la ecuación 1-43, se concluye que el vector espacial de la corriente de estator en el tiempo  $t = 0$  tiene la misma orientación que el fasor de corriente de la fase-a y sus amplitudes están relacionadas por un factor de  $3/2$ .



$$\hat{I}_s = \frac{3}{2} \cdot \hat{I}_a \quad (1-44)$$

Esta relación es muy útil puesto que en los análisis dinámicos a menudo se comienza con la máquina de inducción operando inicialmente en un estado estable sinusoidal balanceado.

**1.9.2. Componentes de Fase de Vectores Espaciales:** si las tres bobinas del estator en la Figura 1-28a son conectadas en configuración “ye” ( $Y$ ), la suma de sus corrientes es cero en cualquier instante de tiempo  $t$ . Mediante la Ley de Corrientes de Kirchhoff  $i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$ . Por lo tanto como se demuestra en el Apéndice H, en cualquier instante de tiempo  $t$ , un vector espacial está construido de un único conjunto de componentes de fase, el cual puede ser obtenido mediante la multiplicación de la proyección del vector espacial a lo largo de los tres ejes por  $2/3$ .

## 1.10. FLUJOS ENLAZADOS

En esta sección, se desarrollarán las ecuaciones para los flujos enlazados en el estator y en el rotor en términos de las corrientes. Se comenzará por asumir que el estator y el rotor están en circuito abierto, uno por uno. Luego por superposición, basados en el supuesto de que el material magnético está en su rango lineal, se obtendrán los flujos enlazados cuando las corrientes del estator y del rotor estén presentes simultáneamente.

**1.10.1. Flujo Enlazado del Estator (Rotor en Circuito Abierto):** de acuerdo con la Ley de Corrientes de Kirchhoff, las corrientes en los bobinados del estator suman cero. Inicialmente, se asumirá que el rotor está “de alguna manera” en circuito abierto. Utilizando las ecuaciones 1-33 y 1-34, al escribir la ecuación del flujo enlazado para cada fase y multiplicando cada ecuación por su orientación de bobina se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$[\lambda_{a,i_s}(t) = L_{\ell_s} \cdot i_a(t) + L_m \cdot i_a(t)] \times e^{j0} \quad (1-45)$$

$$[\lambda_{b,i_s}(t) = L_{\ell_s} \cdot i_b(t) + L_m \cdot i_b(t)] \times e^{j2\pi/3} \quad (1-46)$$

y,

$$[\lambda_{c,i_s}(t) = L_{\ell_s} \cdot i_c(t) + L_m \cdot i_c(t)] \times e^{j4\pi/3} \quad (1-47)$$

Utilizando las ecuaciones 1-45 hasta 1-47 dentro de la ecuación 1-42 (donde el flujo enlazado del estator debido a las corrientes del rotor no está incluido), el vector espacial del flujo enlazado del estator es

$$\vec{\lambda}_{s,i_s}^a(t) = \underbrace{L_{\ell_s} \cdot \vec{i}_s^a(t)}_{\text{debido al flujo de dispersión}} + \underbrace{L_m \cdot \vec{i}_s^a(t)}_{\text{debido al flujo de magnetización}} = L_s \cdot \vec{i}_s^a(t) \quad (1-48)$$

Como en el caso de los vectores espaciales de la corriente y el voltaje del estator, la proyección del vector espacial del flujo enlazado del estator a lo largo de un eje de fase, multiplicado por un factor de  $2/3$ , es igual al flujo enlazado de esa fase.

Se vio antes que los vectores espaciales  $\vec{i}_s^a(t)$  y  $\vec{F}_s^a(t)$  están alineados como se muestra en la Figura 1-28; ellos están relacionados por una constante. Alineado con  $\vec{F}_s^a(t)$ , relacionado por una constante  $\mu_0/\ell_g$ , está el vector espacial  $\vec{B}_{s,i_s}^a(t)$ , el cual representa la distribución de densidad de flujo debida solamente a las corrientes del estator. De forma similar, el flujo enlazado del estator  $\vec{\lambda}_{s,i_s}^a(t)$  en la Figura 1-28 (no incluyendo el flujo enlazado debido a las corrientes del rotor) está relacionado con  $\vec{i}_s^a(t)$  por una constante  $L_s$  como se muestra en la ecuación 1-48. Por lo tanto, todas las cantidades de campo, con el rotor en circuito abierto están alineadas, como se muestra en la Figura 1-28. Note que el superíndice “a” no es utilizado cuando se dibujan los diversos vectores espaciales; necesita ser utilizado sólo mientras son expresados matemáticamente, para indicar que está definido con respecto a un eje de referencia, el cual en este caso es el eje magnético de la fase-a.

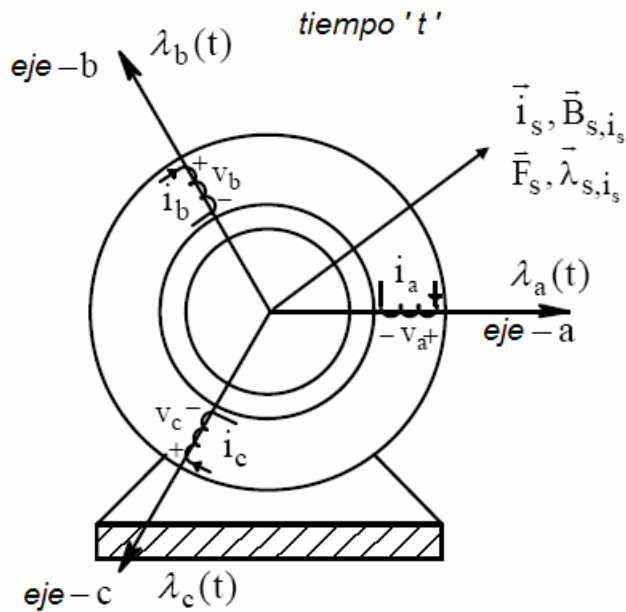


Figura 1-28: Vectores espaciales del estator alineados (rotor en circuito abierto) [4]

**1.10.2. Flujo Enlazado del Rotor (Estator en Circuito Abierto):** las corrientes en los bobinados equivalentes del rotor suman cero, como es expresado por la ecuación 1-35. Asumiendo que el rotor “de algún modo” tiene corrientes cuando el estator está en circuito abierto, por analogía podemos escribir la expresión para el vector espacial del flujo enlazado del rotor como

$$\vec{\lambda}_{r,i_r}^A(t) = \underbrace{L_{\ell r} \cdot \vec{i}_r^A(t)}_{\text{debido al flujo de dispersión}} + \underbrace{L_m \cdot \vec{i}_r^A(t)}_{\text{debido al flujo de magnetización}} = L_r \cdot \vec{i}_r^A(t) \quad (1-49)$$

Donde, el superíndice “A” indica que el eje de la fase-A del rotor es elegido como el eje de referencia con un ángulo de  $0^\circ$ , y  $L_r = L_{\ell r} + L_m$ . Similar al caso del estator, todas las cantidades de campo con el estator en circuito abierto están alineadas, como se muestra en la Figura 1-29.

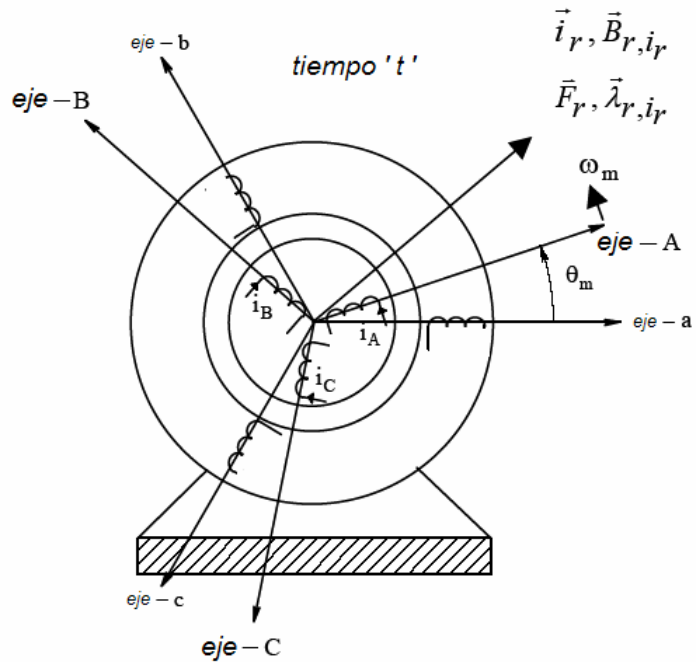


Figura 1-29: Vectores espaciales del rotor alineados (estator en circuito abierto) [4]

### 1.10.3. Flujos Enlazados del Estator y del Rotor (Corrientes Simultáneas de Estator y de Rotor):

cuando las corrientes del estator y el rotor están presentes simultáneamente, el flujo que es enlazado por cualquiera de las fases del estator es el debido tanto a las corrientes del estator como a las corrientes del rotor. Las densidades del flujo de magnetización en el aire del entrehierro debidas a las corrientes de estator y de rotor se suman como vectores cuando esas corrientes están presentes simultáneamente. Por lo tanto, el flujo enlazado del estator, incluyendo el flujo de dispersión debido a las corrientes del estator pueden ser obtenido utilizando las ecuaciones 1-48 y 1-49 como

$$\vec{\lambda}_s^a(t) = L_s \cdot \vec{i}_s^a(t) + L_m \cdot \vec{i}_r^a(t) \quad (1-50)$$

Donde, el vector espacial de la corriente del rotor está definido también con respecto al eje de la fase-a del estator. De forma similar en el circuito del rotor, se puede expresar,

$$\vec{\lambda}_r^A(t) = L_m \cdot \vec{i}_s^A(t) + L_r \cdot \vec{i}_r^A(t) \quad (1-51)$$

Donde, el vector espacial de la corriente del estator está también definido con respecto al eje de la fase-A del rotor.

## 1.11. ECUACIONES DE VOLTAJE DEL ESTATOR Y DEL ROTOR EN TÉRMINOS DE VECTORES ESPACIALES

Las ecuaciones de fase individual pueden ser combinadas para obtener la ecuación del vector espacial como sigue:

$$\left[ v_a(t) = R_s i_a(t) + \frac{d}{dt} \lambda_a(t) \right] \times e^{j0} \quad (1-52)$$

$$\left[ v_b(t) = R_s i_b(t) + \frac{d}{dt} \lambda_b(t) \right] \times e^{j2\pi/3} \quad (1-53)$$

y,

$$\left[ v_c(t) = R_s i_c(t) + \frac{d}{dt} \lambda_c(t) \right] \times e^{j4\pi/3} \quad (1-54)$$

Sumando las tres ecuaciones anteriores y aplicando las definiciones de vectores espaciales, la ecuación del estator puede ser escrita como

$$\vec{v}_s^a(t) = R_s \cdot \vec{i}_s^a(t) + \frac{d}{dt} \vec{\lambda}_s^a(t) \quad (1-55)$$

Similar al desarrollo en el circuito del estator, en el circuito del rotor

$$\underbrace{\vec{v}_r^A(t)}_{=0} = R_r \cdot \vec{i}_r^A(t) + \frac{d}{dt} \vec{\lambda}_r^A(t) \quad (1-56)$$

Donde en un rotor de jaula de ardilla, todos los voltajes de fase equivalentes son individualmente cero y  $\vec{v}_r^A(t) = 0$ .

El uso de vectores espaciales ha permitido expresar muy rápidamente los flujos enlazados del estator y del rotor (ecuaciones 1-50 y 1-51), los cuales en una forma compacta incluyen el acoplamiento mutuo entre las seis (6) bobinas: tres (3) sobre el estator y tres (3) sobre el rotor equivalente. En términos de las cantidades de fase de una máquina de inducción, se desarrollaron las ecuaciones de voltaje para el rotor y el estator, expresadas en una forma de vector espacial compacto (ecuaciones 1-55 y 1-56). Estas ecuaciones de voltaje incluyen las derivadas con respecto al tiempo de los flujos enlazados que dependen de la posición del rotor. Esta dependencia puede ser vista si se examinan las ecuaciones de flujo enlazado expresándolas con vectores espaciales de corriente definidos con respecto a sus propios ejes de referencia (Figura 1-24) como

$$\vec{i}_r^a(t) = \vec{i}_r^A(t) \cdot e^{j\theta_m} \quad (1-57)$$

y

$$\vec{i}_s^A(t) = \vec{i}_s^a(t) \cdot e^{-j\theta_m} \quad (1-58)$$

Utilizando las dos ecuaciones anteriores en las ecuaciones de flujo enlazado (ecuaciones 1-50 y 1-51),

$$\vec{\lambda}_s^a(t) = L_s \cdot \vec{i}_s^a(t) + L_m \cdot \vec{i}_r^A(t) \cdot e^{j\theta_m} \quad (1-59)$$

y

$$\vec{\lambda}_r^A(t) = L_m \cdot \vec{i}_s^a(t) \cdot e^{-j\theta_m} + L_r \cdot \vec{i}_r^A(t) \quad (1-60)$$

Las ecuaciones de flujo enlazado en la forma anterior muestran claramente su dependencia con respecto a la posición del rotor  $\theta_m$  para valores dados de las corrientes del estator y del rotor en cualquier instante de tiempo. Por esta razón, las ecuaciones de voltaje en cantidades de fase, expresadas en forma de vector espacial por las ecuaciones 1-55 y 1-56, las cuales incluyen las derivadas con respecto al tiempo de los flujos enlazados, son complicadas de solucionar. Es posible hacer éstas ecuaciones más simples utilizando una transformación llamada transformación dq.

## 2. TÉCNICAS DE CONTROL PARA EL MOTOR DE INDUCCIÓN

La única manera efectiva de obtener un motor de inducción de velocidad variable, es alimentar el motor de inducción con tres voltajes de fase, de frecuencia y amplitud variable. Una frecuencia variable es requerida porque la velocidad del rotor depende de la velocidad del campo magnético giratorio proporcionado por el estator y un voltaje variable es requerido porque la impedancia del motor disminuye a bajas frecuencias, y por consiguiente los voltajes deben reducirse para mantener la corriente en niveles aceptables.

Existen varias formas de controlar un motor de inducción para obtener las condiciones de alimentación antes mencionadas, estas formas de control pueden clasificarse en tres grandes categorías de acuerdo a su desempeño; el control escalar, el control vectorial y control directo del par.

### 2.1. CONTROL ESCALAR

También llamado control V/F (voltaje/frecuencia) debido a que se realiza un cambio tanto en la frecuencia como en el voltaje aplicado al estator. Está basado en el modelo estático del motor de inducción y su operación típica es en lazo abierto.

Si la frecuencia eléctrica aplicada al estator de un motor de inducción se cambia, la velocidad de rotación del campo magnético del estator  $\omega_{syn}$ , cambiará en proporción directa al cambio de la frecuencia eléctrica [1].

$$\omega_{syn} = \frac{4\pi \cdot f}{p} \quad (2-1)$$

La velocidad sincrónica del motor en condiciones nominales se conoce como velocidad base. Utilizando el control escalar, es posible ajustar la velocidad del motor por encima y por debajo de la velocidad base. Sin embargo, es importante mantener ciertos límites de voltaje y par de carga en el motor, mientras haya variación en la frecuencia, para garantizar una operación segura [1]. Cuando se opere a velocidades por debajo de la velocidad base del motor (disminución de frecuencia), es necesario reducir el voltaje aplicado al estator en proporción a la disminución de frecuencia, ya que si no se hace, se producirán corrientes de magnetización excesivas y el material ferromagnético del núcleo del motor de inducción se saturará. Cuando se opere a velocidades por encima de la velocidad base del motor (aumento de frecuencia), el voltaje de estator debe mantenerse constante en su valor nominal, ya que si se aumenta, se puede vencer el aislamiento eléctrico que poseen los bobinados del motor.

Otra variable que se ve afectada por el cambio de velocidad es el par electromagnético, el cual se muestra en la Figura 2-1. En ella se puede observar que el par electromagnético máximo disminuye si se trabaja por debajo o por encima de la velocidad base.

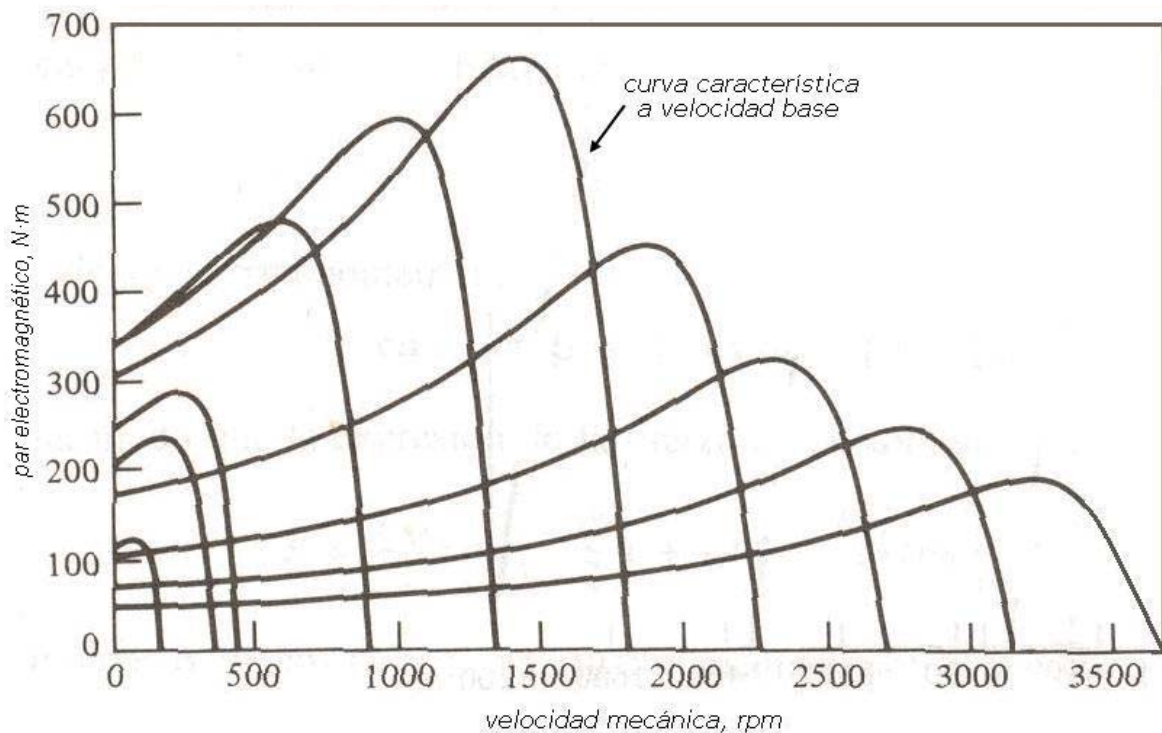


Figura 2-1: Característica par electromagnético – velocidad para todas las frecuencias [1]



La Figura 2-2 muestra un esquema simple de control escalar o control V/F, la relación entre la magnitud del voltaje y su frecuencia se conoce como ley de control. Este tipo de control es simple de implementar y económico; sin embargo, el desempeño de esta estrategia es bajo debido a que regula pobremente el flujo del campo magnético a velocidades bajas y además no permite controlar el par electromagnético del motor

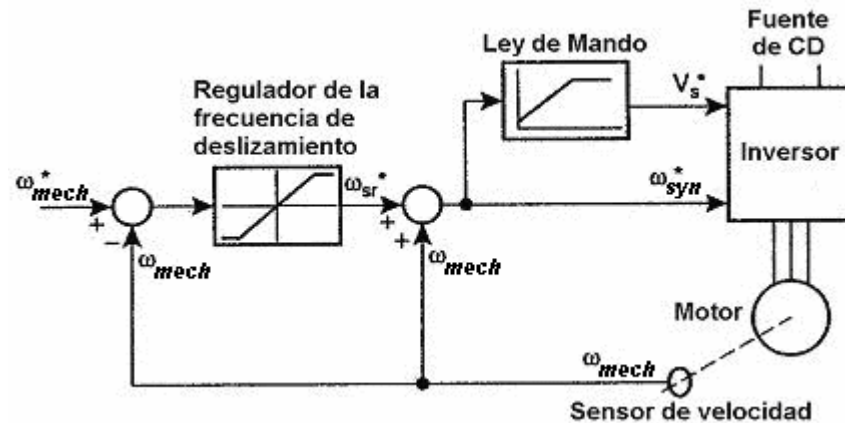


Figura 2-2: Control Escalar [18]

Los trabajos desarrollados sobre este tipo de control, básicamente utilizan y explican diferentes tipos de inversores de fuente de voltaje o fuente de corriente, controladores de corriente o voltaje y nuevos métodos para mejorar la operación y formas de onda de corriente y/o voltaje de la salida del inversor. A continuación se presenta en forma resumida las características esenciales de algunos trabajos.

- Holtz J. [5] explica las generalidades de la modulación por ancho de pulso (PWM) de los inversores.
- Hombu, Ueda S. y Ueda A. [6] presentan el uso de un inversor con tiristores GTO y técnicas con modulación por ancho de pulso (PWM) en la parte del rectificador, las cuales hacen que la forma de onda de la corriente de entrada sea sinusoidal y que el voltaje del lazo de corriente continua se pueda regular en un amplio margen.
- Has Mukh Patel y Richard Hoft [7] presentan métodos teóricos para eliminar armónicos de las formas de onda del inversor, desarrollando métodos generalizados para eliminar un número fijo de armónicos en la forma de onda de salida de los inversores

de medio puente y puente completo, además presentan soluciones para eliminar hasta cinco armónicos. Los armónicos de orden superior no eliminados pueden ser atenuados fácilmente utilizando filtros en la etapa de salida del inversor.

## 2.2. CONTROL VECTORIAL

También llamado control por campo orientado (FOC por sus iniciales en inglés). Los esquemas de control vectorial utilizan el modelo dinámico del motor de inducción y permiten tratar el motor de inducción de la misma manera que el motor de corriente continua de excitación independiente. Es decir, admiten un control independiente del flujo del campo magnético y el par electromagnético, pues reducen el modelo no lineal del motor de inducción a un modelo referido a dos ejes ortogonales  $dq$ ; de este modo, el control del flujo del campo magnético se logra regulando la componente de la corriente de eje directo  $d$  y el control del par electromagnético se logra regulando la corriente asociada al eje en cuadratura  $q$ .

Para lograr la reducción del modelo no lineal del motor de inducción, se referencia el sistema trifásico alterno de corrientes del estator a un sistema de coordenadas ortogonales no estacionario que gira. Es posible asumir cualquier valor arbitrario para la velocidad de giro del sistema de coordenadas ortogonales. Sin embargo, se elige que el sistema de coordenadas ortogonales gire sincrónicamente con el flujo enlazado del rotor. En este nuevo sistema de referencia, las corrientes del estator pueden ser tratadas como un vector espacial, de ahí el nombre de control vectorial. El paso siguiente es descomponer este vector espacial en dos componentes: una colineal con el flujo enlazado del rotor (denominada  $i_{sd}$ ) y la otra en cuadratura (denominada  $i_{sq}$ ). La primera componente resulta ser responsable del flujo enlazado del rotor y se designa como corriente de magnetización, la segunda componente ayuda en la generación del par electromagnético y se llama corriente activa. Por la vía de esta transformación de coordenadas resulta entonces posible desacoplar el modelo matemático de la máquina de inducción y así poder controlar estas componentes en forma independiente de la misma manera que en un motor de corriente continua se controlan las corrientes de campo y

armadura. Una vez determinados en este sistema de referencia no estacionario los valores requeridos de  $i_{sd}$  e  $i_{sq}$  a través de cualquier técnica de control (clásica o moderna), se aplica una transformación de coordenadas inversa que arroja por resultado las consignas de magnitud y fase de las corrientes alternas del estator.

Ya que en el control vectorial las consignas de magnitud y fase de las corrientes alternas del estator dependen del vector espacial de flujo enlazado del rotor, existen dos métodos para la adquisición de este vector espacial: el control vectorial directo y el control vectorial indirecto.

**2.2.1. Control Vectorial Directo:** también llamado control feedback del flujo. En este método, el vector espacial de flujo enlazado del rotor se mide a través de sensores de efecto Hall o bobinas en el estator, o bien, se estima a partir del modelo del motor y las corrientes medidas en el estator. La velocidad del rotor no es un requerimiento para obtener la información del ángulo espacial del flujo enlazado del rotor.

Este método, aunque más complejo de implementar porque necesita una medida o estimación del flujo, presenta un buen comportamiento dinámico. En la Figura 2-3 se muestra el esquema básico de control vectorial directo.

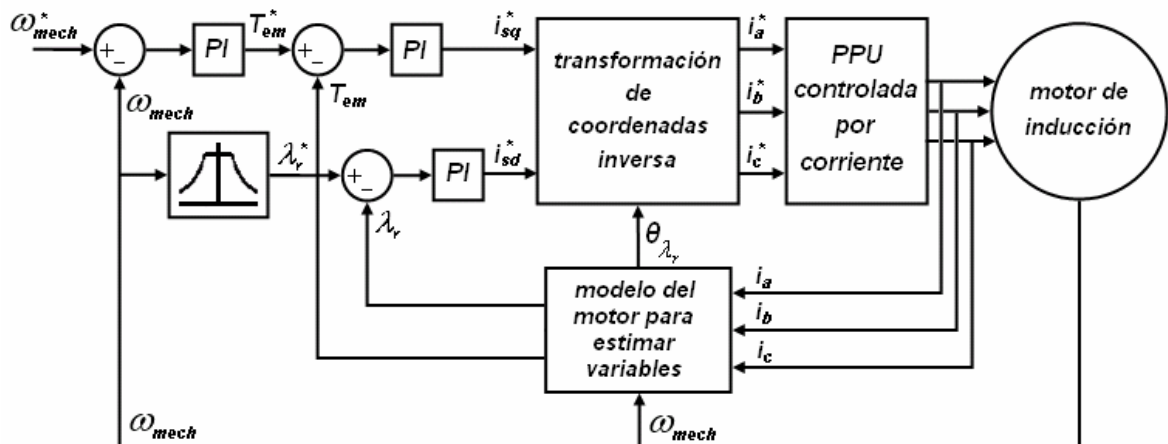


Figura 2-3: Control vectorial directo

**2.2.2. Control Vectorial Indirecto:** también llamado control feedforward del flujo. Tiene la ventaja de ser muy fácil de implementar debido a que prescinde de medir o estimar el vector espacial de flujo enlazado del rotor. En este método, se impone desde el control el valor de flujo enlazado del rotor y el valor del par electromagnético, causando que el cálculo del vector espacial de flujo enlazado del rotor no dependa de las condiciones en los terminales de la máquina. Por lo tanto, no existe tal dependencia y no aparecen problemas de distorsión [8]. Sin embargo, es necesaria la posición del rotor.

En este método tanto el flujo enlazado del rotor como el par electromagnético son controlados en bucle abierto, existiendo sólo un bucle de control en lazo cerrado para la velocidad de giro del motor, lo cual hace que su desempeño dinámico no sea óptimo. En la Figura 2-4 se muestra el esquema básico de control vectorial indirecto.

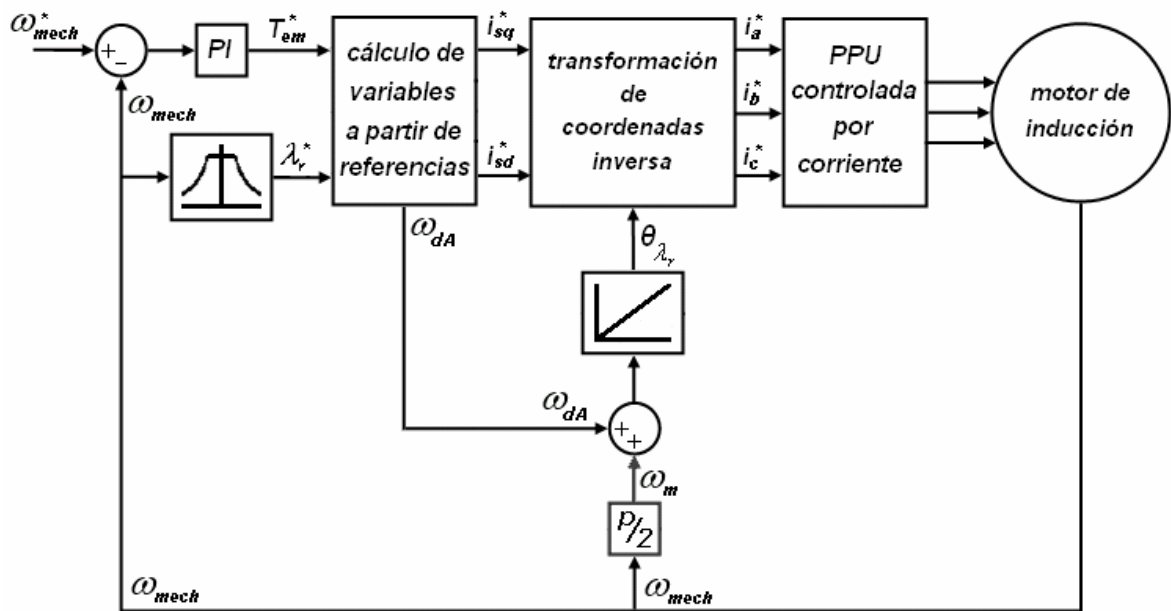


Figura 2-4: Control vectorial indirecto

A continuación se presenta en forma resumida las características esenciales de algunos trabajos desarrollados sobre el control vectorial.

- Hasse [8] y Blaschke [9] desarrollaron los principios del control vectorial o por campo orientado (FOC), el cual tuvo su origen en la década de los años 70.

- Chang y Yeh [10] presentan un método de control de campo orientado sin sensores de la corriente de estator. Utilizan un estimador parcial de estado para estimar el par/corriente y un predictor del voltaje para el vector de voltaje del inversor VSI.
- Liaw C. M., Wang J. B. y Chang Y. C. [11] aplican lógica difusa al control de campo orientado para una máquina de inducción. Diseñan un controlador discreto de dos grados de libertad (2DOF) para obtener un control adecuado de la velocidad y un buen comportamiento del control con carga.

### **2.3. CONTROL DIRECTO DE PAR**

También llamado DTC por sus iniciales en inglés. Como su nombre lo indica, se fundamenta en el control del par electromagnético de la máquina y del flujo enlazado en el estator, a través de la selección del vector espacial de voltaje más apropiado para un puente inversor. La información de activación de las componentes del inversor para cada vector espacial de voltaje está contenida en una tabla de activación. El control directo de par mejora las características dinámicas respecto al control vectorial y reduce la dependencia de la variación de los parámetros durante la operación.

Un puente inversor trifásico puede producir sólo ocho estados diferentes de tensión de acuerdo con la conectividad de los componentes que lo conforman. Cada uno de estos ocho estados define un vector espacial aplicado al devanado del estator. Seis de esos estados producen vectores de magnitud constante y desfasados unos con otros en  $\pi/3$ . Los otros dos estados corresponden al vector cero. Estos vectores, de acuerdo con la conectividad del puente se describen en la Figura 2-5.

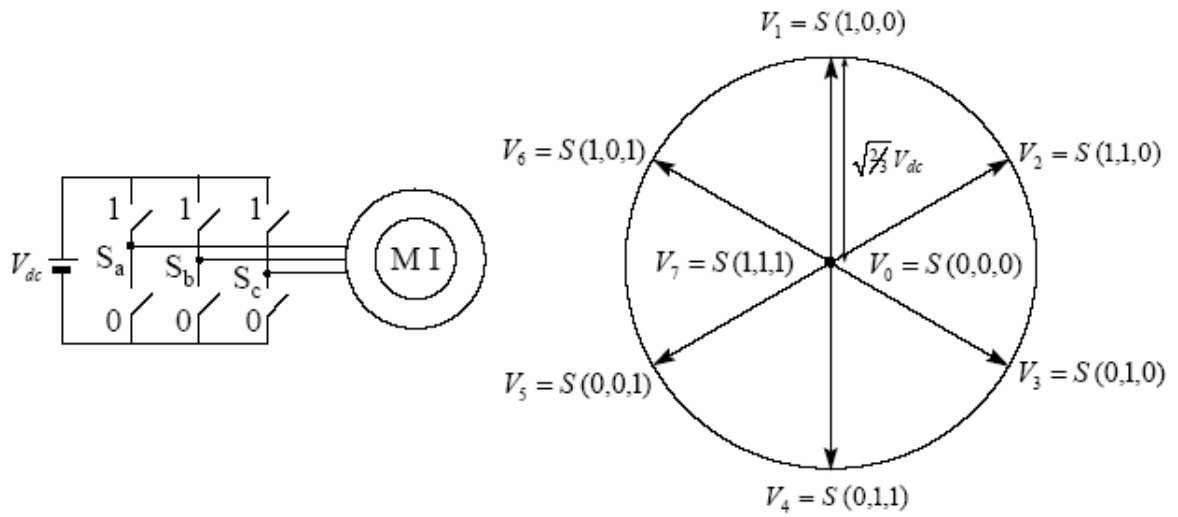


Figura 2-5: Vectores espaciales de voltaje en función de la conectividad del puente inversor [19]

Para poder ajustar el par electromagnético y el flujo enlazado del estator, el algoritmo del control directo de par selecciona el vector espacial de la tensión del estator que maximiza el cambio necesario. En la Figura 2-6 se presenta el diagrama de bloques del control directo de par. La magnitud del flujo enlazado y el par electromagnético de referencia son comparados con los estimados del motor de inducción. Estas variables se estiman a partir de los valores instantáneos de las corrientes del estator, del vector de interrupciones del inversor y del voltaje DC del inversor.

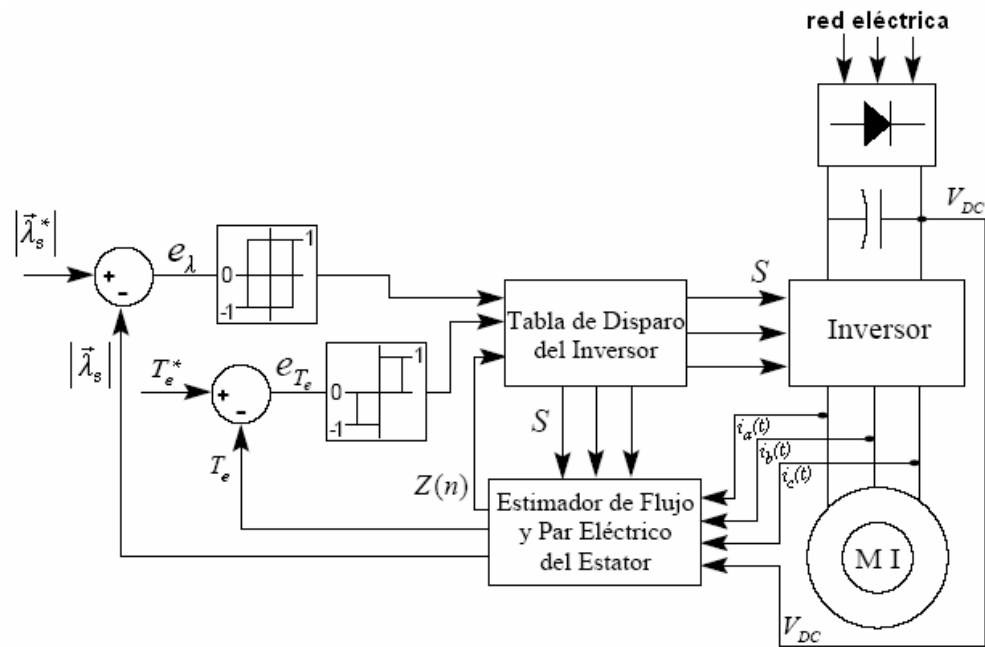


Figura 2-6: Control directo de par

Los errores de par electromagnético y flujo enlazado del estator son procesados en dos comparadores de histéresis de tres y dos niveles respectivamente, a partir de estos resultados y de la posición angular del flujo enlazado del estator, se determina el vector de interrupciones del inversor. Cuando la referencia de par electromagnético se encuentra dentro de la banda de histéresis se selecciona el vector de tensión cero para reducir al mínimo el número de conmutación de los interruptores del puente [12].

A continuación se presenta en forma resumida las características esenciales de algunos trabajos desarrollados sobre este tipo de control.

- Takahashi y Noguchi [12] propusieron la estrategia de control directo de par y realizaron los primeros trabajos. Ellos explican cómo el DTC tiene una respuesta más rápida y una eficiencia más alta que el control vectorial.
- Habetler y Divan [13] estudian un esquema por control directo del par utilizando inversores de modulación del ancho del pulso tal como el inversor con el lazo de corriente continua.

- Cabrera L. A., Elbuluk M. E. y Husain I. [14] usa la red neuronal para la sintonización de la resistencia del estator del motor de inducción en un sistema de control directo de par.

## **2.4. SELECCIÓN DE LA TÉCNICA DE CONTROL A UTILIZAR**

La necesidad de asimilar una tecnología de punta en el campo del control de motores de inducción, hace necesario que se inicie dicha asimilación con el estudio de modelos y ecuaciones que permitan obtener un comportamiento dinámico del motor de inducción similar al de un motor de corriente continua. Ya que el control vectorial es la primera técnica desarrollada que logra en el motor de inducción un comportamiento dinámico semejante al de un motor de corriente continua, ésta es la técnica de control a utilizar en este trabajo de grado.

Como este trabajo de grado pretende contribuir al enriquecimiento académico del diseño de controladores avanzados como una alternativa para conseguir mejoras en las características dinámicas y en el consumo energético del motor de inducción y de los procesos en que éste interviene, se selecciona el método de control vectorial directo como el método de control vectorial a utilizar en este trabajo.

El control vectorial evidencia el hecho de que el pobre desempeño dinámico de los accionamientos con motores de inducción no se debía a las limitaciones del motor de inducción sino a las técnicas de control aplicadas.



### 3. CONTROL VECTORIAL

El control vectorial o por campo orientado (FOC), tuvo su origen en la década de los años 70 con los trabajos desarrollados por Hasse [8] y Blaschke [9]. Este control se basa en la transformación de un sistema trifásico estacionario, representado por las corrientes de fase del estator ( $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$ ), en un sistema bifásico rotatorio representado en un plano imaginario  $dq$  que gira a una velocidad arbitraria. En este plano se obtienen las corrientes  $i_{sd}$  e  $i_{sq}$ , alineadas con los ejes ortogonales  $d$  y  $q$  respectivamente. La obtención de este nuevo marco de referencia conduce a un modelo cuyo comportamiento es igual al de una máquina de corriente continua.

La importancia del análisis del bobinado-dq se sitúa en el hecho que permite al par electromagnético y al flujo en el motor de inducción ser controlados independientemente mediante condiciones dinámicas, lo cual no es claro en el análisis basado en las cantidades de fase (a-b-c).

#### 3.1. REPRESENTACIÓN DEL BOBINADO-dq

Se estudió previamente en la sección 1.12, que los flujos enlazados del estator y del rotor  $\bar{\lambda}_s^a(t)$  y  $\bar{\lambda}_r^A(t)$  dependen del ángulo  $\theta_m$  del rotor, ya que las inductancias mutuas entre las bobinas del estator y del rotor son dependientes de la posición. La razón principal para el análisis de los ejes  $d$  y  $q$  en motores como el motor de inducción es para controlarlos correctamente. En muchos textos, este análisis es discutido como una transformación matemática llamada la Transformación de Park. En este trabajo de grado, se tomará un enfoque físico de esta transformación, el cual es mucho más fácil de visualizar.

**3.1.1. Representación del Bobinado-dq del Estator:** en la Figura 3-1a en el tiempo  $t$ , el efecto de las corrientes de fase  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$  e  $i_c(t)$  es representado por un vector espacial de corriente del estator  $\vec{i}_s(t)$ . El vector espacial de la fmm  $\vec{F}_s(t)$  asociado a  $\vec{i}_s(t)$  se encuentra alineado y relacionado con esta corriente mediante un factor  $N_s/p$ , donde  $N_s$  es igual al número de vueltas por fase y  $p$  es igual al número de polos magnéticos:

$$\vec{i}_s^a(t) = i_a(t) \cdot e^{j0} + i_b(t) \cdot e^{j2\pi/3} + i_c(t) \cdot e^{j4\pi/3} \quad (3-1)$$

$$\vec{F}_s^a(t) = \frac{N_s}{p} \cdot \vec{i}_s^a(t) \quad (3-2)$$

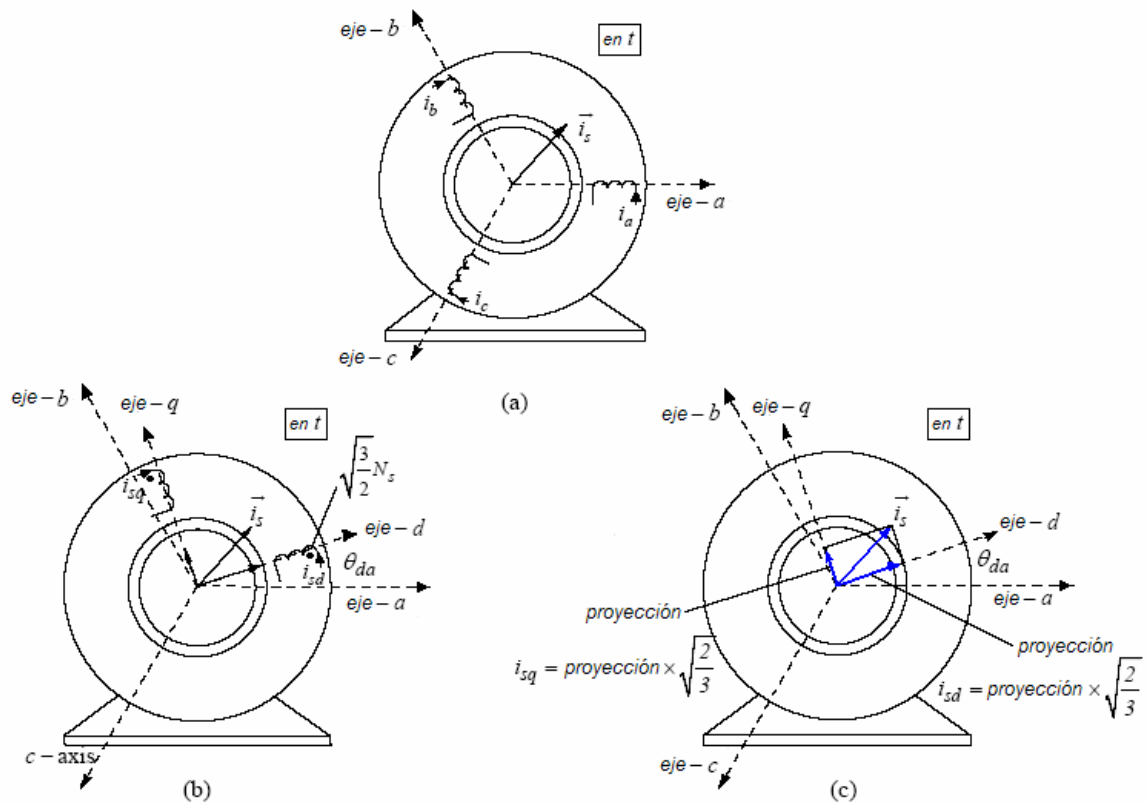


Figura 3-1: Representación de la fmm del estator mediante el bobinado-dq equivalente. a) vector espacial de corriente del estator  $\vec{i}_s(t)$ . b) conjunto de dos bobinas ortogonales d-q. c) proyecciones del vector  $\vec{i}_s(t)$  a lo largo de los ejes d y q [4]

Debe notarse que el vector espacial  $\vec{i}_s(t)$  en la Figura 3-1 está escrito sin el superíndice “a”. La razón es que el eje de referencia es requerido sólo cuando se expresa matemáticamente (utilizando para ello la notación de los números complejos). Sin embargo, en la Figura 3-1,  $\vec{i}_s(t)$  depende de los valores instantáneos de las corrientes de fase y es independiente de la elección del eje de referencia para expresarla.

En el capítulo uno se reemplazó las tres bobinas por una bobina equivalente hipotética que producía la misma distribución de fmm en el aire del entrehierro. Esta bobina estaba distribuida sinusoidalmente con el mismo número de vueltas  $N_s$  (como cualquier bobina de fase) con su eje magnético alineado a lo largo del vector espacial de corriente del estator y una corriente  $\hat{I}_s$  (valor máximo de  $\vec{i}_s$ ) fluyendo a través de ella.

Sin embargo, para el análisis dinámico y el control de los motores de inducción, se necesitan dos bobinas ortogonales tal que el par electromagnético y el flujo dentro del motor puedan ser controlados independientemente. En cualquier instante de tiempo, la distribución de la fmm en el aire del entrehierro debida a las tres bobinas de fase puede también ser producida por un conjunto de dos bobinas ortogonales como se muestra en la Figura 3-1b, cada una distribuida sinusoidalmente con  $\sqrt{3/2} \cdot N_s$  vueltas: una bobina a lo largo del eje-d, y la otra a lo largo del eje-q. El factor  $\sqrt{3/2} \cdot N_s$  vueltas se demuestra en el Apéndice I.

El conjunto de bobinas-dq puede estar en cualquier ángulo arbitrario  $\theta_{da}$  con respecto al eje de la fase-a. Sin embargo, las corrientes  $i_{sd}$  e  $i_{sq}$  en estas dos bobinas deben tener valores específicos los cuales pueden ser obtenidos igualando la fmm producida por las bobinas-dq a la producida por las tres bobinas de fase y representada mediante un sólo bobinado con  $N_s$  vueltas (ecuación 3-2).

$$\frac{\sqrt{3/2} \cdot N_s}{p} (i_{sd} + j \cdot i_{sq}) = \frac{N_s}{p} \vec{i}_s^d \quad (3-3)$$

Donde el vector espacial de la corriente de estator está expresado utilizando el eje-d como el eje de referencia, por ello el superíndice “d”. La ecuación 3-3 causa:

$$(i_{sd} + j \cdot i_{sq}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \vec{i}_s^d \quad (3-4)$$

Lo cual muestra que las corrientes de las bobinas-dq son  $\sqrt{2/3}$  veces las proyecciones del vector  $\vec{i}_s(t)$  a lo largo de los ejes  $d$  y  $q$ , como se muestra en la Figura 3-1c.

$$i_{sd} = \sqrt{2/3} \times \text{la proyección de } \vec{i}_s(t) \text{ a lo largo del eje } -d \quad (3-5)$$

$$i_{sq} = \sqrt{2/3} \times \text{la proyección de } \vec{i}_s(t) \text{ a lo largo del eje } -q \quad (3-6)$$

El factor  $\sqrt{2/3}$ , recíproco del factor  $\sqrt{3/2}$  utilizado en la elección del número de vueltas de las bobinas-dq, garantiza que las corrientes de las bobinas-dq producen la misma distribución de fmm que las corrientes de las tres bobinas de fase.

Cada una de estas bobinas equivalentes tiene una resistencia  $R_s$  y una inductancia de dispersión  $L_{\sigma s}$ , similar a las bobinas de fase a-b-c. De hecho, si una máquina de tres fases se convirtiera a una máquina de dos fases utilizando la misma carcasa del estator para entregar la misma potencia de salida y la misma velocidad, se elegiría el número de vueltas en cada uno de los dos bobinados de fase como  $\sqrt{3/2} \cdot N_s$ .

**3.1.2. Bobinas-dq del Rotor (alineadas a lo largo de los mismos ejes-dq como en el estator):** el vector espacial de la fmm del rotor  $\vec{F}_r(t)$  es producido por el efecto combinado de las corrientes de barra del rotor, o por las tres bobinas de fase equivalentes, cada una con  $N_s$  vueltas como se muestra en la Figura 3-2 (en cortocircuito por considerar un rotor jaula de ardilla). Las corrientes de fase en estas bobinas de fase equivalentes del rotor pueden ser representadas por un vector espacial de corriente de rotor, donde

$$\vec{i}_r^A(t) = i_A(t) + i_B(t) \cdot e^{j2\pi/3} + i_C(t) \cdot e^{j4\pi/3} \quad (3-7)$$

$$\vec{i}_r^A(t) = \frac{\vec{F}_r^A(t)}{N_s/p} \quad (3-8)$$

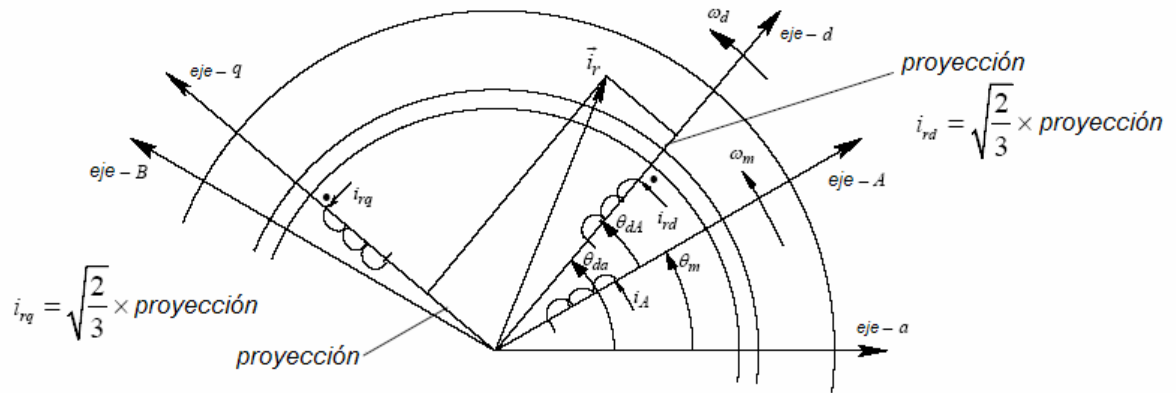


Figura 3-2: Representación de la fmm del rotor mediante las corrientes de las bobinas-dq equivalentes [4]

La fmm  $\vec{F}_r(t)$  y la corriente del rotor  $\vec{i}_r(t)$  en la Figura 3-2 pueden ser producidas por las componentes  $i_{rd}(t)$  e  $i_{rq}(t)$  fluyendo a través de sus respectivas bobinas (note que los ejes  $d$  y  $q$  son los mismos que los elegidos para el estator en la Figura 3-1, de lo contrario, todo beneficio del análisis-dq se perdería). Similar al caso del estator, cada una de las bobinas-dq en el rotor tiene  $\sqrt{3/2} \cdot N_s$  vueltas, y una inductancia de magnetización  $L_m$ , la cual es la misma que aquella para las bobinas-dq del estator debido al mismo número de vueltas (por elección) y al mismo camino magnético para las líneas de flujo. Cada una de estas bobinas equivalentes del rotor tiene una resistencia  $R_r$  y una inductancia de dispersión  $L_{lr}$  (igual a  $R_r$  y  $L_{lr}$  respectivamente del circuito equivalente por fase del motor de inducción donde el rotor está reflejado en el estator [3]). La inductancia mutua entre estas dos bobinas ortogonales es cero.

**3.1.3. Inductancia Mutua entre las Bobinas-dq del Estator y del Rotor:** las bobinas-dq equivalentes para el estator y el rotor se muestran en la Figura 3-3. La

inductancia mutua entre las bobinas del eje-d del estator y del rotor es igual a  $L_m$  debido a que el flujo de magnetización cruza el aire del entrehierro. Similarmente, la inductancia mutua entre las bobinas del eje-q del estator y del rotor es igual a  $L_m$ . Aparte de los dos pares de bobinas consideradas, la inductancia mutua entre cualquier bobina del eje-d con cualquier bobina del eje-q es cero debido a su orientación ortogonal, lo cual causa cero flujo de acoplamiento magnético mutuo.

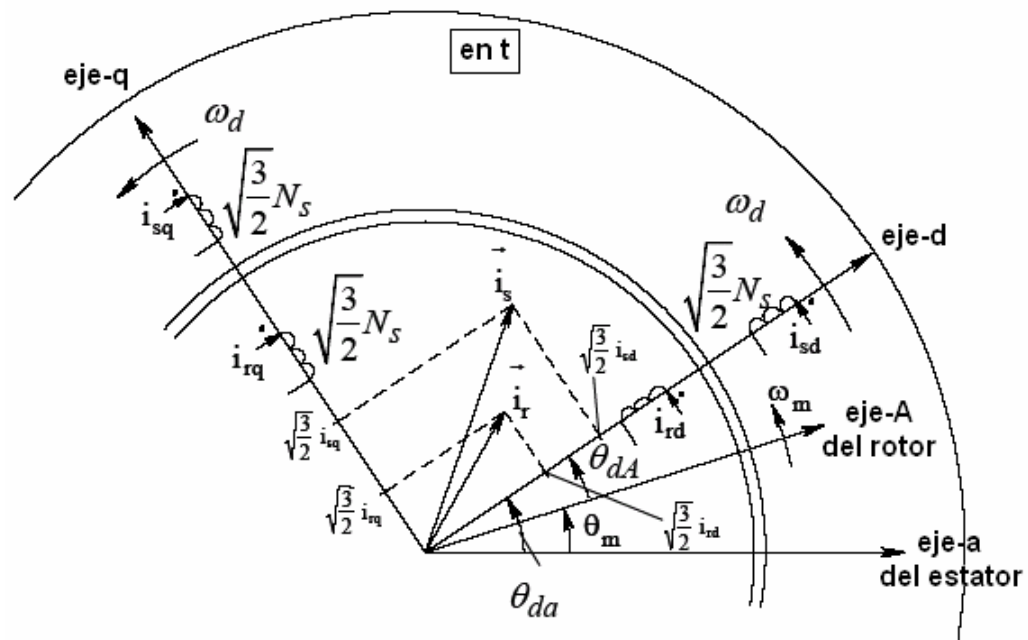


Figura 3-3: Representación del estator y del rotor por medio de corrientes en las bobinas-dq equivalentes [4].

Según la Figura 3-3, los voltajes de las bobinas-dq son definidos como positivos en los terminales con puntos. Note que las posiciones relativas de los vectores espaciales de corriente del estator y del rotor no son reales (en una máquina de inducción, el ángulo real entre  $\vec{i}_s$  e  $\vec{i}_r$  es muy grande – más de  $145^\circ$ ), se tomaron de esa forma para propósitos de definición.

### 3.2. RELACIONES ENTRE LAS CANTIDADES DEL ESTATOR Y EL ROTOR CON LAS CANTIDADES EN LAS BOBINAS-dq A UNA VELOCIDAD $\omega_d$ ARBITRARIA

A continuación, se describen las relaciones entre las cantidades del estator y el rotor y sus componentes en las bobinas-dq equivalentes (ver Figura 3-3), las cuales en combinación producen la misma fmm que las tres bobinas de fase reales. Los vectores espaciales en la Figura 3-3 estarían en la misma posición, independientemente del eje de referencia elegido para expresarlos. Téngase presente que la posición relativa de  $\vec{i}_s(t)$  e  $\vec{i}_r(t)$  es mostrada arbitrariamente para propósitos de definición como se dijo

Con el fin de simplificar la notación, a partir de ahora, se omitirá el superíndice al expresar cualquier vector espacial con el eje-d como la referencia.

De la Figura 3-3 se nota que en el tiempo  $t$ , el eje-d tiene un ángulo  $\theta_{da}$  con respecto al eje-a del estator. Por lo tanto,

$$\vec{i}_s(t) = \vec{i}_s^a(t) \cdot e^{-j\theta_{da}(t)} \quad (3-9)$$

Reemplazando  $\vec{i}_s^a$  de la ecuación 3-1,

$$\vec{i}_s(t) = i_a(t) \cdot e^{-j\theta_{da}} + i_b(t) \cdot e^{-j(\theta_{da} - 2\pi/3)} + i_c(t) \cdot e^{-j(\theta_{da} - 4\pi/3)} \quad (3-10)$$

Igualando las componentes real e imaginaria del lado derecho de la ecuación 3-10 a  $i_{sd}(t)$  e  $i_{sq}(t)$  de la ecuación 3-4 se obtiene

$$\begin{bmatrix} i_{sd}(t) \\ i_{sq}(t) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta_{da}) & \cos(\theta_{da} - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_{da} - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\theta_{da}) & -\sin(\theta_{da} - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_{da} - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}}_{[T_s]_{abc \rightarrow dq}} \cdot \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

Donde  $[T_s]_{abc \rightarrow dq}$  es la matriz de transformación para convertir las corrientes de las bobinas de fase a-b-c del estator a las corrientes de las bobinas-dq correspondientes. Este procedimiento de transformación es ilustrado por el diagrama de bloques de la Figura 3-4a. La misma matriz de transformación relaciona los flujos enlazados y los voltajes del estator en las bobinas de fase con aquellos en las bobinas-dq del estator equivalentes.

Un procedimiento similar al del estator es seguido para el rotor, donde en términos de las corrientes de fase, el vector espacial de la corriente del rotor es

$$\vec{i}_r^A(t) = i_A(t) + i_B(t) \cdot e^{j2\pi/3} + i_C(t) \cdot e^{j4\pi/3} \quad (3-12)$$

De la Figura 3-3 se observa que en el tiempo  $t$ , el eje-d está a un ángulo  $\theta_{dA}$  con respecto al eje-A del rotor. Por lo tanto,

$$\vec{i}_r(t) = \vec{i}_r^A(t) \cdot e^{-j\theta_{dA}(t)} \quad (3-13)$$

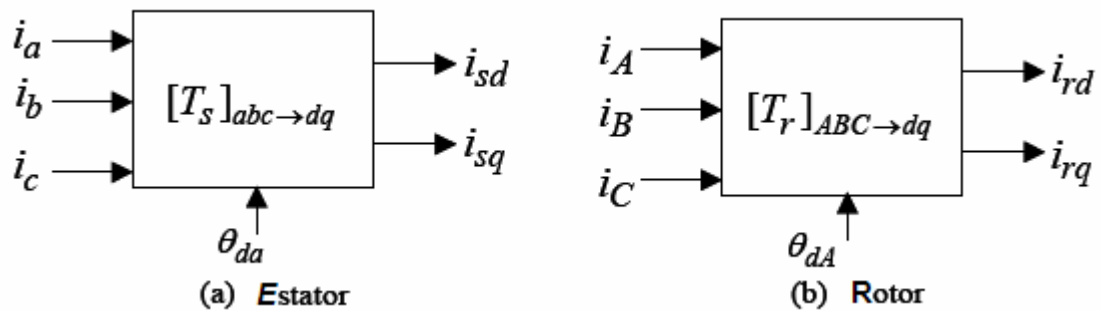


Figura 3-4: Transformación de cantidades de fase a cantidades en las bobinas-dq [4]



Las corrientes en las bobinas-dq del rotor deben ser  $i_{rd}$  e  $i_{rq}$  donde estas dos componentes de corriente son  $\sqrt{2/3}$  veces las proyecciones del vector  $\vec{i}_r(t)$  a lo largo de los ejes  $d$  y  $q$ , como se muestra en la Figura 3-3

$$i_{rd} = \sqrt{2/3} \times \text{la proyección de } \vec{i}_r(t) \text{ a lo largo del eje } -d \quad (3-14)$$

$$i_{rq} = \sqrt{2/3} \times \text{la proyección de } \vec{i}_r(t) \text{ a lo largo del eje } -q \quad (3-15)$$

Similar a la ecuación 3-11, reemplazando  $\theta_{da}$  por  $\theta_{dA}$ :

$$\begin{bmatrix} i_{rd}(t) \\ i_{rq}(t) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta_{dA}) & \cos(\theta_{dA} - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_{dA} - \frac{4\pi}{3}) \\ -\text{sen}(\theta_{dA}) & -\text{sen}(\theta_{dA} - \frac{2\pi}{3}) & -\text{sen}(\theta_{dA} - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}}_{[T_r]_{ABC \rightarrow dq}} \cdot \begin{bmatrix} i_A(t) \\ i_B(t) \\ i_C(t) \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

Donde  $[T_r]_{ABC \rightarrow dq}$  es la matriz de transformación para el rotor. Este procedimiento de transformación se ilustra por el diagrama de bloques en la Figura 3-4b, similar a aquel en la Figura 3-4a. La misma matriz de transformación relaciona los flujos enlazados del rotor y los voltajes del rotor en las bobinas equivalentes A-B-C a aquellos en las bobinas-dq del rotor equivalentes.

**3.2.1. Relación de Variables en las Bobinas-dq a Variables en las Bobinas de Fase:** en el caso de un neutro aislado, donde las tres corrientes de fase suman cero en cualquier tiempo, las variables en las bobinas de fase a-b-c pueden ser calculadas en términos de las variables en las bobinas-dq. En la ecuación 3-11, se puede adicionar una fila al final de la matriz para representar la condición de que las tres corrientes de fase suman cero. Invertiendo la matriz resultante y descartando la última columna cuya contribución es cero, se obtiene la relación deseada.

$$\begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta_{da}) & -\text{sen}(\theta_{da}) \\ \cos(\theta_{da} + \frac{4\pi}{3}) & -\text{sen}(\theta_{da} + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta_{da} + \frac{2\pi}{3}) & -\text{sen}(\theta_{da} + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}}_{[T_s]_{dq \rightarrow abc}} \cdot \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

Donde  $[T_s]_{dq \rightarrow abc}$  es la matriz de transformación en la dirección inversa (dq a abc). Una matriz de transformación similar  $[T_r]_{dq \rightarrow ABC}$  para el rotor puede ser escrita mediante el reemplazo de  $\theta_{da}$  en la ecuación 3-17 por  $\theta_{dA}$ .

**3.2.2. Flujo Enlazado de las Bobinas-dq en Términos de sus Corrientes:** se tiene un conjunto de cuatro bobinas-dq como se muestra en la Figura 3-3. No hay acoplamiento mutuo entre las bobinas sobre el eje-d y aquellas sobre el eje-q. El flujo enlazado en cualquier bobina es debido a su propia corriente y a aquella en la otra bobina sobre el mismo eje. Se selecciona la bobina-d del estator como ejemplo. Debido a  $i_{sd}$ , tanto el flujo de magnetización como el flujo de dispersión enlazan esta bobina. Sin embargo debido a  $i_{rd}$ , sólo el flujo de magnetización enlaza esta bobina del estator (el flujo de dispersión no atraviesa el aire del entrehierro). Utilizando esta lógica, se pueden escribir las siguientes expresiones de flujo para todas las cuatro bobinas:

#### Bobinas del Estator

$$\lambda_{sd} = L_s \cdot i_{sd} + L_m \cdot i_{rd} \quad (3-18)$$

y

$$\lambda_{sq} = L_s \cdot i_{sq} + L_m \cdot i_{rq} \quad (3-19)$$

Donde en las ecuaciones 3-18 y 3-19,  $L_s = L_{ls} + L_m$

### Bobinas del Rotor

$$\lambda_{rd} = L_r \cdot i_{rd} + L_m \cdot i_{sd} \quad (3-20)$$

y

$$\lambda_{rq} = L_r \cdot i_{rq} + L_m \cdot i_{sq} \quad (3-21)$$

Donde en las ecuaciones 3-20 y 3-21,  $L_r = L_{lr} + L_m$

Se utilizarán  $\lambda_{sd}$ ,  $\lambda_{sq}$ ,  $\lambda_{rd}$  y  $\lambda_{rq}$  como variables de estado, y se expresaran  $i_{sd}$ ,  $i_{sq}$ ,  $i_{rd}$  e  $i_{rq}$  en términos de éstas variables de estado. La razón para la elección de los flujos enlazados como variables de estado tiene que ver con el hecho que estas cantidades cambian lentamente comparadas a las corrientes las cuales pueden cambiar casi instantáneamente. Se pueden calcular las corrientes de las bobinas-dq a partir de los flujos enlazados del estator y del rotor de las bobinas respectivas como sigue:

Haciendo referencia a la Figura 3-3, los flujos enlazados por las bobinas en el eje-d del estator y del rotor están relacionados a sus corrientes de bobinado como (reescribiendo las ecuaciones 3-18 y 3-20 en una forma matricial)

$$\begin{bmatrix} \lambda_{sd} \\ \lambda_{rd} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_s & L_m \\ L_m & L_r \end{bmatrix}}_{[L]} \cdot \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{rd} \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

Similarmenete en las bobinas del eje-q, de las ecuaciones 3-19 y 3-21, la matriz  $[L]$  de la ecuación anterior relaciona los flujos enlazados a las corrientes respectivas

$$\begin{bmatrix} \lambda_{sq} \\ \lambda_{rq} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_s & L_m \\ L_m & L_r \end{bmatrix}}_{[L]} \cdot \begin{bmatrix} i_{sq} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

Combinando las ecuaciones matriciales 3-22 y 3-23, se pueden relacionar los flujos a las corrientes como sigue:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{sd} \\ \lambda_{sq} \\ \lambda_{rd} \\ \lambda_{rq} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_r \end{bmatrix}}_{[M]} \cdot \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

De la ecuación 3-24, las corrientes se pueden calcular mediante la utilización de la inversa de la matriz  $[M]$ :

$$\begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} = [M]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{sd} \\ \lambda_{sq} \\ \lambda_{rd} \\ \lambda_{rq} \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

**3.2.3. Ecuaciones de Voltaje de las Bobinas-dq del Estator:** para deducir los voltajes de las bobinas-dq del estator, primero se considera un conjunto de bobinas- $\alpha\beta$  ortogonales fijados al estator como se muestra en la Figura 3-5, donde el eje- $\alpha$  está alineado con el eje-a del estator. En todas las bobinas, la polaridad del voltaje está definida como positiva en el terminal con el punto. En las bobinas- $\alpha\beta$  en términos de sus variables,

$$v_{s\alpha} = R_s \cdot i_{s\alpha} + \frac{d}{dt} \lambda_{s\alpha} \quad (3-26)$$

y

$$v_{s\beta} = R_s \cdot i_{s\beta} + \frac{d}{dt} \lambda_{s\beta} \quad (3-27)$$

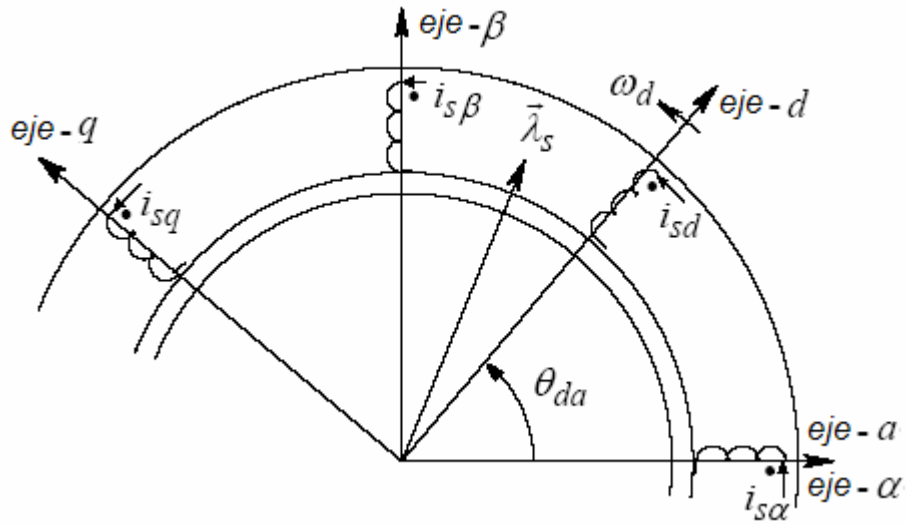


Figura 3-5: Bobinas equivalentes dq y  $\alpha\beta$  del estator [4]

Las dos ecuaciones anteriores pueden ser combinadas multiplicando ambos lados de la ecuación 3-27 por el operador “j” y luego sumarla a la ecuación 3-26

$$j \cdot v_{s\beta} = j \cdot \left( R_s \cdot i_{s\beta} + \frac{d}{dt} \lambda_{s\beta} \right) \quad (3-28)$$

$$v_{s\alpha} + j \cdot v_{s\beta} = \left( R_s \cdot i_{s\alpha} + \frac{d}{dt} \lambda_{s\alpha} \right) + j \cdot \left( R_s \cdot i_{s\beta} + \frac{d}{dt} \lambda_{s\beta} \right) \quad (3-29)$$

En términos de los vectores espaciales resultantes

$$\vec{v}_{s-\alpha\beta}^{\alpha} = R_s \cdot \vec{i}_{s-\alpha\beta}^{\alpha} + \frac{d}{dt} \vec{\lambda}_{s-\alpha\beta}^{\alpha} \quad (3-30)$$

Donde,  $\vec{v}_{s-\alpha\beta}^{\alpha} = v_{s\alpha} + j \cdot v_{s\beta}$  y así sucesivamente. Como se puede ver en la Figura 3-5, los vectores espaciales de corriente, voltaje y flujo enlazado con respecto al eje- $\alpha$  están relacionados a aquellos con respecto al eje-d como sigue:

$$\vec{v}_{s-\alpha\beta}^{\alpha} = \vec{v}_{s-dq} \cdot e^{j\theta_{da}} \quad (3-31)$$

$$\vec{i}_{s\_a\beta}^\alpha = \vec{i}_{s\_dq} \cdot e^{j\theta_{da}} \quad (3-32)$$

y

$$\vec{\lambda}_{s\_a\beta}^\alpha = \vec{\lambda}_{s\_dq} \cdot e^{j\theta_{da}} \quad (3-33)$$

Donde,  $\vec{v}_{s\_dq} = v_{sd} + j \cdot v_{sq}$  y así sucesivamente. Reemplazando las expresiones de las ecuaciones 3-31 hasta la 3-33 en la ecuación 3-30,

$$\vec{v}_{s\_dq} \cdot e^{j\theta_{da}} = R_s \cdot \vec{i}_{s\_dq} \cdot e^{j\theta_{da}} + \frac{d}{dt} (\vec{\lambda}_{s\_dq} \cdot e^{j\theta_{da}}) \quad (3-34)$$

o

$$\vec{v}_{s\_dq} \cdot e^{j\theta_{da}} = R_s \cdot \vec{i}_{s\_dq} \cdot e^{j\theta_{da}} + \frac{d(\vec{\lambda}_{s\_dq})}{dt} \cdot e^{j\theta_{da}} + \vec{\lambda}_{s\_dq} \cdot \frac{d(e^{j\theta_{da}})}{dt} \quad (3-35)$$

$$\vec{v}_{s\_dq} \cdot e^{j\theta_{da}} = R_s \cdot \vec{i}_{s\_dq} \cdot e^{j\theta_{da}} + \frac{d(\vec{\lambda}_{s\_dq})}{dt} \cdot e^{j\theta_{da}} + j \cdot \underbrace{\frac{d(\theta_{da})}{dt}}_{\omega_d} \cdot \vec{\lambda}_{s\_dq} \cdot e^{j\theta_{da}} \quad (3-36)$$

Por lo tanto,

$$\vec{v}_{s\_dq} = R_s \cdot \vec{i}_{s\_dq} + \frac{d}{dt} \vec{\lambda}_{s\_dq} + j \cdot \omega_d \cdot \vec{\lambda}_{s\_dq} \quad (3-37)$$

Donde  $d\theta_{da}/dt = \omega_{da} = \omega_d$  es la velocidad instantánea (en radianes eléctricos por segundo) del conjunto de bobinas-dq en el aire del entrehierro, como se muestra en las Figuras 3-3 y 3-5. Separando las componentes real e imaginaria en la ecuación 3-37, se obtiene:

$$v_{sd} = R_s \cdot i_{sd} + \frac{d}{dt} \lambda_{sd} - \omega_d \cdot \lambda_{sq} \quad (3-38)$$

y

$$v_{sq} = R_s \cdot i_{sq} + \frac{d}{dt} \lambda_{sq} + \omega_d \cdot \lambda_{sd} \quad (3-39)$$

Las ecuaciones 3-38 y 3-39 se pueden escribir como se muestra a continuación, en una forma vectorial, donde cada vector contiene un par de números – la primera entrada corresponde la bobina-d y la segunda la bobina-q:

$$\begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{bmatrix} = R_s \cdot \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{sd} \\ \lambda_{sq} \end{bmatrix} + \omega_d \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{rotación}} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{sd} \\ \lambda_{sq} \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

Note que la matriz de 2x2  $[M_{rotación}]$  en la ecuación 3-40 en la forma vectorial corresponde al operador “j” en la ecuación 3-37, donde  $j = e^{j\pi/2}$  tiene la función de rotar el vector espacial  $\vec{\lambda}_{s_{dq}}$  un ángulo de  $\pi/2$ .

**3.2.4. Ecuaciones de Voltaje de las Bobinas-dq del Rotor:** un análisis similar al caso del estator puede hacerse para el rotor, donde las bobinas- $\alpha\beta$  fijas al rotor son mostrados en la Figura 3-6 con el eje- $\alpha$  alineado con el eje-A del rotor. El eje-d en este caso (el mismo eje-d para el estator) está a un ángulo  $\theta_{dA}$  con respecto al eje-A. Siguiendo el mismo procedimiento que para el caso del estator mediante el reemplazo de  $\theta_{da}$  por  $\theta_{dA}$  resulta en las siguientes ecuaciones para los voltajes del bobinado del rotor

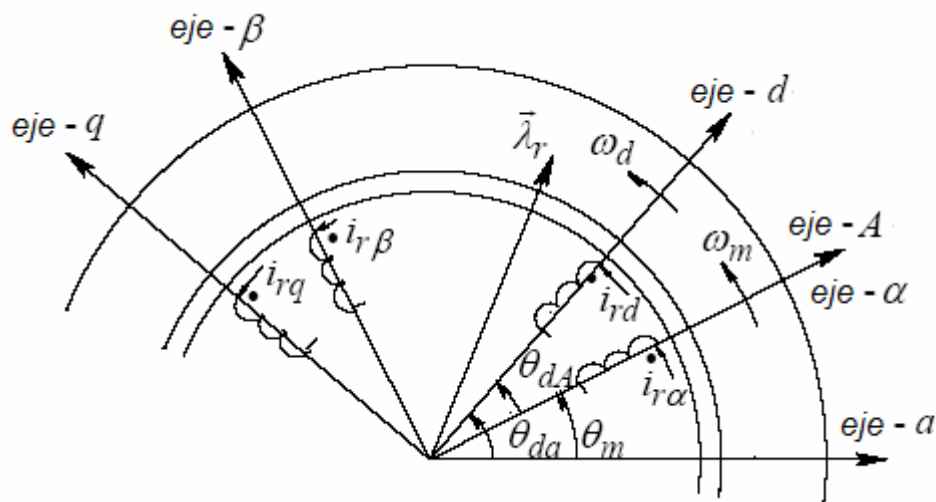


Figura 3-6: Bobinas equivalentes dq y  $\alpha\beta$  del rotor [4]

$$v_{rd} = R_r \cdot i_{rd} + \frac{d}{dt} \lambda_{rd} - \omega_{dA} \cdot \lambda_{rq} \quad (3-41)$$

y

$$v_{rq} = R_r \cdot i_{rq} + \frac{d}{dt} \lambda_{rq} + \omega_{dA} \cdot \lambda_{rd} \quad (3-42)$$

Donde  $d\theta_{dA}/dt = \omega_{dA}$  es la velocidad instantánea (en radianes eléctricos por segundo) del conjunto de bobinas-dq en el aire del entrehierro con respecto a la velocidad del eje-A del rotor (velocidad del rotor), es decir,

$$\omega_{dA} = \omega_d - \omega_m \quad (3-43)$$

En la ecuación 3-43,  $\omega_m$  es la velocidad del rotor en radianes eléctricos por segundo. Está asociada a  $\omega_{mech}$ , la velocidad real del rotor en radianes por segundo, por el número de polos como sigue:

$$\omega_m = (p/2) \cdot \omega_{mech} \quad (3-44)$$

Las ecuaciones 3-41 y 3-42 pueden ser escritas en forma vectorial, como se muestra a continuación, donde cada vector contiene un par de números – la primera entrada corresponde a la bobina-d y la segunda a la bobina-q:

$$\begin{bmatrix} v_{rd} \\ v_{rq} \end{bmatrix} = R_r \cdot \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{rd} \\ \lambda_{rq} \end{bmatrix} + \omega_{dA} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{rotación}} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{rd} \\ \lambda_{rq} \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

**3.2.5. Obtención de Flujos y Corrientes con Voltajes como Entradas:** se pueden escribir las ecuaciones 3-40 y 3-45 en la forma de espacio de estados como sigue:



$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{sd} \\ \lambda_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{bmatrix} - R_s \cdot \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} - \omega_d \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{rotación}} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{sd} \\ \lambda_{sq} \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

y

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{rd} \\ \lambda_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{rd} \\ v_{rq} \end{bmatrix} - R_r \cdot \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} - \omega_{dA} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{rotación}} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{rd} \\ \lambda_{rq} \end{bmatrix} \quad (3-47)$$

Asignando  $[\lambda_{s\_dq}]$ ,  $[v_{s\_dq}]$  y así sucesivamente para representar estos vectores, las ecuaciones 3-46 y 3-47 se pueden escribir como

$$\frac{d}{dt} [\lambda_{s\_dq}] = [v_{s\_dq}] - R_s \cdot [i_{s\_dq}] - \omega_d \cdot [M_{rotación}] \cdot [v_{s\_dq}] \quad (3-48)$$

y

$$\frac{d}{dt} [\lambda_{r\_dq}] = [v_{r\_dq}] - R_r \cdot [i_{r\_dq}] - \omega_{dA} \cdot [M_{rotación}] \cdot [\lambda_{r\_dq}] \quad (3-49)$$

Las ecuaciones 3-48 y 3-49 están representadas por el diagrama de bloques de la Figura 3-7 donde el cálculo de las corrientes de las bobinas-dq a partir de los flujos enlazados se formalizó ya en la sección 3.2.2.

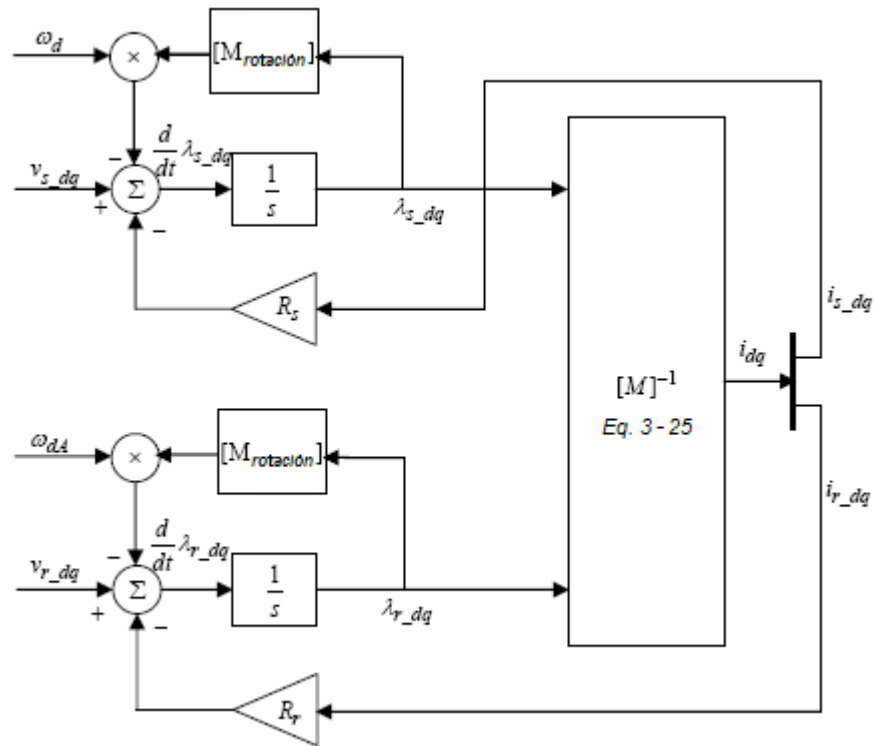


Figura 3-7: Cálculo de los flujos enlazados y las corrientes de las bobinas-dq [4]

### 3.3. PAR ELECTROMAGNÉTICO

**3.3.1. Par sobre la Bobina del eje-d del Rotor:** sobre la bobina del eje-d del rotor, el par producido es debido a la densidad de flujo producida por las bobinas del eje-q de la Figura 3-8. Por las bobinas del eje-q circulan las corrientes  $i_{sq}$  e  $i_{rq}$ , cada una fluyendo a través de  $\sqrt{3/2} \cdot N_s$ . Por lo tanto, el máximo de la distribución de densidad de flujo que “corta” a la bobina-d del rotor debido a estas corrientes, utilizando la ecuación 1-18, es:

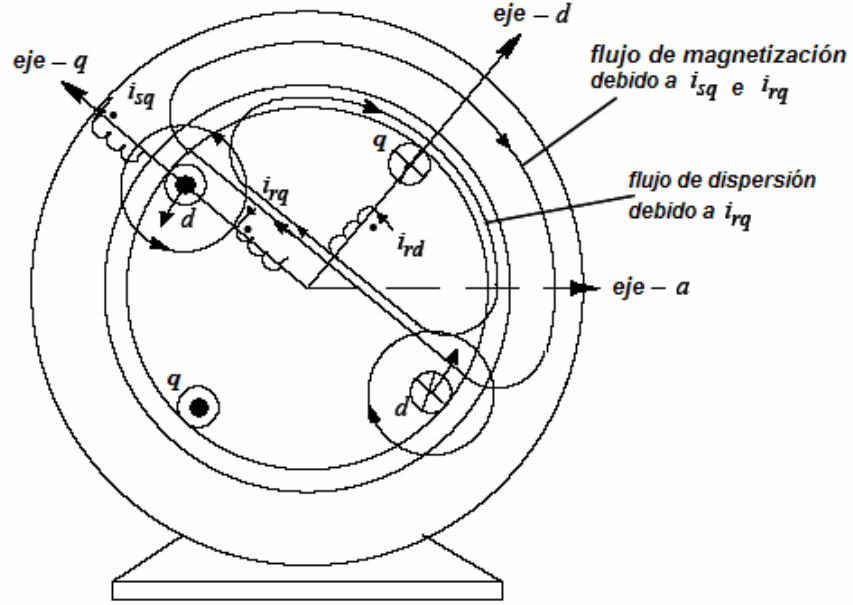


Figura 3-8: Par sobre el eje-d del rotor [4]

$$\hat{B}_{rq} = \frac{\mu_0}{\ell_g} \cdot \underbrace{\left( \frac{\sqrt{3/2} \cdot N_s}{p} \right)}_{mmf} \cdot i_{neta} \quad (3-50)$$

El desarrollo para encontrar  $i_{neta}$  se muestra en el Apéndice J. Por lo tanto, el máximo de la distribución de densidad de flujo magnético que “corta” la bobina-d del rotor es:

$$\hat{B}_{rq} = \frac{\mu_0}{\ell_g} \cdot \underbrace{\left( \frac{\sqrt{3/2} \cdot N_s}{p} \right)}_{mmf} \cdot \left( i_{sq} + \frac{L_r}{L_m} \cdot i_{rq} \right) \quad (3-51)$$

Donde el factor  $L_r/L_m$  permite incluir tanto el flujo de dispersión como el de magnetización producido por  $i_{rq}$ . Utilizando la expresión de par del capítulo 10 de la referencia [3] y advirtiendo que la corriente  $i_{rq}$  en el bobinado del eje-d del rotor fluye a través de  $\sqrt{3/2} \cdot N_s$  vueltas, el par instantáneo sobre el bobinado del rotor del eje-d es

$$T_{d,rotor} = \frac{P}{2} \cdot \left( \pi \cdot \frac{\sqrt{3/2} \cdot N_s}{P} \cdot r \cdot \ell \cdot \hat{B}_{rq} \right) \cdot i_{rd} \quad (3-52)$$

Como se muestra en la Figura 3-8, el par sobre el rotor está en sentido contrario a las agujas del reloj (CCW), por lo tanto se considera como positivo. Reemplazando  $\hat{B}_{rq}$  de la ecuación 3-51 en la ecuación 3-52,

$$T_{d,rotor} = \frac{P}{2} \cdot \left( \pi \cdot \frac{\mu_0}{\ell_g} \cdot r \cdot \ell \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{3/2} \cdot N_s}{P} \right)^2 \cdot \left( i_{sq} + \frac{L_r}{L_m} \cdot i_{rq} \right) \cdot i_{rd} \quad (3-53)$$

Reescribiendo la ecuación 3-53, se identifica  $L_m$  de la ecuación 1-30

$$T_{d,rotor} = \frac{P}{2} \cdot \underbrace{\left( \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot \frac{\mu_0}{\ell_g} \cdot r \cdot \ell \cdot \left( \frac{N_s}{P} \right)^2 \right)}_{L_m} \cdot \left( i_{sq} + \frac{L_r}{L_m} \cdot i_{rq} \right) \cdot i_{rd} \quad (3-54)$$

$$T_{d,rotor} = \frac{P}{2} \cdot L_m \cdot \left( i_{sq} + \frac{L_r}{L_m} \cdot i_{rq} \right) \cdot i_{rd} \quad (3-55)$$

Por lo tanto,

$$T_{d,rotor} = \frac{P}{2} \cdot \underbrace{\left( L_m \cdot i_{sq} + L_r \cdot i_{rq} \right)}_{\lambda_{rq}} \cdot i_{rd} = \frac{P}{2} \cdot \lambda_{rq} \cdot i_{rd} \quad (3-56)$$

**3.3.2. Par sobre la Bobina del eje-q del Rotor:** sobre la bobina del eje-q del rotor, el par producido es debido a la densidad de flujo producida por las bobinas del eje-d en la Figura 3-9. Este par sobre el rotor está en sentido horario (CW), por lo tanto se considera como negativo. Con un procedimiento similar a aquel para obtener la expresión de par sobre el bobinado del eje-d del rotor, resulta la siguiente expresión de par sobre el bobinado del eje-q del rotor:

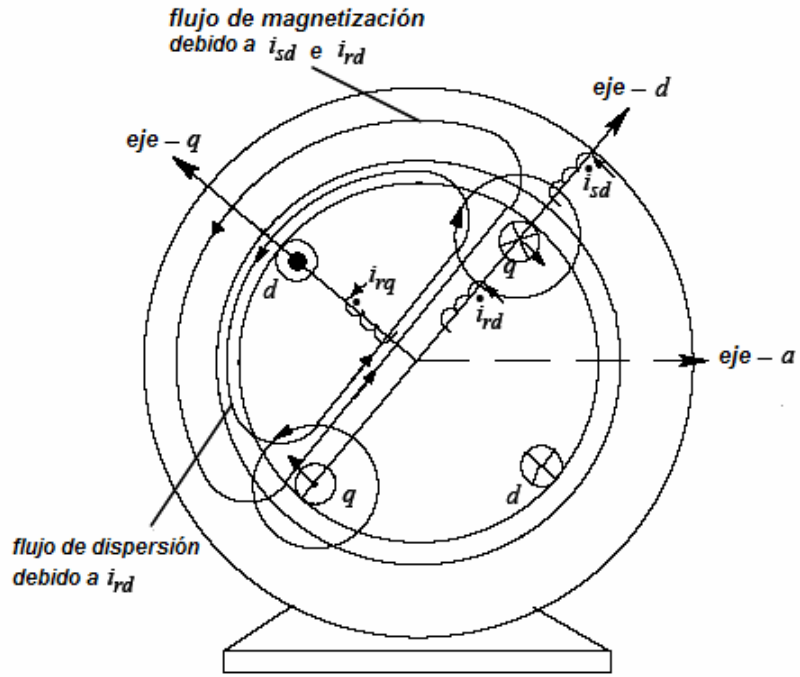


Figura 3-9: Par sobre el eje-q del rotor [4]

$$T_{q,rotor} = -\frac{P}{2} \cdot \underbrace{(L_m \cdot i_{sd} + L_r \cdot i_{rd})}_{\lambda_{rd}} \cdot i_{rq} = -\frac{P}{2} \cdot \lambda_{rd} \cdot i_{rq} \quad (3-57)$$

**3.3.3. Par Electromagnético Neto  $T_{em}$  sobre el Rotor:** por superposición, se suman los pares actuantes sobre el eje-d y el eje-q de las bobinas del rotor; el par instantáneo es

$$T_{em} = T_{d,rotor} + T_{q,rotor} \quad (3-58)$$

El cual, utilizando las ecuaciones 3-55 y 3-56 resulta en

$$T_{em} = \frac{P}{2} \cdot (\lambda_{rq} \cdot i_{rd} - \lambda_{rd} \cdot i_{rq}) \quad (3-59)$$

Sustituyendo los flujos enlazados en la ecuación 3-58, el par electromagnético puede ser expresado en términos de inductancias como

$$T_{em} = \frac{p}{2} \cdot L_m \cdot (i_{sq} \cdot i_{rd} - i_{sd} \cdot i_{rq}) \quad (3-60)$$

### 3.4. ELECTRODINÁMICA

La aceleración es determinada por la diferencia del par electromagnético y el par de carga (incluyendo el par de fricción) actuante sobre  $J_{eq}$ , la inercia combinada de la carga y el motor. En términos de velocidad real (mecánica) del rotor  $\omega_{mech}$  en radianes por segundo, donde  $\omega_{mech} = (2/p) \cdot \omega_m$ ,

$$\frac{d}{dt} \omega_{mech} = \frac{T_{em} - T_L}{J_{eq}} \quad (3-61)$$

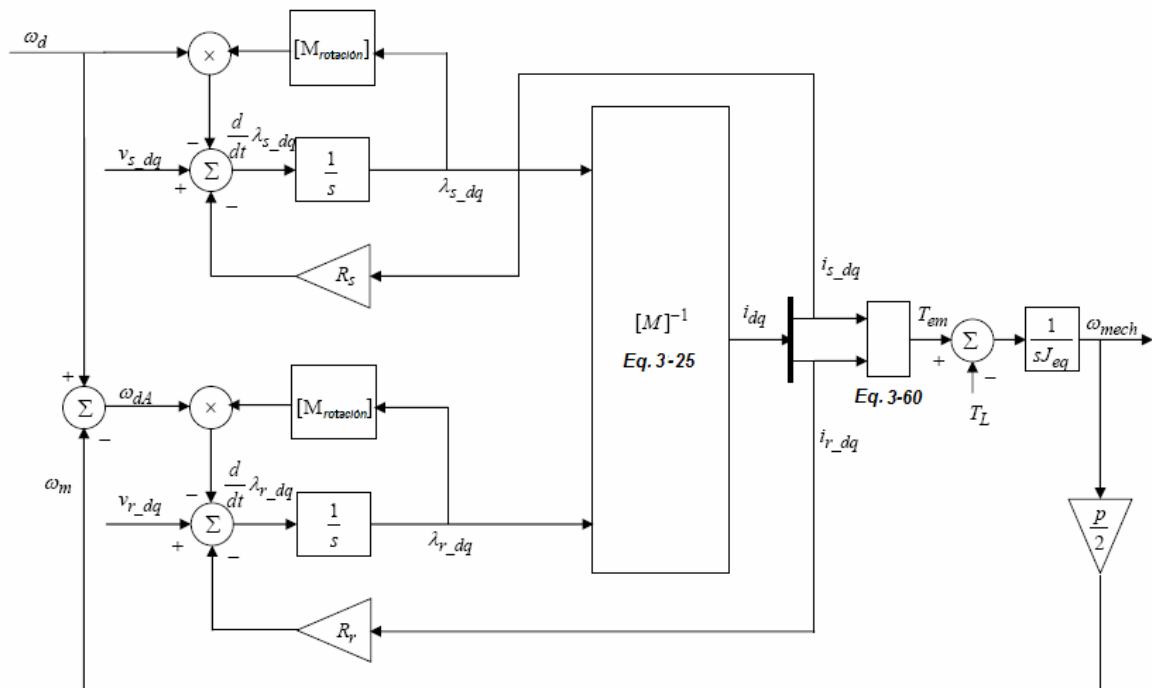


Figura 3-10. Modelo del motor de inducción en términos de las bobinas-dq [4]

La Figura 3-10 muestra el diagrama de bloques del modelo del motor de inducción en términos de las bobinas-dq:

### 3-5. CIRCUITOS EQUIVALENTES DE LOS EJES-dq

Sustituyendo la derivada del flujo enlazado en términos de las inductancias en las ecuaciones de voltajes (ecuaciones 3-38 y 3-39 para el estator y ecuaciones 3-41 y 3-42 para el rotor), obtenemos,

$$v_{sd} = R_s \cdot i_{sd} - \omega_d \cdot \lambda_{sq} + L_{\ell s} \cdot \frac{d}{dt} i_{sd} + L_m \cdot \frac{d}{dt} (i_{sd} + i_{rd}) \quad (3-62)$$

$$v_{sq} = R_s \cdot i_{sq} + \omega_d \cdot \lambda_{sd} + L_{\ell s} \cdot \frac{d}{dt} i_{sq} + L_m \cdot \frac{d}{dt} (i_{sq} + i_{rq}) \quad (3-63)$$

y

$$\underbrace{v_{rd}}_{=0} = R_r \cdot i_{rd} - \omega_{dA} \cdot \lambda_{rq} + L_{\ell r} \cdot \frac{d}{dt} i_{rd} + L_m \cdot \frac{d}{dt} (i_{sd} + i_{rd}) \quad (3-64)$$

$$\underbrace{v_{rq}}_{=0} = R_r \cdot i_{rq} + \omega_{dA} \cdot \lambda_{rd} + L_{\ell r} \cdot \frac{d}{dt} i_{rq} + L_m \cdot \frac{d}{dt} (i_{sq} + i_{rq}) \quad (3-65)$$

Para cada uno de los ejes, las ecuaciones de las bobinas del estator y del rotor son combinadas para producir los circuitos equivalentes mostrados en las Figuras 3-11a y 3-11b. Utilizando la ecuación 3-38 se pueden etiquetar los terminales a través de los cuales el voltaje es  $d\lambda_{sd}/dt$  en la Figura 3-11a. De forma similar, utilizando las ecuaciones 3-39, 3-41 y 3-42 respectivamente, se pueden etiquetar los terminales en las Figuras 3-11a y 3-11b con  $d\lambda_{sq}/dt$ ,  $d\lambda_{rd}/dt$  y  $d\lambda_{rq}/dt$ .

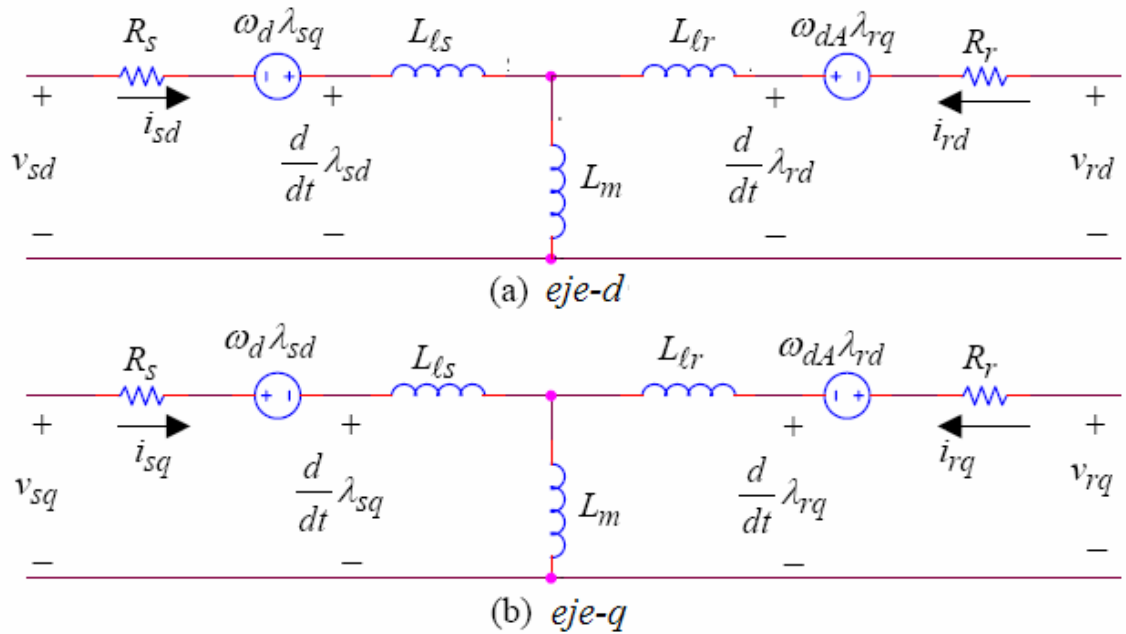


Figura 3-11: Circuitos equivalentes de las bobinas-dq [4]

### 3.6. CONDICIONES DE PRODUCCIÓN DE PAR ÓPTIMO

En esta sección se estudiará brevemente qué condición se debe cumplir para producir par óptimo ya que de esta condición se desprende la filosofía del control vectorial.

La condición de par óptimo en un brazo se obtiene cuando toda la fuerza aplicada al brazo es aprovechada en movimiento. El par producido por una fuerza aplicada a un brazo se obtiene a través de la ecuación 3-66 y su magnitud a través de la ecuación 3-67.

$$\tau = \vec{d} \times \vec{F} \tag{3-66}$$

$$\|\tau\| = \|\vec{d}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot \text{sen}(\theta) \tag{3-67}$$

Donde  $\tau$  es el par y  $\theta$  es el ángulo entre el vector fuerza  $\vec{F}$  y el vector distancia  $\vec{d}$ . De la ecuación 3-67 se puede concluir que la magnitud del par producido es máxima, cuando  $\theta$  es igual a 90 grados, tal como se observa en la Figura 3-12a. En la Figura 3-12b se



observa que el vector fuerza  $\vec{F}$  está a un ángulo menor a  $90^\circ$  con respecto al vector distancia  $\vec{d}$ , y por tal razón toda la fuerza aplicada no es aprovechada en movimiento, es decir que se presenta una pérdida en la fuerza aplicada al brazo.

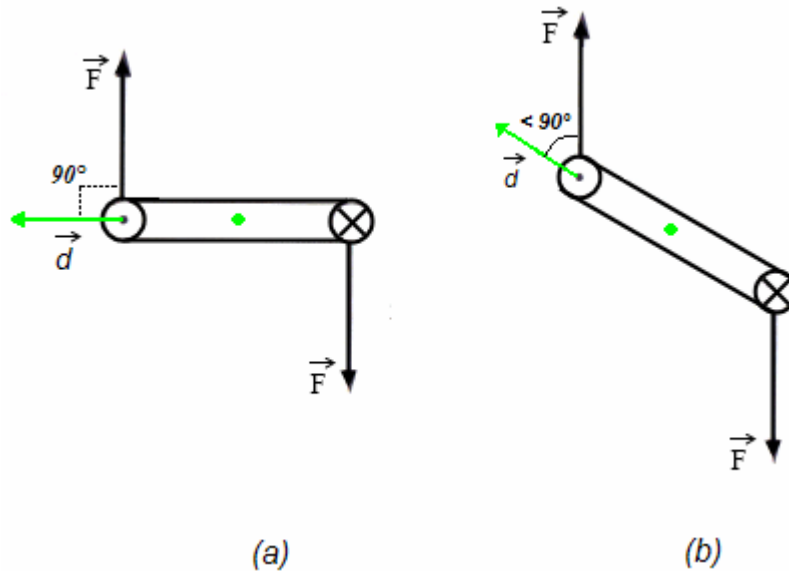


Figura 3-12: Condición de par óptimo y par no óptimo [19]

En el motor de corriente continua la corriente del estator determina el flujo magnético y la corriente del rotor se puede usar como medio directo para controlar el par. En un motor de corriente continua el par electromagnético está dado por la siguiente ecuación:

$$T_{em} = k \cdot \phi \cdot i_a \quad (3-68)$$

Donde  $i_a$  es la corriente de armadura.

La posición física de las escobillas en un motor de corriente continua con respecto al campo del estator, asegura la condición óptima para el par bajo todas las posibilidades como se muestra en la Figura 3-13, donde se observa que los vectores de corriente de armadura y flujo magnético del estator se encuentran a un ángulo de  $90^\circ$ .

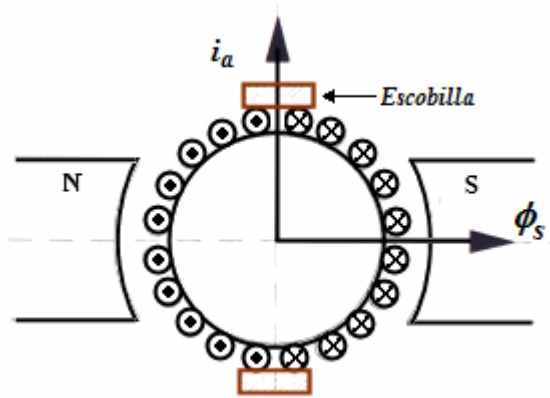


Figura 3-13: Ortogonalidad entre los vectores de corriente y flujo en un motor DC [19]

En el motor de inducción con rotor de jaula de ardilla sólo se puede controlar la corriente del estator debido a la inaccesibilidad del rotor. Si se hace una comparación del motor de inducción con el motor de corriente continua, se observa que en el motor de inducción no hay un colector de delgas como en la máquina de corriente continua y por lo tanto no hay un dispositivo que fije la posición relativa entre el flujo magnético del estator y la corriente del rotor, o lo que es lo mismo, que fije las posiciones relativas entre los flujos magnéticos del estator y del rotor. Por lo tanto, si se desea una producción de par óptimo en el motor de inducción, la ecuación de par de éste debe ser tratada como la ecuación de par de un motor de corriente continua (ecuación 3-68), y para lograrlo se debe cumplir que el eje-d de las bobinas-dq esté alineado con el flujo enlazado del rotor y de esta forma la ecuación de par electromagnético del motor de inducción se convierte en un equivalente de la ecuación de par electromagnético del motor de corriente continua [4].

### 3.7. MODELO DEL MOTOR CON EL EJE-d ALINEADO A LO LARGO DEL FLUJO ENLAZADO DEL ROTOR $\vec{\lambda}_r$

En esta sección se encontrara un modelo del motor alineando el eje-d (común tanto para el estator como para el rotor) a lo largo del flujo enlazado del rotor como se muestra en la Figura 3-14. En estas condiciones  $\vec{\lambda}_r = \hat{\lambda}_r \cdot e^{j0}$ , y por lo tanto,



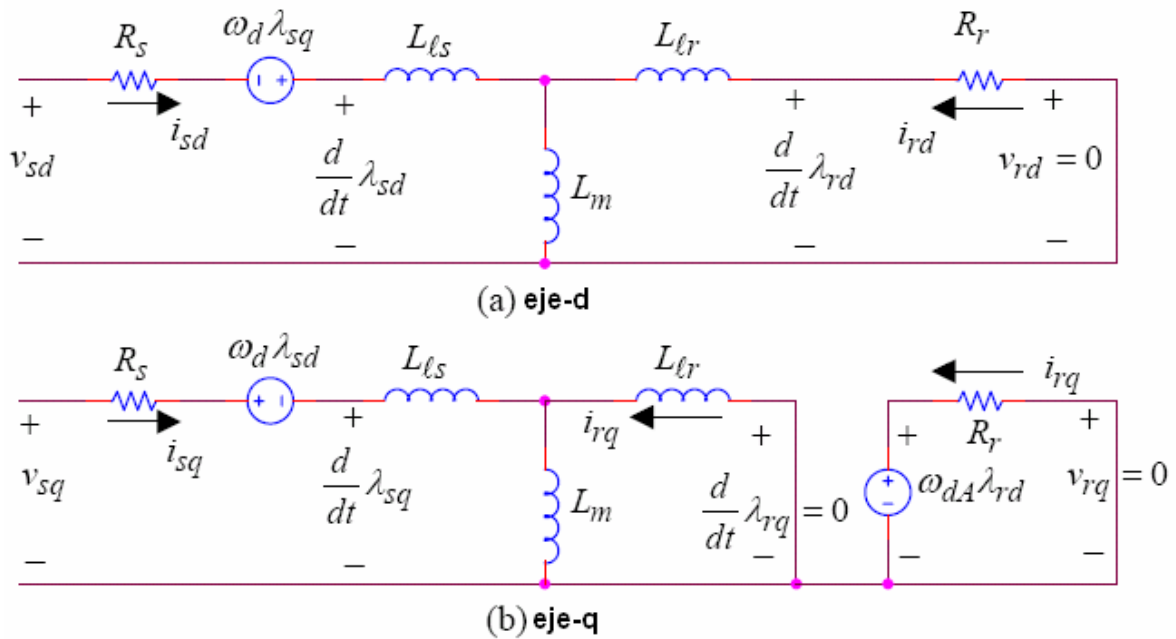


Figura 3-15: Circuitos dinámicos con el eje-d alineado con  $\vec{\lambda}_r$  [4].

A continuación, se calculará la velocidad de deslizamiento  $\omega_{dA}$  y el par electromagnético  $T_{em}$  en este nuevo modelo del motor en términos del flujo enlazado por la bobina-d del rotor  $\lambda_{rd}$  y la componente de la corriente de estator  $i_{sq}$  en la bobina-q. Bajo condiciones de control vectorial, el flujo enlazado por la bobina-d del rotor,  $\lambda_{rd}$ , estará constante excepto en el modo de debilitamiento de campo y la producción de par estará controlada sólo por  $i_{sq}$ . Como  $\lambda_{rd}$  varía durante el aumento de flujo en el arranque y cuando el motor se hace entrar en el modo de operación de debilitamiento de flujo, también se establecerán las dinámicas de  $\lambda_{rd}$ .

**3.7.1. Cálculo de  $\omega_{dA}$ :** como se discutió anteriormente, bajo la condición que el eje-d esté siempre alineado con el flujo enlazado del rotor, el flujo enlazado del rotor del eje-q es cero así como también  $d\lambda_{rq}/dt = 0$ . Por lo tanto en un rotor jaula de ardilla con  $v_{rq} = 0$ , la ecuación 3-42 queda en

$$\omega_{dA} = -R_r \cdot \frac{i_{rq}}{\lambda_{rd}} \quad (3-71)$$

Lo cual es consistente con el circuito equivalente de la Figura 3-15b. En el circuito del rotor, la constante de tiempo  $\tau_r$ , llamada la constante de tiempo del rotor, es

$$\tau_r = \frac{L_r}{R_r} \quad (3-72)$$

Sustituyendo  $i_{rq}$  de la ecuación 3-70 en la ecuación 3-71, en términos de  $\tau_r$ , la velocidad de deslizamiento puede ser expresada como

$$\omega_{dA} = \frac{L_m}{\tau_r} \cdot \frac{i_{sq}}{\lambda_{rd}} \quad (3-73)$$

**3.7.2. Cálculo de  $T_{em}$ :** dado que el flujo enlazado del rotor en el eje-q es cero, el par electromagnético es producido sólo por el flujo del eje-d en el rotor actuando sobre la bobina del eje-q del rotor. Por lo tanto, de la ecuación 3-59,

$$T_{em} = -\frac{p}{2} \cdot \lambda_{rd} \cdot i_{rq} \quad (3-74)$$

En la ecuación 3-74, sustituyendo  $i_{rq}$  de la ecuación 3-70

$$T_{em} = \frac{p}{2} \cdot \lambda_{rd} \cdot \left( \frac{L_m}{L_r} \cdot i_{sq} \right) \quad (3-75)$$

**3.7.3. Dinámicas del Flujo Enlazado del Rotor en el Eje-d:** para obtener la dependencia de  $\lambda_{rd}$  sobre  $i_{sd}$ , se hará uso del circuito equivalente de la Figura 3-15a, y se dibujará como en la Figura 3-16 con una excitación de corriente dada por  $i_{sd}$ .

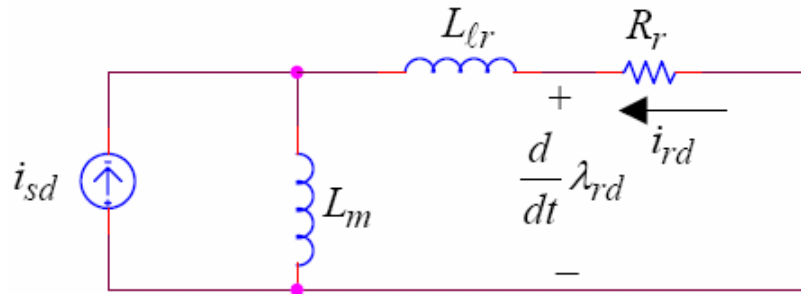


Figura 3-16: Circuito simplificado del eje-d con una excitación de corriente [4]

De la Figura 3-16 en términos de variables en el dominio de Laplace

$$i_{rd}(s) = -\frac{s \cdot L_m}{R_r + s \cdot L_r} \cdot i_{sd}(s) \quad (3-76)$$

En la bobina del eje-d del rotor, de la ecuación 3-20

$$\lambda_{rd} = L_r \cdot i_{rd} + L_m \cdot i_{sd} \quad (3-77)$$

Sustituyendo  $i_{rd}$  de la ecuación 3-76 dentro de la ecuación 3-77, y utilizando  $\tau_r$  de la ecuación 3-72

$$\lambda_{rd}(s) = \frac{L_m}{(1 + s \cdot \tau_r)} \cdot i_{sd}(s) \quad (3-78)$$

En el dominio del tiempo, la dinámica del flujo enlazado del rotor expresada mediante la ecuación 3-78 es como sigue:

$$\frac{d}{dt} \lambda_{rd} + \frac{1}{\tau_r} \cdot \lambda_{rd} = \frac{L_m}{\tau_r} \cdot i_{sd} \quad (3-79)$$

**3.7.4. Modelo del Motor:** basado en las ecuaciones anteriores, un diagrama de bloques de un modelo del motor de inducción, donde el eje-d está alineado con el flujo



con motor de inducción, las corrientes de fase del estator  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$  e  $i_c(t)$  son transformadas de una manera tal que  $i_{sq}(t)$  entrega el par electromagnético deseado mientras que  $i_{sd}(t)$  mantiene el flujo enlazado del rotor en su valor nominal. Los valores de referencia  $i_{sq}^*(t)$  e  $i_{sd}^*(t)$  son generados por los lazos de control de par, velocidad y flujo, como es discutido a continuación.

**3.8.1. La Corriente de Referencia  $i_{sq}^*(t)$ :** el valor de referencia  $i_{sq}^*(t)$  depende del par deseado el cual es calculado dentro del control en cascada de la Figura 3-18, donde el lazo de velocidad es el lazo más externo y el lazo de par es el lazo más interno. El error entre la velocidad de referencia  $\omega_{mech}^*(t)$  y la velocidad medida  $\omega_{mech}(t)$  es controlado por un controlador PI para generar el par de referencia  $T_{em}^*(t)$ . Finalmente, el error entre  $T_{em}^*(t)$  y el par estimado  $T_{em}(t)$  es controlado por otro controlador PI para generar el valor de referencia  $i_{sq}^*(t)$ .

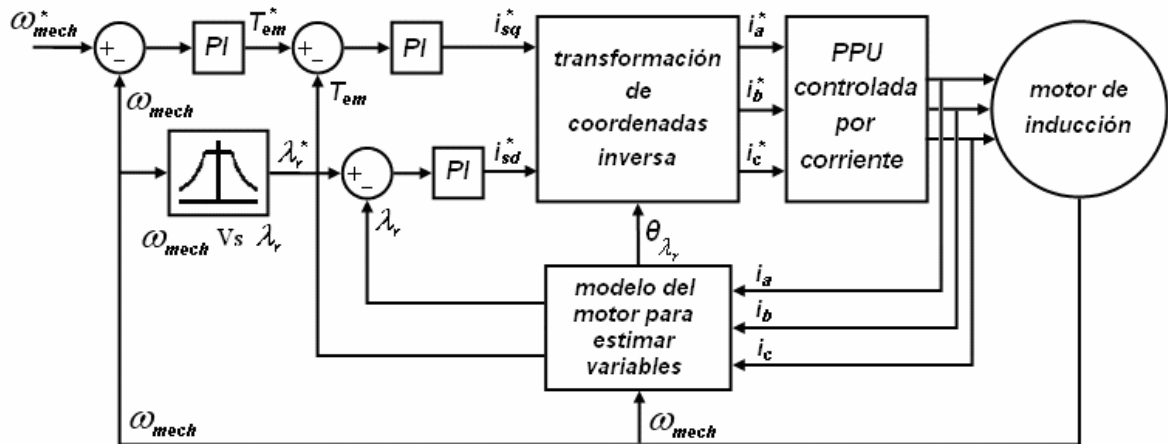


Figura 3-18: Esquema de Control Vectorial Directo con PPU controlada por corriente

**3.8.2. La Corriente de Referencia  $i_{sd}^*(t)$ :** el valor de referencia  $i_{sd}^*(t)$  depende del flujo enlazado del rotor el cual es calculado por el bloque velocidad versus flujo enlazado del rotor " $\omega_{mech} V_s \lambda_r$ " de la Figura 3-18. Para valores de velocidad medidos por debajo de



la velocidad nominal del motor, el flujo enlazado del rotor  $\lambda_r^*$  se mantiene en su valor nominal. Por encima de la velocidad nominal, el flujo enlazado del rotor  $\lambda_r^*$  se reduce de acuerdo con el modo de debilitamiento de flujo, como se discutirá en el capítulo cuatro. El error entre  $\lambda_r$  y el flujo enlazado del rotor estimado  $\lambda_r^*$  es controlado por un controlador PI para generar el valor de referencia  $i_{sd}^*(t)$ .

### 3.8.3. Transformación y Transformación Inversa de las Corrientes de Estator:

la Figura 3-18 muestra el ángulo  $\theta_{\lambda_r}(t)$  al cual el eje-d está alineado y es medido con respecto al eje-a estacionario. Este ángulo es estimado por el bloque “modelo del motor para estimar variables”. Utilizando el ángulo del eje-d  $\theta_{\lambda_r}(t)$ , las señales de las corrientes de referencia  $i_{sd}^*(t)$  e  $i_{sq}^*(t)$  son transformadas en las señales de referencia de corrientes de estator  $i_a^*(t)$ ,  $i_b^*(t)$  e  $i_c^*(t)$ , como se muestra en la Figura 3-18 mediante el bloque transformación de coordenadas inversa (dq – abc). La unidad de procesamiento de potencia controlada por corriente utiliza éstas señales de referencia para suministrar las corrientes deseadas al motor.

Las corrientes de estator son medidas y el ángulo del eje-d  $\theta_{\lambda_r}(t)$  es utilizado para transformarlas en las señales  $i_{sd}(t)$  e  $i_{sq}(t)$  utilizando la matriz de transformación  $[T_s]_{abc \rightarrow dq}$  de la ecuación 3-11. Esta transformación se realiza dentro del bloque “Modelo del motor para estimar variables”.

**3.8.4. Modelo del Motor para Estimar Variables:** el modelo del motor para estimar variables de la Figura 3-18 dispone de las siguientes entradas las cuales son medidas: las tres corrientes de fase de estator  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$  e  $i_c(t)$  (las cuales son transformadas en  $i_{sd}(t)$  e  $i_{sq}(t)$  por este bloque, tal como se dijo en la sección anterior) y la velocidad del rotor  $\omega_{mech}(t)$ . El modelo del motor también necesita una estimación precisa de los parámetros del rotor  $L_m$ ,  $L_{lr}$  y  $R_r$ . Las siguientes variables son calculadas en el modelo

del motor para uso interno y también como salidas: el ángulo  $\theta_{\lambda_r}$  (con respecto al eje-a estacionario) al cual el eje-d está alineado, el flujo enlazado del rotor  $\lambda_r(t)$  y el par electromagnético  $T_{em}(t)$ .

**3.8.5. La Unidad de Procesamiento de Potencia (PPU):** la tarea de la unidad de procesamiento de potencia (PPU) de la Figura 3-18 es suministrar las corrientes deseadas con base en las señales de referencia al motor de inducción. Uno de los caminos más sencillos para garantizar que al motor sean suministradas las corrientes deseadas es utilizar un control por histéresis como el mostrado en la Figura 3-19a donde las fases b y c son omitidas por simplicidad. La corriente de fase medida es comparada con su valor de referencia en el comparador de histéresis, cuya salida determina el estado del interruptor (encendido o apagado), causando una forma de onda de corriente como se muestra en la Figura 3-19b.

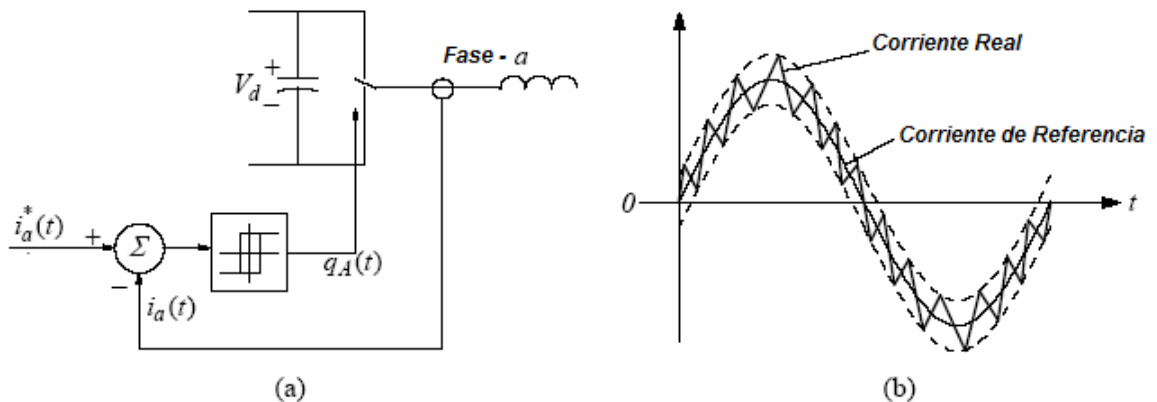


Figura 3-19: PPU controlada por corriente [4]

A pesar de la simplicidad del control por histéresis, una desventaja observada de este controlador es que su frecuencia de conmutación cambia como una función de la forma de onda de la realimentación. Por esta razón, unidades de procesamiento de potencia con frecuencia de conmutación constante son utilizadas. Una alternativa para mantener la frecuencia de conmutación constante es utilizar un esquema de modulación de ancho de pulso por vector espacial (SV-PWM). Este esquema utiliza como entradas los voltajes de estator deseados, contrario al esquema de control por histéresis el cual utiliza como

entradas las corrientes de estator deseadas. En éste trabajo se utiliza una PPU controlada por voltaje, lo cual cambia un poco la estructura del esquema de control vectorial como se muestra en la Figura 3-20. En esta Figura se observa que ya no se realimenta el torque electromagnético; ahora se realimenta la corriente  $i_{sq}(t)$ , la cual es entregada por el bloque “Modelo del motor para estimar variables”.

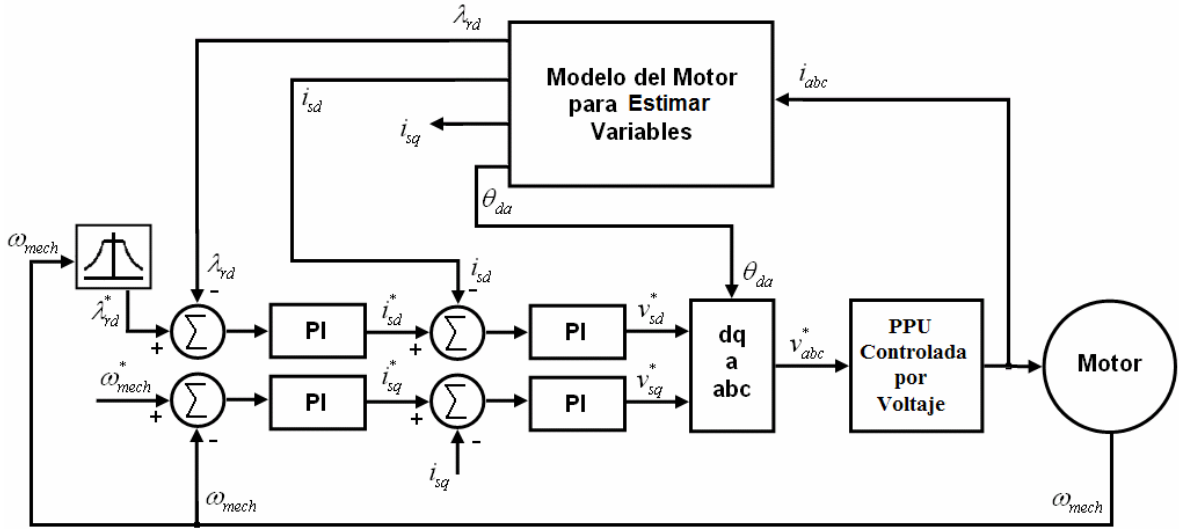


Figura 3-20: Esquema de Control vectorial Directo con PPU controlada por voltaje

### 3.9. CALCULO DE LOS VOLTAJES A SER APLICADOS EN EL ESTATOR

Sustituyendo por  $i_{rd}$  desde la ecuación 3-77 dentro de la ecuación 3-18 para  $\lambda_{sd}$

$$\lambda_{sd} = \cdot L_s \left( 1 - \frac{L_m^2}{L_s \cdot L_r} \right) \cdot i_{sd} + \frac{L_m}{L_r} \cdot \lambda_{rd} \quad (3-81)$$

Entonces

$$\lambda_{sd} = \cdot \sigma \cdot L_s \cdot i_{sd} + \frac{L_m}{L_r} \cdot \lambda_{rd} \quad (3-82)$$

De la ecuación 3-19 para  $\lambda_{sq}$ , utilizando la ecuación 3-70 bajo condiciones de control vectorial

$$\lambda_{sq} = \sigma \cdot L_s \cdot i_{sq} \quad (3-83)$$

Sustituyendo estos dentro de las ecuaciones 3-38 y 3-39 para  $v_{sd}$  y  $v_{sq}$ ,

$$v_{sd} = R_s \cdot i_{sd} + \sigma \cdot L_s \cdot \frac{d}{dt} i_{sd} + \frac{L_m}{L_r} \cdot \frac{d}{dt} \lambda_{rd} - \omega_d \cdot \sigma \cdot L_s \cdot i_{sq} \quad (3-84)$$

y

$$v_{sq} = R_s \cdot i_{sq} + \sigma \cdot L_s \cdot \frac{d}{dt} i_{sq} + \omega_d \cdot \frac{L_m}{L_r} \cdot \lambda_{rd} + \omega_d \cdot \sigma \cdot L_s \cdot i_{sd} \quad (3-85)$$

### 3.10. MODELO EN VARIABLES DE ESTADO

Retomando las ecuaciones 3-79, 3-84 y 3-85, donde el eje-d está alineado con el vector espacial de flujo del rotor. Despejando  $\frac{d}{dt} \lambda_{rd}$  de la ecuación 3-79 y reemplazándolo en la ecuación 3-84

$$v_{sd} = R_s \cdot i_{sd} + \sigma \cdot L_s \cdot \frac{d}{dt} i_{sd} + \frac{L_m}{L_r} \cdot \left( \frac{L_m}{\tau_r} \cdot i_{sd} - \frac{1}{\tau_r} \cdot \lambda_{rd} \right) - \omega_d \cdot \sigma \cdot L_s \cdot i_{sq} \quad (3-86)$$

Despejando  $\frac{d}{dt} i_{sd}$  en la ecuación 3-86

$$\frac{d}{dt} i_{sd} = -\frac{R_s}{\sigma \cdot L_s} \cdot i_{sd} - \frac{L_m^2}{\sigma \cdot L_s \cdot L_r \cdot \tau_r} \cdot i_{sd} + \omega_d \cdot i_{sq} + \frac{L_m}{\sigma \cdot L_s \cdot L_r \cdot \tau_r} \cdot \lambda_{rd} + \frac{1}{\sigma \cdot L_s} \cdot v_{sd} \quad (3-87)$$

$$\frac{d}{dt} i_{sd} = - \left( \frac{R_s}{\sigma \cdot L_s} + \frac{R_r \cdot (1-\sigma)}{\sigma \cdot L_r} \right) \cdot i_{sd} + \omega_d \cdot i_{sq} + \frac{R_r \cdot L_m}{\sigma \cdot L_s \cdot L_r^2} \cdot \lambda_{rd} + \frac{1}{\sigma \cdot L_s} \cdot v_{sd} \quad (3-88)$$

Despejando  $\frac{d}{dt} i_{sq}$  en la ecuación 3-85

$$\frac{d}{dt} i_{sq} = -\omega_d \cdot i_{sd} - \frac{R_s}{\sigma \cdot L_s} \cdot i_{sq} - \omega_d \cdot \frac{L_m}{\sigma \cdot L_s \cdot L_r} \cdot \lambda_{rd} + \frac{1}{\sigma \cdot L_s} v_{sq} \quad (3-89)$$

Reemplazando  $\omega_d = \omega_m + \omega_{dA}$  en el término de  $\lambda_{rd}$  de la ecuación 3-89

$$\frac{d}{dt} i_{sq} = -\omega_d \cdot i_{sd} - \frac{R_s}{\sigma \cdot L_s} \cdot i_{sq} - (\omega_m + \omega_{dA}) \cdot \frac{L_m}{\sigma \cdot L_s \cdot L_r} \cdot \lambda_{rd} + \frac{1}{\sigma \cdot L_s} v_{sq} \quad (3-90)$$

$$\frac{d}{dt} i_{sq} = -\omega_d \cdot i_{sd} - \frac{R_s}{\sigma \cdot L_s} \cdot i_{sq} - \left( \omega_m + \frac{L_m}{\tau_r} \cdot \frac{i_{sq}}{\lambda_{rd}} \right) \cdot \frac{L_m}{\sigma \cdot L_s \cdot L_r} \cdot \lambda_{rd} + \frac{1}{\sigma \cdot L_s} v_{sq} \quad (3-91)$$

$$\frac{d}{dt} i_{sq} = -\omega_d \cdot i_{sd} - \frac{R_s}{\sigma \cdot L_s} \cdot i_{sq} - \frac{L_m^2}{\sigma \cdot L_s \cdot L_r \cdot \tau_r} \cdot i_{sq} - \omega_m \cdot \frac{L_m}{\sigma \cdot L_s \cdot L_r} \cdot \lambda_{rd} + \frac{1}{\sigma \cdot L_s} v_{sq} \quad (3-92)$$

$$\frac{d}{dt} i_{sq} = -\omega_d \cdot i_{sd} - \left( \frac{R_s}{\sigma \cdot L_s} + \frac{R_r \cdot (1-\sigma)}{\sigma \cdot L_r} \right) \cdot i_{sq} - \omega_m \cdot \frac{L_m}{\sigma \cdot L_s \cdot L_r} \cdot \lambda_{rd} + \frac{1}{\sigma \cdot L_s} v_{sq} \quad (3-93)$$

Escribiendo las ecuaciones 3-79, 3-91 y 3-93 en forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \lambda_{rd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & \omega_d & B \\ -\omega_d & -A & -\omega_m \cdot C \\ D & 0 & -E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \lambda_{rd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{bmatrix} \quad (3-94)$$

Donde

$$A = \left( \frac{R_s}{\sigma \cdot L_s} + \frac{R_r \cdot (1-\sigma)}{\sigma \cdot L_r} \right) \quad B = \frac{R_r \cdot L_m}{\sigma \cdot L_s \cdot L_r^2} \quad C = \frac{L_m}{\sigma \cdot L_s \cdot L_r}$$

$$D = \frac{L_m}{\tau_r}$$

$$E = \frac{1}{\tau_r}$$

$$F = \frac{1}{\sigma \cdot L_s}$$

La ecuación 3-94 más las ecuaciones 3-61, 3-69 y 3-75 constituyen el modelo del motor en variables de estado con el eje-d alineado con el vector espacial de flujo del rotor.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \lambda_{rd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & \omega_d & B \\ -\omega_d & -A & -\omega_m \cdot C \\ D & 0 & -E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \lambda_{rd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{bmatrix} \quad (3-95)$$

$$\lambda_{rq}(t) = 0 \quad (3-96)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_{mech} = \frac{T_{em} - T_L}{J_{eq}} \quad (3-97)$$

$$T_{em} = \frac{p}{2} \cdot \lambda_{rd} \cdot \left( \frac{L_m}{L_r} \cdot i_{sq} \right) \quad (3-98)$$

## 4. DISEÑO DEL CONTROLADOR

### 4.1. INTRODUCCION

Un controlador diseñado apropiadamente hace al sistema insensible a disturbios y cambios en los parámetros del sistema [3]. En general, los objetivos del controlador son:

- Un error de estado estable igual a cero.
- Una buena respuesta dinámica (lo cual implica tanto una respuesta transitoria rápida como un pequeño tiempo de establecimiento con muy poco sobre impulso).

Para mantener la discusión simple, un sistema de control con realimentación unitaria como el mostrado en la Figura 4-1 será considerado. Donde  $G_p(s)$  es la función de transferencia en el dominio de Laplace de la planta y  $G_c(s)$  es la función de transferencia del controlador.

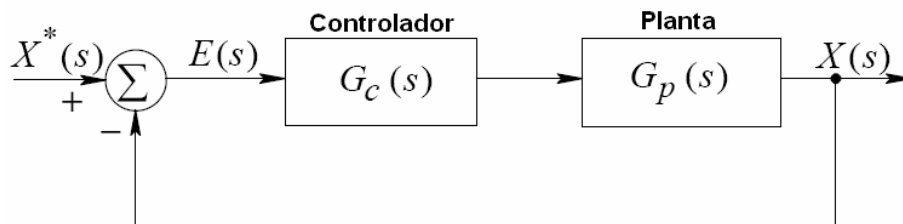


Figura 4-1: Representación del sistema de control realimentado

La función de transferencia de lazo abierto es  $G_{OL}(s) = G_c(s) \cdot G_p(s)$  y la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$G_{CL}(s) = \frac{G_{OL}(s)}{1 + G_{OL}(s)} \quad (4-1)$$

Con el fin de definir unos pocos términos de control necesarios, se considerará un diagrama de Bode genérico de la función de transferencia de lazo abierto  $G_{OL}(s)$  en términos de su magnitud y ángulo de fase, como se muestra en la Figura 4-2.

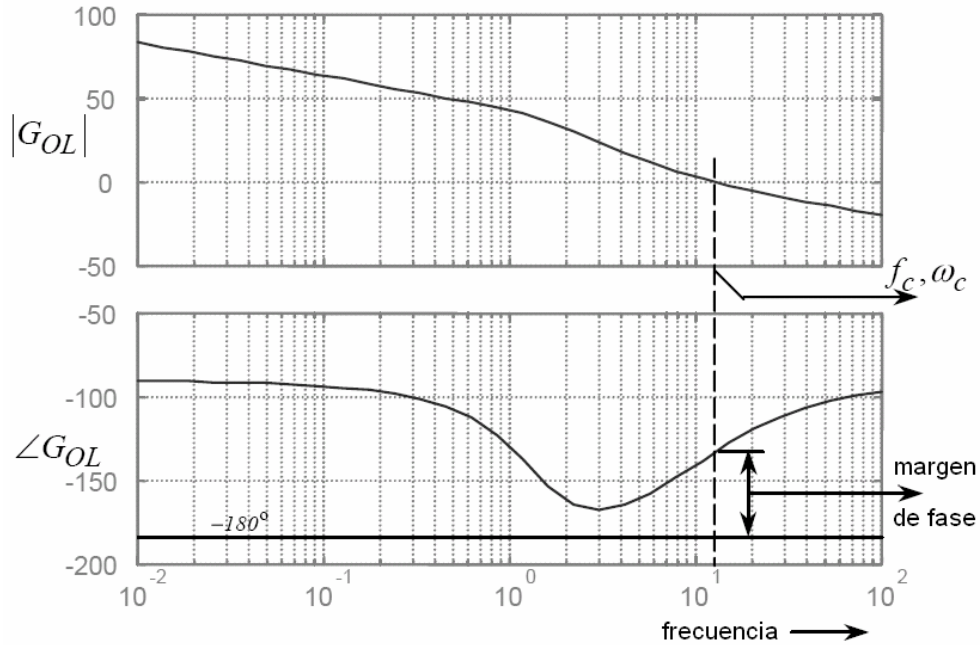


Figura 4-2: Diagrama de Bode de la función de transferencia de lazo abierto [3]

La frecuencia en la cual la ganancia de la función de transferencia de lazo abierto es la unidad (es decir  $|G_{OL}(s)| = 0 \text{ db}$ ) es definida como la frecuencia de corte  $f_c$  (frecuencia angular  $\omega_c = 2\pi \cdot f_c$ ). A la frecuencia de corte, el atraso de fase introducido por la función de transferencia de lazo abierto debe ser menor que  $180^\circ$  para que el sistema realimentado de lazo cerrado sea estable. Por lo tanto, en  $f_c$ , el ángulo de fase  $\phi_{OL}|_{f_c}$  de la función de transferencia de lazo abierto, medido con respecto a  $-180^\circ$ , es definido como el margen de fase (PM).

$$PM = \phi_{OL}|_{f_c} - (-180^\circ) = \phi_{OL}|_{f_c} + 180^\circ \quad (4-2)$$



Note que  $\phi_{OL}|_{f_c}$  tiene un valor negativo. Para una respuesta dinámica satisfactoria sin oscilaciones, el margen de fase debe ser mayor que  $45^\circ$ , preferiblemente cerca de  $60^\circ$  [3].

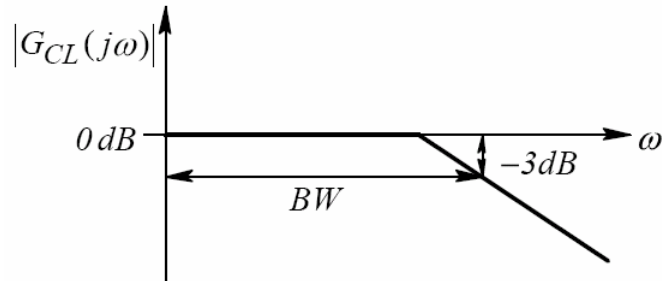


Figura 4-3: Ancho de banda de la función de transferencia de lazo cerrado

En el diagrama de Bode de magnitud de la función de transferencia de lazo cerrado mostrado en la Figura 4-3 (idealizado mediante asíntotas), el ancho de banda es definido como la frecuencia en la cual la ganancia cae a  $-3\text{dB}$ . En la práctica se hace la siguiente aproximación:

$$\text{Ancho de banda de lazo cerrado} \approx f_c \quad (4-3)$$

Para una respuesta transitoria rápida mediante el sistema de control, el ancho de banda de lazo cerrado debe ser alto. Este requerimiento implica que la frecuencia de corte  $f_c$  (de la función de transferencia de lazo abierto) debe ser diseñada para que sea alta [3]. Con los términos de control  $f_c$  y PM se puede realizar el diseño de controladores PI.

La técnica de control vectorial o por campo orientado seleccionada en este trabajo, mostrada en la Figura 4-4, utiliza cuatro controladores PI, distribuidos de la siguiente forma: dos para controlar las corrientes de los ejes-dq, uno para controlar el flujo enlazado del rotor y uno para controlar la velocidad.

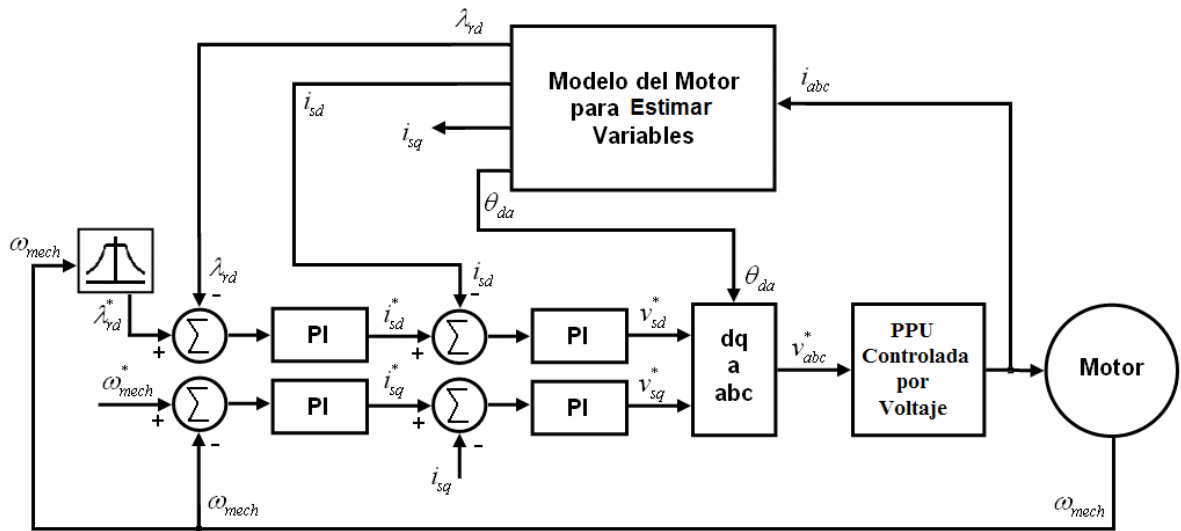


Figura 4-4: Técnica de control vectorial seleccionada

Para diseñar los cuatro controladores PI se utilizará el modelo del motor en variables de estado desarrollado en el capítulo anterior, donde el eje-d está alineado con el vector espacial flujo enlazado del rotor.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \lambda_{rd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & \omega_d & B \\ -\omega_d & -A & -\omega_m \cdot C \\ D & 0 & -E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \lambda_{rd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

$$\lambda_{rq}(t) = 0 \quad (4-5)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_{mech} = \frac{T_{em} - T_L}{J_{eq}} \quad (4-6)$$

$$T_{em} = \frac{p}{2} \cdot \lambda_{rd} \cdot \left( \frac{L_m}{L_r} \cdot i_{sq} \right) \quad (4-7)$$

## 4.2. DISEÑO DEL CONTROLADOR DE FLUJO

Se necesita obtener la dinámica del flujo enlazado del rotor en términos de la corriente del eje-d. Por lo tanto, tomando la última fila de la ecuación 4-4 y expresándola en el dominio de Laplace tenemos:

$$\lambda_{rd}(s) = \frac{L_m}{1 + \tau_r \cdot s} \cdot i_{sd}(s) \quad (4-8)$$

Utilizando la función de transferencia de la ecuación 4-8 el diagrama del lazo del flujo enlazado del rotor es mostrado en la Figura 4-5. Las constantes del controlador PI serán calculadas utilizando los conceptos de control  $f_c$  y PM.

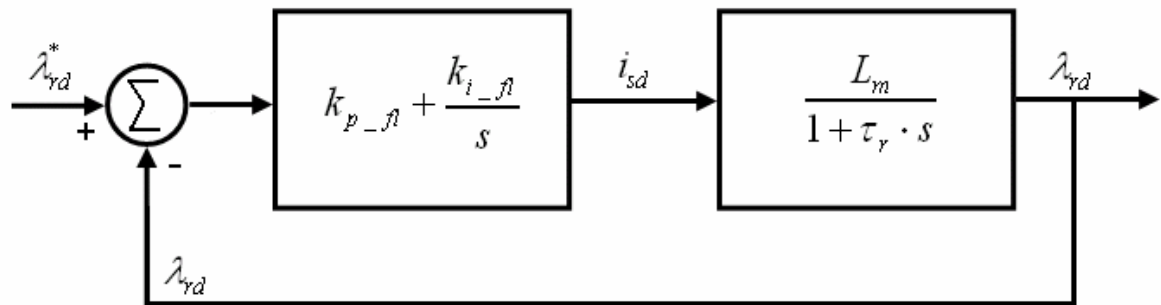


Figura 4-5: Diseño del controlador del lazo de flujo de enlace del rotor

La función de transferencia de lazo abierto de la Figura 4-5 es:

$$G_{OL}(s) = \left( \frac{k_{i-fl}}{s} \right) \cdot \left( 1 + \frac{k_{p-fl}}{k_{i-fl}} \cdot s \right) \cdot \left( \frac{L_m}{1 + \tau_r \cdot s} \right) \quad (4-9)$$

$$G_{OL}(s) = \left( \frac{k_{i-fl} \cdot L_m}{s} \right) \cdot \left( \frac{1 + \frac{k_{p-fl}}{k_{i-fl}} \cdot s}{1 + \tau_r \cdot s} \right) \quad (4-10)$$

Las ecuaciones de magnitud y ángulo de fase de la función de transferencia de lazo abierto en  $\omega_c$  son:

$$|G_{OL}(s)|_{\omega_c} = \left( \frac{k_{i\_fl} \cdot L_m}{\omega_c} \right) \cdot \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{k_{p\_fl} \cdot \omega_c}{k_{i\_fl}} \right)^2}}{\sqrt{1 + (\tau_r \cdot \omega_c)^2}} \quad (4-11)$$

$$\angle G_{OL}(s)|_{\omega_c} = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{k_{p\_fl} \cdot \omega_c}{k_{i\_fl}}\right) - \arctan(\tau_r \cdot \omega_c) \quad (4-12)$$

Como se quiere diseñar el controlador PI para que en  $\omega_c$  la magnitud sea igual a la unidad y el ángulo de fase sea igual a  $-\pi + PM$ , tenemos que:

$$\left( \frac{k_{i\_fl} \cdot L_m}{\omega_c} \right) \cdot \frac{\sqrt{1 + (K_{fl})^2}}{\sqrt{1 + (\tau_r \cdot \omega_c)^2}} = 1 \quad (4-13)$$

$$-\frac{\pi}{2} + \arctan(K_{fl}) - \arctan(\tau_r \cdot \omega_c) = -\pi + PM \quad (4-14)$$

Donde  $K_{fl} = k_{p\_fl} \cdot \omega_c / k_{i\_fl}$ , es un cambio de variable para facilitar el cálculo de las constantes del controlador PI. Por lo tanto, para una frecuencia de corte  $\omega_c$  y un margen de fase PM dados, las constantes del controlador PI se pueden calcular como:

$$K_{fl} = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + PM + \arctan(\tau_r \cdot \omega_c)\right) \quad (4-15)$$

$$k_{i\_fl} = \frac{\omega_c \cdot \sqrt{1 + (\tau_r \cdot \omega_c)^2}}{L_m \cdot \sqrt{1 + (K_{fl})^2}} \quad (4-16)$$

$$k_{p\_fl} = \frac{K_{fl} \cdot k_{i\_fl}}{\omega_c} \quad (4-17)$$

### 4.3. DISEÑO DEL CONTROLADOR DE CORRIENTE DEL EJE-d

Se necesita obtener la dinámica de corriente del eje-d en términos del voltaje del eje-d. Por lo tanto, tomando la primera fila de la ecuación 4-4 y expresándola en el dominio de Laplace tenemos:

$$i_{sd}(s) = \frac{F}{s+A} \cdot v_{sd}(s) + \frac{\omega_d}{s+A} \cdot i_{sq}(s) + \frac{B}{s+A} \cdot \lambda_{rd}(s) \quad (4-18)$$

Si consideramos a  $i_{sq}$  y  $\lambda_{rd}$  como perturbaciones del sistema [15], la dinámica de la corriente del eje-d en términos del voltaje del eje-d es:

$$i_{sd}(s) = \frac{k}{1 + \tau_i \cdot s} \cdot v_{sd}(s) \quad (4-19)$$

Donde  $k = F/A$  y  $\tau_i = 1/A$ , son cambios de variable para facilitar el cálculo de las constantes del controlador PI. Utilizando la función de transferencia de la ecuación 4-19 el diagrama del lazo de corriente del eje-d es mostrado en la Figura 4-6.

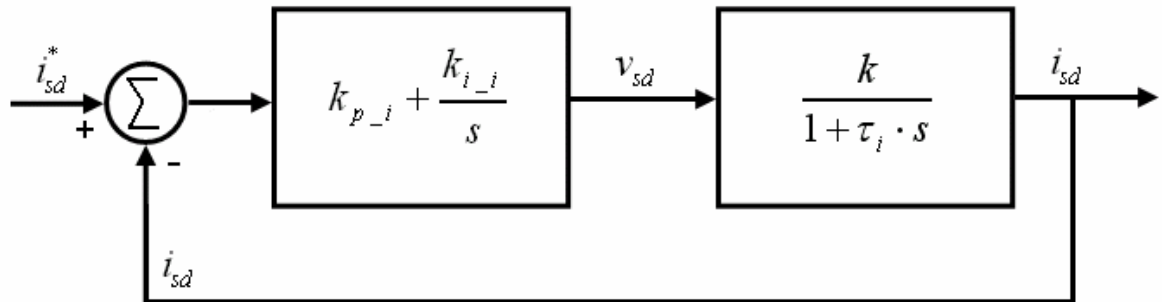


Figura 4-6: Diseño del controlador del lazo de corriente del eje-d

Utilizando el mismo procedimiento que en la sección 4.2, para una frecuencia de corte  $\omega_c$  y un margen de fase PM dados, las constantes del controlador PI se pueden calcular como:

$$K_i = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + PM + \arctan(\tau_i \cdot \omega_c)\right) \quad (4-20)$$

$$k_{i-i} = \frac{\omega_c \cdot \sqrt{1 + (\tau_i \cdot \omega_c)^2}}{k \cdot \sqrt{1 + (K_i)^2}} \quad (4-21)$$

$$k_{p-i} = \frac{K_i \cdot k_{i-i}}{\omega_c} \quad (4-22)$$

#### 4.4. DISEÑO DEL CONTROLADOR DE VELOCIDAD

Se necesita obtener la dinámica de la velocidad del motor en términos de la corriente del eje-q. Por lo tanto, tomando la ecuación 4-6 y expresándola en el dominio de Laplace tenemos:

$$\omega_{mech}(s) = \frac{1}{J_{eq} \cdot s} \cdot T_{em}(s) - \frac{1}{J_{eq} \cdot s} \cdot T_L(s) \quad (4-23)$$

Si consideramos a  $T_L$  como una perturbación del sistema [15], tenemos que:

$$\omega_{mech}(s) = \frac{1}{J_{eq} \cdot s} \cdot T_{em}(s) \quad (4-24)$$

Conviene destacar ahora que la ecuación de par 4-7 no es lineal, dando lugar a un acoplamiento entre el flujo de enlace del rotor  $\lambda_{rd}$  y la corriente del eje-q  $i_{sq}$ . Por lo tanto, sólo puede conseguirse un control desacoplado entre flujo y par (o flujo y velocidad) si se mantiene constante el flujo de enlace del rotor [15]. Ya que el flujo de enlace del rotor depende de la corriente del eje-d  $i_{sd}$ , se derivará una expresión para el par en el valor nominal de  $i_{sd}$ .

En estado estable, en la Figura 3-16, bajo control vectorial,  $i_{rd} = 0$ . Por consiguiente en la ecuación 3-77

$$\lambda_{rd} = L_m \cdot i_{sd} \quad (4-25)$$

Reemplazando la ecuación 4-25 en la ecuación 4-7, tenemos que la expresión para el par en el valor nominal de  $i_{sd}$  es:

$$T_{em} = \frac{p}{2} \cdot \underbrace{\frac{L_m^2}{L_r}}_{k_T} \cdot i_{sd} \cdot i_{sq} \quad (4-26)$$

Donde  $k_T = p \cdot L_m^2 \cdot i_{sd} / 2 \cdot L_r$  es una constante debido a que  $i_{sd}$  está en su valor nominal. Expresando la ecuación 4-26 en el dominio de Laplace y reemplazándola en la ecuación 4-24, tenemos:

$$\omega_{mech}(s) = \frac{k_T}{J_{eq} \cdot s} \cdot i_{sq}(s) \quad (4-27)$$

Utilizando la función de transferencia de la ecuación 4-27 el diagrama del lazo de velocidad es el mostrado en la Figura 4-7.

Utilizando el mismo procedimiento que en la sección 4.2, para una frecuencia de corte  $\omega_c$  y un margen de fase PM dados, las constantes del controlador PI se pueden calcular como:

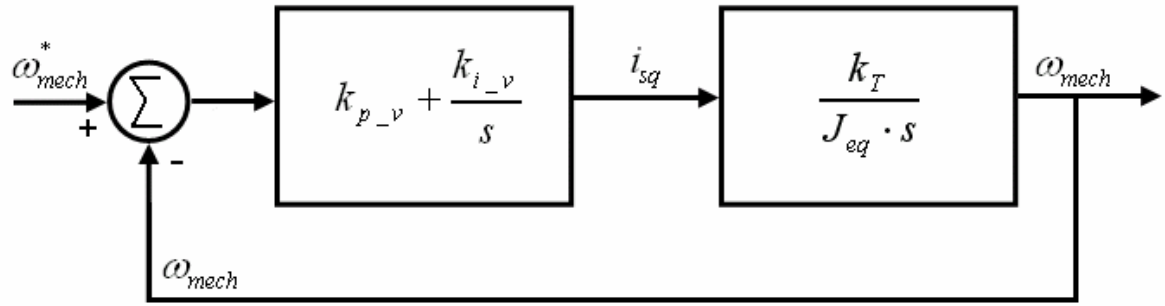


Figura 4-7: Diseño del controlador del lazo de velocidad

$$K_v = \tan(-\pi + PM) \quad (4-28)$$

$$k_{i-v} = \frac{\omega_c^2 \cdot J_{eq}}{k_T \cdot \sqrt{1 + (K_v)^2}} \quad (4-29)$$

$$k_{p-v} = \frac{K_v \cdot k_{i-v}}{\omega_c} \quad (4-30)$$

#### 4.5. DISEÑO DEL CONTROLADOR DE CORRIENTE DEL EJE-q

Se necesita obtener la dinámica de corriente del eje-q en términos del voltaje del eje-q. Por lo tanto, tomando la segunda fila de la ecuación 4-4 y expresándola en el dominio de Laplace tenemos:

$$i_{sq}(s) = \frac{F}{s+A} \cdot v_{sq}(s) - \frac{\omega_d}{s+A} \cdot i_{sd}(s) - \frac{\omega_m \cdot C}{s+A} \cdot \lambda_{rd}(s) \quad (4-31)$$

Si consideramos a  $i_{sd}$  y  $\lambda_{rd}$  como perturbaciones del sistema [15], la dinámica de corriente del eje-q en términos del voltaje del eje-q es:

$$i_{sq}(s) = \frac{k}{1 + \tau_i \cdot s} \cdot v_{sq}(s) \quad (4-32)$$



Donde  $k = F/A$  y  $\tau_i = 1/A$ , son cambios de variable para facilitar el cálculo de las constantes del controlador PI.

Al comparar las ecuaciones 4-19 y 4-32, se concluye que la corriente del eje-q tiene la misma dinámica que la corriente del eje-d. Por consiguiente, las constantes del controlador PI para la corriente del eje-q son iguales a las constantes del controlador PI para la corriente del eje-d.

#### **4.6. SELECCIÓN DE LA FRECUENCIA DE CORTE Y EL MARGEN DE FASE**

Al observar la estructura de control de la Figura 4-4, se notará que es una estructura de control en cascada. La estructura de control en cascada es comúnmente utilizada para accionamientos eléctricos debido a su flexibilidad [3] y es ampliamente utilizada en la industria. El control en cascada requiere que la frecuencia de corte (velocidad de respuesta) incremente hacia el lazo más interno, con los lazos de corriente siendo los más rápidos y los lazos de velocidad y flujo de enlace del rotor los más lentos.

Se comenzará con la elección de la frecuencia de corte de los lazos de corriente. Esta frecuencia debe ser aproximadamente de uno a dos órdenes de magnitud más pequeña que la frecuencia de conmutación de la unidad procesadora de potencia (PPU). Lo anterior, para evitar interferencia en el lazo de control del ruido de la frecuencia de conmutación de la unidad procesadora de potencia (PPU) [3].

$$\omega_{c_i} = \frac{2\pi \cdot f_s}{100} \quad (4-33)$$

Donde  $f_s$  es la frecuencia de conmutación de la unidad procesadora de potencia (PPU). La frecuencia de corte de los lazos de velocidad y flujo de enlace del rotor, debe ser aproximadamente de un orden de magnitud más pequeña que la frecuencia de corte de los lazos de corriente. Lo anterior, para seguir el requerimiento del control en cascada.

$$\omega_{c_v} = \omega_{c_{fl}} = \frac{\omega_{c_i}}{10} \quad (4-34)$$

Para una respuesta dinámica satisfactoria sin oscilaciones, se elegirán todos los márgenes de fase ser más grande que 45°, preferiblemente cerca de 60° [3].

$$PM_i = PM_v = PM_{fl} = \frac{\pi \cdot 60}{180} \quad (4-35)$$

#### 4.7. IMPLEMENTACION DEL DEBILITAMIENTO DE CAMPO

En el esquema general de la técnica de control vectorial seleccionada, mostrado en la Figura 4-4, se observa que la señal de referencia para el lazo de control del flujo del rotor  $\lambda_{rd}^*$  se obtiene a partir de un módulo nombrado “debilitamiento de campo”, el cual recibe como entrada la velocidad del rotor  $\omega_{mech}$ . El objetivo de este bloque, su principio de funcionamiento y los detalles de implementación serán explicados a continuación.

Este módulo permite extender el rango de control de la velocidad a valores superiores a la velocidad base. El análisis teórico del funcionamiento del sistema demuestra que se pueden alcanzar hasta cuatro veces esa velocidad bajo ciertas condiciones. Por debajo de la carga nominal, manteniendo el par constante, la potencia mecánica del motor se incrementa linealmente con la velocidad hasta llegar a la potencia nominal, la cual se alcanza cuando la velocidad del motor es igual a su valor nominal. En este rango de operación, el flujo se mantiene constante e igual a su valor nominal. Dado que la potencia mecánica es proporcional al par y su valor nominal se alcanza cuando la velocidad del motor es igual a la velocidad nominal, si se desea trabajar el motor por encima de su velocidad nominal, la producción de par debe ser reducida, como se muestra en la Figura 4-8.

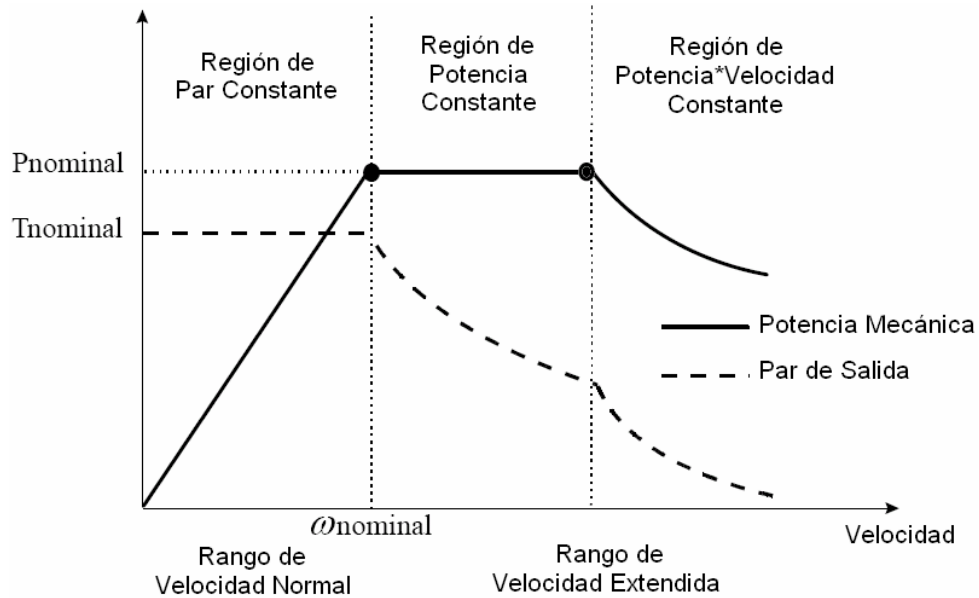


Figura 4-8: Operación típica del debilitamiento de campo

En la Figura 4-8, se pueden delimitar tres zonas. En la zona de potencia constante el par nominal se comporta como una función inversa de la velocidad, por esta razón es posible una generación de potencia constante ya que  $P = T \cdot \omega$ , siendo  $T$  el par y  $\omega$  la velocidad. En la zona de “potencia\*velocidad constante”, el par nominal se comporta como una función inversa del cuadrado de la velocidad.

Para explicar el punto de quiebre entre las últimas dos zonas, se estudiará la función de par máximo en estado estable del motor (ver Figura 4-9). El par máximo puede ser calculado aproximadamente mediante la utilización de la siguiente ecuación (Apéndice K):

$$T_{max} \approx \frac{3 \cdot p \cdot V_a^2}{4 \cdot \omega_{syn}^2 \cdot (L_{\ell s} + L_{\ell r})} \quad (4-36)$$

En la primera zona, la función de par máximo es igual a una constante ya que el voltaje de fase  $V_a$  incrementa linealmente con la velocidad. Por encima de la velocidad base, el voltaje de fase se mantiene constante e igual a su valor nominal, por esta razón la función de par máximo se comporta como una función del cuadrado de la velocidad. Este efecto se muestra en la Figura 4-9.

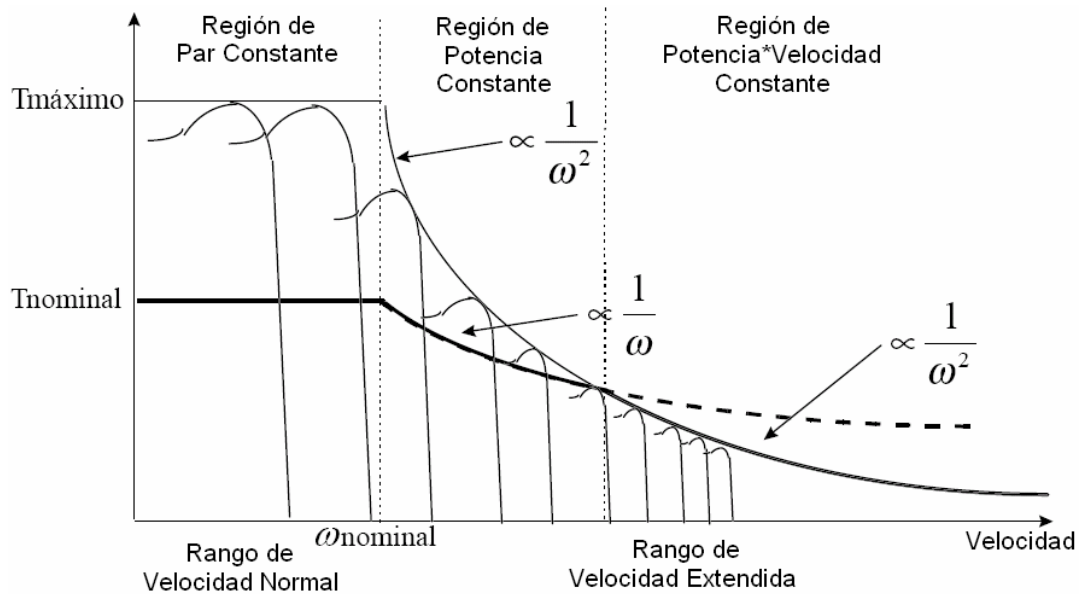


Figura 4-9: Par máximo y nominal versus velocidad

Note que la curva de par nominal cruza la curva de par máximo. Este punto de cruce es el punto de quiebre que delimita la zona de potencia constante y la zona de “potencia\* velocidad constante”. Note también que la curva de par nominal cruza la curva de par de estado estable en la zona de estabilidad hasta el punto de quiebre. Una vez este punto ha sido cruzado, el par nominal es interpretado igual que el par máximo, forzando que la función de potencia se comporte como una función inversa de la velocidad. Con la ayuda de la ecuación 4-36 y los parámetros del motor, es posible predecir el punto de cruce. En este trabajo de grado, el punto de cruce ocurre cuando la velocidad es igual a 4.2 veces la velocidad base (Apéndice M).

Las restricciones para extender el rango de velocidad por encima de la velocidad base son, primero, los voltajes de fase y, segundo, las corrientes de fase del motor. Dado que la referencia del voltaje de fase incrementa con la velocidad y que su valor no puede exceder el valor nominal, la componente de flujo debe ser reducida a un valor que permita mantener el voltaje de fase nominal y alcanzar los niveles de velocidad requeridos. Las corrientes de fase, por su parte, se incrementan con la carga. Cuando se opera en el rango de velocidad extendida, el par nominal en el motor necesita establecerse en un valor tal que mantenga las corrientes de fase en un nivel menor o igual a su valor nominal.

En la Figura 4-10, tanto el voltaje de fase máximo como la referencia de flujo son mostrados para rangos de velocidad normal y extendida.

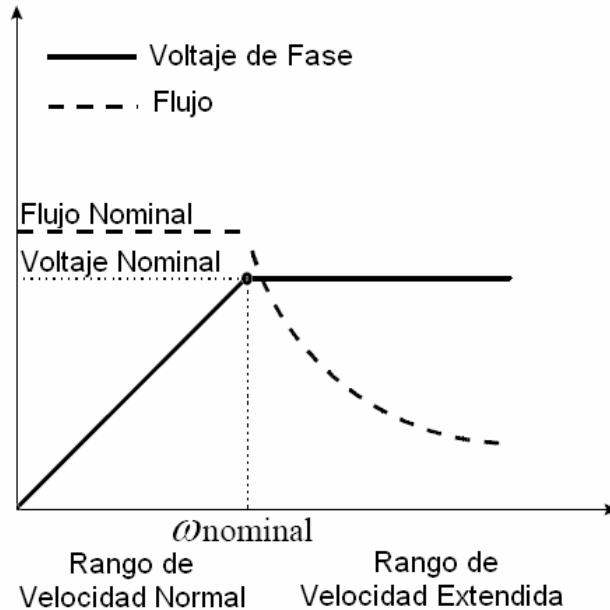


Figura 4-10: Restricciones de voltaje del debilitamiento de campo

Note que tanto las restricciones de voltaje como las de corriente deben ser respetadas en estado estable. En efecto, durante la operación transitoria la corriente de fase podría alcanzar varias veces su valor nominal sin ningún riesgo para el motor. Esto asume que el sobrecalentamiento resultante puede ser disipado antes de realizar otra operación transitoria.

El módulo de debilitamiento de campo se realiza de la siguiente manera:

- El flujo de referencia para el rango de velocidad normal se halla cuando el motor está operando a plena carga en estado estable (Apéndice N).
- El punto de cruce entre las curvas de par nominal y par máximo se halla a partir de los parámetros del motor, el circuito equivalente de estado estable y las respectivas ecuaciones de par máximo y par nominal (Apéndice M).
- El flujo de referencia para el rango de velocidad extendido se halla respetando las zonas de “potencia constante” y “potencia \* velocidad constante” (Apéndice N)

La Figura 4-11 muestra la curva obtenida velocidad versus flujo de referencia.

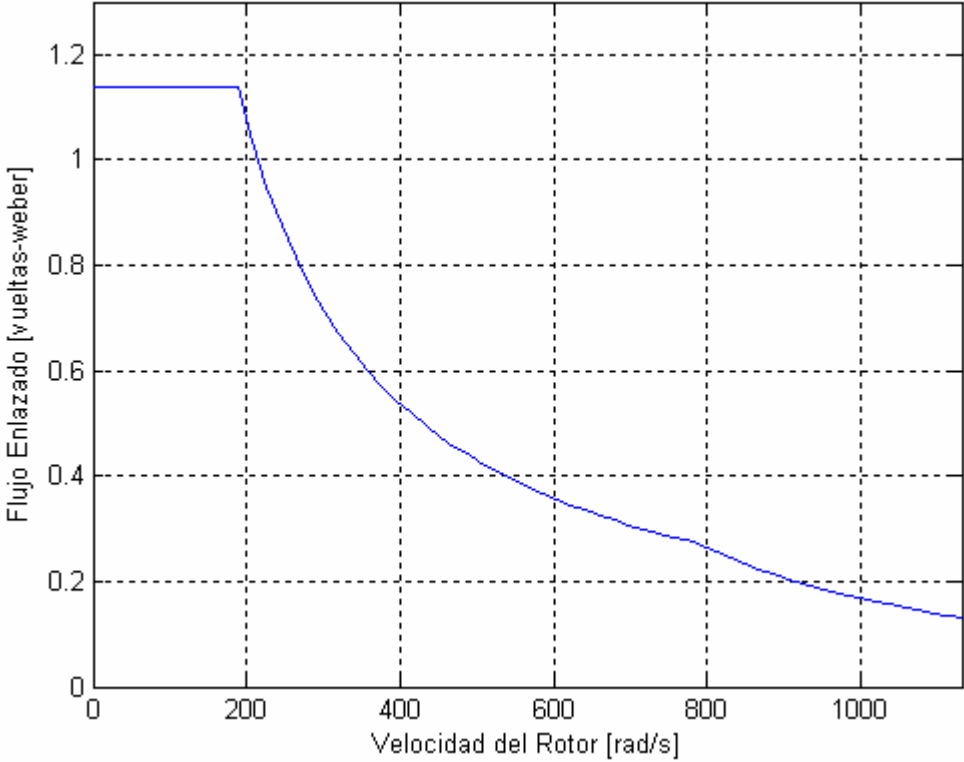


Figura 4-11: Flujo enlazado versus velocidad

## 5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

### 5.1. RESULTADOS

En esta sección se muestran los resultados de simulación del sistema en lazo abierto y lazo cerrado para un motor de inducción con rotor jaula de ardilla cuyos parámetros están en el Apéndice L. Se realizaron cuatro pruebas; arranque en línea con el par de carga nominal conectado al eje del motor, respuesta a la variación del par de carga, seguimiento de un perfil de velocidad y comportamiento del sistema ante variación de los parámetros del motor.

**5.1.1. Arranque en Línea:** esta prueba fue realizada tanto al sistema de lazo abierto como al de lazo cerrado. Consiste en arrancar el sistema desde el punto de detención y con el par de carga nominal conectado al eje del motor. Todas las condiciones iniciales son cero<sup>3</sup>.

Para que el sistema de lazo cerrado tenga las mismas condiciones del sistema de lazo abierto, la velocidad de referencia para el sistema de lazo cerrado es la velocidad de estado estable que alcanza el sistema de lazo abierto después de pasar la etapa transitoria del arranque.

En la Figura 5-1 se muestra el comportamiento del sistema en lazo abierto durante el arranque con el par de carga nominal conectado al eje del motor. En ella se puede apreciar que el par electromagnético cambia drásticamente durante el arranque, además, se aprecia también un pequeño rizado en la velocidad del rotor durante el arranque. Tanto el par electromagnético como la velocidad del rotor del motor de inducción tardan

---

<sup>3</sup> El flujo enlazado del rotor no puede ser exactamente cero para evitar la división por cero en la ecuación 3-73.

alrededor de 1.4 segundos en alcanzar sus respectivos valores de estado estable. El valor de estado estable del par electromagnético es igual al valor del par de carga conectado al eje del motor.

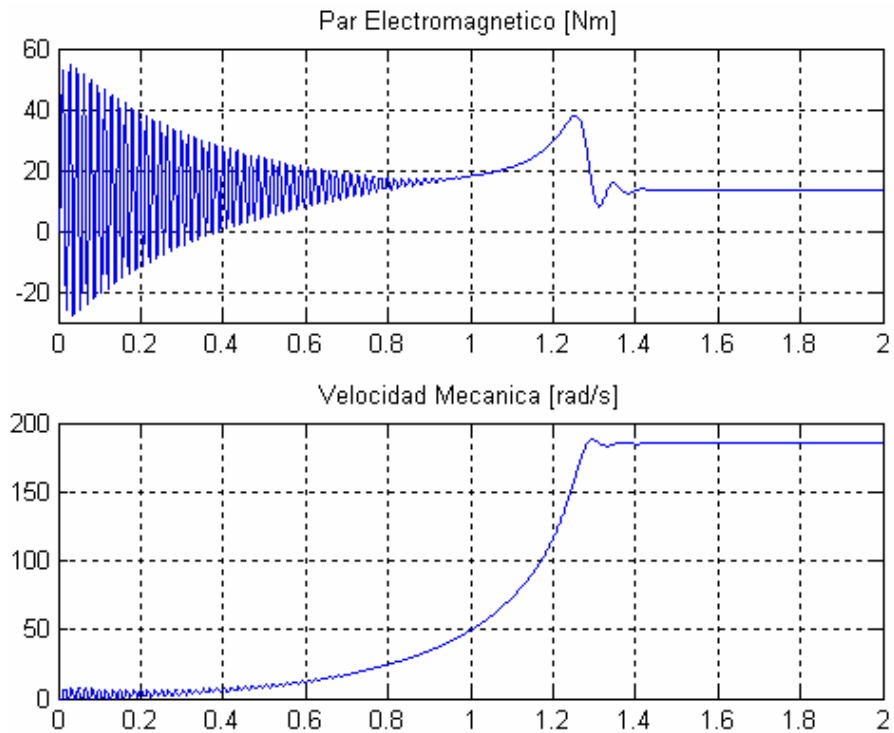


Figura 5-1: Arranque desde línea en lazo abierto

En la Figura 5-2 se muestra el comportamiento del sistema en lazo cerrado durante el arranque con el par de carga nominal conectado al eje del motor. En ella se puede apreciar que el par electromagnético no cambia drásticamente durante el arranque, como en el caso del sistema en lazo abierto. Además, se aprecia también que la velocidad del rotor presenta un comportamiento suave durante el arranque. Tanto el par electromagnético como la velocidad del rotor del motor de inducción tardan alrededor de 0.8 segundos en alcanzar sus respectivos valores de estado estable, notándose una importante mejoría en el tiempo de respuesta del sistema, con respecto al sistema en lazo abierto, ante el arranque con el par de carga nominal conectado al eje del motor.



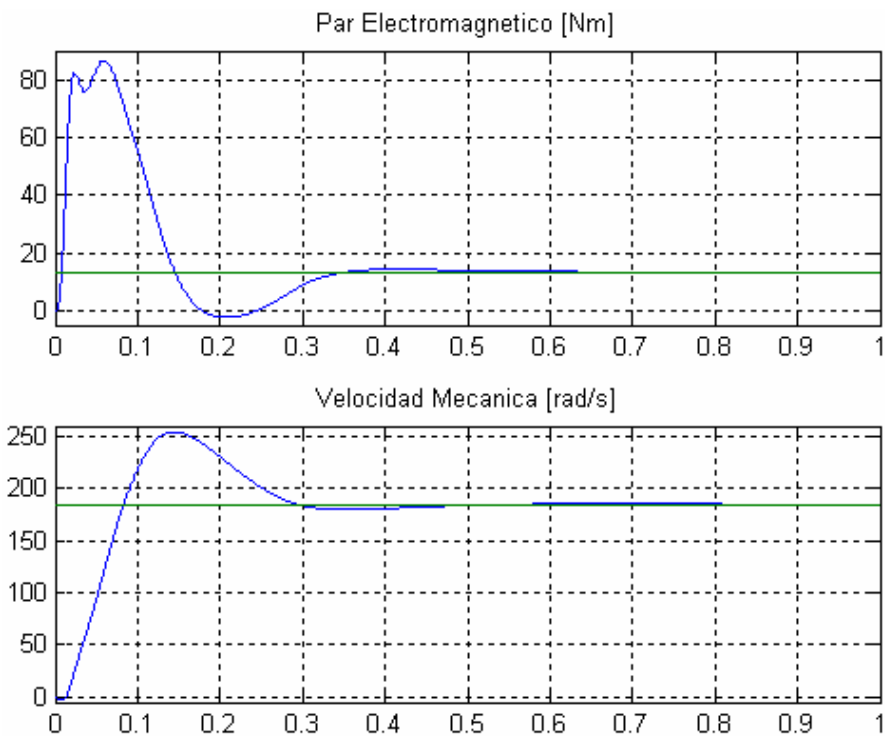


Figura 5-2: Arranque desde línea en lazo cerrado

En la Figura 5-3 se muestra el comportamiento de los voltajes aplicados al motor y las corrientes medidas en el motor durante el arranque para el sistema en lazo cerrado. En ella sólo se observan las partes positivas de las señales, ya que éstas son iguales a las partes negativas. Se debe tener en cuenta que la Figura 5-3 muestra sólo la variación en la magnitud de las señales, aunque éstas varían también en frecuencia durante la etapa transitoria del arranque. Es importante observar en la Figura 5-3 la magnitud que llegan a alcanzar las corrientes medidas en el motor de inducción durante el arranque, esto es debido a que el motor de inducción debe vencer la inercia tanto del rotor como de la carga conectada a su eje.

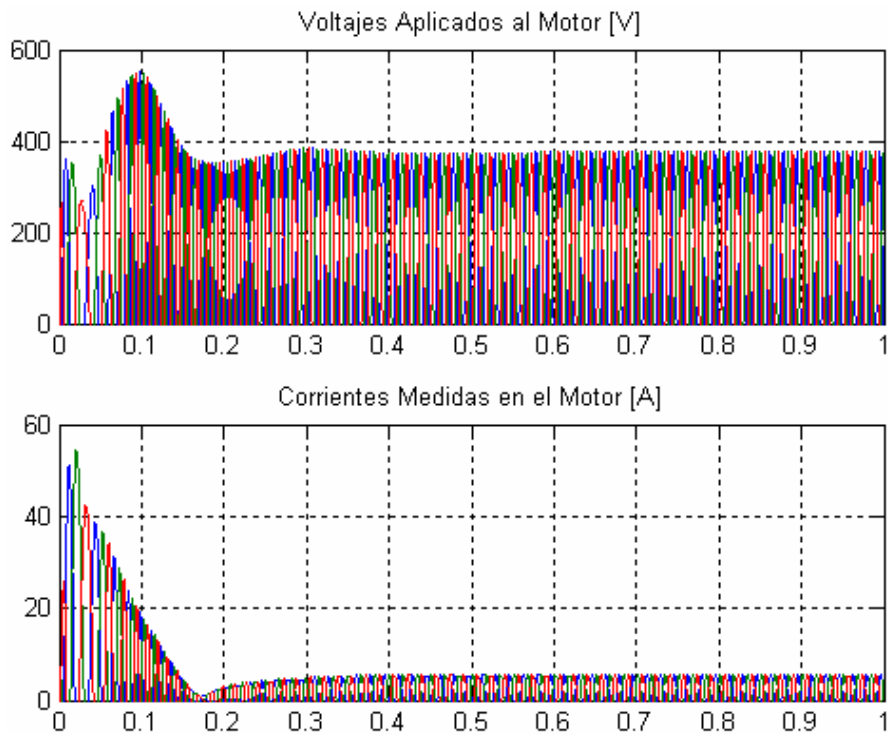


Figura 5-3: Voltajes y corrientes en el motor durante el arranque en lazo cerrado

**5.1.2. Variación del Par de Carga:** esta prueba fue realizada tanto al sistema de lazo abierto como al de lazo cerrado. Consiste en hacer una variación del par de carga desde su valor nominal a un medio de éste. Para la simulación se consideró que el motor estaba operando en estado estable con el par de carga nominal conectado al eje, en  $t = 0.1$  segundos el par de carga inesperadamente cambia a un medio de su valor nominal y permanece en ese valor.

En la Figura 5-4 se muestra el comportamiento del sistema en lazo abierto durante la variación del par de carga a un medio de su valor nominal. En ella se puede apreciar que el par electromagnético iguala al par de carga en estado estable, además, se aprecia que al disminuir el par de carga, la velocidad del rotor del motor de inducción en estado estable aumenta en comparación con el estado estable inicial.

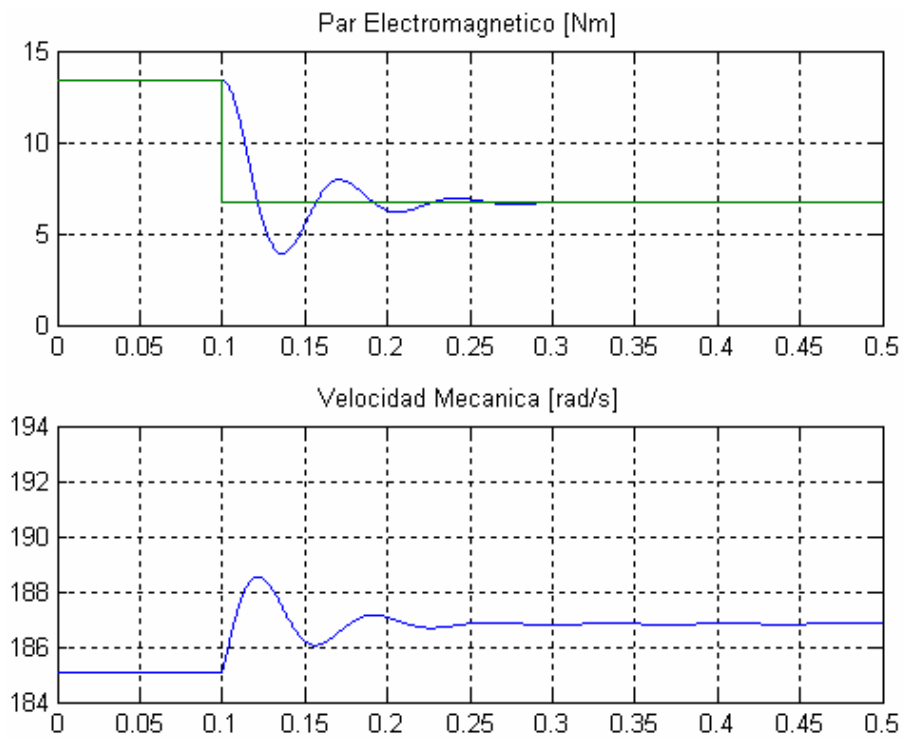


Figura 5-4: Variación del par de carga en lazo abierto

En la Figura 5-5 se muestra el comportamiento del sistema en lazo cerrado durante la variación del par de carga a un medio de su valor nominal. En ella se puede apreciar que el par electromagnético iguala al par de carga en estado estable, de la misma manera que el sistema en lazo abierto. Además, se aprecia que la velocidad del rotor del motor de inducción en estado estable es igual a la velocidad del rotor del estado estable inicial, contrario al sistema en lazo abierto, esto debido al control.

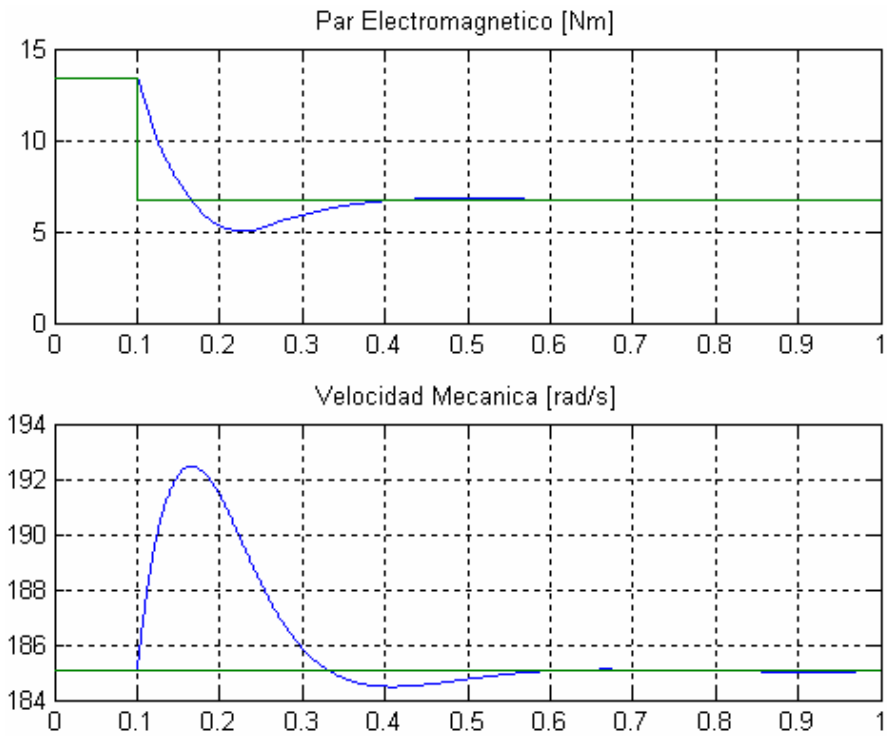


Figura 5-5: Variación del par de carga en lazo cerrado

En la Figura 5-6 se muestra el comportamiento de los voltajes aplicados al motor y las corrientes medidas en el motor durante la variación del par de carga para el sistema en lazo cerrado. Igual que para la prueba de arranque, se debe tener en cuenta que la Figura 5-6 muestra sólo la variación en la magnitud de las señales, aunque éstas varían también en frecuencia durante la etapa transitoria de la variación del par de carga. Es importante observar en la Figura 5-6 que la variación de la magnitud de las corrientes es mayor que la variación de la magnitud de los voltajes, esto es debido a que las corrientes que necesita el motor de inducción están directamente relacionadas con el par de carga conectado a su eje, mientras que la magnitud voltaje está relacionada con la velocidad del rotor la cual no varía drásticamente.

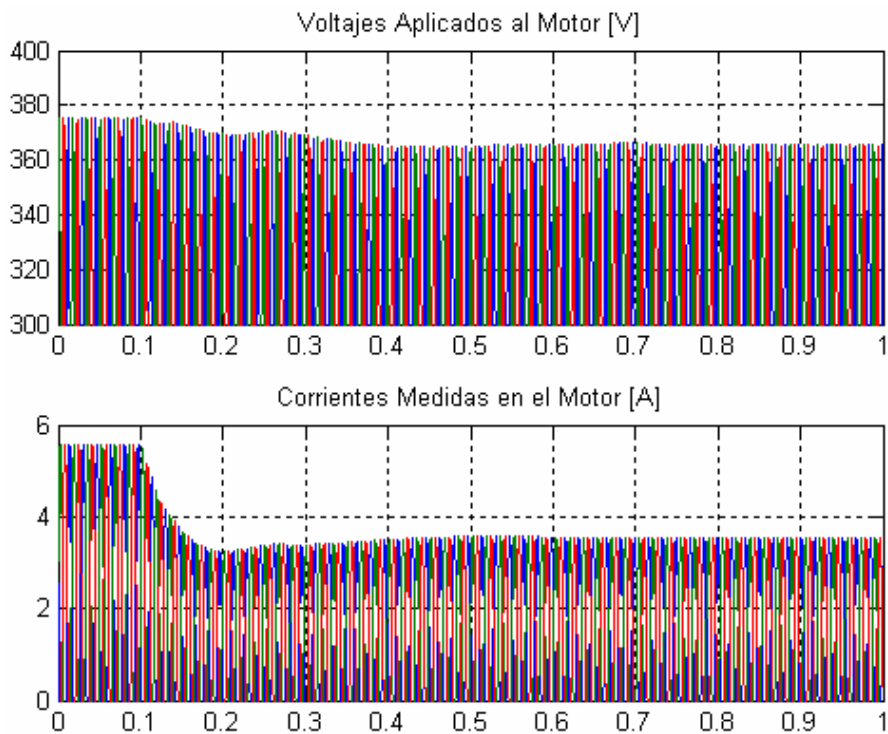


Figura 5-6: Voltajes y corrientes en el motor durante la variación del par de carga

**5.1.3. Seguimiento de un Perfil de Velocidad:** esta prueba fue realizada sólo al sistema de lazo cerrado, ya que el sistema de lazo abierto no la puede desarrollar. Consiste en hacer variar la referencia de velocidad del sistema tanto en forma de escalón como en forma de rampa. Para la simulación se consideró que el motor estaba operando en estado estable con el par de carga nominal conectado al eje y girando a velocidad nominal, en  $t = 0.1$  segundos el par de carga inesperadamente cambia a un medio de su valor nominal y permanece en ese valor. En  $t = 1$  segundo la referencia de velocidad cambia en forma escalón al 95% de su valor inicial y permanece en ese valor. En  $t = 1.9$  segundos la referencia de velocidad cambia en forma escalón al 105% de su valor inicial y permanece en ese valor. Entre  $t = 2.8$  segundos y  $t = 3.4$  segundos la referencia de velocidad cambia en forma rampa con una tasa de cambio (slope) de -20. Por encima de  $t = 3.4$  segundos la referencia de velocidad permanece constante e igual al valor alcanzado.

En las Figuras 5-7 y 5-8 se muestra el comportamiento del sistema durante el seguimiento del perfil de velocidad descrito en el párrafo anterior.

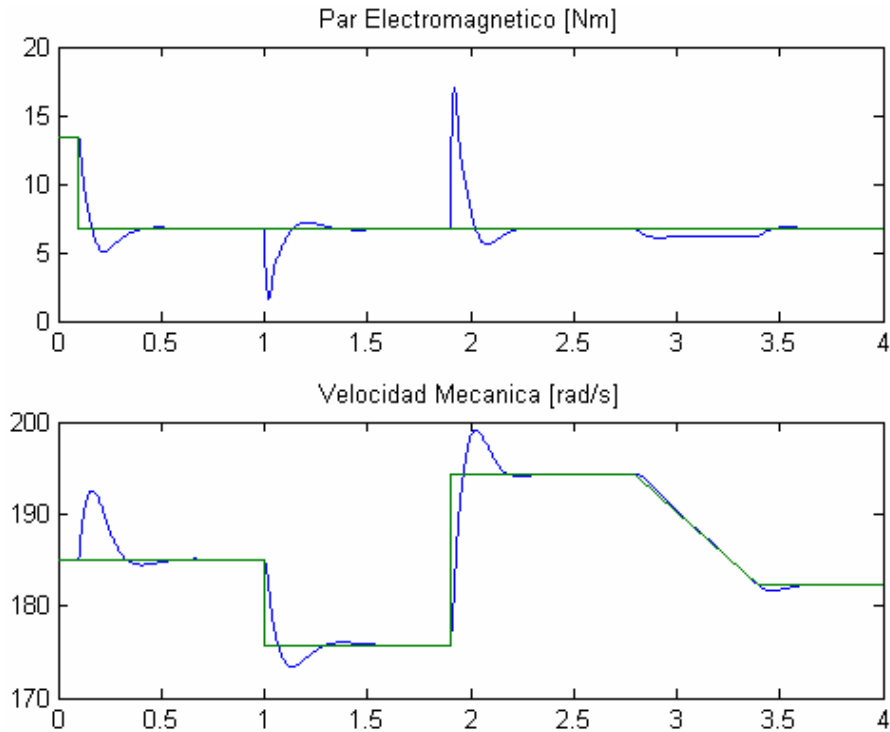


Figura 5-7: Seguimiento de perfil de velocidad

Las Figuras 5-7 y 5-8 muestran que efectivamente el sistema sigue la referencia de velocidad manteniendo los voltajes y corrientes dentro de los límites permitidos por el motor de inducción.

En la Figura 5-7 se puede observar la estrecha relación que existe entre el par electromagnético y la velocidad del rotor, es decir, un cambio en el par de carga conlleva cambios en la velocidad del rotor que el control debe superar y un cambio en la referencia de velocidad conlleva cambios en el par electromagnético, los cuales el control también debe superar.

En la Figura 5-8 se puede observar un pico en la magnitud de las corrientes medidas en el motor cuando la referencia de velocidad tiene un valor por encima de la velocidad base.

Este pico puede ser soportado por el motor siempre y cuando el calentamiento producido por el pico de las corrientes sea liberado antes de otro transitorio.

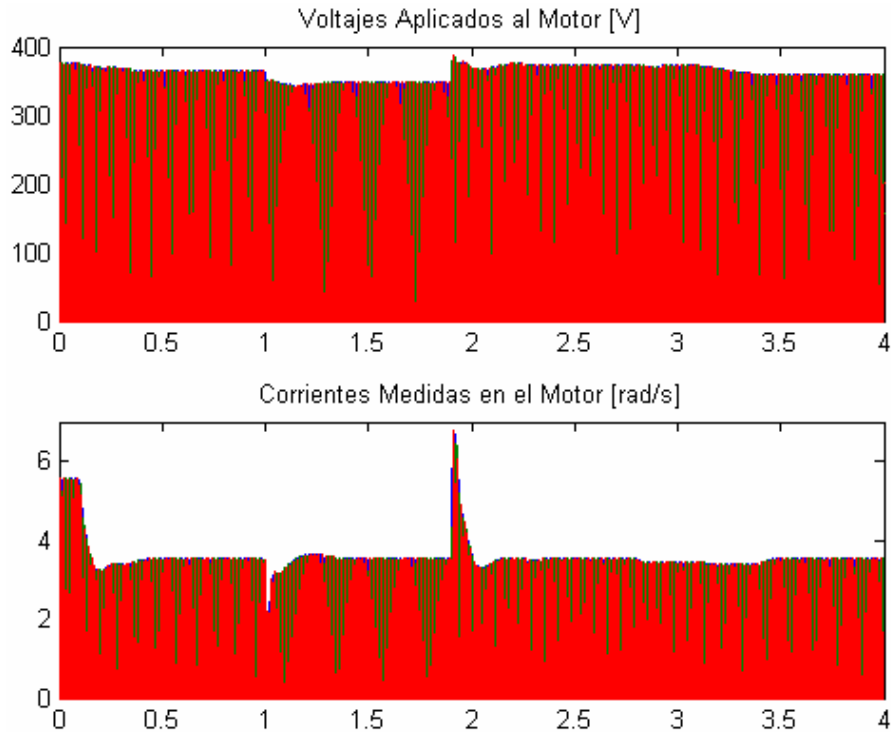


Figura 5-8: Voltajes y corrientes durante el seguimiento de perfil de velocidad

**5.1.4. Comportamiento del Sistema ante Variación de los Parámetros del Motor:** esta prueba fue realizada sólo al sistema de lazo cerrado. Los parámetros del motor que van a ser variados son  $L_m$  y  $R_r$ , debido a que estos parámetros afectan la estimación de las variables  $\lambda_{rd}$ ,  $T_{em}$  y  $\theta_{da}$  en el modelo del motor. La prueba consiste en observar el comportamiento del sistema ante una variación en la velocidad de referencia cuando los parámetros  $L_m$  y  $R_r$  en el modelo del motor no están bien estimados.

En la Figura 5-9 se muestra el comportamiento del sistema ante una variación en la velocidad de referencia cuando el parámetro  $L_m$  en el modelo del motor no está bien estimado.

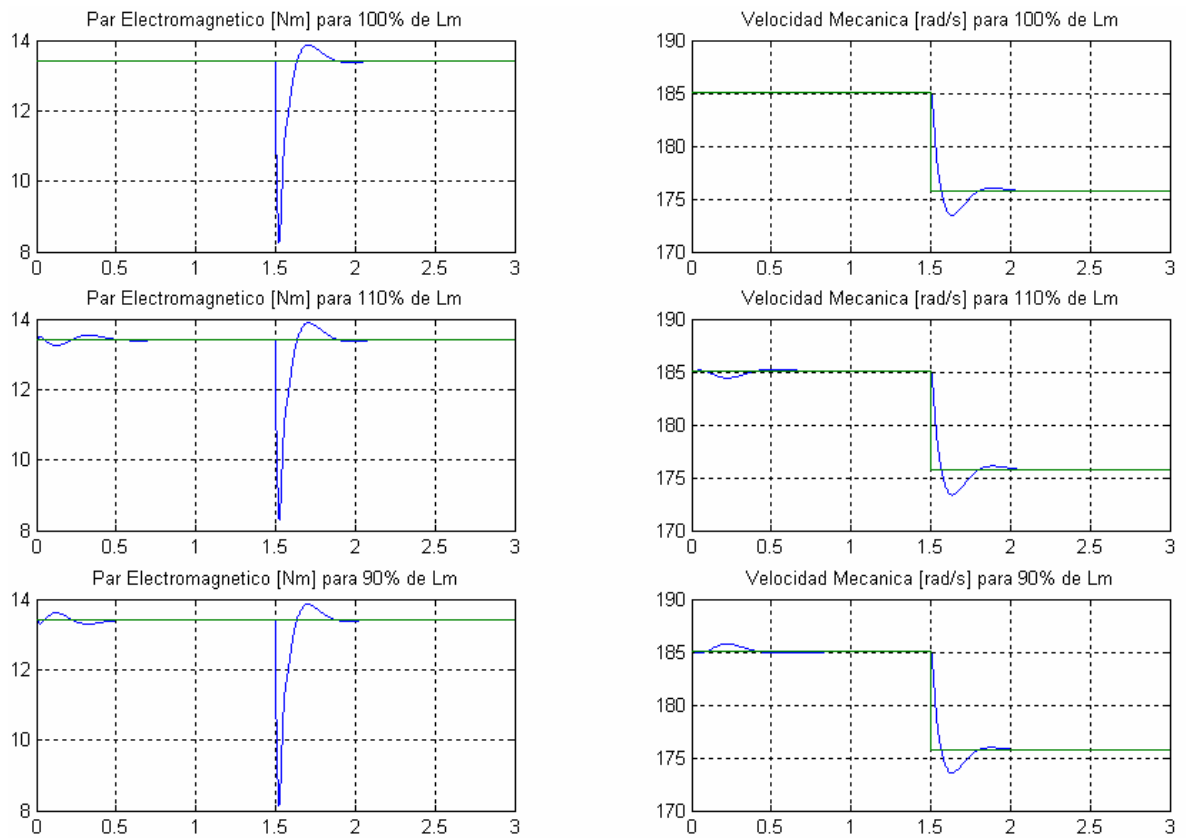


Figura 5-9: Comportamiento del sistema con  $L_m$  mal estimado

En la Figura 5-9 a simple vista no se observa variación alguna en el comportamiento del sistema ante una variación en la velocidad de referencia cuando el parámetro  $L_m$  en el modelo del motor no está bien estimado. Sin embargo, realizando una comparación más rigurosa obtenemos los datos consignados en la tabla 1.

Tabla 1: Comportamiento del sistema con  $L_m$  mal estimado

Característica	Sobre Impulso		Tiempo de Establecimiento	
	$T_{em}$	$\omega_{mech}$	$T_{em}$	$\omega_{mech}$
110%	3,52%	26,06%	2,15 s	2,06
100%	3,38%	25,12%	2,13 s	2,05
90%	3,26%	24,10%	2,10 s	2,02



De la tabla 1 se observa que la variación de sobre impulso y de tiempo de establecimiento, en las gráficas de par electromagnético y velocidad cuando el parámetro  $L_m$  en el modelo del motor no está bien estimado, es leve.

En las Figura 5-10 se muestra el comportamiento del sistema ante una variación en la velocidad de referencia cuando el parámetro  $R_r$  en el modelo del motor no está bien estimado.

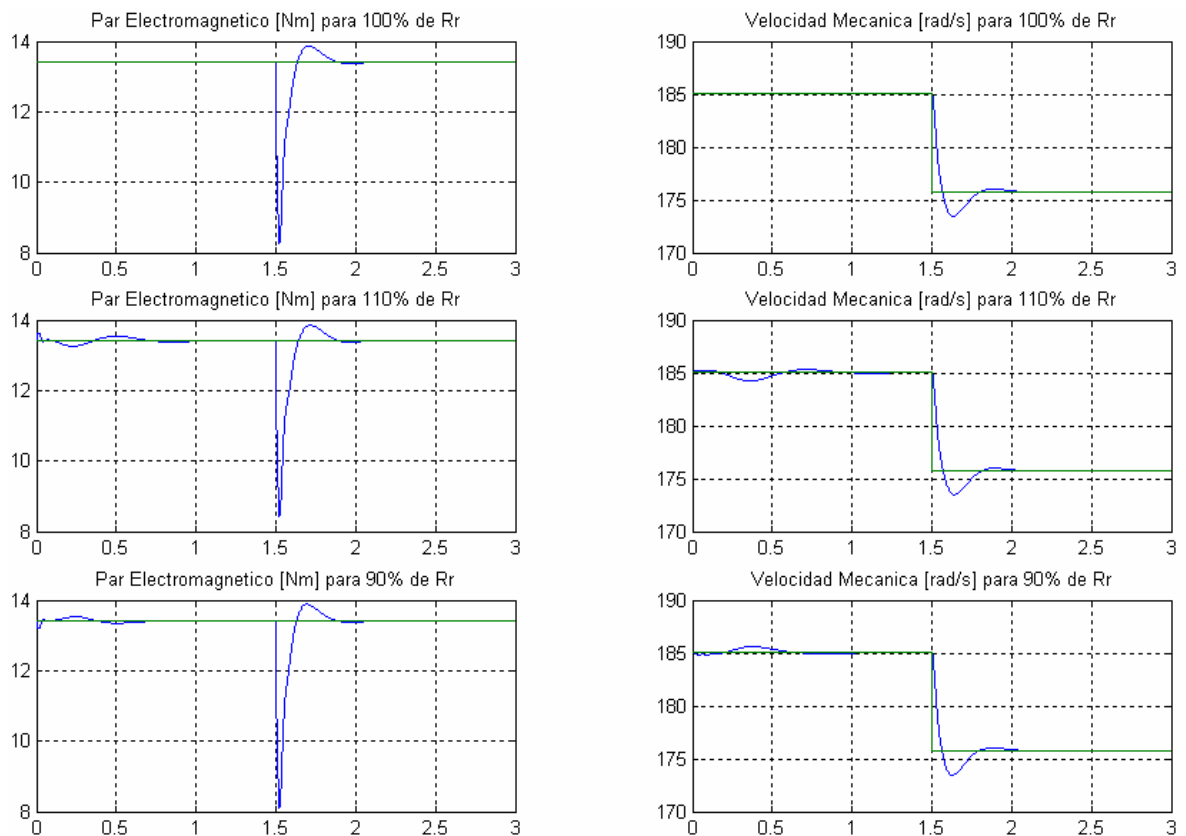


Figura 5-10: Comportamiento del sistema con  $R_r$  mal estimado

En la Figura 5-10 a simple vista no se observa variación alguna en el comportamiento del sistema ante una variación en la velocidad de referencia cuando el parámetro  $R_r$  en el modelo del motor no está bien estimado. Sin embargo, realizando una comparación más rigurosa obtenemos los datos consignados en la tabla 2.

Tabla 2: Comportamiento del sistema con  $R_r$  mal estimado

Característica	Sobre Impulso		Tiempo de Establecimiento	
	$T_{em}$	$\omega_{mech}$	$T_{em}$	$\omega_{mech}$
110%	3,26%	24,79%	2,11 s	2,04
100%	3,38%	25,12%	2,13 s	2,05
90%	3,51%	25,38%	2,16 s	2,07

De la tabla 2 se observa que la variación de sobre impulso y de tiempo de establecimiento, en las gráficas de par electromagnético y velocidad cuando el parámetro  $R_r$ , en el modelo del motor no está bien estimado, es leve.

## 5.2. CONCLUSIONES

Se ha presentado el método de control vectorial directo aplicable al control de velocidad de motores de inducción con rotor jaula de ardilla. Para cumplir este propósito se ha obtenido el modelo dinámico del motor de inducción, tanto en coordenadas de fase a-b-c como en coordenadas ortogonales d-q.

El control vectorial logra controlar con exactitud el motor de inducción, debido a que permite tratar el motor de inducción de la misma manera que el motor de corriente continua de excitación independiente, es decir, admite un control independiente del flujo del campo magnético y el par electromagnético. El grado de exactitud del control vectorial depende de la correcta estimación de los parámetros del motor.

Las simulaciones realizadas verifican el buen comportamiento del método de control vectorial directo tanto para rangos de velocidad normal como para rangos de velocidad extendida.

El diseño de los controladores PI fue abordado desde la perspectiva de los términos de control, frecuencia de corte  $f_c$  y margen de fase  $PM$ . Estos términos de control permiten

fácilmente calcular las constantes de los controladores PI utilizando los parámetros del motor y la frecuencia de conmutación de la PPU.

Este trabajo ha contribuido y fortalecido el enriquecimiento académico enfocado al control de motores de inducción con rotor jaula de ardilla como una solución para conseguir mejoras en las características dinámicas del motor y en los procesos en que éste interviene.

Ya que este trabajo es una primera aproximación al conocimiento de las técnicas de control aplicables al motor de inducción con rotor jaula de ardilla, en esta primera versión no se ha podido abarcar toda la amplia gama de soluciones que estas técnicas de control tienen en la actualidad. La continuidad y profundización de este trabajo en el futuro debe constituir un interés de profesores, investigadores y estudiantes vinculados a este tema, por lo que se proponen las siguientes recomendaciones para darle un seguimiento al mismo:

- Simulación del esquema de control vectorial considerando los siguientes efectos: saturación del circuito magnético del motor de inducción, cuantificación de las variables (debido a la conversión analógica – digital en los sensores) y el muestreo característico de los sistemas discretos.
- Desarrollo o adquisición de la infraestructura tecnológica necesaria para la implementación de las técnicas de control para motores de inducción, no disponible hasta el momento.
- Validación en forma práctica de los resultados teóricos alcanzados hasta este momento.

## REFERENCIAS

- [1] CHAPMAN Stephen, Máquinas Eléctricas, segunda edición, 1997, McGraw–Hill Interamericana, Santafé de Bogotá, Colombia.
- [2] KOSOW Irving, Máquinas Eléctricas y Transformadores, segunda edición, 1993, Prentice–Hall Hispanoamericana, Naucalpan de Juárez, México.
- [3] MOHAN Ned, Electric Drives – An Integrative Approach, year 2001 edition, published by MNPERE, Minneapolis, USA.
- [4] MOHAN Ned, Advanced Electric Drives – Analysis, Control and Modelling using Simulink®, year 2001 edition, published by MNPERE, Minneapolis, USA.
- [5] HOLTZ J., Pulse Width Modulation for Electronic Power Conversion, IEEE Proceedings, Vol. 82, No. 8, PP. 1194–1213, August 1994.
- [6] HOMBU M, UEDA S, UEDA A, A Current Source GTO Inverter with Sinusoidal Inputs and Outputs. Reprinted from IEEE Trans. on Ind. Applicat, Vol. IA-23, No. 2, PP. 247–255, March/April 1987.
- [7] HASMUKH S. Patel, RICHARD G. Hoft, Generalized Techniques of Harmonic Elimination and Voltage Control in Thyristor Inverter, IEEE Trans. on Ind. Applicat, Vol. IA-9, No. 3, PP. 310–317, May/June 1973.
- [8] HASSE K., Zur Dynamik drehzahl geregelter Antriebe mit Stromrichter gespeisten Asynchron-Kurzschlublaufermaschinen, Darmstadt Techn., Hochs., Diss, 1969.
- [9] BLASCHKE F, The Principle of Field Orientation as Applied to the New “Transkvector” Close – Loop Control System for Rotating- Field machines, Siemens Rev. 39, May 1972, pp 217–220.
- [10] CHANG S. –C, YEH S. –N, Current Sensorless Field–Oriented Control of Induction Motors, IEEE Proc. Electr. Power Appl., Vol. 143, No. 6, PP. 492–500, Nov. 1996.
- [11] LIAW, C. M., WANG J. B., CHANG Y. C, A Fuzzy Adapted Field – Oriented Mechanism for Induction Motor Drive. IEEE Trans. On Energy Conversion, Vol. 11, No. 1, PP. 76–83, March 1996.

- [12] TAKAHASHI I., NOGUCHI T, A New Quick-Response and High-Efficiency Control Strategy of an Induction Motor. IEEE Trans. on Ind. Applicat, Vol. IA-22, No. 5, PP. 820–827, September/October 1986.
- [13] HABETLER T. G., DIVAN D. M, Control Strategies for Direct Torque Control using Discrete Pulse Modulation. IEEE Trans. on Ind. Applicat, Vol. 7, No. 5, PP. 893–901, September/October 1991.
- [14] CABRERA L. A., ELBULUK M. E., HUSAIN I; Tuning the Stator Resistance of Induction Motors using Artificial Neural Network. IEEE Trans. On Power Electron, Vol. 12, No. 5, PP. 779–787, September 1997
- [15] MUÑOZ F. José Daniel, Control Avanzado de Máquinas de Inducción, Tesis Doctoral, Universidad Pontificia Comillas de Madrid, Madrid 2002.
- [16] RUEDA L. E., ORTEGA L. y DIAZ J. L. Curso de Máquinas Eléctricas de Corriente Alterna. Universidad Tecnológica de Bolívar. <http://gaico.unitecnologica.edu.co>
- [17] MUJAL R. Ramón María, Motor Asíncrono Trifásico con Rotor de Chapas en Espiral, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Terrassa 2004.
- [18] DÍAZ R., Jorge Luís. Estrategias avanzadas de control en accionamientos de corriente alterna. <http://www.control-automatico.net/index.html>
- [19] ALI S., Gamal Mahmoud. Aplicación de las Redes Neuronales en los Sistemas de Control Vectorial de los Motores de Inducción, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Terrassa 2000.

## APÉNDICE A: ACCIONAMIENTO ELÉCTRICO

El término accionamiento eléctrico es ampliamente utilizado dentro de la literatura sobre control de motores eléctricos y básicamente se refiere al sistema global. Este sistema está conformado por cuatro bloques: la unidad de procesamiento de potencia (PPU), el motor eléctrico, los sensores y el controlador; tal como se muestra en la Figura A-1.

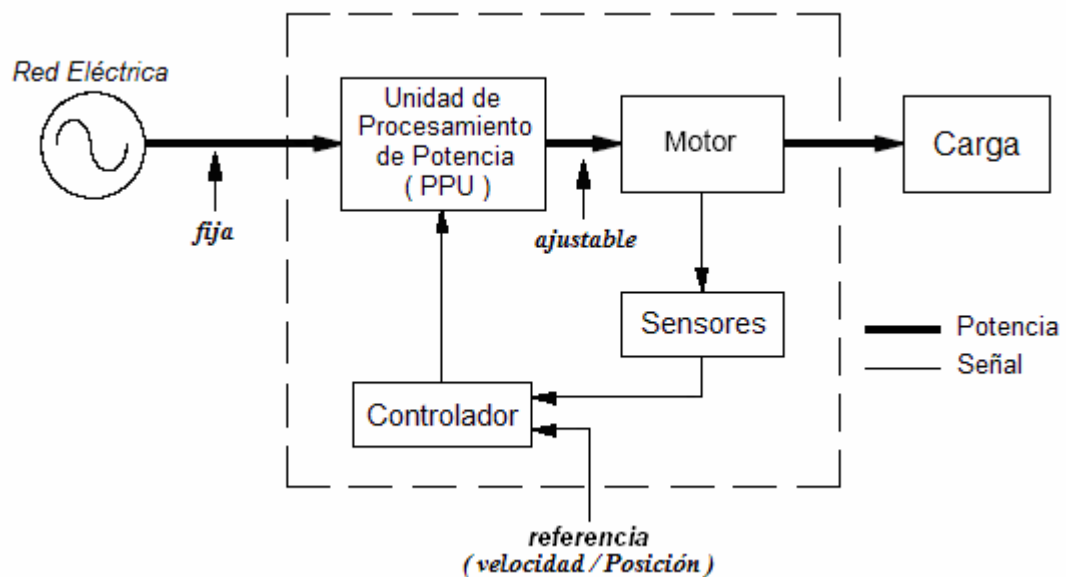


Figura A-1: Accionamiento Eléctrico

Los accionamientos eléctricos controlan la velocidad y/o la posición de la carga mecánica en respuesta a una entrada de referencia [3]. La entrada de referencia podría venir desde el computador del proceso, el cual considera los objetivos del proceso y emite una referencia para controlar la carga mecánica.

**Sensores:** este bloque corresponde a las medidas de voltaje, corriente, velocidad y posición que pueden ser requeridas dependiendo del tipo de motor eléctrico y de la

estrategia de control a implementar. Además, para protección térmica del motor eléctrico, la temperatura puede ser medida [3].

**Controlador:** compara la entrada de referencia para la velocidad y/o la posición con el valor real medido a través de los sensores y provee las señales de control apropiadas a la unidad de procesamiento de potencia (PPU).

**Unidad de Procesamiento de Potencia (PPU):** está conformada por dispositivos semiconductores de potencia. Es la encargada de convertir los voltajes de entrada de la red eléctrica en una salida de forma adecuada para la operación del motor eléctrico. Esta conversión se realiza en respuesta a las señales de control entregadas por el controlador.

**Motor Eléctrico:** es el encargado de convertir la energía eléctrica en energía mecánica. Los tipos de motores eléctricos comúnmente utilizados son: dc, sincrónicos, de inducción y de paso [3].

## APÉNDICE B: DENSIDAD DE CONDUCTOR E INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO PARA UN MOTOR DE INDUCCIÓN DE DOS POLOS

### B.1. DENSIDAD DE CONDUCTOR PARA LA FASE-a

La bobina para la fase-a puede ser dibujada como se muestra en la Figura B-1, donde los círculos más grandes representan mayores densidades de conductor. En la Figura B-1, la densidad de conductor  $n_s(\theta)$ , en términos del número de conductores por radianes, es una función sinusoidal del ángulo  $\theta$  (medido en la dirección opuesta a las manecillas del reloj con respecto al eje magnético de la fase-a) y puede ser expresada como:

$$n_s(\theta) = \hat{n}_s \cdot \text{sen}(\theta) \quad (\text{B-1})$$

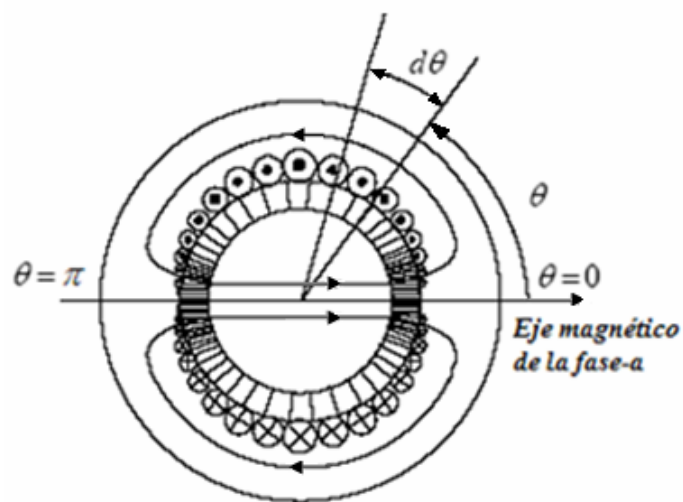


Figura B-1: Representación de la bobina de la fase-a distribuida sinusoidalmente [3]



Donde  $\hat{n}_s$  es la densidad de conductor máxima, la cual ocurre en  $\theta = \pi/2$ . Si la bobina para la fase-a tiene un total de  $N_s$  vueltas (es decir,  $2N_s$  conductores), entonces cada media bobina, desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi$ , contiene  $N_s$  conductores. Para determinar  $\hat{n}_s$  en términos de  $N_s$ , se debe observar que un diferencial de ángulo  $d\theta$  en  $\theta$ , en la Figura B-1, contiene  $n_s(\theta) \cdot d\theta$  conductores. Por lo tanto, la integral de la densidad de conductor en la Figura B-1, desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi$ , es igual a  $N_s$  conductores.

$$\int_0^{\pi} n_s(\theta) \cdot d\theta = N_s \quad (\text{B-2})$$

Sustituyendo la expresión para  $n_s(\theta)$  de la ecuación B-1 en la ecuación B-2.

$$\int_0^{\pi} \hat{n}_s \cdot \text{sen}(\theta) \cdot d\theta = N_s \quad (\text{B-3})$$

Desarrollando la integral de la ecuación B-3 y despejando  $\hat{n}_s$ .

$$\hat{n}_s = N_s/2 \quad (\text{B-4})$$

Sustituyendo  $\hat{n}_s$  de la ecuación B-4 en la ecuación B-1 se obtiene la distribución de densidad de conductor sinusoidal en la bobina para la fase-a como:

$$n_s(\theta) = \frac{N_s}{2} \cdot \text{sen}(\theta) \quad (\text{B-5})$$

Antes que restringir la expresión de densidad de conductor a una región  $0 \leq \theta \leq \pi$ , se puede interpretar el negativo de la densidad de conductor en la región  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$  de la ecuación B-5 como que está asociada con el transporte de la corriente en la dirección opuesta, como es indicado en la Figura B-1.

## B.2. INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNÉTICO PARA LA FASE-a

Para obtener la distribución del campo magnético del aire del entrehierro ( $F$ ,  $H$  y  $B$ ) producida por la corriente de la bobina para la fase-a, se aprovechará la simetría que se muestra en la Figura B-2 (para un motor de dos polos).

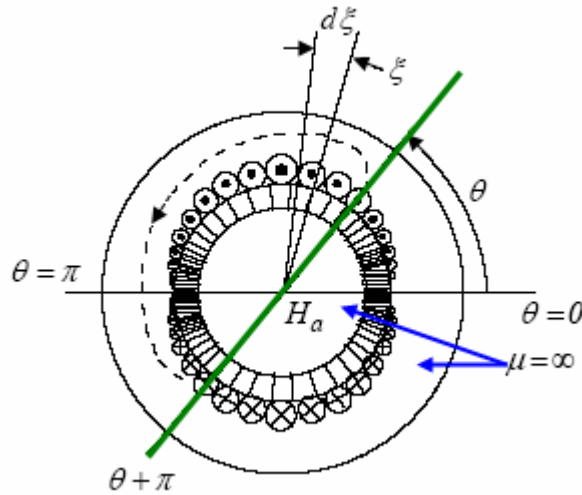


Figura B-2: Cálculo de la distribución de campo en el aire del entrehierro [3]

Los campos magnéticos orientados radialmente en el aire del entrehierro en los ángulos  $\theta$  y  $(\theta + \pi)$  son iguales en magnitud pero opuestos en dirección. Se asumirá la dirección de campo magnético de rotor a estator como positiva. Por lo tanto, la intensidad del campo magnético del aire del entrehierro, establecida por la corriente  $i_a$ , en las posiciones  $\theta$  y  $(\theta + \pi)$  serán iguales en magnitud pero de signo opuesto, es decir,  $H_a(\theta + \pi) = -H_a(\theta)$ . En términos de  $H_a(\theta)$ , la aplicación de la Ley de Ampere a lo largo de la trayectoria cerrada mostrada en la Figura B-2, en cualquier instante de tiempo  $t$ , causa:

$$H_a(\theta) \cdot \ell_g - (-H_a(\theta) \cdot \ell_g) = \int_0^\pi i_a \cdot n_s(\theta + \xi) \cdot d\xi \quad (\text{B-6})$$

Donde  $\ell_g$  es la distancia del aire del entrehierro. El lado izquierdo de la ecuación B-6 es la sumatoria de las componentes de  $H_a$  en la dirección de la trayectoria y el lado derecho es la sumatoria de las corrientes dentro de la trayectoria cerrada. Sustituyendo la expresión de densidad de conductor de la ecuación B-5 en la ecuación B-6:

$$2 \cdot H_a(\theta) \cdot \ell_g = \frac{N_s}{2} \cdot i_a \cdot \int_0^\pi \text{sen}(\theta + \xi) \cdot d\xi \quad (\text{B-7})$$

$$2 \cdot H_a(\theta) \cdot \ell_g = \frac{N_s}{2} \cdot i_a \cdot (-\cos(\theta + \xi)) \Big|_0^\pi \quad (\text{B-8})$$

$$2 \cdot H_a(\theta) \cdot \ell_g = \frac{N_s}{2} \cdot i_a \cdot (2 \cdot \cos(\theta)) \quad (\text{B-9})$$

$$2 \cdot H_a(\theta) \cdot \ell_g = N_s \cdot i_a \cdot \cos(\theta) \quad (\text{B-10})$$

Entonces,

$$H_a(\theta) = \frac{N_s}{2 \cdot \ell_g} \cdot i_a \cdot \cos(\theta) \quad (\text{B-11})$$

## APÉNDICE C: DENSIDAD DE CONDUCTOR E INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO PARA UN MOTOR DE INDUCCIÓN DE MÚLTIPLES POLOS

### C.1. DENSIDAD DE CONDUCTOR

El análisis para determinar la expresión de la densidad de conductor en un motor de inducción con múltiples polos comienza con la tabla comparativa C-1 la cual fue realizada con base en la Figura C-1:

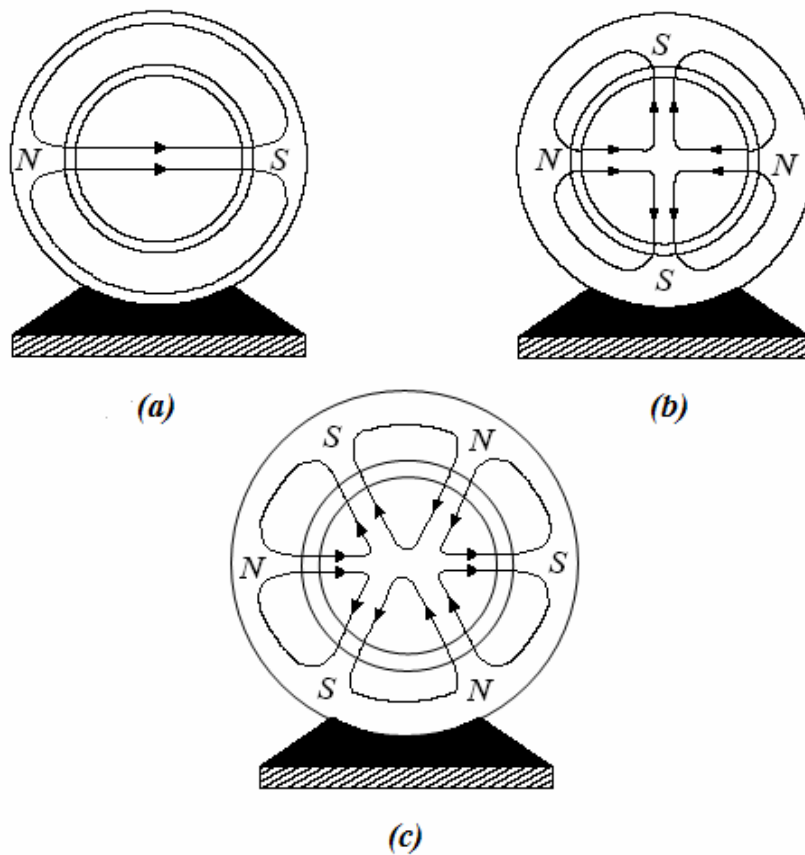


Figura C-1: Líneas de campo magnético en motores de inducción con múltiples polos

Tabla C-1: Análisis comparativo de motores de inducción con múltiples polos magnéticos

Número de polos del motor	Radianes por polo	Número de vueltas total	Número de conductores total	Número de conductores por polo
2	$\pi$	$N_s$	$2 \cdot N_s$	$N_s$
4	$\pi/2$	$N_s$	$2 \cdot N_s$	$N_s/2$
6	$\pi/3$	$N_s$	$2 \cdot N_s$	$N_s/3$

Con base en la tabla C-1, se deduce que:

$$\text{Radianes por polo} = \frac{2\pi}{p} \quad (\text{C-1})$$

$$\text{Número de conductores por polo} = \frac{2 \cdot N_s}{p} \quad (\text{C-2})$$

El ángulo  $\theta_{mech}$  en radianes eléctricos es,

$$\theta_e = \frac{p}{2} \cdot \theta_{mech} \quad (\text{C-3})$$

A continuación, generalizando la ecuación B-1 y teniendo en cuenta la ecuación C-3, se realiza un procedimiento similar al de la sección B-1:

$$n_s(\theta_e) = \hat{n}_s \cdot \text{sen}(\theta_e) \quad (\text{C-4})$$

$$\int_0^{2\pi/p} n_s \left( \frac{p}{2} \cdot \theta \right) d\theta = \frac{2 \cdot N_s}{p} \quad (\text{C-5})$$

$$\int_0^{2\pi/p} \hat{n}_s \cdot \text{sen} \left( \frac{p}{2} \theta \right) \cdot d\theta = \frac{2 \cdot N_s}{p} \quad (\text{C-6})$$

Resolviendo la integral por sustitución simple,

$$u = \frac{p}{2} \cdot \theta \quad (C-7)$$

$$du = \frac{p}{2} \cdot d\theta \quad (C-8)$$

$$\theta \Big|_0^{2\pi/p} \Rightarrow u \Big|_0^\pi \quad (C-9)$$

$$\frac{2}{p} \cdot \hat{n}_s \cdot \int_0^\pi \text{sen}(u) \cdot du = \frac{2 \cdot N_s}{p} \quad (C-10)$$

$$\frac{2}{p} \cdot \hat{n}_s \cdot [-\cos(u)] \Big|_0^\pi = \frac{2 \cdot N_s}{p} \quad (C-11)$$

$$\frac{2}{p} \cdot \hat{n}_s \cdot (2) = \frac{2 \cdot N_s}{p} \quad (C-12)$$

$$\hat{n}_s = \frac{N_s}{2} \quad (C-13)$$

Por lo tanto,

$$n_s \left( \frac{p}{2} \cdot \theta \right) = \frac{N_s}{2} \cdot \text{sen} \left( \frac{p}{2} \cdot \theta \right) \quad (C-14)$$

$$n_s(\theta_e) = \frac{N_s}{2} \cdot \text{sen}(\theta_e) \quad (C-15)$$

## C.2. INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNÉTICO PARA LA FASE-a

Con un procedimiento similar al de la sección B-2 se obtiene  $H_a(\theta_e)$

$$2 \cdot H_a(\theta_e) \cdot \ell_g = \frac{N_s}{2} \cdot i_a \cdot \int_0^{2\pi/p} \text{sen} \left( \theta_e + \frac{p}{2} \xi \right) \cdot d\xi$$

$$u = \frac{p}{2} \cdot \xi \quad (\text{C-7})$$

$$du = \frac{p}{2} \cdot d\xi \quad (\text{C-8})$$

$$\xi \Big|_0^{2\pi/p} \Rightarrow u \Big|_0^\pi \quad (\text{C-9})$$

$$2 \cdot H_a(\theta_e) \cdot \ell_g = \frac{N_s}{2} \cdot i_a \cdot \frac{2}{p} \cdot \int_0^\pi \text{sen}(\theta_e + u) \cdot du \quad (\text{C-10})$$

$$2 \cdot H_a(\theta_e) \cdot \ell_g = \frac{N_s}{p} \cdot i_a \cdot [-\cos(\theta_e + u)]_0^\pi \quad (\text{C-11})$$

$$2 \cdot H_a(\theta_e) \cdot \ell_g = \frac{N_s}{p} \cdot i_a \cdot 2 \cdot \cos(\theta_e) \quad (\text{C-12})$$

Entonces,

$$H_a(\theta_e) = \frac{N_s}{p \cdot \ell_g} \cdot i_a \cdot \cos(\theta_e) \quad (\text{C-13})$$

## APÉNDICE D: INDUCTANCIA DE MAGNETIZACIÓN DE UNA FASE

Para hallar inductancia de magnetización de una fase  $L_{m,1-fase}$ , primero se debe hallar la energía almacenada en el aire del entrehierro. Para hallar la energía almacenada en el aire del entrehierro, primero se debe hallar la expresión de densidad de energía en el aire.

Se procede a obtener la expresión de densidad de energía en el aire. En cualquier instante de tiempo en la bobina de la Figura D-1a, el flujo enlazado de la bobina (debido a las líneas de flujo entrantes en el núcleo) está relacionado con la corriente  $i$  mediante un parámetro definido como  $L$ , donde la inductancia  $L = \lambda_m / i$  es constante si el material del núcleo está en su región de operación lineal.

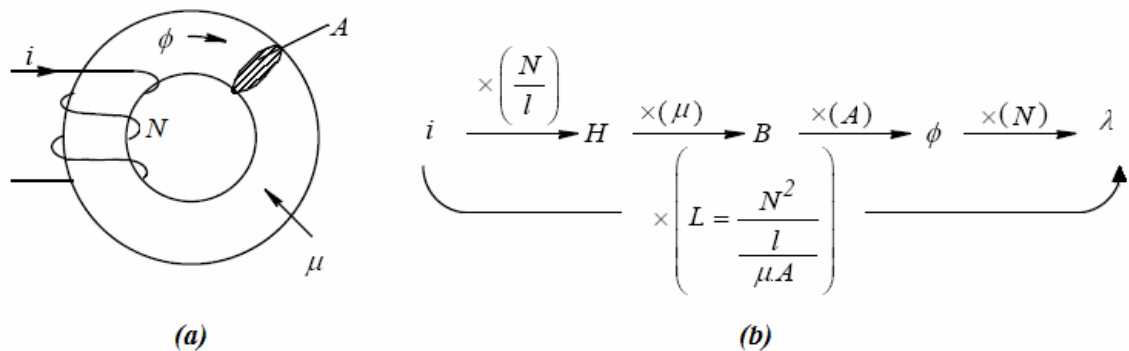


Figura D-1: Inductancia de la bobina [3]

La inductancia de la bobina en la región magnética lineal puede ser calculada mediante la multiplicación de todos los factores mostrados en la Figura D-1b, los cuales están basados en las siguientes ecuaciones:

$$H = \frac{N \cdot i}{\ell} \tag{D-1}$$

$$B = \mu \cdot H \tag{D-2}$$



$$\phi = B \cdot A \quad (D-3)$$

$$\lambda = N \cdot \phi \quad (D-4)$$

$$\mathfrak{R} = \frac{\ell}{\mu \cdot A} \quad (D-5)$$

La parte superior de la Figura D-1b muestra que:

$$i \cdot \frac{N}{\ell} \cdot \mu \cdot A \cdot N = \lambda \quad (D-6)$$

La parte inferior de la Figura D-1b muestra que:

$$i \cdot L = \lambda \quad (D-7)$$

Igualando las ecuaciones D-6 y D-7 se obtiene,

$$i \cdot \frac{N^2}{\ell} \cdot \mu \cdot A = i \cdot L \quad (D-8)$$

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu \cdot A}{\ell} = \frac{N^2}{\frac{\ell}{\mu \cdot A}} \quad (D-9)$$

Es decir,

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad (D-10)$$

La ecuación D-10 indica que la inductancia  $L$  es estrictamente una propiedad del circuito magnético (como el material del núcleo, la geometría y el número de vueltas), siempre que la operación esté en el rango lineal del material magnético, donde la pendiente de su curva característica B-H puede ser representada por una constante  $\mu$ .

Con ayuda de la ecuación D-10, se hallará la expresión para la densidad de energía en el aire. Según la teoría de circuitos eléctricos, en cualquier tiempo y con una corriente  $i$ , la energía almacenada en un inductor es

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \quad (\text{D-11})$$

En unidades del SI,  $W$  se mide en joules. Inicialmente asumiendo una estructura sin un entrehierro como en la Figura D-1a, se puede expresar la energía almacenada en términos de la densidad de flujo, sustituyendo la inductancia de la ecuación D-9 y la corriente de la ecuación D-1 en la ecuación D-11:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{N^2}{\frac{\ell}{\mu \cdot A}} \right) \cdot \left( \frac{H \cdot \ell}{N} \right)^2 \quad (\text{D-12})$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{(H \cdot \ell)^2}{\frac{\ell}{\mu \cdot A}} \quad (\text{D-13})$$

Multiplicando por  $\mu$  la ecuación D-13

$$\mu \cdot W = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \frac{(H \cdot \ell)^2}{\frac{\ell}{\mu \cdot A}} \quad (\text{D-14})$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu} \cdot \underbrace{A \cdot \ell}_{\text{volumen}} \quad (\text{D-15})$$

Donde  $A \cdot \ell = \text{volumen}$ , y en la región lineal  $B = \mu \cdot H$ . Por lo tanto, de la ecuación D-15, la densidad de energía en el núcleo es,

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu} \quad (\text{D-16})$$

De forma similar la densidad de energía en el aire depende de  $\mu_o$  y la densidad de flujo en él. Por lo tanto de la ecuación D-16, la densidad de energía en el aire puede ser expresada como

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_o} \quad (\text{D-17})$$

En unidades del SI,  $W$  se mide en joules por metro cúbico.

En máquinas eléctricas, donde el aire del entrehierro está presente en la trayectoria de las líneas de flujo, la energía es principalmente almacenada en el aire del entrehierro. Ahora para hallar la expresión para la inductancia de magnetización de una fase, se procede a hallar la energía almacenada en el aire del entrehierro integrando la densidad de energía de la ecuación D-17 para los límites del entrehierro.

Como se muestra en la Figura D-2a, el volumen de integración del aire del entrehierro es la parte blanca que se prolonga internamente a lo largo de  $\ell$ . La Figura D-2b muestra el diferencial de volumen utilizando coordenadas cilíndricas. La Figura D-2c muestra las coordenadas cilíndricas. El origen de las coordenadas cilíndricas va ubicado en el punto "o" de la Figura D-2a, con el eje-z a lo largo del eje del rotor. A continuación se presenta el desarrollo de la integral de volumen nombrada.

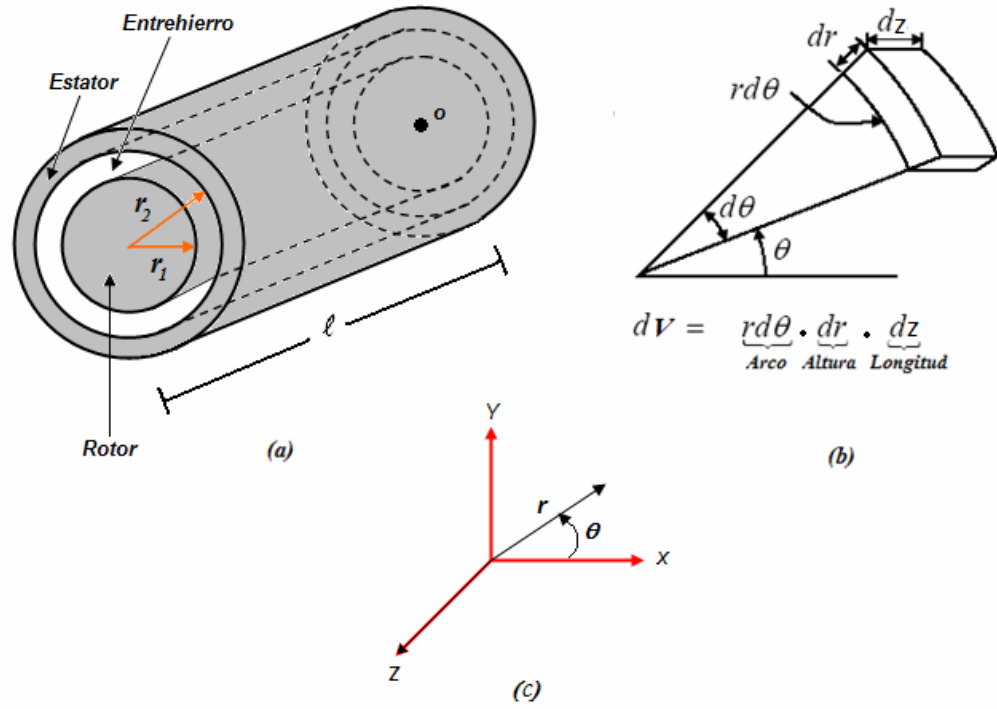


Figura D-2: Diferencial de Volumen del aire del entrehierro

$$\frac{1}{2} \cdot L_{m,1-fase} \cdot i_a^2 = \int_V \frac{1}{2} \cdot \frac{B_a^2(\theta)}{\mu_0} \cdot dV \quad (D-18)$$

$$\frac{1}{2} \cdot L_{m,1-fase} \cdot i_a^2 = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot \int_V \left( \frac{\mu_0 \cdot N_s}{p \cdot \ell_g} \cdot i_a \cdot \cos(\theta) \right)^2 dV \quad (D-19)$$

$$\frac{1}{2} \cdot L_{m,1-fase} \cdot i_a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot N_s^2}{p^2 \cdot \ell_g^2} \cdot i_a^2 \cdot \int_V \cos^2(\theta) \cdot dV \quad (D-20)$$

$$L_{m,1-fase} = \frac{\mu_0 \cdot N_s^2}{p^2 \cdot \ell_g^2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\ell} \int_{r_1}^{r_2} \cos^2(\theta) \cdot r \cdot dr \cdot dz \cdot d\theta \quad (D-21)$$

$$L_{m,1-fase} = \frac{\mu_0 \cdot N_s^2}{p^2 \cdot \ell_g^2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\ell} \cos^2(\theta) \cdot dz \cdot d\theta \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_{r_1}^{r_2} \quad (D-22)$$

$$L_{m,1-fase} = \frac{\mu_0 \cdot N_s^2}{p^2 \cdot \ell_g^2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\ell} \cos^2(\theta) \cdot dz \cdot d\theta \cdot \left[ \frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right] \quad (D-23)$$

$$L_{m,1-fase} = \frac{\mu_0 \cdot N_s^2}{p^2 \cdot \ell_g^2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \cos^2(\theta) \cdot dz \cdot d\theta \cdot \left[ \frac{(r_2 - r_1) \cdot (r_2 + r_1)}{2} \right] \quad (D-24)$$

Donde  $(r_2 - r_1)$  es igual a  $\ell_g$ , la distancia del entrehierro, y  $(r_2 + r_1)/2$  es igual a  $r$ , el radio medio del aire del entrehierro.

$$L_{m,1-fase} = \frac{\mu_0 \cdot r \cdot N_s^2}{p^2 \cdot \ell_g} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \cos^2(\theta) \cdot dz \cdot d\theta \quad (D-25)$$

$$L_{m,1-fase} = \frac{\mu_0 \cdot r \cdot \ell \cdot N_s^2}{p^2 \cdot \ell_g} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \cdot d\theta \quad (D-26)$$

$$L_{m,1-fase} = \frac{\mu_0 \cdot r \cdot \ell \cdot N_s^2}{p^2 \cdot \ell_g} \cdot \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1 - \cos(2 \cdot \theta)}{2} \right] \cdot d\theta \quad (D-27)$$

$$L_{m,1-fase} = \frac{\mu_0 \cdot r \cdot \ell \cdot N_s^2}{2 \cdot p^2 \cdot \ell_g} \cdot \int_0^{2\pi} [1 - \cos(2 \cdot \theta)] \cdot d\theta \quad (D-28)$$

$$L_{m,1-fase} = \frac{\mu_0 \cdot r \cdot \ell \cdot N_s^2}{2 \cdot p^2 \cdot \ell_g} \cdot (2\pi - 0) \quad (D-29)$$

$$L_{m,1-fase} = \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot r \cdot \ell}{\ell_g} \left( \frac{N_s}{p} \right)^2 \quad (D-30)$$

## APÉNDICE E: FLUJO ENLAZADO EN LA BOBINA-b DEBIDO A $i_a$

### E-1. FLUJO ENLAZADO EN LA BOBINA-a DEBIDO A $i_a$

Para mostrar el flujo enlazado de la bobina-a debido a  $i_a$  se tendrá en cuenta la Figura E-1. En la Figura E-1 se observa que los conductores de la bobina-a se encuentran ubicados en el estator en las posiciones  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ .

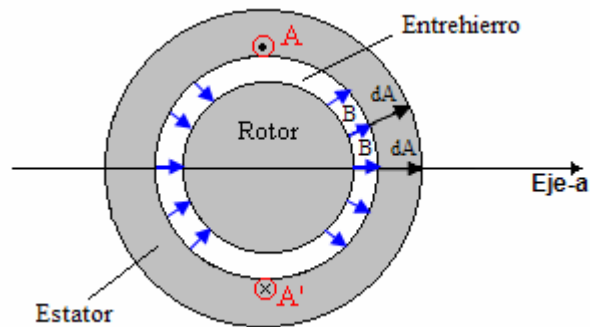


Figura E-1: Flujo enlazado de la bobina-a debido a  $i_a$

Entonces,

$$\phi_a = \int_A \vec{B}_a(\theta) \cdot d\vec{A} \quad (\text{E-1})$$

$$\phi_a = \int_A \|\vec{B}_a(\theta)\| \cdot \|d\vec{A}\| \cdot \cos(0) \quad (\text{E-2})$$

Donde  $\|\vec{B}_a(\theta)\| = B_a(\theta)$  y  $\|d\vec{A}\| = dA$

$$\phi_a = \int_A B_a(\theta) \cdot dA \quad (\text{E-3})$$

$$\phi_a = \int_A B_{\max} \cdot \cos(\theta) \cdot dA \quad (\text{E-4})$$

El área de integración es el área enlazada por la bobina-a.

$$\phi_a = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\ell} B_{\max} \cdot \cos(\theta) \cdot r \cdot d\ell \cdot d\theta \quad (\text{E-5})$$

Donde  $r$  es el radio medio del aire del entrehierro.

$$\phi_a = r \cdot B_{\max} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\ell} \cos(\theta) \cdot d\ell \cdot d\theta \quad (\text{E-6})$$

$$\phi_a = r \cdot \ell \cdot B_{\max} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) \cdot d\theta \quad (\text{E-7})$$

$$\phi_a = r \cdot \ell \cdot B_{\max} \cdot \text{sen}(\theta) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad (\text{E-8})$$

$$\phi_a = 2 \cdot r \cdot \ell \cdot B_{\max} \quad (\text{E-9})$$

Por lo tanto,

$$\lambda_a = N \cdot \phi_a \quad (\text{E-10})$$

## E-2. FLUJO ENLAZADO EN LA BOBINA-b DEBIDO A $i_a$

Para hallar el flujo enlazado en la bobina-b debido a  $i_a$  se ubicará la bobina-b de tal forma que el eje magnético de la bobina-b esté a un ángulo arbitrario  $\alpha$  con respecto al eje magnético de la bobina-a, tal como se muestra en la Figura E-2.

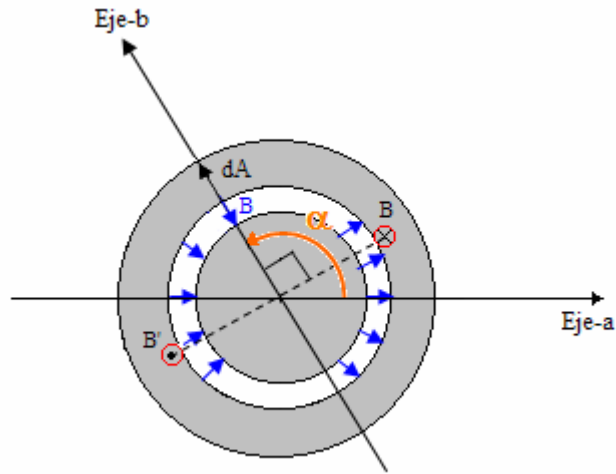


Figura E-2: Flujo enlazado en la bobina-b debido a  $i_a$

$$\phi_b = \int_A \vec{B}_a(\theta) \cdot d\vec{A} \quad (\text{E-11})$$

En la Figura E-2 se observa que, en ciertos ángulos, el vector densidad de flujo debido a  $i_a$  está en sentido contrario al vector diferencial de área de la bobina-b. Esta orientación no es problema para el producto punto entre los vectores debido a que este producto siempre será igual a la magnitud de los dos vectores.

$$\phi_b = \int_A B_a(\theta) \cdot dA \quad (\text{E-12})$$

El área de integración es el área enlazada por la bobina-b.

$$\phi_b = \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2} \int_0^{\ell} B_{\max} \cdot \cos(\theta) \cdot r \cdot d\ell \cdot d\theta \quad (\text{E-13})$$

$$\phi_b = r \cdot \ell \cdot B_{\max} \cdot \text{sen}(\theta) \Big|_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+\pi/2} \quad (\text{E-14})$$

$$\phi_b = r \cdot \ell \cdot B_{\max} \cdot \left[ \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (\text{E-15})$$

$$\phi_b = 2 \cdot r \cdot \ell \cdot B_{\max} \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{E-16})$$



Relacionando los flujos  $\phi_a$  y  $\phi_b$

$$\frac{\phi_b}{\phi_a} = \frac{2 \cdot r \cdot \ell \cdot B_{\max} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot r \cdot \ell \cdot B_{\max}} \quad (\text{E-17})$$

$$\frac{\phi_b}{\phi_a} = \cos(\alpha) \quad (\text{E-18})$$

Entonces,

$$\phi_b = \phi_a \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{E-19})$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por el número de vueltas  $N_s$ , ya que estamos suponiendo que las bobinas a y b tienen el mismo número de vueltas.

$$N_s \cdot \phi_b = N_s \cdot \phi_a \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{E-20})$$

$$\lambda_b = \lambda_a \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{E-21})$$

## APÉNDICE F: FACTOR DE ACOPLAMIENTO MUTUO DEL BOBINADO TRIFÁSICO

El factor 3/2 que hace referencia al efecto de acoplamiento mutuo entre las bobinas se deduce de la siguiente forma:

$$\underbrace{\lambda_{a,magnetización}}_{\text{roto circuito abierto}} = L_{m,1-fase} \cdot i_a + L_{mutua} \cdot i_b + L_{mutua} \cdot i_c \quad (\text{F-1})$$

Utilizando la ecuación,

$$L_{mutua} = -\frac{1}{2} \cdot L_{m,1-fase} \quad (\text{F-2})$$

En la ecuación F-1

$$\underbrace{\lambda_{a,magnetización}}_{\text{roto circuito abierto}} = L_{m,1-fase} \cdot i_a - \frac{1}{2} \cdot L_{m,1-fase} \cdot i_b - \frac{1}{2} \cdot L_{m,1-fase} \cdot i_c \quad (\text{F-3})$$

$$\underbrace{\lambda_{a,magnetización}}_{\text{roto circuito abierto}} = L_{m,1-fase} \cdot i_a + \frac{1}{2} \cdot L_{m,1-fase} \cdot (-i_b - i_c) \quad (\text{F-4})$$

Desde la ecuación

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0 \quad (\text{F-5})$$

Reemplazando  $(-i_b - i_c)$  por  $i_a$  en la ecuación F-4,

$$\underbrace{\lambda_{a,magnetización}}_{\text{roto circuito abierto}} = L_{m,1-fase} \cdot i_a + \frac{1}{2} \cdot L_{m,1-fase} \cdot i_a \quad (\text{F-6})$$

$$\underbrace{\lambda_{a,magnetización}}_{\text{roto circuito abierto}} = \frac{3}{2} \cdot L_{m,1-fase} \cdot i_a \quad (\text{F-7})$$

Entonces,

$$L_m = \frac{\lambda_{a,magnetización}}{i_a} \Big|_{ia+ib+ic=0, \text{roto abierto}} = \frac{3}{2} \cdot L_{m,1-fase} \quad (\text{F-8})$$

## APÉNDICE G: RELACIÓN ENTRE FASOR Y VECTOR ESPACIAL EN ESTADO ESTABLE SINUSOIDAL

La ecuación para el vector espacial de la corriente de estator es,

$$\vec{i}_s^a(t) = i_a(t) \cdot e^{j0} + i_b(t) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_c(t) \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} \quad (\text{G-1})$$

Donde

$$i_a(t) = \hat{I}_a \cdot \cos(\omega \cdot t - \alpha) \quad (\text{G-2})$$

$$i_b(t) = \hat{I}_a \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{G-3})$$

$$i_c(t) = \hat{I}_a \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (\text{G-4})$$

Evaluando las corrientes de fase en  $t = 0$ ,

$$i_a(0) = \hat{I}_a \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{G-5})$$

$$i_b(0) = \hat{I}_a \cdot \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{G-6})$$

$$i_c(0) = \hat{I}_a \cdot \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \quad (\text{G-7})$$

Evaluando el vector espacial de la corriente de estator en  $t = 0$ ,

$$\vec{i}_s^a(0) = i_a(0) \cdot e^{j0} + i_b(0) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_c(0) \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} \quad (\text{G-8})$$

$$\vec{i}_s^a(0) = \hat{I}_a \cdot \left[ \cos(\alpha) \cdot e^{j0} + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} \right] \quad (\text{G-9})$$

$$\begin{aligned} \vec{i}_s^a(0) = \hat{I}_a \cdot \left\{ \cos(\alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \dots \right. \\ \left. + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j \cdot \text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right] \right\} \quad (\text{G-10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{i}_s^a(0) = \hat{I}_a \cdot \left\{ \cos(\alpha) + \left[ -\frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}(\alpha) \right] \cdot \left[ -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \dots \right. \\ \left. + \left[ -\frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}(\alpha) \right] \cdot \left[ -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right\} \quad (\text{G-11}) \end{aligned}$$

$$\vec{i}_s^a(0) = \hat{I}_a \cdot \left[ \cos(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) - j \cdot \frac{3}{2} \cdot \text{sen}(\alpha) \right] \quad (\text{G-12})$$

$$\vec{i}_s^a(0) = \hat{I}_a \cdot \left[ \frac{3}{2} \cdot \cos(\alpha) - j \cdot \frac{3}{2} \cdot \text{sen}(\alpha) \right] \quad (\text{G-13})$$

$$\vec{i}_s^a(0) = \frac{3}{2} \cdot \hat{I}_a \cdot [\cos(\alpha) - j \cdot \text{sen}(\alpha)] \quad (\text{G-14})$$

$$\vec{i}_s^a(0) = \frac{3}{2} \cdot \hat{I}_a \cdot e^{-j\alpha} \quad (\text{G-15})$$

$$\vec{i}_s^a(0) = \hat{I}_s \cdot e^{-j\alpha} \quad (\text{G-16})$$

## APÉNDICE H: COMPONENTES DE FASE DE VECTORES ESPACIALES

Matemáticamente se pueden obtener las componentes de fase de un vector espacial tal como  $\vec{i}_s(t)$  de la siguiente manera: se multiplican ambos lados de la expresión de  $\vec{i}_s(t)$  por  $1\angle 0^\circ$  (para obtener  $i_a$ ),  $1\angle -120^\circ$  (para obtener  $i_b$ ) y  $1\angle -240^\circ$  (para obtener  $i_c$ ), luego se igualan las partes reales de ambos lados y se utiliza la condición que  $i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$  para obtener las componentes de fase respectivas. A continuación se muestra el desarrollo para obtener  $i_a$  a partir del vector espacial  $\vec{i}_s(t)$ .

$$\vec{i}_s^a(t) = i_a(t) \cdot e^{j0} + i_b(t) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_c(t) \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} \quad (\text{H-1})$$

$$\vec{i}_s^a(t) = \hat{I}_s(t) \angle \theta_{i_s}(t) \quad (\text{H-2})$$

Igualando las ecuaciones H-1 y H-2

$$i_a(t) \cdot e^{j0} + i_b(t) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_c(t) \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} = \hat{I}_s(t) \angle \theta_{i_s}(t) \quad (\text{H-3})$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación H-3 por  $1\angle 0^\circ$

$$\left[ i_a(t) \cdot e^{j0} + i_b(t) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_c(t) \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} \right] \cdot 1\angle 0^\circ = \left[ \hat{I}_s(t) \angle \theta_{i_s}(t) \right] \cdot 1\angle 0^\circ \quad (\text{H-4})$$

Igualando las partes reales de ambos lados de la ecuación H-4

$$i_a(t) - \frac{1}{2} \cdot i_b(t) - \frac{1}{2} \cdot i_c(t) = \hat{I}_s(t) \cdot \cos[\theta_{i_s}(t)] \quad (\text{H-5})$$

Ya que  $i_a(t) = -i_b(t) - i_c(t)$

$$i_a(t) + \frac{1}{2} \cdot i_a(t) = \hat{I}_s(t) \cdot \cos[\theta_{i_s}(t)] \quad (\text{H-6})$$

$$\frac{3}{2} \cdot i_a(t) = \hat{I}_s(t) \cdot \cos[\theta_{i_s}(t)] \quad (\text{H-7})$$

$$i_a(t) = \frac{2}{3} \cdot \hat{I}_s(t) \cdot \cos[\theta_{i_s}(t)] \quad (\text{H-8})$$

$$i_a(t) = \frac{2}{3} \cdot \text{proyección de } \vec{i}_s(t) \text{ sobre el eje } -a \quad (\text{H-9})$$

La representación gráfica de la ecuación H-9 se muestra en la Figura H-1.

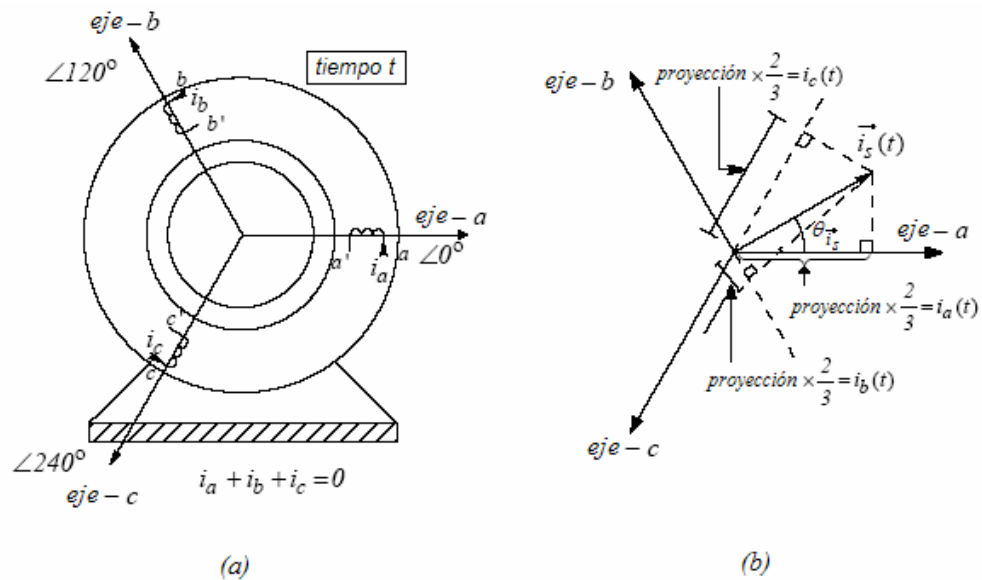


Figura H-1: Componentes de fase de un vector espacial [3]

Se puede demostrar que la misma singularidad aplica para componentes de todos los vectores espaciales tales como  $\vec{v}_s(t)$  y  $\vec{B}_s(t)$  tanto para el estator como para el rotor.

## APÉNDICE I: FACTOR DE RELACIÓN DE VUELTAS ENTRE LAS BOBINAS-dq CON RESPECTO A LAS TRES BOBINAS DE FASE

Se quiere que la inductancia de magnetización del conjunto de bobinas ortogonales  $dq$  sea igual a la inductancia de magnetización de las tres bobinas del estator (note que no hay inductancia mutua entre las dos bobinas ortogonales). Por lo tanto, aplicando el mismo procedimiento del capítulo uno para hallar inductancias de magnetización, la inductancia de magnetización del bobinado-dq con  $X$  vueltas es:

$$L_{m,dq} = \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot r \cdot \ell}{\ell_g} \left( \frac{X}{p} \right)^2 \quad (I-1)$$

La inductancia de magnetización de las tres bobinas del estator es:

$$L_{m,abc} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot r \cdot \ell}{\ell_g} \cdot \left( \frac{N_s}{p} \right)^2 \quad (I-2)$$

Igualando las ecuaciones 3-3 y 3-4

$$L_{m,dq} = L_{m,abc} \quad (I-3)$$

$$\frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot r \cdot \ell}{\ell_g} \cdot \left( \frac{X}{p} \right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot r \cdot \ell}{\ell_g} \cdot \left( \frac{N_s}{p} \right)^2 \quad (I-4)$$

Entonces el número de vueltas del bobinado-dq es:

$$X = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot N_s \quad (I-5)$$



## APÉNDICE J: CORRIENTE NETA “ $i_{neta}$ ” QUE PRODUCE EL PAR SOBRE EL EJE-d DEL ROTOR

Para encontrar  $i_{neta}$  se halla el flujo que cruza el conductor-d de la Figura J-1:

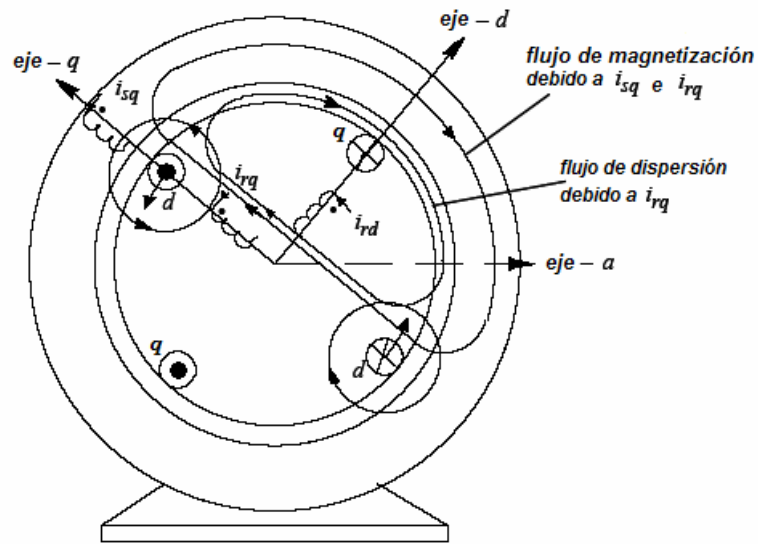


Figura J-1: Par sobre el eje-d del rotor [4]

$$\lambda_{cruza\ conductor-d} = \lambda_{m,sq} + \lambda_{\ell,rq} + \lambda_{m,rq} \quad (J-1)$$

$$\lambda_{cruza\ conductor-d} = L_m \cdot i_{sq} + L_{\ell r} \cdot i_{rq} + L_m \cdot i_{rq} \quad (J-2)$$

$$\lambda_{cruza\ conductor-d} = L_m \cdot i_{sq} + L_r \cdot i_{rq} \quad (J-3)$$

$$\lambda_{cruza\ conductor-d} = L_m \cdot \underbrace{\left( i_{sq} + \frac{L_r}{L_m} i_{rq} \right)}_{i_{neta}} \quad (J-4)$$

## APÉNDICE K: CÁLCULO DEL PAR MÁXIMO EN LOS MOTORES DE INDUCCIÓN

Un motor de inducción puede describirse, básicamente, como un transformador giratorio [1]. Su alimentación es un sistema trifásico de voltajes y corrientes. Para un transformador común, su energía de salida es la potencia eléctrica de los bobinados secundarios. En un motor de inducción los bobinados secundarios (el rotor) están en cortocircuito, por lo cual no existe energía eléctrica de salida. En cambio, su energía de salida es mecánica. En la Figura K-1 se ilustra, en el diagrama de flujo de potencia, la relación entre la entrada de potencia eléctrica y la salida de potencia mecánica.

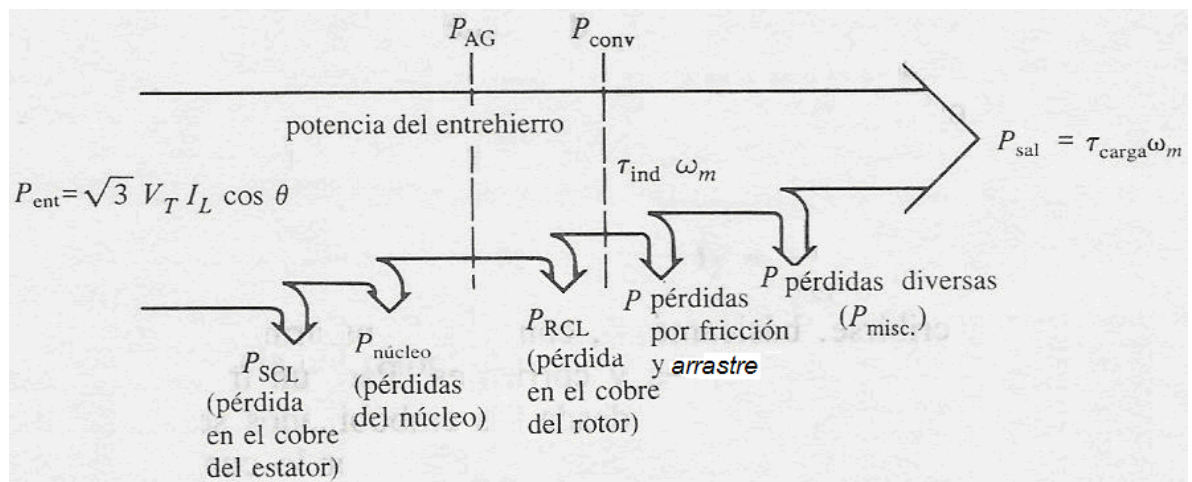


Figura K-1: Diagrama del flujo de potencia en un motor de inducción [1]

La potencia eléctrica de entrada a un motor de inducción  $P_{ent}$  se da en forma de voltajes y corrientes trifásicas. Las primeras pérdidas que se encuentran en la máquina son las pérdidas en el cobre del estator  $P_{SCL}$ . En seguida, se pierde cierta cantidad de potencia por histéresis y por corrientes parásitas en el estator  $P_{nucleo}$ . La potencia que permanece en este punto se traslada al rotor de la máquina, a través del entrehierro entre el estator y el rotor. Esta potencia se llama potencia del entrehierro  $P_{AG}$  del motor. Después que la

potencia se traslada al rotor, una parte de ella se pierde como pérdidas en el cobre del rotor  $P_{RCL}$  y el resto se convierte de eléctrica en mecánica  $P_{conv}$ . Por último, las pérdidas por rozamiento y por fricción del viento  $P_{F\&W}$  y las pérdidas diversas  $P_{misc}$  se restan. La potencia que queda es la que sale del motor  $P_{sal}$ , en forma de potencia mecánica.

Utilizando el circuito equivalente por fase de estado estable del motor de inducción mostrado en la Figura K-2, se pueden deducir las ecuaciones de potencia y par electromagnético que controlan el funcionamiento del motor. El par electromagnético en un motor se define como el par generado por la conversión interna de potencia eléctrica en mecánica. El par electromagnético se obtiene por medio de la siguiente ecuación

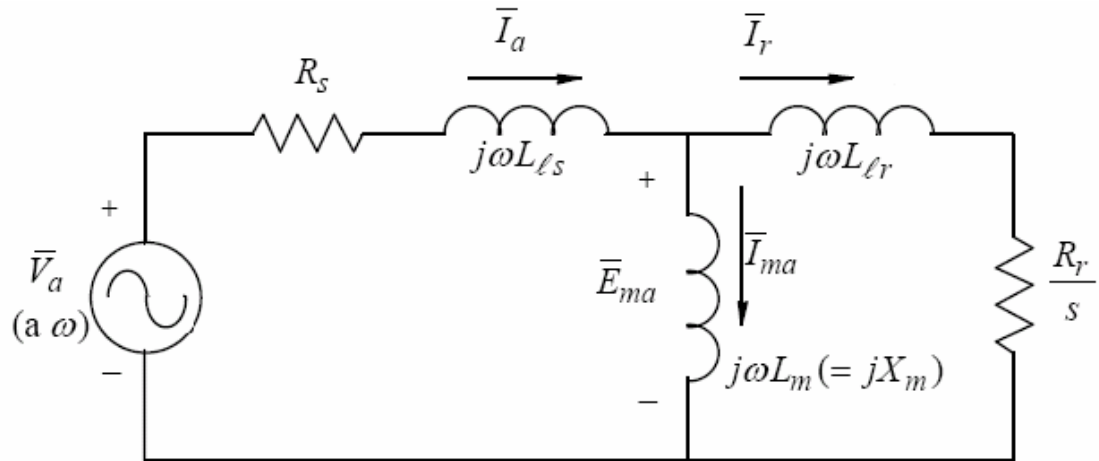


Figura K-2: Circuito equivalente por fase de estado estable

$$T_{em} = \frac{P_{conv}}{\omega_{mech}} \quad (K-1)$$

La potencia eléctrica que se convierte en mecánica es [1],

$$P_{conv} = 3 \cdot \hat{I}_r^2 \cdot \frac{R_r}{s} \cdot (1-s) \quad (K-2)$$

$$s = \frac{(\omega_{syn} - \omega_m)}{\omega_{syn}} \quad (K-3)$$

$$\omega_m = \frac{p}{2} \cdot \omega_{mech} \quad (K-4)$$

Este par electromagnético ha sido llamado también par desarrollado por el motor [1]. El par electromagnético en un motor de inducción también se puede expresar directamente en términos de la potencia del entrehierro y la velocidad sincrónica, la cual no varía. Manipulando la ecuación K-1 se obtiene

$$T_{em} = \frac{p \cdot P_{AG}}{2 \cdot \omega_{syn}} \quad (K-5)$$

La potencia que cruza el aire del entrehierro es [1],

$$P_{AG} = 3 \cdot \hat{I}_r^2 \cdot \frac{R_r}{s} \quad (K-6)$$

$$\omega_{syn} = 2\pi \cdot f \quad (K-7)$$

Para deducir la ecuación del par electromagnético en el motor de inducción se simplificará el circuito equivalente por fase de estado estable. Normalmente el valor de  $X_m$  es grande y  $X_m^2 \gg (R_s^2 + X_s^2)$ , entonces  $V_a \approx E_{ma}$ , y a fin de simplificar los cálculos, la inductancia magnetizadora  $X_m$  puede pasarse al bobinado de estator. Esto da como resultado el circuito equivalente de la Figura K-3.

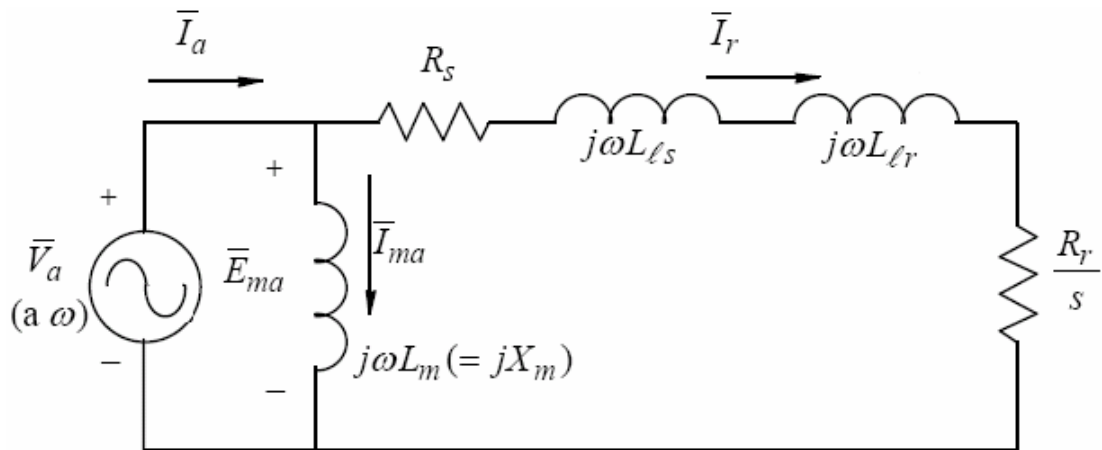


Figura K-3: Circuito equivalente aproximado por fase

En el circuito de la Figura K-3, la corriente rms del rotor es:

$$I_r = \frac{V_a}{\left[ (R_s + R_r/s)^2 + (X_{\ell s} + X_{\ell r})^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{K-8})$$

Sustituyendo  $I_r$  en la ecuación K-6 y luego  $P_{AG}$  en la ecuación K-5, se obtiene

$$T_{em} = \frac{3 \cdot p \cdot R_r \cdot V_a^2}{2 \cdot s \cdot \omega_{syn} \cdot \left[ (R_s + R_r/s)^2 + (X_{\ell s} + X_{\ell r})^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{K-9})$$

Si el motor está alimentado a partir de un voltaje fijo a una frecuencia constante, el par electromagnético desarrollado es una función del deslizamiento y las características par electromagnético – velocidad pueden determinarse a partir de la ecuación K-9. El deslizamiento para el par electromagnético máximo,  $s_{max}$ , puede determinarse derivando el par electromagnético con respecto al deslizamiento e igualándolo a cero ( $dT_{em}/ds = 0$ ).

$$s_{max} = \frac{R_r}{\left[ R_s^2 + (X_{\ell s} + X_{\ell r})^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{K-10})$$

Sustituyendo  $s = s_{\max}$  en la ecuación K-9 se obtiene el par electromagnético máximo desarrollado.

$$T_{em,\max} = \frac{3 \cdot p \cdot V_a^2}{4 \cdot \omega_{syn} \cdot \left[ R_s + \sqrt{R_s^2 + (X_{\ell s} + X_{\ell r})^2} \right]} \quad (\text{K-11})$$

Si se considera que  $R_s$  es pequeño en comparación con otras impedancias del circuito, cosa que por lo común resulta una aproximación válida en motores de más de 1kW de especificación [1], el par electromagnético máximo desarrollado se convierte en:

$$T_{em,\max} = \frac{3 \cdot p \cdot V_a^2}{4 \cdot \omega_{syn} \cdot (X_{\ell s} + X_{\ell r})} \quad (\text{K-12})$$

$$T_{em,\max} = \frac{3 \cdot p \cdot V_a^2}{4 \cdot \omega_{syn}^2 \cdot (L_{\ell s} + L_{\ell r})} \quad (\text{K-13})$$

Lo cual es lo que se quería demostrar

## APÉNDICE L: PARÁMETROS DEL MOTOR DE INDUCCIÓN

Potencia:	3.4 HP
Voltaje:	460 V (L-L, rms)
Frecuencia:	60 Hz
Fases:	3
Velocidad a plena carga:	1767 rpm
Número de polos:	4
Resistencia del estator	1.77 $\Omega$
Resistencia del rotor	1.34 $\Omega$
Reactancia de dispersión del estator	5.25 $\Omega$ (a 60 Hz)
Reactancia de dispersión del rotor	4.57 $\Omega$ (a 60 Hz)
Reactancia de magnetización	139 $\Omega$ (a 60 Hz)
Inercia equivalente total	0.025 kg·m <sup>2</sup>

## APÉNDICE M: PUNTO DE CRUCE ENTRE LAS CURVAS DE PAR MAXIMO Y PAR NOMINAL

$$T_{em,max} = \frac{3 \cdot p \cdot V_a^2}{4 \cdot \omega_{syn}^2 \cdot (L_{\ell s} + L_{\ell r})} \quad (M-1)$$

$$T_{em,nom} = \frac{P_{conv}}{\omega_{mech}} = \frac{p \cdot P_{conv}}{2 \cdot (1-s) \cdot \omega_{syn}} \quad (M-2)$$

Para hallar el punto de cruce entre las curvas de par, igualamos las ecuaciones de par máximo y par nominal.

$$T_{em,max} = T_{em,nom} \quad (M-3)$$

$$\frac{3 \cdot p \cdot V_a^2}{4 \cdot \omega_{syn}^2 \cdot (L_{\ell s} + L_{\ell r})} = \frac{p \cdot P_{conv}}{2 \cdot (1-s) \cdot \omega_{syn}} \quad (M-4)$$

$$\omega_{syn} = \frac{3 \cdot (1-s) \cdot V_a^2}{2 \cdot (L_{\ell s} + L_{\ell r}) \cdot P_{conv}} \quad (M-5)$$

El siguiente código, desarrollado en Matlab / Simulink, calcula el punto de cruce entre las curvas de par utilizando los parámetros del motor elegido.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Trabajo de Grado:
%   "Diseño de un Controlador de Velocidad para un Motor de Induccion
%   utilizando Control Vectorial"
% Autores:
%   Diana Fernanda Morales
%   Jorge Olmedo Vanegas
% Director:
%   Jaime Oscar Díaz

```



```

% Noviembre de 2005
% Calculo del Punto de Cruce entre las Curvas de Par Máximo y Nominal
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc;          % Para borrar pantalla
clear all;   % Para borrar todas la variables
close all;   % Para cerrar todas la ventanas de gráficos

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Parámetros del Motor de Inducción
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Rs = 1.77; % Resistencia del estator (ohmios)
Rr = 1.34; % Resistencia del rotor (ohmios)
Xls = 5.25; % Reactancia de dispersión del estator (ohmios a 60 Hz)
Xlr = 4.57; % Reactancia de dispersión del rotor (ohmios a 60 Hz)
Xm = 139; % Reactancia de magnetización (ohmios a 60 Hz)
Jeq = 0.025; % Inercia equivalente del sistema (kg·m^2)
p = 4; % Numero de polos

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Condiciones de Operación en Estado Estable a Plena Carga
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
VLL = 460; % Voltaje de alimentación línea-línea rms (V)
f = 60; % Frecuencia del voltaje de alimentación (Hz)
Wm = 1767*2*pi/60; % Velocidad del rotor en rad-mecánicos/s
Wm = p*Wm/2; % Velocidad del rotor en rad-eléctricos/s
Wsyn = 2*pi*f; % Velocidad sincrónica en rad-eléctricos/s
s = (Wsyn-Wm)/Wsyn; % Deslizamiento

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calculo Fasorial
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Va = VLL / sqrt(3); % Voltaje de fase del estator
Zs = Rs + j*Xls; % Impedancia del estator
Zr = Rr/s + j*Xlr; % Impedancia del rotor
Zm = j*Xm; % Impedancia de magnetización
Zparalela = (Zm*Zr) / (Zm+Zr); % Impedancia rotor // magnetización
Zeq = Zs + Zparalela; % Impedancia equivalente
Ia = Va / Zeq; % Corriente de fase del estator
Ema = Va - Zs*Ia; % Voltaje de magnetización
Ira = Ema / Zr; % Corriente de fase del rotor

```

```

Ira      = abs(Ira);           % Magnitud de la corriente de rotor
Pag      = 3*Ira^2*Rr/s;       % Potencia que pasa el aire del entrehierro
Pd       = (1-s)*Pag;         % Potencia eléctrica convertida en mecánica

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Curvas de Par Maximo y Par Nominal
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
syms x;           % Variable para la velocidad "Wm/Wsyn"
syms y;           % Variable para el par motor "Tem"
k        = Va / Wsyn; % Relación para flujo constante
Lls     = Xls / Wsyn; % Inductancia del estator
Llr     = Xlr / Wsyn; % Inductancia del rotor
Lm      = Xm / Wsyn; % Inductancia de magnetización

hold on
f = y - (3*p*(k)^2)*x / (4*sqrt(x^2)*(Lls+Llr)); % Ecuación K-13 modificada
ezplot(f,[0,1,0,60]) % para graficar entre [0,1]

f = y - (Pd*p)*x / (2*(1-s)*sqrt(x^2)*Wsyn); % Ecuación K-5 modificada
ezplot(f,[0,1,0,60]) % para graficar entre [0,1]

f = y - (3*p*Va^2) / (4*(x*Wsyn)^2*(Lls+Llr)); % Ecuación K-13
ezplot(f,[1,6,0,60])

f = y - (Pd*p) / (2*(1-s)*x*Wsyn); % Ecuación K-5
ezplot(f,[1,6,0,60]),grid

xlabel('Velocidad del Motor Normalizada [rad/s]');
ylabel('Par Motor [N·m]');
title('Curvas de Par Máximo y Par Nominal');
set(gcf,'Color',[1 1 1]);
legend('Par Máximo','Par Nominal');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Punto de Cruce entre las Curvas de Par
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
bp = 3*2*Va^2*(1-s)/(4*Pd*Wsyn*(Lls+Llr)) % Ecuación M-5
plot (bp,(Pd*p)/(2*(1-s)*bp*Wsyn),'ro');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

La Figura M-1 muestra la respuesta entregada por el programa.

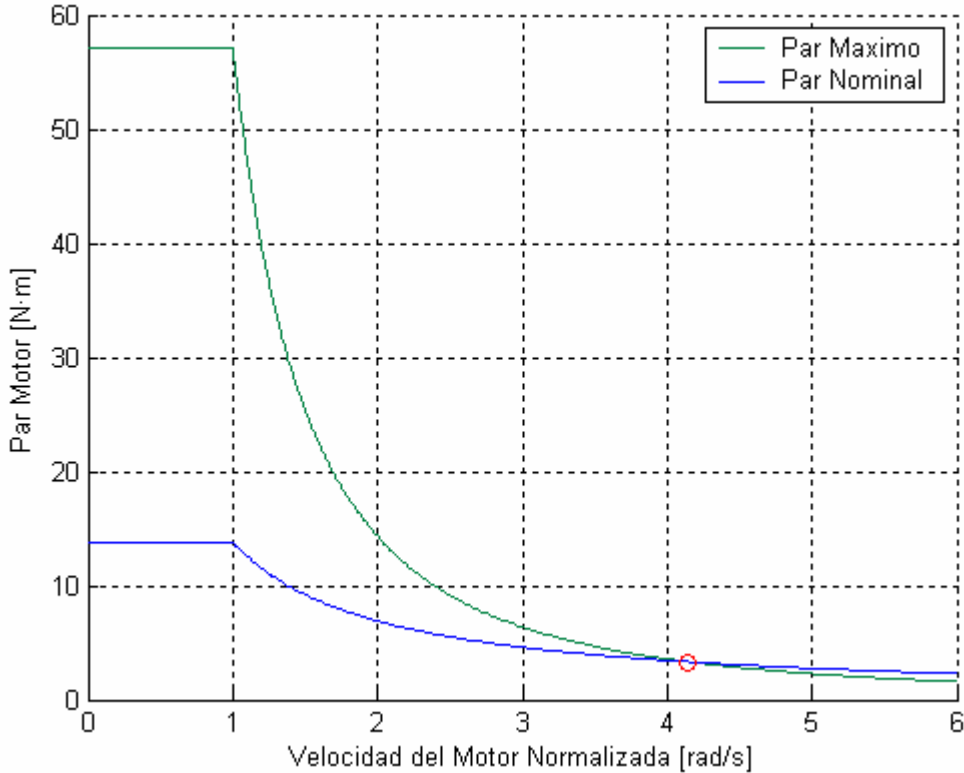


Figura M-1: Punto de cruce entre las curvas de par

## APÉNDICE N: CÁLCULO DEL FLUJO DE REFERENCIA VERSUS VELOCIDAD

$$P_{conv} = T_{em} \cdot \omega_{mech} \quad (N-1)$$

$$T_{em} = \frac{P}{2} \cdot \lambda_{rd} \cdot \left( \frac{L_m}{L_r} \cdot i_{sq} \right) \quad (N-2)$$

En el rango de velocidad extendida, en la zona de potencia constante, el flujo de referencia se halla reemplazando la ecuación de par electromagnético en la ecuación de potencia.

$$P_{conv} = \left[ \frac{P}{2} \cdot \lambda_{rd} \cdot \left( \frac{L_m}{L_r} \cdot i_{sq} \right) \right] \cdot \omega_{mech} \quad (N-3)$$

$$\lambda_{rd} = \frac{2 \cdot L_r \cdot P_{conv}}{p \cdot L_m \cdot i_{sq} \cdot \omega_{mech}} \quad (N-4)$$

$$\lambda_{rd} = \frac{2 \cdot L_r \cdot P_{conv}}{p \cdot L_m \cdot i_{sq} \cdot (2/p) \cdot (1-s) \cdot \omega_{syn}} \quad (N-5)$$

$$\lambda_{rd} = \frac{L_r \cdot P_{conv}}{L_m \cdot i_{sq} \cdot (1-s) \cdot \omega_{syn}} \quad (N-6)$$

En el rango de velocidad extendida, en la zona de potencia \* velocidad constante, el flujo de referencia se halla reemplazando la ecuación de par electromagnético en la ecuación de potencia \* velocidad.

$$P_{conv} \cdot \omega_{mech,bp} = \left[ \frac{P}{2} \cdot \lambda_{rd} \cdot \left( \frac{L_m}{L_r} \cdot i_{sq} \right) \right] \cdot \omega_{mech}^2 \quad (N-7)$$

$$\lambda_{rd} = \frac{2 \cdot L_r \cdot P_{conv} \cdot \omega_{mech, bp}}{p \cdot L_m \cdot i_{sq} \cdot \omega_{mech}^2} \quad (N-8)$$

$$\lambda_{rd} = \frac{2 \cdot L_r \cdot P_{conv} \cdot (2/p) \cdot (1-s) \cdot \omega_{syn, bp}}{p \cdot L_m \cdot i_{sq} \cdot [(2/p) \cdot (1-s) \cdot \omega_{syn}]^2} \quad (N-9)$$

$$\lambda_{rd} = \frac{L_r \cdot P_{conv} \cdot \omega_{syn, bp}}{L_m \cdot i_{sq} \cdot (1-s) \cdot \omega_{syn}^2} \quad (N-10)$$

El siguiente código, desarrollado en Matlab / Simulink, calcula el flujo de referencia versus la velocidad utilizando los parámetros del motor elegido.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Trabajo de Grado:
%   "Diseño de un Controlador de Velocidad para un Motor de Inducción
%   utilizando Control Vectorial"
% Autores:
%   Diana Fernanda Morales
%   Jorge Olmedo Vanegas
% Director:
%   Jaime Oscar Díaz
% Noviembre de 2005
% Calculo flujo de referencia para rangos de velocidad normal y extendida
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc;          % Para borrar pantalla
clear all;   % Para borrar todas la variables
close all;   % Para cerrar todas la ventanas de gráficos

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Parámetros del Motor de Inducción
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Rs = 1.77; % Resistencia del estator (ohmios)
Rr = 1.34; % Resistencia del rotor (ohmios)
Xls = 5.25; % Reactancia de dispersión del estator (ohmios a 60 Hz)
Xlr = 4.57; % Reactancia de dispersión del rotor (ohmios a 60 Hz)
Xm = 139; % Reactancia de magnetización (ohmios a 60 Hz)
p = 4; % Numero de polos
VLL = 460; % Voltaje de alimentación línea-línea rms (V)
f = 60; % Frecuencia del voltaje de alimentación (Hz)

```

```

Wrpm = 1767; % Velocidad del rotor en rpm a plena carga
Jeq = 0.025; % Inercia equivalente del sistema (kg·m^2)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calculo de Voltajes y Corrientes iniciales a Plena Carga en las
% Bobinas-dq con el eje-a como referencia
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[variables, calculos] = plena_carga([Rs Rr Xls Xlr Xm p VLL f Wrpm]);
Vsd_0 = variables(1); % Voltaje de estator del eje-d
Vsq_0 = variables(2); % Voltaje de estator del eje-q
Isd_0 = variables(3); % Corriente de estator del eje-d
Isq_0 = variables(4); % Corriente de estator del eje-q
Ird_0 = variables(5); % Corriente de rotor del eje-d
Irq_0 = variables(6); % Corriente de rotor del eje-q
Wmech = calculos(1); % Velocidad del rotor rad-mecánicos/s
Wsyn = calculos(2); % Velocidad sincrónica rad-eléctricos/s
s = calculos(3); % Deslizamiento
Va = calculos(4); % Voltaje máximo de fase del estator

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calculo de las inductancias de la maquina
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Ls = (Xls + Xm) / (2*pi*f); % Inductancia del estator
Lm = Xm / (2*pi*f); % Inductancia de magnetización
Lr = (Xlr + Xm) / (2*pi*f); % Inductancia del rotor
tau_r = Lr/Rr; % Constante de tiempo del rotor

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calculo de la Matriz de Inductancias M de la Ec. 3-61 (Para hallar los
% flujos de enlace a partir de las corrientes)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
M = [Ls 0 Lm 0 ;...
     0 Ls 0 Lm ;...
     Lm 0 Lr 0 ;...
     0 Lm 0 Lr];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Par Electromagnético Nominal
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Tem_0 = (p/2) * Lm * (Isq_0 * Ird_0 - Isd_0 * Irq_0); % Ec. 3-47

```

```

TL_0 = Tem_0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Flujos Enlazados de las bobinas-dq, Ec. 3-61
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fl_dq_0 = M * [Isd_0; Isq_0; Ird_0; Irq_0]; % Flujos enlazados
fl_sd_0 = fl_dq_0(1); % Flujo enlazado estator eje-d
fl_sq_0 = fl_dq_0(2); % Flujo enlazado estator eje-q
fl_rd_0 = fl_dq_0(3); % Flujo enlazado rotor eje-d
fl_rq_0 = fl_dq_0(4); % Flujo enlazado rotor eje-q
fl_r_dq_0 = sqrt(fl_rd_0^2 + fl_rq_0^2); % Magnitud flujo enlazado rotor

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calculo de la Funcion de Debilitamiento de Campo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Pd = TL_0*Wmech; % Potencia desarrollada nominal
bp = 4.2607; % Punto de cruce entre las curvas de par
[Wsm, fl_rd] = debilitamiento([Lr Lm p Wsyn s fl_r_dq_0 Tem_0 Pd bp]);
plot (Wsm, fl_rd),grid
axis([0 2*6*Wsyn/p 0 1.3]);
ylabel('Flujo Enlazado [vueltas-weber]')
xlabel('Velocidad del Rotor [rad/s]');
title('Flujo vs Velocidad');
set(gcf,'Color',[1 1 1]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Trabajo de Grado:
% "Diseño de un Controlador de Velocidad para un Motor de Inducción
% utilizando Control Vectorial"
% Autores:
% Diana Fernanda Morales
% Jorge Olmedo Vanegas
% Director:
% Jaime Oscar Díaz
% Noviembre de 2005
% Función para Calcular el Debilitamiento de Campo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [Wsm, fl_rd] = debilitamiento(parametros)

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Parámetros de Entrada
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Lr      = parametros(1); % Inductancia del rotor
Lm      = parametros(2); % Inductancia de magnetización
p       = parametros(3); % Numero de polos
Wsyn    = parametros(4); % Velocidad sincrónica en rad-eléctricos/s
s       = parametros(5); % Deslizamiento
fl_rd_0 = parametros(6); % Valor de flujo para rango de velocidad normal
Tem_0   = parametros(7); % Par electromagnético nominal
Pd      = parametros(8); % Potencia desarrollada nominal
bp      = parametros(9); % Punto de cruce entre las curvas de par

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calculo de la Funcion de Debilitamiento de Campo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Isq_0 = 2*Tem_0*Lr / (p*Lm*fl_rd_0); % Ec.
N      = fix(10*bp)-10;

for n = 1:N;
    Wsm(n)    = 2*(1+n*0.1)*Wsyn/p; % Velocidad sincrónica en rad-mecánicos/s
    fl_rd(n) = Pd*Lr / (Lm*Isq_0*(1-s)*(1+n*0.1)*Wsyn); % Valor de flujo para
end                                                  % rango extendido

Wsm(N+1)    = 2*bp*Wsyn/p; % Velocidad sincronica para el punto de cruce
fl_rd(N+1) = Pd*bp*Lr / (Lm*Isq_0*(1-s)*(bp)^2*Wsyn); % Valor de flujo para
                                                    % el punto de cruce

for n = N+1:60;
    Wsm(n+1)    = 2*(1+n*0.1)*Wsyn/p; % Velocidad sincrónica en rad-mecánicos/s
    fl_rd(n+1) = Pd*bp*Lr / (Lm*Isq_0*(1-s)*(1+n*0.1)^2*Wsyn); % Valor de flujo
end                                                  % rango extendido

Wsm  = [0; 2*Wsyn/p; Wsm']; % Vector de velocidad
fl_rd = [fl_rd_0; fl_rd_0; fl_rd']; % Vector de flujo enlazado
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```