

**DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTADO PARA UNA  
ESTRUCTURA MECANICA CON RESTRICCIONES HOLONOMICAS**



Universidad  
del Cauca

Trabajo de grado presentado a la Facultad de Ingenieria Electronica y  
Telecomunicaciones de la Universidad del Cauca para la obtencion del

Titulo de:

**Ingeniero en Automatica Industrial**

Ingrid Paola Velasco Torres

Jose Luis Rengifo Varila

Director:

PhD. Carlos Felipe Rengifo Rodas

Popayan, Octubre de 2013

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Lista de figuras</b>  | <b>4</b>  |
| <b>Lista de cuadros</b>  | <b>7</b>  |
| <b>Introducción</b>  | <b>8</b>  |
| <b>1. Modelo geométrico de la estructura objeto de estudio</b> | <b>11</b> |
| 1.1. Estructuras serie, arborescente y cerrada . . . . .       | 11        |
| 1.1.1. Estructura serie . . . . .                              | 12        |
| 1.1.2. Estructura arborescente . . . . .                       | 14        |
| 1.1.3. Estructura cerrada . . . . .                            | 17        |
| 1.2. Selección de estructura objeto de estudio . . . . .       | 18        |
| 1.2.1. Estructuras basadas en modelos académicos . . . . .     | 18        |
| 1.2.2. Estructuras planteadas . . . . .                        | 22        |
| 1.2.3. Presentación de la estructura . . . . .                 | 25        |
| 1.2.4. Parámetros geométricos de la estructura . . . . .       | 27        |
| 1.3. Resumen Del Capítulo . . . . .                            | 31        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>2. Modelo dinámico de la estructura objeto de estudio</b>                   | <b>32</b> |
| 2.1. Momentos de Inercia . . . . .   | 34        |
| 2.2. Parámetros Dinámicos . . . . .  | 34        |
| 2.3. Modelo dinámico directo basado en el modelo<br>dinámico inverso . . . . . | 35        |
| 2.3.1. Formulación Newton-Euler . . . . .                                      | 35        |
| 2.4. Generación del modelo dinámico directo . . . . .                          | 39        |
| 2.4.1. Software . . . . .  | 39        |
| 2.5. Resumen de Capítulo . . . . .   | 42        |
| <b>3. Modelado de Mecanismos con Restricciones Cinemáticas</b>                 | <b>43</b> |
| 3.1. Restricciones Cinemáticas . . . . .                                       | 43        |
| 3.1.1. Modelado de una Estructura con Restricción . . . . .                    | 45        |
| 3.2. Modelado de la estructura objeto de estudio con restricción . . . . .     | 51        |
| 3.2.1. Generación del Modelo con Restricción . . . . .                         | 51        |
| 3.3. Resumen del Capítulo . . . . .  | 54        |
| <b>4. Control y Resultados de Simulación</b>                                   | <b>56</b> |
| 4.1. Controlador proporcional-derivativo <b>PD</b> . . . . .                   | 57        |
| 4.1.1. Control proporcional <b>P</b> . . . . .                                 | 57        |
| 4.1.2. Control derivativo <b>D</b> . . . . .                                   | 58        |
| 4.2. Disipador de energía <b>Resorte-Amortiguador</b> . . . . .                | 58        |
| 4.3. Control <b>PD</b> en la estructura objeto de estudio . . . . .            | 59        |
| 4.4. Respuesta teórica con control <b>PD</b> . . . . .                         | 60        |
| 4.4.1. Señal de excitación . . . . .   | 60        |

|                     |  |           |
|---------------------|--|-----------|
| 4.4.2.              | Variación de la constante elástica y de amortiguamiento . . . . .  | 63        |
| 4.5.                | Controlador <b>CTC</b> . . . . .                                   | 70        |
| 4.5.1.              | Control <b>CTC para robots serie</b> . . . . .                     | 71        |
| 4.5.2.              | Control <b>CTC para robots con restricciones holonómicas</b> . . . | 72        |
| 4.6.                | Respuesta teórica con controlador CTC . . . . .                    | 76        |
| 4.6.1.              | Análisis de los casos 1 y 2 . . . . .                              | 79        |
| <b>Conclusiones</b> |  | <b>80</b> |

# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Estructura cinemática serial. . . . .  | 12 |
| 1.2. Articulación rotoide. . . . .  | 12 |
| 1.3. Articulación prismática. . . . .   | 12 |
| 1.4. Estructura cinemática arborescente. . . . .  | 14 |
| 1.5. Sistema arborescente compuesto por un carro y dos péndulos con origen común. . . . .                         | 15 |
| 1.6. Sistema arborescente compuesto por un carro y dos péndulos con origen diferente. . . . .                     | 16 |
| 1.7. Estructura cinemática cerrada. . . . .   | 17 |
| 1.8. Estructura <i>No.1</i> tomada de [1]. . . . .  | 19 |
| 1.9. Estructura <i>No.2</i> tomada de [2]. . . . .  | 20 |
| 1.10. Estructura <i>No.3</i> tomada de [3]. . . . .   | 21 |
| 1.11. Estructura <i>No.4</i> tomada de [4]. . . . .   | 22 |
| 1.12. Estructura propuesta <i>No.1</i> . . . . .  | 23 |
| 1.13. Estructura propuesta <i>No.2</i> . . . . .  | 24 |
| 1.14. Articulaciones rotoides ( <i>R</i> ) y prismáticas ( <i>P</i> ) de la estructura objeto de estudio. . . . . | 26 |

|   |    |
|---|----|
| 1.15. Estructura arborescente generada a partir de la estructura objeto de estudio. Con excepción de los ejes $z_5$ , $z_{10}$ y $z_{15}$ , los otros ejes $z_i$ son perpendiculares al plano de la página. . . . . | 28 |
| 1.16. Representación jerárquica de la estructura arborescente de la figura 1.15. . . . .  | 30 |
| 2.1. Algoritmo de Newton-Euler. . . . .   | 36 |
| 2.2. Calculo simbólico del vector de fuerzas centrífugas, de coriolis y gravitacionales. . . . .  | 37 |
| 2.3. Calculo simbólico de la columna $i$ de la matriz de inercia. $e_i$ representa la columna $i$ de una matriz identidad de dimensión igual al número de elementos del vector $q$ . . . . .                        | 38 |
| 3.1. Mecanismo triangular. . . . .  | 44 |
| 3.2. Mecanismo de 4 barras con restricción holonómica. . . . .  | 46 |
| 3.3. Mecanismo de 4 barras equivalente abierto 3.2. . . . .   | 46 |
| 3.4. Estructura arborescente objeto de estudio con puntos de restricción. . . . .   | 52 |
| 4.1. Diagrama de bloques del control PD. . . . .  | 59 |
| 4.2. Respuesta del sistema con variación en amplitud y frecuencia constante igual a $1rad/seg$ . . . . .  | 61 |
| 4.3. Longitud total resorte amortiguador. . . . .   | 62 |
| 4.4. Respuesta del sistema para variaciones en el periodo $T$ , con aceleración constante. . . . .  | 65 |
| 4.5. Respuesta del sistema para variaciones en el periodo $T$ , con aceleración constante. . . . .  | 67 |
| 4.6. Respuesta del sistema para variaciones en el periodo $T$ , con aceleración constante. . . . .  | 69 |
| 4.7. Seguimiento de aceleraciones. . . . .  | 77 |

|   |    |
|---|----|
| 4.8. Respuesta del sistema con $T_s = 1 \text{ seg.}$ . . . . . | 78 |
| 4.9. Respuesta del sistema con $T_s = 5 \text{ seg.}$ . . . . . | 78 |

# Índice de cuadros

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Parámetros geométricos del sistema arborescente presentado en la figura 1.5.    | 15 |
| 1.2. Parámetros geométricos del sistema arborescente presentado en la figura 1.6.    | 17 |
| 1.3. Parámetros geométricos de la estructura arborescente de la figura 1.15. . . . . | 30 |
| 4.1. Conclusión de controladores. . . . .  | 82 |



# Introducción

Siendo la función principal de las edificaciones albergar y proteger seres vivos, su diseño y construcción debe ser sometido a una supervisión estricta teniendo en cuenta que se ven amenazadas por factores naturales y artificiales de los cuales se desconoce su frecuencia de aparición. Los terrenos sobre los cuales se construyen las estructuras en ocasiones presentan movimientos sísmicos con bajas, medias y altas intensidades (escala de Richter), por ello cada región del mundo apropia normas-sismorresistentes actualizadas constantemente de acuerdo al continuo estudio sismológico de la región, evitando catástrofes que conlleven a la pérdida de vidas humanas, a pesar del obligatorio cumplimiento de este código no se asegura la protección total ante terremotos severos. Las normas-sismorresistentes establecen los requisitos mínimos para la protección humana, requisitos que no son suficientes ante factores externos severos no contemplados en el diseño de la construcción.

La ingeniería civil ha sido objeto de estudio de ciencias que contribuyen al desarrollo, innovación, mejora de la calidad estructural y elevación del porcentaje de protección a los habitantes; el control estructural es una técnica que resulta de la intervención de ciencias como el control y la ingeniería mecánica, entre otras; y asegura que además de las técnicas convencionales de disipación de energía y las normas sismorresistentes, la construcción se complementa con componentes y sistemas adicionales que modifican la dinámica de la estructura, controlando o disipando la energía producida por el evento [5]. Sistemas compuestos por elementos con acción activa, pasiva, semi-activa e híbrida, constituyen técnicas de control estructural como aislamiento sísmico y masa adicional.

Campos como la robótica manejan conceptos de dinámica, flexibilidad y control que son convenientes introducir al control estructural. Por ejemplo, las uniones entre elementos estructurales son los puntos más críticos, las vigas de refuerzo y planchas sufren grietas que puedan conllevar al colapso de obras civiles. Visto desde el enfoque robótico dichas partes que componen una estructura podrán ser reemplazadas por componentes articulares que incrementen la flexibilidad y permitan controlar la disipación de energía. Sin embargo

previo a la construcción de edificaciones se requiere un análisis de la estructura, materiales, medidas y otros factores. Generando inicialmente un modelo matemático que represente la dinámica completa de la estructura, posteriormente simular tal modelo para analizar el comportamiento en estado estable y ante variación de señales que representen un sismo o evento, y de acuerdo a los resultados arrojados realizar o no cambios de parámetros estructurales, que aseguren la estabilidad de la estructura. Bajo la simulación se aprecia una estructura a escala con un comportamiento de acuerdo a la excitación ingresada, finalmente se valida la dinámica cuando la estructura logre el objetivo deseado.

Entre los software que contemplan el diseño y aplicación de control estructural, se reconocen algunos como AutoCad, Solid Edge, Visual Nاستan 4D y Matlab/Simulink que a pesar de no ser diseñado especialmente para control estructural se puede desarrollar un código aplicable a esta área. El objetivo principal de este desarrollo en el campo civil es asegurar a un alto nivel la protección del ser humano, además de intereses económicos ya que al realizar un previo estudio de la obra civil se logran minimizar excesos de material, problemas de diseño y construcción, que conllevan a un aumento de inversión.

## Descripción del trabajo realizado

Este proyecto se enfoca en el modelado, control y simulación de una estructura civil, y para ello se abordaron conceptos básicos de configuraciones robóticas y conceptos avanzados como robots con restricciones cinemáticas. Tales conceptos permitieron realizar el correcto desarrollo de modelos matemáticos que contienen información vital para el análisis y evaluación del comportamiento de un robot.

Dentro de las configuraciones robóticas expuestas, se encuentran la cerrada y la arborescente, siendo estas dos las más sobresalientes ya que la estructura civil objeto de estudio es cerrada, pero es necesario realizar una nueva estructura equivalente arborescente para iniciar el modelado. Dentro de la configuración arborescente se presentaron dos casos especiales, en uno de ellos las articulaciones son concurrentes, y en el otro las articulaciones están separadas por una distancia constante; ambos casos adoptan excepciones y nuevas condiciones que se deben tener en cuenta para realizar el modelado. Además se definieron los pasos para realizar la selección de los ejes del sistema de referencia asociado a cada articulación y el establecimiento de los parámetros geométricos para cada tipo de robot y en especial para la estructura a trabajar.

A partir de los parámetros geométricos obtenidos de la estructura objeto de estudio, se hallaron los modelos matemáticos que presentan la relación existente entre el movimiento, las fuerzas y pares implicados, empleando los parámetros dinámicos y momentos de inercia que dependen de la distribución de masa y la geometría de cada cuerpo. Una vez establecidos y conocidos los elementos que componen la dinámica se desarrolló la simulación, se estableció el rango de trabajo de los actuadores, evaluación de controladores dinámicos. Finalmente se analizó el comportamiento de la estructura a partir de la variación de constantes del controlador y señales de entrada que representan un evento externo.

Uno de los conceptos nuevos aplicados al desarrollo de este proyecto es el uso de restricciones holonómicas, esta condición debió adoptarse porque la estructura posee restricciones de movilidad debido a su configuración mecánica. Para realizar el modelado se utilizó un aplicativo software académico desarrollado en Matlab por el PhD. Carlos F. Rengifo R.

Fue muy importante establecer el rango de dimensionamiento de los elementos actuadores ya que son los encargados de disipar la mayor cantidad de energía cuando se presentan eventos que afectan la estabilidad del edificio, para realizar un correcto control de estos elementos se evaluaron dos tipos de control, control *CTC* (*computed torque control*) y control *PD* (*Proportional Derivative*) que fueron sometidos a varias pruebas y análisis para determinar la mejor ley de control.

# Capítulo 1

## Modelo geométrico de la estructura objeto de estudio

Un robot es un sistema mecánico controlado automáticamente, multiusos y reprogramable con varios grados de libertad que puede estar fijo o móvil en un lugar. Su control y simulación requiere el desarrollo de modelos matemáticos, tales como el modelo geométrico y el modelo dinámico que contienen información que permite el análisis y evaluación del comportamiento físico del robot [6]. De acuerdo a la complejidad de la cinemática de la estructura mecánica y sus grados de libertad, obtener los modelos resulta sencillo o difícil.

La configuración mecánica de los robots varía de acuerdo a la disposición de cada uno de sus cuerpos, clasificándolos en serial, arborescente, paralela y cerrada. A continuación se abordan los conceptos generales para cada una de las configuraciones, dejando claro a cuál de ellas pertenece la estructura objeto de estudio.

### 1.1. Estructuras serie, arborescente y cerrada

En esta sección se describe cada tipo de estructura y el procedimiento para seleccionar los ejes del sistema de referencia asociado a cada una de las articulaciones [7]. Una vez seleccionados estos referentes se procede a determinar los parámetros geométricos necesarios para continuar con el desarrollo del modelo dinámico, utilizando el procedimiento descrito en [8].

### 1.1.1. Estructura serie

Una cadena cinemática se denomina serial si cada uno de los cuerpos que la compone tiene un solo predecesor y un solo sucesor. En la figura 1.1 se presenta una estructura serie compuesta de 4 cuerpos y 3 articulaciones rotoides.

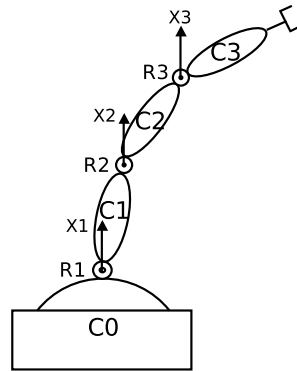


Figura 1.1: Estructura cinemática serial.

Las articulaciones que conforman el mecanismo pueden ser de dos tipos:

**Rotoide:** El movimiento de los dos cuerpos unidos por este tipo de articulación, se realiza rotatoriamente alrededor de un eje común, ver imagen 1.2.

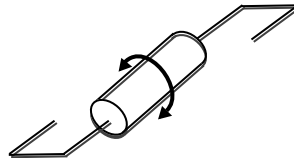


Figura 1.2: Articulación rotoide.

**Prismática:** El movimiento de los dos cuerpos unidos por este tipo de articulación, se realiza traslacionalmente a lo largo de un eje común, ver imagen 1.3.

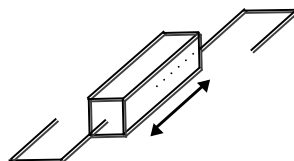


Figura 1.3: Articulación prismática.

A cada una de las articulaciones se le asocia un sistema de referencia para describir la posición de los cuerpos, unos en referencia a los otros. Se le llama  $R_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) al sistema de referencia asociado al cuerpo  $C_j$  y se escoge teniendo en cuenta las siguientes consideraciones [8]:

- Si la articulación que conecta los cuerpos  $C_{j-1}$  y  $C_j$  es prismática, entonces el eje  $z_j$  debe seleccionarse para que tenga la misma dirección del eje de desplazamiento de la articulación.
- Si la articulación que conecta los cuerpos  $C_{j-1}$  y  $C_j$  es rotoide, entonces el eje  $z_j$  debe seleccionarse para que coincida con el eje de rotación de la articulación.
- El eje  $x_j$  debe ser paralelo a la perpendicular común entre  $z_j$  y  $z_{j+1}$ . Si estos últimos son paralelos, la selección de  $x_j$  no será única, sin embargo es recomendable ubicarlo a lo largo del cuerpo involucrado.

Una vez seleccionados los sistemas coordenados asociados a cada uno de los cuerpos que componen la estructura, se procede a determinar los parámetros geométricos:

- $\alpha_j$ : Es el ángulo de rotación alrededor del eje  $x_{j-1}$  necesario para hacer coincidir el eje  $z_{j-1}$  con el eje  $z_j$ .
- $d_j$ : Es el desplazamiento necesario a lo largo del eje  $x_{j-1}$  para hacer coincidir el eje  $z_{j-1}$  con el eje  $z_j$ .
- $\theta_j$ : Es el ángulo de rotación alrededor del eje  $z_j$  necesario para hacer coincidir el eje  $x_{j-1}$  con el eje  $x_j$ .
- $r_j$ : Es el desplazamiento necesario a lo largo del eje  $z_j$  necesario para hacer coincidir el eje  $x_{j-1}$  con el eje  $x_j$ .

Los parámetros geométricos definen una matriz de transformación que permite pasar del referente  $j$  al referente  $j-1$ ; el movimiento del robot se puede interpretar como la sucesión de transformaciones de sistemas de referencia, es por ello la importancia de la definición de esta matriz:

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & s\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$C\theta_j$  y  $S\theta_j$  son abreviaciones para  $\cos(\theta_j)$  y  $\sin(\theta_j)$ .

### 1.1.2. Estructura arborescente

Una cadena cinemática se denomina arborescente si cada uno de los cuerpos que la compone tiene un único predecesor. Sin embargo, a diferencia de la cadena serie, en una arborescente un cuerpo puede tener más de un sucesor. En la figura 1.4 se presenta una estructura en la cual el cuerpo  $C_0$  tiene como sucesores a los cuerpos  $C_1$  y  $C_1'$ .

Para la selección de los ejes de referencia  $z_j$  se utilizan las mismas reglas que en la sección precedente 1.1.1. Sin embargo, para los ejes  $x_j$  la situación es diferente. Si el cuerpo  $i$  es el antecedente del cuerpo  $j$ , el eje  $x_i$  debe estar a lo largo de la perpendicular común entre  $z_i$  y  $z_j$ . Esto significa, por ejemplo, que si los cuerpos 2 y 3 están precedidos del cuerpo 1, entonces  $x_1$  debe satisfacer dos condiciones simultaneas: (i) debe estar a lo largo de la perpendicular común entre  $z_1$  y  $z_2$  y (ii) debe estar a lo largo de la perpendicular común entre  $z_1$  y  $z_3$ .

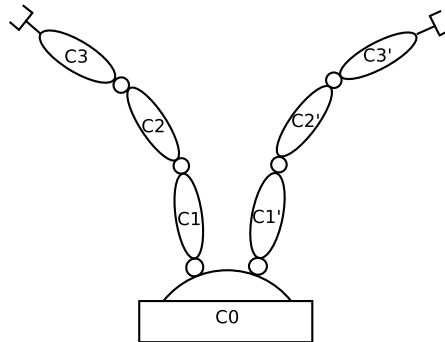


Figura 1.4: Estructura cinemática arborescente.

En el sistema presentado en la figura 1.5, los ejes  $z_2$  y  $z_3$  son concurrentes y perpendiculares al plano de la página, por lo tanto existe un eje  $x_1$  que satisface las dos condiciones

anteriores. En tal caso, el sistema, a pesar de ser arborescente, puede ser modelado con los mismos 4 parámetros geométricos de una estructura serial:  $\alpha_j$ ,  $d_j$ ,  $\theta_j$  y  $r_j$  (ver cuadro 1.1). En el cuadro 1.1 se definen adicionalmente los parámetros  $a(j)$  y  $\sigma_j$ . El primero indica el precedente del cuerpo  $j$  y el segundo indica si la articulación es prismática (1) o rotoide (0).

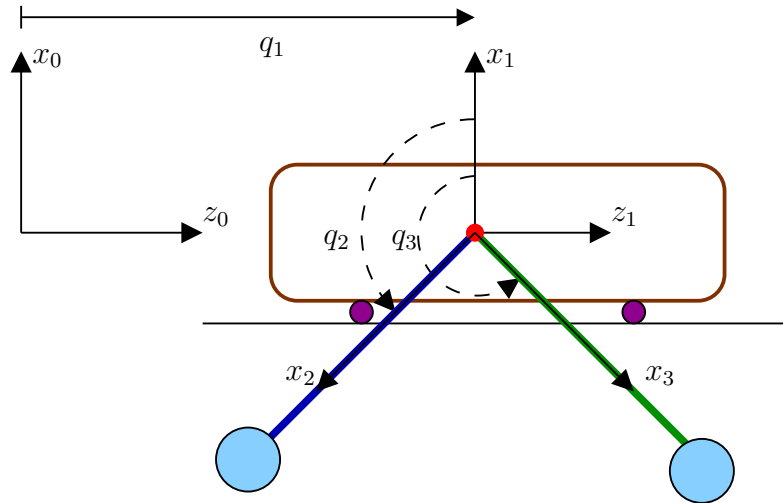


Figura 1.5: Sistema arborescente compuesto por un carro y dos péndulos con origen común.

| $j$ | $a(j)$ | $\sigma_j$ | $\alpha_j$  | $d_j$ | $\theta_j$ | $r_j$ |
|-----|--------|------------|-------------|-------|------------|-------|
| 1   | 0      | 1          | $0^\circ$   | 0     | 0          | $q_1$ |
| 2   | 1      | 0          | $-90^\circ$ | 0     | $q_2$      | 0     |
| 3   | 2      | 0          | $-90^\circ$ | 0     | $q_3$      | 0     |

Cuadro 1.1: Parámetros geométricos del sistema arborescente presentado en la figura 1.5.



En la estructura de la figura 1.6 se presenta otro caso de arborescencia, donde las articulaciones 2 y 3 están separadas y por tanto al definir los ejes  $z_2$  y  $z_3$  aparecerá a una distancia constante entre ellos. A pesar de existir un eje  $x_1$  que satisfaga las dos condiciones mencionadas anteriormente, es necesario establecer ejes  $x$  adicionales que en el caso del presente ejemplo se denotaran  $u_2$ ,  $u_3$  y deberán satisfacer las siguientes condiciones: (i)  $u_2$  debe estar a lo largo de la perpendicular común entre  $z_1$  y  $z_2$  (ii)  $u_3$  debe estar a lo largo de la perpendicular común entre  $z_1$  y  $z_3$ .

Una vez definidos los ejes  $u$  adicionales, se determinan los siguientes parámetros: (i)  $\gamma_j$ , como el ángulo entre  $x_i$  y  $u_j$  alrededor de  $z_i$  y (ii)  $b_j$  como la distancia ente  $x_i$  y  $u_j$  alrededor de  $z_i$ . Finalmente para este caso de arborescencia se trabaja con 6 parámetros geométricos; si se intentara trabajar con 4 parámetros siendo esto posible, la distancia que separa las articulaciones 2 y 3 del sistema de la figura 1.6 no resultaría involucrada en el modelo del sistema.

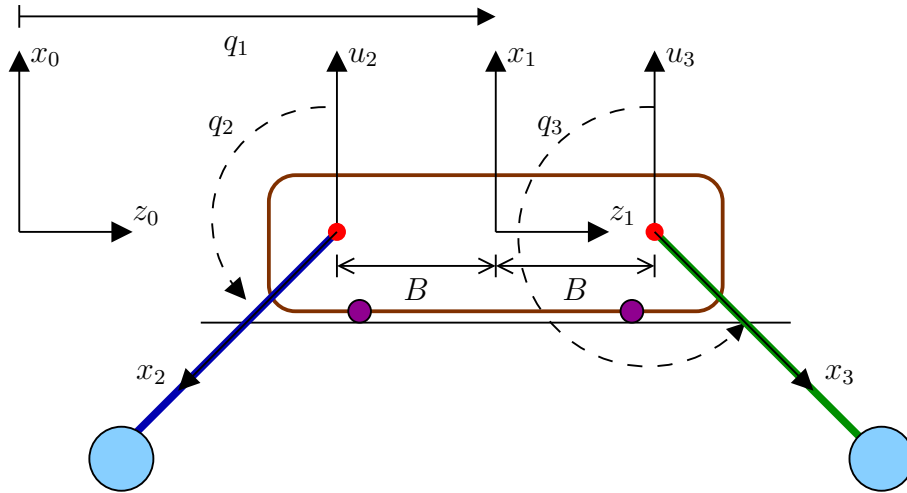


Figura 1.6: Sistema arborescente compuesto por un carro y dos péndulos con origen diferente.

Con estos parámetros adicionales se conforma la tabla 1.2. Así, la matriz de transformación  ${}^i T_j$  se obtiene a partir de los 6 parámetros geométricos  $(\gamma_j, b_j, \alpha_j, d_j, \theta_j, r_j)$ .

Con los parámetros anteriormente descritos se conforma la matriz de transformación que permite pasar del referente  $j$  al referente  $a(j)$  (siendo  $a(j)$  el antecedente de  $j$ ).

| $j$ | $a(j)$ | $\sigma_j$ | $\gamma_j$ | $b_j$ | $\alpha_j$  | $d_j$ | $\theta_j$ | $r_j$ |
|-----|--------|------------|------------|-------|-------------|-------|------------|-------|
| 1   | 0      | 1          | $0^\circ$  | 0     | $0^\circ$   | 0     | 0          | $q_1$ |
| 2   | 1      | 0          | $0^\circ$  | $-B$  | $-90^\circ$ | 0     | $q_2$      | 0     |
| 3   | 2      | 0          | $0^\circ$  | $B$   | $-90^\circ$ | 0     | $q_3$      | 0     |

Cuadro 1.2: Parámetros geométricos del sistema arborescente presentado en la figura 1.6.

$${}^{a(j)}T_j = \begin{bmatrix} C\gamma_j C\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -C\gamma_j S\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & S\gamma_j S\alpha_j & d_j C\gamma_j + r_j S\gamma_j S\alpha_j \\ s\gamma_j C\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -S\gamma_j S\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & -C\gamma_j S\alpha_j & d_j S\gamma_j - r_j C\gamma_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j + b_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

### 1.1.3. Estructura cerrada

Una cadena cinemática se denomina cerrada si cada uno de los cuerpos que la compone puede tener múltiples predecesores y múltiples antecesores. En la figura 1.7 el cuerpo  $C_0$  tiene como sucesores  $C_1$ ,  $C_1'$  y el cuerpo  $C_3$  tiene como predecesores a  $C_2$ ,  $C_2'$  formando una cadena cerrada.

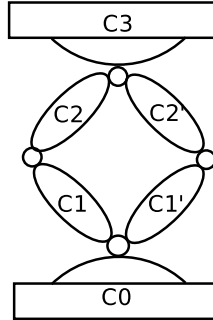


Figura 1.7: Estructura cinemática cerrada.

La definición de los ejes de referencia y posterior obtención de los parámetros geométricos para este tipo de robots inicia con la construcción de una estructura arborescente equivalente realizando un corte en una articulación pasiva del lazo cerrado [8]. Dado que la estructura objeto de estudio se ha clasificado para este tipo de configuración, el desarrollo se detalla en el capítulo 3.

## 1.2. Selección de estructura objeto de estudio

Para el desarrollo de este proyecto se realizó inicialmente un proceso de selección de la estructura a escala bidimensional que cumpliera con las características necesarias para el logro de los objetivos establecidos. Se analizaron estructuras propuestas por algunos estudios universitarios y de propia autoría, donde se evaluaron datos dimensionales y geométricos para la aplicabilidad conceptual de robótica y control.

A continuación se presentan las estructuras que se tuvieron en cuenta y las características que se acogieron o rechazaron para la posible realización de una nueva.

### 1.2.1. Estructuras basadas en modelos académicos

Fueron analizados 4 proyectos de control estructural desarrollados a pequeña escala en simulación y construcción en  $2D$  y  $3D$ , con aplicación de control estructural pasivo y activo; su fuente de simulación y generación de sismos basadas en plataformas móviles o señales de excitación sísmica.

- Estructura 1:

La figura 1.8 muestra una estructura de 6 plantas con actuadores magnetorreológicos, construida en la Universidad Tecnológica de Michigan [1], empleada para el análisis e implementación de control estructural, bajo la excitación sísmica artificial con movimiento unidireccional. Se empleó un algoritmo de control en espacio de estados en el dominio modal para un control estructural inalámbrico.

El análisis de esta estructura no permite apropiarse de mayores características, ya que es un mecanismo  $3D$  y que presenta flexibilidad estructural (deformación de los cuerpos) pero no flexibilidad articular, lo cual no permite el modelado como estructura robótica. En la lectura no especifican datos dimensionales relevantes para el edificio de este proyecto.

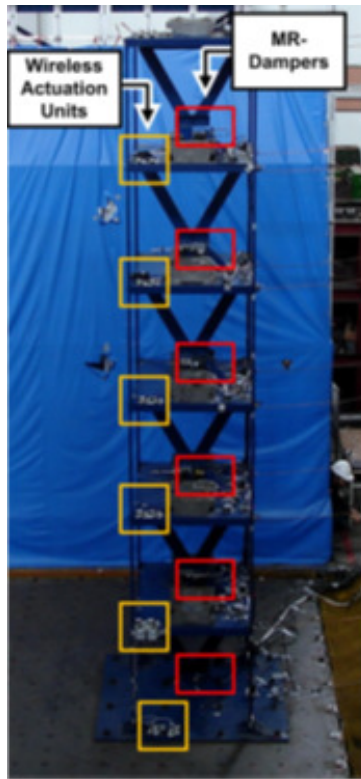


Figura 1.8: Estructura *No.1* tomada de [1].

- Estructura 2:

En el estudio que describe la estructura 1.9, se busca obtener un prototipo de sensor inalámbrico implementado en un sistema de control estructural, capaz de adquirir y analizar datos computacionales, además de realizar el accionamiento para la compensación de cargas en tiempo real. La estructura a gran escala es controlada por un elemento final magnetorreológico semi-activo y una red de sensores; tiene 3 niveles con  $3\text{ m}$  de altura cada uno y superficie de  $3 \times 2\text{ m}^2$  y una masa total de  $6000\text{ kg}$ , la estructura está ubicada sobre una plataforma móvil de  $5 \times 5\text{ m}^2$  que genera la excitación sísmica; en cada nivel posee sensores inalámbricos para la adquisición de datos y un actuador semi-activo en la base para contrarrestar la energía [2].

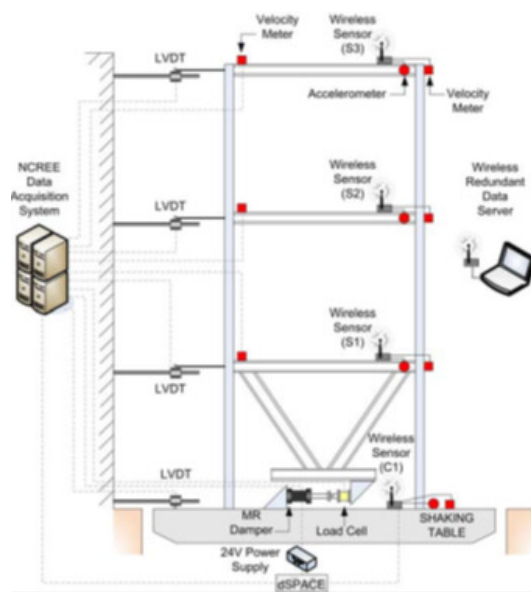


Figura 1.9: Estructura No.2 tomada de [2].

Los datos dimensionales que maneja esta estructura demuestran que se debe trabajar con magnitudes cercanas a las reales para lograr determinar certeras conclusiones de los controladores implementados. La disposición y flexibilidad del anterior mecanismo no permiten implementar modelados robóticos deseados para este proyecto.

- Estructura 3

La imagen 1.10 corresponde a una estructura implementada para el estudio de un algoritmo generalizado de control activo óptimo en lazo cerrado, la edificación posee 4 niveles, en la primera y tercera planta se ubican los actuadores finales de control. El artículo relacionado no describe características geométricas ni dimensionales de la estructura [3].

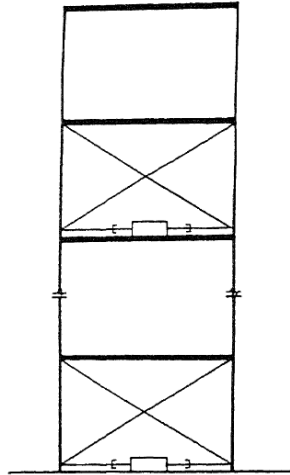


Figura 1.10: Estructura No.3 tomada de [3].

- Estructura 4

La estructura  $2D$  de 3 niveles 1.11, con excitación sísmica unidireccional en la base, es empleada para analizar el desempeño de un controlador descentralizado con actuadores semi-activos en cada nivel. No se registraron magnitudes exactas para la construcción de la estructura en el documento [4].

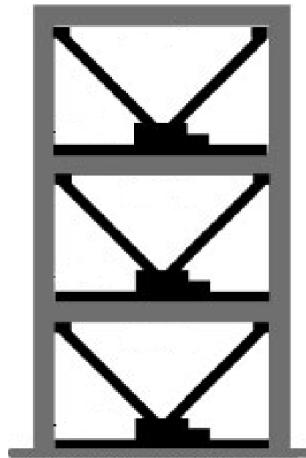


Figura 1.11: Estructura No.4 tomada de [4].

Cada artículo que describe las anteriores estructuras no plantean valores y características geométricas relevantes para ser apropiados en el proyecto, además no manejan grados de flexibilidad para la aplicación de modelado robótico a partir de la configuración mecánica. Sin embargo marcaron una pauta de diseño bidimensional y ubicación de los actuadores.

### 1.2.2. Estructuras planteadas

Teniendo en cuenta la falta de información precisa para seleccionar la mejor estructura, se planteó una estructura de autoría propia a la cual se le realizaría su análisis de movilidad para comprobar matemáticamente la posibilidad de implementarla.

- Estructura 1

El mecanismo de la figura 1.12 es una representación del primer nivel de la primera estructura propuesta. Para determinar sus grados de libertad se realizó el análisis de movilidad descrito en la sección 3.1, lo cual arrojó que la estructura no puede

ser implementada para el desarrollo de este proyecto, ya que su movilidad es de 0 grados de libertad.

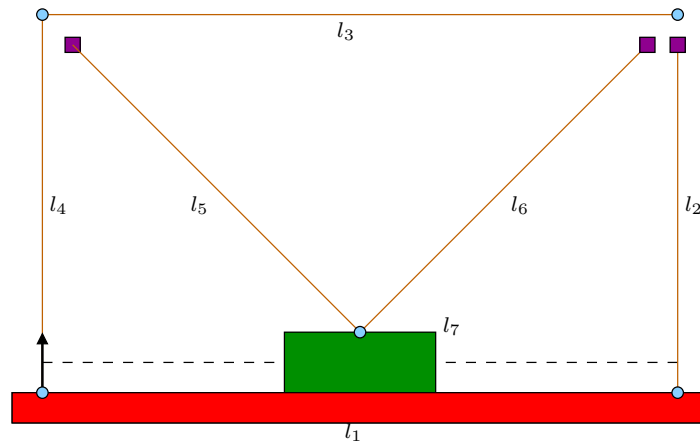


Figura 1.12: Estructura propuesta No.1.

- Estructura 2:

A la estructura representada en la imagen 1.13 se le realizó el análisis de movilidad, para determinar si es adecuada para la implementación del desarrollo del proyecto:



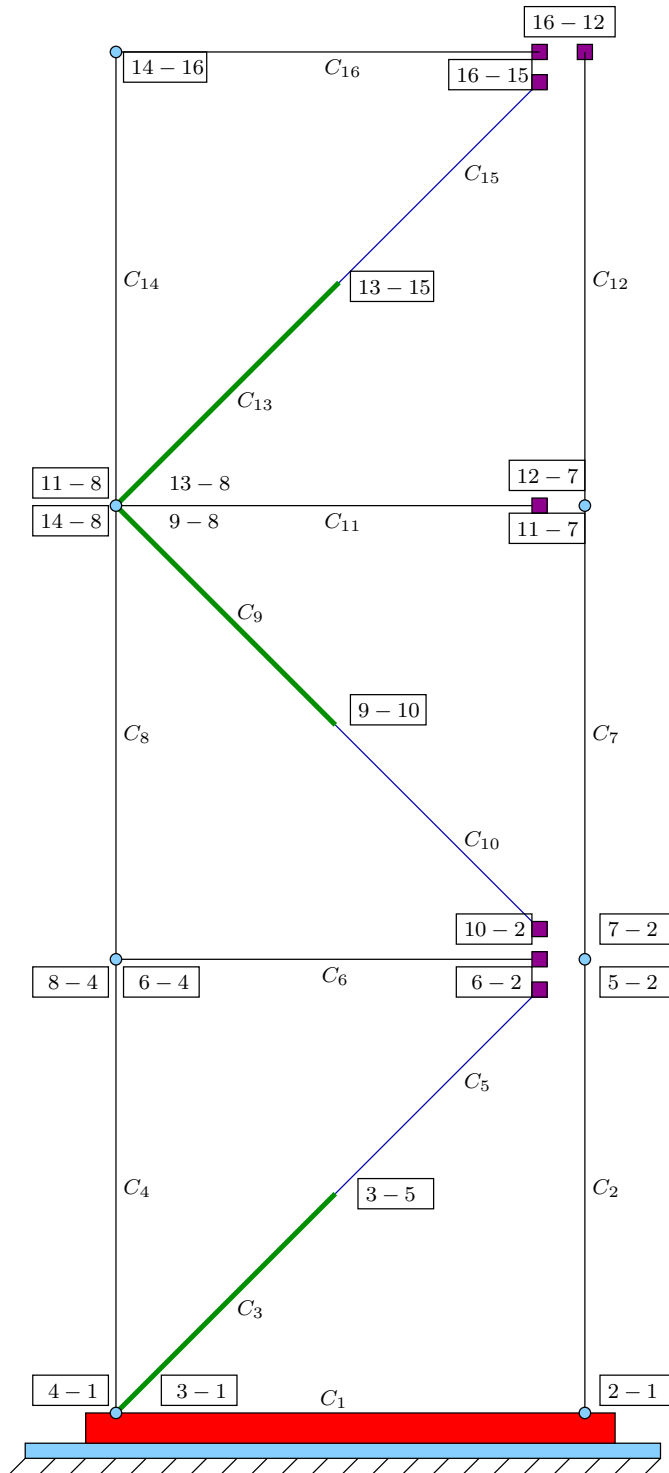


Figura 1.13: Estructura propuesta No.2.

El resultado obtenido indico que el mecanismo posee 4 grados de libertad, que corresponden a un grado de libertad para cada nivel de la estructura y un grado adicional para el movimiento de la base. Es decir que el mecanismo planteado es adecuado para el modelado y simulación propuesto en este proyecto.

En los siguientes capítulos se describen con mayor detalle los conceptos de mecanismos robóticos, análisis de movilidad y las restricciones que se deben manejar para lograr el modelado de este tipo de estructuras.

### 1.2.3. Presentación de la estructura

En la figura 1.14 se presenta la estructura objeto de estudio. Compuesta por 4 articulaciones prismáticas y 18 rotoides. La articulación prismática  $P_0$  no es una articulación física, ésta se utiliza para indicar que el resto de la estructura solo puede desplazarse hacia la derecha o izquierda sobre el plano de la página y que los movimientos verticales o de rotación de la base (cuerpo en color rojo) no están permitidos. De las 22 articulaciones que posee el sistema solo  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  son accionadas, las 19 restantes son articulaciones pasivas. El objetivo del accionamiento es mantener en cada nivel de la estructura el ángulo entre las barras verticales y horizontales alrededor o en  $90^\circ$  en presencia de fuerzas externas o en este caso "movimientos sísmicos" que puedan actuar sobre la estructura.

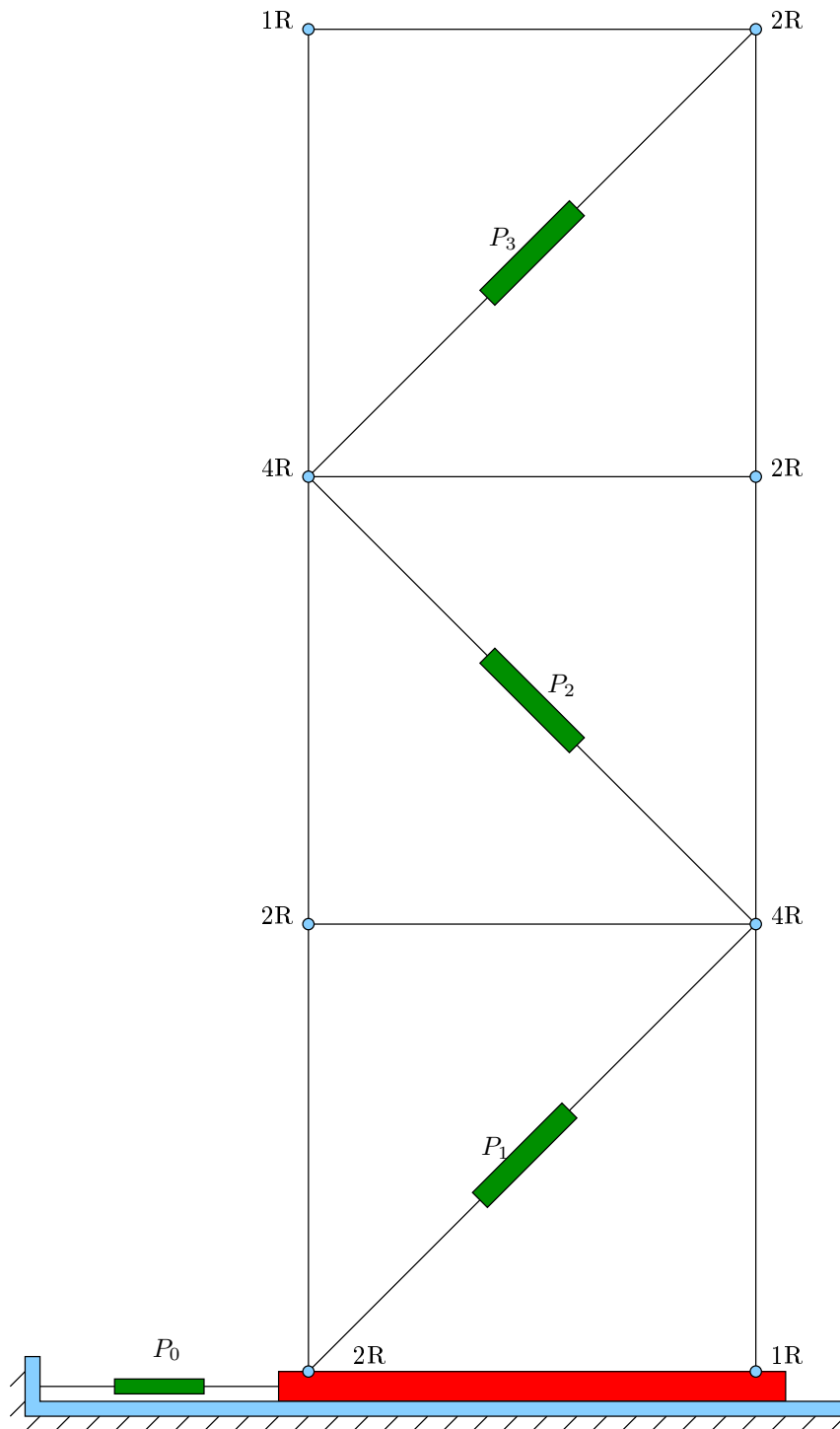


Figura 1.14: Articulaciones rotoides ( $R$ ) y prismáticas ( $P$ ) de la estructura objeto de estudio.

#### 1.2.4. Parámetros geométricos de la estructura

La configuración mecánica de los cuerpos indica que la estructura de la figura 1.14 se clasifica como cerrada, ya que en cada uno de los niveles se forma una cadena cinemática cerrada y los cuerpos pueden tener múltiples predecesores y múltiples antecesores. De acuerdo a esto, para obtener los parámetros geométricos se necesita una estructura equivalente arborescente; sin embargo es necesario abarcar el concepto de restricción holonómica para obtener la nueva estructura. En el capítulo 3 se detalla con más precisión lo que es una restricción holonómica.

La representación arborescente de la estructura se enseña en la figura 1.15 con la distribución y cantidad de cuerpos que posee la estructura equivalente.

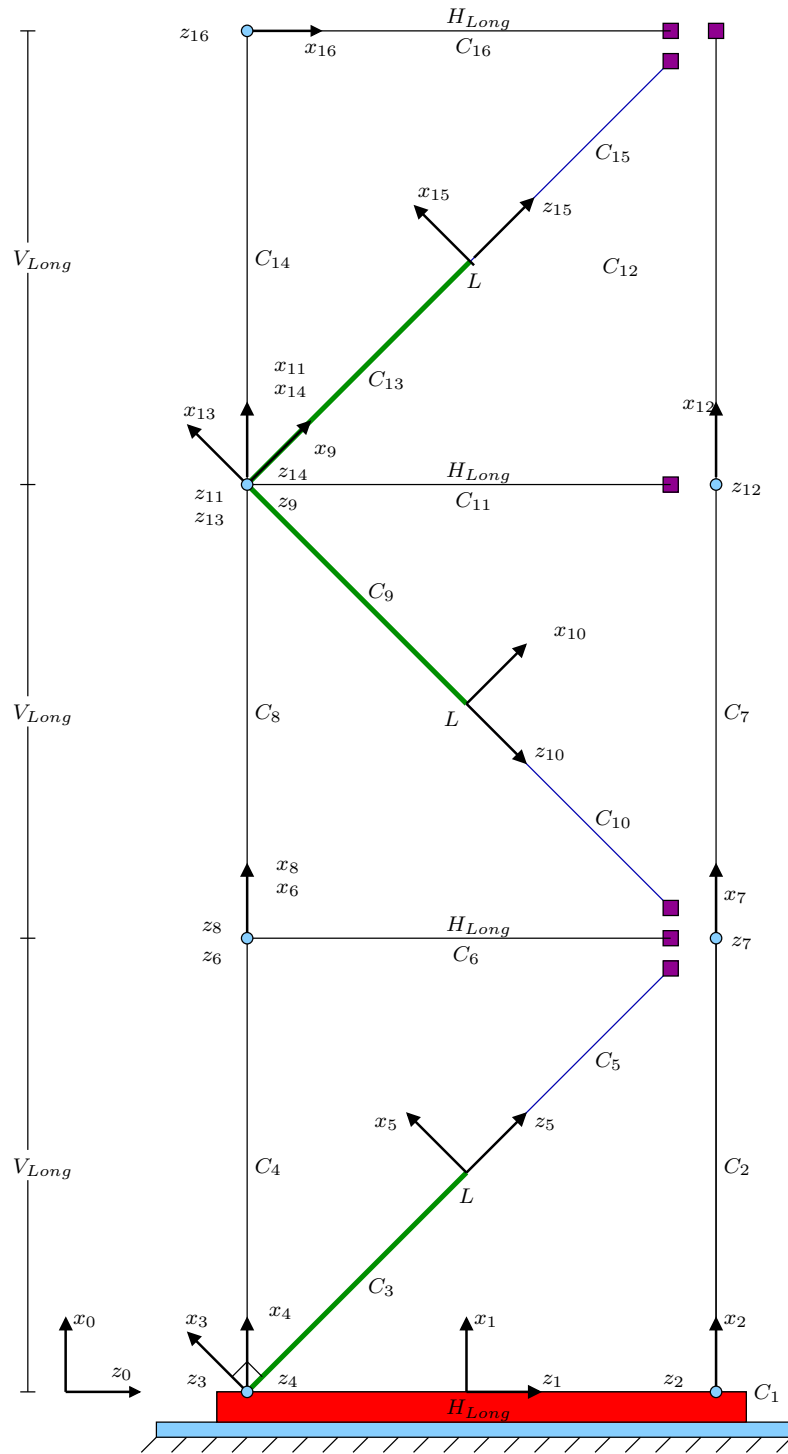


Figura 1.15: Estructura arborescente generada a partir de la estructura objeto de estudio. Con excepción de los ejes  $z_5$ ,  $z_{10}$  y  $z_{15}$ , los otros ejes  $z_i$  son perpendiculares al plano de la página.

Los ejes  $z_j$  de los sistemas de referencia de la estructura se seleccionaron según el eje de desplazamiento o de rotación de la articulación  $j$ . Los ejes  $x_j$  se seleccionaron paralelos a la perpendicular común de los ejes  $z_j$  y  $z_{s(j)}$ . Siendo  $s(j)$  el conjunto de sucesores del cuerpo  $j$  (ver Figura 1.16):

- El eje  $x_0$  se seleccionó paralelo a la perpendicular común entre  $z_0$  y  $z_1$ .
- El eje  $x_1$  se seleccionó<sup>1</sup> paralelo a la perpendicular común entre  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  y  $z_4$ .
- El eje  $x_2$  se seleccionó paralelo a la perpendicular común entre  $z_2$  y  $z_7$ .
- El eje  $x_3$  se seleccionó paralelo a la perpendicular común entre  $z_3$  y  $z_5$ .
- El eje  $x_4$  se seleccionó paralelo a la perpendicular común entre  $z_4$ ,  $z_6$  y  $z_8$ .
- El eje  $x_5$  se seleccionó perpendicular a  $z_5$ .
- El eje  $x_6$  se seleccionó perpendicular a  $z_6$ .
- El eje  $x_7$  se seleccionó paralelo a la perpendicular común entre  $z_7$  y  $z_{12}$ .
- El eje  $x_8$  se seleccionó paralelo a la perpendicular común entre  $z_8$ ,  $z_9$ ,  $z_{11}$ ,  $z_{13}$ ,  $z_{14}$ .
- El eje  $x_9$  se seleccionó paralelo a la perpendicular común entre  $z_9$  y  $z_{10}$ .
- El eje  $x_{10}$  se seleccionó perpendicular a  $z_{10}$ .
- El eje  $x_{11}$  se seleccionó perpendicular a  $z_{11}$ .
- El eje  $x_{12}$  se seleccionó perpendicular a  $z_{12}$ .
- El eje  $x_{13}$  se seleccionó paralelo a la perpendicular común entre  $z_{13}$  y  $z_{15}$ .
- El eje  $x_{14}$  se seleccionó paralelo a la perpendicular común entre  $z_{14}$  y  $z_{16}$ .
- El eje  $x_{15}$  se seleccionó perpendicular a  $z_{15}$ .
- El eje  $x_{16}$  se seleccionó perpendicular a  $z_{16}$ .

---

<sup>1</sup>Para la selección de este eje se debe tener en cuenta el caso de arborescencia donde los ejes están separados a una distancia; sección 1.1.2

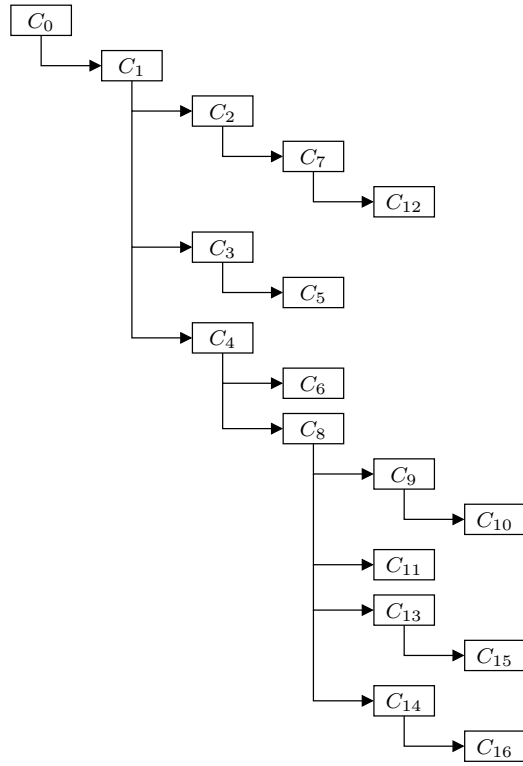


Figura 1.16: Representación jerárquica de la estructura arborescente de la figura 1.15.

| $j$ | $a_j$ | $u$ | $\sigma_j$ | $\gamma_j$ | $b_j$  | $\alpha_j$ | $d_j$      | $\theta_j$ | $r_j$    |
|-----|-------|-----|------------|------------|--------|------------|------------|------------|----------|
| 1   | 0     | 0   | 1          | 0          | 0      | 0          | 0          | 0          | $q_1$    |
| 2   | 1     | 0   | 0          | 0          | $B/2$  | $-\pi/2$   | 0          | $q_2$      | 0        |
| 3   | 1     | 0   | 0          | 0          | $-B/2$ | $-\pi/2$   | 0          | $q_3$      | 0        |
| 4   | 1     | 0   | 0          | 0          | $-B/2$ | $-\pi/2$   | 0          | $q_4$      | 0        |
| 5   | 3     | 1   | 1          | 0          | 0      | $\pi/2$    | 0          | 0          | $q_5$    |
| 6   | 4     | 0   | 0          | 0          | 0      | 0          | $V_{Long}$ | $q_6$      | 0        |
| 7   | 2     | 0   | 0          | 0          | 0      | 0          | $V_{Long}$ | $q_7$      | 0        |
| 8   | 4     | 0   | 0          | 0          | 0      | 0          | $V_{Long}$ | $q_8$      | 0        |
| 9   | 8     | 0   | 0          | 0          | 0      | 0          | $V_{Long}$ | $q_9$      | 0        |
| 10  | 9     | 1   | 1          | 0          | 0      | $\pi/2$    | 0          | 0          | $q_{10}$ |
| 11  | 8     | 0   | 0          | 0          | 0      | 0          | $V_{Long}$ | $q_{11}$   | 0        |
| 12  | 7     | 0   | 0          | 0          | 0      | 0          | $V_{Long}$ | $q_{12}$   | 0        |
| 13  | 8     | 0   | 0          | 0          | 0      | 0          | $V_{Long}$ | $q_{13}$   | 0        |
| 14  | 8     | 0   | 0          | 0          | 0      | 0          | $V_{Long}$ | $q_{14}$   | 0        |
| 15  | 13    | 1   | 1          | 0          | 0      | $\pi/2$    | 0          | 0          | $q_{15}$ |
| 16  | 14    | 0   | 0          | 0          | 0      | 0          | $V_{Long}$ | $q_{16}$   | 0        |

Cuadro 1.3: Parámetros geométricos de la estructura arborescente de la figura 1.15.

### 1.3. Resumen Del Capítulo

En el primer capítulo se presentó el concepto y clasificación de un robot de acuerdo a su configuración mecánica, se definieron los pasos para realizar la selección de los ejes del sistema de referencia asociado a cada articulación y el establecimiento de los parámetros geométricos para cada tipo de robot.

Para la estructura arborescente se presentaron dos ejemplos: (i). Un mecanismo arborescente con dos articulaciones concurrentes, donde su modelado se realizó con 4 parámetros geométricos  $(\alpha_j, d_j, \theta_j, r_j)$ . (ii). Un mecanismo arborescente con dos articulaciones separadas a una distancia constante, era posible realizar su modelado con los mismos 4 parámetros pero se incurriría en un error pues no se tenía en cuenta la distancia y el ángulo que existe entre las articulaciones, por ello se emplearon 6 parámetros geométricos  $(\gamma_j, b_j, \alpha_j, d_j, \theta_j, r_j)$  en el que se involucran el ángulo y la distancia entre ellas.

Finalmente se presentó la estructura objeto de estudio, a la cual se le establecieron los ejes coordenados para cada articulación y los parámetros geométricos de acuerdo a su clasificación mecánica.



## Capítulo 2

# Modelo dinámico de la estructura objeto de estudio

La dinámica de un robot presenta la relación existente entre el movimiento, las fuerzas y pares implicados en el mismo. Tales relaciones son representadas matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales, basadas en formulaciones desarrolladas, Walker y Orin [9], Newton-Euler [8], Lagrange-Euler [10] y las ecuaciones generalizadas de D'Alembert [11] son algunas de las utilizadas. El desarrollo del modelo dinámico para la estructura objeto de estudio se llevó a cabo bajo la formulación Newton-Euler que a pesar de su complejidad es más eficiente en el cálculo e implementación en código a través de programas como Matlab. El modelo obtenido permite simular el movimiento y diseño de la estructura mecánica, además del dimensionamiento de los actuadores y evaluación de controladores dinámicos.

La dinámica se representa por medio de dos modelos y de acuerdo a la metodología para diseñar el robot estos modelos podrán ser aplicados. Por ejemplo, si lo que se requiere es dimensionar los actuadores del robot para lograr un movimiento deseado, deberá emplearse el modelo dinámico inverso; por el contrario el modelo dinámico directo se emplea para llevar a cabo simulaciones y así analizar el desempeño del robot y los posibles sistemas de control.

El modelo dinámico inverso o MDI, determina los torques en función de las posiciones, velocidades articulares y fuerzas externas, su forma Lagrangiana se presenta en la ecuación (2.1), donde sobresalen las propiedades de la dinámica de un robot. Otra forma de expresar el MDI está dado por la ecuación (2.2), donde  $f$  es la función que representa el algoritmo de

dinámica inversa basado en la formulación de Newton Euler. El modelo dinámico directo o MDD, expresa las aceleraciones articulares en función de las posiciones, velocidades y fuerzas en las articulaciones; si de la ecuación Lagrangiana (2.1) se despeja el vector  $\ddot{q}$  se obtiene la ecuación (2.3) que representa el MDD.

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) \quad (2.1)$$

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (2.2)$$

$$\ddot{q} = A^{-1}(q) [\Gamma - H(q, \dot{q})] \quad (2.3)$$

Donde:

- $\ddot{q}$ : Vector de aceleraciones articulares.
- $\dot{q}$ : Vector de velocidades articulares.
- $q$ : Vector de posiciones articulares.
- $\Gamma$ : Vector de fuerzas o torques articulares.
- $A(q)$ : Es la matriz simétrica y positiva ( $n \times n$ ) que define la matriz inercial del robot.
- $H(q, \dot{q})$ : Fuerzas centrífugas, coriolisis, gravitacionales, fricción y fuerzas externas.

Para el desarrollo del proyecto se empleará el modelo dinámico directo ya que permite llevar a cabo simulaciones con el propósito de analizar el desempeño del robot, estudiar las ventajas de los posibles sistemas de control. Sin embargo para obtenerlo se hace un uso especial del MDI bajo la formulación del algoritmo de Newton Euler.

Para resolver el modelo dinámico y el algoritmo de Newton Euler se requieren dos tipos de parámetros: (i). Parámetros geométricos, presentados en el capítulo anterior (ii). Parámetros inerciales que se describen en la siguiente sección.

## 2.1. Momentos de Inercia

Esta propiedad representa la distribución de masa de un cuerpo en rotación alrededor de un eje de giro, dependiendo solo de la geometría del cuerpo y no de las fuerzas que intervienen en el movimiento. Existen dos momentos de inercia: el primer momento de inercia o de primer orden, y el segundo momento de inercia que da lugar a la matriz de inercia.

El primero momento de inercia para un cuerpo  $C_j$  cuyo centro de gravedad con respecto al sistema de referencia es  $R_j$  está dado por  $\begin{bmatrix} X_j & Y_j & Z_j \end{bmatrix}^T$ , el primer momento de inercia se define como.

$${}^jMS_j = M \cdot \begin{bmatrix} X_j & Y_j & Z_j \end{bmatrix}^T \quad (2.4)$$

El segundo momento de inercia representa la resistencia en los ejes  $X, Y$  y  $Z$  que opone el cuerpo sometido a una rotación. El tensor de inercia es una matriz simétrica y definida positiva que caracteriza la inercia rotacional de un sólido indeformable. Dicha matriz, de dimensión  $3 \times 3$ , esta conformada por los momentos de inercia según tres ejes perpendiculares y tres productos de inercia:

$${}^{j-1}\mathbf{J}_j = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & \int xy dm & \int xz dm \\ \int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & \int yz dm \\ \int xz dm & \int yy dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$${}^{j-1}\mathbf{J}_j = \begin{pmatrix} XX_j & XY_j & XZ_j \\ XX_j & YY_j & YZ_j \\ XX_j & YY_j & ZZ_j \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

## 2.2. Parámetros Dinámicos

Los parámetros dinámicos que hacen parte de las ecuaciones dinámicas de la estructura son once:

- $XX_j, XY_j, XZ_j, YY_j, YZ_j, ZZ_j$  parámetros del tensor de inercia seis.
- $MX_j, MY_j, MZ_j$  términos del primer momento de inercia tres.
- $M_j$  masa del cuerpo.

- $I_{aj}$  inercia del motor.

El cálculo numérico de los parámetros dinámicos anteriores se obtiene por medio de software, para el presente caso se emplea el programa de diseño SolidEdge donde a partir del diseño del edificio e ingreso de medidas y pesos exactos, el CAD arroja en una de sus funciones de usuario el tensor de inercia completo, evitando cálculos manuales que probablemente son aproximados.

## 2.3. Modelo dinámico directo basado en el modelo dinámico inverso

### 2.3.1. Formulación Newton-Euler

Tal y como lo indica el MDD 2.3, la aceleración es expresada en función de la posición, velocidad, torques y fuerzas externas. Pero ¿ Cuales son los datos conocidos de la estructura? ¿ Es posible hallar el MDD con los datos conocidos?. Pues bien, de la estructura se conocen los estados iniciales para la posición  $q_0$  y velocidad  $\dot{q}_0$ . Sin embargo, no es posible encontrar el MDD ya que hace falta el termino  $\Gamma$  que representa los torques.

La formulación Newton-Euler consiste de dos cálculos recursivos: recursivo hacia delante y recursivo hacia atrás. El conjunto de ecuaciones recursivas hacia delante, calcula las velocidades y aceleraciones articulares y por consiguiente los torques dinámicos, desde la base hasta el órgano terminal del robot. Las ecuaciones recursivas hacia atrás calculan los pares y fuerzas necesarios para cada articulación, desde el órgano terminal hasta la base del robot. En la figura 2.1 se representa el algoritmo de Newton Euler y el orden lógico para hallar el torque, a pesar de que en ella se muestran solo dos etapas, el algoritmo se repite las n-veces necesarias para hallar la solución.

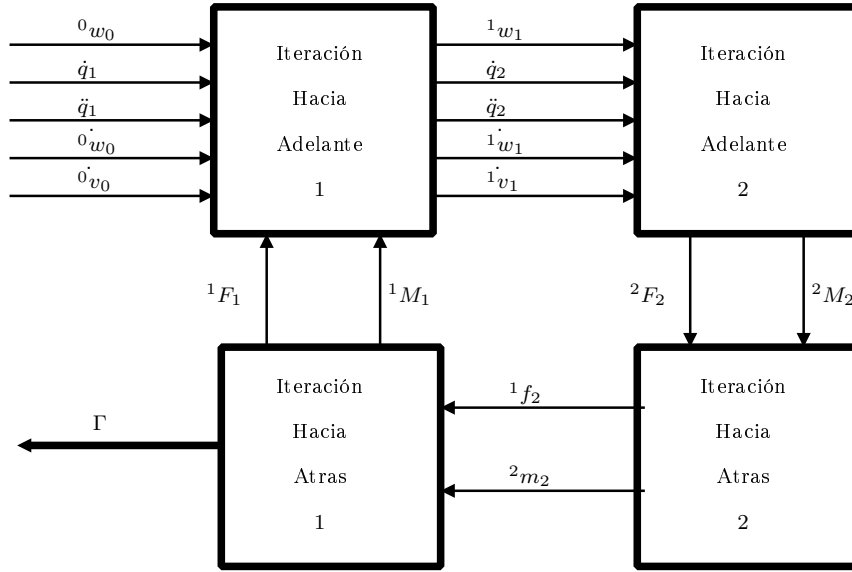


Figura 2.1: Algoritmo de Newton-Euler.

El MDI brinda la ventaja de trabajar con matemática simbólica y al realizar los cálculos de recursividad planteados por Newton Euler, se hallará una ecuación simbólica que represente el torque  $\Gamma$  en función de la posición y velocidad. De acuerdo a lo descrito, a continuación se muestra el procedimiento general para hallar el MDD a partir del MDI:

De la ecuación (2.1) el cálculo del MDD puede llevarse a cabo en tres pasos, (i) Cálculo de  $H(q, \dot{q})$ . (ii) Cálculo de la matriz  $A(q)$ . (iii) Cálculo de  $\ddot{q}$  a partir de la solución de la ecuación lineal (2.3).

i. **Paso 1**

Para calcular  $H(q, \dot{q})$  se igualan las ecuaciones (2.2) y (2.1). Para la nueva expresión se hace  $\ddot{q} = 0$ , con el objetivo de eliminar la matriz  $A$  en la nueva ecuación, obteniendo entonces  $H(q, \dot{q})$  igual a  $\Gamma$ ; ver figura 2.2:

Si,  $\ddot{q} = 0$  entonces:

$$H(q, \dot{q}) = f(q, \dot{q}, 0) \tag{2.7}$$

En la expresión anterior  $\dot{q}$  y  $q$  son vectores de variables simbólicas que contienen a  $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n$  y  $q_1, q_2 \dots q_n$  respectivamente. El algoritmo Newton Euler denotado por la función  $f$  se ejecuta con los valores simbólicos de  $\dot{q}$  y  $q$ , ver ecuación 2.2.

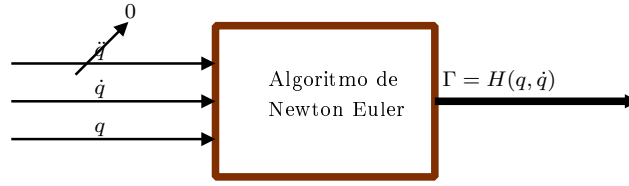


Figura 2.2: Cálculo simbólico del vector de fuerzas centrífugas, de coriolis y gravitacionales.

ii. *Paso 2*

El cálculo de la matriz de inercia se realiza columna por columna, esta vez, en la igualación de las ecuaciones (2.2) y (2.1) se hace  $\dot{q} = 0$  eliminando el término  $H(q, \dot{q})$  e igualando la fuerza de gravedad a cero.  $\ddot{q}$  es igual a  $e_i$ , siendo  $e_i$  la columna  $i^{th}$  de una matriz identidad con el elemento  $i = 1$  y 0 en el resto del vector. Con lo anterior se determina entonces que la  $i^{th}$  columna de la matriz identidad  $A$  es igual a  $\Gamma$ , ver figura 2.3, así:

Si,  $\dot{q} = 0$  y  $\ddot{q} = e_i$ , entonces:

$$A(q)\ddot{q} = f(q, 0, \ddot{q}) \quad (2.8)$$

Se denota  $A_i(q)$  la columna  $i$  de  $A(q)$ , la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$\left[ A_1(q), A_2(q), \dots, A_n(q) \right] \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} = f(q, 0, \ddot{q}) \quad (2.9)$$

$$A_1(q)\ddot{q}_1 + A_2(q)\ddot{q}_2 + \dots + A_n(q)\ddot{q}_n = f(q, 0, \ddot{q}) \quad (2.10)$$

Luego, para obtener la primera columna de la matriz  $A$ :

$$\ddot{q}_2 = 0, \ddot{q}_3 = 0 \dots \ddot{q}_n = 0 \text{ y } \ddot{q}_1 = 1 \quad (2.11)$$

$$A_1 = f(q, 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) \quad (2.12)$$

Para obtener la columna  $i$  de la matriz de inercia  $A$ :

$$\ddot{q}_1 = 0, \ddot{q}_2 = 0, \ddot{q}_3 = 0, \dots, \ddot{q}_i = 1, \ddot{q}_{i+1} = 0, \dots \quad (2.13)$$

$$A_i = f(q, 0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}) \quad (2.14)$$

En general:

$$A_i = f(q, 0, e_i) \quad (2.15)$$

Al igual que en el paso 1, el procedimiento será realizado para  $i = 1 \dots n$  con valores simbólicos para el vector  $q$  y así obtener completa la matriz inercial del robot.

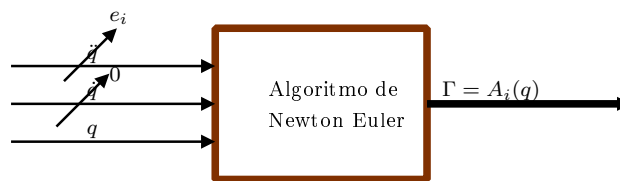


Figura 2.3: Cálculo simbólico de la columna  $i$  de la matriz de inercia.  $e_i$  representa la columna  $i$  de una matriz identidad de dimensión igual al número de elementos del vector  $q$ .

iii. *Paso 3*

Como se mencionó anteriormente para encontrar las expresiones matemáticas  $A$  y  $H$  en los pasos 1 y 2, no fue necesario conocer valores numéricos para  $q, \dot{q}, \ddot{q}$ , ya que el MDI permite trabajar con valores simbólicos, obteniendo una gran cantidad de ecuaciones que deberán ser trabajadas bajo escenario computacional.

Obtenidas las matrices  $A$  y  $H$ , se debe encontrar la aceleración articular a partir de la ecuación lineal (2.3). Dicha ecuación sugiere trabajar con  $A^{-1}(q)$ ; sin embargo invertir  $A$  conformada por valores simbólicos requiere un costo computacional demasiado alto, entonces, de acuerdo a esto, la aceleración articular se encuentra de tal forma que al realizar la simulación se evalúa la matriz  $A$  en el valor actual de  $q$ , y  $H$  en el estado actual de  $q$  y  $\dot{q}$  resolviendo numéricamente el sistema de ecuaciones resultante.

## 2.4. Generación del modelo dinámico directo

A pesar de contar con herramientas computacionales que faciliten los cálculos matemáticos y procedimentales para modelos robóticos, es importante conocer la base teórica y fundamental de los resultados; por ello en las secciones anteriores se presentó el procedimiento teórico que debe llevarse a cabo para encontrar el MDD.

Software libres, comerciales o académicos son el apoyo para el desarrollo de modelos sencillos y complejos. A continuación se da a conocer el software empleado, porque se selecciono y como se aplicó a la estructura objeto de estudio.

### 2.4.1. Software

Programas comerciales como SYMORO permiten modelar cadenas cinemáticas seriales y aborescentes de  $n$  grados de libertad . Sin embargo como se trata de cadenas cinemáticas cerradas se empezó la exploración y aplicación de un nuevo software académico, que además de permitir el manejo de mecanismos con múltiples restricciones, incentiva el apoyo a herramientas desarrolladas en la Universidad del Cauca.

El paquete académico fue elaborado por el PhD. Carlos F. Rengifo utilizando Toolbox de Matemática Simbólica de Matlab, además de otros paquetes del mismo software, creando un código estándar abierto que permite ser modificado en cuanto sea necesario, tanto en líneas de código madre como en valores inerciales y geométricos del robot. Al programa son



ingresados los parámetros geométricos, altura y ancho del edificio y parámetros inerciales del robot en tablas designadas, y posteriormente se ejecuta para obtener el modelo. Desde el código software los parámetros ingresados para un nivel se ven como en el cuadro 2.1:

Cuadro 2.1: Parámetros cinemáticos en el código Matlab

```

1      % Table of kinematic parameters
2      % [j, a(j), u, sigma, gamma/pi, bi, alpha/pi, d, theta, r]
3      KParams = [1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
4                 2, 1, 0, 0, 0, B2, -1/2, 0, 0, 0;
5                 3, 1, 0, 0, 0, -B2, -1/2, 0, 0, 0;
6                 4, 1, 0, 0, 0, -B2, -1/2, 0, 0, 0;
7                 5, 3, 1, 1, 0, 0, 1/2, 0, 0, 0;
8                 6, 4, 0, 0, 0, 0, 0, D6, 0, 0;
9                 7, 2, 0, 0, 0, 0, 0, D7, 0, 0;
10                8, 4, 0, 0, 0, 0, 0, D8, 0, 0;
11                9, 8, 0, 0, 0, 0, 0, D9, 0, 0;
12               10, 9, 1, 1, 0, 0, 1/2, 0, 0, 0;
13               11, 8, 0, 0, 0, 0, 0, D11, 0, 0];

```

El cuadro 2.2 es una vista del código software donde se ingresan los parámetros inerciales obtenidos por medio de la herramienta CAD. Donde los 6 primeros términos corresponden al tensor de inercia, los 3 siguientes al primer momento de inercia, los últimos dos son la masa y la inercia del motor correspondientemente. Si se requiere realizar un cambio en estos parámetros se debe digitar el campo correspondiente del software.

Cuadro 2.2: Código software de los parámetros inerciales

```

1      % Inertial parameters
2      ZZ      = 1;
3      M       = 1;
4      MX      = HLong / 2;
5      MY      = LRod3 / 2;
6      MZ      = 0;
7      Ia      = 0.1;
8
9      % Table of Inertial parameters

```

```

10 IParams = [0, 0, 0, 0, 0, ZZ, MX, 0, 0, M, 0; % C1
11           0, 0, 0, 0, 0, ZZ, MX, 0, 0, M, 0; % C2
12           0, 0, 0, 0, 0, ZZ, MX, 0, 0, M, 0; % C3
13           0, 0, 0, 0, 0, ZZ, MX, 0, 0, M, 0; % C4
14           0, 0, 0, 0, 0, ZZ, 0, 0, MZ, M, Ia; % C5
15           0, 0, 0, 0, 0, ZZ, MX, 0, 0, M, 0; % C6
16           0, 0, 0, 0, 0, ZZ, MX, 0, 0, M, 0; % C7
17           0, 0, 0, 0, 0, ZZ, MX, 0, 0, M, 0; % C8
18           0, 0, 0, 0, 0, ZZ, 0, MY, 0, M, 0; % C9
19           0, 0, 0, 0, 0, ZZ, 0, 0, MZ, M, Ia; % C10
20           0, 0, 0, 0, 0, ZZ, MX, 0, 0, M, 0]; %C11
21 end

```

El software aun no presenta una interfaz de usuario, sin embargo el contenido del código que debe ser manipulado es claro, siendo fácil el ingreso y eliminación de parámetros. Una vez se completan los campos a ser llenados, se ejecuta el código, generando archivos que representan el modelo completo del robot.

Los archivos obtenidos son:

- Vector de Fuerzas.
- Matriz de Inercia.
- Matriz Jacobiana.
- Derivada de la Jacobiana

A partir del modelo obtenido en esta sección se desarrolla un código que abarque el modelado con restricciones mecánicas de la estructura.

## 2.5. Resumen de Capítulo

En el segundo capítulo se introdujo el concepto de modelo dinámico, la metodología y el desarrollo que se llevó a cabo en el proyecto para obtener esta etapa.

Se trabajó con el MDD para simular la estructura y analizar su desempeño. Sin embargo, como los datos conocidos son pocos, se empleó el MDI bajo la formulación de Newton-Euler; el objetivo de emplear el MDI para obtener el MDD, es que este permite trabajar con matemática simbólica para obtener los sistemas de ecuaciones y vectores de los términos desconocidos.

Paso a paso se presentó el desarrollo teórico del MDI, obteniendo los términos desconocidos en función de variables simbólicas para  $q$ ,  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$ ; y finalmente ser reemplazados en el MDD para obtener un modelo. Todo el procedimiento de modelado comprendido en este capítulo se ejecutó computacionalmente por medio del paquete software académico desarrollado en Matlab por el PhD. Carlos F. Rengifo R. Los archivos generados por el software son base fundamental para completar el modelado más adelante con un código que contemple las restricciones mecánicas.

# Capítulo 3

## Modelado de Mecanismos con Restricciones Cinemáticas

La cadena cinemática de un robot consta de la unión lógica de cuerpos que forman una estructura mecánica, y puede ser clasificada de acuerdo a su configuración, en estructuras seriales, arborescente o cerradas. De acuerdo al tipo de estructura el modelado dinámico varía, partiendo de conceptos y soluciones de desarrollo apropiadas para cada caso. En el presente capítulo se abarca el desarrollo de modelado para la estructura objeto de estudio clasificada en mecanismo cerrado.

El modelo dinámico que se desarrolla a continuación se trabaja con base en los capítulos 1 y 2 donde se obtuvieron los parámetros geométricos y ecuaciones simbólicas para la estructura, que permiten continuar con la obtención del modelado total al añadir el concepto de restricción holonómica.

### 3.1. Restricciones Cinemáticas

Ciertos tipos de estructuras no pueden ser analizadas mediante los conceptos de la mecánica clásica; es el caso de sistemas mecánicos donde las variables articulares que lo componen no logran evolucionar de manera independiente sino que los valores que toma un subconjunto de ellas están determinados directamente por los valores de las otras. Este tipo de sistemas se dice que posee restricciones de movilidad. El desarrollo analítico de ese mecanismo debe realizarse a partir de conceptos tratados en la mecánica analítica; donde

se dice que, si para dicha estructura las restricciones pueden escribirse como una ecuación algebraica que involucra únicamente variables de posición pero no de velocidad, entonces la restricción es holonómica [12].

El siguiente mecanismo, ver figura 3.1, consta de 3 barras, una de ellas  $L_v$  de longitud variable;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  y  $L_v$  son variables articulares del mecanismo que no pueden fijarse independientemente. Luego, es necesario identificar por medio del análisis de movilidad propuesto por Gruebler [13], cuantas variables se pueden fijar independientemente.

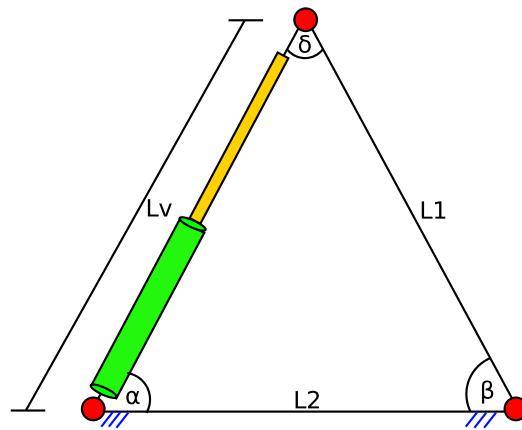


Figura 3.1: Mecanismo triangular.

La siguiente es la formula general propuesta por Gruebler para determinar los grados de libertad en un mecanismo.

$$F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i \quad (3.1)$$

Donde:

$F$ : Número de grados de libertad.

$\lambda$ : Constante, 6 para mecanismos espaciales y 3 para mecanismos planares.

$l$ : Número de cuerpos.

$j$ : Número de articulaciones.

$f_i$ : Número de grados de libertad de la articulación.

Aplicando el análisis al mecanismo triangular se tiene:

$$\begin{aligned}
 F &= 3(4 - 4 - 1) + (1 + 1 + 1 + 1) \\
 F &= -3 + 4 \\
 F &= 1
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Lo anterior indica que el mecanismo tiene 1 grado de libertad, Así por ejemplo si se fija  $L_v$ , los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$ , deben satisfacer las siguientes ecuaciones algebraicas dadas por el teorema de los cosenos:

$$\begin{aligned}
 L_v^2 + L_2^2 - 2L_vL_2 \cos(\alpha) &= L_1^2 \\
 L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2 \cos(\beta) &= L_v^2 \\
 L_v^2 + L_1^2 - 2L_vL_1 \cos(\delta) &= L_2^2
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Al resolver las ecuaciones anteriores se obtienen los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  que corresponden a un  $L_v$  determinado.

### 3.1.1. Modelado de una Estructura con Restricción

El edificio objeto de estudio presentado en el capítulo 2 corresponde a un mecanismo cerrado en cada uno de sus niveles y su modelado se trabaja bajo la siguiente afirmación:

$$\text{Mecanismo arborescente} + \text{Ec. Algebraica} = \text{Mecanismo Cerrado}$$

Debe declararse la anterior afirmación ya que no existe un método de desarrollo capaz de obtener el modelo dinámico para un sistema tan complejo donde se logren asignar todas las variables involucradas. Entonces la afirmación indica que el mecanismo cerrado pasa a ser arborescente al abrirse en una articulación pasiva e imponerle una ecuación algebraica correspondiente a una restricción en las posiciones de los puntos abiertos, que implica nuevamente su unión. Para explicar con mayor detalle, a continuación se hace uso del mecanismo de 4 barras mostrado en la figura 3.2 análogo a la estructura objeto

estudio, con el fin de mostrar el desarrollo general para hallar la cinemática de este tipo de estructuras.

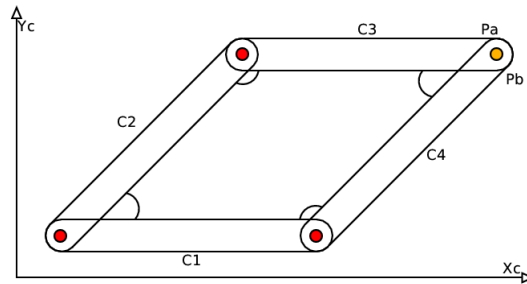


Figura 3.2: Mecanismo de 4 barras con restricción holonómica.

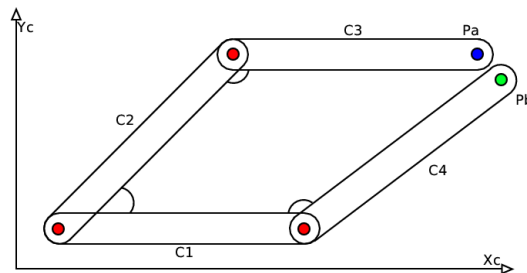


Figura 3.3: Mecanismo de 4 barras equivalente abierto 3.2.

El mecanismo se compone de 3 cuerpos de libre movimiento  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , y un cuerpo  $C_1$  que se considera fijo al suelo. Donde  ${}^3p_a$  y  ${}^4p_b$  denotan la posición cartesiana de los puntos  $a$  y  $b$  en los sistemas de referencia 3 y 4 respectivamente. Al aplicar el análisis de movilidad al mecanismo mostrado en la figura 3.2 se obtiene que el movimiento de los cuerpos es interdependiente, y es necesario en el modelado tomar como nula la unión de los puntos  $a$  y  $b$ ; es decir que la estructura será temporalmente abierta, ver figura 3.3 y se añadirá una fuerza  $F$  que incida sobre las aceleraciones articulares para mantener unidos los puntos  $a$  y  $b$ ; obteniendo un modelo sujeto a una restricción que se conoce como restricción holonómica:

$$A(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = B\Gamma + J^T(q)F \quad (3.4)$$

Donde:

$J^T(q)$ : Matriz jacobiana.

$F$ : Vector de Fuerza en las direcciones de los  $X_c$  y  $Y_c$ .

Es posible asegurar la unión de los puntos de los eslabones  $C_3$  y  $C_4$  si además de adicionar una fuerza  $F$ , el desplazamiento de los mismos coincide y las velocidades son iguales. Es decir, que si dos puntos ubicados en el espacio inician en la misma posición y sus velocidades y aceleraciones son iguales nunca se van a separar, luego la diferencia entre ellas dará como resultado 0, sin embargo para permitir la relación entre los puntos  $a$  y  $b$  es necesario definir un sistema coordenado común ya que no se pueden operar vectores que se encuentren en sistemas coordenados diferentes.

Nueva Afirmación: "Si la diferencia de velocidades de 2 puntos que pertenecen a cuerpos diferentes es igual a cero y la diferencia de posiciones en los mismos es igual a cero, entonces los puntos se encuentran unidos".

De la ecuación (3.4) que presenta la solución dinámica para estructuras con restricciones, se debe encontrar inicialmente el valor de aquellas variables que resultan incógnitas; siendo el caso de  $\ddot{q}$  y  $F$ . A continuación se presenta el desarrollo que debe llevarse a cabo para encontrar sus expresiones matemáticas y una vez conocidas se darán las condiciones que aseguren el resultado deseado.

Cada articulación de la estructura responde a fuerzas externas a la que se ve sometido el mecanismo, reflejándose en inicios y cambios de velocidades y aceleraciones. Para conocer dichas velocidades se introduce el manejo de un modelo cinemático, el cual describe las velocidades articulares en el espacio operacional en función de las mismas en el espacio articular:

- Para el cuerpo  $C_3$ :

$$\begin{bmatrix} {}^3v_3 \\ {}^3w_3 \end{bmatrix} = J_3(q)\dot{q} \quad (3.5)$$

- Para el cuerpo  $C_4$

$$\begin{bmatrix} {}^4v_4 \\ {}^4w_4 \end{bmatrix} = J_4(q)\dot{q} \quad (3.6)$$

La ecuación (3.5) expresa las velocidades lineal y angular del cuerpo 3 con respecto al referente galileano en el sistema coordenado asociado al cuerpo 3; la ecuación (3.6) expresa lo anteriormente mencionado pero esta vez para el cuerpo 4. Como se desea en particular conocer la velocidad lineal de los puntos  ${}^3p_a$  y  ${}^4p_b$  para cumplir las condiciones de diferencia igual a cero, se debe particularizar el modelo cinemático para cada uno de ellos:



$$\begin{aligned}
{}^3\bar{v}_a &= {}^3\bar{v}_3 + {}^3\bar{\omega}_3 \times {}^3\bar{p}_a \\
&= {}^3\bar{v}_3 - {}^3\bar{p}_a \times {}^3\bar{\omega}_3 \\
{}^4\bar{v}_b &= {}^4\bar{v}_4 + {}^4\bar{\omega}_4 \times {}^4\bar{p}_b \\
&= {}^4\bar{v}_4 - {}^4\bar{p}_b \times {}^4\bar{\omega}_4
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Los vectores  ${}^3\bar{v}_a$  y  ${}^4\bar{v}_b$  representan las velocidades lineales de los puntos  $p_a$  y  $p_b$  con respecto a los referentes 3 y 4 respectivamente. Sin embargo, cada uno de estos vectores está expresado en un referente diferente, el primero en el referente 3 y el segundo en el referente 4. Las anteriores ecuaciones pueden escribirse de manera matricial utilizando el operador *skew*, definido a continuación:

$$\hat{p} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Este operador permite expresar el producto cruz entre dos vectores como una multiplicación entre una matrix y un vector ( $\hat{p} \cdot a = p \times a$ ). Al aplicar el operador *skew* a los vectores  ${}^3\bar{p}_a$  y  ${}^4\bar{p}_b$  se obtiene una ecuación equivalente a (3.7), así:

$$\begin{aligned}
{}^3v_a &= {}^3v_3 - {}^3\hat{p}_a \cdot {}^3\omega_3 \\
&= \begin{bmatrix} I & -{}^3\hat{p}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3v_3 \\ {}^3\omega_3 \end{bmatrix} \\
{}^4v_b &= {}^4v_4 - {}^4\hat{p}_b \cdot {}^4\omega_4 \\
&= \begin{bmatrix} I & -{}^4\hat{p}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^4v_4 \\ {}^4\omega_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Siendo  $I$  una matrix identidad de  $3 \times 3$ .

Por ejemplo, si en la ecuación anterior la velocidad angular  $w$  es nula, la velocidad de un punto cualquiera del cuerpo será igual a la velocidad del referente del cuerpo; si por

el contrario se tienen las dos velocidades  $v$  y  $w$ , al multiplicar la matriz identidad por el vector  $v$  resultará un vector con las tres componentes en velocidad, y al multiplicar la matriz de posición  $\hat{p}$  por  $w$  resultará el componente de velocidad lineal debido a la rotación, obteniendo la diferencia de velocidades lineales que inciden en la velocidad del punto respecto al referente del cuerpo.

Al reemplazar las ecuaciones (3.5) y (3.6) en (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned} {}^3v_a &= \begin{bmatrix} I & -{}^3\hat{p}_a \end{bmatrix} J_3(q) \dot{q} \\ {}^4v_b &= \begin{bmatrix} I & -{}^4\hat{p}_b \end{bmatrix} J_4(q) \dot{q} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Planteadas las ecuaciones anteriores es necesario llevar a  ${}^3v_a$  y  ${}^4v_b$  a un sistema coordinado común, que en este caso será el referente galileano  $(x_c, y_c)$ . Esto se hace a partir de la ecuación (3.11) donde el uso de las matrices de rotación  ${}^gR_3$  y  ${}^gR_4$  permite que ahora las velocidades pasen del referente del cuerpo al referente Galileano común.

$$\begin{aligned} {}^g v_a &= {}^gR_3 \begin{bmatrix} I & -{}^3\hat{p}_a \end{bmatrix} J_3(q) \dot{q} \\ {}^g v_b &= {}^gR_4 \begin{bmatrix} I & -{}^4\hat{p}_b \end{bmatrix} J_4(q) \dot{q} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para encontrar la expresión matemática que contiene el termino  $\ddot{q}$  se derivan las ecuaciones de velocidad (3.11), obteniendo las ecuaciones (3.12) dadas en el referente Galileano común.

$$\begin{aligned} {}^g \dot{v}_a &= {}^g \dot{R}_3 \begin{bmatrix} I & -{}^3\hat{p}_a \end{bmatrix} J_3(q) \dot{q} + {}^gR_3 \begin{bmatrix} I & -{}^3\hat{p}_a \end{bmatrix} \frac{d}{dt} [J_3(q) \dot{q}] \\ {}^g \dot{v}_b &= {}^g \dot{R}_4 \begin{bmatrix} I & -{}^4\hat{p}_b \end{bmatrix} J_4(q) \dot{q} + {}^gR_4 \begin{bmatrix} I & -{}^4\hat{p}_b \end{bmatrix} \frac{d}{dt} [J_4(q) \dot{q}] \end{aligned} \quad (3.12)$$

De acuerdo al procedimiento matemático desarrollado en la tesis de doctorado [14], la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
{}^g\dot{v}_a &= {}^gR_3 \begin{bmatrix} I & -{}^3\hat{p}_a \end{bmatrix} J_3(q)\ddot{q} + {}^gR_3 \begin{bmatrix} I & -{}^3\hat{p}_a \end{bmatrix} f(q, \dot{q}, 0, 0) + {}^gR_3 {}^3\hat{w}_3^2 {}^3\hat{p}_a \\
{}^g\dot{v}_b &= {}^gR_4 \begin{bmatrix} I & -{}^4\hat{p}_b \end{bmatrix} J_4(q)\ddot{q} + {}^gR_4 \begin{bmatrix} I & -{}^4\hat{p}_b \end{bmatrix} f(q, \dot{q}, 0, 0) + {}^gR_4 {}^4\hat{w}_4^2 {}^4\hat{p}_b
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Siendo  $f(q, \dot{q}, 0)$  el vector obtenido al evaluar el algoritmo de Newton-Euler, ver ecuación (2.2) en  $\ddot{q} = 0$ . Con el fin de simplificar la escritura de las ecuaciones, se definirán las siguientes variables:

$$\begin{aligned}
J_a(q) &\triangleq {}^gR_3 \begin{bmatrix} I & -{}^3\hat{p}_a \end{bmatrix} J_3(q) \\
J_b(q) &\triangleq {}^gR_4 \begin{bmatrix} I & -{}^4\hat{p}_b \end{bmatrix} J_4(q) \\
R_a(q, \dot{q}) &\triangleq {}^gR_3 \begin{bmatrix} I & -{}^3\hat{p}_a \end{bmatrix} f(q, \dot{q}, 0, 0) + {}^gR_3 {}^3\hat{w}_3^2 {}^3\hat{p}_a \\
R_b(q, \dot{q}) &\triangleq {}^gR_4 \begin{bmatrix} I & -{}^4\hat{p}_b \end{bmatrix} f(q, \dot{q}, 0, 0) + {}^gR_4 {}^4\hat{w}_4^2 {}^4\hat{p}_b
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Con las ecuaciones de velocidad y aceleración de los puntos  $a$  y  $b$  en el referente común, se desarrollan las afirmaciones dadas anteriormente por medio de la siguiente ecuación:

$${}^g\dot{v}_b - {}^g\dot{v}_a = \underbrace{\begin{bmatrix} J_a(q) - J_b(q) \end{bmatrix}}_{J(q)} \ddot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_a(q, \dot{q}) - R_b(q, \dot{q}) \end{bmatrix}}_{R(q, \dot{q})} \tag{3.15}$$

Simplificando:

$$J(q)\ddot{q} + R(q, \dot{q}) = 0 \tag{3.16}$$

Dada la restricción en las aceleraciones descrita por la ecuación (3.16) y combinándola con (3.4) se forma un sistema matricial cuadrado  $N \times N$ :

$$\begin{bmatrix} A & -J^T \\ J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\Gamma - H \\ -R \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Finalmente en la ecuación (3.17) se presenta el modelo dinámico para una estructura con restricción holonómica, donde se da solución a los valores numéricos de  $\ddot{q}$  y  $F$ , siendo nece-

sario la asignación de torques y estados iniciales de la estructura para  $\ddot{q}$  y  $\dot{q}$ , las condiciones iniciales se deben seleccionar para que cumplan con las restricciones cinemáticas.

## 3.2. Modelado de la estructura objeto de estudio con restricción

Desarrollado en la anterior sección un mecanismo con restricción, a continuación se aplican los procedimientos llevados a cabo, esta vez para la estructura objeto de estudio. En el capítulo 1 se presentó en la figura 1.15 el equivalente arborescente de la estructura donde cada cadena cerrada fue abierta en una articulación pasiva, teniendo en cuenta que son más los cuerpos que conforman cada cadena cerrada se tendrá un modelado con restricción múltiple, lo que implica mayor cantidad de ecuaciones de restricción y cálculo computacional, sin embargo el cálculo de modelado tendrá la misma base procedimental del ejemplo.

El desarrollo e implementación del modelo se realizó bajo el soporte software de Matlab, donde se creó un código estándar que contiene una a una las ecuaciones, matrices y restricciones para la obtención del modelo. En las siguientes subsecciones se muestra como el procedimiento llevado a cabo en el ejemplo se aplicó en la estructura estudio.

### 3.2.1. Generación del Modelo con Restricción

En la figura 3.4 se muestra que en la estructura las posiciones cartesianas de los puntos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  deben coincidir en todo instante de tiempo  $t$  para asegurar que el nivel inferior conforme la cadena cinemática deseada. Para el segundo nivel, la coincidencia debe darse entre los puntos  $f$  y  $e$  y para el tercero entre  $g$ ,  $h$  e  $i$ . Para cada uno de estos puntos se definen las siguientes matrices jacobianas

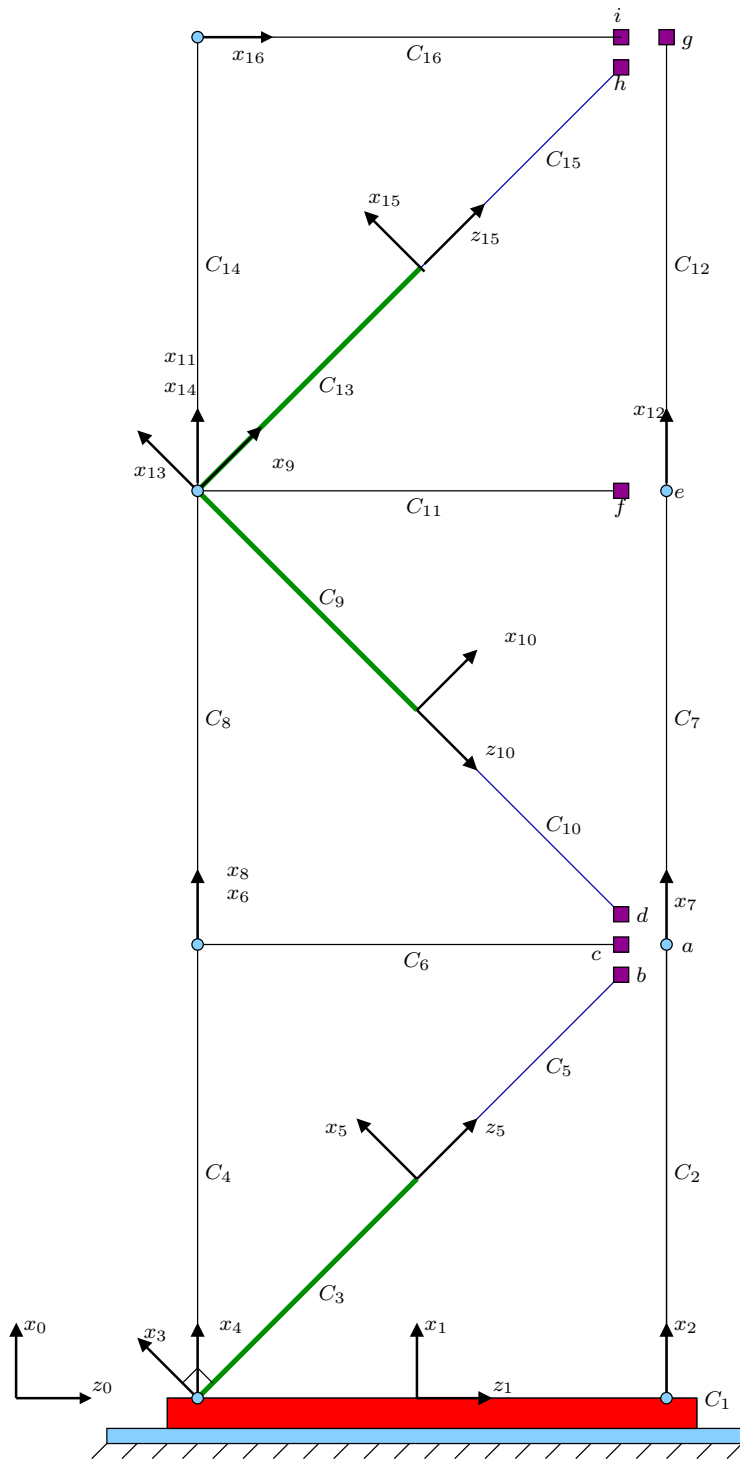


Figura 3.4: Estructura arborescente objeto de estudio con puntos de restricci3n.

$$J_\alpha(q) \triangleq {}^g R_{b(\alpha)} \begin{bmatrix} I & -{}^{b(\alpha)}\hat{p}_\alpha \end{bmatrix} J_{b(\alpha)}(q), \quad \alpha \in \{a, b, c, \dots, i\} \quad (3.18)$$

$b(\alpha)$  representa el cuerpo al que pertenece el punto  $\alpha$ . Por ejemplo si  $\alpha = a$ , entonces  $b(\alpha)$  es 2 porque el punto  $a$  pertenece al cuerpo 2. Los vectores  $R_x$  se definen de la siguiente manera:

$$R_\alpha(q, \dot{q}) \triangleq {}^g R_{b(\alpha)} \begin{bmatrix} I & -{}^{b(\alpha)}\hat{p}_\alpha \end{bmatrix} f(q, \dot{q}, 0, 0) + {}^g R_{b(\alpha)} {}^{b(\alpha)}\hat{\omega}_{b(\alpha)}^2 {}^{b(\alpha)}\hat{p}_\alpha \quad (3.19)$$

De esta manera, la aceleración del punto  $\alpha$  puede expresarse como:

$${}^g \dot{v}_\alpha = J_\alpha(q) \ddot{q} + R_\alpha(q, \dot{q}) \quad (3.20)$$

Con base en las aceleraciones obtenidas con la ecuación anterior se formulan las restricciones para cada uno de los tres niveles del edificio:

$$\begin{bmatrix} {}^g \dot{v}_a - {}^g \dot{v}_b \\ {}^g \dot{v}_a - {}^g \dot{v}_c \\ {}^g \dot{v}_a - {}^g \dot{v}_d \\ {}^g \dot{v}_e - {}^g \dot{v}_f \\ {}^g \dot{v}_g - {}^g \dot{v}_h \\ {}^g \dot{v}_g - {}^g \dot{v}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_a(q) - J_b(q) \\ J_a(q) - J_c(q) \\ J_a(q) - J_d(q) \\ J_e(q) - J_f(q) \\ J_g(q) - J_h(q) \\ J_g(q) - J_i(q) \end{bmatrix}}_{J(q)} \ddot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_a(q, \dot{q}) - R_b(q, \dot{q}) \\ R_a(q, \dot{q}) - R_c(q, \dot{q}) \\ R_a(q, \dot{q}) - R_d(q, \dot{q}) \\ R_e(q, \dot{q}) - R_f(q, \dot{q}) \\ R_g(q, \dot{q}) - R_h(q, \dot{q}) \\ R_g(q, \dot{q}) - R_i(q, \dot{q}) \end{bmatrix}}_{R(q, \dot{q})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Finalmente se dió solución al sistema matricial de modelo dinámico directo que involucra las restricciones y donde se calculan las fuerzas necesarias para mantener unidos los puntos:

$$\begin{bmatrix} A & -J^T \\ J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma - H(q, \dot{q}) \\ -R \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Siendo  $A(q) \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$  la matriz de inercia,  $H(q) \in \mathbb{R}^{16}$  el vector que contiene los términos asociados a las fuerzas centrífugas, gravitacionales y de Coriolis,  $J(q) \in \mathbb{R}^{16 \times 12}$  la matriz jacobiana descrita por la ecuación (3.21),  $R \in \mathbb{R}^{12}$  el vector que contiene los términos derivados del producto entre  $\dot{J}(q)$  y  $\dot{q}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{12}$  el vector que contiene las fuerzas que

permiten satisfacer las restricciones holonómicas del sistema,  $\Gamma \in \mathbb{R}^4$  el vector con las fuerzas que se ejercen en las articulaciones 1, 5, 10 y 15.

Cuadro 3.1: Código software del modelo dinámico con restricción holonómica

```

1
2 % Direct dynamic model
3 Sol          = [A, -J'; J, Z] \ [Tm-H; -R];
4 QDDot       = Sol(1:N);

```

Tanto en esta sección como en la sección 2.4 se presentó por separado la aplicación en el software para generar el modelo dinámico con restricción de la estructura, sin embargo estos códigos en la práctica debe ser ejecutados en conjunto.

Es fundamental aclarar que si dos cuerpos tienen la misma velocidad y la misma aceleración, entonces la distancia entre ellos será constante pero no necesariamente cero. Por lo tanto es necesario asegurar que las condiciones iniciales dadas al inicio de la simulación satisfagan las restricciones cinemáticas.

### 3.3. Resumen del Capítulo

En el capítulo 3 se abarcó el concepto de restricción holonómica para una estructura ejemplo de 4 barras que presenta la misma restricción de movilidad del edificio en cada uno de sus niveles. Para su modelado se planteó que un mecanismo cerrado es igual a un arborescente mas una restricción algebraica, ya que no existe un método fácil para obtener el modelo de un sistema cerrado tan complejo.

Uno de los puntos articulares de la estructura ejemplo se abrió, tomándola temporalmente como abierta y añadiendo una fuerza  $F$  que afectaría las aceleraciones articulares para mantener los puntos nuevamente unidos. Al haber realizado lo anterior, en el capítulo se establecieron las nuevas ecuaciones para el modelo, al cual se le agregaron un vector de fuerzas.

Se presentó todo el desarrollo para hallar los términos desconocidos del modelo  $\dot{q}$ ,  $\ddot{q}$  y  $F$ , y se dieron las condiciones que debe cumplir la estructura para asegurar la unión de los puntos  $a$  y  $b$ . Entre las condiciones establecidas se encuentran: (i) Diferencia de posiciones

de los puntos, igual a cero. (ii) Diferencia de velocidades de los puntos, igual a cero. (iii) Diferencia de aceleraciones de los puntos, igual a cero.



# Capítulo 4

## Control y Resultados de Simulación

Procesos industriales, navales, aeronáuticos y cotidianos emplean en la actualidad sistemas de control automático que permiten la eliminación de errores en el proceso, incremento en la seguridad y resultados de alta calidad. Construcciones civiles no se han quedado atrás en la llamada segunda revolución industrial [15] y emplean el control para compensar fuerzas internas y externas producidas por eventos naturales y artificiales, además minimizan daños estructurales y riesgos en la población cercana.

Un sistema de control emplea principalmente el concepto de realimentación o *feedback*, donde se mantiene el proceso en un valor deseado, a partir de la diferencia entre la medición del estado actual de la variable a controlar y el valor de referencia. Dicho de otro modo, es el conjunto de componentes físicos relacionados entre sí, que actúan autónomamente para corregir errores presentes en el funcionamiento de un proceso.

Existen gran cantidad de controladores y su selección se define de acuerdo al proceso relacionado, control PID (*Proportional Integral Derivative*), control PD (*Proportional Derivative*), control CTC (*Computed Torque Control*) y control predictivo son algunos. A continuación se presenta el método de trabajo de los controladores PD y CTC, además de la aplicación al proyecto y resultados de su desempeño en simulación.

## 4.1. Controlador proporcional-derivativo PD

El controlador se entiende como un operador que en función de la salida deseada de la planta ( $S_d$ ) y la salida real medida ( $S_r$ ), es capaz de proporcionar la acción de control que se aplica al sistema. Existen muchos tipos de control basados en este principio, el control proporcional-integral-derivativo ( $PID$ ) es el de mayor uso industrial; variaciones en este esquema que consisten en la combinación de los términos de acción forman otros controladores; se habla de controlador ( $P$ ) cuando solo se aplica la acción proporcional, en caso de usar las acciones proporcional y derivativa el control se denomina control ( $PD$ ), si el único término que desaparece es el derivativo se denomina control ( $PI$ ) [16].

En el desarrollo de este proyecto se hace énfasis en el control tipo  $PD$ , debido a su comportamiento y relación con los elementos de disipación de energía. La acción  $PD$  se representa matemáticamente por la ecuación (4.1):

$$PD_{sal} = K_p e(t) + K_d \frac{d_e}{dt} \quad (4.1)$$

A continuación se explica por etapas la acción aplicada al sistema.

### 4.1.1. Control proporcional P

El control proporcional está dado como el producto entre la señal de error  $e(t) = S_r - S_d$  y la constante proporcional  $K_p$ . Al aplicar el esfuerzo determinado por la ley de control se asegura que el error de estado estacionario se aproxima a cero [17]. Esta acción se representa por la ecuación (4.2):

$$P_{sal} = K_p e(t) \quad (4.2)$$

En algunos casos los valores de  $K_p$  solo serán adecuados en un rango de control, determinando un límite en el valor de  $K_p$  para el cual el sistema alcanza valores superiores a los deseados (sobreoscilación).

### 4.1.2. Control derivativo D

Este tipo de control esta dado como el producto entre la señal derivada del error  $e(t)$  y la constante derivativa  $K_d$ , de acuerdo a el valor de la constante se determina la cantidad de oscilaciones en la respuesta del sistema; al tomar  $K_d$  valores altos las variaciones del sistema tienden a disminuir, sin embargo no se puede exceder  $K_d$  ya que la respuesta será demasiado lenta [17]. Esta acción se representa por la ecuación (4.3):

$$D_{sal} = K_d \frac{d_e}{d_t} \quad (4.3)$$

La ventaja significativa del uso de la acción de control derivativa es su respuesta a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa que evita que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Por tanto, el control derivativo prevé el error, inicia una acción oportuna y tiende a aumentar la estabilidad del sistema.

## 4.2. Disipador de energía Resorte-Amortiguador

La disipación de energía en la estructura objeto de estudio cuando es sometida a fuerzas externas que afectan su estabilidad se hace por medio de disipadores de energía de tipo resorte-amortiguador denotados como  $RA$ .

Los resortes son elementos mecánicos con la capacidad de almacenar energía cuando se encuentran sometidos a la acción de fuerzas externas, además tienen la capacidad de sufrir deformaciones reversibles y recuperar su forma original si dichas fuerzas se eliminan. La cantidad de energía que es capaz de retornar este elemento es proporcional a las fuerzas o tensiones que causaron la deformación de elongación o compresión de este.

Los amortiguadores son dispositivos diseñados para disipar energía y usados para disminuir oscilaciones no deseadas de movimiento en un sistema, su principio de funcionamiento se basa en la transferencia de un fluido viscoso de una cámara a otra cuando es sometido a fuerzas externas, la fuerza de amortiguamiento de este dispositivo es proporcional a la velocidad de circulación del líquido interno [18].

Una propiedad a tener en cuenta en este tipo de elementos son las constantes elástica  $K_p$  y la constante de amortiguamiento  $K_v$ , de ellas depende el valor máximo de disipación de energía del  $RA$ .

### 4.3. Control PD en la estructura objeto de estudio

Existe una relación entre el comportamiento del controlador  $PD$  y el disipador de energía tipo  $RA$ , dada por la acción de control realizada por cada elemento:

- En el control  $P$  y el resorte, la acción de control aplicada al sistema es proporcional.
- En el control  $D$  y el amortiguador, la acción de control aplicada sobre el sistema depende de la velocidad.

Establecidas las relaciones anteriores, se afirma que el comportamiento del resorte-amortiguador es similar a la acción de control  $PD$ ; donde el control proporcional es realizado por el resorte y el control derivativo lo efectúa el amortiguador [19]. La figura 4.1 representa el diagrama de bloques para este tipo de controlador.

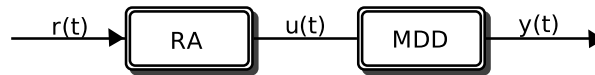


Figura 4.1: Diagrama de bloques del control PD.

Donde:

- $r(t)$ : Señal de consigna.
- $u(t)$ : Señal de control.
- $y(t)$ : Señal de actual.

Por medio del elemento  $RA$  se disipa entonces la mayor cantidad de energía y se disminuyen las oscilaciones en el sistema de forma pasiva, ya que estos elementos no son capaces de entregar más energía de la recibida; finalmente se logra controlar las fuerzas de carga a las que es sometido el sistema.

## 4.4. Respuesta teórica con control PD

La estructura objeto de estudio emplea elementos de tipo resorte amortiguador  $RA$  capaces de disipar gran parte de la energía recibida desde el exterior, en el proceso de simulación del proyecto el sistema será alterado con una secuencia de funciones sinusoidales que representan factores naturales (sismos) o artificiales (explosiones).

Al aplicar una señal sinusoidal al sistema, su salida en estado estacionario será también una señal sinusoidal con la misma frecuencia, pero puede diferir de la entrada en amplitud y fase; a esto se le conoce como respuesta en frecuencia. De acuerdo a la respuesta del sistema es posible analizar y evaluar la estabilidad o el comportamiento del mismo, permitiendo la toma de decisiones a partir del resultado.

La señal de entrada representa movimientos telúricos con diferentes intensidades que son capaces de excitar la base de la estructura produciendo movimientos que se propagan por todo el edificio, se debe asegurar que las aceleraciones sísmicas de la señal inyectada y las aceleraciones de la base siempre sean iguales, para ello se implementa un sistema de control que evalúa constantemente las aceleraciones y realiza los correctivos necesarios cuando se presentan errores en el seguimiento de la señal.

El error para el seguimiento de la señal está dado como la diferencia entre las aceleraciones, el cual debe ser corregido, o eliminado, para garantizar la igualdad entre estas.

### 4.4.1. Señal de excitación

La señal sinusoidal dada como  $y(t) = A \sin(\omega t)$  la cual es posible variar su amplitud y frecuencia, es usada para realizar la excitación a la estructura para ver su comportamiento frente a este tipo de señales que para este caso de estudio representan factores externos, se debe tener en cuenta que es posible usar diferentes tipos de señales sobre el simulador para excitar la estructura, pero debido a que este es un primer acercamiento al control estructural se emplea la señal sinusoidal mencionada.

A continuación se evalúa la respuesta del sistema ante variaciones de señales con diferentes valores en amplitud y frecuencia, obteniendo el cuadro 4.2 que contiene las respuestas donde se observa y analiza el comportamiento de la estructura y los actuadores ante la excitación:

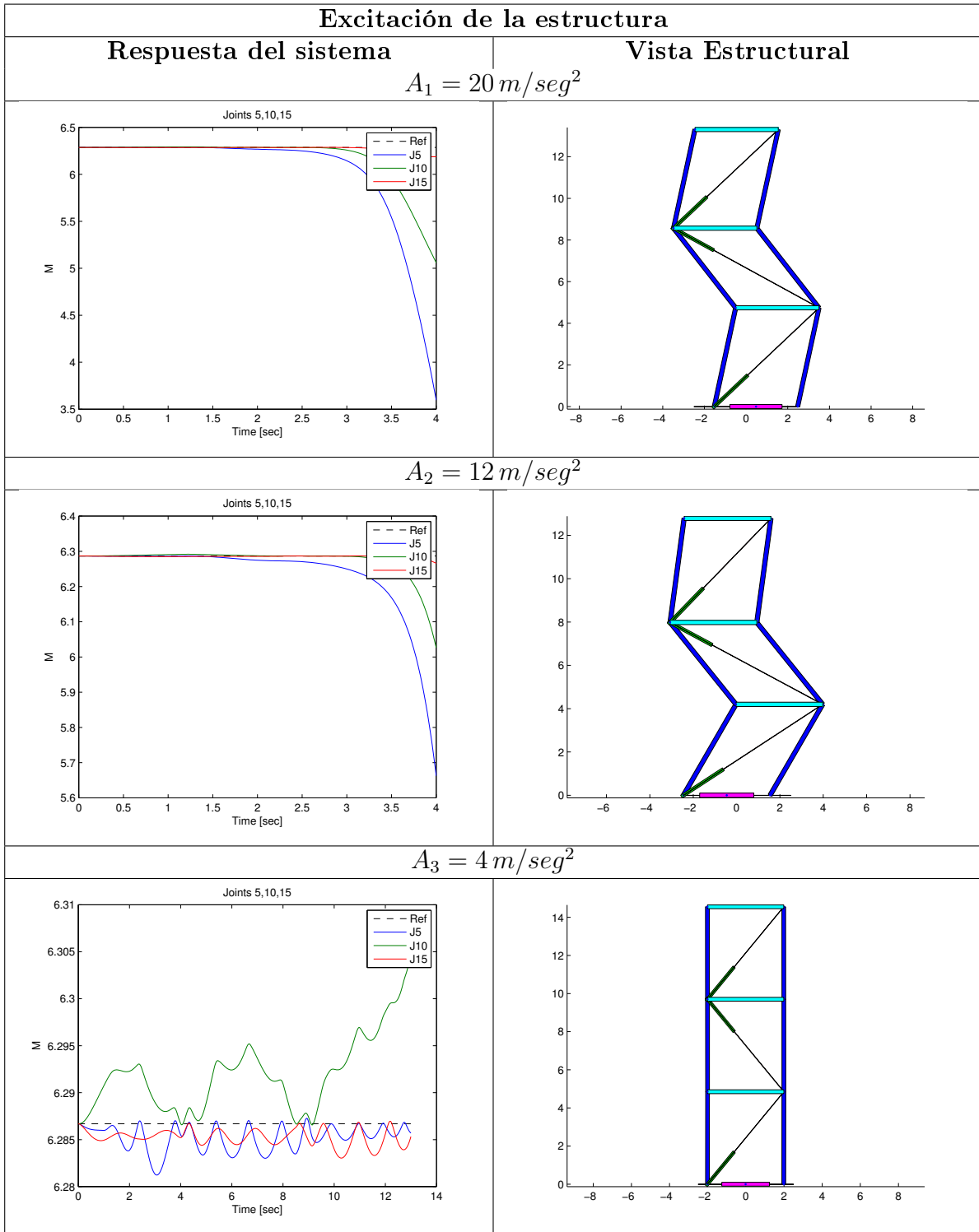


Figura 4.2: Respuesta del sistema con variación en amplitud y frecuencia constante igual a  $1 \text{ rad/seg}$ .

Cuando la base de la estructura es excitada por señales sinusoidales, el movimiento se propaga a los pisos superiores; en los dos primeros casos de la figura 4.2 se observa el colapso de la edificación ante fuertes movimientos cuando las señales que representan la elongación de los disipadores incrementan rápidamente en un tiempo de  $3.5\text{seg}$  de la simulación, al presentarse elongaciones demasiado grandes en los disipadores el controlador no es capaz de llevar a los  $RA$  al estado inicial, indicando que las constantes asignadas para ellos no son las adecuadas. La respuesta de la figura 4.2 para una amplitud igual a  $4\text{m}/\text{seg}^2$  indica que el sistema presenta inestabilidad con frecuentes oscilaciones durante un largo periodo de tiempo.

Cuando se presentan los anteriores casos, los  $RA$  deben actuar para mantener la edificación en pie o estable. La lógica de control empleada por los elementos pasivos para mantener la estabilidad y control depende del tamaño de las barras horizontales y verticales de la edificación, manteniendo una longitud  $L$  en la diagonal. Para comprender más esta afirmación, en el siguiente gráfico 4.3 se presenta cual debe ser la tendencia lógica del comportamiento del resorte amortiguador.

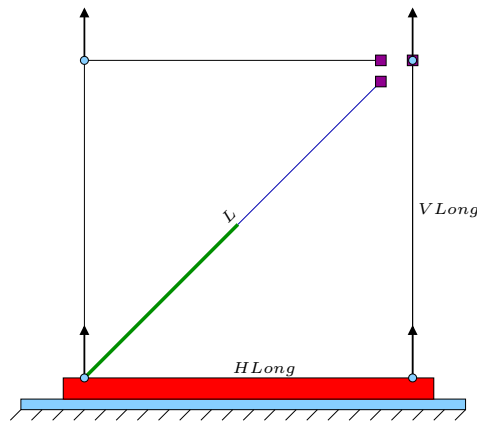


Figura 4.3: Longitud total resorte amortiguador.

La expresión matemática que expresa la correcta posición de los actuadores en reposo esta dada como (4.4), las barras  $H_{long}$  y  $V_{long}$  forman un ángulo de  $90^\circ$  entre ellas, evitando desviaciones no deseadas en las posiciones de las vigas.

$$L = \sqrt{H_{long}^2 + V_{long}^2} \quad (4.4)$$

Donde:

- $L$ : Longitud barra transversal que contiene el Resorte-Amortiguador.
- $HLong$ : Longitud barra horizontal.
- $VLong$ : Longitud barra vertical.

Cuando se presenta un evento sísmico, el elemento  $RA$  se contrae y expande, llevando a la estructura a su estado inicial y evitando el colapso, la contracción y expansión máxima depende de los valores que tomen las constantes  $K_p$  y  $K_v$ , de acuerdo a estos valores el comportamiento de los elementos se tornara rígido, insuficiente para disipar la mayor cantidad de energía o adecuado.

#### 4.4.2. Variación de la constante elástica y de amortiguamiento

Se denota  $T_m$  al vector de fuerzas que proveen los elementos  $RA$  en los 3 niveles de la estructura para evitar el exceso de movimientos, estos elementos deben ser sintonizados independientemente debido a que la dinámica de la estructura es no lineal con alto grado de acoplamiento, la desventaja de este tipo de sistemas es que la sintonización de un lazo afecta directamente a los demás, siendo difícil encontrar los parámetros ideales para  $Kp$  y  $Kv$  para cada uno de los lazos de control del edificio.

A continuación se presentan tres casos, cada uno de ellos con diferentes valores de  $K_p$  y  $K_v$ , para conocer el comportamiento de la estructura ante estos cambios, la variación de las constantes se realiza en el archivo *direct dynamic model.m* para control  $PD$

Se deben asignar valores a  $Kp_1$ ,  $Kv_1$ ,  $Kp_2$ ,  $Kv_2$ ,  $Kp_3$ , y  $Kv_3$ , que corresponden a las constantes de disipación y amortiguamiento para cada elemento  $RA$  ubicado en la estructura.

- $Kp_1$  y  $Kv_1$  corresponden al  $RA$  del primer nivel.
- $Kp_2$  y  $Kv_2$  corresponden al  $RA$  del segundo nivel.
- $Kp_3$  y  $Kv_3$  corresponden al  $RA$  del tercer nivel.

Para generar el movimiento se usa una señal sinusoidal con amplitud  $A = 20 m/seg^2$  y valores en frecuencia de  $4 rad/seg$ ,  $2 rad/seg$ , y  $1 rad/seg$ . Estas variaciones se realizan con



el objetivo de someter la estructura a diferentes cargas y exigir el  $RA$ , además para hallar los valores adecuados de los disipadores de energía y asegurar su buen funcionamiento para un amplio rango de valores cuando se presenten excitaciones externas que afecten la estabilidad de la edificación.

- Caso 1:

$$\left| \begin{array}{l|l} Kp_1 = 1800 & Kv_1 = 0 \\ Kp_2 = 1200 & Kv_2 = 0 \\ Kp_3 = 1200 & Kv_3 = 0 \end{array} \right|$$

La respuesta estructural a este caso se muestra en la gráfica 4.4, en la cual se evidencia que los valores de las constantes no son adecuadas por la presencia de excesivas oscilaciones en el sistema a diferentes frecuencias. El  $RA$  obtenido es demasiado flexible y su capacidad de disipación de energía es muy baja, ocasionando que el sistema nunca consiga estabilizarse y se balancee de forma exagerada ocasionando fuertes movimientos que la pueden llevar al colapso.

En este caso la respuesta ante variaciones en la frecuencia no presenta demasiadas alteraciones porque el  $RA$  es demasiado flexible para ser capaz de responder ante estos cambios, en los tres casos no se observan grandes diferencias en la respuesta de los disipadores para poder establecer una diferencia relevante ante estas situaciones

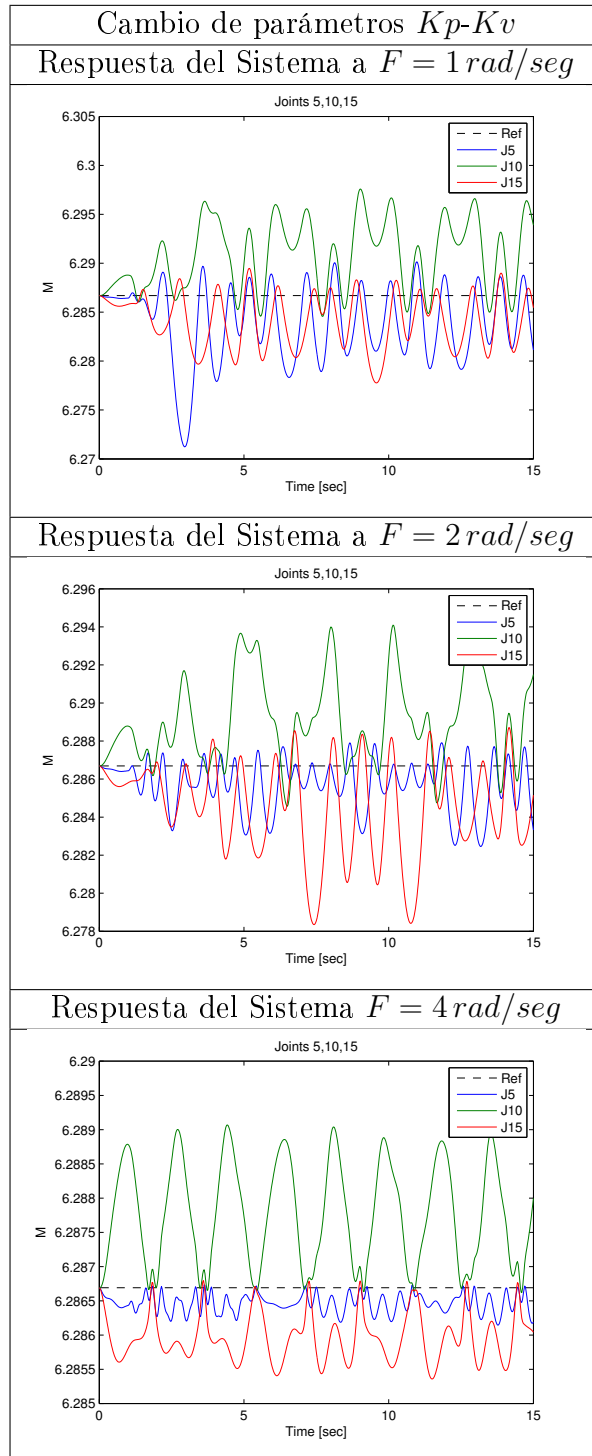


Figura 4.4: Respuesta del sistema para variaciones en el periodo  $T$ , con aceleración constante.

- Caso 2:

$$\left| \begin{array}{l|l} Kp_1 = 1800 & Kv_1 = 200 \\ Kp_2 = 1200 & Kv_2 = 1000 \\ Kp_3 = 1200 & Kv_3 = 1000 \end{array} \right|$$

La figura 4.5 representa la respuesta de este caso, donde se observa que la amplitud de las oscilaciones en la respuesta transitoria es menor y su tendencia de aproximación a la consigna en el estado estacionario es rápida, llevando el error a un valor mínimo en un tiempo adecuado. Se indica entonces, que la flexibilidad del *RA* ha reducido, obteniendo mejor capacidad de disipación de energía, garantizando que la estructura no se vea afectada y no deba soportar fuertes cargas que ocasionen fracturas en las vigas.

En la figura 4.5 se observa que las oscilaciones del disipador son menores al usar frecuencias con valores más grandes a pesar de haber usado valores iguales en la constantes  $Kp$ ,  $Kv$  y la amplitud de la señal de excitación, esto se da porque la estructura es un sistema dinámico más sensible a cierto de tipo de señales y en este tipo de casos los elementos *RA* deben disipar menor cantidad de energía.

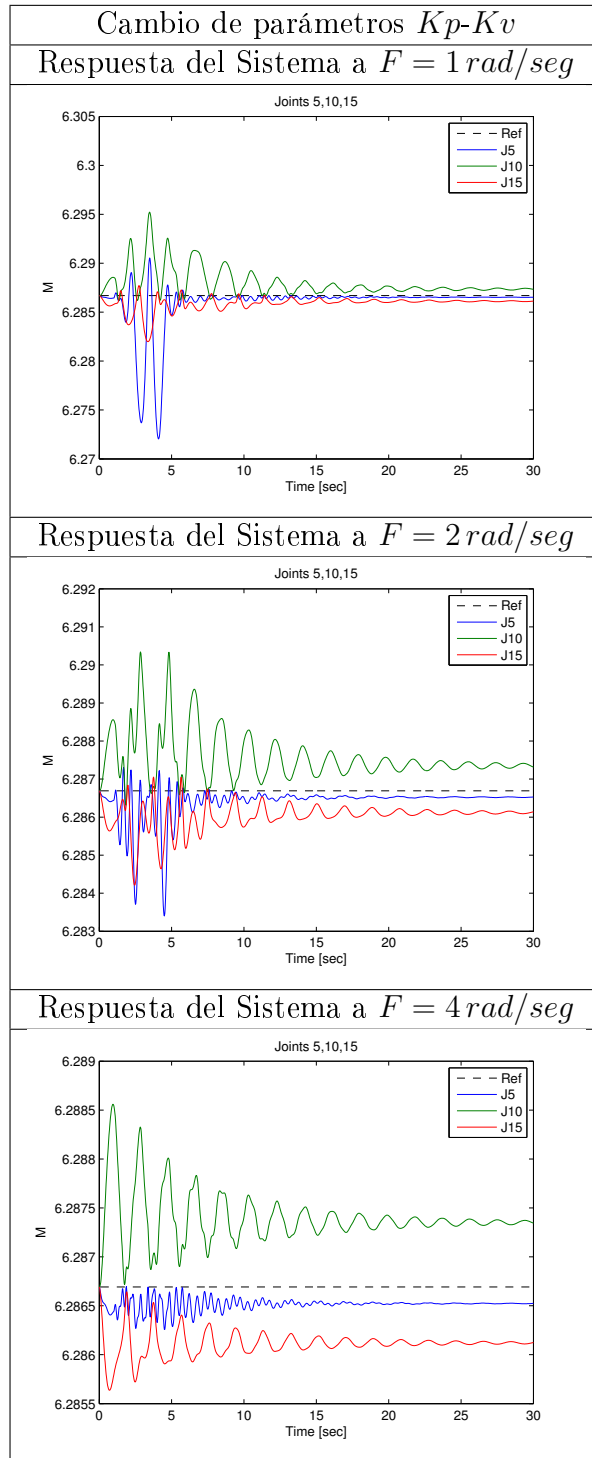


Figura 4.5: Respuesta del sistema para variaciones en el periodo  $T$ , con aceleración constante.

- Caso 3:

$$\left| \begin{array}{l|l} Kp_1 = 2500 & Kv_1 = 400 \\ Kp_2 = 2400 & Kv_2 = 1600 \\ Kp_3 = 2100 & Kv_3 = 1400 \end{array} \right|$$

En la respuesta 4.6 se observa una amplitud mínima de las oscilaciones a diferentes frecuencias, además la estabilización del sistema es rápida, lo que resulta contraproducente en el comportamiento del *RA* porque se ha convertido en un elemento demasiado rígido y con flexibilidad casi nula. Un disipador con estas características no es adecuado, ya que somete a la estructura a rigidez extrema, siendo esta la que deba soportar fuertes cargas que ocasionarían fracturas en los cimientos llevando al colapso.

Debido a que los elementos *RA* son demasiado rígidos no se hace clara la diferencia de la respuesta cuando se realizan cambios en el valor de la frecuencia de excitación.

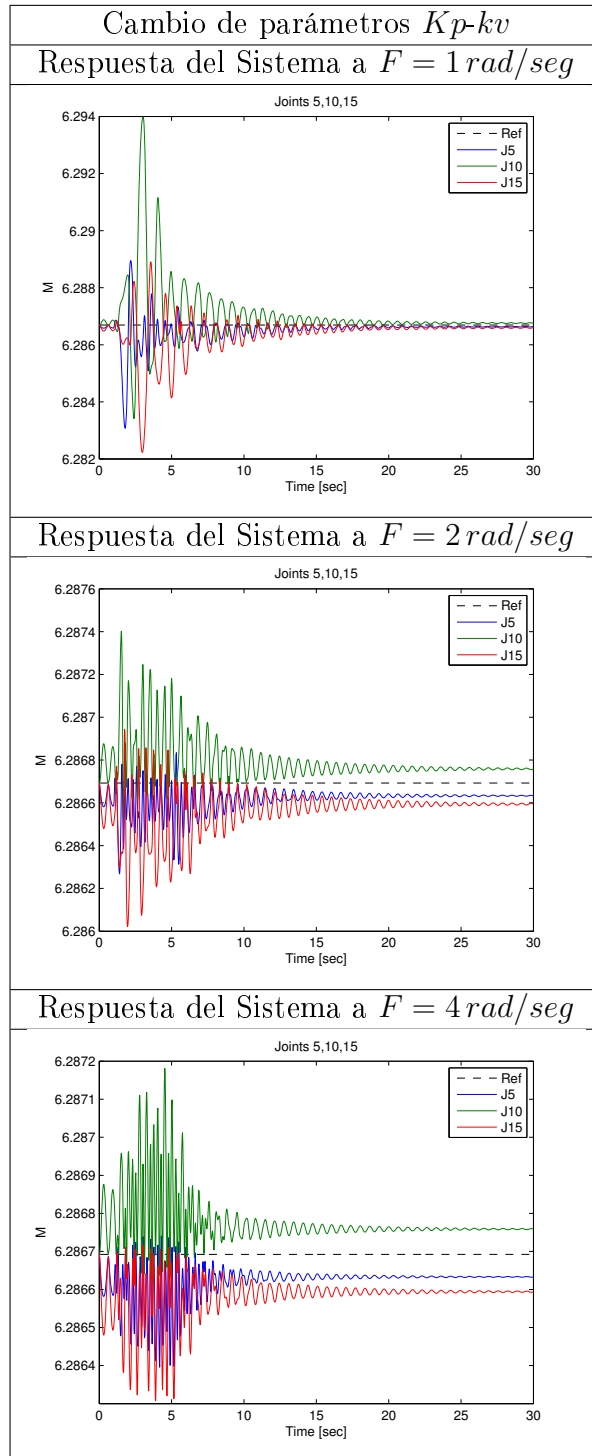


Figura 4.6: Respuesta del sistema para variaciones en el periodo  $T$ , con aceleración constante.

## Análisis de los casos expuestos para el control PD

En los tres casos se empleó un valor de amplitud grande que le permite garantizar al *RA* la capacidad de disipar la mayor cantidad de energía a diferentes rangos. Las anteriores respuestas permiten establecer como los mejores valores para las constantes, aquellos que fueron analizados en el segundo caso, ya que los *RA* presentan un comportamiento no muy rígido o muy flexible, siendo capaces de disipar perturbaciones a diferentes frecuencias con grandes amplitudes, además son capaces de mantener la longitud  $L$  requerida en los *RA* para controlar la estructura y evitar grandes afecciones debido a cargas externas.

Los valores de las constantes establecidas en los casos 1 y 2, no fueron adecuados porque arrojaban un comportamiento para los *RA* demasiado rígidos o muy flexibles, lo cual ocasionaban la caída o afección directa de las cargas externas en la vigas de la estructura, además no se obtuvieron respuestas adecuadas a diferentes valores en la frecuencia de excitación.

## 4.5. Controlador CTC

El controlador por par calculado requiere el conocimiento del modelo dinámico del sistema a controlar y aunque el modelo de sistemas robóticos es no lineal y a pesar de existir métodos para el uso de controladores no lineales, este tipo de control busca desacoplar y linealizar la dinámica del robot a partir de un cambio de coordenadas en el espacio de estados.

Linealizado el modelo, el control presenta la ventaja de trabajar con un sistema desacoplado que permite que la sintonización y calibración de cada articulación se realice por separado, es decir que el comportamiento de una articulación no afecta ni se ve afectada por las restantes. El método de linealización se muestra a continuación, sin embargo se debe tener en cuenta que en el presente proyecto se trabaja con un modelo dinámico para robots con restricciones holonómicas, por lo tanto se presenta inicialmente la linealización común para un robot serie y posteriormente se adaptará al caso de estudio.

### 4.5.1. Control CTC para robots serie

Dado que de la dinámica de los robots representada por el modelo (4.5) y que en el término matricial  $A$  y el vector  $q$  se aprecia el resultado de un sistema no lineal, el procedimiento de linealización parte de la selección de un  $\Gamma$  igual a (4.6) donde  $\hat{A}$  y  $\hat{H}$  son estimaciones a  $A$  y  $H$ , y además se suponen las posiciones y velocidades articulares medibles [20].

$$A(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = \Gamma \quad (4.5)$$

$$\Gamma = \hat{A}(q)U + \hat{H}(q, \dot{q}) \quad (4.6)$$

Trabajando entonces con el modelo conocido y asegurando  $\hat{A} \cong A$  y  $\hat{H} \cong H$  al reemplazar (4.6) en (4.5) se obtiene:

$$\ddot{q} = U \quad (4.7)$$

Donde  $U$  es un nuevo vector de control en el cual se fijan las variables articulares deseadas para la posición, velocidad y aceleración, y se define así:

$$U = \ddot{q}^d + 2\delta w_n (\dot{q}^d - \dot{q}) + w_n^2 (q^d - q) \quad (4.8)$$

Los términos que componen la anterior ecuación hacen que la posición articular real  $q(t)$  tienda a la deseada  $q^d(t)$ . Si se reemplaza (4.7) en (4.8) se obtiene la dinámica del lazo cerrado:

$$0 = (\ddot{q}^d - \ddot{q}) + 2\delta w_n (\dot{q}^d - \dot{q}) + w_n^2 (q^d - q) \quad (4.9)$$

Teniendo en cuenta que la respuesta del sistema en lazo cerrado se representa por  $e = q^d - q$ , se define la ecuación lineal desacoplada en términos del error, asegurando que aunque el error sea variante en el tiempo siempre converge a cero.

$$\ddot{e} + 2\delta w_n \dot{e} + w_n^2 e = 0 \quad (4.10)$$



En la ecuación (4.10) los términos  $2\delta w_n$  y  $w_n^2$  representan respectivamente las constantes  $K_d$  y  $K_p$  de un controlador proporcional derivativo; siendo  $w_n$  la variable de la cual dependen las constantes de control. Finalmente este tipo de control brinda la ventaja de sintonización independiente, es decir, si son tres articulación activas a controlar, cada articulación tiene su ley de control y la sintonización de cada una de ellas no afecta al resto.

#### 4.5.2. Control CTC para robots con restricciones holonómicas

Debido a que la representación matemática del modelo dinámico de un robot serie no es la misma que para un robot con restricciones holonómicas, el anterior procedimiento no es válido si se aplicara al proyecto. Sin embargo es la base fundamental para entender y obtener el control. Para agilizar la lectura del documento a continuación se reescribirá la ecuación (3.22) para el modelo dinámico con restricción holonómica.

$$\begin{bmatrix} A(q) & -J^T(q) \\ J(q) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\Gamma - H(q, \dot{q}) \\ -R \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Siendo  $A(q) \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$  la matriz de inercia,  $H(q) \in \mathbb{R}^{16}$  el vector que contiene los términos asociados a las fuerzas centrífugas, gravitacionales y de Coriolis,  $J(q) \in \mathbb{R}^{16 \times 12}$  la matriz jacobiana descrita por la ecuación (3.21),  $R \in \mathbb{R}^{12}$  el vector que contiene los términos derivados del producto entre  $\dot{J}(q)$  y  $\dot{q}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{12}$  el vector que contiene las fuerzas que permiten satisfacer las restricciones holonómicas del sistema,  $\Gamma \in \mathbb{R}^4$  el vector con las fuerzas que se ejercen en las articulaciones 1, 5, 10 y 15 y  $B \in \mathbb{R}^{16 \times 4}$  una matriz compuesta de unos y de ceros que garantiza la siguiente propiedad:

$$B\Gamma = \left[ \Gamma_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Gamma_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Gamma_{10} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Gamma_{15} \ 0 \right]^T \quad (4.12)$$

El objetivo será hallar un modelo similar al serial en el cual no intervenga el vector de fuerzas  $F$ . Dicho modelo en adelante se denominará modelado dinámico reducido. Para obtenerlo, inicialmente se descompone  $q$  en dos vectores. Uno con las coordenadas no accionadas ( $q_u$ ) y el otro con las accionadas ( $q_a$ )

$$q \triangleq \begin{bmatrix} q_u \\ q_a \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

En el caso de la estructura objeto de estudio,  $q_a$  contiene las variables articulares  $q_1, q_5, q_{10}$  y  $q_{15}$ . Y  $q_u$  contiene las 12 restantes. Al derivar la ecuación anterior dos veces con respecto al tiempo se obtiene.

$$\ddot{q} \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Al reemplazar (4.14) en (3.16) se obtiene:

$$J_u(q) \ddot{q}_u + J_a(q) \ddot{q}_a + R(q, \dot{q}) = 0 \quad (4.15)$$

Siendo  $J_u(q)$  el conjunto de columnas de  $J(q)$  que corresponden a coordenadas no accionadas y  $J_a(q)$  al conjunto de columnas  $J(q)$  que corresponden a coordenadas accionadas.

Teniendo en cuenta que la acción de control debe llevarse a cabo por las articulaciones activas del sistema, la ecuación de modelado abarca únicamente las variables articulares que intervienen en el movimiento activo del robot. Por ejemplo, en el proyecto se trabaja con una estructura robótica que posee 4 articulaciones activas, entonces la matriz de inercia del modelo reducido será de  $4 \times 4$ . Entendido de otra forma, las aceleraciones de las articulaciones no accionadas dependen de las aceleraciones de las articulaciones accionadas. Al despejar  $\ddot{q}_u$  de (4.15) se obtiene:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_u &= -J_u^{-1}(q) [J_a(q) \ddot{q}_a + R(q, \dot{q})] \\ &= -J_u^{-1}(q) J_a(q) \ddot{q}_a - J_u^{-1}(q) R(q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

La invertibilidad de  $J_u(q)$  se garantiza siempre y cuando los 4 cuerpos de cada piso no se encuentren alineados. Posteriormente la ecuación (4.16) expresada de forma matricial queda:

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_u^{-1}(q) J_a(q) \\ I \end{bmatrix} \ddot{q}_a + \begin{bmatrix} -J_u^{-1}(q) R(q, \dot{q}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Se declaran las siguientes variables para aligerar la notación anterior:

$$M(q) \triangleq \begin{bmatrix} -J_u^{-1}(q) J_a(q) \\ I \end{bmatrix} \quad N(q, \dot{q}) \triangleq \begin{bmatrix} -J_u^{-1}(q) R(q, \dot{q}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Se reemplaza  $\ddot{q} = M(q) \ddot{q}_a + N(q, \dot{q})$  en la primera línea del modelo dinámico (4.11):

$$A(q) M(q) \ddot{q}_a + A(q) N(q, \dot{q}) + H(q, \dot{q}) = B \Gamma + J^T(q) F \quad (4.19)$$

La anterior ecuación se premultiplica por  $M^T(q)$  para asegurar que la matriz que multiplica a  $\ddot{q}_a$  sea cuadrada.

$$M^T(q) A(q) M(q) \ddot{q}_a + M^T(q) [A(q) N(q, \dot{q}) + H(q, \dot{q})] = M^T(q) B \Gamma + M^T(q) J^T(q) F \quad (4.20)$$

A continuación se muestra la verificación de las identidades  $M^T(q) B = I$  y  $M^T(q) J^T(q) = 0$  que permitirán simplificar la ecuación anterior.

- Para  $M^T(q) B = I$ :

$$\begin{aligned} M^T(q) B \Gamma &= \begin{bmatrix} -J_a^T(q) J_u^{-T}(q) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \Gamma \\ &= \Gamma \end{aligned} \quad (4.21)$$

- Para  $M^T(q) J^T(q) = 0$

$$\begin{aligned} M^T(q) J^T(q) F &= \begin{bmatrix} -J_a^T(q) J_u^{-T}(q) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_u^T(q) \\ J_a^T(q) \end{bmatrix} F \\ &= \begin{bmatrix} -J_a^T(q) J_u^{-T}(q) J_u^T(q) + J_a^T(q) \end{bmatrix} F \\ &= \begin{bmatrix} -J_a^T(q) + J_a^T(q) \end{bmatrix} F \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Finalmente se reemplazan las ecuaciones (4.21) y (4.22) en (4.19) para obtener el modelo

reducido:

$$\Gamma = \underbrace{M^T(q) A(q) M(q)}_{A_r(q)} \ddot{q}_a + \underbrace{M^T(q) A(q) N(q, \dot{q}) + M^T(q) H(q, \dot{q})}_{H_r(q)} \quad (4.23)$$

$$\Gamma = A_r(q) \ddot{q}_a + H_r(q, \dot{q}) \quad (4.24)$$

De acuerdo con el modelo anterior, la ley de control se puede seleccionar de la siguiente manera.

$$\Gamma = \hat{A}_r(q) U + \hat{H}_r(q, \dot{q}), \quad (4.25)$$

Si el modelo matemático del sistema es perfectamente conocido ( $\hat{A}_r(q) \triangleq A_r(q)$  y  $\hat{H}_r(q, \dot{q}) \triangleq H_r(q, \dot{q})$ ), entonces la ley de control (4.24) convierte el modelo dinámico (4.11) en un conjunto de 4 dobles integradores desacoplados:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_{10} \\ \ddot{q}_{15} \end{bmatrix}}_{\ddot{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_5 \\ u_{10} \\ u_{15} \end{bmatrix}}_U \quad (4.26)$$

Adicionalmente, si  $u_i$  se selecciona de la siguiente manera.

$$u_i = \ddot{q}_i^d + 2 \xi_i \omega_{ni} (\dot{q}_i^d - \dot{q}_i) + \omega_{ni}^2 (q_i^d - q_i), \quad (i = 1, 5, 10, 15) \quad (4.27)$$

El sistema resultante de lazo cerrado se puede describir mediante las siguientes cuatro ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden:

$$(\ddot{q}_i^d - \ddot{q}_i) + 2 \xi_i \omega_{ni} (\dot{q}_i^d - \dot{q}_i) + \omega_{ni}^2 (q_i^d - q_i) = 0, \quad (i = 1, 5, 10, 15) \quad (4.28)$$

Es de fundamental importancia recalcar que como se mencionó en el capítulo I, el actuador asociado a la articulación 1 no existe físicamente. El  $\Gamma_1$  calculado mediante la ecuación (4.25), es la fuerza que se necesita para que la aceleración de la base de la estructura coincida con la aceleración sísmica que el usuario desea verificar mediante simulación. Si el tiempo de establecimiento definido por la ecuación (4.29) no es lo suficiente pequeño, la aceleración real de la base ( $\ddot{q}_1$ ) no coincidirá con la aceleración deseada ( $\ddot{q}_1^d$ ).

$$T_{s1} = \frac{4}{\xi_1 \omega_{n1}}, \quad 0 < \xi_1 < 1 \quad (4.29)$$

El desacople entre las ecuaciones (4.28) implica que independientemente del valor de  $\ddot{q}_1^d$ , si se selecciona  $\ddot{q}_i^d = 0$  y  $\dot{q}_i^d = 0$  para  $i = 5, 10, 15$ , se producirá un aislamiento total de los movimientos de la base. Esta perfecta rigidez no depende de los valores seleccionados para  $\xi_5, \xi_{10}, \xi_{15}, \omega_5, \omega_{10}$  y  $\omega_{15}$ . Estos valores serán relevantes cuando el mecanismo inicie en un estado de posiciones iniciales  $(q_5, q_{10}, q_{15})$  diferente al deseado, entonces el tiempo en que el controlador es capaz de estabilizar la estructura depende de ellos.

## 4.6. Respuesta teórica con controlador CTC

El análisis matemático realizado anteriormente para la aplicación del controlador CTC en estructuras con restricción holonómica, demuestra el alto grado de desacople entre las articulaciones activas de un sistema. A continuación se comprueba este comportamiento para la estructura objeto de estudio a partir del análisis de variación del parámetro  $T_s$ .

- Caso 1: Determinando  $T_s$  igual a 1 seg, a continuación se realiza el análisis de dos gráficas arrojadas por el simulador; la primera, expone la fuerza que ejerce cada actuador para contrarrestar la energía emitida por el sismo; la segunda, muestra la variación longitudinal de cada actuador cuando se está realizando la acción de control.

Para asegurar que la aceleración real de la base ( $\ddot{q}_1$ ) coincida con la aceleración deseada ( $\ddot{q}_1^d$ ), se establece un  $T_s = [T_{base}, T_{bar}, T_{bar}, T_{bar}]$  que corresponde a las articulaciones activas (1,5,10 y 15), donde el parámetro  $T_{base}$  de la articulación activa 1 se escoge lo suficientemente pequeño para que el sismo deseado sea el mismo recibido por la estructura. En la gráfica 4.7 se comprueba la correcta selección de este parámetro.

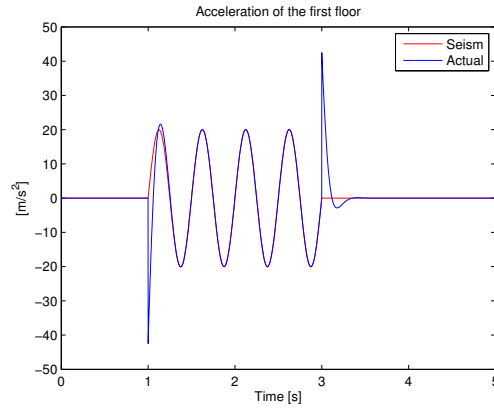


Figura 4.7: Seguimiento de aceleraciones.

La aceleración articular del cuerpo 1 representada por la señal roja, sigue continuamente a la trayectoria marcada por la señal azul que representa el sismo deseado, sin embargo en los tiempos 1 *seg* y 3 *seg* de simulación donde se marca el inicio y fin del sismo, no es indispensable realizar este seguimiento de trayectoria, ya que por ser la aceleración una señal continua pero no derivable hace que se presenten cambios bruscos en los puntos de inicio y finalización de la onda, reflejándose en máximos sobre impulsos que tienden a infinito en las fuerzas ejercidas por los actuadores.

A pesar de ser el CTC un controlador, en el que son desacopladas las articulaciones activas del sistema para lograr un movimiento independiente y que el objetivo de su resultado en estado estacionario es de error 0 teórico, en la figura 4.8, la respuesta que corresponde a la variación longitudinal demuestra una variación de los actuadores alrededor de la consigna. Esto se debe a que el controlador está basado en el modelo dinámico real del mecanismo y su desarrollo matemático presenta errores mínimos numéricos y se necesitaría de una máquina de precisión infinita para anularlos. Sin embargo el rango de oscilación de estas señales es despreciable, porque se encuentran dentro de la escala micrométrica.

De la figura 4.8 la respuesta de variación longitudinal, demuestra que a partir del  $T_s$  asignado se obtiene una aproximación a la referencia por parte de los tres disipadores de energía  $J_5$ ,  $J_{10}$  y  $J_{15}$  en un tiempo menor a 2 *seg*, las variaciones de longitud de los  $RA$  en la respuesta de estado estacionario están alrededor de las micras, siendo estos errores despreciables al ser comparados con las magnitudes (*mts*) de la estructura, además el máximo sobre impulso alcanzado por los disipadores no sobre pasan rangos micrométricos.

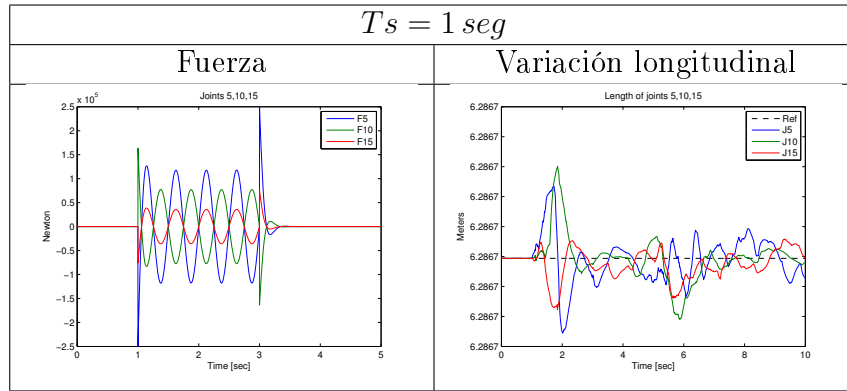


Figura 4.8: Respuesta del sistema con  $T_s = 1 \text{ seg}$ .

En la gráfica que representa la fuerza de cada actuador, se aprecia un esfuerzo por parte de  $J_{10}$  y  $J_{15}$  menor que el elemento  $J_5$ , debido a que este es el primer afectado por la excitación y debe compensar más rápido las fuerzas para evitar la propagación, sin embargo a medida que el movimiento se propaga por la estructura va siendo disipado por los elementos  $RA$  de cada nivel.

- Caso 2: Determinando esta vez  $T_s$  igual a  $5 \text{ seg}$ , a continuación se muestran las gráficas obtenidas al ejecutar el simulador:

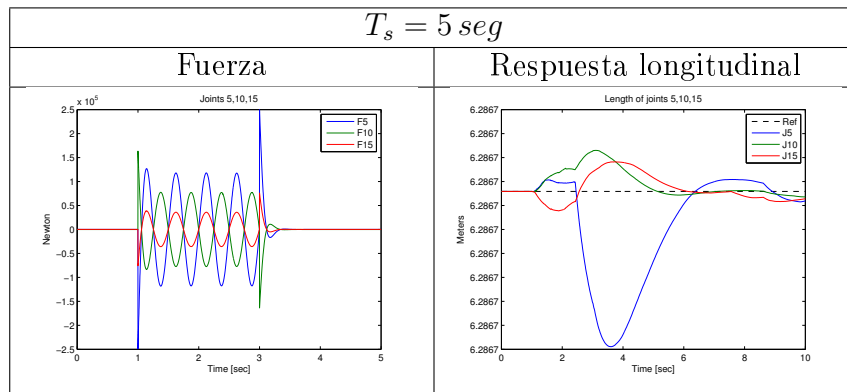


Figura 4.9: Respuesta del sistema con  $T_s = 5 \text{ seg}$ .

Esta segunda prueba se realiza con  $T_s = 5 \text{ seg}$ , en la respuesta se aprecia que la aproximación a la referencia por parte de los elementos  $RA$  es más lenta que en el caso 1, con un tiempo aproximado de  $4 \text{ seg}$ ; es decir que a los disipadores de energía les toma más tiempo retornar al valor de referencia deseado. Sin embargo, se debe tener en cuenta que a pesar de tener un tiempo mayor, las variaciones de elongación son despreciables.

El comportamiento y el aporte de energía que deben realizar los disipadores en este caso, es similar al anterior, esto se debe al desacople dinámico inicial determinado para la estructura.

#### 4.6.1. Análisis de los casos 1 y 2

Las anteriores respuestas arrojadas por simulación, atribuyen al comportamiento de una estructura rígida, considerando que la elongación de los actuadores no posee la flexibilidad necesaria para la mitigación del sismo, sin afectar el buen estado del edificio. Esto no indica un mal funcionamiento del controlador, por el contrario demuestra que la dinámica de la estructura responde a lo exigido por la ley de control.

La rigidez estructural obtenida, se debe al desacople en las 4 articulaciones activas del edificio, es decir que al linealizar y desacoplar la estructura con el control CTC, esta se convierte en cuatro sistemas de segundo orden desacoplados (base, barras 5, 10 y 15), haciendo que los movimientos de la base no afecten los movimientos de los restantes. En otros términos, el desacople impide que los movimientos del cuerpo 1 incidan en los cuerpos restantes, tornando el tiempo de respuesta  $T_s$  de cada uno de los 4 sistemas irrelevante para el caso de estudio. El  $T_s$  será imprescindible si se considera el estado inicial de la estructura en un valor que no corresponda al estable, entonces el tiempo empleado para que se llegue al estado deseado será  $T_s$ .

Teniendo en cuenta lo anterior, se asegura que el controlador CTC no cumple con el objetivo del control estructural, debido a que no se logran obtener diferentes grados de flexibilidad para la estructura al variar el parámetro  $T_s$ , lo cual es indispensable para la disipación de energía y disminución de afección estructural.



# Conclusiones

1. El modelado de una estructura con restricciones cinemáticas requiere de la implementación de teorías que contemplen su análisis de movilidad. El manejo de esta teoría permitió concluir que un mecanismo robótico cerrado se modela teniendo en cuenta la afirmación: "Mecanismo arborescente + Ec. Algebraica = Mecanismo cerrado". En donde la Ec. Algebraica representa la restricción holonómica.
2. Para obtener el modelo dinámico directo de una estructura robótica, es necesario el manejo de los parámetros dinámicos y geométricos de esta, además de la implementación de una metodología para su desarrollo. Dentro de estas metodologías se encuentran: i) La formulación de Newton-Euler. ii) Formulación de Lagrange. Para el caso de estudio se empleó Newton-Euler ya que a diferencia de Lagrange, las operaciones simbólicas requeridas para generar el modelo dinámico del robot no requieren, ni de derivadas con respecto al tiempo, ni de derivadas parciales.
3. El simulador implementado permitió: i) Visualizar el comportamiento de una estructura bidimensional con múltiples restricciones. ii) El análisis de respuestas ante la variación de ondas que representan entradas cinemáticas. iii) Variación y elección de constantes que representan la capacidad de disipación cinemática de la estructura para el control y estabilización de la misma a partir de la implementación de dos tipos de controladores.
4. El objetivo del control estructural debe ser priorizado por la capacidad de disipación de energía total del edificio ante excitaciones sísmicas, y no por la precisión y seguimiento de trayectoria como ocurre en robots manipuladores.
5. La variación de parámetros en las constantes de los controladores empleados, permite afirmar lo siguiente:
  - Si se manipulan las constantes para obtener una estructura demasiado rígida lo

cual es análoga al comportamiento de una estructura común, la compensación del controlador ante excitación sísmica será mínima y se verá reflejado en daños o colapso de la estructura.

- Si el elemento  $RA$  es demasiado flexible, es decir que la capacidad de disipación de energía es baja, se obtendrá una estructura inestable propensa al colapso u oscilaciones inadmisibles para los habitantes del edificio.
- Las mejores constantes del controlador son aquellas que reduzcan apropiadamente la alta flexibilidad del  $RA$  sin llegar a la rigidez del mismo, donde la estructura no deba soportar fuertes cargas que ocasionen grietas consideradas peligrosas para la protección de los habitantes.

6. Los criterios de evaluación para determinar las mejores constantes de disipación para el control estructural se citan y explican a continuación, con un grado de importancia decreciente:

- Disipación cinemática de la estructura: Este criterio debe ser el más importante a considerar. Las entradas de señales a una estructura deben ser totalmente disipadas por el controlador, evitando que se afecte la estabilidad del edificio.
- Tiempo de estabilización de la estructura: Si el tiempo de estabilización es muy pequeño, significaría tener una estructura demasiado rígida. Si el tiempo de estabilización es considerablemente amplio, significaría tener una estructura con baja disipación y altas oscilaciones. Lo cual se concluye que el tiempo de estabilización está directamente relacionado con la sintonización de los parámetros  $K_p$  y  $K_v$ .
- Margen de error en el tiempo estacionario de la respuesta: El dimensionamiento de los cuerpos que representan las paredes y pisos de una estructura comúnmente están entre los  $3-5mts$  y para el caso objeto de estudio, los actuadores y barra transversal de cada nivel deben mantenerse en el valor ideal de  $6.28mts$ , lo que implica que es posible considerar una desviación del error en unidades que descendan desde las milimétricas; unidades más altas serán considerables desviaciones para obtener una inestabilidad en la estructura.

De los resultados y análisis derivados de la sección anterior, a continuación se presenta un cuadro comparativo 4.1 donde se resaltan las ventajas, desventajas y características de cada controlador en el momento de ser aplicado a la estructura objeto de estudio:

| <b>Control PD Pasivo</b>   | <b>Control CTC Activo</b>  |
|--|--|
| Controlador con implementación pasiva. Sus actuadores finales son elementos pasivos que reaccionan proporcionalmente a la energía recibida y su velocidad de disipación.   | Controlador con elementos finales activos que actúan para la disipación cinemática con fuente energética de alta potencia.   |
| La ley de control implementada se basa en mantener la longitud de la barra transversal de cada nivel donde se encuentran los actuadores, en un valor ideal aplicando el teorema de pitágoras.  | La ley de control implementada en este caso, se basa en el modelo dinámico exacto de la estructura que involucra únicamente las variables articulares activas que reaccionaran a la señal de excitación entrante. El objetivo es igualmente mantener en un valor ideal la longitud de la barra transversal de cada nivel |
| La sintonización de este controlador se realizó a prueba y error, para los valores de $k_p$ y $K_v$ , donde los lazos de control presentaban un alto grado de acoplamiento, por su sistema no lineal, lo que implicaba que la sintonización de un lazo afectaba los restantes. | Controlador de fácil sintonización a partir de un solo parámetro $T_s$ , con desacoplamiento en sus lazos, permitiendo que el desempeño de un lazo de control no afecte los restantes.   |
| Este controlador no requiere el modelo dinámico para desarrollarse.  | Se desarrolla a partir del modelo dinámico de la estructura.   |
| La principal ventaja de este controlador, es que, no es necesaria una fuente externa de energía para que los actuadores reaccionen ante la entrada de una señal y puedan mantener estable la estructura  | Este controlador requiere de una fuente externa que proporcione a los actuadores el torque necesario para mantener estable la estructura.  |
| Se determinó la implementación de un controlador PD pasivo ya que el problema de control estructural no es de seguimiento de consigna si no de disipación de energía.  | Se reacondicionó la implementación del controlador <i>CTC</i> para manipuladores, esta vez para estructuras con restricción holonómica, para lograr analizar si el desacople dinámico de la estructura brindaba ventaja para la sintonización y estabilización de la estructura.   |
| A pesar de la buena respuesta arrojada ante la implementación del controlador PD pasivo, la dificultad en caso de llevarse a cabo físicamente, será encontrar las constantes exactas para el resorte amortiguador determinada por el análisis en simulación.                   | Sin embargo es innecesario iniciar la búsqueda y el dimensionamiento de los actuadores, ya que el análisis no arrojó un buen comportamiento dinámico estructural.  |
| La variación de parámetros altera considerablemente la dinámica de la estructura.  | la variación del parámetro $T_s$ que representan las constantes de los elementos <i>RA</i> no afectan la dinámica de la respuesta estructural.   |

Cuadro 4.1: Conclusión de controladores.

7. Para la aplicación del control estructural a un edificio de 3 niveles con 16 grados de libertad, se concluye a partir de los análisis realizados anteriormente, que el controlador ideal para la disipación de energía cuando es excitada la estructura por un sismo, deber ser realizado por el controlador  $PD$ , arrojando mejores respuestas ante la comparación con el  $CTC$ .

# Bibliografía

- [1] A. R. Swartz, “Reduced-order modal-domain structural control for seismic vibration control over wireless sensor networks,” in *American Control Conference*, 2011.
- [2] J. Lynch, Y. Wang, R. Swartz, K. Lu, and C. Loh, “Implementation of a closed-loop structural control system using wireless sensor networks,” *Journal of Structural Control and Health Monitoring*, vol. 15, no. 4, pp. 518 – 539, 2008.
- [3] F. Cheng and P. Tian, “Generalized optimal active control algorithm for nonlinear seismic structures,” in *Earthquake Engineering, Tenth World Conference*, 1992.
- [4] Y. Wang, J. P. Lynch, and K. H. Law, “Decentralized Hinfinity controller design for large-scale civil structures,” *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 38, pp. 377–401, 2009.
- [5] J. A. Oviedo and M. d. P. Duque, “Sistemas de control de respuesta sismica en edificaciones,” *Revista EIA*, vol. 6, pp. 105–120, 2006.
- [6] O. A. Vivas, *Diseño y Control de Robots Industriales: Teoría y Práctica*. Elaleph, 2010.
- [7] B. Siciliano and O. Khatib, *Springer Handbook of Robotics*, ser. Gale virtual reference library. Springer, 2008.
- [8] W. Khalil and E. Dombre, *Modeling, Identification and Control of Robots*, 2nd ed., ser. Kogan Page Science paper edition. Paris, France: Butterworth - Heinemann, 2004.
- [9] M. Walker and D. Orin, “Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 104, no. 3, pp. 205 – 211, 1982.

- [10] J. M. Hollerbach, "A recursive lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity," *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, vol. 10, no. 11, pp. 730 –736, nov. 1980.
- [11] C. S. G. Lee, B. H. Lee, and R. Nigam, "Development of the generalized d'Alembert equations of motion for mechanical manipulators," in *The 22nd IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 22, dec. 1983, pp. 1205 – 1210.
- [12] B. C. Fabien, *Analytical System Dynamics: Modeling and Simulation*. Springer, 2008.
- [13] D. Myszka, *Machines & Mechanisms: Applied Kinematic Analysis*. Pearson Education, 2011.
- [14] C. F. Rengifo, "Contributions à la commande de robots marcheurs bipèdes," Ph.D. dissertation, École Centrale de Nantes, 2011.
- [15] P. Alvaro, "Technology and Industrial Automation," Atlantic International University, Tech. Rep., 2010.
- [16] T. Alamo Cantarero, "Diseño del controlador PID," Universidad de Sevilla - Departamento de Ingenieria de Sistemas y Automatica, Tech. Rep.
- [17] L. A. Soriano, "Control proporcional derivativo para un brazo robotico articulado," Master's thesis, Instituto Politecnico Nacional- Escuela Superior de Ingenieria Mecanica y Electrica Unidad Azcapotzalco, 2011.
- [18] J. Dixon, *The Shock Absorber Handbook*, 2nd ed., ser. Wiley-Professional Engineering Publishing, J. W. . Sons, Ed. John Wiley & Sons, 2007.
- [19] M. E. Tornello and M. Sarrazin, "Influencia del amortiguamiento en la respuesta de estructuras con aislamiento sismico de base," *Asociacion Argentina de Mecanica Computacional*, vol. XXVII, pp. 845–864, 2008.
- [20] J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, ser. Prentice-Hall International Editions. Prentice-Hall, Incorporated, Englewood Cliffs, N.J., 1991.