

CONTROL SUPERVISOR PARA UN SISTEMA HÍBRIDO



Wilmer Peña Alarcón
Jorge Enrique Rivera Ortiz

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA, INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL
INGENIERÍA EN AUTOMÁTICA INDUSTRIAL
POPAYÁN
2011

CONTROL SUPERVISOR PARA UN SISTEMA HÍBRIDO



**Monografía presentada como requisito parcial para optar por el título de
Ingenieros en Automática Industrial**

**Wilmer Peña Alarcón
Jorge Enrique Rivera Ortiz**

**Director
Ing. Jaime Oscar Díaz
Docente**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA, INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL
INGENIERÍA EN AUTOMÁTICA INDUSTRIAL
POPAYÁN
2011**

AGRADECIMIENTOS

Al Ingeniero Jaime Oscar Díaz, quien brindó su colaboración, sus conocimientos y dedicó su tiempo para el desarrollo del proyecto.

A compañeros y amigos, quienes constantemente nos apoyaron a lo largo de este proyecto.

A nuestras familias, que con amor y entrega confiaron en nosotros.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
1. CONCEPTOS TEÓRICOS IMPORTANTES.....	2
1.1. SISTEMAS HÍBRIDOS.....	2
1.2. MODELADO DE SISTEMAS HÍBRIDOS	4
1.2.1. Clases de modelos de Sistemas Híbridos.	6
1.3. MODELADO DE SISTEMAS HÍBRIDOS CON AUTÓMATAS HÍBRIDOS.....	7
1.3.1. Una definición formal del Autómata Híbrido.	8
1.3.2. Modelado de un sistema de tanques de agua usando Autómatas Híbridos.	12
1.4. CONTROL SUPERVISOR DE SISTEMAS HÍBRIDOS.....	15
1.4.1. EL CONTROL SUPERVISOR	15
1.4.2. CONTROL SUPERVISOR PARA SISTEMAS HÍBRIDOS.....	17
1.5. HERRAMIENTAS DE SIMULACIÓN.....	19
1.5.1. Matlab: Simulink/Stateflow.....	21
2. UNA METODOLOGÍA DE DISEÑO DE CONTROL SUPERVISOR BAJO UN PARADIGMA HÍBRIDO.....	23
2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	25
2.1.1. Descripción de la planta caso de estudio	25
2.1.2. Descripción del proceso	25
2.2. MODELO DE LA PLANTA MEDIANTE UN AUTÓMATA HÍBRIDO	26
2.3. DESCRIPCIÓN DEL AUTÓMATA HÍBRIDO EN TÉRMINOS DE LA TAREA DE CONTROL.....	32
2.3.1. Definición de subconjuntos de estados híbridos.....	33
2.3.2. La tarea del control supervisor.....	35
2.4. OBTENCIÓN DEL AUTÓMATA HÍBRIDO CERRADO	36
2.4.1. El autómata de control.....	36
2.4.2. Composición paralela entre el autómata de control y el autómata híbrido	40
2.5. SÍNTESIS BASADA EN EL REFINAMIENTO DE LA ABSTRACCIÓN.....	45
2.5.1. Abstracción.....	46
2.5.2. Búsqueda de una trayectoria candidata	52

2.5.3.	Validación	54
2.5.4.	Refinamiento	62
2.5.5.	Validación y refinamiento para el caso de estudio.....	63
2.5.6.	Definición de la estrategia de control.....	67
2.6.	Simulación.....	67
2.6.1.	Simulación del modelo híbrido.....	67
2.6.2.	Simulación del sistema controlado	69
2.7.	Caso de estudio ON/OFF-PID.....	71
2.7.1.	Modelado de la planta como un autómata híbrido.....	71
2.7.2.	Descripción del autómata híbrido según la tarea de control	74
2.7.3.	Obtención del autómata híbrido cerrado.....	75
2.7.4.	Síntesis del refinamiento de la abstracción	77
2.7.5.	Simulación del sistema controlado	80
3.	IMPLEMENTACIÓN DEL DISEÑO DEL CONTROL SUPERVISOR PARA LA PLANTA CASO DE ESTUDIO	83
3.1.	DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE SUPERVISIÓN	83
3.2.	RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN	86
	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	89
	BIBLIOGRAFÍA	90

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
<i>Figura 1.1. Interpretación híbrida de un sistema de calefacción.....</i>	3
<i>Figura 1.2. Una representación de un Sistema Dinámico Híbrido.</i>	5
<i>Figura 1.3. Clases de modelos híbridos.....</i>	6
<i>Figura 1.4. Esquema parcial de un autómata híbrido, mostrando 2 lugares y la transición entre ellos.....</i>	11
<i>Figura 1.5. Sistema de Tanques de agua.</i>	12
<i>Figura 1.6. Modelo del autómata híbrido.</i>	14
<i>Figura 1.7. Estructura de control de los sistemas de producción.....</i>	16
<i>Figura 1.8. Estructura sistema de control híbrido.....</i>	18
<i>Figura 1.9. Generación de eventos y partición de espacio de estados.....</i>	18
<i>Figura 1.10. Estructura del sistema de control híbrido.....</i>	19
<i>Figura 2.1. Metodología para el diseño del control supervisor.....</i>	23
<i>Figura 2.2. Sistema de un solo tanque.</i>	25
<i>Figura 2.3. Regiones de operación de la planta.....</i>	26
<i>Figura 2.4. Representación gráfica del autómata híbrido que modela el sistema de nivel.</i>	32
<i>Figura 2.5. Una estrategia de control exitosa.</i>	35
<i>Figura 2.6. Sistema de un solo tanque teniendo en cuenta la tarea de control.</i>	36
<i>Figura 2.7. Autómata de control.....</i>	40
<i>Figura 2.8. Representación del autómata híbrido de la planta como un autómata de estados finito.</i>	41
<i>Figura 2.9. Autómata híbrido cerrado.</i>	41
<i>Figura 2.10. Procedimiento de Síntesis del controlador.....</i>	45
<i>Figura 2.11. Modelo abstracto $A(0)$</i>	52
<i>Figura 2.12. Trayectorias candidatas.....</i>	53
<i>Figura 2.13. Modelo abstracto con las trayectorias candidatas posibles para la etapa 1.</i>	54
<i>Figura 2.14. Validación de una transición de $A(i)$ para el autómata híbrido cerrado.....</i>	55
<i>Figura 2.15. Validación de la transición s_{12}, s_9 por medio del método de intersección de conjuntos.</i>	56
<i>Figura 2.16. Evolución del estado continuo hacia el conjunto objetivo T.</i>	58
<i>Figura 2.17. Secuencia de hiper-rectángulos orientados del flowpipe.</i>	61
<i>Figura 2.18. Representación en forma de árbol de las trayectorias candidatas y transiciones inválidas para la etapa 1.</i>	63
<i>Figura 2.19. Modelo abstracto con las trayectorias posibles para la etapa 2.....</i>	64
<i>Figura 2.20. Representación en forma de árbol de las trayectorias candidatas y transiciones inválidas para la etapa 2.</i>	65
<i>Figura 2.21. Representación en forma de árbol para la validación de las trayectorias candidatas para la etapa 3.....</i>	66
<i>Figura 2.22. Trayectoria candidata válida.</i>	66
<i>Figura 2.23. Supervisor para el sistema de un tanque.....</i>	67
<i>Figura 2.24. Modelo de un solo tanque en Simulink.</i>	68
<i>Figura 2.25. Modelo de transiciones en Stateflow.</i>	68
<i>Figura 2.26. Comportamiento del nivel en el sistema de solo un tanque en lazo abierto variando el estado de la válvula de salida.....</i>	69
<i>Figura 2.27. Evolución del estado híbrido del sistema.</i>	69
<i>Figura 2.28. Sistema controlado e implementado en Simulink.</i>	70
<i>Figura 2.29. Controlador implementado en Stateflow.</i>	70
<i>Figura 2.30. Respuesta del sistema híbrido controlado.</i>	70
<i>Figura 2.31. Planta para implementar control ON/OFF-PID.</i>	71
<i>Figura 2.32. Modelo del autómata híbrido.</i>	74
<i>Figura 2.33. Autómata de control.....</i>	76
<i>Figura 2.34. Representación del autómata híbrido de la planta como un autómata de estados finitos.</i>	76
<i>Figura 2.35. Autómata híbrido cerrado.</i>	77
<i>Figura 2.36. Modelo abstracto inicial para el sistema de control ON/OFF-PID.....</i>	78
<i>Figura 2.37. Trayectorias candidatas etapa 4.</i>	79
<i>Figura 2.38. Trayectoria candidata válida.....</i>	80

Figura 2.39. Supervisor para el sistema de un tanque con control ON/OFF-PID.....	80
Figura 2.40. Sistema control ON/OFF-PID.	81
Figura 2.41. Subsistema modelo híbrido.	81
Figura 2.42. Subsistema controlador.	81
Figura 2.43. Supervisor implementado en Stateflow.....	82
Figura 2.44. Respuesta del sistema híbrido con el control supervisor.	82
Figura 3.1. Interfaz del sistema de supervisión.....	83
Figura 3.2. Estado de los botones antes de iniciar el sistema con un controlador on/off.	84
Figura 3.3. Evolución de los estados en la trayectoria escogida y el controlador.	84
Figura 3.4. Trayectoria escogida y controlador para la estrategia de control ON/OFF-PID.	85
Figura 3.5. Estado de las electroválvulas, de la bomba, y de la estrategia de control ON/OFF.	85
Figura 3.6. Estado del controlador PID, las variables de control y proceso y los parámetros PID.....	85
Figura 3.7. Tendencias de la variable controlada: Nivel del tanque.	86
Figura 3.8. Resultado de la estrategia de control ON/OFF.	87
Figura 3.9. Resultado de la estrategia de control ON/OFF-PID.	88

INTRODUCCIÓN

El presente documento, está enmarcado dentro de la línea de investigación de control de procesos industriales del programa de ingeniería en automática industrial de la Universidad del Cauca, enfocado al estudio de los denominados Sistemas Híbridos y del diseño de sus respectivos controladores.

Dentro del pénsum académico, que presenta el programa de ingeniería en automática industrial de la Universidad del Cauca, aunque existen las bases conceptuales necesarias para abordar los temas referentes a los sistemas híbridos y su control, en el momento, el alcance del programa tal vez no amerita que se toquen. El presente proyecto define un control supervisor a una planta del laboratorio de control de procesos del Departamento de Electrónica Instrumentación y Control de la Universidad del Cauca a partir del modelado del sistema bajo un enfoque híbrido, permitiendo introducir y establecer una base conceptual inicial, que sirva de apoyo para el desarrollo de otros proyectos y, por qué no, de contenidos en futuros cursos.

En el Capítulo 1 se desarrolla un marco conceptual acerca de los sistemas híbridos, con algunas herramientas teóricas tocando aspectos como su definición, características y diferentes formas de modelado y haciendo énfasis en el modelado utilizando el formalismo de los autómatas híbridos. Posteriormente se tratan las bases teóricas del Control Supervisor para este tipo de sistemas.

La metodología de diseño de control supervisor para sistemas híbridos utilizada en el proyecto es presentada en un capítulo aparte que es el Capítulo 2. Para una mejor comprensión, se consideró oportuno presentar el desarrollo del control supervisor para el caso de estudio a medida que se va explicando cada paso de la metodología. Posteriormente se presenta de una forma más breve el desarrollo del control supervisor para un caso de estudio ligeramente similar al primero, utilizando la misma metodología. Bajo el mismo enfoque de autómatas híbridos se simulan los sistemas en lazo abierto y lazo cerrado con StateFlow y Simulink de Matlab. Finalmente, en el Capítulo 3 se realiza la descripción completa de la implementación de los casos diseñados en el Capítulo 2. La implementación se realizó bajo las herramientas software y hardware de Rockwell Automation (PLC Micrologix 1500, Rslogix 500, Rsvew32, Rslinx). Los resultados fueron altamente satisfactorios, validando el control diseñado.

1. CONCEPTOS TEÓRICOS IMPORTANTES

El objetivo de este capítulo es introducir al lector en las temáticas relacionadas con los sistemas híbridos, su definición y su modelado, haciendo énfasis en el modelo del autómata híbrido. Posteriormente se introduce el concepto de control supervisor, y su enfoque hacia sistemas híbridos y se presentan algunas herramientas de simulación

1.1. SISTEMAS HÍBRIDOS

Generalmente el estudio de sistemas dinámicos se ha centrado en dos áreas distintas que son los sistemas continuos, de tiempo continuo o de tiempo discreto, y los sistemas de eventos discretos [1]. Un sistema dinámico híbrido, es un sistema donde el estado del sistema evoluciona en el tiempo de acuerdo a la interacción de dinámicas continuas y dinámicas discretas [2].

Generalmente, la dinámica continua de un sistema híbrido es representada por estados continuos; utilizando ecuaciones diferenciales y/o ecuaciones algebraicas. Estas variables continuas toman valores en un conjunto de números reales dentro de un intervalo, por ejemplo en el intervalo $[10,100]$. La dinámica discreta del sistema híbrido describe los modos de operación, que son representados por un conjunto finito de símbolos cuya evolución en el tiempo depende eventos [3]. Por ejemplo el encendido o apagado de un termostato.

Las dinámicas híbridas proporcionan un marco adecuado para el modelado de sistemas en una amplia gama de situaciones [4]:

- En sistemas mecánicos, cuando el movimiento continuo puede ser interrumpido por colisiones.
- En circuitos eléctricos, cuando los fenómenos continuos como la carga de un capacitor puede ser interrumpida activando o desactivando diodos.
- En procesos químicos, cuando la evolución continua de las reacciones químicas es controlada con válvulas y bombas.
- En sistemas embebidos de computación, cuando un computador interactúa con plantas continuas.

La dinámica híbrida se puede presentar por acciones internas del sistema (planta) o debido a la acción de dispositivos externos (controlador/supervisor). Algunos de los fenómenos generados internamente incluyen disturbios, fallos,

que producen cambios en los modos de operación. El comportamiento híbrido generado externamente más común es el que resulta por dispositivos de control con un número finito de estados, por ejemplo la conmutación controlada entre leyes de control; y podemos también incluir las decisiones con acciones tipo discretas de operarios humanos [5].

Es importante destacar, que un sistema híbrido es una interpretación del mundo real, donde las dinámicas de eventos discretos o las dinámicas del sistema continuo se refieren a una abstracción del mundo real. Según la interpretación que se de a un sistema puede generarse un sistema híbrido o no. Como ejemplo considérese el caso de un sistema de calefacción de una casa. Este sistema se puede modelar como un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de la temperatura de acuerdo al intercambio de calor a través de las paredes y ventanas cuando el aire acondicionado esta encendido y cuando esta apagado, y el sistema se puede interpretar como continuo. El termostato que controla el aire acondicionado puede ser definido como un sistema de eventos discretos, que interpreta los símbolos {caliente, frío} y el sistema se puede interpretar como discreto. Finalmente, el sistema se puede interpretar como híbrido, un conjunto de ecuaciones diferenciales junto con estados discretos, los modos de operación mencionados mas arriba, de acuerdo a la temperatura del cuarto [6]. El sistema así descrito se muestra en la Figura 1.1.

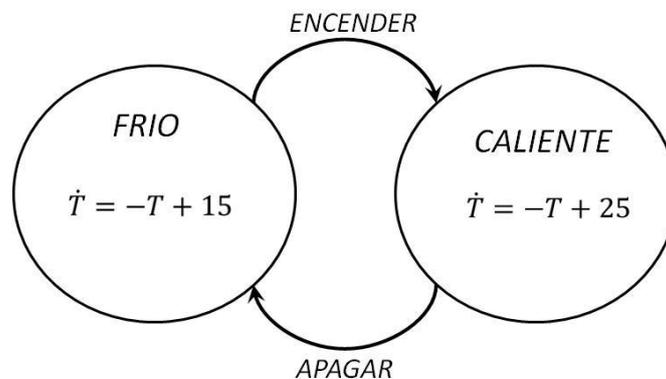


Figura 1.1. Interpretación híbrida de un sistema de calefacción.

Una de las razones más importantes para representar los sistemas mediante un modelo híbrido es la posible reducción en la complejidad del modelo [7]. Por ejemplo, si la dinámica para una región de operación es modelada con ecuaciones diferenciales no lineales, se descompone esta región de operación y se desarrollan modelos lineales para cada una de las subregiones; cada una de estas subregiones corresponde a un modo de operación. Los diferentes modos de operación conmutan según los eventos que se generan de acuerdo al comportamiento de la planta [8].

1.2. MODELADO DE SISTEMAS HÍBRIDOS

En general, un modelo híbrido parte de la idea básica de que cualquier sistema en el que interactúan dinámicas continuas y discretas puede ser expresado de forma conceptual por ecuaciones diferenciales como:

$$\dot{x}(t) = f(q, x(t), u)$$

Siendo f una función que contiene los modos de operación q , el conjunto de estados continuos $x(t)$ y las entradas u al sistema [9].

En cada modo de operación la dinámica continua se representa por medio de una serie de ecuaciones diferenciales que describen la evolución de las variables y las salidas continuas, en tiempo continuo¹ y se representan de la siguiente manera:

$$\dot{x}_c(t) = f(x_c(t), u(t)) \quad (1)$$

$$y_c(t) = g(x_c(t), u(t)) \quad (2)$$

- x_c es el vector de estado continuo en tiempo continuo.
- u es el vector entrada continuas y discretas en tiempo continuo.
- y_c es el vector de señales de salida continuas en tiempo continuo.

El sistema evoluciona a través de diferentes modos de operación de acuerdo a diferentes señales. Se pueden presentar 2 tipos de conmutación entre modos de operación: la conmutación autónoma que implica que el sistema evoluciona por si mismo (eventos internos generados por la parte dinámica continua), y la conmutación controlada donde la evolución entre modos de operación es inducida externamente (entradas discretas, por ejemplo) [10].

Una posible representación de un sistema híbrido se muestra en la Figura 1.2.

¹ Para el desarrollo de este trabajo no se tiene en cuenta el tiempo discreto.

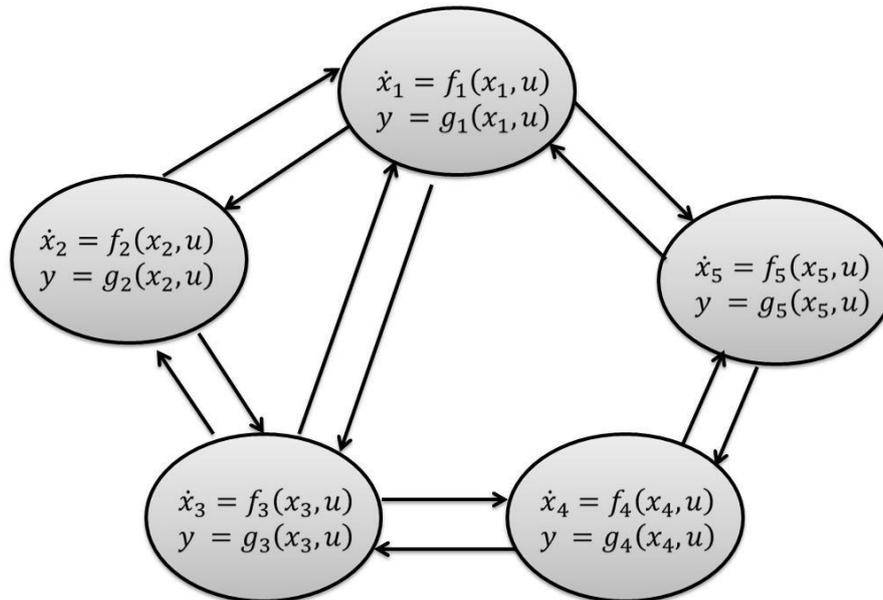


Figura 1.2. Una representación de un Sistema Dinámico Híbrido.

En la Figura 1.2 cada círculo representa un modo de operación del sistema, x_q representa el conjunto de estados continuos del sistema en el modo de operación q , u representa las entradas continuas y discretas al sistema híbrido y y las salidas del mismo. Las flechas entre cada modo de operación representan las transiciones.

En general, las distintas representaciones de los sistemas híbridos tienen como objetivo [4]:

1. Permitir capturar diferentes tipos de comportamiento de dinámicas continuas y discretas, y modelar las diferentes maneras en que la evolución de los estados discretos afectan y son afectados por la evolución de los estados continuos.
2. Permitir construir modelos complejos por medio de la composición de modelos simples.
3. Permitir resolver problemas de diseño para modelos complejos mediante el diseño de componentes individuales, y, de forma inversa, permitir la composición de los resultados de desempeño de componentes individuales para estudiar el desempeño del sistema completo.

Las diferentes aproximaciones para representar un sistema híbrido se enfocan en alguno de los objetivos anteriormente mencionados.

1.2.1. Clases de modelos de Sistemas Híbridos.

Para el modelado de sistemas híbridos hay diferentes tipos de modelos, desde modelos detallados que pueden incluir ecuaciones y tablas de búsquedas que son excelentes para simulación pero no son de fácil análisis, modelos que son buenos para el análisis pero de difícil síntesis, modelos para control y modelos para verificación [1].

Los diferentes modelos para representar un sistema híbrido han sido clasificados por Labinaz [5] y Chacon [8] en las siguientes cuatro clases: los sistemas de transición, los sistemas dinámicos, aproximaciones algebraicas y los lenguajes de programación, tal como se muestra en la Figura 1.3. A continuación se hace una muy breve descripción de las clases.

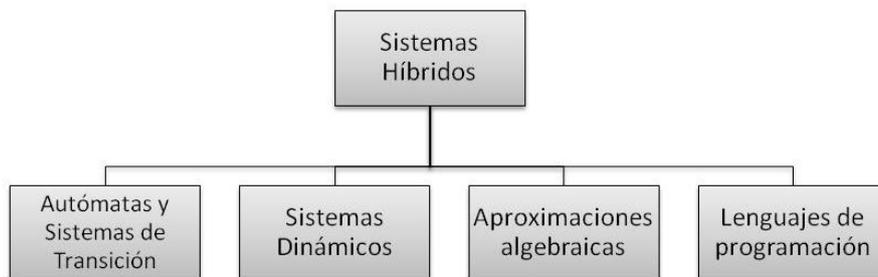


Figura 1.3. Clases de modelos híbridos.

Los modelos pertenecientes a la clase de Autómatas y Sistemas de Transición permiten obtener un modelado donde variables continuas evolucionan según la ocurrencia de eventos. Comúnmente este tipo de modelos es representado por grafos y se dividen en autómatas híbridos y redes de Petri híbridas.

En el enfoque dado por sistemas dinámicos, un sistema híbrido es presentado como la interacción de dos subsistemas uno discreto y el otro continuo con una regla de conmutación entre ellos. Los ejemplos clásicos para modelar un sistema híbrido bajo este punto de vista, surgen de la mecánica y biología.

Establecer un formalismo algebraico apropiado para un comportamiento híbrido es la prioridad de la clase de modelos algebraicos definidos por aproximaciones algebraicas, donde la evolución de un estado $x \in X$ en el tiempo puede ser considerado como una acción en el álgebra R . Este enfoque da origen a estructuras abstractas que requieren un desarrollo teórico profundo.

Por último, en la clase de lenguajes de programación no es definido un modelo híbrido explícito, en vez de esto, el modelo híbrido es definido por un lenguaje de programación. Instrucciones primitivas de programación junto con reglas

para combinar estas instrucciones, son las que determinan los tipos de fenómenos híbridos que pueden ser codificados por el lenguaje [4].

1.3. MODELADO DE SISTEMAS HÍBRIDOS CON AUTÓMATAS HÍBRIDOS

Los autómatas híbridos han dado un marco matemático concreto que es útil para el análisis y la verificación de sistemas híbridos, cuya finalidad es alcanzar sistemas automatizados con un alto rendimiento minimizando la intervención humana [11].

En general, el formalismo de los autómatas híbridos está basado en una representación explícita tanto de las dinámicas continuas del sistema como de las discretas. La evolución de los estados discretos, o modos de operación, se describe mediante un autómata finito y las dinámicas continuas se modelan por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales asociadas a los estados híbridos del autómata híbrido, un conjunto de ecuaciones por cada estado híbrido. Mientras la trayectoria que describen los estados continuos permanezca en ciertas regiones del espacio de estados continuo, denominadas invariantes, el autómata híbrido permanece en el estado discreto [12]. El estado discreto del autómata cambia ya por la conmutación de un evento discreto o mediante una actividad continua (por ejemplo una discontinuidad en el estado continuo) [10].

Varios autores han planteado diferentes formas de definir un autómata híbrido. Lygeros en [4], expresa que el autómata híbrido es un lenguaje rico en descripción, pero que es autónomo y por lo tanto no tiene entradas ni salidas.

Para Henzinger en [11], un autómata híbrido es un modelo formal para un sistema dinámico con componentes continuos y discretos, que es representado por un grafo cuya evolución depende de saltos discretos en el espacio de estados, causados por cambios de modo de operación y de la evolución de los estados continuos en un modo.

Para el desarrollo del presente trabajo se utiliza el modelo propuesto por Olaf Stursberg en [13]. Para Stursberg el autómata híbrido es simplemente un sistema de dinámica continua, lineal o no lineal, con entradas discretas. Una razón para esta selección fue la naturaleza de las plantas candidatas a caso de estudio, pero sobretodo porque representa un caso bastante general, donde las entradas discretas representan las salidas de un sistema de control lógico, un PLC.

Otro modelo de autómata híbrido es dado por Bak [14] y Yang [15]. Los autores proponen una estructura igual a la propuesta por Sturberg, definida mas adelante, y añaden otros componentes más que son:

- *Init*. Es el conjunto de condiciones iniciales en cada lugar $z \in Z$. El lugar del autómata híbrido z comienza cuando la condición $Init(z)$ es verdadera.
- Uc es una colección finita de variables de entrada continuas.
- Y es una colección finita de variables de salida. Asumimos $Y = Y_D \cup Y_C$, donde Y_D contiene variables discretas y Y_C contiene variables continuas.
- $h: Q \times X \rightarrow Y$ es la función de flujo de salida.

1.3.1. Una definición formal del Autómata Híbrido.

La definición matemática formal del autómata híbrido debe considerar dos aspectos: su estructura y su comportamiento. La definición que se presenta a continuación es casi textualmente la presentada por Stursberg en [13]. Para Stursberg el comportamiento lo define en lo que llama semántica.

Definición de la estructura.

Un autómata híbrido con entradas discretas esta dado por $AH = (X, Z, V, \gamma, inv, \Theta, g, r, f)$ con:

- El espacio de estados continuos $X \subseteq R^{n_x}$ en el cual está definido el vector de estados continuos $x \in X$. Donde n_x es el número de estados continuos.
- El conjunto finito de lugares $Z = \{z_1, \dots, z_{n_z}\}$.
- El conjunto finito $V = \{v_1, \dots, v_{n_d}\}$ de entradas discretas $v_j \in R^{n_v}$.

Un mapeo de disponibilidad de entradas $\gamma: Z \rightarrow 2^V \setminus \emptyset$ asigna un conjunto $V_z \subseteq V$ a $z \in Z$.

- El mapeo del invariante: $Z \rightarrow 2^X$ el cual define un poliedro invariante $inv(z_j) = \{x \mid \exists n_{p_j} \in N, C_j \in R^{n_{p_j} \times n_x}, d_j \in R^{n_{p_j}}, x \in X: C_j \cdot x \leq d_j\}$ para cada $z_j \in Z$.

- El conjunto finito de transiciones $\Theta \subseteq Z \times Z$. Una transición desde $z_1 \in Z$ a $z_2 \in Z$ se representa por (z_1, z_2) .
- Un mapeo $g : \Theta \rightarrow 2^x$ que asocia una guarda $g((z_1, z_2)) \subseteq X$ con cada transición $(z_1, z_2) \in \Theta$ tales que: $g((z_1, z_2)j) = \{x \mid \exists n_{gj} \in N, C_j \in R^{n_{gj} \times n_x}, d_j \in R^{n_{gj}} : C_j \cdot x \leq d_j\}$. Para todas las parejas de transiciones $(z_1, *) \in \Theta$, se requiere que las guardas correspondientes sean disjuntas.

El signo* en $(z_1, *)$ representa cualquier $z \in Z$.

- Una función lineal de reset $r : \Theta \times X \rightarrow X$, que asigna un $x' \in X$ a cada (z_1, z_2) y $x \in g((z_1, z_2))$.
- Una función de flujo $f : Z \times X \times V \rightarrow R^n$ que define un campo vectorial continuo $\dot{x} = f(z, x, v)$ para cada $z \in Z$.

Para mayor claridad, a continuación se da una breve explicación de las componentes de la definición.

- El conjunto de estados continuos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_x}\}$ son todos los estados continuos presentes en el sistema, incluyendo todas las regiones de operación.
- El conjunto de lugares Z representan los modos de operación o estados discretos del autómata. Los estados continuos evolucionan en un lugar en tanto no se presente una condición de transición.
- Cada elemento del conjunto V es un vector, cuyo valor es una combinación de las entradas discretas. Por ejemplo, si se tienen 3 entradas discretas entonces un elemento de V puede ser el vector $v_1 = [1, 0, 1]$. En V no están presentes necesariamente todas las combinaciones posibles, 2^n , depende de las condiciones propias de la planta física. El mapeo de disponibilidad asigna a cada lugar un subconjunto de vectores de entrada, que depende de la planta a modelar.
- El poliedro invariante define un subespacio. En tanto los estados continuos permanezcan en el invariante del lugar $z_j \in Z$, no ocurre una transición a otro lugar.

- Θ . Es una colección de transiciones discretas que permiten la evolución de un lugar a otro debido a la ocurrencia de eventos. Dicha evolución da lugar a distintas trayectorias en el comportamiento híbrido del sistema.
- Una guarda es un subespacio del espacio de estados en z_1 que al alcanzarse por la evolución de los estados continuos da lugar a una transición.
- La función de reset asigna el valor de los estados continuos en el lugar de destino luego de una transición.
- La función de flujo define la dinámica de los estados continuos en el lugar. Esta dinámica depende de la naturaleza de la planta y puede incluir la presencia de lazos de control de bajo nivel, un PID por ejemplo.

Semántica del Autómata Híbrido.

Sea $T = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_f\}$ con $t_k \in R^{\geq 0}$ el conjunto ordenado de los tiempos en donde ocurre una transición que contiene el tiempo inicial t_0 y todos los tiempos hasta t_f y $|T|$ puede ser infinito. Para mayor claridad en la notación, para todo $t_k \in T$, los estados se representan por $x_k := x(t_k)$, los lugares $z_k := z(t_k)$, y las entradas por $v_k := v(t_k)$, respectivamente.

El estado híbrido del autómata híbrido se define como una pareja (z, x) , el cual consiste del lugar $z \in Z$, que representa un modo de operación del sistema, y de $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ el vector de estados continuos.

En el autómata híbrido $\phi_v = (v_0, v_1, \dots, v_f)$ denota una secuencia de entrada, y $\sigma_k := \sigma(t_k) = (z_k, x_k)$ el estado híbrido en t_k . Para una secuencia de entrada ϕ_v , los lugares y los estados continuos evolucionan a lo largo de una cierta trayectoria. Una trayectoria factible del autómata híbrido es una secuencia $\phi_\sigma = (\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2), \dots, \sigma(t_f))$ de acuerdo a:

- $\sigma(t_0) = (z_0, x_0)$ con $z_0 = z(t_0) \in Z$ y $x_0 \in \text{inv}(z_0)$, $x_0 \notin g((z_0, *))$ para cualquier $(z_0, *) \in \Theta$.
- $\sigma(t_{k+1})$ con $t_{k+1} := t_k + \tau, \tau \in R^{>0}$, sigue desde $\sigma(t_k)$ para:
 - Evolución continua: $\chi: [0, \tau] \rightarrow X$, donde $\chi(0) = x_k, \dot{\chi}(\square) = f(z_k, \chi(t), v_k)$ con una única solución existente para $t \in [0, \tau]$, y $\chi(t) \in \text{inv}(z_k)$, para todas las $(z_k, *) \in \Theta$ y $t \in [0, \tau[$ si $\chi(t) \in g((z_k, *))$, no existe t' con $t < t' \leq \tau$ tal que $\chi(t') \notin g((z_k, *))$.

$r(z, z', x)$, que asigna su valor en el siguiente lugar z' . Luego de esta transición discreta, se resume la evolución continua y todo el proceso se repite.

En resumen. Una trayectoria del autómata híbrido es una secuencia finita de estados discretos z_1, z_2, \dots, z_i tales que: (1) el primer estado z_0 de la secuencia, es un lugar inicial del autómata y (2) cada pareja de lugares (z_i, z_{i+1}) se produce de forma consecutiva al evolucionar el autómata híbrido a lo largo de la trayectoria. La trayectoria que sigue el autómata híbrido viene definida por medio de una determinada secuencia de entrada.

1.3.2. Modelado de un sistema de tanques de agua usando Autómatas Híbridos.

A continuación se muestra un ejemplo ilustrativo presentado en [4] de un sistema de tanques el cual se modela utilizando la definición de un autómata híbrido presentada en la Sección 1.3.1.

Se tienen dos tanques alimentados mediante un brazo mecánico el cual sostiene una tubería por la cual fluye líquido a razón de cambio de w . A la vez los tanques se vacían a una razón de cambio constante de q_1 en el tanque 1 y q_2 en el tanque 2. El propósito del brazo mecánico es mantener el volumen de agua por encima, de r_1 en el tanque 1 y r_2 en el tanque 2, asumiendo que $x_1(0) > r_1$ y $x_2(0) > r_2$. Solo se alimenta un tanque a la vez. Gráficamente el sistema es representado en la Figura 1.5.

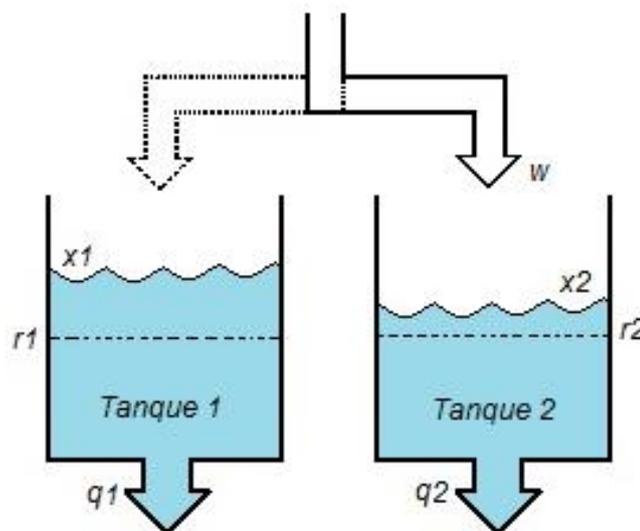


Figura 1.5. Sistema de Tanques de agua.

Obsérvese que el sistema posee una dinámica continua que es el nivel del líquido en cada uno de los tanques y una entrada discreta que es la posición

del brazo mecánico. Esto muestra que el sistema puede ser modelado con el autómata híbrido definido en la sección anterior.

Los estados continuos que describen el comportamiento continuo son los niveles de cada tanque.

$$X = \{x_1, x_2\}, x \in R^2$$

Donde x_1 es el nivel de agua en el tanque 1 y x_2 es el nivel de agua en el tanque 2.

La dinámica continua se describe mediante las ecuaciones diferenciales que se muestran a continuación. Cuando se llena el tanque 1 y se vacía el tanque 2:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= w - q_1 \\ \dot{x}_2 &= -q_2\end{aligned}$$

Cuando se llena el tanque 2 y se vacía el tanque 1:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -q_1 \\ \dot{x}_2 &= w - q_2\end{aligned}$$

Para el modelado de la parte discreta se especifican los lugares que existen en el sistema. En este caso existen dos lugares los cuales corresponden al modo de operación de llenado del tanque 1 y al modo de operación de llenado del tanque 2:

$$Z = \{z_1, z_2\}$$

El sistema cuenta con una entrada discreta v_1 que representa la posición del brazo, que toma valores de 1 o 0, dependiendo si se llena el tanque 1 o el tanque 2, respectivamente. El conjunto finito de entradas discretas es:

$$V = \{v_1\}$$

El comportamiento dinámico en cada lugar esta restringido por el nivel de agua mínimo permitido en cada uno de los tanques.

$$\begin{aligned}inv(z_1) &= \{x \in X: x_2 \geq r_2\} \\ inv(z_2) &= \{x \in X: x_1 \geq r_1\}\end{aligned}$$

En este sistema se tienen dos transiciones discretas, definidas por el cambio del lugar z_1 al lugar z_2 y del lugar z_2 al lugar z_1 .

$$\Theta = \{(z_1, z_2), (z_2, z_1)\}$$

La condición para que el sistema cambie de un modo de operación a otro es que el nivel en un tanque sea menor o igual al punto límite.

$$g(z_1, z_2) = \{x \in X: x_2 \leq r_2\}$$

$$g(z_2, z_1) = \{x \in X: x_1 \leq r_1\}$$

Ya que el valor del nivel no tiene saltos durante una transición, la función de reset que se tiene en este caso es:

$$x'_1 := x_1 \text{ y } x'_2 := x_2$$

La función de flujo del sistema especifica las ecuaciones diferenciales para cada uno de los lugares. Para el lugar z_1 se tiene:

$$f_1(z, x, v) = \begin{cases} \dot{x}_1 = w - q_1 \\ \dot{x}_2 = -q_2 \end{cases}, \text{ si } z = z_1, v = 1$$

Para el lugar z_2 se tiene la siguiente función de flujo:

$$f_2(z, x, v) = \begin{cases} \dot{x}_1 = -q_1 \\ \dot{x}_2 = w - q_2 \end{cases}, \text{ si } z = z_2, v = 0$$

Finalmente, la Figura 1.6 muestra el autómata híbrido que representa modelo híbrido del sistema de tanques siendo z_1 el lugar inicial con sus respectivos valores iniciales de los estados continuos.

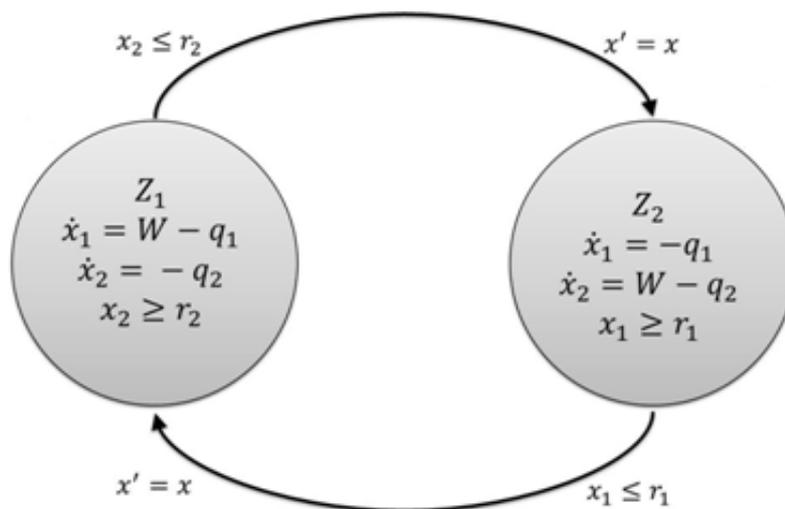


Figura 1.6. Modelo del autómata híbrido.

1.4. CONTROL SUPERVISOR DE SISTEMAS HÍBRIDOS

La presente sección tiene como objetivo definir control supervisor, y en particular el control supervisor de sistemas híbridos.

1.4.1. EL CONTROL SUPERVISOR

Los denominados Sistemas de Supervisión, son sistemas en tiempo real que recolectan, grafican y procesan datos, presentan alarmas y, de suma importancia, tienen la capacidad de integrar y coordinar varios módulos de control a fin de optimizar el proceso de producción. En los primeros años aparecieron en la industria para simplificar el trabajo de los operarios y la capacidad de control que proporcionaban era muy pobre. Los computadores de entonces eran muy limitados, con poca capacidad de memoria y disco duro, una interfaz muy primitiva y aunque tenían capacidad de salidas también limitada, podían influenciar en los sistemas de instrumentación, cambiando el set-point de los controladores PID por ejemplo. Las limitaciones del computador se hacían evidentes en aspectos como:

- Sobrecargas en los sistemas de almacenamiento de información, dado a que no había espacio suficiente para almacenar la información del proceso.
- Interfaces hombre-máquina pobres, que no mostraban de una manera eficiente la información del proceso. Esta circunstancia no permitía actualizar adecuadamente el modelo mental del operario acerca del proceso supervisado. El operador tenía la tendencia a esperar una alarma para actuar, distinto a tratar de anticiparse a estados anormales.

Como consecuencia del incremento en la complejidad y los requerimientos de calidad de los procesos, las funciones de los sistemas de supervisión tradicionales se hicieron insuficientes y la capacidad de control debió multiplicarse. Los avances tecnológicos permitieron el desarrollo del computador y nuevos dispositivos, más rápidos y más completos. Nuevos avances teóricos condujeron al desarrollo de nueva área del conocimiento que hoy se conoce como Control Supervisor [18].

En términos generales, el control supervisor es un control de alto nivel que pretende lograr la coordinación de los diferentes niveles de jerarquía en los sistemas de producción, que implican, entre otras, actividades de control avanzado, programación de operaciones, así como la notificación de los estados de encendido, apagado y/o emergencia del sistema de producción [19]. El control supervisor se encarga entonces de las funciones superiores en una estructura de control de un sistema de producción como se muestra en la

Figura 1.7, resaltando con un ovalo amarillo el nivel donde esta ubicado el control supervisor.

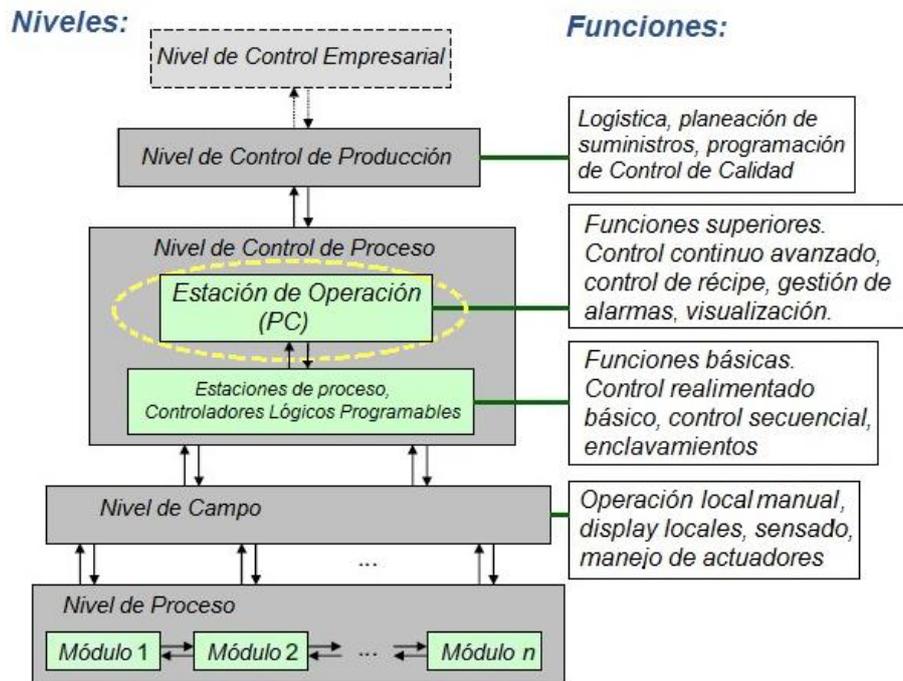


Figura 1.7. Estructura de control de los sistemas de producción.

El control supervisor juega un rol importante en la automatización de procesos, sobre todo en aquellos donde existen modos de operación que cambian de manera discreta, dependiendo de la satisfacción de unas condiciones lógicas dadas [13]. La teoría del Control Supervisor se inicia con la propuesta de Ramadge y Wonham, la cual se enfocaba a sistemas de control a eventos discretos, en donde el término supervisor era empleado con la intención de controlar eventos a partir de la especificación del funcionamiento del sistema [19].

Existen dos enfoques de control supervisor, hacia sistemas de eventos discretos y hacia sistemas híbridos. Este último también contiene sistemas con dinámicas continuas. A continuación se da una breve descripción del control supervisor enfocado a sistemas de eventos discretos, posteriormente se describe en más detalle el control supervisor para sistemas híbridos en la Sección 1.4.2.

En el control supervisor enfocado a sistemas de eventos discretos la planta y el supervisor se representan como sistemas de eventos discretos. La planta evoluciona a lo largo de una serie de estados debido a la ocurrencia de eventos. Teniendo un modelo de la planta y una especificación del comportamiento deseado, se busca implementar un control supervisor que cumpla las condiciones de comportamiento en lazo cerrado. Las

especificaciones de control pueden ser expresadas en términos de evitar ciertas condiciones del sistema, estados prohibidos, de tal forma que opere de manera segura [21]. En este sentido, el control supervisor está asociado a generar acciones de control para habilitar y deshabilitar eventos controlables, con el objetivo de tener un desempeño del sistema en lazo cerrado, tal que la trayectoria de los eventos esté siempre en un conjunto de cadenas de eventos deseados [22].

Una definición de control supervisor para un sistema de eventos discretos es propuesta en [21] donde se plantea que un controlador de alto nivel llamado “supervisor” habilita una entrada de control de acuerdo al estado actual del sistema. El sistema de supervisión observa el sistema y por cada estado admisible debe ser aplicada una entrada de control en ese punto de funcionamiento. Un evento es admisible para un sistema de eventos discretos supervisado, si y solo si es físicamente posible y autorizado por el control supervisor.

1.4.2. CONTROL SUPERVISOR PARA SISTEMAS HÍBRIDOS.

En el control supervisor enfocado a sistemas híbridos la planta es considerada como un sistema híbrido y el controlador como un sistema de eventos discretos (supervisor). En el control supervisor para sistemas híbridos un supervisor pretende llevar al sistema desde un estado híbrido inicial, hasta un estado híbrido final sin pasar por ciertos estados prohibidos de acuerdo a las especificaciones del proceso. Este enfoque de control supervisor juega un rol importante en la automatización de procesos en los cuales los modos de operación cambian discretamente dependiendo de la satisfacción de unas condiciones lógicas dadas [13].

Un ejemplo común de un control supervisor para un sistema híbrido se tiene cuando un computador es usado para supervisar el comportamiento de un proceso continuo. El proceso continuo pueden ser sistemas de control en lazo cerrado los cuales se representan matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias y donde los set-point de los controladores pueden ser considerados como entradas de la planta. El programa de computador puede ser visto como un control supervisor de los lazos cerrados seleccionando varias entradas de referencia según la región de operación de la planta y de las secuencias de pasos que el proceso establece. El supervisor monitorea el estado del proceso y reacciona a los cambios en los modos de operación, descritos como valores de verdad de eventos. La acción del supervisor también puede ser la manipulación de actuadores discretos o la conmutación a un nuevo régimen de operación [13].

Por brevedad, en adelante se entenderá “control híbrido” como el control supervisor para un sistema híbrido.

Estructura de un sistema de control híbrido.

La estructura de un sistema de control híbrido más común es la descrita en el ejemplo de la Sección 1.4.2. Propuesto inicialmente por Antsaklis [25], el supervisor es un controlador de eventos discretos descrito por un autómata de estados finitos, y una interfaz provee la comunicación entre la planta y el controlador SED, en una configuración de lazo cerrado tal como se muestra en la Figura 1.8 [24]. Una característica importante del enfoque es que no aborda explícitamente cuestiones de tiempo y considera únicamente relaciones lógicas para la evolución del sistema híbrido, es decir, solo las secuencias de los eventos.

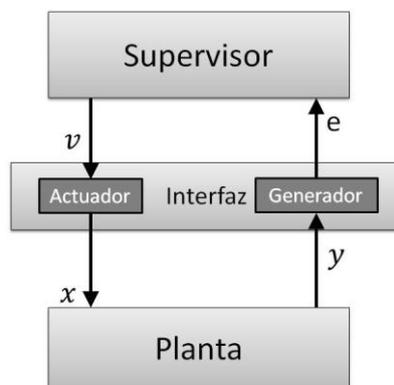


Figura 1.8. Estructura sistema de control híbrido.

En la Figura 1.8, la interfaz, que contiene el generador y el actuador, juega un papel clave en la determinación del comportamiento dinámico del sistema de control híbrido. El generador realiza una partición del espacio de estados de la variable continua, descrita por hipersuperficies h_i , que divide el espacio de estados en conjuntos disyuntos. Si la evolución del estado continuo pasa por alguna hipersuperficie da como resultado la generación de un evento e_i tal como se muestra en la Figura 1.9 [25].

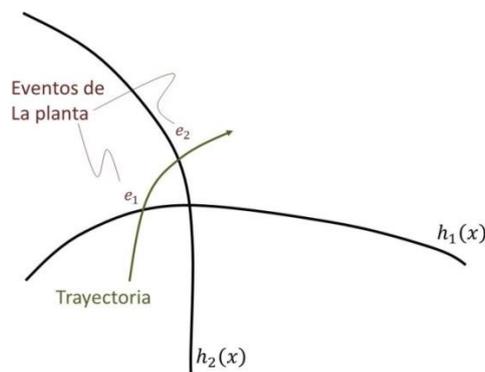


Figura 1.9. Generación de eventos y partición de espacio de estados.

La planta junto con la interfaz se comportan como un sistema de eventos discretos que acepta entradas simbólicas por medio del actuador y produce salidas simbólicas por medio del generador [25].

En la Figura 1.10 muestra la estructura del sistema de control híbrido en términos del modelo híbrido desarrollado en la Sección 1.3. El sistema híbrido genera un evento e si las dinámicas continuas $\dot{x} = f(z, x, v)$ del lugar actual lleva al estado continuo a una guarda. El control supervisor produce en respuesta una entrada de control discreta v la cual determina las dinámicas continuas de la siguiente fase. El objetivo del diseño o síntesis del control supervisor es no permitir comportamientos no deseados del sistema en lazo cerrado de acuerdo a las especificaciones de diseño, mostradas en la Figura 1.10 [21].

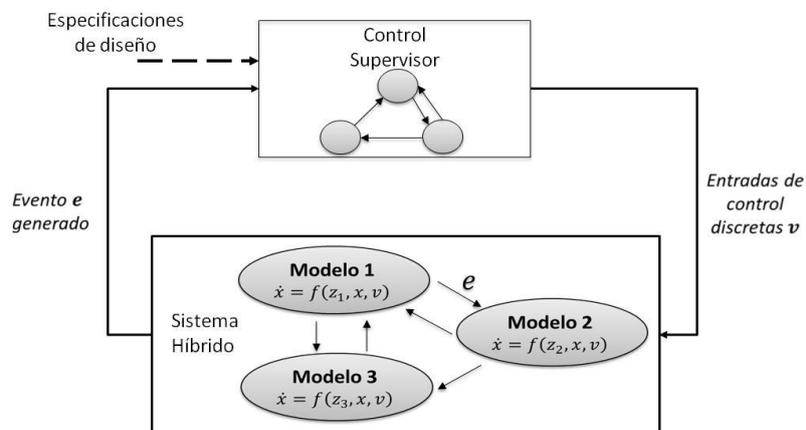


Figura 1.10. Estructura del sistema de control híbrido.

Las especificaciones del control pueden ser divididas en dos partes, una para la parte continua y otra para la parte discreta [33]. Las especificaciones de la parte continua son introducidas como invariantes y guardas en el espacio de los estados continuos, implicando que el vector de estado se limite a permanecer en unas regiones deseadas. La especificación de la parte discreta se hace mediante la introducción de un conjunto de lugares iniciales y lugares objetivo. También se introducen lugares prohibidos Z_f que limitan el comportamiento dinámico discreto. Los lugares prohibidos especifican transiciones que deben evitarse.

1.5. HERRAMIENTAS DE SIMULACIÓN.

Para finalizar este capítulo se muestran diferentes herramientas para la simulación de sistemas híbridos modelados con autómatas híbridos, de las cuales se escoge una que permita la simulación del modelo del sistema caso de estudio, con el fin de conocer y entender su comportamiento ante diferentes

condiciones o variaciones en la operación. Existen diferentes herramientas presentadas por algunos autores que se mencionan a continuación.

Cruz Jiménez propone utilizar el software Model Visium Studium en [16] y [12]. Desarrollado en 1997 en Moscow-Russia por el grupo Mvstudium, este software es un entorno gráfico integrado que permite el modelado de sistemas discretos, continuos e híbridos, soporta sistemas de ecuaciones diferenciales, algebraicas y diferenciales-algebraicas con derivadas de hasta segundo orden, tiene un modelado orientado objetos y permite realizar un diagrama de estados híbrido. Se puede descargar una versión de prueba que cuenta con varias limitaciones en la página <http://www.mvstudium.com/eng/index.html>.

Jiménez Ospina propone utilizar el software *Ptolemy II* en [9]. Es un programa desarrollado en 1996 por el Departamento de Ingeniería Eléctrica y Ciencias de la Computación de la Universidad de Carolina, en la ciudad de Berkeley (Estados Unidos). Permite simular sistemas de eventos discretos y sistemas continuos, además permite una combinación jerárquica de los modelos continuos con máquinas de estados para lograr la simulación de sistemas híbridos. También posee una herramienta especializada en el modelado de sistemas híbridos llamada *Hyvisual*. Este software se descarga gratuitamente desde <http://ptolemy.berkeley.edu/ptolemyII>.

Carloni Luca propone en [17] a *CHARON* como una herramienta de simulación sistemas híbridos. Charon es el acrónimo de control coordinado, diseño jerárquico, análisis y supervisión de sistemas híbridos. Es un lenguaje de alto nivel para el análisis y seguimiento en tiempo de ejecución de sistemas híbridos y diseño jerárquico desarrollado en la Universidad de Pennsylvania. Charon posee un conjunto de herramientas desarrolladas en java para la especificación, desarrollo, análisis y simulación de sistemas híbridos. Charon cuenta una interfaz gráfica de usuario, un lenguaje visual de entrada (similar a Stateflow de Matlab) y un simulador completo. El editor gráfico de entrada convierte el modelo especificado en el código fuente de Charon, con un intermedio en formato XML. El plotter se basa en un paquete de la herramienta de modelación Ptolemy. El conjunto de herramientas Charon es compatible con programas externos escritos en Java, el propio simulador es un programa ejecutable de Java. El conjunto de herramientas Charon versión 1.0 se distribuye gratuitamente y se puede descargar desde <http://www.cis.upenn.edu/mobies/charon>.

Modelica es un lenguaje orientado a objetos desarrollado por la asociación Modelica en 1996, cuyo objetivo es el modelado del comportamiento dinámico de sistemas técnicos por medio de ecuaciones diferenciales, ecuaciones algebraicas y ecuaciones discretas. Cuenta con un entorno gráfico de programación y una interfaz con el usuario amigable. Una de las características

más importantes de Modelica es el modelado de sistemas no causales. Dos ambientes de modelado y simulación comercial para modelica están actualmente disponibles: Dymola (Dynamic Modeling Laboratory) comercializado por Dynasim AB y MathModelica [17].

Stateflow es una herramienta de diseño interactiva que se utiliza para el modelado y simulación de sistemas desarrollo de sistemas complejos de control y problemas de lógica supervisora, diseñado para el trabajo bajo Microsoft Windows y desarrollado por MathWorks. Stateflow hace uso de un editor gráfico que está estrechamente integrado con Simulink y MATLAB. Simulink soporta el desarrollo de sistemas en tiempo discreto y en tiempo continuo en un entorno gráfico de diagramas de bloque, aprovechando las herramientas de programación de alto nivel, análisis de datos, y visualización que MATLAB ofrece.

1.5.1. Matlab: Simulink/Stateflow

Simulink y *Stateflow* son herramientas de diseño interactivas que se utilizan para el modelado y simulación de sistemas complejos de control y problemas de lógica supervisora, desarrolladas por MathWorks. Un sistema en Simulink es representado como una colección de bloques que calculan el valor de sus salidas como una función de sus entradas y estados. Los bloques se comunican a través de conectores que unen salidas con entradas. Un subsistema puede ser definido como la interconexión de bloques primitivos o de otros subsistemas, y especificando sus puertos de entrada y de salida. Una vez definidos, los subsistemas pueden ser usados para crear otros subsistemas de manera jerárquica.

Stateflow brinda de manera simultánea el modelado y la simulación de sistemas complejos usando conceptos de máquinas de estados finitos. Un modelo de Stateflow puede ser incluido en un modelo de Simulink como un subsistema. Un modelo de Stateflow es un conjunto de estados conectados por arcos. Un estado es representado por un rectángulo. Un modelo en Stateflow puede tener puertos de de entrada y salida de datos, así como puertos de entrada y salida de eventos. Los datos y los eventos pueden ser definidos como locales al modelo de Stateflow o externos, por ejemplo viniendo del modelo que lo contiene en Simulink en cuyo caso, los datos y los eventos son comunicados a través de puertos [17].

Utilizando en conjunto las herramientas de Matlab, Simulink y Stateflow es posible simular sistemas dinámicos híbridos [17]. Estas son algunas de sus ventajas:

1. Simulink permite la simulación de sistemas dinámicos continuos, así como la integración de estos con el entorno de Stateflow. Además Simulink se relaciona muy bien con el entorno de Matlab que permite el uso de las funciones de visualización de gran alcance para trazar gráficos y para el análisis de resultados de simulación.
2. Stateflow permite definir con facilidad lugares, guardas y transiciones, convirtiéndolo en una herramienta adecuada para la validación de la teoría.

Por estas razones se han seleccionado estas herramientas para realizar la simulación de los casos de estudio propuestos en el trabajo.

2. UNA METODOLOGÍA DE DISEÑO DE CONTROL SUPERVISOR BAJO UN PARADIGMA HÍBRIDO

En la literatura se pueden encontrar diferentes metodologías para el diseño del control supervisor híbrido, entre otras: (Lygeros, 2008), (Platzer, 2010), (Stursberg, 2006), (Garcia 1995), (Miyagi, *et al.*, 2001). Estas metodologías difieren unas de otras en su complejidad y en el enfoque con el cual se modela la planta. Por ejemplo (Platzer, 2010) muestra una metodología basada en programas híbridos y (Miyagi, *et al.*, 2001) presenta una metodología de control supervisor híbrido basada en el modelo de las redes de Petri híbridas. Común a todas es la relativa complejidad teórica. La propuesta de una metodología nueva supone unos fundamentos teóricos fuertes y cierto grado de experiencia.

El presente trabajo de grado adopta la metodología planteada por Olaf Stursberg en el artículo: “*Supervisory control of hybrid systems based on model abstraction and guided search*” [13], el cual se presenta en el anexo A. En esta aproximación la planta se modela como un autómata híbrido y el controlador se diseña como un autómata de estados finitos. La estructura del sistema de control híbrido es la mostrada en la Figura 1.10. La metodología está compuesta por los pasos mostrados en la Figura 2.1.

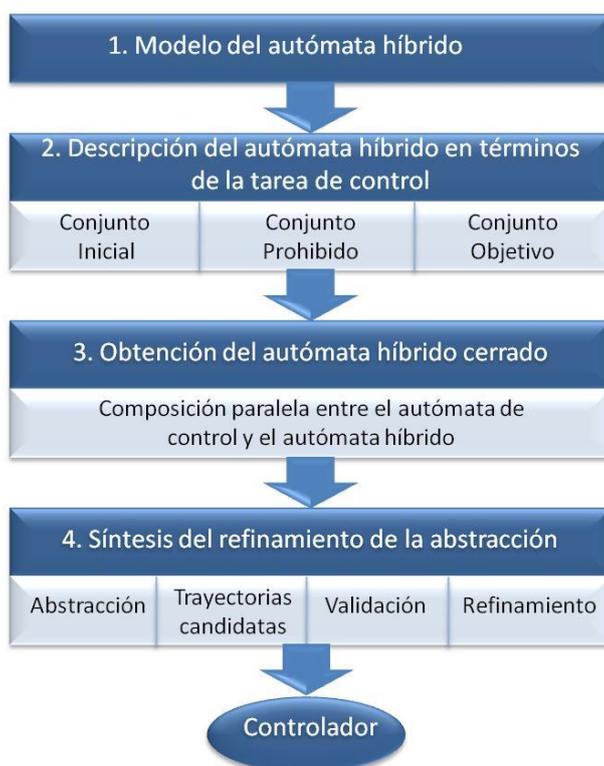


Figura 2.1. Metodología para el diseño del control supervisor.

La metodología consta de cuatro pasos. Luego de definir el problema de control, en el primer paso se realiza el modelado de la planta de forma híbrida,

por medio del modelo del autómata híbrido. En el segundo paso se describe el modelo híbrido de la planta en términos de la tarea de control; donde se definen los subconjuntos inicial, prohibido y objetivo de estados del autómata híbrido. En el tercer paso primero se define el autómata de control, un autómata de estados finitos, y a continuación se realiza la composición paralela de este, con el autómata híbrido que representa la planta. En términos de la teoría de control, esta composición paralela es equivalente a “cerrar el lazo de control”. El cuarto y último paso de la metodología se centra en la síntesis del controlador.

Un paso importante para la síntesis del controlador es la determinación de los estados alcanzables. Este paso determina los estados híbridos que son alcanzables bajo el efecto de una acción de control impuesta por el control supervisor. La determinación de la alcanzabilidad para modelos híbridos de la planta, con dinámica continua, es complicada. En general, el cálculo de los conjuntos alcanzables es sólo aproximadamente posible, pero no exactamente [13]. La aproximación propuesta por Stursberg parte inicialmente de la definición de un modelo abstracto. Luego se estudia la viabilidad de una estrategia de control, representada en el modelo abstracto como una trayectoria candidata, aplicando de manera iterativa procesos de validación y refinamiento. El esquema de validación comprende tres técnicas diferentes, que validan la trayectoria candidata con un perfeccionamiento cada vez mayor. El modelo abstracto es refinado de acuerdo al resultado de la validación.

La metodología propuesta por Stursberg se explica con cierta claridad en el documento mencionado. Sin embargo, por la naturaleza misma del documento en algunas secciones es muy denso, y a veces, complicado de entender. El objetivo de este capítulo es describir con algún detalle cada paso de la metodología, mostrando y exponiendo de manera sencilla su desarrollo. Se espera que la información incluida sirva al lector como introducción al control supervisor de sistemas híbridos y de apoyo para sugerir nuevos temas de investigación. Para una mayor comprensión, de forma paralela se aplican los conceptos teóricos a un caso de estudio. Por esta razón, en la sección 2.1 se plantea el problema de control, que consiste en la etapa de arranque de un proceso ficticio sobre la Planta de Nivel del Laboratorio de Procesos.

Siguiendo entonces los pasos de la metodología, en la sección 2.2 se modela la planta caso de estudio por medio de un autómata híbrido, según el modelo definido en el capítulo anterior. En las secciones siguientes se continúa con el procedimiento que conduce finalmente al controlador que cumple con las especificaciones del proceso.

2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En primer lugar, es fundamental determinar cuál es la tarea de control que tiene que realizar el control supervisor que se quiere diseñar. Con este propósito se ideó un proceso batch ficticio. Para este proceso ficticio, la tarea del controlador es ejecutar la etapa de arranque, o *start-up*, desde unas condiciones iniciales predeterminadas hasta el estado de “funcionamiento normal” de la planta. En la siguiente sección se describe la planta caso de estudio y a continuación se detallan las fases por que debe pasar el proceso durante la etapa de arranque.

2.1.1. Descripción de la planta caso de estudio

La planta tomada como caso de estudio es la planta de nivel del laboratorio de control de procesos de la Universidad del Cauca.

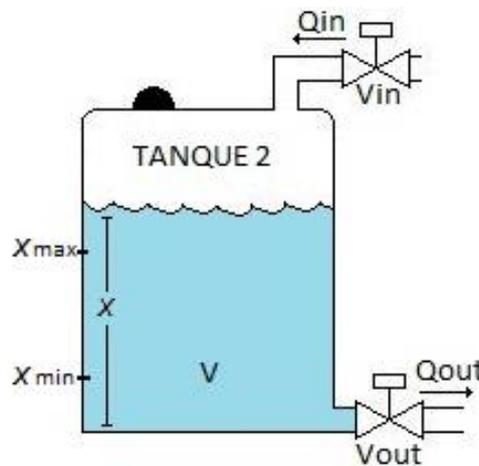


Figura 2.2. Sistema de un solo tanque.

Como se ve en la Figura 2.2, la planta está constituida por un tanque con 2 actuadores; una electroválvula V_{in} regula el caudal de entrada y la otra electroválvula V_{out} regula el caudal de salida del tanque, las cuales pueden ser tomadas como las entradas discretas de la planta. La regulación del nivel del líquido se realiza mediante el paso o corte total de los caudales de entrada Q_{in} y salida Q_{out} . El caudal de entrada es mayor al caudal de salida. La medida del nivel en el tanque x se toma por medio de un sensor de presión diferencial.

2.1.2. Descripción del proceso

La tarea del supervisor es ejecutar la etapa de arranque, o *start-up*, del proceso ficticio, desde unas condiciones iniciales predeterminadas hasta el estado de “funcionamiento normal” de la planta. Se asume que todos aquellos pasos que fueron necesarios para llegar al estado inicial, fueron ejecutados previamente. A continuación se describe el *récipe* del arranque del sistema.

Condiciones iniciales: El proceso se inicia con el nivel del tanque en 2 cm, la válvula de entrada encendida y la válvula de salida apagada.

Etapa de inicialización: Por razones del proceso, el nivel del tanque debe partir de la condición inicial, 2 cm, llevarse hasta el nivel máximo de 25 cm, volver a un nivel de 15 cm y de aquí pasar al estado de funcionamiento normal de la planta, en un rango entre 15 cm y 25 cm.

Funcionamiento normal: Alcanzado el nivel normal se inicia un control on/off con histéresis, en un rango entre 15 cm y 25 cm, donde se desea que el nivel del tanque permanezca el mayor tiempo posible. Si el nivel se encuentra por encima de 25 cm se tiene que el sistema está trabajando en la región de operación de *tanque lleno*, y si el valor del nivel está por debajo de 15 cm la planta se encuentra operando en la región de *tanque vacío*.

Regiones prohibidas: El nivel del tanque nunca debe ser menor que 2 cm ni mayor que 29 cm.

Parada del sistema: En la condición de funcionamiento, un operario u otro proceso debe detener el sistema.

Gráficamente las regiones de operación de la planta se pueden visualizar como se muestra en la Figura 2.3.

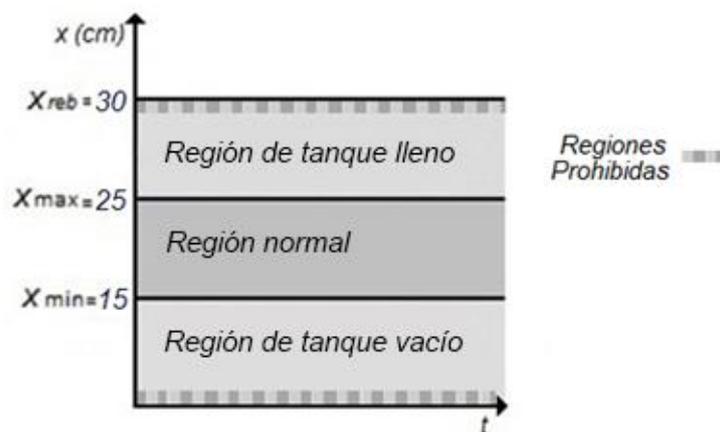


Figura 2.3. Regiones de operación de la planta.

2.2. MODELO DE LA PLANTA MEDIANTE UN AUTÓMATA HÍBRIDO

El autómata híbrido que modela la planta está definido por la tupla:

$$AH = (X, Z, V, \gamma, inv, \Theta, g, r, f)$$

Los términos de la definición ya fueron detallados y explicados en el Capítulo 1. Para ilustrar de nuevo la construcción del modelo, a continuación se describe cada uno de los términos del autómatas híbrido para la planta caso de estudio.

Los estados continuos

El proceso cuenta con un solo estado continuo definido por x , que representa el nivel de agua en el tanque.

$$X = \{x\}, x \in R$$

Los lugares

El número de lugares que se definen para el sistema son 3.

$$\begin{aligned} z_1 &= \text{Tanque vacío.} \\ z_2 &= \text{Tanque normal.} \\ z_3 &= \text{Tanque lleno.} \end{aligned}$$

El conjunto de los lugares es $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$. Conviene aclarar que un “lugar” define una región de funcionamiento de la planta y no necesariamente un lugar en el espacio físico. Para este caso de la planta en particular los dos conceptos son equivalentes.

Las entradas discretas

Las entradas discretas del autómatas híbrido representan las dos electroválvulas. La entrada es entonces un vector de dimensión 2, donde el primer elemento representa el estado de la electroválvula de entrada V_{in} , y el segundo elemento el estado de la electroválvula de salida V_{out} . El número máximo de entradas discretas es entonces 4, que son:

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Ambas válvulas cerradas} \\ v_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Válvula de entrada cerrada y válvula de salida abierta} \\ v_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Válvula de entrada abierta y válvula de salida cerrada} \\ v_4 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Ambas válvulas abiertas} \end{aligned}$$

Disponibilidad de las entradas discretas

La función γ determina la disponibilidad de las entradas, es decir el subconjunto de vectores en el conjunto V –de entradas discretas– que está

disponible en cada lugar. La única restricción que se impone sobre el proceso es que no se permite que durante la operación las dos electroválvulas estén cerradas simultáneamente, en otras palabras, en ningún caso la entrada discreta v_1 está disponible. El subconjunto de vectores de entradas discretas disponible para cada lugar se define de la siguiente manera:

V_1 se asigna a z_1 .

$$V_1 = [v_2, v_3, v_4]$$

V_2 se asigna a z_2 .

$$V_2 = [v_2, v_3, v_4]$$

V_3 se asigna a z_3 .

$$V_3 = [v_2, v_3, v_4]$$

El conjunto de las entradas discretas V del autómata es $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, es decir:

$$V = \{v_2, v_3, v_4\}$$

Los poliedros invariantes

Un invariante se define como aquella región, donde, de permanecer el estado continuo el sistema no cambia de lugar. Para la planta, los invariantes de los estados continuos para cada lugar se definen a partir de la definición de los lugares, como se muestra en la Figura 2.3. Dado que la variable continua es escalar, los poliedros invariantes se convierten en simples intervalos como se muestra a continuación. Con el propósito de usar la misma nomenclatura definida en el Capítulo 1, la expresión de los invariantes se hace en términos de las matrices C_i y los vectores d_i , con $i = 1,2,3$.

Para el lugar z_1 , región de *tanque vacío*, se tiene:

$$0 < x < x_{min}$$

$$\begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ x_{min} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x < \begin{bmatrix} 0 \\ x_{min} \end{bmatrix}$$

El invariante para z_1 se define como:

$$C_1 \cdot x < d_1$$

Donde:

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{min} \end{bmatrix}$$

Para el lugar z_2 , región de *tanque normal*, el invariante se define de la siguiente manera:

$$x_{min} < x < x_{max}$$

$$\begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} x_{min} \\ x_{max} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x < \begin{bmatrix} x_{min} \\ x_{max} \end{bmatrix}$$

El invariante para z_2 se define como:

$$C_2 \cdot x < d_2$$

Donde:

$$C_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d_2 = \begin{bmatrix} x_{min} \\ x_{max} \end{bmatrix}$$

Para el lugar z_3 , región de *tanque lleno*, el invariante se define de la siguiente manera:

$$x_{max} < x < x_{reb}$$

$$\begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} x_{max} \\ x_{reb} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x < \begin{bmatrix} x_{max} \\ x_{reb} \end{bmatrix}$$

El invariante para z_3 se define como:

$$C_3 \cdot x < d_3$$

Donde:

$$C_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d_3 = \begin{bmatrix} x_{max} \\ x_{reb} \end{bmatrix}$$

Las transiciones, guardas y la función de reset

Por razones físicas, en el tanque solo se tienen 4 transiciones que definen el cambio entre los lugares de la siguiente manera:

- (z_1, z_2) : vacío a normal
- (z_2, z_1) : normal a vacío
- (z_2, z_3) : normal a lleno
- (z_3, z_2) : lleno a normal

El conjunto de las transiciones es:

$$\Theta = \{(z_1, z_2), (z_2, z_1), (z_2, z_3), (z_3, z_2)\}$$

Las restricciones que permiten la evolución de un lugar a otro vienen dadas por las guardas, las cuales se asignan para cada transición como se muestra a continuación:

$$g(\Theta) = \begin{cases} X \in R : x = x_{min}, & \text{Si } \Theta = (z_1, z_2) \\ X \in R : x = x_{min}, & \text{Si } \Theta = (z_2, z_1) \\ X \in R : x = x_{max}, & \text{Si } \Theta = (z_2, z_3) \\ X \in R : x = x_{max}, & \text{Si } \Theta = (z_3, z_2) \end{cases}$$

La definición de los invariantes y las guardas es clara. Por ejemplo, estando en lugar *tanque vacío*, cuando se alcance el nivel dado por la guarda $x = x_{min}$, se cambia al lugar *tanque normal*.

La transición entre los lugares se realiza sin saltos en la variable continua, el valor del nivel del líquido. Por lo tanto, la función de reset es la misma para todos los lugares y es la función identidad:

$$x' := x \quad \forall z$$

La función de flujo

Para el modelado de la función de flujo, se considera que el tanque tiene un volumen V , un área transversal A y altura de la columna de líquido x . El líquido entra por la parte superior y sale por la parte inferior del tanque. Los flujos de entrada y de salida son Q_{in} y Q_{out} respectivamente, donde $Q_{in} > Q_{out}$, y son controlados por las electroválvulas. La densidad ρ del fluido es constante. Aplicando balance de masa y balance de energía la dinámica del sistema de nivel es representada por una ecuación diferencial en x expresada de forma matemática como:

$$\rho \dot{V} = \rho Q_{in} - \rho Q_{out}$$

$$A \dot{x} = Q_{in} - Q_{out}$$

$$\dot{x} = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{A} \quad (1)$$

Dado que $Q_{out} = A * V$, donde $A = S$ es el área de la sección transversal de la tubería de salida y $V = \sqrt{2 * g * x}$ es la velocidad del líquido, entonces el flujo de salida es:

$$Q_{out} = S * \sqrt{2 * g * x} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$\dot{x} = \frac{Q_{in} - S * \sqrt{2 * g * x}}{A}$$

Las entradas discretas afectan la dinámica del líquido en el tanque. Por lo tanto, se reescribe el modelo continuo como:

$$\dot{x} = \frac{Q_{in}}{A} v(1) - \frac{S * \sqrt{2 * g * x}}{A} v(2)$$

$$\dot{x} = K_1 v(1) - K_2 \sqrt{x} v(2)$$

Donde $v(1)$ representa el estado de la válvula de entrada, y $v(2)$ representa el estado de la válvula de salida. La función de flujo depende de los estados de las entradas discretas como se muestra a continuación:

$$\dot{x} = -K_2 \sqrt{x}, \quad \text{si } v = v_2$$

$$\dot{x} = K_1, \quad \text{si } v = v_3$$

$$\dot{x} = K_1 - K_2 \sqrt{x}, \quad \text{si } v = v_4$$

En general, la función de flujo que describe el comportamiento del estado continuo puede ser escrita como:

$$f(z, x, v) \rightarrow \dot{x} = K_1 v(1) - K_2 \sqrt{x} v(2), \quad \forall z$$

El modelo híbrido de la planta

Ya definido cada término del autómata híbrido, en la Figura 2.4 se muestra un esquema del modelo híbrido de la planta.

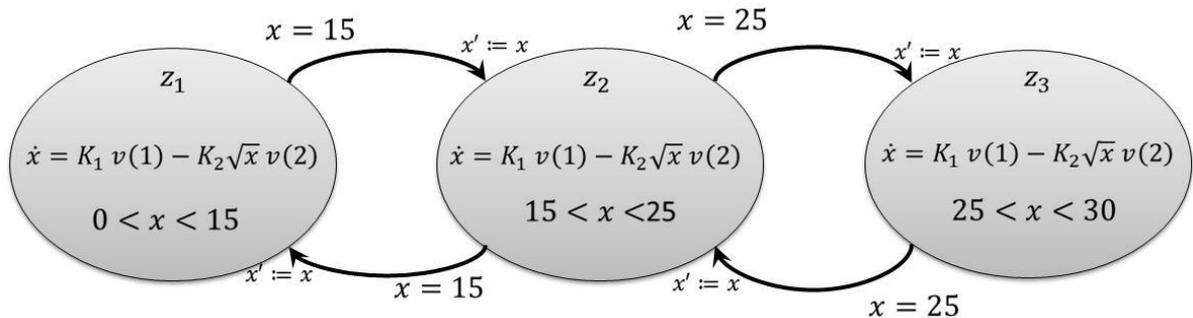


Figura 2.4. Representación gráfica del autómata híbrido que modela el sistema de nivel.

2.3. DESCRIPCIÓN DEL AUTÓMATA HÍBRIDO EN TÉRMINOS DE LA TAREA DE CONTROL

La tarea del supervisor es ejecutar la etapa de arranque, o *start-up*, del proceso ficticio. Por razones del proceso, el supervisor debe llevar a la planta al estado de funcionamiento normal siguiendo la siguiente secuencia:

1. Desde la condición inicial, nivel del tanque en 2 cm, llevar el nivel hasta el nivel máximo, que es de 25 cm.
2. Desde el nivel máximo volver al nivel de 15 cm.
3. Finalmente, desde los 15 cm llevar el nivel a la región de funcionamiento normal.

Para resolver el problema de la evolución que se desea que tenga la planta, se plantean entonces tres etapas.

Etapas 1: Llevar a la planta desde las condiciones iniciales hasta el nivel máximo.

Etapas 2: Llevar a la planta desde el nivel máximo hasta el estado de funcionamiento vacío.

Etapas 3: Llevar a la planta desde el estado de funcionamiento vacío hasta el estado de funcionamiento normal.

2.3.1. Definición de subconjuntos de estados híbridos

Para la síntesis del supervisor es conveniente describir el autómata híbrido en términos de la tarea de control. Con este propósito, los estados híbridos del autómata híbrido se dividen en tres subconjuntos: un subconjunto de estados iniciales, un subconjunto de estados prohibidos y un subconjunto de estados objetivo. Para el caso de estudio el problema de control se ha dividido en tres etapas. En las siguientes secciones se describe la síntesis del controlador para la primera etapa. El procedimiento para las etapas 2 y 3 es similar y se describe de manera sucinta al final de capítulo.

Los estados iniciales

Los estados iniciales son aquellos estados híbridos en los que se desea que el sistema inicie según las condiciones del proceso a realizar en la planta. Los estados híbridos iniciales (z_0, x_0) definen el conjunto inicial Σ_0 . Es decir:

$$\Sigma_0 = \{(z_0, x_0) \mid z_0 \in Z, x_0 \in X_0, X_0 \subset \text{inv}(z_0)\}$$

Donde X_0 es un poliedro acotado subconjunto del invariante del lugar inicial y es disyunto de todas sus guardas $g((z_0, z_i)) \forall i$, donde z_i representa un lugar consecutivo del lugar inicial.

Para la etapa 1, según las especificaciones del proceso el caso de estudio, se asume que el tanque inicialmente tiene un nivel de 2 cm, entonces el conjunto de estados iniciales contiene un solo elemento

$$\begin{aligned} \text{Lugar inicial} &= z_0 = \text{tanque vacío} \\ \text{Estado continuo inicial} &= x_0 = 2 \text{ cms} \end{aligned}$$

El conjunto de estados iniciales es definido como:

$$\Sigma_0 = \{(z_0, x_0)\} = \{(z_1, x) \mid x = 2\}$$

Los estados prohibidos

Los estados prohibidos son estados híbridos no deseados en el comportamiento de la planta. Los estados híbridos prohibidos definen el conjunto Σ_F :

$$\Sigma_F = \{\Sigma_{F,1}, \dots, \Sigma_{F,j}, \dots, \Sigma_{F,nF}\}$$

donde, $\Sigma_{F,j} = \{(z, x) \mid z \in Z, x \in X_{F,j}, X_{F,j} \subset \text{inv}(z_{F,j})\}$

$X_{F,j}$ es la región prohibida j , y es un poliedro acotado subconjunto del invariante del lugar $z_{F,j}$. Además, se satisface que:

- Ningún estado inicial es un estado prohibido, $\Sigma_{F,j} \cap \Sigma_0 = \emptyset$
- No es posible una transición desde un estado híbrido prohibido, es decir $X_{F,j} \cap g((z_j, z_i)) = \emptyset$, donde z_i representa un lugar consecutivo del lugar prohibido z_j .

Los estados híbridos prohibidos para el caso de estudio son dos: cuando el tanque esta en el lugar vacío y el estado continuo es menor que 2 cm, y cuando el tanque se encuentra en el lugar lleno y el estado continuo es mayor que 29 cm. El conjunto de estados prohibidos es:

$$\Sigma_F = \{\Sigma_{F,1}, \Sigma_{F,2}\},$$

donde $\Sigma_{F,1} = \{(z_1, x) | 0 < x < 2\}$ y $\Sigma_{F,2} = \{(z_3, x) | x \geq 29\}$

Los estados objetivo

Los estados objetivo son los estados híbridos a los que se desea que llegue la planta. Los estados híbridos objetivo (z_G, x) definen el conjunto objetivo Σ_G . Es decir:

$$\Sigma_G = \{(z_G, x) | z_G \in Z, x \in inv(z_G)\}$$

Además se satisface que:

- Ningún estado objetivo es un estado prohibido, $\Sigma_G \cap \Sigma_{F,j} = \emptyset \forall \Sigma_{F,j} \in \Sigma_F$, j es el subíndice que representa algún elemento del conjunto de estados prohibidos.

El objetivo de la secuencia de control para la etapa 1, según el proceso definido en la sección 2.1.2, es llevar el tanque a la región *tanque lleno*. Por lo tanto el conjunto de estados híbridos objetivo de la planta contiene un solo elemento:

$$\Sigma_G = \{(z_3, x) | x < 29\}$$

2.3.2. La tarea del control supervisor

Dados los conjuntos de estados híbridos iniciales, prohibidos y objetivo, la tarea del control supervisor es encontrar una estrategia de control $\phi_v = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_f)$ para el autómata híbrido, que genere un recorrido factible $\phi_\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_f)$ de longitud finita, iniciando desde cualquier estado híbrido inicial $\sigma_0 \in \Sigma_0$, hacia un estado híbrido final $\sigma_g \in \Sigma_G$, evitando durante toda la evolución cualquier estado híbrido prohibido contenido en Σ_F .

Considérese, por ejemplo, el autómata híbrido con dos estados continuos (x_1, x_2) y tres lugares (z_1, z_2, z_3) que se muestra en la Figura 2.5. Una estrategia de control exitosa traslada el comportamiento de la planta desde el conjunto híbrido inicial Σ_0 hacia el conjunto híbrido objetivo Σ_G sin pasar por el conjunto prohibido. La estrategia de control ϕ_v fija la secuencia de los lugares que se denotan por ϕ_z , y equivalen a $\phi_z = (z_1, z_3, z_2)$.

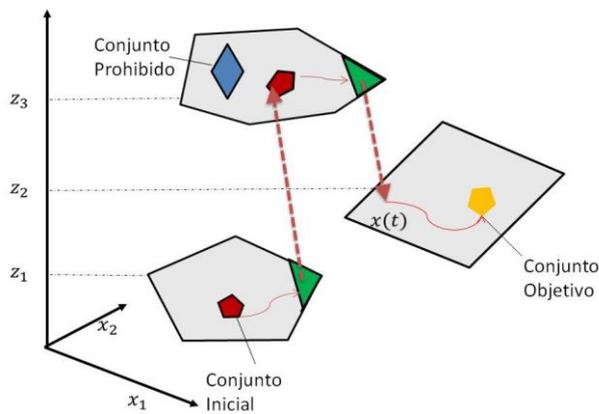


Figura 2.5. Una estrategia de control exitosa.

Para el caso de estudio de la planta de nivel, en la Figura 2.6 se muestra un esquema del autómata híbrido correspondiente. En la figura se pueden observar el estado continuo en el eje x , los lugares, los invariantes, y las guardas definidas previamente, así como los conjuntos inicial, prohibido y objetivo.

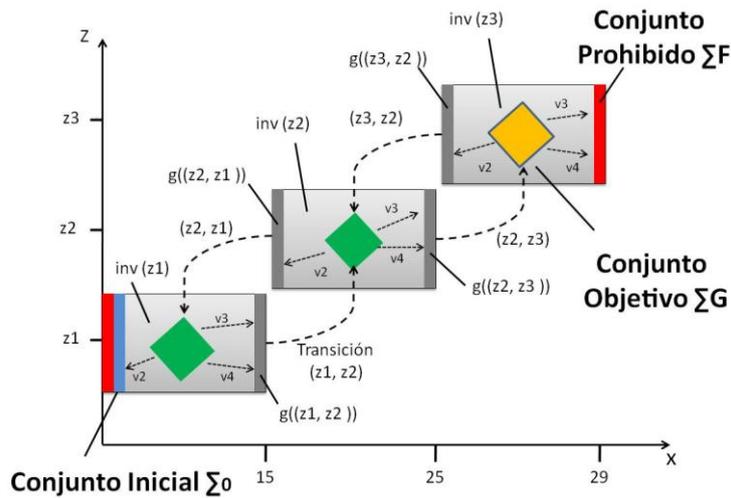


Figura 2.6. Sistema de un solo tanque teniendo en cuenta la tarea de control.

Como se puede observar, por ejemplo, cada vez que el estado continuo se encuentre en la región de operación normal (lugar z_2), puede ocurrir una evolución hacia el lugar vacío o hacia el lugar lleno, de acuerdo a la entrada discreta que esté presente. La tarea del controlador es llevar la planta desde el estado inicial al estado objetivo sin pasar por un estado prohibido.

2.4. OBTENCIÓN DEL AUTÓMATA HÍBRIDO CERRADO

El segundo paso de la metodología para la síntesis del supervisor consiste en la obtención del autómata híbrido cerrado. El autómata híbrido cerrado representa todas las posibles combinaciones de los estados híbridos y las entradas de control, y es, como se explicará más adelante, el producto de la composición paralela entre el autómata híbrido que modela la planta y el autómata de control, o supervisor, definido como un autómata de estados finitos.

2.4.1. El autómata de control

El autómata de control C se define como un autómata de estados finitos según la tupla:

$$C = (S, S_0, E, \Lambda, \omega)$$

donde S es el conjunto de los estados discretos, S_0 el conjunto de los estados iniciales, E es el conjunto de los eventos, Λ es el conjunto de las transiciones, y ω la función de etiquetado de las transiciones. En las siguientes secciones se presenta la definición formal de cada término del autómata de control.

Estados del autómata de control

Para definir los estados discretos del autómata de control es preciso reconocer que cada vez que ocurra un evento en la planta, el autómata de control debe enviar hacia la planta híbrida una entrada discreta V . Por lo tanto, es factible definir los estados del autómata de control como las entradas discretas V . Definidos así, la “salida” del autómata de control son los estados mismos. Por lo tanto $S = V$.

El conjunto de los estados iniciales del autómata de control es $S_0 = V_{z_0}$. Donde V_{z_0} es un subconjunto de las entradas discretas disponibles en el lugar inicial. El conjunto V_{z_0} depende de las condiciones iniciales del proceso.

Para el caso de estudio los estados del autómata de control son todos y cada uno de los vectores del conjunto de vectores de las entradas factibles, definidas para el autómata híbrido que modela la planta. Por lo tanto el conjunto S de estados discretos del autómata de control corresponde a las entradas discretas v ya definidas para el modelo híbrido de la planta:

$$S = \{v_2, v_3, v_4\}$$

Nótese que la entrada discreta v_1 no se toma en cuenta ya que no está disponible para ningún lugar del autómata híbrido. Por otro lado, por las especificaciones de la tarea de control, inicialmente la válvula de entrada está encendida y la válvula de salida apagada. Por lo tanto, el estado inicial del autómata de control es:

$$S_0 = \{v_3\}$$

Eventos, transiciones y función de etiquetado del autómata de control

Para definir los eventos que disparan las transiciones en el autómata de control la consideración fundamental es que, evidentemente, los eventos deben ser generados en la planta. Por las características mismas de la tarea de control, el propósito del autómata de control es el llevar a la planta a lo largo de una secuencia de modos de operación determinada por las especificaciones. Por lo tanto el recurso obvio, es generar un evento al ocurrir una transición en los lugares del modelo híbrido de la planta. En otras palabras, todo evento $e \in E$ del autómata de control, donde $E = \{e_1, \dots, e_{|\Theta|}\}$, debe representar una transición $(z_i, z_j) \in \Theta$ en el conjunto de transiciones del autómata híbrido.

Para el caso de estudio, según el autómata híbrido del modelo de la planta, se tienen entonces 4 eventos en el conjunto de eventos E :

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

- e_1 representa la transición (z_1, z_2) o el cambio de vacío a normal, es decir que el nivel alcanzo el valor x_{min} de manera ascendente.
- e_2 representa la transición (z_2, z_3) o el cambio de normal a lleno, es decir que el nivel alcanzo el valor x_{max} de manera ascendente.
- e_3 representa la transición (z_3, z_2) o el cambio de lleno a normal, es decir que el nivel alcanzo el valor x_{max} de manera descendente.
- e_4 representa la transición (z_2, z_1) o el cambio de normal a vacío, es decir que el nivel alcanzo el valor x_{min} de manera descendente.

El conjunto finito de las transiciones $\Lambda \subset S \times E \times S$ del controlador esta definido como:

$$\Lambda = \{\lambda | \lambda = (v, *, v'), v \in V_{z_i}, v' \in V_{z_j}\}$$

donde el símbolo “*” representa el conjunto de todos los eventos que hacen posible la transición. El número máximo de transiciones es $|S|^2$. La transición $\lambda = (v, *, v')$ existe en Λ si y solo si $e \in E$, del conjunto de todos los eventos que hacen posible la transición representa una transición $(z_i, z_j) \in \Theta$ del autómata híbrido de la planta.

Para el caso de estudio las especificaciones del problema de control permiten cualquier combinación de los estados de las electroválvulas, exceptuando el caso de ambas cerradas. Por consiguiente las transiciones del autómata son todas combinaciones posibles (v, v') . El conjunto de transiciones Λ es:

$$\Lambda = \{(v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_2), (v_3, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_2), (v_4, v_3), (v_4, v_4)\}$$

La función de etiquetado $\omega: \Lambda \rightarrow \Omega(E)$ etiqueta la transición $\lambda \in \Lambda$ con la expresión disyuntiva de los eventos que pueden generar la transición, es decir,

$$\bigvee_{l=1}^{|E_\lambda|} e_l$$

donde $|E_\lambda|$ es el conjunto de todos los eventos que hacen posible que la transición tenga lugar.

A modo de ilustración considérese un estado del autómata de control para el caso de estudio, por ejemplo v_2 . Como se recordará v_2 corresponde a la situación de válvula de entrada cerrada y válvula de salida abierta, es decir:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considérese la transición (v_2, v_2) . ¿Qué eventos en la planta pueden generar esta transición? Ya que la válvula de entrada está cerrada no hay flujo de entrada. Esta situación solo puede presentarse en los siguientes casos:

- Un cambio de lleno a normal. Es decir, la ocurrencia de la transición (z_3, z_2) . Es decir el evento e_3 .
- Un cambio de normal a vacío. Es decir, la ocurrencia de la transición (z_2, z_1) . Es decir el evento e_4 .

La función de etiquetado etiqueta la transición (v_2, v_2) con la expresión:

$$(v_2, v_2) \rightarrow e_3 \vee e_4$$

Nótese que la función de etiquetado muestra de manera clara todos los eventos que hacen posible la transición.

De manera similar se asignan los eventos que generan las otras transiciones en el autómata de control. Para la planta caso de estudio la asignación de los eventos que producen las transiciones debe tener en cuenta las restricciones impuestas:

- Es posible conmutar las dos electroválvulas en todas las regiones.
- El flujo de entrada es mayor que el flujo de salida.

En esta situación, en algunos estados del controlador no pueden presentarse ciertos eventos. Por ejemplo, el tanque no puede llenarse si la válvula de entrada está apagada y la válvula de salida encendida, por lo tanto nunca ocurre la transición de vacío a normal, como se presentó para el caso de la transición (v_2, v_2) explicada anteriormente. El subconjunto e de eventos que resultan para las transiciones del autómata de control se muestra a continuación.

$$(v_2, v_2) \rightarrow e_3 \vee e_4$$

$$(v_2, v_3) \rightarrow e_3 \vee e_4$$

$$(v_2, v_4) \rightarrow e_3 \vee e_4$$

$$(v_3, v_2) \rightarrow e_1 \vee e_2$$

$$(v_3, v_3) \rightarrow e_1 \vee e_2$$

$$(v_3, v_4) \rightarrow e_1 \vee e_2$$

$$(v_4, v_2) \rightarrow e_1 \vee e_2$$

$$(v_4, v_3) \rightarrow e_1 \vee e_2$$

$$(v_4, v_4) \rightarrow e_1 \vee e_2$$

Ya definidos todos los términos, un esquema del autómata de control se muestra en la Figura 2.6. Como se muestra en la figura, cada estado discreto representa una entrada discreta v_i de la planta caso de estudio, las transiciones son aquellas permitidas teniendo en cuenta las restricciones del problema y cada transición esta etiquetada con los eventos que pueden activar la transición según la función de etiquetado.

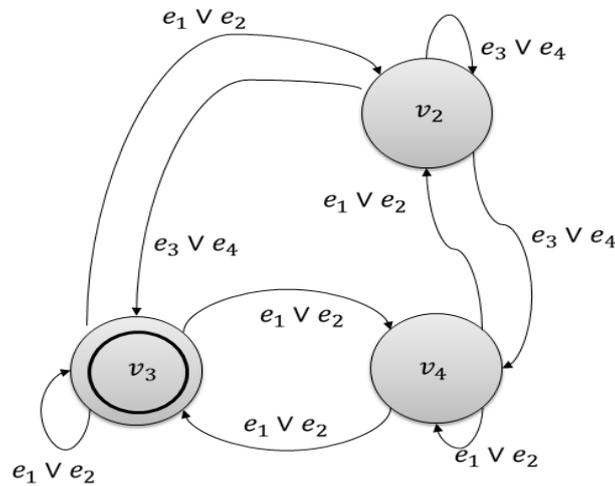


Figura 2.7. Autómata de control.

2.4.2. Composición paralela entre el autómata de control y el autómata híbrido

La composición paralela es una operación que permite que un evento de un autómata se identifique con los eventos del mismo nombre de otro autómata y cada vez que uno se ejecuta, también se ejecutan todos los que tienen el mismo nombre. Para sincronizar las transiciones del autómata híbrido con los eventos del supervisor previamente desarrollado es necesario, en primer lugar, interpretar el autómata híbrido como un autómata de estados finitos, donde los estados discretos son los lugares del autómata híbrido. En segundo lugar, etiquetar cada transición $(z_i, z_j) \in \Theta$ con el evento $e \in E$ que se genera durante la transición que, como ya se mencionó, son los mismos eventos definidos para el autómata de control. Finalmente, la composición paralela se puede realizar mediante algún software apropiado, por ejemplo DESUMA.

Para la planta caso de estudio la representación del autómata híbrido como un autómata de estados finito se muestra en la Figura 2.8. Obsérvese que se omiten los invariantes, la función de flujo y la función de reset. El estado inicial corresponde al lugar z_1 , tanque vacío. En la figura también se muestran las entradas disponibles en cada estado del autómata para ilustrar la disponibilidad de las entradas en el modelo híbrido de la planta.

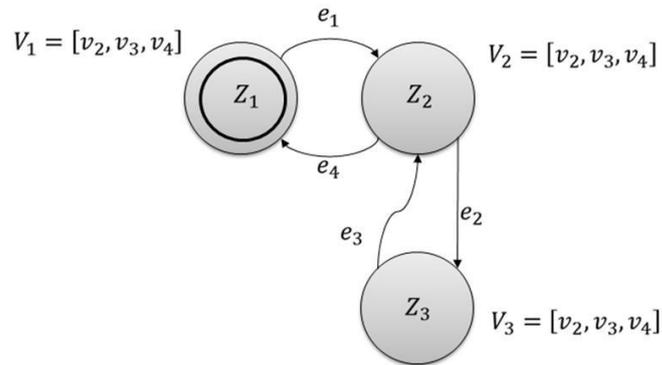


Figura 2.8. Representación del autómata híbrido de la planta como un autómata de estados finito.

En la Figura 2.9 se observa el autómata producto de la composición paralela entre el autómata de control mostrado en la Figura 2.7 y el autómata mostrado en la Figura 2.8. Esta composición paralela se realizó en el software *DESUMA*. El autómata producto es denominado *autómata híbrido cerrado*.

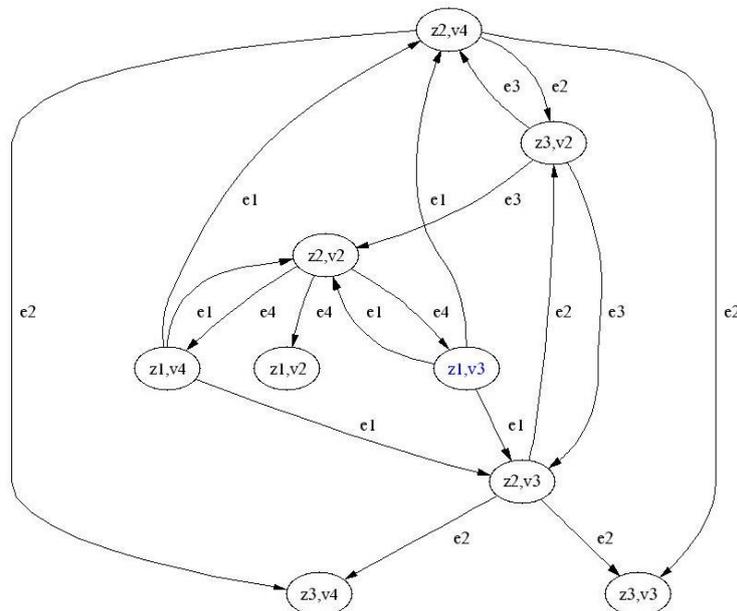


Figura 2.9. Autómata híbrido cerrado.

Obsérvese que en la construcción del autómata híbrido cerrado se hizo abstracción, por el momento, de la dinámica continua.

Cada estado del autómata híbrido cerrado es denominado lugar extendido z^c , y es una combinación entre un lugar y una entrada discreta disponible para ese lugar; es decir, el autómata híbrido cerrado contiene cualquier estrategia de control posible para el sistema. La dinámica continua, los invariantes, las guardas y el vector de reset se asignan a los estados compuestos del autómata híbrido cerrado tal como corresponden en el autómata híbrido que representa la planta. En términos del autómata híbrido cerrado, el problema de la tarea de control se reduce a un problema de alcanzabilidad, cuya complejidad resulta de considerar la dinámica continua y será resuelto más adelante, en la fase de validación y refinamiento de la metodología.

Como se ha mencionado ya, cada estado del autómata híbrido cerrado es una combinación entre un lugar y una entrada discreta disponible para ese lugar. Para el caso de la planta caso de estudio, con tres lugares y tres entradas disponibles en cada lugar, el autómata híbrido cerrado resultante contiene todas las combinaciones posibles, 9 lugares extendidos. El lugar extendido inicial es $z_0^c = (z_1, v_3)$. Las transiciones son 18.

El autómata híbrido cerrado es por sí mismo un autómata híbrido, donde los estados continuos son ahora los *estados extendidos*, los lugares son *lugares extendidos*, etc. Formalmente el autómata híbrido cerrado se define como la tupla:

$$AHC = (X^c, Z^c, inv^c, \Theta^c, g^c, r^c, f^c)$$

donde,

- $X^c = X$.
- $Z^c = \{z_1^c, \dots, z_{n_z^c}\}$, para cada $z \in Z : \forall v \in V_z : \exists z^c = (z, v) \in Z^c$; $Z_0^c \subset Z^c$ contiene $z_0^c = (z_0, v)$ con $v \in V_{z_0}$.
- $inv^c : Z^c \rightarrow 2^x$ con $inv^c(z^c) = inv(z)$ para $z^c = (z, v)$.
- $\Theta^c \subseteq Z^c \times Z^c$ tal que $(z_1^c, z_2^c) \in \Theta^c$, $z_1^c = (z_1, v_1)$, $z_2^c = (z_2, v_2)$, si $\exists (z_1, z_2) \in \Theta$, $v_1 \in V_{z_1}$, y $v_2 \in V_{z_2}$.
- $g^c : \Theta^c \rightarrow 2^x$ con $g^c((z_1^c, z_2^c)) = g((z_1, z_2))$ para $z_1^c = (z_1, v)$, $z_2^c = (z_2, v)$.
- $r^c : \Theta^c \times X \rightarrow X$ con $r^c((z_1^c, z_2^c), x) = r((z_1, z_2), x)$ para $z_1^c = (z_1, v)$, $z_2^c = (z_2, v)$.

- $f^c : Z^c \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $f^c(z^c, x) = f(z, x, v)$ para $z^c = (z, v)$, $v \in V_z$.

El autómata cerrado así definido tiene algunas particularidades que, para mayor claridad, puede ser conveniente resaltar:

- Por cada lugar del autómata híbrido el número de entradas disponibles es igual al número de lugares extendidos correspondientes del autómata cerrado
- Los estados continuos del autómata cerrado son los mismos del autómata híbrido de la planta. El invariante de un lugar extendido es el mismo del lugar correspondiente en el autómata híbrido de la planta.
- Las guardas de los lugares extendidos son las mismas de los lugares correspondientes del autómata híbrido. Las transiciones son las mismas transiciones entre lugares correspondientes en el autómata híbrido.
- Las funciones de reset de los lugares extendidos en el autómata cerrado son las mismas de los lugares correspondientes del *AH*.
- El autómata híbrido cerrado no contiene entradas. Las entradas están implícitamente definidas en los lugares extendidos. Es esta característica la que precisamente explica su denominación de “cerrado”.

La evolución de los estados híbridos del autómata híbrido cerrado es equivalente a la del autómata híbrido, con la única diferencia de que v está implícitamente definida por los lugares extendidos $z^c = (z, v)$. Una trayectoria factible del autómata híbrido cerrado que consiste en una secuencia de estados híbridos extendidos $\sigma^c = (z^c, x)$ y se denota por $\phi_{\sigma^c}^c = (\sigma_0^c, \sigma_1^c, \dots, \sigma_f^c)$.

El conjunto de todos los estados híbridos extendidos es denotado por Σ^c . Con el fin de definir las especificaciones de la tarea de control, los estados extendidos del autómata híbrido cerrado se dividen también en los subconjuntos, inicial, prohibido y objetivo. Estos subconjuntos se construyen a partir de los subconjuntos correspondientes definidos para el autómata híbrido que modela la planta, definidos en la Sección 2.3. De esta manera:

- El conjunto híbrido inicial del autómata híbrido cerrado, Σ_0^c , contiene los estados híbridos extendidos iniciales (z_0^c, x_0) , donde $z_0^c = (z_0, v) \in Z_0^c$, $v \in V_{z_0}$ y $x_0 \in X_0 \subset \text{inv}(z_0)$.

- El conjunto híbrido prohibido del autómata híbrido cerrado, Σ_F^c , contiene los estados híbridos extendidos prohibidos (z_F^c, x) , donde $z_F^c = (z, v) \in Z_F^c$, $v \in V_z$ y $x \in X_{F,j}, X_{F,j} \subset \text{inv}(z_{F,j})$.
- El conjunto de estados híbridos objetivo, Σ_G^c , contiene los estados híbridos objetivo (z_G^c, x) , donde $z_G^c = (z_G, v) \in Z_G^c$, $v \in V_{z_G}$ y $x \in \text{inv}(z_G)$.

Para la etapa 1 del caso de estudio, en el conjunto de los lugares extendidos inicial solo existe un elemento y resulta de la combinación del lugar perteneciente al conjunto de los estados híbridos iniciales Σ_0 y la entrada discreta disponible en V_{z_0} , luego,

$$Z_0^c = \{(z_1, v_3)\}$$

El conjunto híbrido inicial del autómata híbrido cerrado, Σ_0^c , contiene un solo elemento

$$\Sigma_0^c = \{((z_1, v_3), x = 2)\}$$

Para la planta caso de estudio, los elementos pertenecientes al conjunto de lugares extendidos prohibidos resultan de la combinación de los lugares de los estados híbridos prohibidos en Σ_F y las entradas discretas disponibles V_z en los lugares prohibidos, luego,

$$Z_F^c = \{(z_1, v_2), (z_3, v_3), (z_3, v_4)\}$$

Los lugares extendidos prohibidos, corresponden a una combinación de aquellas entradas de control que no queremos se presenten en ciertos lugares durante el proceso, por ejemplo, no se desea que siga entrando líquido cuando el tanque se encuentre lleno, como es el caso (z_3, v_3) . Vale la pena aclarar que aquí no se toma en cuenta el estado continuo porque se está definiendo es un "lugar extendido". El conjunto de los estados híbridos extendidos prohibidos (z_F^c, x) , donde x pertenece al sub-espacio prohibido de los estados continuos en un lugar extendido prohibido z_F^c , es:

$$\Sigma_F^c = \{((z_1, v_2), x < 2), ((z_3, v_3), x \geq 29), ((z_3, v_4), x \geq 29)\}$$

Para la planta caso de estudio, el elemento perteneciente al conjunto de lugares extendidos objetivo resulta de la combinación del lugar objetivo en Σ_G y las entradas discretas V_{z_G} en el lugar objetivo en,

$$Z_G^c = \{(z_3, v_2)\}$$

Finalmente, el conjunto objetivo de los estados híbridos extendidos del autómata híbrido cerrado es:

$$\Sigma_F^c = \{(z_3, v_2), x < 29\}$$

Definidos los subconjuntos inicial, prohibido y objetivo, la tarea del control supervisor es encontrar una secuencia de lugares en Z^c que transfiere todos los estados desde Σ_0^c hasta Σ_G^c sin pasar nunca por un estado prohibido perteneciente a Σ_F^c . La secuencia resultante $\phi_{\sigma^c}^c = (\sigma_0^c, \sigma_1^c, \dots, \sigma_f^c)$ codifica una estrategia de control particular $\phi_v = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_f)$ para el autómata híbrido de la planta.

2.5. SÍNTESIS BASADA EN EL REFINAMIENTO DE LA ABSTRACCIÓN

El último paso de la metodología consiste en encontrar una estrategia de control $\phi_v = (v_0, v_1, v_2, \dots)$ adecuada que cumpla con las especificaciones de diseño. Para mayor claridad en los siguientes párrafos se explica brevemente el procedimiento seguido para encontrar la estrategia de control. Posteriormente, en las siguientes secciones se detalla cada parte.

El procedimiento de síntesis del controlador se muestra en la Figura 2.10.

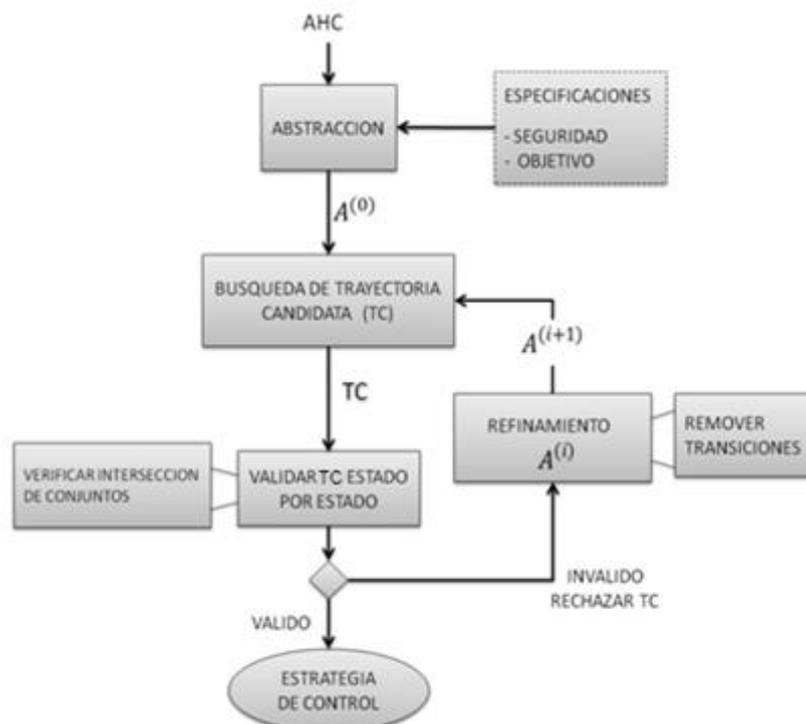


Figura 2.10. Procedimiento de Síntesis del controlador.

El primer paso es obtener un modelo abstracto $A^{(0)}$ del autómata híbrido cerrado por medio de una función de abstracción apropiada, que transfiere la dinámica discreta del autómata híbrido cerrado al modelo abstracto $A^{(0)}$, haciendo una abstracción de la parte continua, y teniendo en cuenta los conjuntos que son importantes para la especificación de la tarea del control, Σ_0^c , Σ_G^c y Σ_F^c .

El siguiente paso es la búsqueda en el modelo abstracto de las denominadas *trayectorias candidatas*, que son un recorrido del modelo abstracto $A^{(0)}$ que potencialmente va de un estado abstracto inicial a un estado objetivo, sin pasar por ningún estado prohibido. Ya que cada estado abstracto en una trayectoria candidata representa un lugar extendido $z^c = (z, v)$ del autómata híbrido cerrado, la trayectoria codifica una estrategia de control $\phi_v = (v_0, v_1, v_2, \dots)$.

El siguiente paso es la validación de manera secuencial de cada una de las transiciones de la trayectoria candidata, donde se determina si cada transición puede ser realizada por el autómata híbrido cerrado, de modo que cada estado híbrido alcanzado a lo largo de los estados abstractos correspondientes en la trayectoria candidata lleva finalmente al conjunto objetivo. Si todas las transiciones de la trayectoria candidata son válidas, se ha encontrado una posible estrategia de control, y el procedimiento termina, o se repite la búsqueda de otra estrategia de control alternativa.

Si una transición de la trayectoria candidata es inválida, la estrategia de control se rechaza, y la información obtenida de la validación es utilizada para refinar el modelo abstracto. En el paso de refinamiento, el modelo abstracto se actualiza de $A^{(i)}$ a $A^{(i+1)}$, se busca otra trayectoria candidata y se continúa con el ciclo de búsqueda, validación y refinamiento, hasta que se encuentre una estrategia de control adecuada, o no puedan ser determinadas más trayectorias candidatas.

A partir de las trayectorias candidatas válidas se selecciona una y se procede a definir la estrategia de control que codifica. El supervisor es el autómata de estados finitos que implementa dicha estrategia.

2.5.1. Abstracción

En el paso de abstracción, se busca obtener un modelo que represente todos los comportamientos posibles del autómata híbrido cerrado. Este modelo, denominado *modelo abstracto* es un sistema de transición que se obtiene mediante un mapeo desde los estados híbridos extendidos hasta los estados del sistema de transición. Formalmente un sistema de transición se define como:

$$ST = (\hat{S}, \hat{S}_0, \hat{E})$$

Que consiste en un conjunto finito de estados $\hat{S} = \{\hat{s}_0, \hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n\}$, un conjunto inicial $\hat{S}_0 \subset \hat{S}$, y un conjunto de transiciones finitas $\hat{E} \subseteq \hat{S} \times \hat{S}$. Un recorrido del sistema de transición esta dado por $\hat{\phi} = (\hat{s}_0, \hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots)$ con $\hat{s}_i \in \hat{S}$ y $(\hat{s}_{i-1}, \hat{s}_i) \in \hat{E}$.

El modelo abstracto inicial $A^{(0)} = (\hat{S}, \hat{S}_0, \hat{E})$, representa todos los estados y las transiciones del autómata híbrido cerrado, y se genera mediante una función de abstracción $\alpha : Z^c \times X \rightarrow \hat{S}$. La función de abstracción $\hat{s}_i = \alpha(z_i^c, x_i)$ permite el mapeo desde el estado (z_i^c, x_i) del autómata híbrido cerrado hacia el estado \hat{s}_i del modelo abstracto. Con el propósito de expresar la tarea de control en el modelo abstracto los estados también son divididos en estados abstractos iniciales, prohibidos y objetivo.

Las transiciones entre los estados abstractos representan las transiciones correspondientes en el autómata híbrido cerrado. Así, en la transición (\hat{s}_i, \hat{s}_l) , los estados abstractos corresponden a los estados generados por la función de abstracción $\hat{s}_i = \alpha(z_i^c, x_i)$, $\hat{s}_l = \alpha(z_l^c, x_l)$. Por conveniencia en el conjunto de transiciones del modelo abstracto $A^{(0)}$ se definen los conjuntos de transiciones iniciales \hat{E}_0 , prohibidas \hat{E}_F y complemento \hat{E}' . El conjunto total de transiciones del modelo abstracto es $\hat{E} = \hat{E}' \cup \hat{E}_0 \cup \hat{E}_F$.

La manera de como la función de abstracción genera los estados abstractos y como se definen las transiciones se describe a continuación.

Estados abstractos iniciales

Para cada lugar extendido inicial $z^c \in Z_0^c$ se introduce un estado $\hat{s}_0 \in \hat{S}_0$. El conjunto \hat{S}_0 representa todos los lugares iniciales híbridos extendidos (z^c, x) del autómata híbrido cerrado, con $z^c \in Z_0^c$ y $x_0 \in X_0$.

Para la planta caso de estudio, el lugar extendido inicial es $Z_0^c = \{(z_1, v_3)\}$ y el estado continuo x inicial corresponde a una altura del nivel de líquido en el tanque de 2 cm. El conjunto de estados abstractos iniciales esta definido por:

$$\hat{S}_0 = \{((z_1, v_3), x = 2)\} = \hat{s}_0$$

Estados abstractos prohibidos

El conjunto de estados prohibidos abstractos \hat{S}_F incluye un estado \hat{s}_F , para cada lugar extendido perteneciente al conjunto de lugares extendidos prohibidos $z^c \in Z_F^c$. De tal manera que \hat{S}_F representa a todos los estados híbridos extendidos (z^c, x) con $z^c \in Z_{F,j}^c$ y $x \in X_{F,j}$.

Para el caso de estudio, el conjunto de los lugares extendidos prohibidos esta dado por $Z_F^c = \{(z_1, v_2), (z_3, v_3), (z_3, v_4)\}$ y los estados continuos prohibidos son: para z_1 , tanque *vacío*, que el nivel se encuentre por debajo de 2 cm; para z_3 , tanque *lleno*, que el nivel se encuentre por encima de 29 cm. El conjunto de estados abstractos prohibidos es:

$$\hat{S}_F = \begin{cases} ((z_1, v_2), x < 2) = \hat{s}_1 \\ ((z_3, v_3), x \geq 29) = \hat{s}_2 \\ ((z_3, v_4), x \geq 29) = \hat{s}_3 \end{cases}$$

Los índices de los estados se escogieron de manera arbitraria, así como los de los estados definidos a continuación.

Conjunto de estados abstractos complemento

El conjunto de los estados abstractos definidos como *complemento*, representan a los estados (z^c, x) del autómata híbrido cerrado que no pertenecen a los estados iniciales o prohibidos. El conjunto de todos los estados abstractos \hat{S} es la unión de todos los estados $\hat{S} := \hat{S}' \cup \hat{S}_0 \cup \hat{S}_F$.

El conjunto de estados complemento \hat{S}' son aquellos estados del modelo abstracto tal que $\exists \hat{s} \in \hat{S}'$ para cualquier $z^c \in Z^c$. Cada estado $\hat{s} \in \hat{S}'$ representa un estado (z^c, x) con: $x \in inv(z^c)$ si $z^c \notin Z_F^c$, o $x \in inv(z^c) \setminus X_{F,j}$ si $z^c \in Z_F^c$.

Para el caso de estudio, los estados abstractos complemento, son definidos por los estados híbridos extendidos donde el lugar extendido no pertenezca al conjunto Z_0^c , y en caso de pertenecer al conjunto Z_F^c , el estado continuo no pertenezca al conjunto prohibido.

Por ejemplo, (z_1, v_4) , correspondiente al estado “tanque vacío, las dos electroválvulas encendidas”, no pertenece ni a Z_0^c ni a Z_F^c . Por lo tanto, la restricción para el estado es, simplemente, $x \in inv(z^c)$. Los estados abstractos generados por la función de abstracción son:

$$\begin{aligned}\hat{s}_4 &= ((z_1, v_4), x = 2) \\ \hat{s}_7 &= ((z_1, v_4), x > 2) \\ \hat{s}_{10} &= ((z_1, v_4), x < 2)\end{aligned}$$

Para el caso (z_1, v_2) , correspondiente al estado “tanque vacío, la válvula de entrada apagada y la válvula de salida encendida”, que pertenece a Z_F^c , la restricción es que el nivel no pertenezca a la región prohibida $x < 2$ y los estados abstractos que se generan son:

$$\begin{aligned}\hat{s}_5 &= ((z_1, v_2), x > 2) \\ \hat{s}_8 &= ((z_1, v_2), x = 2)\end{aligned}$$

De modo similar se obtienen todos los estados complemento. El conjunto de estados abstractos complemento es:

$$\hat{S}' = \left\{ \begin{array}{l} ((z_1, v_4), x = 2) = \hat{s}_4 \\ ((z_1, v_2), x > 2) = \hat{s}_5 \\ ((z_1, v_3), x > 2) = \hat{s}_6 \\ ((z_1, v_4), x > 2) = \hat{s}_7 \\ ((z_1, v_2), x = 2) = \hat{s}_8 \\ ((z_1, v_3), x < 2) = \hat{s}_9 \\ ((z_1, v_4), x < 2) = \hat{s}_{10} \\ ((z_3, v_2), x \geq 29) = \hat{s}_{11} \\ ((z_2, v_2), x) = \hat{s}_{12} \\ ((z_2, v_3), x) = \hat{s}_{13} \\ ((z_2, v_4), x) = \hat{s}_{14} \\ ((z_3, v_2), x < 29) = \hat{s}_{15} \\ ((z_3, v_3), x < 29) = \hat{s}_{16} \\ ((z_3, v_4), x < 29) = \hat{s}_{17} \end{array} \right.$$

El conjunto de los estados objetivo abstractos es $\hat{S}_G \subset \hat{S}'$, y contiene todos los $\hat{s} \in \hat{S}$ con $\hat{s} = \alpha(z_G^c, x), z_G^c \in Z_G^c$, y $x \in \text{inv}(z_G^c)$.

Transiciones iniciales

Las transiciones iniciales \hat{E}_0 , son aquellas transiciones que inician desde un estado que pertenece al conjunto de estados inicial \hat{S}_0 ; el estado destino es cualquier otro del modelo abstracto, siempre y cuando la transición entre los lugares extendidos que representan, exista en el autómata híbrido cerrado. Es decir,

$$(\hat{s}_i, \hat{s}_l) \in \hat{E}_0 \text{ si } \exists z_i^c \in Z_0^c, x_i \in X_0, z_l \in Z^c, x_l \in \text{inv}(z_l^c), \text{ y } (z_i^c, z_l^c) \in \Theta.$$

Para el caso de estudio, las transiciones iniciales son aquellas que inician desde $\hat{s}_0 = \{(z_1, v_3), x = 2\}$. Los estados destino son aquellos que contienen el lugar extendido (z_2, v) , $v \in V_{z_2}$. El conjunto de transiciones iniciales es:

$$\hat{E}_0 = \{(\hat{s}_0, \hat{s}_{12}), (\hat{s}_0, \hat{s}_{13}), (\hat{s}_0, \hat{s}_{14})\}$$

Transiciones prohibidas

Las transiciones prohibidas \hat{E}_F son aquellas transiciones que terminan en un estado abstracto prohibido, y parten de un estado correspondiente a un estado continuo permitido de un lugar extendido prohibido del autómata híbrido cerrado.

$$(\hat{s}_i, \hat{s}_l) \in \hat{E}_F \text{ si } \exists \hat{s}_l \in \hat{S}_F, z_i^c = z_l^c \in Z_F^c, \text{ y } x_i \in \text{inv}(z_{F,j}^c) \setminus X_{F,j}, x_l \in X_{F,j}.$$

Por ejemplo para el caso de estudio, las transiciones prohibidas son aquellas que terminan en \hat{s}_1, \hat{s}_2 o \hat{s}_3 , e inician en un estado abstracto donde el lugar extendido correspondiente pertenezca a $Z_F^c = \{(z_1, v_2), (z_3, v_3), (z_3, v_4)\}$ y el estado continuo pertenezca a las regiones de operación permitidas, es decir que para z_1 el nivel esté por encima de 2 cm y para z_3 por debajo de 29 cm. Observando el conjunto de los estados abstractos \hat{S}' , el conjunto de transiciones prohibidas es:

$$\hat{E}_F = \left\{ \begin{array}{l} (\hat{s}_5, \hat{s}_1) \\ (\hat{s}_8, \hat{s}_1) \\ (\hat{s}_{16}, \hat{s}_2) \\ (\hat{s}_{17}, \hat{s}_3) \end{array} \right\}$$

Transiciones complemento

Las transiciones complemento \hat{E}' se definen como aquellas que ocurren entre dos estados abstractos cualquiera y que no están incluidas en los conjuntos de transiciones iniciales y prohibidas. Estas transiciones existen siempre y cuando la transición entre sus correspondientes lugares extendidos exista en el autómata híbrido cerrado.

$$(\hat{s}_i, \hat{s}_l) \in \hat{E}' \text{ si } \exists z_i^c \in Z^c, x_i \in \text{inv}(z_i^c), z_l \in Z^c, x_l \in \text{inv}(z_l^c) \text{ y } (z_i^c, z_l^c) \in \Theta.$$

Para el caso de estudio, por ejemplo sea el estado abstracto \hat{s}_6 que representa el lugar extendido $z^c = (z_1, v_3)$, se tiene la transición desde este estado si y

solo si la transición entre los lugares extendidos que representan en el autómata híbrido cerrado existe, entonces en este caso los estados abstractos destino serían aquellos cuyo lugar extendido tenga el lugar z_2 , es decir los estados \hat{s}_{12} , \hat{s}_{13} y \hat{s}_{14} . El conjunto de transiciones complemento es:

$$\hat{E}' = \left\{ \begin{array}{l} (\hat{s}_4, \hat{s}_{12}), (\hat{s}_4, \hat{s}_{13}), (\hat{s}_4, \hat{s}_{14}) \\ (\hat{s}_6, \hat{s}_{12}), (\hat{s}_6, \hat{s}_{13}), (\hat{s}_6, \hat{s}_{14}), \\ (\hat{s}_7, \hat{s}_{12}), (\hat{s}_7, \hat{s}_{13}), (\hat{s}_7, \hat{s}_{14}), \\ (\hat{s}_9, \hat{s}_{12}), (\hat{s}_9, \hat{s}_{13}), (\hat{s}_9, \hat{s}_{14}), \\ (\hat{s}_{10}, \hat{s}_{12}), (\hat{s}_{10}, \hat{s}_{13}), (\hat{s}_{10}, \hat{s}_{14}), \\ (\hat{s}_{11}, \hat{s}_{12}), (\hat{s}_{11}, \hat{s}_{13}), (\hat{s}_{11}, \hat{s}_{14}), \\ (\hat{s}_{12}, \hat{s}_0), (\hat{s}_{12}, \hat{s}_4), (\hat{s}_{12}, \hat{s}_5), \\ (\hat{s}_{12}, \hat{s}_6), (\hat{s}_{12}, \hat{s}_7), (\hat{s}_{12}, \hat{s}_8), \\ (\hat{s}_{12}, \hat{s}_9), (\hat{s}_{12}, \hat{s}_{10}), (\hat{s}_{12}, \hat{s}_1), \\ (\hat{s}_{13}, \hat{s}_2), (\hat{s}_{13}, \hat{s}_3), (\hat{s}_{13}, \hat{s}_{11}), \\ (\hat{s}_{13}, \hat{s}_{15}), (\hat{s}_{13}, \hat{s}_{16}), (\hat{s}_{13}, \hat{s}_{17}), \\ (\hat{s}_{14}, \hat{s}_2), (\hat{s}_{14}, \hat{s}_3), (\hat{s}_{14}, \hat{s}_{11}), \\ (\hat{s}_{14}, \hat{s}_{15}), (\hat{s}_{14}, \hat{s}_{16}), (\hat{s}_{14}, \hat{s}_{17}), \\ (\hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}), (\hat{s}_{15}, \hat{s}_{13}), (\hat{s}_{15}, \hat{s}_{14}), \end{array} \right\}$$

El modelo abstracto

La forma como se construye el sistema de transición $A^{(0)}$ asegura que es una abstracción del autómata híbrido cerrado. En efecto, la función de abstracción α asigna al menos un estado $\hat{s} \in \hat{S}$ a cualquier estado híbrido extendido $\sigma^c \in \Sigma^c$ del autómata híbrido cerrado. Además, para cada $\sigma^c = (z_i^c, x) \in \Sigma^c$, si el autómata híbrido cerrado contiene una transición $(z_i^c, z_l^c) \in \Theta$, la función de abstracción incluye una transición correspondiente (\hat{s}_i, \hat{s}_l) en \hat{E} . En el conjunto de transiciones se incluyen aquellas que se inician en los estados abstractos en \hat{S}_0 , los cuales representan un lugar extendido inicial Z_0^c y aquellas cuyo destino es un estado en \hat{S}_F , que corresponden a un lugar extendido prohibido Z_F^c del autómata híbrido cerrado. Es decir, se separan los estados abstractos que son generados por los conjuntos inicial y prohibido del autómata híbrido cerrado. En consecuencia, para cualquier trayectoria factible $\phi_{\sigma^c}^c = (\sigma_0^c, \sigma_1^c, \dots, \sigma_f^c)$ del autómata híbrido cerrado, existe una trayectoria correspondiente $\hat{\phi} = (\hat{s}_0, \hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots)$ en el modelo abstracto.

Para el caso de estudio, el modelo abstracto inicial se muestra en la Figura 2.11. El modelo inicial se ha construido con el software DESUMA. Para obtener el modelo se introducen en DESUMA los estados y las transiciones definidas anteriormente. Las etiquetas de las transiciones que se observan en el modelo de la Figura 2.11, no representan eventos ni están relacionadas de manera

directa con los eventos que se generan en el autómata híbrido; aparecen por la forma como se construye el modelo en DESUMA.

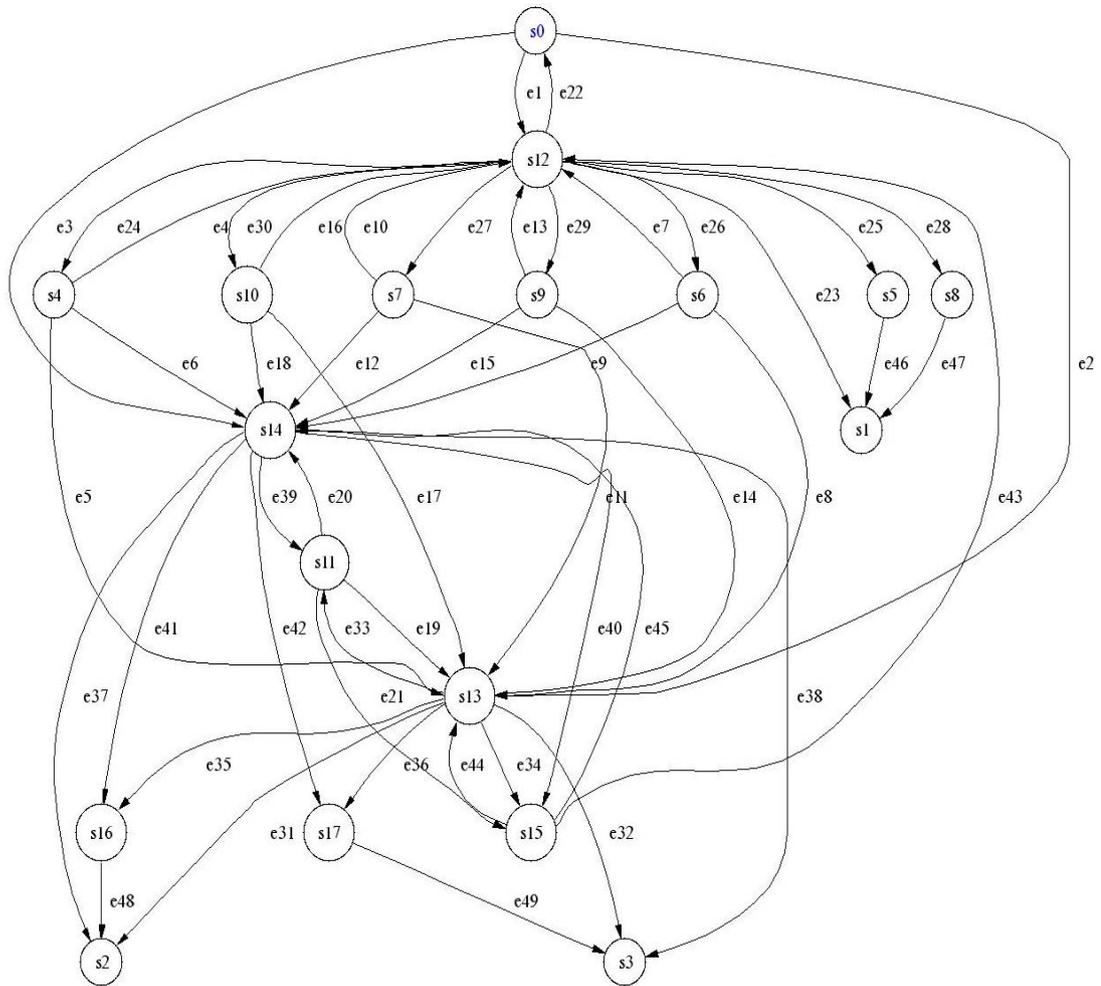


Figura 2.11. Modelo abstracto $A^{(0)}$.

2.5.2. Búsqueda de una trayectoria candidata

Formalmente, dado un modelo abstracto A con los conjuntos \hat{S}_0 , \hat{S}_F y \hat{S}_G , una trayectoria candidata de A es un recorrido $(\hat{s}_0, \hat{s}_1, \dots, \hat{s}_p)$ de longitud finita p con $\hat{s}_0 \in \hat{S}_0$, $\hat{s}_p \in \hat{S}_G$, y $\hat{s}_k \notin \hat{S}_F$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, p\}$, es decir, una trayectoria candidata es un camino particular desde un estado inicial hasta un estado objetivo, que no contiene ningún estado prohibido. Esto se ve reflejado en la Figura 2.12 donde se presenta un modelo abstracto hipotético dos trayectorias candidatas.

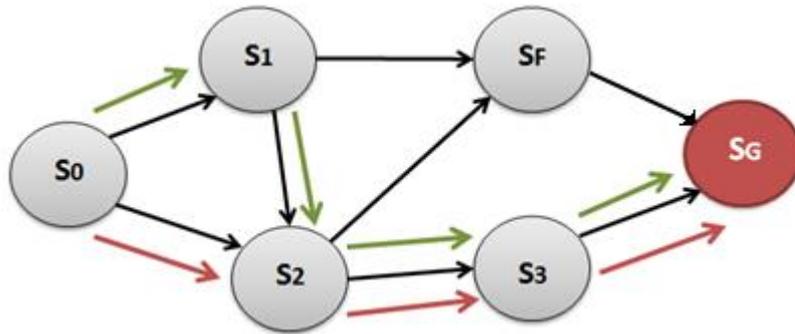


Figura 2.12. Trayectorias candidatas.

En primera instancia, y sin hacer ninguna consideración de la dinámica continua, el proceso de búsqueda de una trayectoria candidata resuelve un problema de alcanzabilidad. Existen diferentes algoritmos computacionales, entre los que cabe mencionar el propuesto por Stursberg en [13]. Una forma práctica para encontrar todas las trayectorias candidatas es representar el sistema de transición en una aplicación software para eventos discretos que incluya algún algoritmo de alcanzabilidad. Por ejemplo, en *DESUMA*, el comando *TRIM* elimina todos los estados que no conducen al estado final y todos los estados que no son alcanzables desde el estado inicial.

Para encontrar las trayectorias candidatas en *DESUMA* se marcan el estado inicial y objetivo en el modelo mostrado en la Figura 2.11 y a continuación se ejecuta el comando *Trim*. Para la etapa 1 del caso de estudio el estado abstracto inicial es:

$$\hat{S}_0 = \{(z_1, v_3), x = 2\} = \hat{s}_0$$

El estado objetivo se puede definir, por ejemplo, como “tanque lleno, válvula de entrada cerrada, válvula de salida abierta y nivel de líquido menor que 29 cm”. En tal caso,

$$\hat{S}_G = \{\hat{s}_{15}\} = (z_3, v_2), x < 29$$

El modelo que resulta de aplicar el comando *Trim*, después de marcar los estados inicial y final, se muestra en la Figura 2.13. Debe tenerse en cuenta que en *DESUMA* no es posible definir estados prohibidos, sin embargo, observando con atención se comprueba que este modelo no contiene ningún estado abstracto prohibido \hat{s}_2 , \hat{s}_3 o \hat{s}_4 . Por lo tanto se continúa con el proceso de validación.

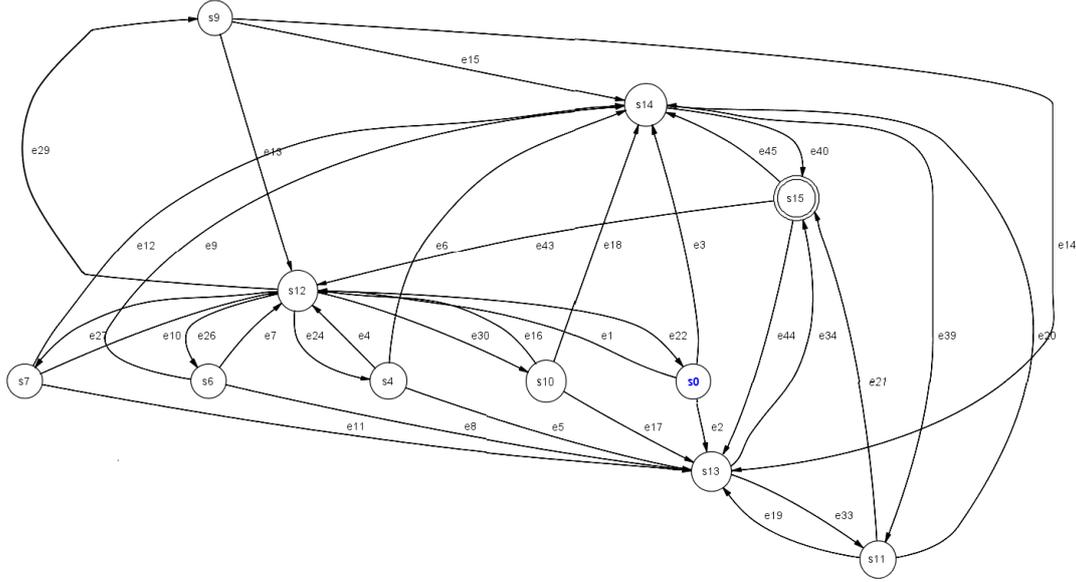


Figura 2.13. Modelo abstracto con las trayectorias candidatas posibles para la etapa 1.

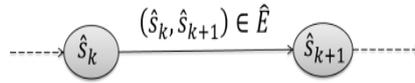
2.5.3. Validación

En el paso de validación se determina si una trayectoria candidata puede ser realizada por el autómata híbrido cerrado. La validación tiene como objetivo comprobar si para cada par de estados consecutivos $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ con $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ del camino candidato $(\hat{s}_0, \hat{s}_1, \dots, \hat{s}_p)$ se cumple que:

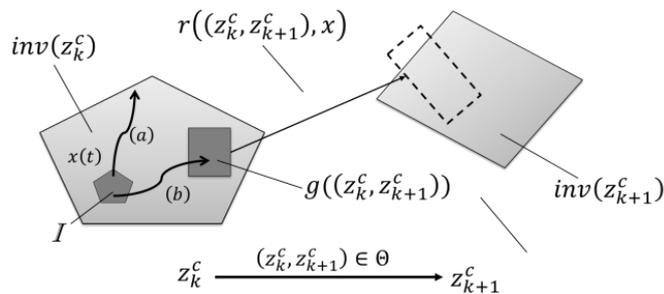
1. Asumiendo que el estado continuo inicial se encuentra en el sub-espacio $I \subseteq \text{inv}(z_k^c)$, la dinámica continua en z_k^c conduce a una guarda de la transición (z_k^c, z_{k+1}^c) con $\hat{s}_k = \alpha(z_k^c, x)$, $\hat{s}_{k+1} = \alpha(z_{k+1}^c, x')$, $(z_k^c, z_{k+1}^c) \in \Theta$.
2. La función de reset transfiere los estados continuos desde z_k^c a un valor perteneciente al invariante de z_{k+1}^c . Es decir $r((z_k^c, z_{k+1}^c), x) \in \text{inv}(z_{k+1}^c)$.

Para ilustración, en la Figura 2.14 (i) se muestra la transición $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ en el modelo abstracto, y en la Figura 2.14 (ii) la transición correspondiente en el autómata híbrido cerrado. En la Figura 2.14 (ii) se muestra el conjunto $I \subseteq \text{inv}(z_k^c)$, que corresponde al conjunto de estados híbridos representados por \hat{s}_k , y el conjunto $\text{inv}(z_{k+1}^c)$, que corresponde al conjunto de estados híbridos representados por \hat{s}_{k+1} . Para validar el par $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ de la trayectoria candidata como un paso factible de una estrategia de control se debe garantizar que cada estado continuo $x \in I$ evolucione al $\text{inv}(z_{k+1}^c)$. Para esto se requiere que la dinámica continua $f(z_k^c, x)$ transfiera $x \in I$, a un estado x' en la región definida por la guarda $g((z_k^c, z_{k+1}^c))$, de modo que al aplicar la función de reset el estado continuo $x'' = r((z_k^c, z_{k+1}^c), x')$, es transferido al estado \hat{s}_{k+1} , es decir $x'' \in \text{inv}(z_{k+1}^c)$. En la figura se encuentran representados dos casos. En

el caso (a) la evolución del estado continuo no entra a la guarda, y en tal caso el paso $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ de la trayectoria candidata no pasa al estado z_{k+1}^c y no codifica una estrategia de control viable. En el caso (b) la evolución del estado continuo sí entra a la guarda y la transición es válida.



(i) Transición en el modelo abstracto



(ii) Transición en el autómata híbrido cerrado

Figura 2.14. Validación de una transición de $A^{(i)}$ para el autómata híbrido cerrado.

En realidad, el proceso de validación que se propone a continuación tiene como objetivo invalidar una transición de la trayectoria candidata. Si la transición es inválida, la trayectoria candidata se rechaza y el procedimiento de síntesis continúa con el paso de refinamiento. El procedimiento se repite con la siguiente trayectoria candidata, y así sucesivamente hasta que no haya más trayectorias candidatas por evaluar, o termine el algoritmo porque se encontró una trayectoria que codifica una estrategia de control factible.

Para rechazar una trayectoria candidata se aplican en sucesión tres métodos, cada método subsiguiente más refinado pero con un esfuerzo computacional mayor.

Primer método de validación

El primer método de validación, denominado como *prueba por intersección de conjuntos*, hace uso del siguiente hecho:

La trayectoria candidata $(\hat{s}_0, \hat{s}_1, \dots, \hat{s}_p)$, no codifica una estrategia de control factible para el autómata híbrido si para algún par de estados consecutivos $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ con $k \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$ en la trayectoria candidata, no existe un valor del estado continuo en el invariante $inv(z_k^c)$ que conduzca al invariante

$inv(z_{k+1}^c)$. Ya porque no alcance la guarda, o de alcanzarla la función de reset correspondiente no conduzca al invariante del estado destino. Formalmente,

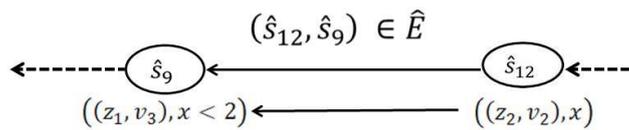
$$\nexists x \in g((z_k^c, z_{k+1}^c)) \cap inv(z_k^c) \text{ con } r((z_k^c, z_{k+1}^c), x) \in inv(z_{k+1}^c) \text{ para } \hat{s}_k = \alpha(z_k^c, x), \\ \hat{s}_{k+1} = \alpha(z_{k+1}^c, x'), (z_k^c, z_{k+1}^c) \in \Theta.$$

La prueba se aplica para cada transición $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$, $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, de la trayectoria candidata. En caso de ser rechazada se continúa con el paso de refinamiento.

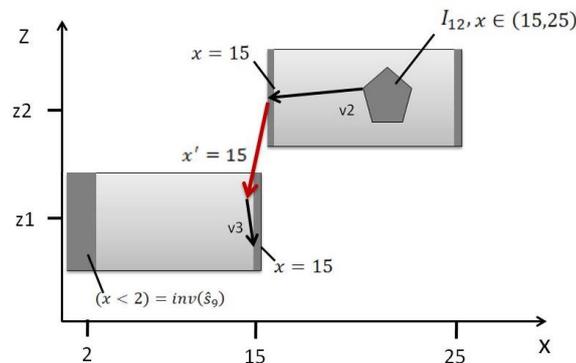
Para el caso de una función de reset lineal y un conjunto guarda poliédrico la condición de validez se puede verificar con un esfuerzo computacional relativamente pequeño mediante una transformación lineal de $g((z_k^c, z_{k+1}^c))$ y la subsecuente intersección del resultado de la transformación con el poliedro $inv(z_{k+1}^c)$. El caso más sencillo ocurre cuando la función de reset es la función identidad y el estado continuo es un escalar, como es el caso de la planta de nivel.

Como un ejemplo para ilustrar el método, considérese la transición $(\hat{s}_{12}, \hat{s}_9)$ que hace parte de una trayectoria candidata, como se muestra en la Figura 2.13, los estados abstractos \hat{s}_{12} y \hat{s}_9 están definidos como:

$$\hat{s}_{12} = ((z_2, v_2), x) \\ \hat{s}_9 = ((z_1, v_3), x < 2)$$



(a) Transición en el modelo abstracto



(b) Transición en el autómata híbrido cerrado

Figura 2.15. Validación de la transición $(\hat{s}_{12}, \hat{s}_9)$ por medio del método de intersección de conjuntos.

En la Figura 2.15(b), se muestran los lugares extendidos, las guardas y las funciones de reset en el autómata híbrido cerrado correspondientes a los estados \hat{s}_{12} y \hat{s}_9 .

Como se puede observar, la función de reset de la guarda del lugar correspondiente al estado \hat{s}_{12} mapea el estado continuo desde $x = 15$ a $x' = 15$. Sin embargo, el invariante del lugar correspondiente al estado abstracto \hat{s}_9 está definido como $x < 2$. Por lo tanto la función de reset del estado origen no conduce al invariante del estado destino y la transición es inválida.

Segundo método de validación

Si la trayectoria candidata ha pasado la prueba de intersección de conjuntos no se garantiza todavía que codifique una estrategia de control factible. El segundo método de validación, denominado como *búsqueda de recorridos inválidos*, realiza una operación más minuciosa a fin de rechazar una trayectoria candidata. En cada par de estados consecutivos $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ con $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ de la trayectoria candidata, se analiza si una evolución de la variable continua desde un conjunto $I \subseteq \text{inv}(z_k^c)$ conduce al invariante $\text{inv}(z_{k+1}^c)$ debido a la transición $(z_k^c, z_{k+1}^c) \in \Theta$. La búsqueda de esta trayectoria particular del estado continuo se plantea como un problema de optimización.

Sea $T = \{x' | x' \in g((z_k^c, z_{k+1}^c))\}$, denotado aquí como *conjunto objetivo*, el subconjunto de la guarda el cual es mapeado al invariante destino $\text{inv}(z_{k+1}^c)$ por la función de reset $r((z_k^c, z_{k+1}^c), x)$. Para invalidar el par $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ basta con comprobar que para cada trayectoria del estado continuo que comience en $x_0 = x(t_0) \in I$ el estado final, definido como $x(t_f) = x_0 + \int_{t_0}^{t_f} f(z_k^c, x(\tau)) d\tau$ no alcanza al conjunto objetivo T . El sub-conjunto I es aquella región que es alcanzable debido a la trayectoria candidata hasta el paso k . Por el momento, para describir el método no importa conocer como se calculó el sub-conjunto I . Para el estado final puede presentarse algunos de estos casos:

- (1) El estado final termina en un conjunto objetivo: $x(t_f) \in T$.
- (2) El estado final termina en una guarda que no conduce al estado objetivo:
 $x(t_f) \in g((Z_k^c, Z_q^c))$ con $Z_q^c \neq Z_{k+1}^c$.
- (3) El estado final termina en una región prohibida: $x(t_f) \in X_{F,j}$ para cualquier F_j .

(4) El estado final termina en el borde del invariante: $x(t_f) \notin \text{inv}(z_k^c)$, pero $\lim_{t \rightarrow t_f} x(\tau) \in \text{inv}(z_k^c)$.

(5) Después de un tiempo límite el estado final permanece en el invariante sin presentarse uno de los casos anteriores. $x(t_f) \in \text{inv}(z_k^c)$ y $t \geq t_{max}$.

Adicionalmente, se requiere que para $\tau \in [0, t_f[$ no se alcance ninguno de los conjuntos (1)-(3), es decir t_f es el primer punto del tiempo en el cual se presenta uno de estos casos. El parámetro t_{max} denota una cota superior para el tiempo. En la Figura 2.16 se muestra un lugar donde el estado continuo evoluciona de acuerdo a los casos (1), (2) y (5).

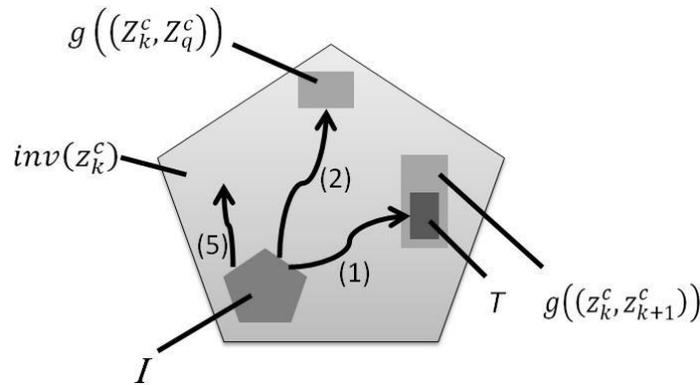


Figura 2.16. Evolución del estado continuo hacia el conjunto objetivo T .

El método de búsqueda de recorridos inválidos implica la simulación de la dinámica continua para diferentes valores de la condición inicial $x_0 = x(t_0) \in I$. Si para algún caso de la simulación la dinámica continua termina fuera del conjunto objetivo T la transición es inválida.

Denotando $x_{cent}(T)$ el centro de gravedad de los vértices del poliedro definido por T , una medida de la cercanía del estado final en t_f al conjunto objetivo es la distancia euclídea:

$$\|x(t_f) - x_{cent}(T)\|_2$$

Para determinar si uno de los casos (2)-(5) se cumple, se resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\max_{x_0 \in I} \|x(t_f) - x_{cent}(T)\|_2$$

Si el estado final $x(t_f)$, resultado de la optimización, arroja que $x(t_f) \notin T$ implica entonces que al menos un estado híbrido (z_k^c, x) , $x \subset I$ no conduce a

z_{k+1}^c . Asumiendo que en el paso k de la trayectoria candidata se alcanzó el estado híbrido (z_k^c, x) , $x \in I$, entonces la transición $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ no codifica una estrategia de control factible y la trayectoria candidata se rechaza.

Los siguientes comentarios son importantes:

- La optimización es usada como un medio para hallar una trayectoria continua desde el conjunto $I \subseteq \text{inv}(z_k^c)$ que eventualmente no conduce a T . La función de costo que codifica la distancia entre $x(t_f)$ y $x_{cent}(T)$ no es la única concebible para obtener esta trayectoria (si existe). Por ejemplo se podría haber escogido la distancia de Manhattan o norma 1.
- Este método de validación, tal como ha sido propuesto, solamente puede ser usado para invalidar un paso de la trayectoria candidata. Sin embargo, si el resultado de la optimización no invalida $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$, (es decir, no encuentra una trayectoria con $x(t_f) \notin T$) no se puede concluir de manera general que la transición sea válida. Por dos razones. Primero porque es posible que un punto $x(t_f)$, resultado de una simulación durante el procedimiento de optimización no alcance al conjunto objetivo T y, sin embargo, no maximice la función de costo; este resultado no es evaluado por el algoritmo de optimización. Segundo porque el algoritmo de optimización puede converger a un óptimo local, impidiendo así que converja a $x(t_f) \notin T$.

La validación se ejecuta para todas las transiciones de la trayectoria candidata desde $k = 0$. Si la trayectoria se rechaza se continúa con el paso de refinamiento. En caso contrario, se continúa con el tercer método de validación.

Para el caso de estudio se tiene la siguiente situación:

- La trayectoria del estado continuo es monótona. La razón, porque el tanque solo puede estar en una de dos condiciones: llenándose o vaciándose. Entonces el estado continuo siempre irá hacia una sola guarda.
- Todas las guardas son puntos en el espacio de estados unidimensional. En este caso $T \equiv g$, y la función de reset es función identidad $x' = x$.

Esto implica que si el primer método de validación no invalidó la transición, al aplicar el segundo método la transición es válida.

Tercer método de validación

El tercer método de validación, denominado *flowpipe enclosure*, produce dos resultados:

1. Determinar mediante otro criterio la factibilidad de la estrategia de control
2. Generar los poliedros continuos $I \subseteq \text{inv}(z_k^c)$ que son alcanzados debido a una transición (z_{k-1}^c, z_k^c) .

El método, descrito en Stursberg y Krogh [27], fue desarrollado para calcular de forma aproximada los conjuntos alcanzables en el espacio continuo de un autómatas híbrido. Los conjuntos alcanzables calculados sirven para determinar cuales transiciones discretas son posibles, y el resultado es usado para propagar el conjunto alcanzable, repitiendo el proceso desde el conjunto de los estados iniciales. De acuerdo con Stursberg y Krogh [27], el método iterativamente calcula el conjunto alcanzable simulando el sistema dinámico definido por la ecuación diferencial de la función de flujo en el lugar correspondiente desde ciertas condiciones iniciales, y lo aproxima mediante un poliedro hiper-rectangular orientado que es una envoltura convexa del conjunto alcanzable. El método comienza dividiendo el conjunto alcanzable en segmentos de tiempo y genera una secuencia de poliedros (Ver Figura 2.17). Cada poliedro es obtenido de los siguientes pasos:

1. Tomando como condición inicial cada uno de los vértices del poliedro origen, se realiza la simulación dentro del segmento de tiempo dado.
2. Se calcula un hiper-rectángulo orientado tal que encierra los puntos inicial y final de las simulaciones.
3. Las caras del hiper-rectángulo se ensanchan tanto como se requiera para encerrar completamente todas las trayectorias que emergen del poliedro anterior.

El último paso se realiza resolviendo un problema de optimización que implica la simulación de la dinámica continua para diferentes valores del estado inicial.

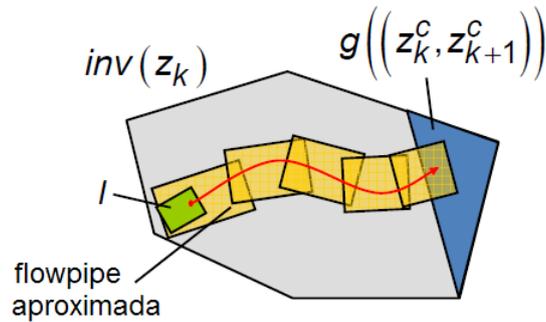


Figura 2.17. Secuencia de hiper-rectángulos orientados del flowpipe.

Se calcula una secuencia de hiper-rectángulos comenzando en I hasta que se aplica uno de los siguientes casos:

- El flowpipe aproximado se intersecta con un conjunto prohibido o un conjunto guarda distinto del que lleva al lugar de destino.
- Se sobrepasa una cota superior de tiempo para la evolución del flowpipe, antes de que el frente del flowpipe haya entrado completamente en la guarda.
- El frente del flowpipe aproximado ha entrado completamente, y luego ha abandonado completamente la guarda $g((z_k^c, z_{k+1}^c))$.

Si en el último caso se cumple que $\nexists x \in g((z_k^c, z_{k+1}^c))$ con $f(z_k^c, x, v_k) = 0$, entonces la transición $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ se considera válida.

Luego se calcula la intersección de la guarda $g((z_k^c, z_{k+1}^c))$ con la secuencia de los poliedros y después se aplica la función de reset al resultado. Esto conduce al conjunto $I_{k+1} \subseteq inv(z_{k+1}^c)$ y la validación continua aplicando el segundo método al siguiente paso $(\hat{s}_{k+1}, \hat{s}_{k+2})$. Si uno de los casos a) o b) ocurre, el paso $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ es declarado inválido, y la trayectoria candidata se rechaza.

Para el caso de estudio, al tenerse una evolución del estado continuo sencilla, es decir, se llena el tanque o se vacía, se asegura que el estado continuo siempre vaya hacia la guarda deseada. Por ejemplo si el sistema se encuentra en el estado *vacío* al llenarse, el estado continuo va directamente a la guarda $g((z_1, z_2))$ y produce el cambio deseado al lugar *normal*. Por lo tanto si el primer método de validación no invalidó la transición, al aplicar el tercer método la transición es válida.

2.5.4. Refinamiento

La idea del paso de refinamiento es actualizar el modelo abstracto $A^{(i)}$ a uno nuevo, denotado por $A^{(i+1)} = (\hat{S}^{i+1}, \hat{S}_0^{i+1}, \hat{E}^{i+1})$, donde $i \in \mathbb{N}$ es un índice que indica el paso de iteración del proceso. Tres situaciones diferentes se consideran para encontrar $A^{(i+1)}$:

- 1) Si con el método de prueba por intersección de conjuntos se establece que para una transición $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ de la trayectoria candidata la transición correspondiente $(z_k^c, z_{k+1}^c) \in \Theta$ del autómata híbrido en lazo cerrado nunca puede presentarse, la transición $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ no se incluye en el conjunto de la transición de $A^{(i+1)}$. Esto es $\hat{E}^{i+1} = \hat{E}^i \setminus \{(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})\}$.
- 2) Si el método de búsqueda de recorridos inválidos da como resultado que la transición $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ de $A^{(i)}$ es inválida, la transición no puede ser eliminada inmediatamente de \hat{E} . La razón es que desde un conjunto de entrada diferente dentro del $inv(z_k^c)$, (a través de una trayectoria diferente) se puede conducir a un resultado positivo de validación.

La investigación de la no existencia de una trayectoria puede realizarse mediante el método denominado *prueba de conectividad*, descrito en [28]. Si se encuentra que no existe una trayectoria continua del autómata híbrido en lazo cerrado correspondiente a $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ entonces la transición es eliminada de \hat{E} . Si existe una trayectoria continua, la trayectoria candidata se marca como *rechazada* a fin de no volverla a evaluar si se encuentra de nuevo.

- 3) Si por el tercer método se encuentra que la transición $(\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1})$ es inválida, la trayectoria candidata también se marca como *rechazada*. Si la transición ha sido validada y el método ha calculado I_{k+1} para el lugar z_{k+1}^c opcionalmente puede realizarse un refinamiento del modelo abstracto. El método es descrito en [13].

En cualquier caso de refinamiento del modelo abstracto, la función de abstracción debe ser modificada. Después del paso de refinamiento, la búsqueda de una nueva trayectoria candidata continúa con el modelo refinado A^{i+1} .

Es necesario resaltar que la complejidad del proceso de validación y refinamiento depende en gran medida de la función de reset, que es la que determina los “saltos” de la variable continua cuando el autómata híbrido en

$$TC3 = (\hat{s}_0, \hat{s}_{12}, \hat{s}_7, \hat{s}_{13}, \hat{s}_{15})$$

$$TC4 = (\hat{s}_0, \hat{s}_{12}, \hat{s}_7, \hat{s}_{14}, \hat{s}_{15})$$

$$TC5 = (\hat{s}_0, \hat{s}_{13}, \hat{s}_{15})$$

$$TC6 = (\hat{s}_0, \hat{s}_{14}, \hat{s}_{15})$$

Con el fin de obtener un mínimo esfuerzo de control, y que el estado continuo permanezca por un mayor tiempo en la región de operación normal, la trayectoria candidata seleccionada para esta etapa es $TC6 = (\hat{s}_0, \hat{s}_{14}, \hat{s}_{15})$

Para definir la estrategia de control en el caso de estudio, es necesario encontrar la trayectoria candidata válida de las otras dos etapas, y así tener una trayectoria candidata de todo el proceso.

Para la etapa 2, el procedimiento es similar, se aplica el comando *Trim* al modelo abstracto inicial, pero esta vez con \hat{s}_{15} como el estado inicial y \hat{s}_6 como el estado final. El modelo abstracto que contiene las trayectorias candidatas para la etapa 2 se muestra en la Figura 2.19:

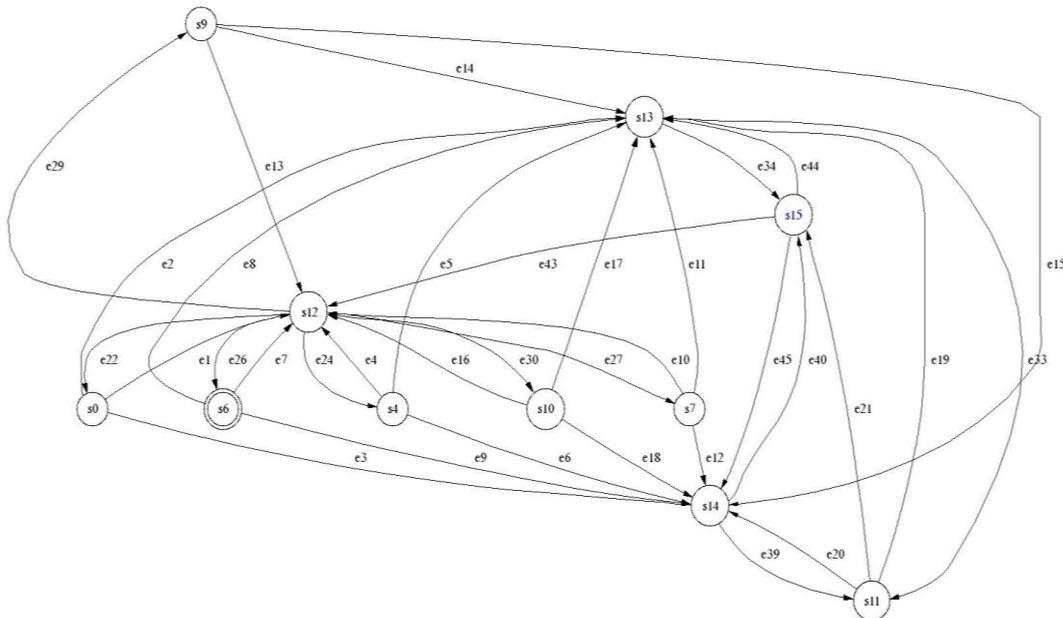


Figura 2.19. Modelo abstracto con las trayectorias posibles para la etapa 2.

A modo de resumen, en la Figura 2.20 se muestran las diferentes trayectorias candidatas y las transiciones que han sido invalidadas para la etapa 2. Las transiciones marcadas en rojo son aquellas que son invalidadas y en amarillo, aquellas que pueden producir un ciclo y no permitan la evolución del sistema.

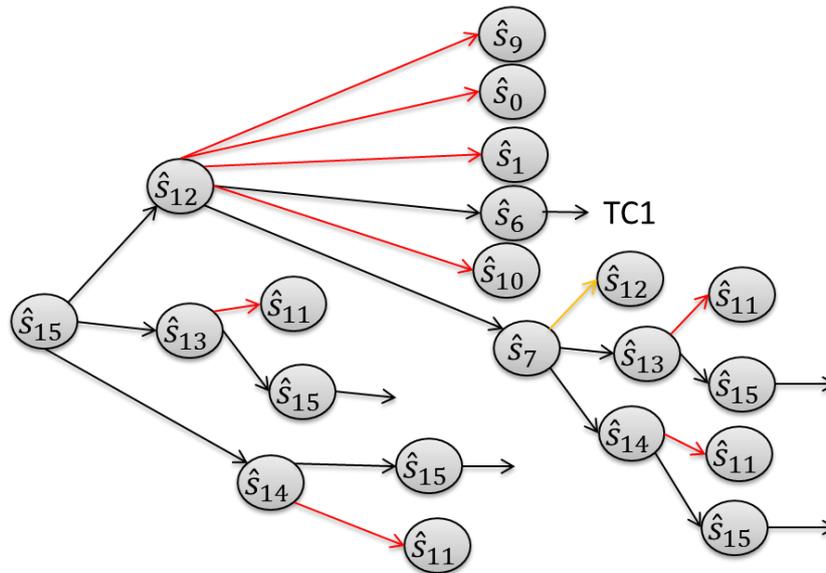


Figura 2.20. Representación en forma de árbol de las trayectorias candidatas y transiciones inválidas para la etapa 2.

Luego de finalizar el proceso de validación las trayectorias candidatas para la etapa 2, que no fueron rechazadas son:

$$TC1 = (\hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6)$$

$$TC2 = (\hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_7, \hat{s}_{13}, \hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6)$$

$$TC3 = (\hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_7, \hat{s}_{14}, \hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6)$$

$$TC4 = (\hat{s}_{15}, \hat{s}_{13}, \hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6)$$

$$TC5 = (\hat{s}_{15}, \hat{s}_{14}, \hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6)$$

Con el fin de obtener un mínimo esfuerzo de control, la trayectoria candidata seleccionada para esta etapa es:

$$TC1 = (\hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6)$$

Para la etapa 3 se realiza el mismo procedimiento, esta vez con \hat{s}_6 como estado inicial y cualquier estado abstracto que represente el lugar normal como estado objetivo. La Figura 2.21, muestra las trayectorias candidatas para la etapa de regreso a operación normal.

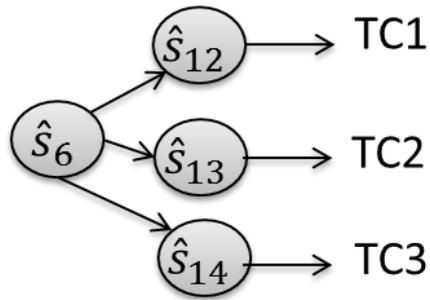


Figura 2.21. Representación en forma de árbol para la validación de las trayectorias candidatas para la etapa 3.

Todas las transiciones son válidas, por lo tanto las trayectorias candidatas son:

$$TC1 = (\hat{s}_6, \hat{s}_{12})$$

$$TC2 = (\hat{s}_6, \hat{s}_{13})$$

$$TC3 = (\hat{s}_6, \hat{s}_{14})$$

Ya que se quiere que el sistema se encuentre el mayor tiempo posible en la región normal, entonces la trayectoria candidata seleccionada es:

$$TC3 = (\hat{s}_6, \hat{s}_{14})$$

La trayectoria candidata que codifica la estrategia de control del proceso total, es la unión de las trayectorias candidatas seleccionadas para cada etapa, esto es:

$$\text{Trayectoria Candidata} = (\hat{s}_0, \hat{s}_{14}, \hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6, \hat{s}_{14})$$

Gráficamente, la trayectoria candidata seleccionada se muestra en la Figura 2.22.

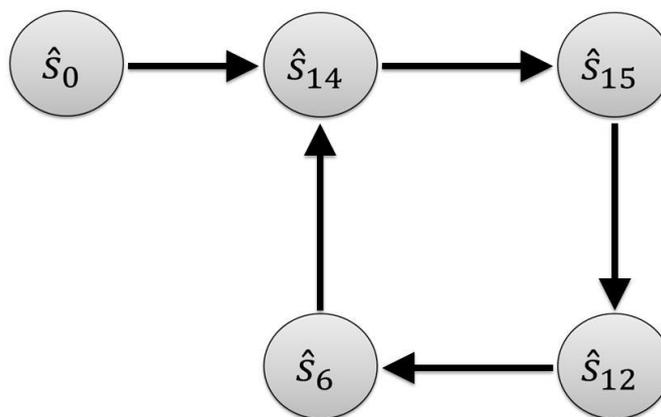


Figura 2.22. Trayectoria candidata válida.

2.5.6. Definición de la estrategia de control

La estrategia de control se deduce de la trayectoria candidata seleccionada y viene dada por la secuencia de entradas discretas que codifica dicha trayectoria:

$$\phi_v = (v_0, v_1, \dots, v_f)$$

Con esta estrategia de control se modela el supervisor como un autómata finito, según se ha descrito en la Sección 2.4.

De la trayectoria candidata seleccionada se deduce la estrategia de control, ya que cada estado abstracto representa implícitamente una orden de control. La estrategia de control que se implementa para el sistema híbrido es:

$$\phi_v = (v_3, v_4, v_2, v_2, v_4)$$

El autómata finito que representa la estrategia de control se muestra en la Figura 2.23.

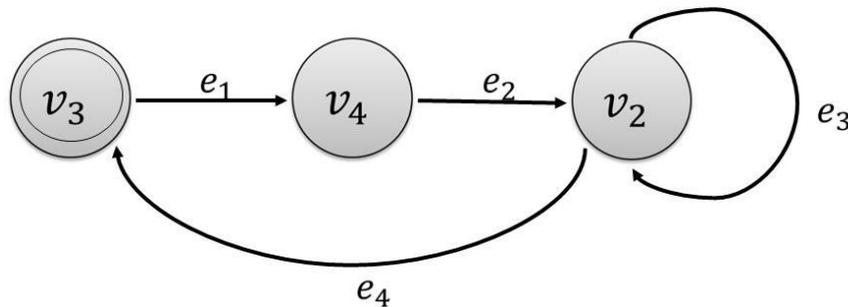


Figura 2.23. Supervisor para el sistema de un tanque.

2.6. Simulación

En esta sección se realiza la simulación de la planta híbrida modelada como un autómata híbrido en lazo abierto, y del supervisor con la planta híbrida. Todo esto utilizando las herramientas de Matlab descritas en el Capítulo 1.

2.6.1. Simulación del modelo híbrido

El modelo del sistema de un solo tanque se realizó en Matlab, haciendo uso de las herramientas Simulink y Stateflow. Para la simulación se asumió como condición inicial la entrada discreta donde la válvula de entrada está encendida y la válvula de salida está apagada, es decir $V_{z_0} \subset V = \{v_3\}$.

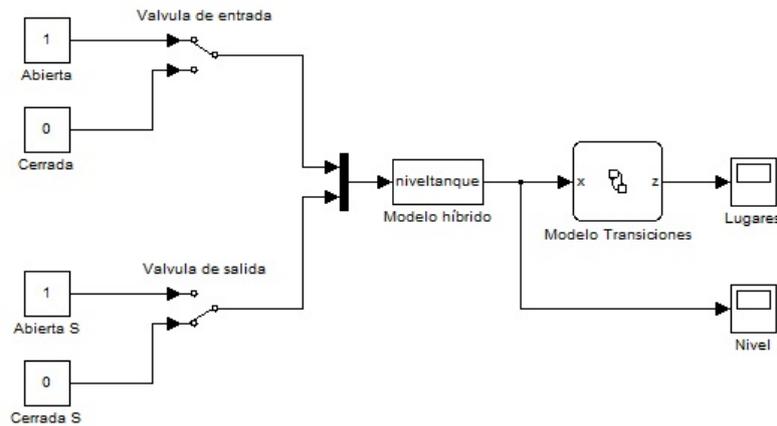


Figura 2.24. Modelo de un solo tanque en Simulink.

El modelo se muestra en la Figura 2.24. El bloque *niveltanque* es una S-function en la cual se describe el modelo del sistema y nos proporciona el valor del estado continuo dependiendo del valor que tengan las entradas discretas. Las variables de entrada se representan como switches que simulan la apertura 1 o el cierre total 0 de las electroválvulas. Las salidas (z, x) mostradas en el modelo de Simulink representan el estado híbrido del sistema. El subsistema de Stateflow presentado en la Figura 2.25, muestra el lugar en el que se encuentra operando la planta de una manera gráfica, y las guardas son representadas con los símbolos de desigualdades \geq y $<$ debido a la forma como trabaja StateFlow.

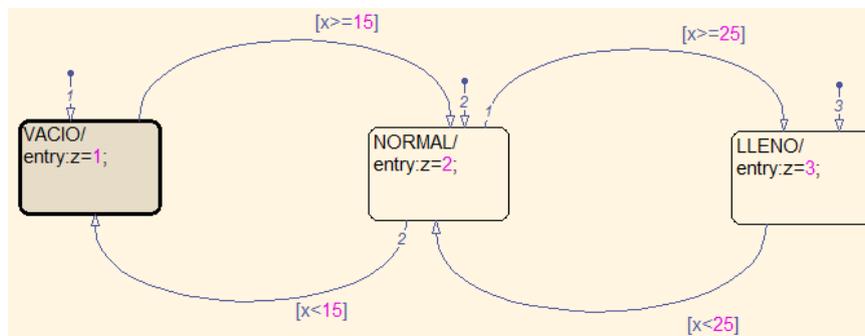


Figura 2.25. Modelo de transiciones en Stateflow.

A continuación se muestran dos resultados de la simulación en lazo abierto para dos casos sencillos. En la simulación se asume que la entrada permanece abierta y el estado de la válvula de salida esta cerrada para el primer caso y abierta para el segundo.

El comportamiento del nivel se grafica respecto al tiempo en la Figura 2.26. Ya que el caudal de entrada es mayor al caudal de salida, en ambos casos el tanque se llena hasta el nivel de rebose de 30 cm.

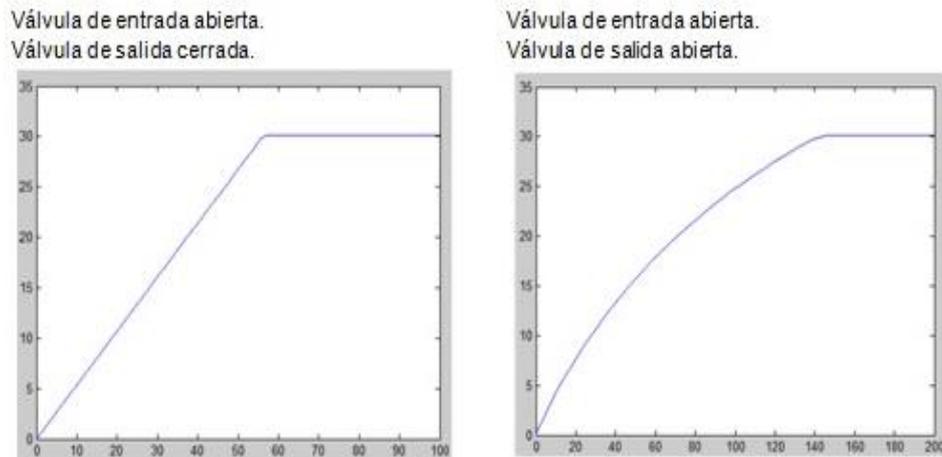


Figura 2.26. Comportamiento del nivel en el sistema de solo un tanque en lazo abierto variando el estado de la válvula de salida.

La evolución de los estados híbridos se presenta en la Figura 2.27, el eje y representa los lugares y el eje x representa el estado continuo. Se observa como el sistema evoluciona a través de los lugares z_1, z_2, z_3 .

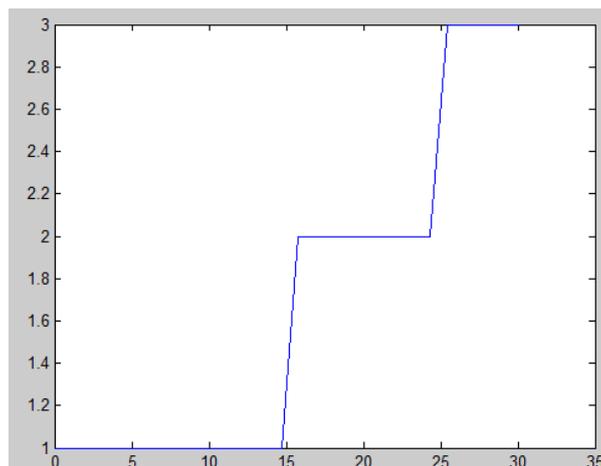


Figura 2.27. Evolución del estado híbrido del sistema.

2.6.2. Simulación del sistema controlado

La simulación del sistema se realiza en MATLAB donde se implementa el supervisor diseñado. En la Figura 2.28 se presenta la implementación del sistema controlado en Simulink, donde el subsistema modelo híbrido representa el modelo en lazo abierto modelado en la Sección 2.2.

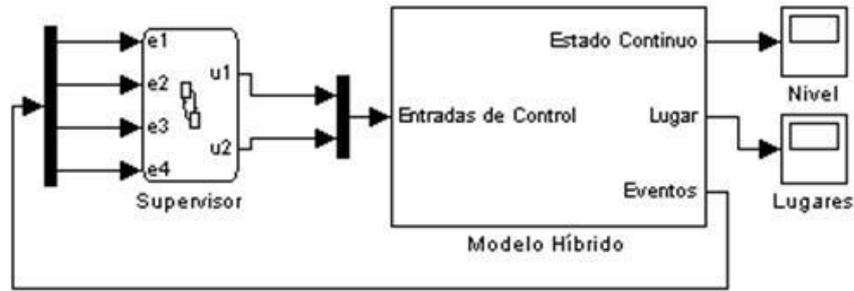


Figura 2.28. Sistema controlado e implementado en Simulink.

Como se muestra en la Figura 2.29, el controlador que es implementado, recibe eventos provenientes de la evolución de la planta híbrida. La implementación del supervisor se hace en Stateflow y se muestra en la Figura 2.28.

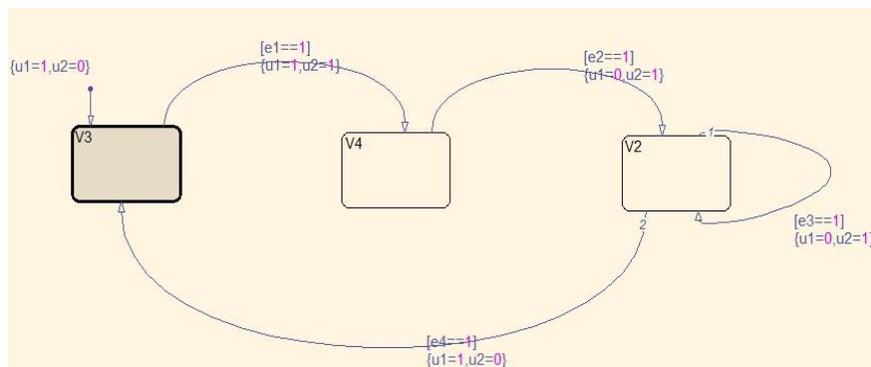


Figura 2.29. Controlador implementado en Stateflow.

La respuesta del sistema cumple con las especificaciones del proceso batch (récipe) y mantiene al sistema en una región normal, aunque debido a las condiciones del control ON/OFF el sistema tiene unas rápidas conmutaciones de lugares y su respuesta es mostrada en la Figura 2.30.

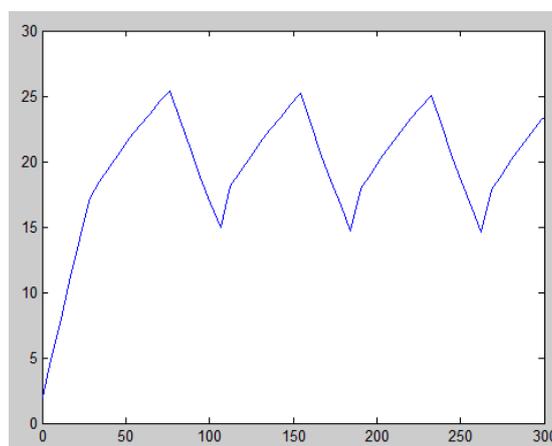


Figura 2.30. Respuesta del sistema híbrido controlado.

2.7. Caso de estudio ON/OFF-PID

En esta sección se ilustra el proceso de síntesis del supervisor para un caso ligeramente distinto al ejemplo desarrollado en las secciones anteriores del presente capítulo. Aquí, la tarea del supervisor es también ejecutar la etapa de arranque, o *start-up*, del proceso ficticio propuesto. Sin embargo, el supervisor debe ahora proporcionar solo dos ciclos de control ON/OFF y luego activar un control PID, que estabiliza el nivel en un set-point predeterminado dentro de la región de operación normal. La descripción del diseño se hace de manera rápida en algunas etapas ya que esencialmente es el mismo descrito en el primer ejemplo. La planta a controlar se muestra en la Figura 2.31. Como se observa, se ha agregado una servoválvula en el flujo de entrada, que es la encargada de realizar el control bajo el esquema PID.

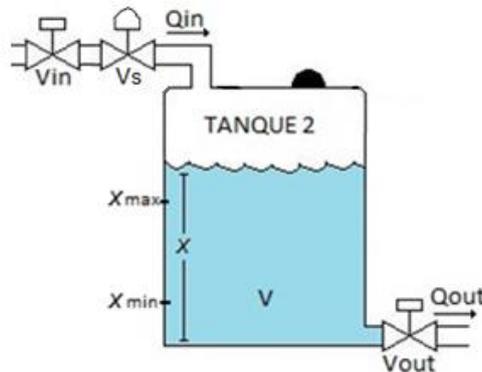


Figura 2.31. Planta para implementar control ON/OFF-PID.

2.7.1. Modelado de la planta como un autómata híbrido.

Definición de los estados continuos

El estado continuo es el nivel de agua en el tanque, $X = \{x\}$, $x \in R$.

Definición de los lugares

El número de lugares que se definen para el sistema son 4. Los lugares z_1, z_2 y z_3 son los mismos que se definieron en la Sección 2.2. El nuevo lugar se define a continuación:

$$z_4 = \text{Tanque con control PID.}$$

El conjunto de lugares es $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

Definición de las entradas discretas

Ahora se cuenta con una nueva entrada discreta que dependiendo de su estado activa el control PID. Contando con las entradas discretas que son las electroválvulas, entonces las entradas discretas son un vector de dimensión 3 donde el componente de la primera fila representa el estado de la electroválvula de entrada V_{in} , el componente de la segunda fila representa el estado de la electroválvula de salida V_{out} y el componente de la tercera fila pertenece a la activación del control PID. El número máximo de entradas discretas es entonces 8, que son:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Ambas válvulas cerradas y PID inactivo.}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Válvula de entrada cerrada, válvula de salida abierta y PID inactivo.}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Válvula de entrada abierta, válvula de salida cerrada y PID inactivo.}$$

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Ambas válvulas abiertas, y PID inactivo.}$$

$$v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Ambas válvulas cerradas, y PID activo.}$$

$$v_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Válvula de entrada cerrada, válvula de salida abierta y PID activo.}$$

$$v_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Válvula de entrada abierta, válvula de salida cerrada y PID activo.}$$

$$v_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Ambas válvulas abiertas y PID activo.}$$

El conjunto de entradas discretas es $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.

Mapeo de la disponibilidad de entradas

Se asigna un subconjunto de vectores de entradas discretas a cada uno de los lugares, para este sistema se asignan v_2, v_3, v_4 a los lugares z_1, z_2 y z_3 .

V_1 se asigna a z_1 .

$$V_1 = [v_2, v_3, v_4]$$

V_2 se asigna a z_2 .

$$V_2 = [v_2, v_3, v_4]$$

V_3 se asigna a z_3 .

$$V_3 = [v_2, v_3, v_4]$$

En el lugar z_4 , el PID esta activo y las electroválvulas deben estar encendidas, por lo tanto, la entrada v_8 es asignada a este lugar.

V_4 se asigna a z_4 .

$$V_4 = [v_8]$$

El conjunto de las entradas discretas V del autómata es $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, es decir:

$$V = \{v_2, v_3, v_4, v_8\}$$

Definición de poliedros invariantes

El invariante de los lugares z_1, z_2 y z_3 es el mismo que se definió en la Sección 2.2, y ya que el PID estabiliza al estado continuo en un valor perteneciente a la región de operación normal, entonces se tiene que $inv(z_4) = inv(z_2)$.

Definición de transiciones, guardas y función de reset

En el tanque se tienen 5 transiciones que definen el cambio entre los lugares de la siguiente manera:

$$\Theta = \{(z_1, z_2), (z_1, z_4), (z_2, z_1), (z_2, z_3), (z_3, z_2)\}$$

Las guardas son asignadas a cada transición, como se muestra a continuación:

$$g(\Theta) = \begin{cases} X \in R : x = x_{min} & Si \Theta = (z_1, z_2) \\ X \in R : x = x_{min} & Si \Theta = (z_1, z_4) \\ X \in R : x = x_{min}, & Si \Theta = (z_2, z_1) \\ X \in R : x = x_{max}, & Si \Theta = (z_2, z_3) \\ X \in R : x = x_{max}, & Si \Theta = (z_3, z_2) \end{cases}$$

La función de reset es la misma para todas las transiciones y es definida como:

$$x' := x \quad \forall z$$

Función de flujo y modelo del autómata híbrido

El campo vectorial que describe las ecuaciones diferenciales en los lugares z_1, z_2 y z_3 se define a continuación:

$$f(z_n, x, v) \rightarrow \dot{x} = -\frac{S * \sqrt{2 * g * x}}{A} v(2) + \frac{Q_{in}}{A} v(1) * (1 - v(3)), \quad n = 1,2,3.$$

$$\dot{x} = -K_2 \sqrt{x} v(2) + K_1 v(1) * (1 - v(3))$$

Para el lugar z_4 se tiene:

$$f(z_4, x, v) \rightarrow \dot{x} = -\frac{S * \sqrt{2 * g * x}}{A} v(2) + U_{PID} v(3)$$

Como $v(2)$ y $v(3)$ siempre van a ser 1 en este lugar, entonces la función de flujo es:

$$\dot{x} = -K_2 \sqrt{x} + U_{PID}$$

Donde U_{PID} es el flujo de entrada que es controlado por la ley de control PID.

El autómata híbrido que modela el sistema se muestra en la Figura 2.32.

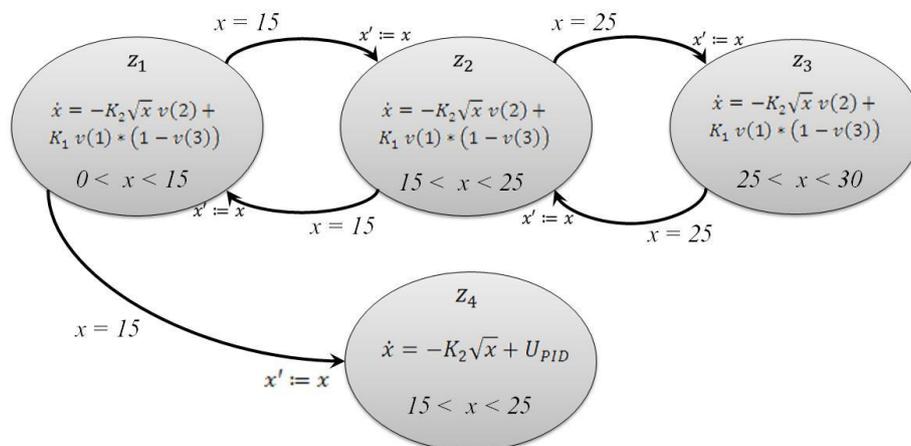


Figura 2.32. Modelo del autómata híbrido.

2.7.2. Descripción del autómata híbrido según la tarea de control

La tarea del supervisor en este caso es ejecutar 2 veces el proceso compuesto por las 3 etapas explicadas en la sección 2.3, y posteriormente estabilizar el valor del nivel en un set-point que se encuentre dentro de la región de operación normal. Por lo tanto, para resolver el problema, se plantea entonces una cuarta etapa:

Etapa 4: Activar el control PID para que establezca a la planta en un valor dentro de la región normal de operación.

Para esta cuarta etapa, el estado híbrido correspondiente al conjunto de los estados iniciales, viene siendo el estado objetivo de la tercera etapa. Por lo tanto el conjunto de estados inicial viene definido por un elemento:

$$\Sigma_0 = \{(z_0, x_0)\} = \{(z_1, x)|x = 15\}$$

Los estados prohibidos para esta cuarta etapa, son los mismos definidos en la sección 2.3.

$$\Sigma_F = \{\Sigma_{F,1}, \Sigma_{F,2}\}$$

donde $\Sigma_{F,1} = \{(z_1, x)|0 < x < 2\}$ y $\Sigma_{F,2} = \{(z_3, x)|x \geq 29\}$

El objetivo de la secuencia de control en la cuarta etapa, es llevar el tanque a la región normal y aplicar un control PID. El conjunto de estados objetivo del modelo híbrido de la planta viene definido por un solo elemento:

$$\Sigma_G = \{(z_4, x)|x \in inv(z_4)\}$$

2.7.3. Obtención del autómata híbrido cerrado

Para este caso el conjunto S de estados del autómata de control, es aumentado con la entrada discreta v_8 :

$$S = \{v_2, v_3, v_4, v_8\}$$

El estado inicial $S_0 = \{v_3\}$ y el conjunto de eventos es:

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

Donde el nuevo evento e_5 representa la transición (z_1, z_4) o el cambio de vacío a control PID.

El conjunto de transiciones Λ es:

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$$

$$\Lambda_1 = \{(v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_2), (v_3, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_2), (v_4, v_3), (v_4, v_4)\}$$

$$\Lambda_2 = \{(v_3, v_8), (v_4, v_8)\}$$

El subconjunto e de eventos asignado al conjunto de transiciones Λ_1 es el mismo mostrado en la sección 2.4.1, y los eventos asignados a las transiciones del conjunto Λ_2 es el siguiente:

$$\begin{aligned} (v_3, v_8) &\rightarrow e_5 \\ (v_4, v_8) &\rightarrow e_5 \end{aligned}$$

En la Figura 2.33 es representado el autómata de control.

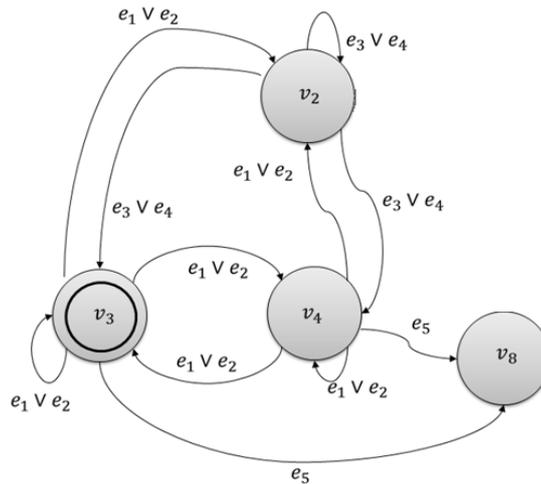


Figura 2.33. Autómata de control.

El autómata de híbrido representado como un autómata de estados finitos se muestra en la Figura 2.34, donde los estados corresponden a los lugares y a cada transición le es asignado el evento correspondiente. El estado inicial corresponde al lugar z_1 , tanque vacío.

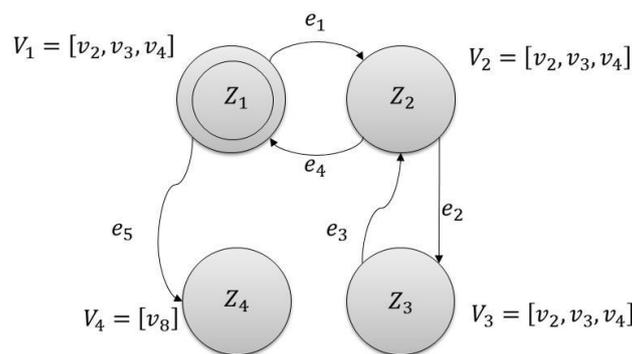


Figura 2.34. Representación del autómata híbrido de la planta como un autómata de estados finitos.

En la Figura 2.34 se presenta el autómata híbrido cerrado, el cual se obtiene por medio de la composición paralela entre el autómata de control y el autómata mostrado en la Figura 2.35.

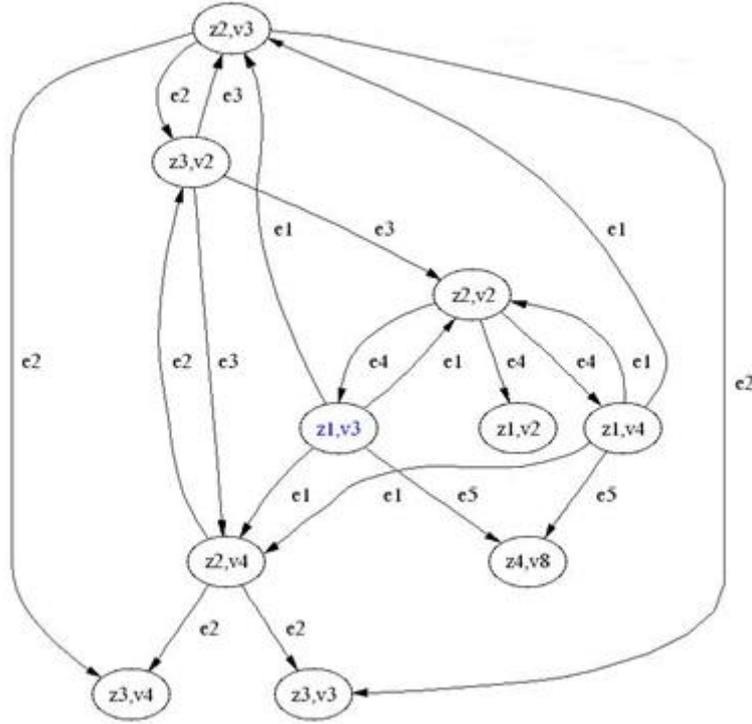


Figura 2.35. Autómata híbrido cerrado.

El autómata híbrido cerrado tiene 10 lugares extendidos y 20 transiciones, y el lugar extendido inicial es $z_0^c = (z_1, v_3)$. Para la etapa 4 se seleccionan los subconjuntos de estados híbridos extendidos iniciales, prohibidos y objetivo del autómata híbrido en lazo cerrado. Los primeros 2 subconjuntos son similares a los definidos en la Sección 2.4.2. El conjunto híbrido inicial del autómata híbrido cerrado, Σ_0^c , contiene un solo elemento

$$\Sigma_0^c = \{((z_1, v_3), x > 2)\}$$

El conjunto de los estados híbridos extendidos prohibidos, Σ_F^c , es:

$$\Sigma_F^c = \{((z_1, v_2), x < 2), ((z_3, v_3), x \geq 29), ((z_3, v_4), x \geq 29)\}$$

El conjunto objetivo del autómata híbrido cerrado es:

$$\Sigma_F^c = \{((z_4, v_8), x \in \text{inv}(z_4))\}$$

2.7.4. Síntesis del refinamiento de la abstracción

Abstracción

Los conjuntos de estados abstractos iniciales \hat{S}_0 y de estados abstractos prohibidos \hat{S}_F , son los mismos que se definieron en la Sección 2.5.1, y el

conjunto de estados complemento \hat{S}' contiene un elemento más que se define como:

$$\hat{s}_G = ((z_4, v_8), x)$$

El conjunto de estados abstractos del modelo inicial es $\hat{S} = \hat{S}_0 \cup \hat{S}_F \cup \hat{S}' \cup \hat{S}_G$.

El conjunto de transiciones inicial tiene un nuevo elemento definido como $\hat{E}_{0PID} = \{(\hat{s}_0, \hat{s}_G)\}$. El conjunto de transiciones prohibidas \hat{E}_F , es equivalente al definido en la Sección 2.5.1, y al conjunto de transiciones complemento \hat{E}' se le aumentan 5 nuevas transiciones que se muestran a continuación:

$$\hat{E}'_{PID} = \left\{ \begin{array}{l} (\hat{s}_4, \hat{s}_G), (\hat{s}_6, \hat{s}_G), \\ ((\hat{s}_7, \hat{s}_G), (\hat{s}_9, \hat{s}_G), (\hat{s}_{10}, \hat{s}_G)) \end{array} \right\}$$

El conjunto de transiciones es $\hat{E} = \hat{E}_0 \cup \hat{E}_{0PID} \cup \hat{E}_F \cup \hat{E}' \cup \hat{E}'_{PID}$.

El modelo abstracto se muestra en la Figura 2.36 y es desarrollado nuevamente en DESUMA. Las etiquetas de cada transición no están relacionadas con ningún evento mencionado anteriormente.

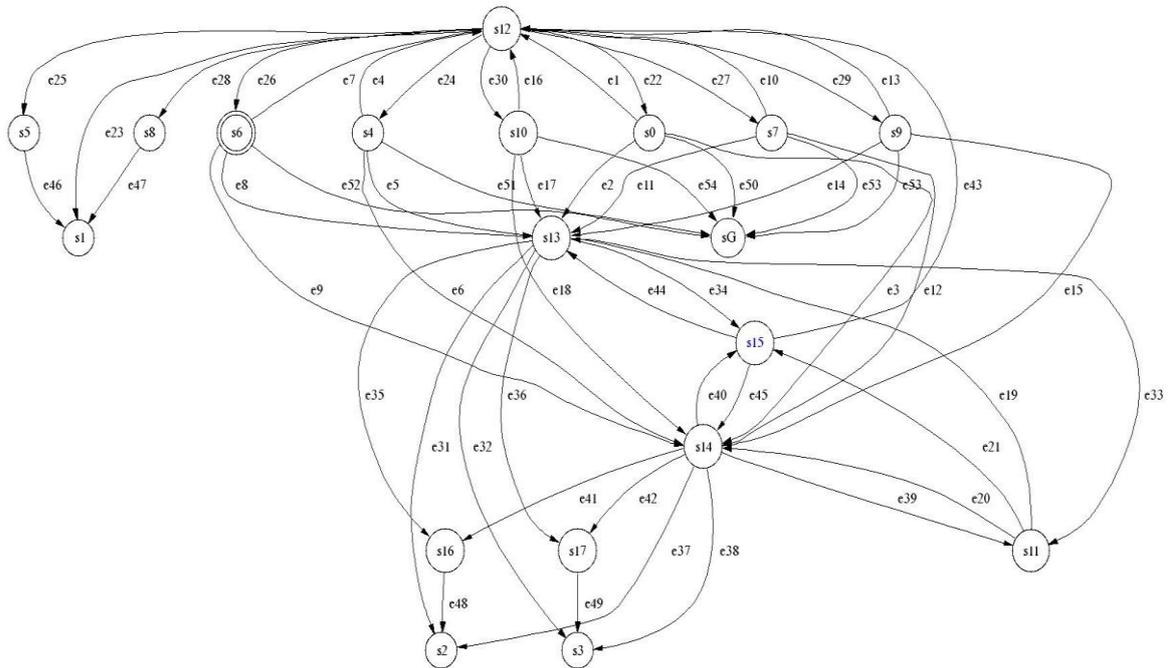


Figura 2.36. Modelo abstracto inicial para el sistema de control ON/OFF-PID.

Traectorias candidatas, validación y refinamiento

Con el propósito de encontrar las trayectorias candidatas para la etapa 4, se define en DESUMA la condición inicial que es \hat{s}_6 y se marca el estado objetivo

\hat{s}_G . El modelo abstracto que resulta de aplicar el comando *Trim* se muestra en la Figura 2.37.

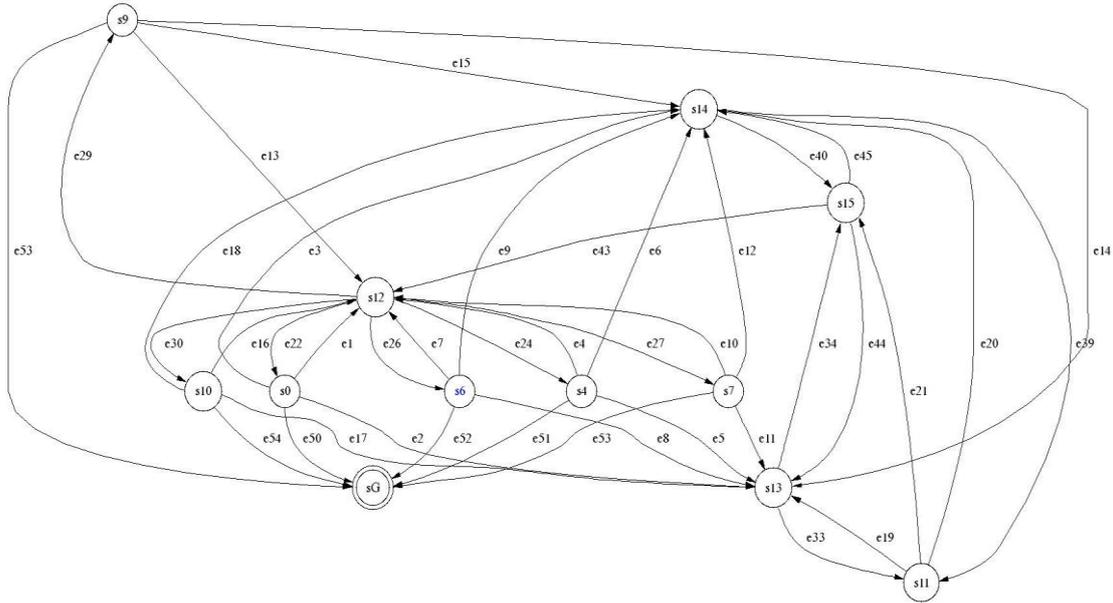


Figura 2.37. Trayectorias candidatas etapa 4.

Existen varias trayectorias candidatas, pero como se puede observar el estado \hat{s}_6 tiene una transición directa con el estado \hat{s}_G . La transición (\hat{s}_6, \hat{s}_G) es válida. Por consiguiente, para obtener un mínimo esfuerzo de control, la trayectoria candidata para la etapa 4 es:

$$TC = (\hat{s}_6, \hat{s}_G)$$

En el análisis realizado en la Sección 2.5.5, se seleccionó la trayectoria candidata que cumple con las condiciones para el arranque del proceso ficticio que es:

$$TC1 = (\hat{s}_0, \hat{s}_{14}, \hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6, \hat{s}_{14})$$

Como se están pidiendo que se realicen 2 ciclos de dicha trayectoria y de ahí se active el PID, entonces la trayectoria candidata para las tres primeras etapas es:

$$TC2 = (\hat{s}_0, \hat{s}_{14}, \hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6, \hat{s}_{14}, \hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6)$$

La trayectoria candidata que codifica la estrategia de control del proceso total, es la unión de las trayectorias candidatas seleccionadas para cada etapa, esto es:

$$Trayectoria\ Candidata = (\hat{s}_0, \hat{s}_{14}, \hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6, \hat{s}_{14}, \hat{s}_{15}, \hat{s}_{12}, \hat{s}_6, \hat{s}_G)$$

La trayectoria candidata seleccionada se muestra en la Figura 2.38.

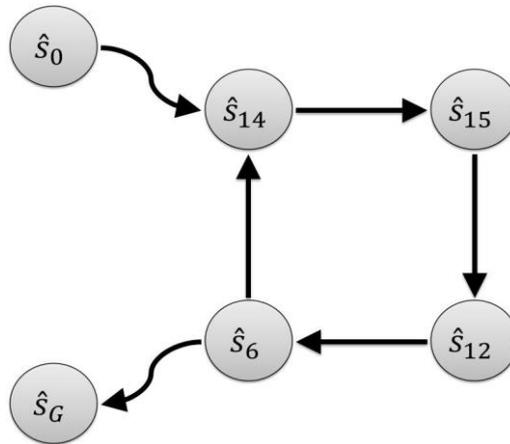


Figura 2.38. Trayectoria candidata válida.

Definición de la estrategia de control

De la trayectoria candidata seleccionada se deduce la estrategia de control:

$$\phi_v = (v_3, v_4, v_2, v_2, v_3, v_4, v_2, v_2, v_3, v_8)$$

El autómata finito que representa la estrategia de control se muestra en la Figura 2.39.

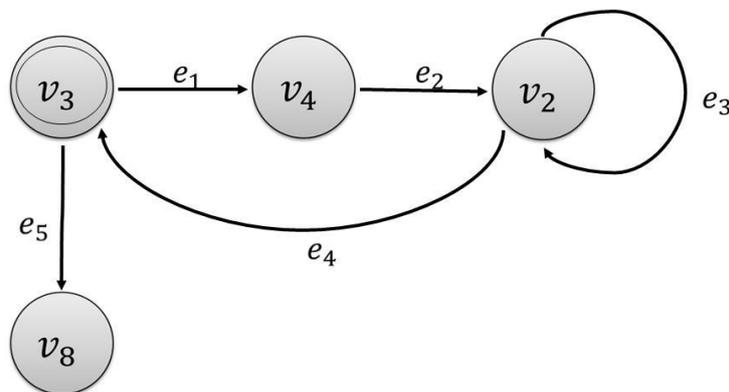


Figura 2.39. Supervisor para el sistema de un tanque con control ON/OFF-PID

2.7.5. Simulación del sistema controlado

La simulación del sistema se realiza en *MATLAB* donde se implementa el supervisor diseñado.

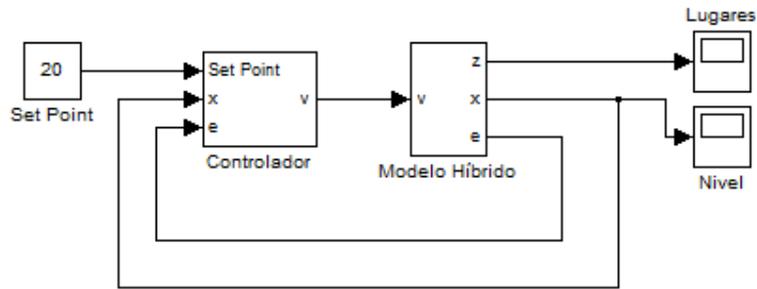


Figura 2.40. Sistema control ON/OFF-PID.

En la Figura 2.41 se muestra el subsistema modelo híbrido.

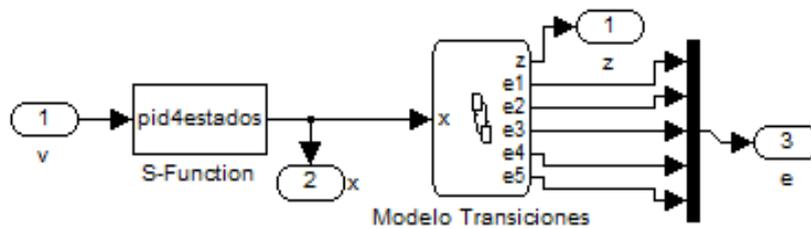


Figura 2.41. Subsistema modelo híbrido.

El subsistema controlador se presenta en la Figura 2.42, donde se puede observar el supervisor y el control PID implementado.

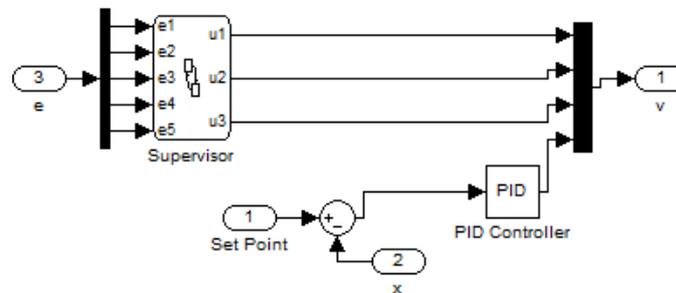


Figura 2.42. Subsistema controlador.

El supervisor es implementado en Stateflow y es mostrado en la Figura 2.43, donde se implementa una variable auxiliar en el estado v_3 la cual nos cuenta los dos ciclos que hace el control ON/OFF, así al iniciar el tercer ciclo la ley de control es conmutada al control PID.

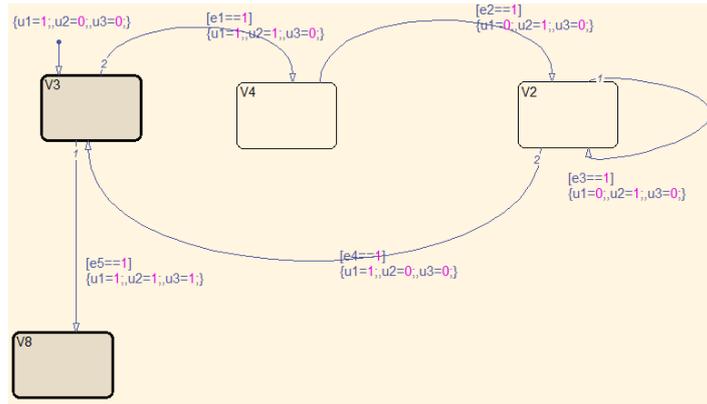


Figura 2.43. Supervisor implementado en Stateflow.

Al simular el sistema, su respuesta cumple con las especificaciones del proceso batch (recípe), se observa inicialmente un control ON/OFF y luego un control PID que estabiliza el sistema en 20 cm. Este comportamiento se muestra en la Figura 2.44.

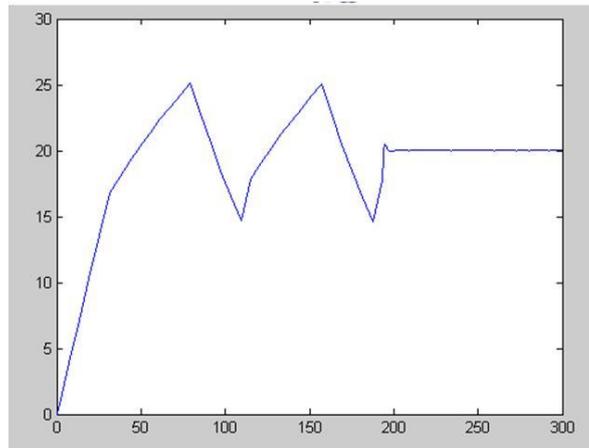


Figura 2.44. Respuesta del sistema híbrido con el control supervisor.

3. IMPLEMENTACIÓN DEL DISEÑO DEL CONTROL SUPERVISOR PARA LA PLANTA CASO DE ESTUDIO

El objetivo de este capítulo es presentar los detalles de la implementación del control supervisor diseñado para la planta caso de estudio. La implementación se realizó utilizando las herramientas de Rockwell Automation disponibles en el laboratorio. La aplicación desarrollada implementa las dos estrategias de control diseñadas en el capítulo anterior. Inicialmente, se hace una descripción de la interfaz de usuario desarrollada en Rsview, posteriormente se comentan algunos aspectos sobre la construcción del ladder y finalmente se muestran algunos resultados experimentales obtenidos.

3.1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE SUPERVISIÓN

Como se ha mencionado, la interfaz con el usuario está desarrollada en Rsview. La Figura 3.1 muestra una captura del HMI inicial donde se muestra la planta caso de estudio. La planta está constituida por dos tanques, donde el tanque superior representa el tanque de proceso propiamente dicho. El tanque inferior es un solo tanque de almacenamiento que permite el suministro continuo de agua.

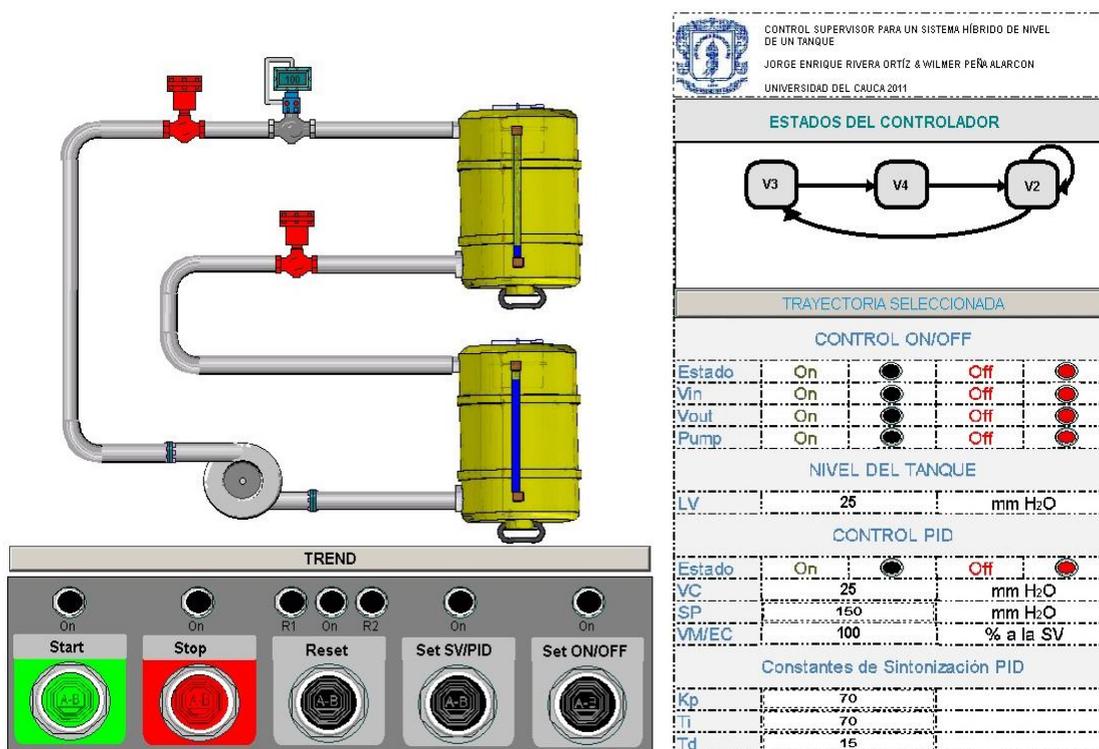


Figura 3.1. Interfaz del sistema de supervisión.

La interfaz cuenta con una serie de botones y desde aquí el sistema es iniciado, detenido, reinicializado, y se elige la estrategia de control que se desea implementar. El botón de **Reset** sirve para llevar al sistema a sus condiciones iniciales. Al oprimir **Reset** el nivel es llevado a 2 cm, el led **R1** se enciende cuando el sistema se reinicializa desde un valor inferior a la condición inicial y el led **R2** se enciende cuando el sistema se reinicializa desde un valor superior a la condición inicial. Cuando el sistema llega a 2 cm sólo el led **On** sobre el botón queda encendido.

Los botones **Set ON/OFF** y **Set SV/PID** sirven para elegir la estrategia de control, ON/OFF o ON/OFF con PID, respectivamente. En la Figura 3.2 se muestra como luce la botonera cuando se ha realizado el reinicio (Reset) y se ha seleccionado la estrategia de control ON/OFF.

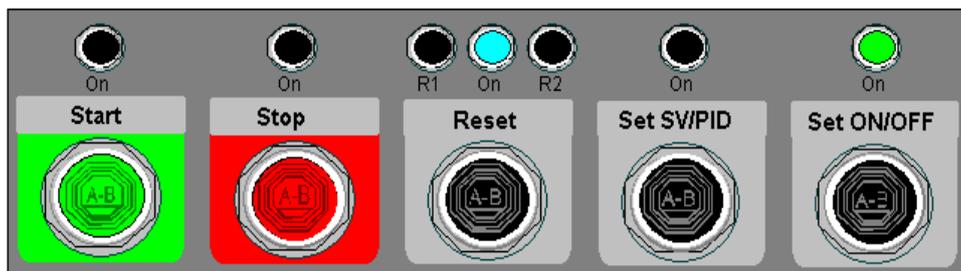


Figura 3.2. Estado de los botones antes de iniciar el sistema con un controlador on/off.

El botón **Start** inicia la estrategia de control seleccionada. Si por alguna situación de emergencia es necesario detener totalmente el sistema se debe oprimir el botón **Stop**. Para volver a poner en marcha el sistema es necesario reinicializarlo (oprimir **Reset**).

Según se desee, en la interfaz se muestra el estado en que se encuentra la trayectoria candidata seleccionada en el modelo abstracto, o el estado del Supervisor. Por ejemplo, en la Figura 3.3 se observa que el sistema se encuentra en el estado \hat{s}_{12} de la trayectoria seleccionada, y que la ley de control que el supervisor está aplicando es v_2 .

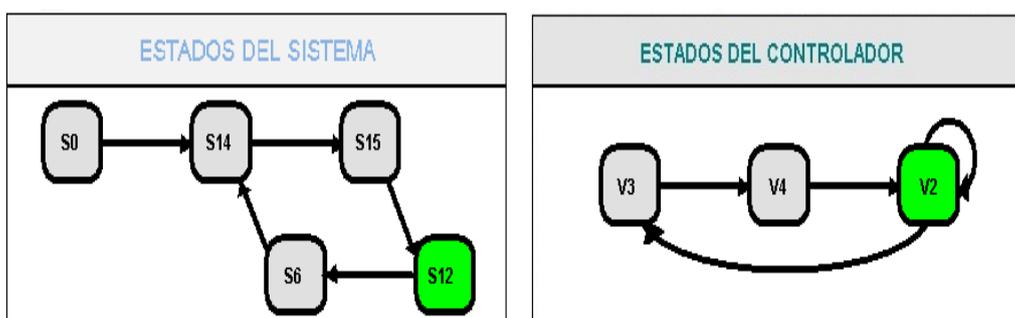


Figura 3.3. Evolución de los estados en la trayectoria escogida y el controlador.

Si la ley de control seleccionada es ON/OFF-PID, automáticamente se cambian las visualizaciones de la trayectoria y del controlador, que correspondan a esta estrategia de control, tal como se muestra en la Figura 3.4.

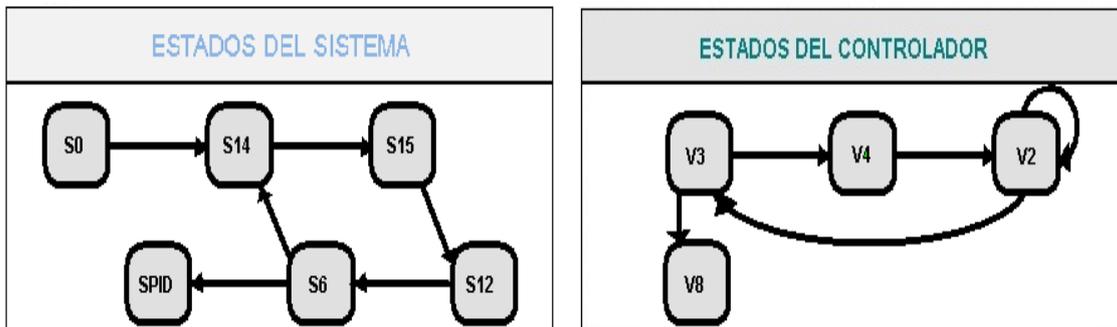


Figura 3.4. Trayectoria escogida y controlador para la estrategia de control ON/OFF-PID.

En la Figura 3.5 se muestra el estado de las electroválvulas, de la bomba y el estado de cual estrategia de control se encuentra activada.

CONTROL ON/OFF				
Estado	On		Off	
Vin	On		Off	
Vout	On		Off	
Pump	On		Off	

Figura 3.5. Estado de las electroválvulas, de la bomba, y de la estrategia de control ON/OFF.

Además se muestran los diferentes parámetros para un control PID, la variable controlada, el set-point, y la apertura de la servoválvula en porcentaje. También se pueden modificar los parámetros del PID K_p , T_i y T_d desde la interfaz.

CONTROL PID				
Estado	On		Off	
VC	148		mm H ₂ O	
SP	200		mm H ₂ O	
VM/EC	100		% a la SV	
Constantes de Sintonización PID				
K_p	70			
T_i	70			
T_d	15			

Figura 3.6. Estado del controlador PID, las variables de control y proceso y los parámetros PID

Al presionar el botón TREND en la interfaz, una ventana es desplegada donde es posible ver el comportamiento de la variable nivel sin afectar la visualización del supervisor o de la trayectoria tal como se muestra en la Figura 3.7, para así poder compararlos con el comportamiento del estado continuo. El nivel es mostrado en milímetros para facilitar la visualización de la gráfica de las tendencias.

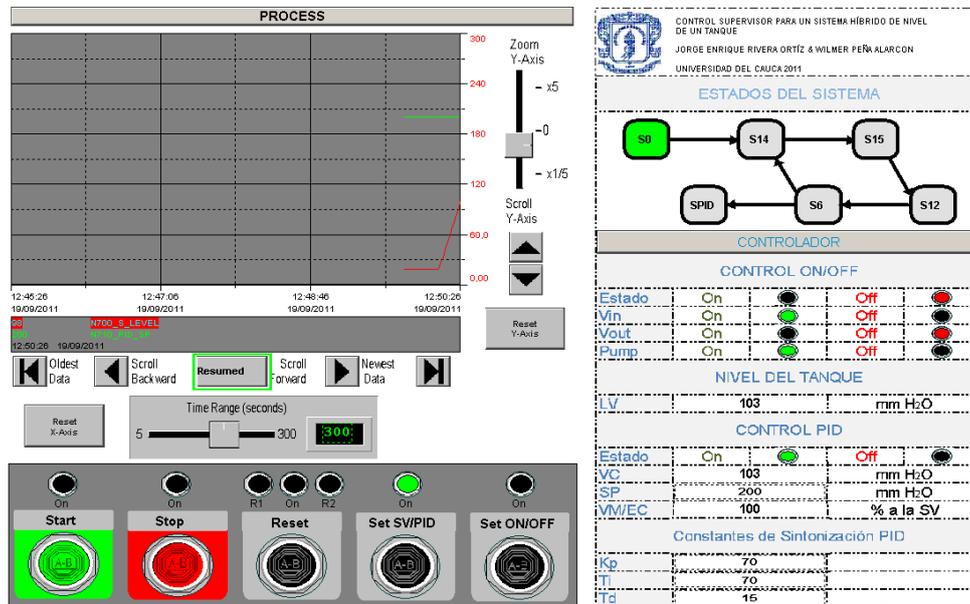


Figura 3.7. Tendencias de la variable controlada: Nivel del tanque.

El sistema cuenta con 2 alarmas, una que se activa cuando el nivel está por encima de 29 cm y otra cuando el nivel está por debajo de 2 cm. Si alguna de estas alarmas se dispara el sistema se detiene instantáneamente y para su arranque es necesario reiniciarlo.

La implementación del código ladder se realizó asemejando el sistema de transición que representa la trayectoria candidata seleccionada como un gráfico secuencial de funciones (grafcet), donde a cada estado abstracto se le asignó un conjunto de instrucciones que representan la ley de control que debe ser aplicada en cada caso.

A continuación se presentan los resultados de ambas estrategias de control, implementadas sobre la planta caso de estudio.

3.2. RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN

Se procede a iniciar el sistema en lazo cerrado utilizando las 2 estrategias de control desarrolladas. El resultado de la estrategia de control ON/OFF se muestra en la Figura 3.8.

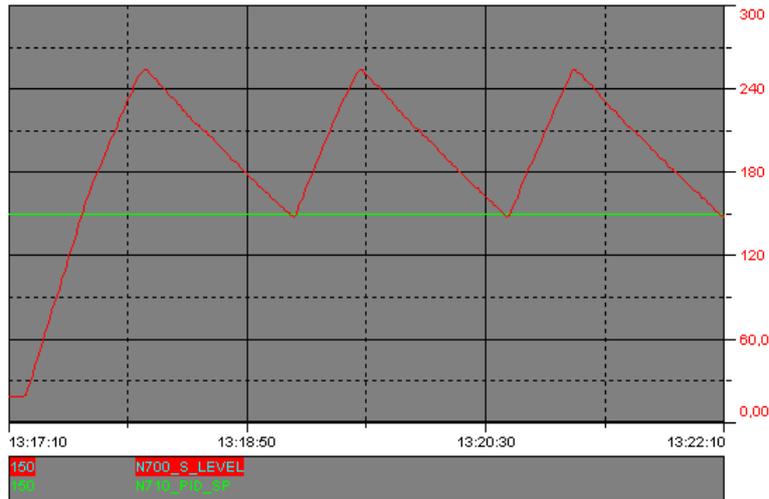


Figura 3.8. Resultado de la estrategia de control ON/OFF.

Comparando la respuesta de la implementación mostrada en la Figura 3.8., con la respuesta de la simulación mostrada en la Figura 2.30, se puede observar que en el sistema implementado no se presentan de manera clara ciertos cambios de estados debido a la dinámica lenta del proceso, pero al ver en la interfaz la Figura 3.3 se observa la evolución por la trayectoria candidata dada por:

- El arranque del sistema inicia cuando el estado continuo $x = 2$ cm (condición inicial).
- El tanque se comienza a llenar estando en el estado \hat{s}_0 de la trayectoria seleccionada, durante este estado la ley de control del supervisor es v_3 .
- Cuando el estado continuo supera los 15 cm el sistema evoluciona al estado \hat{s}_{14} y la ley de control es conmutada a v_4 .
- Cuando el estado continuo supera los 25 cm el sistema evoluciona al estado \hat{s}_{15} y la ley de control es conmutada a v_2 .
- Cuando el nivel es menor a 25 cm el sistema evoluciona al estado \hat{s}_{12} y la ley de control permanece en v_2 .
- Cuando el nivel es menor a 15 cm, cuando esto sucede el sistema entra al estado \hat{s}_6 y la ley de control cambia a v_3 . El sistema permanece en este estado muy poco tiempo, ya que en el sistema real el caudal de salida del tanque es muy bajo.
- Cuando supera de nuevo los 15 cm el sistema evoluciona al estado \hat{s}_{14} y el ciclo se repite hasta que el operario detenga el sistema manualmente.

Como se puede observar el supervisor implementado cumple a cabalidad el proceso batch descrito en la sección 2.1.

Ahora se analiza el resultado de la estrategia de control ON/OFF-PID el cual se muestra en la Figura 3.9.

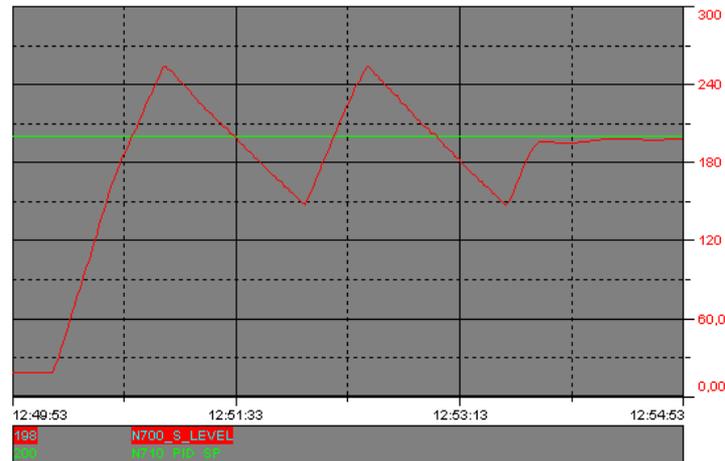


Figura 3.9. Resultado de la estrategia de control ON/OFF-PID.

En la Figura 3.9 se puede observar que el comportamiento del estado continuo inicialmente es el mismo de la estrategia ON/OFF y se repite 2 veces, en ese momento evoluciona a \hat{s}_G y el estado del supervisor evoluciona hacia v_8 , donde el estado continuo se estabiliza en cierto set-point por medio de un control PID. Al igual que en el caso anterior el sistema queda en este estado hasta que el proceso sea detenido de forma manual por el operario.

Comparando la respuesta del sistema implementado de la Figura 3.9 con la simulada y presentada en la Figura 2.44 se puede ver que en la implementación se tiene una estabilización más lenta al momento de activarse el PID, además no se tiene el comportamiento amortiguado que se visualiza en la simulación. A pesar de esto el supervisor implementado cumple a cabalidad el proceso batch descrito en la Sección 2.7.

Dados los resultados anteriores, se puede afirmar que el supervisor diseñado por medio de la metodología planteada es válido, y codifica la estrategia de control deseada para que el sistema cumpla con las especificaciones de los procesos batch planteados en las secciones anteriores.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Por medio del modelado híbrido es posible realizar una descripción detallada de los sistemas que contienen dinámicas continuas y discretas. El diseño del control supervisor de sistemas híbridos, sin embargo, trata aspectos teóricos complejos y no existe aún un marco de referencia aceptado por los investigadores. Si bien con algunos puntos en común, cada autor propone un enfoque particular. Esto da como resultado, por ejemplo, que incluso algunos términos tengan significados distintos. Este panorama dificulta el estudio del tema para aquellos que quieren incursionar en él.

La metodología seleccionada en el presente trabajo dio buenos resultados cuando se aplicó al caso de estudio. La hipótesis de que la aplicación sistemática de la metodología a una planta real dará buenos resultados está apoyada en la fundamentación teórica. Por supuesto, solo su implementación podrá validar esta apreciación.

Dos recomendaciones surgen como resultado de este trabajo. En primer lugar, realizar una aplicación software y hardware donde se aprecie de una manera dinámica todo el procedimiento de modelado y diseño del supervisor desde el enfoque híbrido. En otra dirección, se recomienda explorar otras opciones de modelado de sistemas híbridos, las redes de Petri híbridas por ejemplo, y comparar los resultados con el enfoque de los Autómatas híbridos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] P.J. ANTSAKLIS, "A Brief Introduction to the Theory and Applications of Hybrid Systems". Proceedings of the IEEE, Special Issue on Hybrid Systems: Theory and Applications, 88(7), pp 879-886, Julio 2000.
- [2] PLATZER, André. "Logical Analysis of Hybrid Systems: proving theorems for complex dynamics". Springer, Heidelberg, 2010.
- [3] ALTAMIRANDA, Edmary. "Identificación y Control en línea utilizando técnicas de Inteligencia Artificial". Tesis de Postgrado, Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela. 2003.
- [4] LYGEROS, Jhon, TOMLIN, Claire. SASTRY, Shankar. "Hybrid Systems: Modeling, Analysis and Control". Tesis Doctoral, Diciembre 2008.
- [5] LABINAZ, Gino, BAYOUMI, Mohamed M., RUDIE Karen. "A Survey of Modelling and Control of Hybrid Systems". 13th IFAC World Congress, San Francisco, CA, pp. 293-304, Julio 1996.
- [6] VILLANI, Emilia, MIYAGI, Paulo E., VALETTE, Robert. "Modelling and Analysis of Hybrid Supervisory Systems", Springer, London, 2007.
- [7] MENDOZA, José A., CHACÓN, Edgar. "Revisión de conceptos sobre Sistemas Híbridos". Tesis de Postgrado, Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela. Marzo 2005.
- [8] CHACON, Edgar, DE SARRAZIN, Gisela. "Automatización Integral de Sistemas de Producción Continuos: Control y Supervisión". Tesis de Postgrado, Universidad de los Andes. Mérida-Venezuela. Julio 1998.
- [9] JIMENEZ OSPINA, Verónica Marcela, RUIZ ROJAS, Sandra Patricia, CASTAÑEDA RIASCOS, Daniel. "Primera exploración a la teoría de los Sistemas Dinámicos Híbridos". Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Colombia. Medellín, 2004.
- [10] MASCARÓS, V., GARCÍA, E., MORANT, F., CORRECHER A., QUILES, E., BLASCO, R. "Modelado de Sistemas Híbridos de Control". Dpto. de ingeniería de Sistemas y Automatica, Universidad Politécnica de Valencia. Valencia- España. 2003.

- [11] HENZINGER, Thomas A. "The Theory of Hybrid Automata", proceedings, 11th annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, New Brunswick, New Jersey, 27-30 Julio, 1996.
- [12] CRUZ JIMENEZ, B. J. "Modelación y análisis de un sistema híbrido: Un caso de estudio con un sistema de tanques". Ingeniería Revista Académica, pp 5-15, Mayo–Agosto 2006.
- [13] STURBERG, Olaf. "Supervisory control of hybrid systems based on model abstraction and guided search". Journal on Nonlinear Analysis – Hybrid Systems and applications, 65(6), pp 1168-1187, 2006.
- [14] BAK, Thomas, IZADI-ZAMANABADI, Roozbeh "Lecture notes – Hybrid Systems", at Aalborg University, Lecture note for the Hybrid Systems course at AAU, Dinamarca, Octubre 2004.
- [15] YANG, Hao, JIANG, Bin. COCQUEMPOT, Vincent. "Fault Tolerant Control Design for Hybrid Systems", tesis doctoral, junio 2010.
- [16] CRUZ JIMENEZ, B., LARA CABALLERO, E. "Control híbrido de un sistema electromecánico de llenado de botellas". Congreso Nacional de Control Automático AMCA, Monterrey México, Octubre 2007.
- [17] CARLONI, Luca P., PASSERONE, Roberto, PINTO, Allesandro, SANGIOVANNI, Alberto L. "Languages and Tools for Hybrid Systems Design", foundations and trends in journal, Marzo 2006.
- [18] NIMMO, Ian, COCHRAN, Edward L. "Future of Supervisory Systems in Process Industries: Lessons for discrete Manufacturing", annual reviews in Control, 1999.
- [19] CATAÑO BERRIO, Mauricio Esteban. "Diseño de código PLC para Control Supervisorio local bajo un enfoque Holárquico". Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Colombia. 2007
- [20] STURBERG, Olaf. "Hybrid Systems in Industrial Process Control", en 1st HYCON Phd School on Hybrid Systems, Siena, Julio 2005
- [21] MADRIGAL ZAPATA, German. "Propuesta para el Control de Sistemas de Producción Continua desde la teoría de Control Supervisorio de Sistemas a Eventos Discretos". Tesis de postgrado, Universidad de los Andes. Mérida-Venezuela. 2008.

- [22] CHO, Kwang-Hyun, LIM, Jong-Tae. "Synthesis of Fault Tolerant Supervisor for Atomated Manufacturing Systems" A case studies on Photolithographic process. IEEE Transactions on Robotics and Automation, pp 348 - 351, 1998.
- [23] RODRIGUEZ, J. A "Supervisory multiple regime control". Journal of process Control, Vol 13, pp 177-191, 2002
- [24] KOUTSOUKOS, Xenofon D., ANTSAKLIS, Panos J. "Hybrid Systems: Review and Recent Progress". in T. Samad and G. Balas, editors, Software-Enabled Control, pp 271-298. IEEE PRES, 2003
- [25] KOUTSOUKOS, Xenofon D., ANTSAKLIS, Panos J., STIVER James A., LEMMON Michael D. "Supervisory Control of Hybrid Systems". Proceedings of the IEEE, Special Issue on Hybrid Systems: Theory and Applications, 88(7), pp. 1026-1049, Julio 2000
- [26] LENNARTSON, Bengt, EDGARDT, Bo, TITTUSS, Michael. "Hybrid Systems in Process Control", submitted to the 33rd CDC, Orlando, 1994.
- [27] STURBERG, O. and KROGH B.H. "Efficient representation and computation of reachable sets for hybrid systems". Hybrid Systems-Comp. and Control. Vol. 2623 of LNCS. Springer, pp. 482–497, 2003.
- [28] STURBERG O., FEHNER A., HAN Z., KROGH B.H., "Specification-guided analysis of hybrid systems using a hierarchy of validation methods", Proc. 15th IFAC Conf. Analysis and Design of Hybrid Sys., pp. 289–295, 2003.

ANEXO A.

**ARTÍCULO: “SUPERVISORY CONTROL OF
HYBRID SYSTEMS BASED ON MODEL
ABSTRACTION AND GUIDED SEARCH”**

PREFACIO

En el anexo A, se presenta el artículo “Supervisory control of hybrid systems based on model abstraction and guided search” escrito por Olaf Stursberg, donde se muestra la metodología utilizada para el desarrollo del proyecto.

Inicialmente el artículo muestra una introducción acerca del control supervisor para sistemas híbridos. Posteriormente, de una manera teórica compleja, se presentan paso a paso los aspectos para el desarrollo del controlador para el sistema híbrido.

Finalmente el autor, muestra algunos resultados de casos de estudio donde su metodología fue aplicada. En ningún caso muestra el procedimiento para llegar a estos resultados.