

Aspectos combinatorios del arreglo de Catalan



Natalia Saavedra Ordoñez

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Colombia
2022

Aspectos combinatorios del arreglo de Catalan

Natalia Saavedra

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director
Diego Ruiz

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Colombia

2022

Nota de Aceptación

Dr. Diego Ruiz

Director

Dr. Eric Fernando Bravo Montenegro

Evaluador

Dr. José Luis Herrera

Evaluador

Popayán, 3 de Noviembre de 2022

Resumen: La combinatoria es una rama de las matemáticas que estudia los métodos para contar configuraciones de elementos de un conjunto que cumplan con criterios específicos. En particular, en esta área uno de los temas que han sido común objeto de estudio son los números de Catalan, cuya sucesión aparece frecuentemente en la solución de diversos problemas de conteo. En este trabajo se introduce un algoritmo que etiqueta las regiones del arreglo de Catalan a través de relaciones biyectivas entre objetos combinatorios que aparecen en la sucesión de los números de Catalan, teniendo en cuenta las propiedades combinatorias de los objetos en mención. Este resultado abre paso a la relación del poset de intersección del arreglo de Catalan con un grafo dirigido definido a través de mecanismos para la conexión entre sus nodos, lo que permitió obtener información básica sobre la estructura geométrica del arreglo, dando lugar a una nueva forma de contar etiquetas de Catalan.

Palabras clave: Números de Catalan, arreglo de Catalan, etiquetamiento regiones, triángulo de Catalan.

Índice general

1. Introducción	1
2. Marco Teórico	4
2.1. Números de Catalan	4
2.2. Arreglo de Catalan	7
3. Etiquetamiento de las regiones del arreglo de Catalan	10
3.1. Algoritmo de etiquetamiento	10
3.2. Obtención de etiquetas a partir de objetos combinatorios	15
3.3. Etiquetas y grafos	17
3.3.1. Conexión entre nodos	17
3.4. Contando etiquetas	19
3.4.1. Problema abierto	22
4. Conclusiones y trabajo futuro	24
Bibliografía	26

Capítulo 1

Introducción

La teoría de arreglos de hiperplanos puede ser definida desde diversas ramas de la matemática, como la geometría, combinatoria, topología, análisis y álgebra, con interesantes relaciones y resultados entre ellas [1]. De manera sencilla, podemos tener una idea sobre los arreglos de hiperplanos imaginando que se necesita dividir una pizza en el mayor número de trozos posibles usando n cortes rectos. Para obtener dicho máximo es suficiente que se cumplan dos condiciones: (i) no puede haber dos cortes paralelos, y (ii) no puede darse que tres cortes o más se intersecten en un solo punto [2]. Estas dos condiciones garantizan que el número máximo de trozos sea $\binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$, donde como es usual $\binom{n}{k}$ denota el coeficiente binomial para $n, k \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$. Ahora que se tiene un arreglo de hiperplanos, piense que la pizza es un espacio vectorial, los cortes rectos con que fue dividida son los hiperplanos y cada trozo representa una región del arreglo.

En particular, el arreglo de hiperplanos de Catalan es un arreglo con particularidades que lo hacen un objeto interesante de estudio por sus propiedades combinatorias y las diferentes relaciones que tienen con otros objetos [3]. Actualmente se han desarrollado diversos estudios alrededor de este arreglo orientados a la caracterización y etiquetamiento de las regiones acotadas, relativamente acotadas y no acotadas [4], a los aspectos combinatorios del polinomio característico asociado al arreglo [5] y a las biyecciones entre regiones del arreglo con grafos y árboles binarios [6] [7].

El conjunto de regiones del arreglo de Catalan es uno de los objetos combinatorios que cuentan los números de Catalan; esta sucesión resulta fascinante por sus variadas interpretaciones y aplicaciones en diferentes áreas de las matemáticas. El matemático Richard P. Stanley en su libro *Catalan Numbers* presenta 214 tipos diferentes de objetos que cuentan los números de Catalan [8]. La

versatilidad de estos números proporciona cierta libertad para elegir las herramientas de estudio al abordar un problema, pero debido al crecimiento exponencial de la sucesión se dificulta el conteo y la caracterización de regiones del arreglo a estudiar.

Los números de Catalan son una sucesión de números naturales que aparecen frecuentemente en la solución de diversos problemas de conteo. Su nombre proviene del matemático belga Eugène Charles Catalan, sin embargo, su primera aparición escrita fue en 1730 por Ming'antu. Durante muchos años recibieron el nombre de números de Euler–Segner, debido a que en 1751 Leonhard Euler encontró por medio de la triangulación de polígonos regulares una fórmula para los números de Catalan, la cual años después demostró con ayuda de Goldbach y Johann Segner [8]. Además, estos números aparecen en la solución de problemas del mundo real. Por ejemplo, en criptografía se usa el algoritmo de triangulación de un polígono en el proceso de generar claves ocultas en un segmento de una imagen en 3D y en el desarrollo de algoritmos que generan secuencias de números binarios con el fin de crear claves para la transferencia segura de información. Son útiles además en la esteganografía, la cual se encarga del estudio y la aplicación de métodos para ocultar mensajes dentro de otros objetos, de modo que el acto de comunicación de un mensaje pase inadvertido. En dicha aplicación se usa un método de ocultamiento de datos basado en las palabras de Dyck, donde cada palabra representa una cadena de símbolos, que define el alfabeto, que en este caso son paréntesis que cumplen con una serie de reglas para estar correctamente anidados, lo que se conoce como la sintaxis del lenguaje. Las palabras de Dyck juegan un papel importante en la teoría de los lenguajes de las ciencias de la computación, las matemáticas y la lingüística; estudios al respecto afirman que los recursos computacionales para descifrar conjuntos de palabras de Dyck son limitados, lo que hace que la detección de mensajes ocultos sea hasta el momento imposible [9]. En particular, los caminos de Dyck serán un objeto clave en la verificación de uno de los resultados más relevantes de nuestra investigación.

Este trabajo tiene como objetivos *(i)* exponer un modelo de etiquetamiento para las regiones del arreglo de Catalan, relacionando dicho modelo con la estructura, geometría y las propiedades de otros conjuntos de objetos contados por la sucesión de números de Catalan, pero sobre todo una forma más sencilla de estudiar la geometría y los aspectos combinatorios del arreglo, *(ii)* identificar algunas relaciones entre grafos asociados a un poset de intersecciones y la configuración del arreglo. Durante la investigación fueron fundamentales las relaciones de orden con las que cuenta la estructura de los números de Catalan [10], ya que de esta forma logramos establecer condiciones para desarrollar el

algoritmo que nos permitiría generar y asignar las etiquetas a las regiones a caracterizar por medio de grafos asociados a cada arreglo de hiperplanos. Por otra parte logramos establecer una conexión entre el triángulo de Catalan y las etiquetas. Inicialmente se tenía que las entradas del triángulo presentan interesantes propiedades combinatorias, funciones generadoras y pueden expresarse de manera recursiva [11], además están relacionadas con los números de Fibonacci , matrices y otros objetos matemáticos [12] que al ser explorados nos proporcionó la idea de cómo contar etiquetas usando las entradas del triángulo de Catalan y obtener una fórmula recursiva.

El documento se organiza de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presenta las definiciones y conceptos básicos usados en el desarrollo de este trabajo. El Capítulo 3 muestra los resultados de nuestro trabajo. En particular, se presenta el algoritmo que define la relación de orden sobre el conjunto de n -uplas usadas para etiquetar las regiones del arreglo de Catalan. Finalmente, en el Capítulo 4 se discuten algunas conclusiones y planteamos un par de problemas abiertos.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Números de Catalan

En combinatoria existen gran cantidad de problemas de conteo cuya solución está dada por los números de Catalan, esta sucesión de números naturales es bastante versátil cuando se trata de contar, hasta el momento se conocen más de 200 interpretaciones diferentes [13].

Definición 2.1.1. Dado un entero $n \geq 0$, el n -ésimo número de Catalan C_n se define como

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0,$$

donde $C_0 = 1$. A la sucesión C_0, \dots, C_n se le denomina sucesión de Catalan. Los primeros números de Catalan para $n = 0, 1, \dots$ son

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \dots$$

El n -ésimo número de Catalan se puede expresar en términos del coeficiente binomial por

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

para todo n .

A continuación se listan algunos conjuntos de objetos que son contados por la sucesión de Catalan, los ejemplos que se muestran se harán para $n = 3$, lo que corresponde al número de

Catalan $C_3 = 5$ [13].

Secuencias de 1's y -1's

Es la secuencia b_1, b_2, \dots, b_{2n} donde a cada b_i se le asigna 1 o -1 , tal que todas las sumas parciales $b_1 + b_2 + \dots + b_k$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ sean no negativas y la suma total siempre sea cero. Para $n = 3$ se tienen las siguientes secuencias

$$\begin{array}{lll} 1, 1, 1, -1, -1, -1 & 1, 1, -1, 1, -1, -1 & 1, -1, 1, 1, -1, -1 \\ 1, 1, -1, -1, 1, -1 & 1, -1, 1, -1, 1, -1. & \end{array}$$

Caminos de Dyck \mathcal{D}_n

En combinatoria un lattice path es una secuencia de vectores que forman un camino sobre una red conformada por una colección de puntos en \mathbb{R}^n . En particular los Caminos de Dyck \mathcal{D}_n son un lattice path con vectores dirigidos hacia el Norte y hacia el Este desde $(0, 0)$ hasta (n, n) . Este conjunto está conformado por los caminos que se pueden trazar sobre una cuadrícula de tamaño $n \times n$ sin tener que cruzar la diagonal. El camino inicia en la esquina inferior izquierda, desde donde solo es permitido moverse hacia el Norte o hacia el Este. El camino terminará en la esquina superior derecha. Por ejemplo, la Figura 2.1 muestra los caminos que unen la esquina inferior izquierda con la esquina superior derecha de una cuadrícula 3×3 , evitando pasar por debajo de la diagonal y usando 6 pasos, la mínima distancia posible.

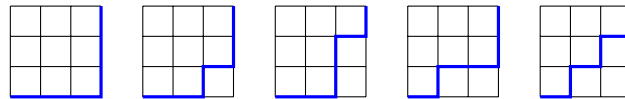
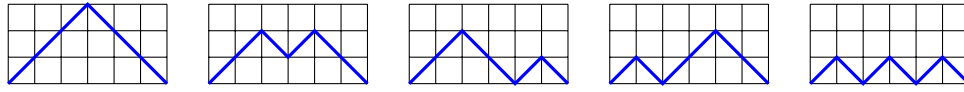


Figura 2.1: Caminos de Dyck \mathcal{D}_3 .

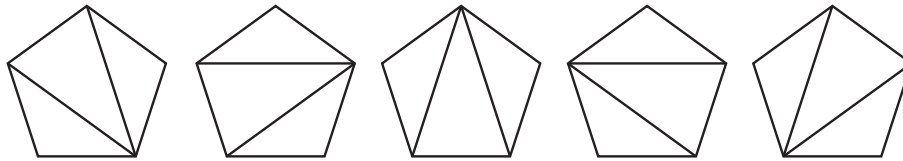
Caminos de Dyck \mathcal{D}_n -versión 2-

Este conjunto de caminos es equivalente al ejemplo anterior pero su representación gráfica cambia, puede definirse como un lattice path en \mathbb{Z}^2 desde $(0, 0)$ a $(2n, 0)$ usando pasos $(1, 1)$ y $(1, -1)$, de forma que nunca se pasa debajo del eje x . La Figura 2.2 ilustra caminos de $(0, 0)$ a $(6, 0)$ sin pasar por debajo del eje x .

Figura 2.2: Caminos de Dyck \mathcal{D}_3 -versión 2-.

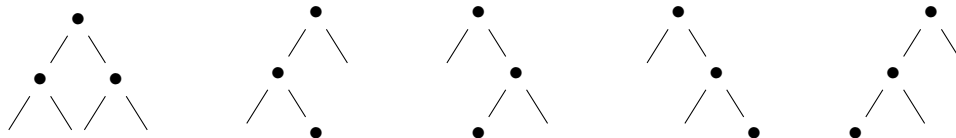
Triangulaciones

Una triangulación es una división del área de un polígono en un conjunto de triángulos, tal que la unión de todos los triángulos es igual al polígono original, donde los vértices de los triángulos son vértices del polígono original y cualquier pareja de triángulos es disjunta o comparte únicamente un vértice o un lado. En este caso, la triangulación \mathcal{T}_3 se refiere al número de formas distintas de dividir un polígono conexo de $n + 2$ lados en triángulos, conectando vértices con $n - 1$ diagonales con la condición de que éstas no se corten entre ellas, tal y como se muestra en la Figura 2.3.

Figura 2.3: Triangulaciones \mathcal{T}_3 .

Árboles binarios con n vértices.

Un árbol binario es un grafo conexo, acíclico y no dirigido, donde el grado de cada vértice es menor o igual a dos. La Figura 2.4 presenta los árboles binarios que se pueden obtener con tres vértices. Estas biyecciones además de relacionar el número de elementos de cada conjunto con los números de Catalan, también permiten observar la relación entre las estructuras de diferentes objetos, lo que da la posibilidad de estudiar y descubrir propiedades entre ellos.

Figura 2.4: Árboles binarios T_3 .

2.2. Arreglo de Catalan

Sea \mathbb{R}^n un espacio vectorial sobre el campo de los reales \mathbb{R} , se define un *hiperplano lineal* en \mathbb{R}^n como un subespacio $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha \cdot x = 0\}$ de \mathbb{R}^n , donde α es un vector fijo distinto de cero y $\alpha \cdot x$ denota el producto punto usual [14].

Un *hiperplano afín* en \mathbb{R}^n es la traslación \mathcal{J} de un hiperplano en \mathbb{R}^n , esto es:

$$\mathcal{J} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha \cdot x = a\},$$

donde α es un vector fijo de \mathbb{R}^n distinto de cero y normal al hiperplano \mathcal{J} , y $a \in \mathbb{R}$. En general diremos que \mathcal{L} es un *subespacio afín* de \mathbb{R}^n si \mathcal{L} es la traslación de un subespacio de \mathbb{R}^n [14].

Un *arreglo de hiperplanos* \mathcal{A} es una colección finita de hiperplanos lineales

$$\mathcal{H}_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_i \cdot x = a_i\}$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$ y $\alpha_i \cdot x$ denota el producto punto usual [14].

Definición 2.2.1. El *arreglo de Catalan*, denotado por \mathcal{C}_n , está formado por $3\binom{n}{2}$ hiperplanos en \mathbb{R}^n , definidos como $x_i - x_j = c$ donde $c \in \{-1, 0, 1\}$ para $1 \leq i < j \leq n$.

En particular, el arreglo de Catalan \mathcal{C}_3 se define por medio de los siguientes hiperplanos en \mathbb{R}^3 .

$$\begin{array}{lll} x - y = -1 & y - z = -1 & x - z = -1 \\ x - y = 0 & y - z = 0 & x - z = 0 \\ x - y = 1 & y - z = 1 & x - z = 1. \end{array}$$

La Figura 2.5 muestra el arreglo \mathcal{C}_3 con sus respectivos hiperplanos. En general, la dimensión de un arreglo de hiperplanos \mathcal{A} corresponde a la dimensión del espacio vectorial y se denota por $\dim(\mathcal{A})$. En particular para el arreglo de Catalan se tiene que $\dim(\mathcal{C}_n) = n$. Por otra parte, el rango de un arreglo denotado por $\text{rank}(\mathcal{A})$, se define como la dimensión de un subespacio W de \mathbb{R}^n generado por los vectores normales a cada uno de los hiperplanos del arreglo. En el caso del arreglo de Catalan \mathcal{C}_n se puede probar que $\text{rank}(\mathcal{C}_n) = n - 1$. En particular, para el arreglo de Catalan \mathcal{C}_3 se tiene $\dim(\mathcal{C}_3) = 3$ y $\text{rank}(\mathcal{C}_3) = 2$.

Definición 2.2.2. Una *región* de un arreglo \mathcal{A} es una componente conexa de $\mathbb{R}^n - \bigcup \mathcal{H}_i$.

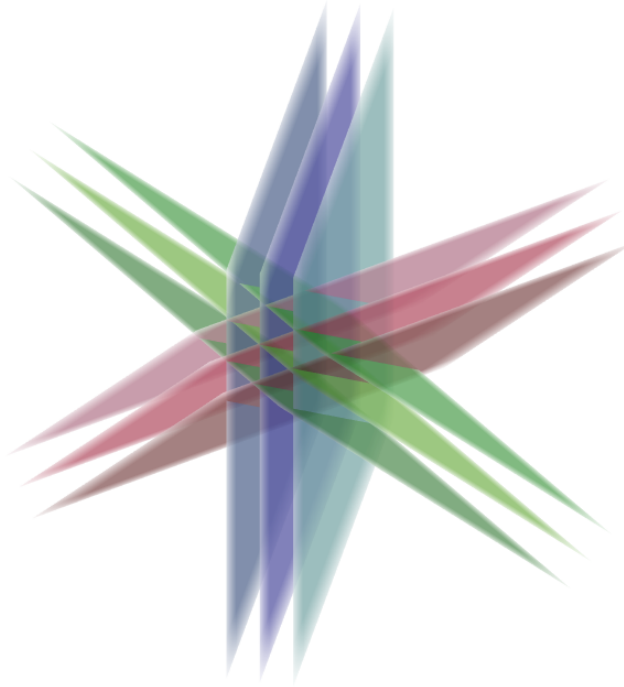


Figura 2.5: Arreglo de Catalan \mathcal{C}_3 . Está conformado por nueve hiperplanos en \mathbb{R}^3 de la forma $x_i - x_j = c$ donde $c \in \{-1, 0, 1\}$ para $1 \leq i < j \leq 3$.

Denotaremos por $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ al conjunto de todas las regiones de \mathcal{A} , y $r(\mathcal{A}) = |\mathcal{R}(\mathcal{A})|$ al número de regiones de \mathcal{A} .

Note que cada hiperplano $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha \cdot x = a\}$ divide al espacio \mathbb{R}^n en dos regiones, $\alpha \cdot x < a$ y $\alpha \cdot x > a$. Si \mathcal{A} está formado por m hiperplanos $\mathcal{H}_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_i \cdot x = a_i\}$ con $1 \leq i \leq m$, podemos describir a cada región del arreglo \mathcal{A} por medio de una desigualdad de la forma $\alpha_i \cdot x < a_i$ y $\alpha_i \cdot x > a_i$, para cada $1 \leq i \leq m$.

Definición 2.2.3. Si W es el subespacio de \mathbb{R}^n generado por los vectores normales a los hiperplanos de \mathcal{A} , diremos que una región $R \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ es *relativamente acotada* si $R \cap W$ es acotado. Denotaremos por $b(\mathcal{A})$ al número de regiones de \mathcal{A} relativamente acotadas.

En particular, al tomar el arreglo completo de hiperplanos \mathcal{C}_n , el espacio \mathbb{R}^n se divide en $n!C_n$ regiones y $n!C_{n-1}$ regiones acotadas. Otra forma de obtener el número de regiones del arreglo es usando el polinomio característico $\chi_{\mathcal{C}_n}(t)$ definido como [2]

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(t) = t(t - n - 1)(t - n - 2)(t - n - 3) \cdots (t - 2n + 1).$$

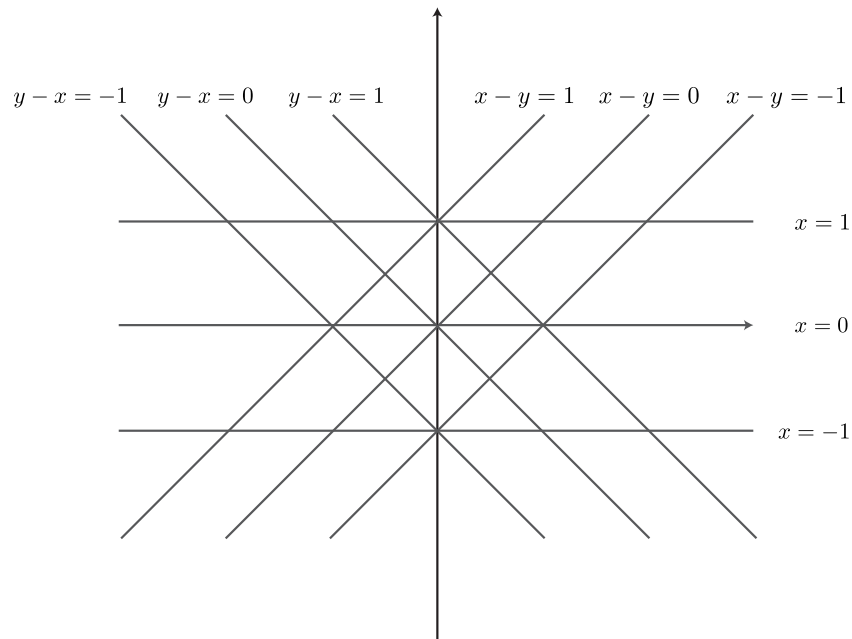


Figura 2.6: Arreglo de Catalan \mathcal{C}_3 en \mathbb{R}^2 .

La Figura 2.6 ilustra el arreglo \mathcal{C}_3 en \mathbb{R}^2 (intersectado con el hiperplano $x + y + z = 0$), en este caso se puede verificar de manera visual el conteo de las regiones, lo cual no es posible en dimensiones superiores.

Note que el arreglo \mathcal{C}_n es simétrico, además al dividir el número de regiones del arreglo entre $n!$ se obtiene un subconjunto con C_n regiones, así, se tiene otro conjunto relacionado con los números de Catalan lo que posibilitaría encontrar biyecciones y propiedades interesantes entre el número de regiones del arreglo y otros conjuntos de objetos que cuentan los números de Catalan.

Capítulo 3

Etiquetamiento de las regiones del arreglo de Catalan

En nuestra búsqueda de un modelo de etiquetamiento para las regiones del arreglo de Catalan relacionándolo con un conjunto de objetos combinatorios, encontramos un conjunto de tuplas que permite establecer una biyección entre las regiones del arreglo y las etiquetas. Además, se identificó una relación de las etiquetas con grafos asociados a un poset de intersecciones y a la configuración geométrica del arreglo. Los resultados presentados en este capítulo son los siguientes: (i) diseño de un algoritmo que permite obtener las etiquetas de las regiones, y (ii) caracterización de algunas de las propiedades combinatorias de las etiquetas y su conexión con la teoría de grafos.

3.1. Algoritmo de etiquetamiento

Algoritmo 1: Función OrdenarPorSuma(I_n)

- 1: **Entrada** Conjunto de n -tuplas I_n
 - 2: **Salida** Colección de conjuntos S
 - 3: **Para** $u \in I_n$ **hacer**
 - 4: **Si** $\sum u = j$ **entonces**
 - 5: adicionar($S[j], u$)
 - 6: **Fin Si**
 - 7: **Fin Para**
 - 8: **retornar** S
-

Al estudiar las etiquetas de las regiones del arreglo de Catalan en casos particulares, logramos identificar reglas y condiciones que permiten generarlas en cualquier dimensión. Esto nos permitió diseñar un algoritmo en el que no solamente se generaliza la forma de obtener las etiquetas, sino que además nos da una noción del comportamiento y propiedades del arreglo.

Iniciaremos caracterizando el conjunto de etiquetas en el Algoritmo 1 a partir de un conjunto de n -tuplas I_n . Con el fin de caracterizar el cardinal de I_n , note que este depende de la longitud que tenga cada etiqueta, las cuales se comportan como n -tuplas de la forma $0 x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$. Dado que la primera componente de la n -tupla siempre es cero, solo en el diseño de nuestros algoritmos, esta componente se omite con el fin de reducir el número de comparaciones y así bajar el uso de recursos computacionales, dejando etiquetas con $n - 1$ componentes de la forma $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$. Procedemos ahora a ordenar el conjunto I_n por medio de la función *OrdenarPorSuma*. Dada una tupla u de I_n , se realiza la suma de sus componentes y usando el procedimiento *adicionar*, se agrega u a un conjunto de tuplas cuya suma de componentes sea la misma. Así el Algoritmo 1 nos retorna una colección S de longitud $\sum_{i=1}^{n-1} i + 1$, esto es, un conjunto de conjuntos, de donde se espera al final elegir solo C_n para el etiquetamiento del arreglo.

Ahora, observe que si consideramos etiquetas de longitud $n-1$ y el hecho de que cada componente puede tomar n valores distintos, tendríamos un total de n^{n-1} etiquetas en dicho conjunto, es decir

$$|I_n| = n^{n-1}.$$

Pero el estudio de las etiquetas en casos particulares nos permitió observar que cada componente toma valores en un rango específico, esto es, una componente no necesariamente llega a tomar n valores, lo que indica que el cardinal de nuestro conjunto inicial I_n puede llegar a ser menor que n^{n-1} , lo que permite reducir el número de operaciones que ocurren en el Algoritmo 1.

A continuación, se establecen los posibles valores que puede tomar cada componente de la

Algoritmo 2: Función Etiqueta(I_n)

```

1: Entrada Conjunto de  $n$ -tuplas  $I_n$ 
2: Salida Conjunto de Etiquetas de Catalan  $\mathcal{E}_n$ 
3:  $S \leftarrow \text{OrdenarPorSuma}(I_n)$ 
4:  $\mathcal{E}_n \leftarrow \{ \}$ 
5:  $\mathcal{E}_n^1 \leftarrow S_{(1,1)}$ 
6:  $\mathcal{E}_n^{\text{final}} \leftarrow (1\ 2 \ \dots \ n - 1)$ 
7:  $\ell \leftarrow \text{longitud}(S)$ 
8:  $\ell_P \leftarrow \text{longitud}(S_{(1)})$ 
9: Para  $i \leftarrow 2$  hasta  $\ell$  hacer
10:     Para  $j \leftarrow 1$  hasta  $\ell_P$ 
11:          $\mathcal{E}_n^{\text{ca}} \leftarrow S_{(i,j)}$ 
12:         Si  $\text{sort}(\mathcal{E}_n^{\text{ca}}) = \mathcal{E}_n^{\text{ca}}$  y  $\mathcal{E}_n^{\text{ca}} < \mathcal{E}_n^{\text{final}}$  entonces
13:             adicionar( $\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n^{\text{ca}}$ )
14:         Fin Si
15:     Fin Para
16: Fin Para
17: retornar  $\mathcal{E}_n$ 

```

etiqueta $x_1\ x_2 \ \dots \ x_{n-1}$. Note que

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x_1 \leq 1 \\
 0 &\leq x_2 \leq 2 \\
 &\vdots \\
 0 &\leq x_{n-2} \leq n - 2 \\
 0 &\leq x_{n-1} \leq n - 1.
 \end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos exactamente $n!$ combinaciones, las cuales conforman el conjunto inicial de etiquetas I_n considerado como entrada del Algoritmo 1, al cual le hemos encontrado una cota menor, esto es $|I_n| = n!$.

Continuando ahora con el Algoritmo 2, usaremos como entrada una colección que en particular es el conjunto S retornado del Algoritmo 1. El Algoritmo 2 retornará el conjunto de etiquetas válidas que serán usadas en el etiquetamiento de las regiones del arreglo de Catalan. Primero, se fija la etiqueta inicial que corresponde a la tupla cero o también denominada tupla vacía; además fijamos

la etiqueta final la cual se caracteriza porque cada una de sus componentes toma el mayor valor dentro del rango posible. Note que la variable $\mathcal{E}_n^{\text{ca}}$ dada en la línea 11 del Algoritmo 2 representa una etiqueta candidata del conjunto final de etiquetas del arreglo de Catalan. Segundo, recorriendo el conjunto S , se procede a filtrar y ordenar las etiquetas válidas haciendo uso de la función *sort* y de la desigualdad estricta *menor que* ($<$), la cual ordena por orden lexicográfico dos posibles etiquetas, eligiendo así aquellas que son válidas y puedan corresponder a una región del arreglo de Catalan, y que así harán parte del conjunto final de etiquetas \mathcal{E}_n que retorna el Algoritmo 2.

Por tanto, los Algoritmos 1 y 2 nos dejan como resultado el conjunto de etiquetas \mathcal{E}_n , cuyo cardinal resulta ser exactamente C_n , esto es, el conjunto \mathcal{E}_n corresponde al conjunto de etiquetas que estamos buscando para el arreglo de Catalan.

Ejemplo 3.1.1. Consideremos el siguiente conjunto I_4 como entrada del Algoritmo 2

$$\begin{aligned}
I_4 = & \{ \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 0, 2\}, \{0, 0, 3\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \\
& \{0, 2, 0\}, \{0, 2, 1\}, \{0, 2, 2\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 3, 0\}, \{0, 3, 1\}, \{0, 3, 2\}, \{0, 3, 3\}, \\
& \{1, 0, 0\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 0, 2\}, \{1, 0, 3\}, \{1, 1, 0\}, \{1, 1, 1\}, \{1, 1, 2\}, \{1, 1, 3\}, \\
& \{1, 2, 0\}, \{1, 2, 1\}, \{1, 2, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 0\}, \{1, 3, 1\}, \{1, 3, 2\}, \{1, 3, 3\}, \\
& \{2, 0, 0\}, \{2, 0, 1\}, \{2, 0, 2\}, \{2, 0, 3\}, \{2, 1, 0\}, \{2, 1, 1\}, \{2, 1, 2\}, \{2, 1, 3\}, \\
& \{2, 2, 0\}, \{2, 2, 1\}, \{2, 2, 2\}, \{2, 2, 3\}, \{2, 3, 0\}, \{2, 3, 1\}, \{2, 3, 2\}, \{2, 3, 3\}, \\
& \{3, 0, 0\}, \{3, 0, 1\}, \{3, 0, 2\}, \{3, 0, 3\}, \{3, 1, 0\}, \{3, 1, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 1, 3\}, \\
& \{3, 2, 0\}, \{3, 2, 1\}, \{3, 2, 2\}, \{3, 2, 3\}, \{3, 3, 0\}, \{3, 3, 1\}, \{3, 3, 2\}, \{3, 3, 3\} \}.
\end{aligned}$$

Note que en la línea 4 del Algoritmo 2 se llama a la función *OrdenarPorSuma* dada en el Algoritmo 1. Este llamado retorna la colección S , en la que cada conjunto está ordenado ascendentemente

por la suma de sus componentes. Esto es

$$\begin{aligned}
S = & \{ \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 0, 2\}, \{0, 1, 1\}, \{0, 2, 0\}, \\
& \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}, \{2, 0, 0\}, \{0, 0, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 2, 1\}, \{0, 3, 0\}, \{1, 0, 2\}, \\
& \{1, 1, 1\}, \{1, 2, 0\}, \{2, 0, 1\}, \{2, 1, 0\}, \{3, 0, 0\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 2\}, \{0, 3, 1\}, \\
& \{1, 0, 3\}, \{1, 1, 2\}, \{1, 2, 1\}, \{1, 3, 0\}, \{2, 0, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{2, 2, 0\}, \{3, 0, 1\}, \\
& \{3, 1, 0\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 3, 2\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 2\}, \{1, 3, 1\}, \{2, 0, 3\}, \{2, 1, 2\}, \\
& \{2, 2, 1\}, \{2, 3, 0\}, \{3, 0, 2\}, \{3, 1, 1\}, \{3, 2, 0\}, \{0, 3, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \\
& \{2, 1, 3\}, \{2, 2, 2\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 0, 3\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}, \{3, 3, 0\} \}.
\end{aligned}$$

En la línea 4 del Algoritmo 2 se introduce un conjunto vacío \mathcal{E}_n , que será aquel que contendrá el conjunto de etiquetas válidas. A continuación, se procede a fijar el primer elemento del conjunto \mathcal{E}_n , la etiqueta inicial, y la etiqueta final; es decir, $\mathcal{E}_n^1 = S_{(1,1)} = \{0, 0, 0\}$ y $\mathcal{E}_n^{\text{final}} = \{1, 2, 3\}$, para después, una vez establecida la longitud de S , empezar a filtrar las etiquetas e ir adicionando cada una al conjunto \mathcal{E}_4 . Note por ejemplo que al ingresar al Algoritmo 2 la etiqueta $\{0, 2, 1\}$ del conjunto I_4 , luego de ser clasificada por su suma total pasa al filtro de elección de etiquetas válidas, donde primero es ordenada con nuestra relación de orden ya establecida y se verifica componente a componente que sea menor que $\mathcal{E}_n^{\text{final}}$, dado que la etiqueta no cumple la relación de orden no es agregada al conjunto \mathcal{E}_n . Por otra parte, si tenemos la etiqueta $\{0, 1, 3\}$ note que cumple las dos condiciones establecidas en la línea 12, entonces la etiqueta es adicionada al conjunto final de etiquetas \mathcal{E}_n . Siguiendo este proceso con las etiquetas restantes se tiene que el conjunto de etiquetas \mathcal{E}_4 está dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_4 = & \{ \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 0, 2\}, \{0, 1, 1\}, \{0, 0, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{1, 1, 1\}, \\
& \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 2\}, \{1, 1, 2\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 2\}, \{1, 2, 3\} \}
\end{aligned}$$

el cual tiene exactamente $C_4 = 14$ elementos.

3.2. Obtención de etiquetas a partir de objetos combinatorios

Para la creación de un modelo de etiquetamiento, se recurrió a un conjunto de objetos combinatorios contados por los números de Catalan, esto con el fin de establecer una biyección con las regiones del arreglo.

Para hacer esta ilustración, consideremos como objeto combinatorio los caminos de Dyck para $n = 3$ y etiquetas de la forma $0 i j$. Etiquetaremos de forma ordenada asignando a cada columna de la cuadrícula tamaño 3×3 una componente de la etiqueta, como se muestra en la Figura 3.1. Note que cada componente de la etiqueta $0 i j$ describe el número de unidades por columna que están por debajo de un camino de Dyck. Observe en las cuadrículas de la Figura 3.2 que la primera casilla siempre corresponde a la componente cero y las demás componentes toman valores entre 0 y 2; esto se debe a que los caminos de Dyck nunca pasan la diagonal. Así, las etiquetas que se obtienen a través de este proceso son

$$0 0 0, 0 0 1, 0 0 2, 0 1 1, 0 1 2. \quad (3.1)$$

Probemos a continuación que a cada región del arreglo de Catalan C_n le corresponde un camino de Dyck D_n . En particular, tomemos el arreglo de Catalan C_3 y las etiquetas dadas en (3.1) de la forma $0 i j$. Con el fin de establecer una biyección entre regiones y caminos de Dyck, a cada región del arreglo C_3 le asociaremos una etiqueta. Recordemos que al dividir el número de regiones del arreglo C_n entre $n!$ se obtienen C_n regiones, en otras palabras podemos dividir el arreglo en partes iguales, donde cada una es un subconjunto de C_n regiones, además el arreglo tiene la propiedad de ser simétrico, motivo por el cual consideramos realizar el etiquetamiento en una de estas partes y luego extender los resultados.

Iniciamos con la etiqueta $0 0 0$, la cual estará asignada a la región que está asociada al origen. Una vez ubicados en esta posición inicial, vamos a realizar determinados movimientos por las regiones asignándole a cada una su respectiva etiqueta. Permitiremos movimientos hacia la derecha o

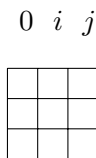


Figura 3.1: Asignación modelo de etiquetas.

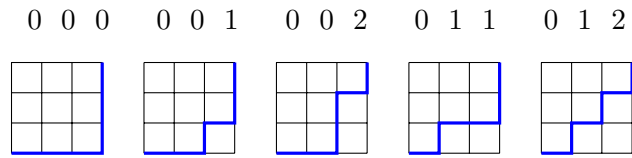


Figura 3.2: Etiquetas de los caminos de Dyck para $n = 3$.

hacia arriba en el lugar geométrico, en particular, por cada movimiento hacia la derecha se sumará una unidad a la coordenada j y por cada movimiento hacia arriba se sumará una unidad a la coordenada i , como se ilustra en la Figura 3.3. Este proceso continúa hasta recorrer todas las regiones del arreglo, que en este caso corresponden al número de Catalan $C_3 = 5$.

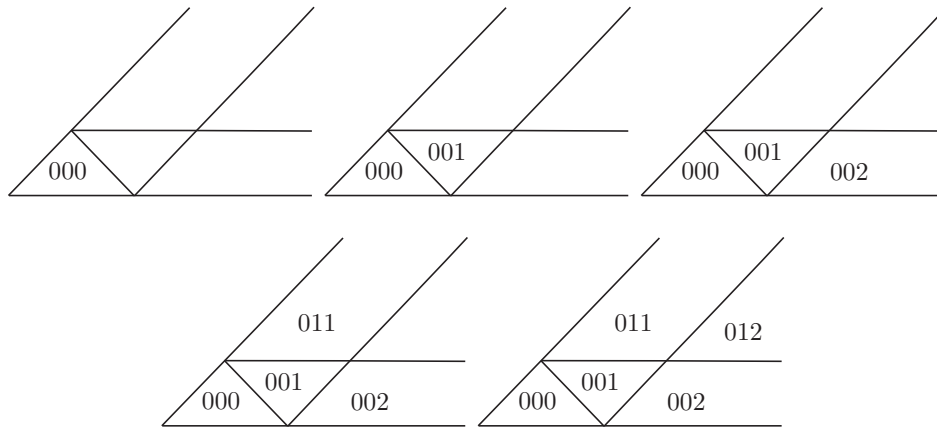


Figura 3.3: Etiquetas de las regiones arreglo de Catalan C_3 .

Note que el etiquetamiento de las regiones está bien definido, ya que a cada elemento del conjunto de regiones le corresponde un único elemento del conjunto de etiquetas; estos dos conjuntos tienen igual cardinalidad y hay una biyección entre ellos. Este proceso se generaliza a cualquier $n > 1$ y así se logra establecer la biyección deseada en general. Se observa que al igual que en el Algoritmo 2, existe un comportamiento y relación de orden entre las componentes de las etiquetas, lo cual nos da una idea de la construcción de un grafo de intersecciones para el arreglo de Catalan. Por tanto, tenemos que existe una biyección entre caminos de Dyck, las regiones del arreglo de Catalan y las etiquetas generadas en el Algoritmo 2.

3.3. Etiquetas y grafos

El conjunto de etiquetas del arreglo de Catalan \mathcal{E}_n es un conjunto parcialmente ordenado el cual podemos representar por medio de un diagrama de Hasse que llamaremos Poset de intersección del arreglo. Este Poset describe cómo se conectan las regiones del arreglo, aportando información sobre vértices y aristas, permitiendo conocer siempre la estructura del arreglo sin importar su dimensión. Dada la estructura del Poset, y con el fin de encontrar propiedades y aplicaciones, trataremos a este objeto como un grafo dirigido, denominado como grafo de Catalan denotado por G_n . En el grafo G_n , cada vértice representa una etiqueta de las regiones del arreglo de Catalan y cada arista representa una conexión entre regiones.

3.3.1. Conexión entre nodos

Sea $\mathcal{E}_n = \{e_m : m = 1, \dots, C_n\}$ el conjunto de todas las etiquetas del arreglo de Catalan. Con el fin de conocer la estructura del grafo G_n , iniciamos clasificando las etiquetas de acuerdo con la suma total de sus componentes. Sea $e_m = x_1 \dots x_{n-1}$ una etiqueta en \mathcal{E}_n . Denotamos la suma total como

$$S_m = \sum_{x_i \in e_m}^{n-1} x_i,$$

y por $[k]$ a la clase de todas las etiquetas cuya suma total es $k \geq 0$, esto es

$$[k] = \{e_m \in \mathcal{E}_n : S(e_m) = k\}.$$

Note que $[0] = \{e_1\}$, esto es, la clase $[0]$ solamente contiene la etiqueta inicial, elemento que denotaremos como el minimal del grafo. Ya clasificadas las etiquetas en clases, se establecen condiciones para relacionarlas y obtener las aristas del grafo G_n . Para ello consideramos las siguientes condiciones

- C1 Un nodo u de G_n es un elemento de una clase de equivalencia $[k]$, para algún k . Así, u es de la forma $(u_1 \dots u_i)$, para algún i .
- C2 Un nodo $u \in [a]$ se puede conectar a un nodo v si y solo si $v \in [a + 1]$ y si $u_j \leq v_j$, para todo $j = 1, \dots, i$.

Considerando nuevamente nuestro ejemplo del arreglo de Catalan C_3 , el conjunto de etiquetas está

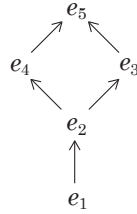


Figura 3.4: Grafo G_3 asociado al arreglo C_3 .

conformado por

$$\mathcal{E}_3 = \{e_1 = (0, 0, 0), e_2 = (0, 0, 1), e_3 = (0, 0, 2), e_4 = (0, 1, 1), e_5 = (0, 1, 2)\},$$

cuyas sumas totales de sus componentes por definición son $S_1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 2$, $S_4 = 2$ y $S_5 = 3$, lo que corresponde a las siguientes clases con sus respectivos elementos

$$\{ [0] = \{e_1\}, [1] = \{e_2\}, [2] = \{e_3, e_4\}, [3] = \{e_5\} \}.$$

Finalmente, aplicando las condiciones C1 y C2, obtenemos como resultado el grafo G_3 de la Figura 3.4, con el siguiente conjunto de aristas

$$A = \{(e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_2, e_4), (e_3, e_5), (e_4, e_5)\}.$$

En la Figura 3.5 note cómo el grafo G_3 puede darnos información sobre la estructura del arreglo C_3 , por ejemplo en este caso se puede observar que los nodos del grafo además de corresponder a una región y mostrar las conexiones entre ellas, muestra un vértice común entre regiones tal y como lo indica el punto rojo en la figura, de aquí es posible deducir que regiones comparten vértices y aristas, o caras cuando hablamos de dimensiones mayores.

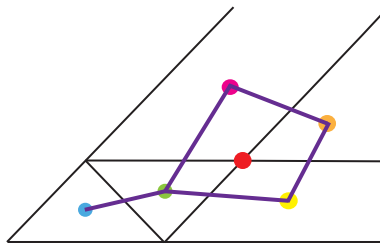


Figura 3.5: Grafo G_4 asociado a la estructura del arreglo C_3

A continuación observemos en la Figura 3.6 el grafo G_4 asociado al arreglo de hiperplanos de Catalan C_4 , conformado por los nodos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4 = \{ & e_1 = \{0, 0, 0\}, e_2 = \{0, 0, 1\}, e_3 = \{0, 0, 2\}, e_4 = \{0, 1, 1\}, e_5 = \{0, 0, 3\}, e_6 = \{0, 1, 2\}, \\ & e_7 = \{1, 1, 1\}, e_8 = \{0, 1, 3\}, e_9 = \{0, 2, 2\}, e_{10} = \{1, 1, 2\}, e_{11} = \{0, 2, 3\}, e_{12} = \{1, 1, 3\}, \\ & e_{13} = \{1, 2, 2\}, e_{14} = \{1, 2, 3\} \}. \end{aligned}$$

Sabemos que la gráfica del arreglo de Catalan y su análisis resulta más complejo a medida que aumenta la dimensión, este grafo permite darnos una idea de la estructura del arreglo, por ejemplo algunas de las regiones corresponden a poliedros que coinciden en vértices, aristas y caras, y por definición son acotados, otras regiones como la correspondiente a la etiqueta final serán regiones no acotadas pero que también comparten vértices, aristas y caras con otras regiones.

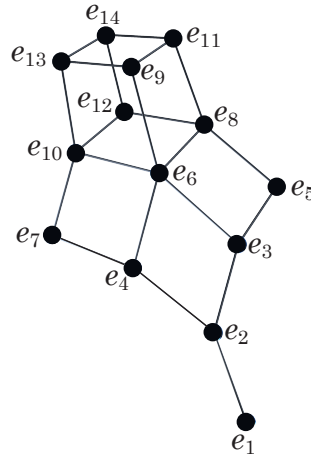


Figura 3.6: Grafo G_4 asociado al arreglo C_4 .

3.4. Contando etiquetas

Para nuestro estudio sobre etiquetas consideramos el triángulo de Catalan, donde cada entrada $C_{k,m}$ para $k \geq 1$ y $m \geq 0$, viene dada por

$$C_{k,m} = \frac{(k+m)!(k-m+1)}{m!(k+1)!}. \quad (3.2)$$

Note que cuando $k = m+1$, la entrada $C_{k,m+1}$ corresponde al m -ésimo número de Catalan; además, la suma de la i -ésima fila es el $(i+1)$ -ésimo número de Catalan [11]. El triángulo de Catalan para nosotros fue objeto de estudio por su comportamiento y la posible relación con nuestro modelo de etiquetamiento, permitiendo caracterizar el resultado dado en el siguiente teorema.

k/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
1	1										1
2	1	1									2
3	1	2	2								5
4	1	3	5	5							14
5	1	4	9	14	14						42
6	1	5	14	28	42	42					132
7	1	6	20	48	90	132	132				429
8	1	7	27	75	165	297	429	429			1430
9	1	8	35	110	275	572	1001	1430	1430		4862
10	1	9	44	154	429	1001	2002	3432	4862	4862	16796

Tabla 3.1: Triángulo de Catalan

Teorema 3.4.1. La entrada i,j del triángulo de Catalan cuenta el número de etiquetas de longitud i cuya última componente sea j y satisface la relación

$$C_{i,j} = C_{i-1,j} + C_{i-1,j-1} + \cdots + C_{i-1,0} \quad (3.3)$$

para todo $i \geq 1$ y $j = 0, 1, \dots, i-1$.

Demostración. Usaremos el principio de inducción fuerte sobre las columnas del triángulo de Catalan para la prueba de este resultado. Para el análisis, asuma que $C_{i,i} = 0$ para todo i . Consideremos del triángulo de Catalan las filas donde $k = 1$ y $k = 2$ como los valores iniciales del problema.

Caso base: Probemos que el resultado es válido para $k = 3$. Primero sabemos que el conjunto de etiquetas válidas de longitud 3 es:

$$\mathcal{E}_3 = \{\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 0, 2\}, \{0, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

De aquí observamos que hay una sola etiqueta que termina en 0, dos terminan en 1 y dos terminan en 2. Esto es:

$$C_{3,0} = 1, C_{3,1} = 2, C_{3,2} = 2.$$

Note que

$$C_{3,0} = C_{2,0},$$

$$C_{3,1} = C_{2,1} + C_{2,1},$$

$$C_{3,1} = C_{2,2} + C_{2,1} + C_{2,0}.$$

Hipótesis de inducción: Asuma que $C_{i,k}$ cuenta el número de etiquetas de longitud i que terminan en k , para todo $k \geq 0$.

Paso inductivo: Probaremos que $C_{i+j,k}$ cuenta el número de etiquetas de longitud $i + 1$ que terminan en k , para todo $k \geq 0$. Asumamos $k < i$. Para ello consideremos las siguientes cuentas basadas en nuestra relación de orden:

1. Note que las etiquetas de longitud $i + 1$ que terminan en 0 son aquellas de longitud i que terminan en 0 y se les agrega un cero a la parte inicial de la etiqueta, esto es,

$$C_{i+1,0} = C_{i,0}.$$

2. Las etiquetas de longitud $i + 1$ que terminan en 1 son aquellas de longitud i que terminan en 0 y así ese cero se puede convertir en un 1, o aquellas que terminan en 1 y se les agrega un cero al inicio de la etiqueta, esto es,

$$C_{i+1,1} = C_{i,0} + C_{i,1}.$$

Continuando con este procedimiento y usando la hipótesis de inducción tenemos que

$$C_{i+1,k} = C_{i,k} + C_{i,k-1} + \cdots + C_{i,0}.$$

Ahora, note que si $k = i$, entonces debemos preguntarnos lo siguiente: ¿Cuántas etiquetas de tamaño $i + 1$ terminan en $k = i$? En este caso debemos notar que el último número en el que terminan las etiquetas de tamaño i está en el intervalo entero $[0, 1, \dots, i - 1]$. Por tanto, todas aquellas de longitud i se pueden convertir en etiquetas de longitud $i + 1$ que terminan en $k = i$.

k/m	0	1	2	3	4	5	6
1	1 C_1						
2	1 C_1	1 C_1					
3	1 C_1	2 C_2	2 C_2				
4	1 C_1	3 C_1+C_2	5 C_3	5 C_3			
5	1 C_1	4 $2C_1+C_2$	9 $2C_1+C_2+C_3$	14 C_4	14 C_4		
6	1 C_1	5 $3C_1+C_2$	14 $5C_1+2C_2+C_3$	28 $5C_1+2C_2+C_3+C_4$	42 C_5	42 C_5	
7	1 C_1	6 $4C_1+C_2$	20 $9C_1+3C_2+C_3$	48 $14C_1+5C_2+2C_3+C_4$	90 $14C_1+5C_2+2C_3+C_4+C_5$	132 C_6	132 C_6

Tabla 3.2: Triángulo de Coeficientes de Catalan

Esto es,

$$C_{i+1,i} = C_{i,i} + C_{i,i-1} + \cdots + C_{i,0}.$$

Teniendo en cuenta $C_{i,i} = 0$, se obtiene el resultado deseado. ■

3.4.1. Problema abierto

Durante el proceso de conteo mencionado en la anterior sección se encontró una fórmula alternativa para la relación de recurrencia que describe las entradas del triángulo de Catalan y se plantea como problema abierto su demostración.

Observe que en la Tabla 3.2, describimos cada entrada de la Tabla 3.1 como una combinación lineal de los de números de Catalan, permitiéndonos observar los términos y los coeficientes que determinan de manera recursiva cada entrada. Al observar el triángulo por columnas en la Tabla 3.2, note que las dos primeras entradas de cada columna desde $m = 1$ se comportan de manera distinta al resto, motivo por el cual las hemos tomado como condiciones iniciales, y el resto de las entradas se definirán con un término general, como veremos al final del siguiente análisis de las entradas por columnas. Notaremos como $\hat{C}_{n,m}$ a cada entrada; recordemos que cuenta el número de etiquetas de longitud n (fila) tales que su última componente sea m (columna).

Realizando un barrido por columnas, observe que las entradas de la columna 0 están dadas por $\hat{C}_{n,0} = 1$, en la columna 1 se tienen las condiciones iniciales $\hat{C}_{2,1} = C_1$ y $\hat{C}_{3,1} = C_2$, y las demás

entradas de esta columna están determinadas por

$$\hat{C}_{n,1} = (C_1, C_2) \cdot (\hat{C}_{n-2,1}, \hat{C}_{n-3,0})$$

para todo $n \geq 2$. En la columna 2 tenemos las condiciones iniciales $\hat{C}_{3,2} = C_2$ y $\hat{C}_{4,2} = C_3$, y el término general para las demás entradas

$$\hat{C}_{n,2} = (C_1, C_2, C_3) \cdot (\hat{C}_{n-2,2}, \hat{C}_{n-3,1}, \hat{C}_{n-4,0})$$

para todo $n \geq 2$. Con base en este proceso de recorrer por columnas las entradas del triángulo de Catalan, se obtiene que la columna j -ésima viene dada por las condiciones iniciales: $\hat{C}_{j+1,j} = C_j$ y $\hat{C}_{j+2,j} = C_{j+1}$, y el término general de las entradas

$$\hat{C}_{n,j} = (C_1, C_2, \dots, C_{j+1}) \cdot (\hat{C}_{n-2,j}, \hat{C}_{n-3,j-1}, \dots, \hat{C}_{n-2-j,0})$$

donde $n - 2 - j > 0$.

La recurrencia que encontramos en este caso tiene un comportamiento diferente a la enunciada en el Teorema 3.4.1, las columnas además de contar con condiciones iniciales sus demás entradas están definidas por una diagonal superior que inicia dos posiciones antes de la entrada en cuestión (en la misma columna) y finaliza en la columna 0, una vez teniendo presente esta diagonal se procede a asignar los respectivos coeficientes para obtener la combinación lineal que determina cada entrada del triángulo solamente en términos de números de Catalan.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

Los estudios realizados en este trabajo para llegar a la solución de nuestro problema de etiquetamiento del arreglo de Catalan nos deja ver de manera general las diferentes estrategias y posibilidades que se tienen al abordar un problema, y las interesantes relaciones que pueden existir entre ellas.

Inicialmente, se abordó el problema de la creación de etiquetas válidas para el arreglo de Catalan con un algoritmo diseñado para generarlas, teniendo presente relaciones de orden necesarias para obtener en el proceso de filtrado las etiquetas correctas, esto basándonos en el comportamiento de las etiquetas en otros objetos combinatorios contados por los números de Catalan. En particular, los caminos de Dyck nos permitió tener una base y justificación desde la combinatoria para garantizar que el algoritmo desarrollado, no sólo funcionaba, sino también que las etiquetas obtenidas a través de él correspondían al concepto de etiquetas válidas en los caminos de Dyck. Además del comportamiento de la relación de orden entre etiquetas y caminos, como consecuencia de lo anterior, se cumplió el objetivo de crear un modelo de etiquetamiento para las regiones del arreglo de Catalan al establecer una biyección entre las etiquetas y las regiones.

El etiquetamiento de las regiones abre paso a otros estudios, por ejemplo, encontramos que es posible relacionar el poset de intersecciones del arreglo de Catalan con un grafo dirigido definido a través de mecanismos para la conexión entre sus nodos. Esta herramienta nos permitió obtener información básica sobre la estructura geométrica del arreglo, y considerar estudios futuros enfocados a la caracterización detallada de las caras del arreglo de Catalan por medio del uso de grafos y otros objetos combinatorios que nos puedan aportar información.

Dada la versatilidad de los números de Catalan para la resolución del problema planteado, se exploró otra forma de contar y obtener las etiquetas del arreglo por medio del triángulo de Catalan, lo que dio como resultado el Teorema 3.4.1 que nos habla de una nueva forma de contar etiquetas de Catalan.

El trabajo deja un par de problemas abiertos. *(i)* encontrar una prueba formal del problema abierto dado en la Sección 3.4.1, el cual presenta una alternativa para describir las entradas del triángulo de Catalan. *(ii)* determinar el número de vecinos de cada uno de los nodos del grafo asociado al etiquetamiento de las regiones del arreglo de Catalan. Esto nos permitiría conocer cuáles serían las regiones más conectadas y también cuáles serían las menos conectadas.

Bibliografía

- [1] R. Stanley *et al.*, “An introduction to hyperplane arrangements,” *Geometric combinatorics*, vol. 13, no. 389-496, p. 24, 2004.
- [2] F. Ardila, E. León, M. Rosas, and M. Skandera, “Tres lecciones en combinatoria algebraica. III. arreglos de hiperplanos,” *arXiv preprint arXiv:1301.3989*, 2013.
- [3] E. León, “Conteos en arreglos de hiperplanos, números de Catalan y funciones de parqueo,” *Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Trabajo de grado*, 2006.
- [4] R. Duarte and A. de Oliveira, “Pak-Stanley labeling of the m -Catalan hyperplane arrangement,” *Advances in Mathematics*, vol. 387, p. 107827, 2021.
- [5] C. Athanasiadis, “A combinatorial reciprocity theorem for hyperplane arrangements,” *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 53, no. 1, pp. 3–10, 2010.
- [6] S. Corteel, D. Forge, and V. Ventos, “Bijections between affine hyperplane arrangements and valued graphs,” *European Journal of Combinatorics*, vol. 50, pp. 30–37, 2015.
- [7] G. Alvarez, J. E. Bergner, and R. Lopez, “Action graphs and Catalan numbers,” *Journal of Integer Sequences*, vol. 18, no. 2, p. 3, 2015.
- [8] R. Stanley, *Catalan numbers*. Cambridge University Press, 2015.
- [9] M. Saracevic, A. Selimi, and F. Selimovic, “Generation of cryptographic keys with algorithm of polygon triangulation and Catalan numbers,” *Computer Science*, vol. 19, no. 3, pp. 243–256, 2018.

-
- [10] F. Disanto, L. Ferrari, R. Pinzani, and S. Rinaldi, “Catalan pairs: A relational-theoretic approach to Catalan numbers,” *Advances in Applied Mathematics*, vol. 45, no. 4, pp. 505–517, 2010.
- [11] X. Chen and W. Chu, “Moments on Catalan numbers,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 349, no. 2, pp. 311–316, 2009.
- [12] Z. Zhang and B. Pang, “Several identities in the Catalan triangle,” *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 41, no. 2, pp. 363–378, 2010.
- [13] C. Benedetti and N. Saavedra, “Introducción a la combinatoria enumerativa,” *Lecturas matemáticas*, vol. 40, no. 2, pp. 117–147, 2019.
- [14] E. F. Rincón Pabón, “Aspectos combinatorios del arreglo de Shi,” *Universidad de los Andes, Bogotá, Trabajo de grado*, 2006.