

# DINÁMICA DE UN MODELO DIFUSIVO PRESA-DEPREDADOR CON EFECTO ALLEE E IMPLEMENTACIÓN DE ALGUNAS FUNCIONES DE CAPTURA



Andrés Camilo López Dorado

Universidad del Cauca  
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación  
Maestría en Ciencias Matemáticas  
Popayán  
2022

# DINÁMICA DE UN MODELO DIFUSIVO PRESA-DEPREDADOR CON EFECTO ALLEE E IMPLEMENTACIÓN DE ALGUNAS FUNCIONES DE CAPTURA

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al  
título de Magister en Ciencias Matemáticas

*Andrés Camilo López Dorado*

Dra. Aida Patricia González Nieva  
Directora

Universidad del Cauca  
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación  
Maestría en Ciencias Matemáticas  
Popayán  
2022

**Nota de aceptación**

---

---

---

---

Directora: \_\_\_\_\_  
Dra. Aida Patricia González Nieva

Jurado: \_\_\_\_\_  
Dr. Jocirei Días Ferreira

Jurado: \_\_\_\_\_  
Dr. Alex Manuel Montes Padilla

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 6 de abril de 2022

# Agradecimientos

A Dios por darme la fortaleza y perseverancia para cumplir esta meta tan importante en mi vida.

A mi madre, padre y hermana por el apoyo que me han brindado para cumplir mis sueños. A mi novia Alexandra por su amor, paciencia y apoyo incondicional, lo que fue fundamental para culminar este objetivo.

A mi directora de tesis, Dra. Aída Patricia González Nieva, con quien ha sido un privilegio y orgullo trabajar, por el conocimiento que me compartió, por su paciencia, por su escucha y motivación que me brindó en este arduo camino. Porque con su visión y su experiencia me orientó hacia este logro.

A mis evaluadores, el Dr. Jocirei Días Ferreira y al Dr. Alex Manuel Montes Padilla, por aceptar y tomarse el tiempo de revisar este documento, por sus acertadas sugerencias y observaciones, fruto de sus conocimientos y su experiencia investigativa.

Finalmente a los profesores, que sus enseñanzas contribuyeron a la elaboración de este trabajo.

# Índice general

Agradecimientos	I
Lista de figuras	V
Lista de tablas	VI
Notaciones	VII
Introducción	VIII
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas Dinámicos . . . . .	1
1.2. Sistemas Parabólicos y Elípticos . . . . .	3
1.3. Modelo Poblacional . . . . .	8
1.3.1. Efecto Allee . . . . .	10
1.3.2. Políticas de captura . . . . .	10
<b>2. Dinámica considerando una función de captura racional</b>	<b>14</b>
2.1. Dinámica fundamental . . . . .	14
2.2. Estados de equilibrio constantes . . . . .	26
2.2.1. Existencia de estados de equilibrio constantes . . . . .	26
2.2.2. Estabilidad e inestabilidad de los estados de equilibrio constantes . . . . .	27
2.2.3. Experimentación numerica . . . . .	36
<b>3. Dinámica considerando un umbral de captura</b>	<b>40</b>
3.1. Dinámica fundamental . . . . .	40
3.2. Estados de equilibrio constantes . . . . .	42
3.2.1. Existencia de estados de equilibrio constantes . . . . .	42

## ÍNDICE GENERAL

---

3.2.2. Experimentación numérica de la dinámica . . . . .	45
<b>4. Incidencia de la función captura en la dinámica poblacional</b>	<b>51</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>A. Conceptos biológicos</b>	<b>57</b>
<b>B. Simulación en MATLAB</b>	<b>59</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Índice de figuras

1.1.	Crecimiento exponencial de $x(t) = x_0 e^{rt}$ , con $r > 0$ .	8
1.2.	Crecimiento logístico de $x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}$	9
1.3.	Función de Captura que se considera en [1].	11
1.4.	Función de Captura $H(u) = Eu$ .	12
1.5.	Función de Captura $H(u) = \frac{hu}{c + u}$ .	12
1.6.	Función de Captura (1.22).	13
2.1.	Dinámica biestable para la función captura $H(u) = \frac{hu}{u + c}$ .	36
2.2.	Presa. El estado de equilibrio constante positivo $E^* = (0.63, 0.375)$ es localmente asintóticamente estable.	37
2.3.	Depredador. El estado de equilibrio constante positivo $E^* = (0.63, 0.375)$ es localmente asintóticamente estable.	37
2.4.	Presa. El estado de equilibrio trivial $E_0^* = (0, 0)$ es localmente estable.	38
2.5.	Depredador. El estado de equilibrio trivial $E_0^* = (0, 0)$ es localmente estable.	38
2.6.	Presa. El estado de equilibrio constante positivo $E^* = (0.63, 0.375)$ es localmente asintóticamente estable; aquí $u_0(x) = 0.5 + 0.05 \sin(2x)$ .	39
2.7.	Depredador. El estado de equilibrio constante positivo $E^* = (0.63, 0.375)$ es localmente asintóticamente estable; aquí $v_0(x) = 0.32 + 0.02 \sin(2x)$ .	39
3.1.	$G$ y $H$ con $T = 0.3$ , $b = 0.4$ , $h = 0.5$ , $r = 2$ y $c = 0.7$	43
3.2.	$G$ y $H$ con $T = 0.4$ , $b = 0.4$ , $h = 0.5$ , $r = 2$ y $c = 0.4$	43
3.3.	$G$ y $H$ con $T = 0.1$ , $b = 0.2$ , $h = 0.3$ , $r = 3$ y $c = 0.4$	44
3.4.	$G$ y $H$ con $T = 0.2$ , $b = 0.2$ , $h = 0.4$ , $r = 2$ y $c = 0.3$	44
3.5.	Un único estado de equilibrio constante libre de depredadores.	45
3.6.	Dos estados de equilibrio constantes libres de depredadores.	45
3.7.	Tres estados de equilibrio libres de depredadores.	46

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

3.8. Estado de equilibrio constante positivo. . . . .	46
3.9. Presa. Estado de equilibrio constante positivo $\bar{E}_1 = (0.6, 0.33)$ . . . . .	47
3.10. Depredador. Estado de equilibrio constante positivo $\bar{E}_1 = (0.6, 0.33)$ . . . . .	47
3.11. Presa. Estado de equilibrio constante positivo $\bar{E}_1 = (0.6, 0.33)$ ; aquí $u_0(x) = 0.65 + 0.04 \sin(2x)$ . . . . .	48
3.12. Depredador. Estado de equilibrio constante positivo $\bar{E}_1 = (0.6, 0.33)$ ; aquí $v_0(x) = 0.45 + 0.05 \sin(2x)$ . . . . .	48
3.13. Presa. Estado de equilibrio libre de depredadores; aquí $u_0(x) = 0.6$ . . . . .	49
3.14. Depredador. Estado de equilibrio libre de depredadores, aquí $v_0(x) = 0.2$ . . . . .	49
3.15. Presa. Estado de equilibrio libre de depredadores, aquí $u_0(x) = 0.6 + 0.08 \sin(2x)$ . . . . .	50
3.16. Depredador. Estado de equilibrio libre de depredadores, aquí $v_0(x) = 0.1 + 0.07 \sin(2x)$ . . . . .	50
5.1. Pescado blanco ( <i>Coregonus clupeaformis</i> ). Tomada de [34]. . . . .	55



# Índice de Tablas

2.1. Estados de equilibrio constante sin depredadores del sistema (3). . . . .	26
2.2. Estabilidad de los estados de equilibrio constantes libres de depredadores. . .	34

# Notaciones

$\mathbb{R}$  Campo ordenado de los números reales.

$\mathbb{R}^n$   $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ .

$C^1(E)$  Conjunto de funciones con dominio  $E$  que son diferenciables en todo punto de  $E$  y además su derivada en cada punto es continua.

$\mathbb{R}^{n \times n}$  Conjunto de matrices de  $n$  filas y  $n$  columnas con entradas reales.

Vamos a considerar las siguientes normas [11].

■ Para un conjunto arbitrario no vacío  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , denotaremos por:

•  $C(\Omega)$  - El espacio de funciones  $f$  continuas en  $\Omega$ , con la norma

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

■ Para un conjunto no vacío medible  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , denotaremos por:

•  $L_p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) - El espacio de funciones  $f$  medibles (con respecto a la medida de Lebesgue) en  $\Omega$ , tal que la norma:

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

•  $L_{\infty}(\Omega)$  ( $p = \infty$ ), con la norma:

$$\|f\|_{L_{\infty}(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty.$$

# Introducción

El modelo de crecimiento logístico clásico muestra que una población tiene un crecimiento lento al principio, luego sigue una aceleración rápida y finalmente alcanza una fase de crecimiento estacionario [1]. En este sentido, el biólogo W.C. Allee argumentó que tal crecimiento puede existir, pero también puede haber un crecimiento para el cual la especie se extinga en una pequeña densidad de población. Además de ello, descubrió que las poblaciones con pocos individuos tienen distintos problemas ecológicos, como por ejemplo: en la reproducción, ya que es más difícil encontrar pareja, en la localización de comida o también la dificultad para defenderse de sus depredadores [13] [14]; es decir habrá una correlación positiva entre la densidad de población y el hábitat o medio de la población. A esto se le conoce como efecto Allee [2].

Un sistema presa-depredador es un modelo dinámico básico que describe la interacción entre especies [3]. El siguiente es un sistema de EDO con efecto Allee y respuesta funcional lineal, el cual se encuentra en [1] :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{ru}{u+c} \left(1 - \frac{u}{K}\right) (u - A) - muv \\ \frac{dv}{dt} = -\eta v + muv \end{cases} \quad (1)$$

donde  $r$  es la tasa de crecimiento intrínseca de la presa,  $K$  es la capacidad de carga,  $A$  es el umbral del efecto Allee,  $c$  es un parámetro auxiliar ( $c > 0$ ),  $m$  es un escalar que determina la tasa de encuentro presa-depredador, y  $\eta$  es la tasa de mortalidad de los depredadores. Aquí  $0 < A < K$  representa el efecto Allee fuerte [6].

Teniendo en cuenta la distribución no homogénea de los depredadores y sus presas en diferentes ubicaciones espaciales dentro de un dominio acotado fijo  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con frontera suave, y la tendencia natural de cada especie a difundirse hacia las áreas de menor concentración de población; basado en el sistema (1), se considera el siguiente sistema de reacción-difusión, que se encuentra en [1], el cual cuenta con efecto Allee fuerte, condición de frontera homogénea tipo Neumann y una política de captura sobre la presa, que justamente es donde se centra

nuestro interés.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \frac{ru}{u+c} \left(1 - \frac{u}{K}\right) (u - A) - muv - H(u), x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + v(mu - \eta), x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega} \end{array} \right. \quad (2)$$

con  $H(u)$  una función de captura, la cual posee un umbral de cosecha  $T$ , donde se supone que la tasa de captura es proporcional al tamaño de la población hasta alcanzar el valor umbral, luego, una vez que la densidad de la población llega a su valor umbral  $T$ , se mantiene constante  $h$ , es decir,

$$H(u) = \begin{cases} Eu, & \text{si } 0 \leq u \leq T \\ h, & \text{si } u > T. \end{cases}$$

Aquí  $r, K, c$  y  $m > 0$ ,  $0 < A < K$  son igual que en el sistema (1),  $d_i > 0$ ,  $i = 1, 2$  son coeficientes de difusión correspondientes a la presa  $u$  y al depredador  $v$ ,  $E$  es el esfuerzo de cosecha, y  $h = ET$ . Además,  $\nu$  es el vector normal exterior unitario sobre  $\partial\Omega$ .

Mediante las siguientes transformaciones [1],

$$\tilde{u} = \frac{u}{K}, \tilde{b} = \frac{A}{K}, \tilde{v} = \frac{v}{K}, \tilde{r} = \frac{r}{mK}, \tilde{c} = \frac{c}{K}, \tilde{\eta} = \frac{\eta}{mK}, \tilde{T} = \frac{T}{K}, \tilde{E} = \frac{E}{mK}, \tilde{h} = \frac{h}{mK^2}$$

y

$$\tilde{t} = mKt, \quad \tilde{x} = \sqrt{mK}x.$$

Tenemos que omitiendo el tildado, el sistema (2) puede reescribirse como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \frac{ru}{u+c} (1 - u) (u - b) - uv - H(u), x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + v(u - \eta), x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega} \end{array} \right. \quad (3)$$

con todos los parámetros positivos. Se deduce de  $0 < A < K$  que  $0 < b < 1$ . Para ilustrar el impacto del umbral de cosecha, siempre se supone que  $0 < T < 1$ .

En este sentido, en el presente trabajo estudiamos la dinámica del sistema (3), modificando la función de captura que se describe previamente y que se encuentra en [1], es decir, determinamos cómo cambios en dicha función afectan a las poblaciones. Para ello, hemos considerado las siguientes políticas de captura, una racional y otra que involucra un umbral

de cosecha, que se pueden consultar en [22] [5], dichas funciones las detallaremos en el apartado de preliminares, las cuales se caracterizan por ser funciones no negativas, continuas y acotadas.

- Política de captura con una tasa de cosecha racional:

$$H(u) = \frac{hu}{c+u},$$

donde  $h$  es la tasa máxima de captura de la población de presas y  $c$  es el número de presas que se necesita para alcanzar la mitad de la tasa máxima de captura. Así, a medida que aumenta la abundancia de la población de presas, el número de presas cosechadas también aumentará, pero a un ritmo decreciente.

- Política de captura con umbral continuo en la presa:

$$H(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \leq T, \\ \frac{h(u-T)}{h+u-T}, & \text{si } u > T. \end{cases}$$

De esta manera, una vez que la población de presas pasa el tamaño  $u = T$ , comienza la recolección y aumenta suavemente hasta un valor límite  $h$ .

Entre los aportes de este trabajo, formulamos y demostramos propiedades referentes a la dinámica del sistema (3) que son independientes de la función captura, tales como el Teorema de *Existencia y unicidad de soluciones no negativas*, el cual se prueba para cualquier política de captura, además, se halla una Región Invariante del sistema (3). Del mismo modo, se demuestra un resultado que proporciona condiciones bajo las cuales hay extinción tanto de presas como de depredadores, y un teorema que garantiza que las soluciones del sistema (3) son finitas, es decir, que las poblaciones de presas y depredadores permanecen acotadas a medida que transcurre el tiempo.

Por otro lado, se determina que sin importar la función de captura que se considere, el sistema (3) tiene estados de equilibrio constantes positivos libres de depredadores, un estado de equilibrio constante positivo, dependiendo de los valores de los parámetros; sin embargo, no posee estados de equilibrio constantes libres de presas. Igualmente, para todos los estados de equilibrio constantes del sistema (3), incluyendo el estado de equilibrio constante positivo, con la función de captura racional, se establecen condiciones de estabilidad e inestabilidad, además, se realizan simulaciones numéricas que permite ilustrar los resultados teóricos acerca de la estabilidad.

Así, este documento se divide en cinco capítulos. En el primero encontramos los fundamentos teóricos necesarios para abordar el problema, en el segundo y tercer capítulo estudiamos la dinámica del sistema (3), implementado las políticas de captura mencionadas anteriormente, en el cuarto capítulo comparamos las dinámicas del sistema (3) con cada función de captura y por último presentamos las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Sistemas Dinámicos

En este capítulo se presentan algunas definiciones y herramientas correspondientes a Sistemas Dinámicos, Ecuaciones Diferenciales Parciales y Modelos Poblacionales, importantes para la comprensión de sistemas Presa-Depredador.

**Definición 1.** Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una relación donde aparece una función incógnita  $u \equiv u(\cdot, \mathbf{x})$ , con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , junto con al menos una de sus derivadas parciales. En general, una EDP es una relación de la forma:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, D^\alpha u\right) = 0 \quad (1.1)$$

donde  $\alpha$  es un multi-índice, es decir,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  y

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

con  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  (orden de la derivada). El caso  $Du$  representa al vector gradiente, es decir:

$$Du = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Consideramos un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con frontera suave y sea  $\partial\Omega$  la frontera de  $\Omega$ . Para cada  $\mathcal{T} > 0$ , se define  $D_{\mathcal{T}} = (0, \mathcal{T}] \times \Omega$  y  $S_{\mathcal{T}} = (0, \mathcal{T}] \times \partial\Omega$ .

Se denotará por  $C^m(\Omega)$  al conjunto de todas las funciones continuas cuyas derivadas parciales hasta el orden  $m$  son continuas en  $\Omega$  y  $C^{l,m}(D_{\mathcal{T}})$  al conjunto de funciones cuyas derivadas hasta orden  $l$  en  $t$  y derivadas hasta orden  $m$  en  $\mathbf{x}$  son continuas en  $D_{\mathcal{T}}$ . En particular,  $C^{1,2}(D_{\mathcal{T}})$  es el conjunto de todas las funciones que son una vez continuamente diferenciables en  $t$  y dos veces continuamente diferenciables en  $\mathbf{x}$  para todo  $(t, \mathbf{x}) \in D_{\mathcal{T}}$ .

Cuando  $m = 0$  y  $l = 0$ ,  $C(\Omega)$  y  $C(D_{\mathcal{T}})$  son los conjuntos de funciones continuas en  $\Omega$  y  $D_{\mathcal{T}}$  respectivamente.

Denotemos por  $X \subseteq \underbrace{C(\Omega) \times \cdots \times C(\Omega)}_{m \text{ veces}}$  el conjunto de estados admisibles del sistema dinámico. El siguiente sistema dinámico estará descrito por un caso general de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales autónomo, es decir:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F \left( \mathbf{x}, u_1, \dots, u_m, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, D^\alpha u \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (1.2)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $u_i \equiv u_i(t, \mathbf{x}) \in C^{1,|\alpha|}(\Omega)$  y  $u : D_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $u(t, \mathbf{x}) = (u_1(t, \mathbf{x}), \dots, u_m(t, \mathbf{x}))$ . El sistema dinámico modelado por (1.2) se dice que es autónomo porque la función  $F$  no depende explícitamente del tiempo  $t$ .

**Definición 2.** *Los puntos de equilibrio o puntos estacionarios o estados estacionarios del sistema (1.2), son estados invariantes en el tiempo, es decir,  $u(t, \cdot) \in X$ , para todo  $t \geq 0$ , es un estado de equilibrio si*

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.3)$$

**Definición 3.** *Los puntos de equilibrio constantes son estados invariantes en tiempo y espacio, es decir cumplen la ecuación (1.3) y además:*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.4)$$

**Definición 4.** *Condiciones de frontera:*

- **Dirichlet:** *Se conoce el valor de  $u_i$  con  $i = 1, 2, \dots, m$ , en la frontera, es decir en  $\partial\Omega$ . Por ejemplo, si  $\Omega = (0, L)$  entonces una condición de frontera tipo Dirichlet para este ejemplo podría estar dada por:*

$$u_i(t, 0) = 0 = u_i(t, L), \quad t > 0. \quad (1.5)$$

- **Newmann:** *Se conoce la derivada normal exterior de  $u_i$  con  $i = 1, 2, \dots, m$ , en la frontera, es decir:*

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu} = \nabla u_i \bullet \nu, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (1.6)$$

*En el caso particular de un sistema que describe la dinámica de poblaciones, esta condición nos dice cuantos individuos están saliendo o entrando en la región  $\Omega$ .*

- **Mixtas:** *Por ejemplo, cuando se conoce el valor de  $u_i$  en una parte de la frontera y la derivada normal exterior en el resto de la frontera.*

**Definición 5.** [*Flujo del sistema*] Si  $\phi = \phi(t, \mathbf{x}; u_0)$  es solución del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = F \left( \mathbf{x}, u_1, \dots, u_m, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, D^\alpha u \right), \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad (1.7)$$

definida para todo  $t \geq 0$ . Entonces el conjunto de funciones  $\phi_t$  definido por  $\phi_t(\mathbf{x}; u_0) = \phi(t, \mathbf{x}; u_0)$ , con  $u_0 \equiv u_0(\mathbf{x})$ , es llamado el flujo del sistema (1.7).

**Definición 6.** [*Punto de Equilibrio Estable o Inestable*]. Sea  $\phi_t(\mathbf{x}, u_0)$  el flujo del sistema (1.7) y  $\tilde{u}$  un punto de equilibrio constante de este sistema. Diremos que  $\tilde{u}$  es un punto de equilibrio constante estable, si para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $d_X(u_0, \tilde{u}) < \delta$ , con  $u_0$  el dato inicial y  $t > 0$ , entonces  $d_X(\phi_t(\mathbf{x}; u_0), \tilde{u}) < \epsilon$ , donde  $d_X(\cdot, \cdot)$  denota la métrica definida en  $X$ .

En el caso de que  $\tilde{u}$  no sea estable, diremos que  $\tilde{u}$  es inestable.

## 1.2. Sistemas Parabólicos y Elípticos

A continuación se darán algunas definiciones y resultados de ecuaciones diferenciales parciales, la mayoría de estos resultados fueron consultados en el libro *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations* del autor Pao C.V [9].

### Sub y Super solución

La idea básica de este método es que al usar una solución superior o inferior como iteración inicial en un proceso iterativo adecuado, la sucesión resultante de iteraciones es monótona y converge a una solución del problema.

Sea  $u \equiv u(t, \mathbf{x}) \in C^{1,2}(D_{\mathcal{T}})$ , con  $u : D_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ . Consideremos el problema:

$$\begin{aligned} u_t - D\Delta(u) &= f(\mathbf{x}, u) & \text{en } D_{\mathcal{T}} \\ Bu &= h(t, \mathbf{x}) & \text{en } S_{\mathcal{T}} \\ u(0, \mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}) & \text{en } \Omega, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde  $D$  es una función estrictamente positiva y es llamado el coeficiente de difusión, el término  $D\Delta(u)$  representa la tasa de cambio debido a la difusión, mientras que  $f$  es una función que representa la tasa de cambio debido a la reacción o interacción,  $B$  es un operador acotado y las funciones  $f, h, u_0$  son asumidas Hölder continuas en sus respectivos dominios.



**Definición 7.** Una función  $\bar{u} \equiv \bar{u}(t, \mathbf{x}) \in C(\bar{D}_{\mathcal{T}}) \cap C^{1,2}(D_{\mathcal{T}})$  es llamada **super-solución** del sistema (1.8) si

$$\begin{aligned} \bar{u}_t - D\Delta(\bar{u}) &\geq f(\mathbf{x}, \bar{u}) \quad \text{en } D_{\mathcal{T}} \\ B\bar{u} &\geq h(t, \mathbf{x}) \quad \text{en } S_{\mathcal{T}} \\ \bar{u}(0, \mathbf{x}) &\geq \bar{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Similarmente,  $\underline{u} \equiv \underline{u}(t, \mathbf{x}) \in C(\bar{D}_{\mathcal{T}}) \cap C^{1,2}(D_{\mathcal{T}})$  es llamada **sub-solución** si satisface todas las inecuaciones invertidas ( $\leq$ ) en (1.9).

Cuando el modelo involucra dos o más funciones de densidad, digamos  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , con  $m \in \mathbb{N}$ , se tiene un sistema acoplado de ecuaciones de difusión-reacción. Considerando  $m = 2, u_i \equiv u_i(t, \mathbf{x})$ , con  $u_i : D_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $(u_i)_t \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t}$ , la ecuación (1.8) quedará descrita por:

$$\begin{aligned} (u_i)_t - L_i(u_i) &= f_i(t, \mathbf{x}, u_1, u_2), \quad \text{en } D_{\mathcal{T}} \\ B_i u_i &= h_i(t, \mathbf{x}), \quad \text{en } S_{\mathcal{T}} \\ u_i(0, \mathbf{x}) &= u_{i,0}(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega, \end{aligned} \quad (1.10)$$

con  $i = 1, 2$  y donde  $L_i$  y  $B_i$  son operadores de la forma:

$$\begin{aligned} L_i &\equiv \sum_{j,l=1}^n a_{j,l}^i(t, \mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_j \partial \mathbf{x}_l} + \sum_{j=1}^n b_j^i(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \\ B_i &\equiv \alpha_i(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \nu} + \beta_i(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Las funciones  $h_i, u_{i,0}$  son la condición de frontera y valor inicial de cada función  $u_i$  respectivamente,  $\nu$  es el vector normal exterior en la frontera, además se supone que las funciones  $f_i$  como Hölder continuas en  $D_{\mathcal{T}} \times J_1 \times J_2$  para algún conjunto  $J_1 \times J_2 \subset \mathbb{R}^2$ . Así mismo, para el sistema (1.10) se definen:

**Definición 8.** Una función  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ , con  $f_i \equiv f_i(u_1, u_2)$  para  $i = 1, 2$  es llamada **cuasi-monótona no decreciente (no creciente)** en  $J_1 \times J_2$ , si  $f_1$  y  $f_2$  son no decrecientes (no crecientes) en  $u_2$  y  $u_1$  respectivamente, para  $(u_1, u_2) \in J_1 \times J_2$ . Cuando  $f_1$  es cuasi-monótona no-decreciente y  $f_2$  es cuasi-monótona no-decreciente (o viceversa), entonces  $\mathbf{f}$  es llamada **cuasi-monótona mixta**.

Denotemos por,  $\bar{u} \equiv \bar{u}(t, \mathbf{x}), \bar{u}_i \equiv \bar{u}_i(t, \mathbf{x}), \underline{u} \equiv \underline{u}(t, \mathbf{x})$  y  $\underline{u}_i \equiv \underline{u}_i(t, \mathbf{x})$ , para  $i = 1, 2$ . Luego, para el sistema (1.10), las sub y super soluciones se definen como sigue:

**Definición 9.** Un par de funciones  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2), \underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$  en  $C(\bar{D}_{\mathcal{T}}) \cap C^{1,2}(D_{\mathcal{T}})$  son llamadas **sub y super soluciones ordenadas** (o soluciones superior e inferior) de (1.10), si satisfacen la relación  $\bar{u} \geq \underline{u}$ ,

$$\begin{aligned} B_i \bar{u} &\geq h_i(t, \mathbf{x}) \geq B_i \underline{u} \quad \text{en } S_{\mathcal{T}} \\ \bar{u}_i(0, \mathbf{x}) &\geq u_{i,0}(\mathbf{x}) \geq \underline{u}_i(0, \mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (1.12)$$

y si

- $f = (f_1, f_2)$  es cuasi-monótona no decreciente

$$\begin{cases} (\bar{u}_1)_t - L_1\bar{u}_1 - f_1(t, \mathbf{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_1)_t - L_1\underline{u}_1 - f_1(t, \mathbf{x}, \underline{u}_1, \underline{u}_2) \\ (\bar{u}_2)_t - L_2\bar{u}_2 - f_2(t, \mathbf{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_2)_t - L_2\underline{u}_2 - f_2(t, \mathbf{x}, \underline{u}_1, \underline{u}_2). \end{cases} \quad (1.13)$$

- $f = (f_1, f_2)$  es cuasi-monótona no creciente

$$\begin{cases} (\bar{u}_1)_t - L_1\bar{u}_1 - f_1(t, \mathbf{x}, \bar{u}_1, \underline{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_1)_t - L_1\underline{u}_1 - f_1(t, \mathbf{x}, \underline{u}_1, \bar{u}_2) \\ (\bar{u}_2)_t - L_2\bar{u}_2 - f_2(t, \mathbf{x}, \underline{u}_1, \bar{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_2)_t - L_2\underline{u}_2 - f_2(t, \mathbf{x}, \bar{u}_1, \underline{u}_2). \end{cases} \quad (1.14)$$

- $f = (f_1, f_2)$  es cuasi-monótona mixta

$$\begin{cases} (\bar{u}_1)_t - L_1\bar{u}_1 - f_1(t, \mathbf{x}, \bar{u}_1, \underline{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_1)_t - L_1\underline{u}_1 - f_1(t, \mathbf{x}, \underline{u}_1, \bar{u}_2) \\ (\bar{u}_2)_t - L_2\bar{u}_2 - f_2(t, \mathbf{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) \geq 0 \geq (\underline{u}_2)_t - L_2\underline{u}_2 - f_2(t, \mathbf{x}, \underline{u}_1, \underline{u}_2). \end{cases} \quad (1.15)$$

### Observación 1.

1. En la definición  $\bar{u}$  y  $\underline{u}$  están en  $C(\bar{D}_T) \cap C^{1,2}(D_T)$  en el sentido de que sus componentes  $\bar{u}_i, \underline{u}_i, i = 1, 2$ , están en  $C(\bar{D}_T) \cap C^{1,2}(D_T)$ .
2. La relación de orden  $\bar{u} \geq \underline{u}$  quiere decir que para cada componente  $\bar{u}_i \geq \underline{u}_i$  en  $\bar{D}_T$ .
3. De la definición (9) se ve que las soluciones superiores e inferiores para las funciones cuasi-monótonas no decrecientes son independientes el uno del otro y se pueden construir por separado. Lo mismo es cierto para las funciones cuasi-monótonas no crecientes, excepto que el par  $(\bar{u}_1, \underline{u}_2)$  y  $(\underline{u}_1, \bar{u}_2)$  sean independientes. Sin embargo, para funciones cuasi-monótonas mixtas, las soluciones superiores e inferiores están acopladas y deben ser determinadas simultáneamente a partir de (1.15), a este par a veces se le denomina **soluciones acopladas superior e inferior**.
4. Dada un tipo de función cuasi-monótona, supongamos que existe un par de sub y super soluciones ordenadas  $\underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2), \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ . Se define el sector:

$$\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle \equiv \{(u_1(t, \mathbf{x}), u_2(t, \mathbf{x})) \in \mathbb{R}^2; (u_1, u_2) \in C(\bar{D}_T) \times C(\bar{D}_T) \text{ y } (\underline{u}_1, \underline{u}_2) \leq (u_1, u_2) \leq (\bar{u}_1, \bar{u}_2)\}$$

Si  $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle \subseteq J_1 \times J_2$  entonces en la definición de función cuasi-monótona es suficiente tomar  $J_1 \times J_2 = \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$ .

### Teorema 1. [Teorema de existencia de soluciones]

Sea  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2), \underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$  super y sub soluciones acopladas respectivamente del sistema (1.10) y sea  $(f_1, f_2)$  cuasi-monótonas mixta en  $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$  tal que satisface las condiciones:

$$\blacksquare \quad \begin{cases} f_1(t, \mathbf{x}, u_1, u_2) - f_1(t, \mathbf{x}, v_1, u_2) \geq -c_1(u_1 - v_1) & \text{cuando } u_1 \geq v_1 \\ f_2(t, \mathbf{x}, u_1, u_2) - f_2(t, \mathbf{x}, u_1, v_2) \geq -c_2(u_2 - v_2) & \text{cuando } u_2 \geq v_2 \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\blacksquare \quad \begin{cases} f_1(t, \mathbf{x}, u_1, u_2) - f_1(t, \mathbf{x}, v_1, u_2) \leq \bar{c}_1(u_1 - v_1) & \text{cuando } u_1 \geq v_1 \\ f_2(t, \mathbf{x}, u_1, u_2) - f_2(t, \mathbf{x}, u_1, v_2) \leq \bar{c}_2(u_2 - v_2) & \text{cuando } u_2 \geq v_2. \end{cases} \quad (1.17)$$

donde  $\underline{c}_i \equiv \underline{c}_i(t, \mathbf{x})$ ,  $\bar{c}_i \equiv \bar{c}_i(t, \mathbf{x})$ , con  $i = 1, 2$ , son funciones acotadas las cuales satisfacen (1.16) y (1.17) para cada  $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$  en  $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$ . Entonces el problema (1.10) tiene una única solución  $u \equiv (u_1, u_2)$  en  $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$ .

Un resultado importante para el desarrollo del presente trabajo se conoce como *Principio del Máximo*, el cual se encuentra enunciado y demostrado en [10]. Este principio menciona que el hecho de que el calor fluya de las regiones de mayor a menor temperatura implica que una solución de la ecuación de calor homogénea alcanza sus valores máximo y mínimo en  $\partial_p Q_{\mathcal{T}}$ . Para su estudio es necesario definir lo siguiente:

Sea  $Q_{\mathcal{T}} = \Omega \times (0, \mathcal{T})$  el cilindro espacio-tiempo y sea  $\partial_p Q_{\mathcal{T}}$  la frontera parabólica de  $Q_{\mathcal{T}}$ , dada por la unión de los puntos inferiores  $\bar{\Omega} \times \{t = 0\}$  y los puntos laterales  $\partial\Omega \times (0, \mathcal{T}]$ , es decir:

$$\partial_p Q_{\mathcal{T}} = (\bar{\Omega} \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, \mathcal{T}])$$

A continuación enunciamos dicho resultado el cual se cumple para funciones  $C^{2,1}(Q_{\mathcal{T}}) \cap C(\bar{Q}_{\mathcal{T}})$ . Estas funciones son continuas hasta la frontera  $Q_{\mathcal{T}}$ , con derivadas continuas en el interior de  $Q_{\mathcal{T}}$ .

**Teorema 2** (Principio del Máximo). *Sea  $w \in C^{2,1}(Q_{\mathcal{T}}) \cap C(\bar{Q}_{\mathcal{T}})$  tal que*

$$w_t - D\Delta w = q \leq 0 \quad \text{en } Q_{\mathcal{T}}$$

*Entonces  $w$  alcanza su máximo en  $\partial_p Q_{\mathcal{T}}$ :*

$$\max_{\bar{Q}_{\mathcal{T}}} w = \max_{\partial_p Q_{\mathcal{T}}} w$$

*En particular, si  $w$  es negativa en  $\partial_p Q_{\mathcal{T}}$ , entonces es negativa en todo  $Q_{\mathcal{T}}$ .*

**Observación 2.**

▪ **Principio del Mínimo.** *Sea  $w \in C^{2,1}(Q_{\mathcal{T}}) \cap C(\bar{Q}_{\mathcal{T}})$  tal que*

$$w_t - D\Delta w = q \geq 0 \quad \text{en } Q_{\mathcal{T}}$$

*Entonces  $w$  alcanza su mínimo en  $\partial_p Q_{\mathcal{T}}$ :*

$$\min_{\bar{Q}_{\mathcal{T}}} w = \min_{\partial_p Q_{\mathcal{T}}} w$$

*En particular, si  $w$  es positiva en  $\partial_p Q_{\mathcal{T}}$ , entonces es positiva en todo  $Q_{\mathcal{T}}$ .*

- **Principio del Máximo Fuerte.** El teorema (2) se conoce como principio de máximo débil, débil porque este resultado no dice nada sobre la posibilidad de que una solución alcance su máximo o mínimo también en un punto interior. En realidad, un resultado más preciso se conoce como principio máximo fuerte y establece que si una solución de  $u_t - D\Delta u = 0$  alcanza su máximo  $M$  (mínimo) en un punto  $(x_1, t_1)$  con  $x_1 \in V, 0 < t_1 \leq T$ , entonces  $u = M$  en  $\bar{V} \times [0, t_1]$ .

Así mismo, el siguiente lema que se basa en el Teorema 3.1 [12], es un elemento básico del proyecto.

**Lema 1.** Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = d_3 \Delta w + wB(\mathbf{x}, t), (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \\ w(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (1.18)$$

Supongamos que  $B(\mathbf{x}, t)$  es uniformemente acotada y localmente Lipschitz en  $(\mathbf{x}, t)$ . Asumamos que  $w(\mathbf{x}, t) \geq 0$  y  $\sup_{t \geq 0} \|w(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} < M$ , donde es una constante positiva finita.

Entonces:

$$\sup_{t \geq 0} \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M^*,$$

donde  $M^*$  depende de  $M$  y de  $\|w_0(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}$ .

### 1.3. Modelo Poblacional

Un modelo poblacional es un sistema dinámico, el cual intenta describir y predecir el cambio de la densidad de la población de una o varias especies, teniendo en cuenta las características principales del medio que más afectan a la población, estas características generalmente se representan por medio de ecuaciones diferenciales [19].

Así, los ecólogos usan varios métodos matemáticos para modelar la dinámica de poblaciones (los cambios en el tamaño y la composición de las poblaciones a lo largo del tiempo). Algunos de estos modelos representan el crecimiento sin restricciones ambientales, mientras que otros incluyen “topes” determinados por los recursos limitados [17].

En el año 1798, el economista británico Thomas Robert Malthus, publicó la obra *Ensayo sobre el principio de la población*, según su hipótesis, la velocidad de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población [2]. Esta hipótesis se expresa mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad (1.19)$$

donde  $x = x(t)$  indica la densidad de la población en el tiempo  $t$  y  $r$  es la constante de proporcionalidad o la tasa de crecimiento intrínseca de la población, al ser constante nos indica que la tasa de crecimiento toma el mismo valor sin importar el tamaño de la población. La ecuación (1.19) se conoce como el **Modelo Malthusiano** para el crecimiento de poblaciones y su solución es:

$$x(t) = x_0 e^{rt},$$

donde  $x_0 = x(0) > 0$  es el tamaño de la población en el tiempo inicial y además para  $r > 0$  la ecuación indica que la población tiene un **crecimiento exponencial**.

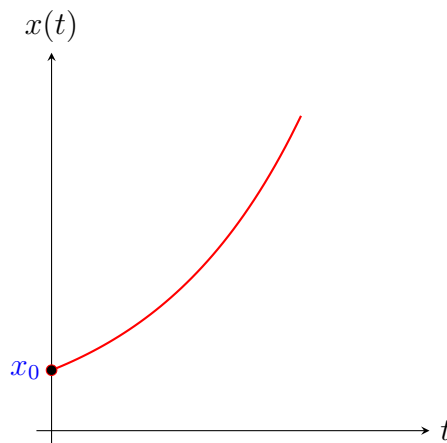


Figura 1.1: Crecimiento exponencial de  $x(t) = x_0 e^{rt}$ , con  $r > 0$ .

Sin embargo, en la naturaleza las poblaciones pueden crecer de manera exponencial por un tiempo, pero finalmente se ven limitadas por la disponibilidad de recursos. Es por ello que el biólogo y matemático Verhulst en 1838 modifica el modelo de Malthus, en donde ahora la densidad de una población debería afectar a su tasa de crecimiento, es decir, consideró que algunos recursos sólo están disponibles en cantidades limitadas, cada población crece a un nivel de saturación  $K$  en el que no puede crecer más y debe competir por dichos recursos, este nivel se conoce como *capacidad de carga* del medio ambiente [2], obteniendo un crecimiento logístico. Por tanto, la dinámica de la población está dada por:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (1.20)$$

donde  $x = x(t)$  indica la densidad de la población en el tiempo  $t$ ,  $r$  la tasa de crecimiento intrínseca de la población y  $K$  es la capacidad de carga del medio ambiente. La ecuación (1.20) se conoce como **ecuación logística** y su solución está dada por:

$$x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}},$$

donde  $x_0 = x(0) > 0$  es el tamaño de la población inicial, si la población inicial es menor que  $K$ , entonces el crecimiento de la población aumenta asintóticamente hasta  $K$ . Sin embargo, si la población inicial  $x_0$  es mayor a  $K$  el crecimiento de la población empieza a disminuir asintóticamente hasta  $K$ .

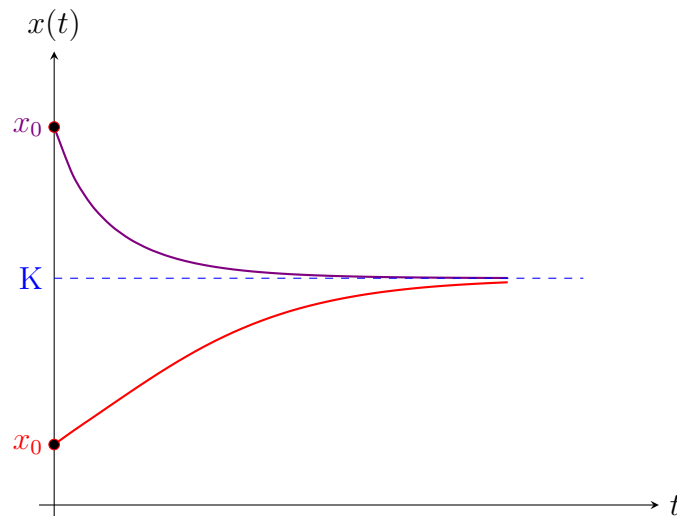


Figura 1.2: Crecimiento logístico de  $x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}$

### 1.3.1. Efecto Allee

Como ya habíamos mencionado, el Efecto Allee representa una situación en la cual el factor de crecimiento de la población disminuye por debajo de cierta densidad de población mínima. En algunas circunstancias este factor de crecimiento puede llegar a ser negativo, ocasionando un umbral de extinción. Para algunas especies existe un nivel mínimo de población viable, por debajo del cual la especie tiende a extinguirse [2]. El efecto Allee puede deberse a todo tipo de mecanismos que operan en poblaciones pequeñas, incluida la reducción de la eficiencia de alimentación en animales sociales, las dificultades para encontrar parejas y la disminución de las defensas contra los depredadores [13] [14].

El efecto Allee se clasifica principalmente en dos tipos: fuerte y débil [6] [15]. Un efecto Allee fuerte significa que el crecimiento es negativo cuando el tamaño de la población está por debajo de cierto valor umbral, mientras que uno débil se refiere a que la población por debajo de un umbral tiene un crecimiento positivo.

### 1.3.2. Políticas de captura

La importancia de los modelos depredador-presa que consideran cosecha es doble. Por un lado, naturalmente atrae el interés de la industria de la cosecha comercial y de muchas comunidades científicas, incluidas la biología, la ecología y la economía, especialmente debido a preocupaciones como el beneficio, la sobreexplotación y la extinción de una especie que se cosecha. Por otro lado, son un lugar común para la aplicación de varios métodos teóricos y numéricos de ecuaciones diferenciales; los modelos matemáticos correspondientes muestran dinámicas ricas que incluyen varios tipos y propiedades de estabilidad de equilibrios y ciclos límite, así como varios tipos de bifurcaciones [5].

Como se dijo anteriormente, el artículo [1] en el sistema (3), considera una política de captura con umbral.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \frac{ru}{u+c} (1-u)(u-b) - uv - H(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + v(u-\eta), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, v(x,0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

con función captura dada por:

$$H(u) = \begin{cases} Eu, & \text{si } 0 \leq u \leq T \\ h, & \text{si } u > T. \end{cases}$$

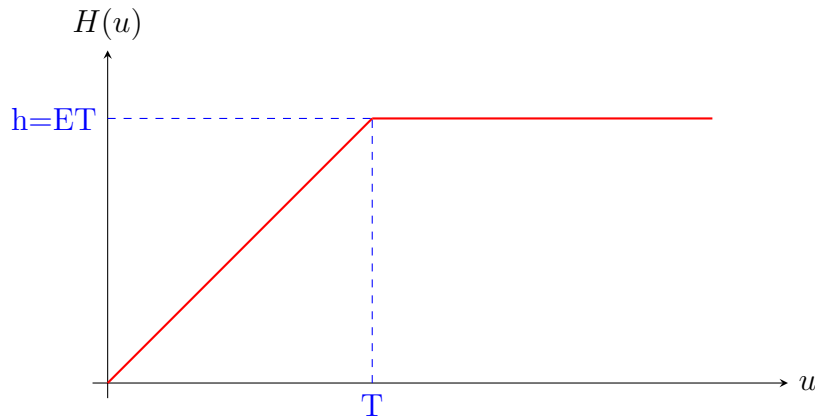


Figura 1.3: Función de Captura que se considera en [1].

El estudio de variaciones y propiedades generales de la función captura, tiene como objetivo establecer condiciones o valores de los parámetros para garantizar la coexistencia de las especies, a saber, que las presas y los depredadores no se extingan al transcurrir el tiempo a causa de la interacción entre ellos y de la acción de captura.

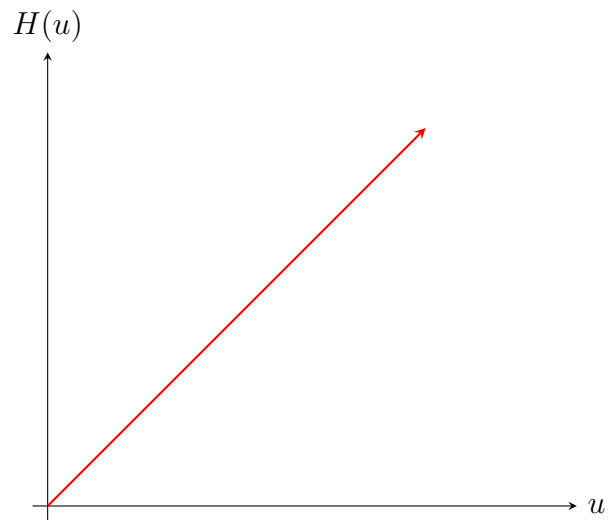
La mayoría de modelos de presa-depredador con recolección, como la captura pesquera [24] y el manejo de plagas, solo consideran funciones de captura constantes o lineales [7][20][21], que no son muy realistas según Rebaza [5]. Sin embargo, considerar otras estrategias de cosecha con relaciones más complicadas entre individuos removidos y el tamaño de la población parece ser innecesario ya que son difíciles de implementar en la práctica [7]; no obstante, es importante determinar qué impacto tienen las políticas de captura a nivel de la conservación de ecosistemas. Otras posibles funciones captura que se pueden consultar en [22] [5] son:

- La siguiente política de captura implica una tasa de recolección lineal en términos de población de presas. Está dada por:

$$H(u) = Eu.$$

Esta política de captura se caracteriza por un esfuerzo de cosecha constante  $E$ .

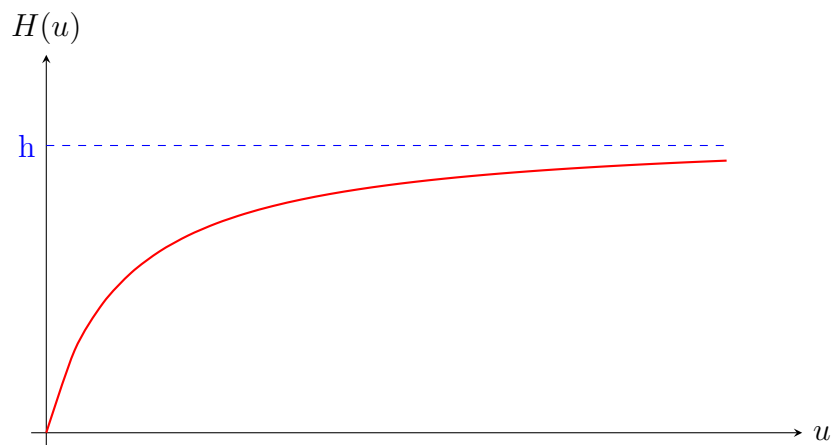


Figura 1.4: Función de Captura  $H(u) = Eu$ .

- Aquí se tiene una política de captura con una tasa de cosecha racional:

$$H(u) = \frac{hu}{c+u}, \quad (1.21)$$

donde  $h$  es la tasa máxima de captura de la población de presas y  $c$  es el número de presas que se necesita para alcanzar la mitad de la tasa máxima de captura. Así, a medida que aumenta la abundancia de la población de presas, el número de presas cosechadas también aumentará, pero a un ritmo decreciente. Esto caracteriza el comportamiento de un agente de cosecha que tiene capital fijo a corto plazo. A medida que haya más especies disponibles, cosechar más a un ritmo lineal podría no ser rentable y eventualmente imposible debido a los recursos limitados para la captura de la presa.

Figura 1.5: Función de Captura  $H(u) = \frac{hu}{c+u}$ .

- Por último, una función de captura con umbral continuo en la presa:

$$H(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \leq T, \\ \frac{h(u-T)}{h+u-T}, & \text{si } u > T. \end{cases} \quad (1.22)$$

De esta manera, una vez que la población de presas pasa el tamaño  $u = T$ , comienza la recolección y aumenta suavemente hasta un valor límite  $h$ . Se cree que esta función de captura es más sólida desde el punto de vista biológico.

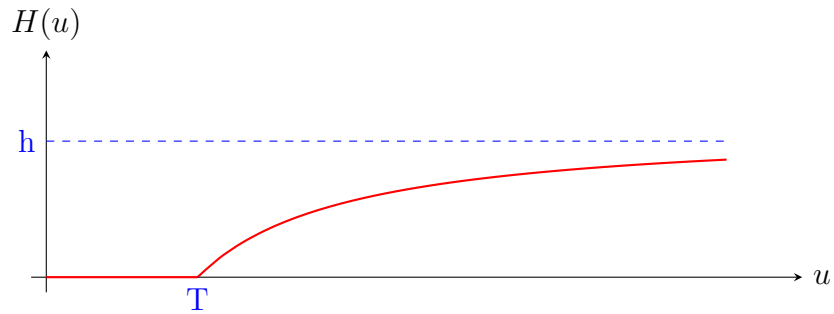


Figura 1.6: Función de Captura (1.22).

Para el desarrollo del presente trabajo, analizamos la dinámica del sistema (3), considerando las políticas de captura (1.21) y (1.22) sobre las presas, para así comparar la dinámica poblacional de dicho sistema, con cada una de estas políticas de cosecha.

# Capítulo 2

## Dinámica considerando una función de captura racional

En este capítulo se estudia la dinámica del sistema (3) considerando la función de captura (1.21); se inicia demostrando un resultado de existencia de soluciones no negativas; luego se proporcionan condiciones bajo las cuales se puede presentar extinción de al menos una de las especies, se establecen acotaciones de las soluciones y se halla una región invariante del sistema (3). De igual manera, se estudian los estados de equilibrio constantes del sistema (3) con su respectiva estabilidad y se finaliza presentado una simulación numérica de algunos de los resultados teóricos.

### 2.1. Dinámica fundamental

Por conveniencia, denotaremos

$$\tilde{F}(u, v) = \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - uv - H(u), \quad \tilde{G}(u, v) = v(u - \eta). \quad (2.1)$$

Sobre las soluciones en el sistema (3), tenemos los siguientes resultados. A continuación, demostraremos un resultado de existencia y unicidad de soluciones no negativas para el sistema (3), donde  $H$  es una de las funciones de captura mencionadas anteriormente.

**Teorema 3** (Existencia y unicidad de soluciones no negativas). *Si  $u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0$ , y  $u_0(x) \not\equiv 0, v_0(x) \not\equiv 0$ , entonces el sistema (3) tiene una única solución  $(u(x, t), v(x, t))$  tal que  $u(x, t) > 0, v(x, t) > 0$  para  $t \in (0, \infty), x \in \bar{\Omega}$ .*

**Demostración.**

Para

$$\overline{R_+^2} = \{(u, v) \mid u \geq 0, v \geq 0\},$$

tenemos que

$$\tilde{F}(u, v) = \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - H(u), \quad \tilde{G}(u, v) = v(u-\eta).$$

Consideremos

$$\begin{cases} F(v) = \tilde{F}(u, v), & u \text{ - fijo,} \\ G(u) = \tilde{G}(u, v), & v \text{ - fijo.} \end{cases}$$

Así que  $F$  y  $G$  son funciones de variable y valor real, por lo que podemos estudiar su monotonía,

$$\frac{dF}{dv} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v} = -u \leq 0 \quad \text{y} \quad \frac{dG}{du} = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial u} = v \geq 0.$$

Por consiguiente,  $\tilde{F}$  es no creciente en la dirección de  $v$  y  $\tilde{G}$  es no decreciente en la dirección de  $u$ . Luego, de la definición (8), se tiene que  $\mathbf{f} = (\tilde{F}, \tilde{G})$  es cuasi-monotóna mixta.

Ahora, veamos que el sistema (3) se ajusta a la forma (1.10). Haciendo en (1.10),

$$\begin{cases} a_{j,l}^i = d_i, & \text{si } j = l \\ a_{j,l}^i = 0, & \text{si } j \neq l \\ b_j^i(t, x) = 0 & \forall i, j \end{cases}$$

tenemos que

$$L_i \equiv \sum_{j=1}^n d_i \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

y si además consideramos

$$f_1 = \tilde{F}, \quad f_2 = \tilde{G}, \quad \alpha_i(x, t) = 1, \quad \beta_i = 0 \quad \text{y} \quad h_i(t, x) \equiv \sigma \quad \forall i$$

tendríamos que  $B_i \equiv \frac{\partial}{\partial v}$  y así  $\frac{\partial}{\partial v} = 0$ . Por lo tanto, el sistema (3) es cuasi-monótono mixto. Sea  $(\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t)) = (0, 0)$  y  $(\bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ , donde  $(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$  es la única solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - H(u), & t > 0, \\ \frac{dv}{dt} = v(u-\eta), & t > 0, \\ u(0) = \bar{u}_0, \quad v(0) = \bar{v}_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

con  $\bar{u}_0 = \sup_{\bar{\Omega}} u_0(x)$  y  $\bar{v}_0 = \sup_{\bar{\Omega}} v_0(x)$ . Observemos que

$$\frac{du}{dt} = \check{F}(u), \quad \text{con} \quad \check{F}(u) = \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - H(u)$$

satisface que  $\check{F}(0) = 0$ , luego  $u^*(t) \equiv 0$  es solución, así que por el Teorema de Existencia y Unicidad, tenemos que para todo  $u_0 > 0$ , la solución de

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \check{F}(u), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

satisface que  $u(t) \neq u^*(t)$  para todo  $t > 0$ . Así que  $u(t) > 0$  ( $u(t) < 0$  no puede ser, ya que  $u_0 > 0$ ). Del mismo modo, podemos mostrar que  $v(t) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$ . Por lo tanto, las soluciones del sistema (2.2) existen y son no negativas en  $[0, \infty)$ .

Ahora verifiquemos que  $(\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t))$  y  $(\bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t))$  son sub y super soluciones ordenadas, para ello mostremos que:

$$\frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} - \Delta \bar{u}(x, t) - \tilde{F}(\bar{u}(x, t), \underline{v}(x, t)) \geq 0 \geq \frac{\partial \underline{u}(x, t)}{\partial t} - \Delta \underline{u}(x, t) - \tilde{F}(\underline{u}(x, t), \bar{v}(x, t))$$

y

$$\frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial t} - \Delta \bar{v}(x, t) - \tilde{G}(\bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) \geq 0 \geq \frac{\partial \underline{v}(x, t)}{\partial t} - \Delta \underline{v}(x, t) - \tilde{G}(\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t))$$

en efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} - \Delta \bar{u}(x, t) - \tilde{F}(\bar{u}(x, t), \underline{v}(x, t)) &= \frac{r\bar{u}}{\bar{u} + c}(1 - \bar{u})(\bar{u} - b) - H(\bar{u}) - \tilde{F}(\bar{u}, 0) \\ &= \frac{r\bar{u}}{\bar{u} + c}(1 - \bar{u})(\bar{u} - b) - H(\bar{u}) - \frac{r\bar{u}}{\bar{u} + c}(1 - \bar{u})(\bar{u} - b) + H(\bar{u}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De otro lado,

$$\frac{\partial \underline{u}(x, t)}{\partial t} - \Delta \underline{u}(x, t) - \tilde{F}(\underline{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) = 0$$

así que,

$$\frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} - \Delta \bar{u}(x, t) - \tilde{F}(\bar{u}(x, t), \underline{v}(x, t)) = 0 \geq 0 = \frac{\partial \underline{u}(x, t)}{\partial t} - \Delta \underline{u}(x, t) - \tilde{F}(\underline{u}(x, t), \bar{v}(x, t)).$$

De igual manera,

$$\frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial t} - \Delta \bar{v}(x, t) - \tilde{G}(\bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) = \bar{v}(\bar{u} - \eta) - \bar{v}(\bar{u} - \eta) = 0$$

y

$$\frac{\partial \underline{v}(x, t)}{\partial t} - \Delta \underline{v}(x, t) - \tilde{G}(\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t)) = \underline{v}(\underline{u} - \eta) - \underline{v}(\underline{u} - \eta) = 0,$$

luego,

$$\frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial t} - \Delta \bar{v}(x, t) - \tilde{G}(\bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) = 0 \geq 0 = \frac{\partial \underline{v}(x, t)}{\partial t} - \Delta \underline{v}(x, t) - \tilde{G}(\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t)).$$

Además, como  $\bar{u}_0 > 0$  y  $\bar{v}_0 > 0$  entonces  $0 \leq u_0(x) \leq \bar{u}_0$  y  $0 \leq v_0(x) \leq \bar{v}_0$ . También, en  $S_{\mathcal{T}}$  tenemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \geq \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \geq \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \geq \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \geq \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \end{cases}$$

Por lo tanto, se verifica la definición (9) y se concluye que  $(\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t))$  y  $(\bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t))$  son sub y sup soluciones del sistema (3).

Adicionalmente, sean  $\hat{u} = (\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$  y  $\check{u} = (\bar{u}, \bar{v}) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ , con  $\hat{u} \equiv \hat{u}(t, x)$  y  $\check{u} \equiv \check{u}(t, x)$ , luego

$$\langle \hat{u}, \check{u} \rangle \equiv \{(u(t, \mathbf{x}), v(t, \mathbf{x})) \in \mathbb{R}^2; (u, v) \in C(\bar{D}_T) \times C(\bar{D}_T) \text{ y } (\underline{u}, \underline{v}) \leq (u, v) \leq (\bar{u}, \bar{v})\}.$$

A continuación, verifiquemos las hipótesis del Teorema (1). Se debe garantizar la existencia de  $\underline{c}_i(t, \mathbf{x})$  y  $\bar{c}_i(t, \mathbf{x})$ , con  $i = 1, 2$ , tales que para  $(u, v)$  y  $(u_1, v_1)$  en  $\langle \hat{u}, \check{u} \rangle$  se cumpla:

$$\begin{cases} \tilde{F}(u, v) - \tilde{F}(u_1, v) \geq -\underline{c}_1(u - u_1) \\ \tilde{F}(u, v) - \tilde{F}(u_1, v) \leq \bar{c}_1(u - u_1) \end{cases} \longrightarrow \text{Cuando } u \geq u_1$$

$$\begin{cases} \tilde{G}(u, v) - \tilde{G}(u, v_1) \geq -\underline{c}_2(v - v_1) \\ \tilde{G}(u, v) - \tilde{G}(u, v_1) \leq \bar{c}_2(v - v_1) \end{cases} \longrightarrow \text{Cuando } v \geq v_1.$$

En efecto, sea  $u \geq u_1$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u, v) - \tilde{F}(u_1, v) &= \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - uv - H(u) - \frac{ru_1}{u_1+c}(1-u_1)(u_1-b) + u_1v + H(u_1) \\ &= r \left[ \frac{u(1-u)(u-b)}{u+c} - \frac{u_1(1-u_1)(u_1-b)}{u_1+c} \right] - v(u - u_1) - [H(u) - H(u_1)] \\ &\leq r \left[ \frac{u(1-u)(u-b)}{u+c} - \frac{u_1(1-u_1)(u_1-b)}{u_1+c} \right]. \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente función:

$$N(u) = \frac{u(1-u)(u-b)}{u+c}.$$

Como  $N \in C([u_1, u])$  y diferenciable en  $(u_1, u)$  entonces por el Teorema de Valor Medio, tenemos que existe  $u^* \in (u_1, u)$  tal que:

$$N(u) - N(u_1) = N'(u^*)(u - u_1)$$

con

$$N'(u) = \frac{-2u^3 + (1+b-3c)u^2 + 2c(1+b)u - bc}{(u+c)^2}$$

Del mismo modo,  $N' \in C([u_1, u])$ , así que  $N'$  alcanza su máximo en  $[u_1, u]$ . Luego

$$N'(y) \leq c, \quad \text{donde } c = \sup \{N'(y) : y \in [u_1, u]\}$$

Así que

$$N(u) - N(u_1) \leq c(u - u_1),$$

es decir,

$$\tilde{F}(u, v) - \tilde{F}(u_1, v) \leq rc(u - u_1)$$

haciendo,  $\bar{c}_1 = rc$  tenemos:

$$\tilde{F}(u, v) - \tilde{F}(u_1, v) \leq \bar{c}_1 (u - u_1)$$

Así mismo, tenemos que:

$$\tilde{F}(u_1, v) - \tilde{F}(u, v) \leq r \left[ \frac{u_1(1-u_1)(u_1-b)}{u_1+c} - \frac{u(1-u)(u-b)}{u+c} \right],$$

luego,

$$\tilde{F}(u_1, v) - \tilde{F}(u, v) \leq rc^* (u - u_1),$$

o equivalentemente,

$$\tilde{F}(u, v) - \tilde{F}(u_1, v) \geq -rc^* (u - u_1)$$

haciendo,  $\underline{c}_1 = rc^*$  tenemos:

$$\tilde{F}(u, v) - \tilde{F}(u_1, v) \geq -\underline{c}_1 (u - u_1).$$

Sea  $v \geq v_1$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{G}(u, v) - \tilde{G}(u, v_1) &= v(u - \eta) - v_1(u - \eta) \\ &= (v - v_1)(u - \eta) \\ &= (v - v_1)u - (v - v_1)\eta \\ &\leq (v - v_1)u, \end{aligned}$$

como  $\bar{v}(t, x) = \tilde{v}(t) \in C(\bar{D}_{\mathcal{T}})$ , luego existe  $\bar{c}_2 = \sup_{\Omega} \bar{u}(t, x)$  tal que  $v(t, x) \leq \bar{c}_2$ , ya que  $u(t, x) \leq \bar{u}(t, x)$ , así que

$$\tilde{G}(u, v) - \tilde{G}(u, v_1) \leq \bar{c}_2 (v - v_1).$$

Así mismo, considerando

$$\tilde{G}(u, v_1) - \tilde{G}(u, v),$$

llegamos a que

$$\tilde{G}(u, v) - \tilde{G}(u, v_1) \geq -\underline{c}_2 (v - v_1),$$

donde,  $-\underline{c}_2 = \sup_{\Omega} \bar{u}(t, x)$ . Por lo tanto, el Teorema (1) muestra que el sistema (3) tiene una única solución  $(u(x, t), v(x, t))$  que satisface

$$0 \leq u(x, t) \leq \tilde{u}(t), \quad 0 \leq v(x, t) \leq \tilde{v}(t).$$

El principio de máximo fuerte implica que  $u(x, t) > 0, v(x, t) > 0$  para todo  $x \in \bar{\Omega}, t > 0$ .

Durante el resto de la sección, vamos a analizar la dinámica del sistema (3), considerando la siguiente función de captura, la cual detallamos en (1.21):

$$H(u) = \frac{hu}{c+u}.$$

Sea  $\alpha = \frac{h}{r}$ . Si  $(b-1)^2 \geq 4\alpha$ , podemos definir:

$$\underline{b} = \frac{b+1 - \sqrt{(b-1)^2 - 4\alpha}}{2} \quad \text{y} \quad \bar{b} = \frac{b+1 + \sqrt{(b-1)^2 - 4\alpha}}{2}.$$

**Teorema 4.**

**a)** Si  $(1-b)^2 < 4\alpha$  ó  $(1-b)^2 \geq 4\alpha$  y  $u_0(x) < \underline{b}$ , entonces  $(u(x,t), v(x,t))$  tiende a  $(0,0)$  uniformemente cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**b)** Para cualquier solución  $(u(x,t), v(x,t))$  del sistema (3), si  $(1-b)^2 \geq 4\alpha$ , entonces

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x,t) \leq \bar{b}.$$

Además, para todo  $t \geq 0$ ,

$$\|u(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq M_1, \|v(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C^*,$$

donde  $M_1 = \max\{\bar{b}, \max_{\bar{\Omega}} u_0(x)\}$  y  $C^*$  dependen de  $\eta, r, \bar{b}, u_0, v_0, \Omega$ .

**c)** Si  $(1-b)^2 \geq 4\alpha$  y  $\eta > \bar{b}$ , entonces  $v(x,t)$  tiende a 0 uniformemente cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Demostración**

**a)** De la primera ecuación del sistema (2.2):

$$\frac{du}{dt} = \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - H(u),$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - \frac{hu}{u+c} \\ &= \frac{ru}{u+c} \left[ (1-u)(u-b) - \frac{h}{r} \right] \\ &= \frac{ru}{u+c} [(1-u)(u-b) - \alpha], \end{aligned}$$

así que

$$\frac{du}{dt} = \frac{ru}{u+c} [(1-u)(u-b) - \alpha]. \quad (2.3)$$



Ahora, como  $(1 - b)^2 < 4\alpha$ , mostremos que  $(1 - u)(u - b) - \alpha < 0$  para todo  $u > 0$ . De la desigualdad de Young (con  $p = p' = 2$ ) tenemos que:

$$(1 - u)(u - b) \leq \frac{(1 - u)^2}{2} + \frac{(u - b)^2}{2}, \quad (2.4)$$

de donde,

$$2(1 - u)(u - b) \leq (1 - u)^2 + (u - b)^2,$$

luego,

$$\begin{aligned} 4(1 - u)(u - b) &\leq (1 - u)^2 + 2(1 - u)(u - b) + (u - b)^2 \\ &= [(1 - u) + (u - b)]^2 \\ &= (1 - b)^2 \\ &< 4\alpha, \end{aligned}$$

esto es,

$$4(1 - u)(u - b) < 4\alpha.$$

En consecuencia,

$$(1 - u)(u - b) - \alpha < 0.$$

Así que  $\tilde{u}(t)$  es una función decreciente, lo cual implica que  $\tilde{u}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Por otra parte, si  $(1 - b)^2 \geq 4\alpha$  y  $u_0(x) < \underline{b}$ , entonces  $\tilde{u}(t) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , ya que de (2.3) tenemos que:

$$\frac{du}{dt} = \frac{ru}{u + c} (\bar{b} - u) (u - \underline{b}). \quad (2.5)$$

Así,  $\frac{du}{dt} < 0$ , para todo  $0 < u < \bar{b}$ , luego  $\tilde{u}(t)$  es una función decreciente, lo cual implica que  $\tilde{u}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Además, como  $0 \leq u(x, t) \leq \tilde{u}(t)$ , entonces  $u(x, t) \rightarrow 0$  uniformemente en  $\bar{\Omega}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

De la segunda ecuación del sistema (2.2):

$$\frac{dv}{dt} = v(u - \eta), \quad t \geq 0$$

podemos obtener  $\frac{dv}{dt} < 0$ , (dado que  $\tilde{u}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ) es decir, que  $\tilde{v}(t)$  es una función decreciente, así que  $\tilde{v}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Y como  $0 \leq v(x, t) \leq \tilde{v}(t)$ , entonces  $v(x, t) \rightarrow 0$  uniformemente en  $\bar{\Omega}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**b)** Como  $(1 - b)^2 \geq 4\alpha$ , ya observamos que:

$$\frac{du}{dt} = \frac{ru}{u + c} (\bar{b} - u) (u - \underline{b}).$$

Luego, la función  $\tilde{u}(t)$  es decreciente si  $0 < u < \underline{b}$  o si  $u > \bar{b}$ , y es creciente si  $\underline{b} < u < \bar{b}$ . Lo anterior, implica que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\Omega} u(x, t) \leq \bar{b}.$$

Ahora, del Principio Máximo tenemos:

$$\|u(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{\Omega} |u(\cdot, t)| \leq M_1 \text{ para todo } t \geq 0, \text{ donde } M_1 = \max \left\{ \bar{b}, \max_{\Omega} u_0(x) \right\}.$$

Sea

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = U(t), \quad \int_{\Omega} v(x, t) dx = V(t).$$

Luego, como  $u \in C^{2,1}(D_{\mathcal{T}})$ , donde  $D_{\mathcal{T}} = \Omega \times (0, \mathcal{T}]$ , para  $\mathcal{T} > 0$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \int_{\Omega} u_t dx = \int_{\Omega} d_1 \Delta u dx + \int_{\Omega} \left[ \frac{ru}{u+c} (1-u)(u-b) - uv - H(u) \right] dx, \\ \frac{dV}{dt} &= \int_{\Omega} v_t dx = \int_{\Omega} d_2 \Delta v dx + \int_{\Omega} v(u - \eta) dx. \end{aligned}$$

Haciendo uso de una de las fórmulas de Green [16] y de la condición de frontera de Neumann, se sigue que:

$$\int_{\Omega} d_1 \Delta u dx = d_1 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0, \quad \int_{\Omega} d_2 \Delta v dx = d_2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = 0.$$

Así,

$$\frac{dU}{dt} = \int_{\Omega} \left[ \frac{ru}{u+c} (1-u)(u-b) - uv - H(u) \right] dx, \quad (2.6)$$

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\Omega} v(u - \eta) dx. \quad (2.7)$$

Luego, de (2.6), (2.7) y (2.4), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d(U+V)}{dt} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{ru}{u+c} (1-u)(u-b) - uv - H(u) \right] dx + \int_{\Omega} v(u - \eta) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{ru}{u+c} (1-u)(u-b) - H(u) \right] dx - \eta \int_{\Omega} v dx \\ &= -\eta V + \int_{\Omega} \left[ \frac{ru}{u+c} (1-u)(u-b) - H(u) \right] dx \\ &\leq -\eta V + \int_{\Omega} \left[ \frac{ru}{u+c} (1-u)(u-b) \right] dx \\ &\leq -\eta V + \frac{r}{2} (1-b)^2 \int_{\Omega} dx \\ &= -\eta(U+V) + \left[ \eta U + \frac{r}{2} (1-b)^2 |\Omega| \right]. \end{aligned}$$

Ahora, como  $\|u(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq M_1$ , entonces

$$U(t) = \int_{\Omega} u(x, t) dx \leq \int_{\Omega} \|u(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} dx \leq M_1 \int_{\Omega} dx = M_1 |\Omega|$$

es decir,  $U(t) \leq M_1 |\Omega|$  para todo  $t \geq 0$ ; luego

$$\frac{d(U + V)}{dt} \leq -\eta(U + V) + M_2, \quad (2.8)$$

donde  $M_2 = [\eta M_1 + \frac{r}{2}(1 - b)^2] |\Omega|$ .

Usando el Lema (1) enunciado y demostrado en [18], se obtiene de (2.8) que para  $t \geq 0$ ,

$$\int_{\Omega} v dx < U(t) + V(t) \leq [U(0) + V(0)] e^{-\eta t} + \frac{M_2}{\eta} (1 - e^{-\eta t}).$$

Esto implica que para  $t \geq 0$ ,

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} < \|u_0(\cdot)\|_{L^1(\Omega)} + \|v_0(\cdot)\|_{L^1(\Omega)} + \frac{M_2}{\eta} := M_3,$$

es decir,  $\|v(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} < M_3$ .

Haciendo en el Lema (1),  $w(x, t) = v(x, t)$  y  $B(x, t) = u(x, t) - \eta$ , tenemos que

$$\sup_{t \geq 0} \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_3^*,$$

esto es,  $\|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_3^*$  donde  $M_3^*$  depende de  $M_3$  y  $\|u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Por tanto, existe  $C^*$  tal que  $\|v(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C^*$ .

c) Tenemos que  $(1 - b)^2 \geq 4\beta$  y  $\eta > \bar{b}$ , además, como

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u(x, t) \leq \bar{b},$$

entonces  $u \leq \bar{b} < \eta$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . Luego, de la segunda ecuación del sistema (2.2) se deduce que:

$$\frac{dv}{dt} = v(u - \eta) < 0,$$

lo que implica que  $\tilde{v}(t) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $v(x, t)$  tiende a 0 uniformemente cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Observación 3.** *En el significado biológico, la captura actúa sobre la población de presas como una mortalidad adicional.*

A continuación, proporcionamos un teorema que muestra que para cualquier población de presas inicial dada  $u_0(x)$ , una población de depredadores inicial  $v_0(x)$  suficientemente grande siempre puede conducir a la extinción de ambas especies. Este fenómeno se llama *sobreexplotación*.

**Teorema 5.** *Para una determinada  $u_0(x) \geq 0$ , existe una constante  $v_0^*$  que depende de los parámetros y  $u_0(x)$ , tal que si el dato inicial  $v_0(x) \geq v_0^*$  para  $x \in \bar{\Omega}$ , entonces la solución correspondiente  $(u(x, t), v(x, t))$  del sistema (3) tiende a  $(0, 0)$  uniformemente para  $x \in \bar{\Omega}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .*

**Demostración.**

Sea  $(u(x, t), v(x, t))$  una solución no negativa del sistema (3). Consideramos los siguientes casos:  $(H_1) (1 - b)^2 < 4\alpha$ ;  $(H_2) (1 - b)^2 \geq 4\alpha$ .

- Si se satisface  $(H_1)$ , entonces el Teorema (4)(a) implica que  $(0, 0)$  es un atractor global. Por tanto, se cumple el Teorema (5).
- De ahora en adelante, suponemos que  $(H_2)$  siempre se cumple. Así, del Teorema (4)(b), eligiendo arbitrariamente un  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $t_1 > 0$  tal que  $u(x, t) \leq \bar{b}(1 + \varepsilon)$  para  $t \geq t_1$ . Por lo tanto  $u(x, t)$  satisface la siguiente ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - uv - H(u), x \in \Omega, t > t_1, \\ u(x, t_1) \leq \bar{b}(1 + \varepsilon), x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Denotemos como  $v_1(x, t)$  la solución de la siguiente ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v - \eta v, x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ v(x, 0) = v_0(x), x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Entonces, del principio de comparación, obtenemos que  $v(x, t) \geq v_1(x, t)$ . Observemos que  $\min_{x \in \bar{\Omega}} v_0(x) e^{-\eta t}$  es una sub solución de (2.10).

Eligiendo

$$v_0^* \geq e^{\eta t_1} \frac{rM_4 + \bar{b}(1 + \varepsilon) + c}{c} \left[ \frac{\bar{b}(1 + \varepsilon)}{\underline{b}} \right]^\eta$$

y

$$t_2 > \ln \left[ \frac{\bar{b}(1 + \varepsilon)}{\underline{b}} \right], \quad (2.11)$$

donde  $M_4 = \frac{(1-b)^2}{4} - \alpha > 0$ .

Luego, si  $v_0(x) \geq v_0^*$ , entonces,  $\min_{x \in \bar{\Omega}} v_0(x) \geq v_0^*$ , de donde,  $\min_{x \in \bar{\Omega}} v_0(x) e^{-\eta t} \geq v_0^* e^{-\eta(t_1+t_2)}$ , para  $t \in [0, t_1 + t_2]$ , así que

$$v(x, t) \geq v_0^* e^{-\eta(t_1+t_2)}, \text{ para } t \in [0, t_1 + t_2]. \quad (2.12)$$

Además, para todo  $u \geq 0$ , tenemos

$$(1-u)(u-b) - \frac{H(u)(u+c)}{ru} \leq \frac{(1-b)^2}{4} - \alpha = M_4$$

Como  $t \in [t_1, t_1 + t_2]$ , de (2.12) y (2.11) se sigue

$$\begin{aligned} & (1-u)(u-b) - \frac{H(u)(u+c)}{ru} - \frac{v(u+c)}{r} \leq M_4 - \frac{c}{r}v \\ & \leq M_4 - \frac{c}{r}e^{-\eta t_2} \frac{rM_4 + \bar{b}(1+\varepsilon) + c}{c} \left( \frac{\bar{b}(1+\varepsilon)}{\underline{b}} \right)^\eta \\ & < -\frac{\bar{b}(1+\varepsilon) + c}{r}. \end{aligned}$$

Dado que  $u(x, t) \leq \bar{b}(1 + \varepsilon)$  para  $t \geq t_1$ , entonces

$$\frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - H(u) - uv < -u. \quad (2.13)$$

De (2.9) y (2.13), se tiene que  $u(x, t)$  satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \leq d_1 \Delta u - u, & x \in \Omega, t \in (t_1, t_1 + t_2], \\ u(x, t_1) \leq \bar{b}(1 + \varepsilon), & x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Lo anterior, junto con el Lema (1) enunciado en [18], demuestra que para  $t \in [t_1, t_1 + t_2]$  y  $x \in \bar{\Omega}$ ,

$$u(x, t) \leq \bar{b}(1 + \varepsilon)e^{-(t-t_1)}.$$

Luego de (2.11), se sigue que  $u(x, t_1 + t_2) \leq \bar{b}(1 + \varepsilon)e^{-t_2} < \underline{b}$ .

Por lo tanto, del Teorema (4)(a) se tiene que  $(u(x, t), v(x, t))$  tiende a  $(0, 0)$  uniformemente cuando  $t \rightarrow \infty$  para  $x \in \bar{\Omega}$ . Dado que  $\varepsilon$  se elige arbitrariamente, observamos que  $v_0^*$  depende de los parámetros fijos y  $t_1$  que se relaciona con  $u_0(x)$ .

Ahora, bajo el supuesto de que  $d_1 = d_2$ , obtenemos una región invariante del sistema (3), tanto para la función de captura racional como para la función con umbral (1.22).

**Teorema 6.** *Supongamos que  $d_1 = d_2$  y  $br > \eta c$ . Si existe una constante positiva  $\gamma$  tal que  $\gamma > \frac{\eta+r(1+b)}{c} - 1$ , entonces el conjunto  $\mathcal{R}_\gamma = \{(u, v) | u > 0, v \geq \gamma u\}$  es una región invariante del sistema (3).*

### Demostración.

Sea  $(u(x, t), v(x, t))$  solución del sistema (3). Para los parámetros  $c, \eta, r$  y  $b$ , tomamos una constante positiva  $\gamma$  tal que  $\gamma > \frac{\eta+r(1+b)}{c} - 1$ . Sea  $w = v - \gamma u$ , cuando  $d_1 = d_2$ , tenemos la siguiente ecuación sobre  $w$

$$\begin{cases} w_t - d_1 \Delta w = \tilde{G}(u, w + \gamma u) - \gamma \tilde{F}(u, w + \gamma u), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ w(x, 0) = v_0(x) - \gamma u_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (2.14)$$

donde  $\tilde{F}$  y  $\tilde{G}$  ya se definieron en (2.1). Ahora realizamos el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} & \tilde{G}(u, \gamma u) - \gamma \tilde{F}(u, \gamma u) = \gamma u(u - \eta) - \gamma \left[ \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - \gamma u^2 - H(u) \right] \\ & = \frac{\gamma u}{u+c} \left[ u(u+c) - \eta(u+c) - r(1-u)(u-b) + \gamma u(u+c) + \frac{H(u)(u+c)}{u} \right] \\ & = \frac{\gamma u}{u+c} \left\{ (\gamma + 1 + r)u^2 + [(\gamma + 1)c - \eta - r(1+b)]u + br - \eta c + \frac{H(u)(u+c)}{u} \right\} \end{aligned}$$

## 2.1. DINÁMICA FUNDAMENTAL

---

Dado que  $\gamma > \frac{\eta+r(1+b)}{c} - 1$ , tenemos que para  $u \geq 0$ ,

$$\tilde{G}(u, \gamma u) - \gamma \tilde{F}(u, \gamma u) > 0.$$

Observemos que si  $(u_0(x), v_0(x)) \in \mathcal{R}_\gamma$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$ , entonces  $w(x, 0) \geq 0$  en  $\bar{\Omega}$ , y del principio del máximo fuerte obtenemos:

$$w(x, t) > 0, \text{ esto es, } v(x, t) > \gamma u(x, t), \forall x \in \bar{\Omega}, t > 0,$$

Por lo tanto,  $\mathcal{R}_\gamma$  es una región invariante.

## 2.2. Estados de equilibrio constantes

### 2.2.1. Existencia de estados de equilibrio constantes

Claramente, el sistema (3) siempre tiene la solución trivial  $E_0^* = (0, 0)$ . Observemos que el sistema (3) no tiene estados de equilibrio constantes libres de presas. A continuación, analizamos los estados de equilibrio constantes sin depredadores del sistema (3). Para ello, debemos considerar la siguiente ecuación:

$$\frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - \frac{hu}{u+c} = 0. \quad (2.15)$$

Sea  $\Delta_1 = [(b-1)^2 - 4\alpha]$ , entonces tenemos que si  $\Delta_1 > 0$ , la ecuación (2.15) tiene dos raíces positivas denotadas por  $u_2^* = \underline{b}$  y  $u_3^* = \bar{b}$ , las cuales satisfacen que  $u_2^* < u_3^*$ , mientras que si  $\Delta_1 = 0$  tenemos una única raíz positiva denotada por  $u_4^* = \underline{b} = \bar{b} = \frac{(1+b)}{2}$  y si  $\Delta_1 < 0$  no existen raíces positivas.

Posteriormente, enunciaremos todos los posibles estados de equilibrio constantes libres de depredadores como  $E_i^* = (u_i^*, 0)$ ,  $i = 2, 3, 4$ .

Condiciones	Estados de equilibrio constantes sin depredadores para el sistema (3)
$\Delta_1 > 0$	$E_2^*, E_3^*$
$\Delta_1 = 0$	$E_4^*$
$\Delta_1 < 0$	ninguno

Tabla 2.1: Estados de equilibrio constante sin depredadores del sistema (3).

Ahora, discutimos la existencia de estados de equilibrio constantes positivos. Consideremos las ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - uv - H(u) = 0, \\ uv - \eta v = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Observemos que si  $\Delta_1 > 0$  y  $u_2^* < \eta < u_3^*$ , entonces (2.16) tiene una única raíz positiva  $E_1^* = \left(\eta, \frac{r(1-\eta)(\eta-b)-h}{\eta+c}\right)$ . Por lo tanto, con respecto al estado de equilibrio constante positivo, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 7.** *Si  $\Delta_1 > 0$  y  $u_2^* < \eta < u_3^*$ , entonces el sistema (3) tiene un único estado de equilibrio constante positivo.*

Por conveniencia, denotamos el estado de equilibrio constante positivo, como  $E^* = (\eta, v_\eta)$ , donde  $v_\eta = \frac{r(1-\eta)(\eta-b)-h}{\eta+c}$ .

### 2.2.2. Estabilidad e inestabilidad de los estados de equilibrio constantes

En esta subsección, analizaremos la estabilidad de los estados de equilibrio constantes. Del sistema (3) con función de captura (1.21) tenemos que:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - uv - \frac{hu}{u+c} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + v(u-\eta) \end{cases} \quad (2.17)$$

Vamos a linealizar (2.17) alrededor de un estado de equilibrio constante  $(u^*, v^*)$ . Para ello, consideremos

$$\phi = u - u^*, \quad \psi = v - v^*$$

y recordemos que:

$$\tilde{F}(u, v) = \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - uv - H(u), \quad \tilde{G}(u, v) = v(u-\eta).$$

Así, de (2.17) se sigue:

$$\begin{cases} \phi_t - d_1 \Delta \phi = \nabla \tilde{F}(u^*, v^*) \cdot (\phi, \psi) \\ \psi_t - d_2 \Delta \psi = \nabla \tilde{G}(u^*, v^*) \cdot (\phi, \psi) \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} \phi_t \\ \psi_t \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \psi \end{pmatrix} + J_{(u^*, v^*)} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

con dominio

$$X = \left\{ (\phi, \psi) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) : \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \right\},$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad J_{(u^*, v^*)} = \begin{pmatrix} A(u^*, v^*) & B(u^*, v^*) \\ C(u^*, v^*) & D(u^*, v^*) \end{pmatrix}$$

además,

$$A(u^*, v^*) = \tilde{F}_u(u^*, v^*) = \frac{r[2(b+1)u^* - 3(u^*)^2 - b]}{u^* + c} - \frac{ru^*(1-u^*)(u^* - b) + hc}{(u^* + c)^2} - v^*,$$

$$B(u^*, v^*) = \tilde{F}_v(u^*, v^*) = -u^*, \quad C(u^*, v^*) = \tilde{G}_u(u^*, v^*) = v^*, \quad D(u^*, v^*) = \tilde{G}_v(u^*, v^*) = u^* - \eta.$$

Usaremos la solución del problema

$$-\Delta \varphi = \mu \varphi,$$

en  $\Omega = (0, l\pi) \times (0, l\pi)$ , con condición de frontera de Neumann homogénea, es decir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \nabla \varphi \cdot \nu = 0, \quad \text{en } \partial \Omega,$$



## 2.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

---

las cuales están dadas por las autofunciones

$$\varphi_{jn}(x_1, x_2) = \cos(x_1 w_j) \cos(x_2 t_n)$$

con los valores propios

$$\mu = \frac{j^2}{l^2} + \frac{n^2}{l^2},$$

y si además,  $\mu = k^2$ , con  $t_n = \frac{n}{l}$  y  $w_j = \frac{j}{l}$ , entonces

$$k^2 = w_j^2 + t_n^2.$$

Por lo tanto, para cada  $j$  y  $n$  consideraremos que:

$$u_{jn} = \alpha_{jn}(t)\varphi_{jn}.$$

De manera similar, obtenemos que:

$$v_{jn} = \beta_{jn}(t)\varphi_{jn}.$$

Ahora, supongamos que

$$\begin{cases} \phi(t, x_1, x_2) = \sum_{j,n=0}^{\infty} u_{jn}(t, x_1, x_2) = \sum_{j,n=0}^{\infty} \alpha_{jn}(t)\varphi_{jn}(x_1, x_2), \\ \psi(t, x_1, x_2) = \sum_{j,n=0}^{\infty} v_{jn}(t, x_1, x_2) = \sum_{j,n=0}^{\infty} \beta_{jn}(t)\varphi_{jn}(x_1, x_2). \end{cases}$$

Como

$$\begin{cases} u_{jn}(t, x_1, x_2) = \alpha_{jn}(t)\varphi_{jn}(x_1, x_2) = \alpha_{jn}(t) \cos(w_j x_1) \cos(t_n x_2), \\ v_{jn}(t, x_1, x_2) = \beta_{jn}(t)\varphi_{jn}(x_1, x_2) = \beta_{jn}(t) \cos(w_j x_1) \cos(t_n x_2), \end{cases}$$

tenemos:

$$\Delta u_{jn} = -k^2 \alpha_{jn}(t)\varphi_{jn}(x_1, x_2) \quad \text{y} \quad \Delta v_{jn} = -k^2 \beta_{jn}(t)\varphi_{jn}(x_1, x_2), \quad (2.19)$$

además,

$$\frac{\partial u_{jn}}{\partial t} = \alpha'_{jn}(t)\varphi_{jn}(x_1, x_2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial v_{jn}}{\partial t} = \beta'_{jn}(t)\varphi_{jn}(x_1, x_2). \quad (2.20)$$

Reemplazando (2.19) y (2.20) en (2.18), igualmente, usando la unicidad de los coeficientes, obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_{jn}}{dt} = A(u^*, v^*) \alpha_{jn} - k^2 d_1 \alpha_{jn} + B(u^*, v^*) \beta_{jn}, \\ \frac{d\beta_{jn}}{dt} = C(u^*, v^*) \alpha_{jn} - k^2 d_2 \beta_{jn} + D(u^*, v^*) \beta_{jn}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Así, la matriz jacobiana del modelo (2.21) está dada por:

$$J_k := -k^2 D + J_{(u^*, v^*)} = \begin{pmatrix} A(u^*, v^*) - k^2 d_1 & B(u^*, v^*) \\ C(u^*, v^*) & D(u^*, v^*) - k^2 d_2 \end{pmatrix}$$

## 2.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

---

Tenemos que  $\lambda$  es un valor propio de  $L$  si y solo si  $\lambda$  es un valor propio de la matriz  $J_k$ . Por otra parte, los Teoremas 5.1.1 y 5.1.2 en [23] muestran que si todos los valores propios del operador  $L$  tienen parte real negativa, entonces  $(u^*, v^*)$  es localmente asintóticamente estable; si hay un valor propio con parte real positiva, entonces  $(u^*, v^*)$  es inestable; si alguno de los valores propios tiene parte real cero y no hay un valor propio con parte real positiva, entonces la estabilidad de  $(u^*, v^*)$  no puede ser determinada mediante el sistema linealizado. Por tanto, la estabilidad se reduce al considerar las raíces de la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 - T_k \lambda + D_k = 0, \quad (2.22)$$

con

$$T_k = -k^2 (d_1 + d_2) + A(u^*, v^*) + D(u^*, v^*),$$

$$D_k = d_1 d_2 k^4 - [A(u^*, v^*) d_2 + D(u^*, v^*) d_1] k^2 + [A(u^*, v^*) D(u^*, v^*) - B(u^*, v^*) C(u^*, v^*)].$$

De (2.22), obtenemos la estabilidad de las soluciones triviales y de los estados de equilibrio constantes libres de depredadores  $E_i^* = (u_i^*, 0)$  para  $i = 0, 2, 3, 4$ . En efecto,

- Si  $u^* = u_0^* = 0$  entonces  $E_0^* = (0, 0)$ .

$$\begin{aligned} T_k &= -k^2 (d_1 + d_2) + A(u^*, v^*) + D(u^*, v^*) \\ &= - \left[ k^2 (d_1 + d_2) + \frac{rb + h}{c} + \eta \right] < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_k &= d_1 d_2 k^4 - [A(u^*, v^*) d_2 + D(u^*, v^*) d_1] k^2 + [A(u^*, v^*) D(u^*, v^*) - B(u^*, v^*) C(u^*, v^*)] \\ &= d_1 d_2 k^4 + (k^2 + \eta) \left( \frac{rb + h}{c} \right) + \eta d_1 > 0. \end{aligned}$$

Así que para todo  $k$ ,

$$T_k < 0 \quad \text{y} \quad D_k > 0.$$

Por lo tanto,  $E_0^*$  es localmente asintóticamente estable.

- Si  $u^* = u_2^* = \underline{b}$  entonces  $E_2^* = (\underline{b}, 0)$ .

$$\begin{aligned} T_k &= -k^2 (d_1 + d_2) + A(u^*, v^*) + D(u^*, v^*) \\ &= -k^2 (d_1 + d_2) + \frac{r[-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - b]}{\underline{b} + c} - \frac{r\underline{b}(1 - \underline{b})(\underline{b} - b) + hc}{(\underline{b} + c)^2} + \underline{b} - \eta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} D_k &= d_1 d_2 k^4 - [A(u^*, v^*) d_2 + D(u^*, v^*) d_1] k^2 + [A(u^*, v^*) D(u^*, v^*) - B(u^*, v^*) C(u^*, v^*)] \\ &= d_1 d_2 k^4 - \left\{ \left[ \frac{r[-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - b]}{\underline{b} + c} - \frac{r\underline{b}(1 - \underline{b})(\underline{b} - b) + hc}{(\underline{b} + c)^2} \right] d_2 + (\underline{b} - \eta) d_1 \right\} k^2 + \\ &\quad \left\{ \frac{r[-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - b]}{\underline{b} + c} - \frac{r\underline{b}(1 - \underline{b})(\underline{b} - b) + hc}{(\underline{b} + c)^2} \right\} (\underline{b} - \eta). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Haciendo en (2.15)  $u = \underline{b}$  y reemplazando en (2.23) y (2.24) respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} T_k &= -k^2 (d_1 + d_2) + \frac{r [-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - b]}{\underline{b} + c} - \frac{h}{\underline{b} + c} + \underline{b} - \eta \\ &= -k^2 (d_1 + d_2) + \frac{r [-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - (b + \alpha)]}{\underline{b} + c} + \underline{b} - \eta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D_k &= d_1 d_2 k^4 - \left\{ \left[ \frac{r [-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - b]}{\underline{b} + c} - \frac{h}{\underline{b} + c} \right] d_2 + (\underline{b} - \eta) d_1 \right\} k^2 + \\ &\quad \left\{ \frac{r [-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - b]}{\underline{b} + c} - \frac{h}{\underline{b} + c} \right\} (\underline{b} - \eta) \\ D_k &= d_1 d_2 k^4 - \left\{ \left[ \frac{r [-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - (b + \alpha)]}{\underline{b} + c} \right] d_2 + (\underline{b} - \eta) d_1 \right\} k^2 + \\ &\quad \left\{ \frac{r [-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - (b + \alpha)]}{\underline{b} + c} \right\} (\underline{b} - \eta). \end{aligned}$$

Tenemos que si  $\eta > \underline{b}$  y  $0 < \underline{b} < b_1^*$  ó  $b_2^* < \underline{b} < 1$ , entonces para todo  $k$ ,

$$T_k < 0 \quad \text{y} \quad D_k > 0,$$

donde

$$b_1^* = \frac{b+1 - \sqrt{(b+1)^2 - 3(\alpha+b)}}{3} \quad \text{y} \quad b_2^* = \frac{b+1 + \sqrt{(b+1)^2 - 3(\alpha+b)}}{3}.$$

Por lo tanto,  $E_2^*$  es localmente asintóticamente estable.

- Si  $u^* = u_3^* = \bar{b}$  entonces  $E_3^* = (\bar{b}, 0)$ .

$$\begin{aligned} T_k &= -k^2 (d_1 + d_2) + A(u^*, v^*) + D(u^*, v^*) \\ &= -k^2 (d_1 + d_2) + \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - b]}{\bar{b} + c} - \frac{r\bar{b}(1-\bar{b})(\bar{b}-b) + hc}{(\bar{b} + c)^2} + \bar{b} - \eta. \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} D_k &= d_1 d_2 k^4 - [A(u^*, v^*) d_2 + D(u^*, v^*) d_1] k^2 + [A(u^*, v^*) D(u^*, v^*) - B(u^*, v^*) C(u^*, v^*)] \\ &= d_1 d_2 k^4 - \left\{ \left[ \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - b]}{\bar{b} + c} - \frac{r\bar{b}(1-\bar{b})(\bar{b}-b) + hc}{(\bar{b} + c)^2} \right] d_2 + (\bar{b} - \eta) d_1 \right\} k^2 + \\ &\quad \left\{ \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - b]}{\bar{b} + c} - \frac{r\bar{b}(1-\bar{b})(\bar{b}-b) + hc}{(\bar{b} + c)^2} \right\} (\bar{b} - \eta). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Haciendo en (2.15)  $u = \bar{b}$  y reemplazando en (2.25) y (2.26) respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} T_k &= -k^2 (d_1 + d_2) + \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - b]}{\bar{b} + c} - \frac{h}{\bar{b} + c} + \bar{b} - \eta \\ &= -k^2 (d_1 + d_2) + \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - (b+\alpha)]}{\bar{b} + c} + \bar{b} - \eta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D_k &= d_1 d_2 k^4 - \left\{ \left[ \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - b]}{\bar{b} + c} - \frac{h}{\bar{b} + c} \right] d_2 + (\bar{b} - \eta) d_1 \right\} k^2 + \\ &\quad \left\{ \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - b]}{\bar{b} + c} - \frac{h}{\bar{b} + c} \right\} (\bar{b} - \eta) \\ D_k &= d_1 d_2 k^4 - \left\{ \left[ \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - (b+\alpha)]}{\bar{b} + c} \right] d_2 + (\bar{b} - \eta) d_1 \right\} k^2 + \\ &\quad \left\{ \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - (b+\alpha)]}{\bar{b} + c} \right\} (\bar{b} - \eta). \end{aligned}$$

Tenemos que si  $\eta > \bar{b}$  y  $0 < \bar{b} < b_1^*$  ó  $b_2^* < \bar{b} < 1$ , entonces para todo  $k$ ,

$$T_k < 0 \quad \text{y} \quad D_k > 0.$$

Por lo tanto,  $E_3^*$  es localmente asintóticamente estable.

- Si  $u^* = u_4^* = \underline{b} = \bar{b} = \frac{b+1}{2}$  entonces  $E_4^* = (u_4^*, 0)$ .

$$\begin{aligned} T_k &= -k^2 (d_1 + d_2) + A(u^*, v^*) + D(u^*, v^*) \\ &= -k^2 (d_1 + d_2) + \frac{r [-3(u_4^*)^2 + 2(b+1)u_4^* - b]}{u_4^* + c} - \frac{ru_4^*(1-u_4^*)(u_4^* - b) + hc}{(u_4^* + c)^2} + u_4^* - \eta. \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} D_k &= d_1 d_2 k^4 - [A(u^*, v^*)d_2 + D(u^*, v^*)d_1] k^2 + [A(u^*, v^*)D(u^*, v^*) - B(u^*, v^*)C(u^*, v^*)] \\ &= d_1 d_2 k^4 - \left\{ \left[ \frac{r [-3(u_4^*)^2 + 2(b+1)u_4^* - b]}{u_4^* + c} - \frac{ru_4^*(1-u_4^*)(u_4^* - b) + hc}{(u_4^* + c)^2} \right] d_2 + (u_4^* - \eta) d_1 \right\} k^2 + \\ &\quad \left\{ \frac{r [-3(u_4^*)^2 + 2(b+1)u_4^* - b]}{u_4^* + c} - \frac{ru_4^*(1-u_4^*)(u_4^* - b) + hc}{(u_4^* + c)^2} \right\} (u_4^* - \eta). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Aquí tenemos que  $\Delta_1 = [(b-1)^2 - 4\alpha] = 0$ , luego  $\alpha = \frac{(b-1)^2}{4}$ . Además, haciendo en (2.15)  $u = u_4^*$  y reemplazando en (2.27) y (2.28) respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} T_k &= -k^2 (d_1 + d_2) + \frac{r [-3(u_4^*)^2 + 2(b+1)u_4^* - b]}{u_4^* + c} - \frac{h}{u_4^* + c} + u_4^* - \eta \\ &= -k^2 (d_1 + d_2) + \frac{r [-3(u_4^*)^2 + 2(b+1)u_4^* - (b+1)^2 4^{-1}]}{u_4^* + c} + u_4^* - \eta \end{aligned} \tag{2.29}$$

y

$$\begin{aligned}
 D_k &= d_1 d_2 k^4 - \left\{ \left[ \frac{r [-3 (u_4^*)^2 + 2(b+1)u_4^* - b]}{u_4^* + c} - \frac{h}{u_4^* + c} \right] d_2 + (u_4^* - \eta) d_1 \right\} k^2 + \\
 &\quad \left\{ \frac{r [-3 (u_4^*)^2 + 2(b+1)u_4^* - b]}{u_4^* + c} - \frac{h}{u_4^* + c} \right\} (u_4^* - \eta) \\
 D_k &= d_1 d_2 k^4 - \left\{ \left[ \frac{r [-3 (u_4^*)^2 + 2(b+1)u_4^* - (b+1)^2 4^{-1}]}{\bar{b} + c} \right] d_2 + (u_4^* - \eta) d_1 \right\} k^2 + \\
 &\quad \left\{ \frac{r [-3 (u_4^*)^2 + 2(b+1)u_4^* - (b+1)^2 4^{-1}]}{u_4^* + c} \right\} (u_4^* - \eta).
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Ahora, reemplazando  $u_4^* = \frac{b+1}{2}$  en (2.29) y (2.30) tenemos:

$$T_k = -k^2 (d_1 + d_2) + \frac{b+1}{2} - \eta$$

y

$$D_k = d_1 d_2 k^4 - \left[ \left( \frac{b+1}{2} - \eta \right) d_1 \right] k^2.$$

Luego, si  $b+1 < 2\eta$ , entonces para todo  $k$ ,

$$T_k < 0 \quad \text{y} \quad D_k > 0,$$

Por lo tanto,  $E_4^*$  es localmente asintóticamente estable.

De lo anterior, obtenemos el siguiente resultado en cuanto a la estabilidad de los estados de equilibrio constantes libres de depredadores.

**Teorema 8.** Sean  $b_1^* = \frac{b+1-\sqrt{(b+1)^2-3(\alpha+b)}}{3}$  y  $b_2^* = \frac{b+1+\sqrt{(b+1)^2-3(\alpha+b)}}{3}$ . Luego en el sistema (3) tenemos que:

- a)**  $E_0^*$  es siempre localmente asintóticamente estable.
- b)** Si  $\eta > \underline{b}$  y  $0 < \underline{b} < b_1^*$  ó  $b_2^* < \underline{b} < 1$ , entonces  $E_2^*$  es localmente asintóticamente estable.
- c)** Si  $\eta > \bar{b}$  y  $0 < \bar{b} < b_1^*$  ó  $b_2^* < \bar{b} < 1$ , entonces  $E_3^*$  es localmente asintóticamente estable.
- d)** Si  $b+1 < 2\eta$ , entonces  $E_4^*$  es localmente asintóticamente estable.

Ahora vamos a establecer bajo que condiciones los estados de equilibrio  $E_2^*$ ,  $E_3^*$  y  $E_4^*$  son inestables.

- Para  $E_2^*$ , tenemos:

$$D_k = d_1 d_2 k^4 - \left\{ \left[ \frac{r [-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - (b+\alpha)]}{\underline{b} + c} \right] d_2 + (\underline{b} - \eta) d_1 \right\} k^2 + \left\{ \frac{r [-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - (b+\alpha)]}{\underline{b} + c} \right\} (\underline{b} - \eta). \quad (2.31)$$

Si  $k = 0$  en (2.31), obtenemos:

$$D_k = \left\{ \frac{r [-3\underline{b}^2 + 2(b+1)\underline{b} - (b+\alpha)]}{\underline{b} + c} \right\} (\underline{b} - \eta).$$

Así, si  $\underline{b} > \eta$  y  $0 < \underline{b} < b_1^*$  ó  $b_2^* < \underline{b} < 1$ , entonces para todo  $k$ ,

$$D_k < 0.$$

Por lo tanto,  $E_2^*$  es inestable.

- Para  $E_3^*$ , tenemos:

$$D_k = d_1 d_2 k^4 - \left\{ \left[ \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - (b+\alpha)]}{\bar{b} + c} \right] d_2 + (\bar{b} - \eta) d_1 \right\} k^2 + \left\{ \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - (b+\alpha)]}{\bar{b} + c} \right\} (\bar{b} - \eta). \quad (2.32)$$

Si  $k = 0$  en (2.32), obtenemos:

$$D_k = \left\{ \frac{r [-3\bar{b}^2 + 2(b+1)\bar{b} - (b+\alpha)]}{\bar{b} + c} \right\} (\bar{b} - \eta).$$

Así, si  $\bar{b} > \eta$  y  $0 < \bar{b} < b_1^*$  ó  $b_2^* < \bar{b} < 1$ , entonces para todo  $k$ ,

$$D_k < 0.$$

Por lo tanto,  $E_3^*$  es inestable.

- Para  $E_4^*$ , tenemos:

$$D_k = d_1 d_2 k^4 - \left[ \left( \frac{b+1}{2} - \eta \right) d_1 \right] k^2.$$

Si consideramos a  $D_k$  como función de  $k^2$ , entonces  $D_k = 0$  si  $k^2 = 0$  o si  $k^2 = k^* := \left( \frac{b+1}{2} - \eta \right) \frac{1}{d_1}$ , con  $b+1 > 2\eta$ .

Luego, si  $b+1 > 2\eta$  y para  $k$  tal que  $k^2 \in (0, k^*)$ , entonces:

$$D_k < 0.$$

Por lo tanto,  $E_4^*$  es inestable.

## 2.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

En consecuencia, obtenemos el siguiente resultado en cuanto a la inestabilidad de los estados de equilibrio constantes libres de depredadores.

**Teorema 9.** Sean  $b_1^* = \frac{b+1-\sqrt{(b+1)^2-3(\alpha+b)}}{3}$ ,  $b_2^* = \frac{b+1+\sqrt{(b+1)^2-3(\alpha+b)}}{3}$  y  $k^* = \left(\frac{b+1}{2} - \eta\right) \frac{1}{d_1}$ . Luego en el sistema (3), tenemos que:

- a) Si  $\underline{b} > \eta$  y  $0 < \underline{b} < b_1^*$  ó  $b_2^* < \underline{b} < 1$ , entonces  $E_2^*$  es inestable.
- b) Si  $\bar{b} > \eta$  y  $0 < \bar{b} < b_1^*$  ó  $b_2^* < \bar{b} < 1$ , entonces  $E_3^*$  es inestable.
- c) Si  $b+1 > 2\eta$  y para  $k$  tal que  $k^2 \in (0, k^*)$ , entonces  $E_4^*$  es inestable.

La estabilidad e inestabilidad de los estados de equilibrio constantes libres de depredadores, se resume en la Tabla 2.2.

Estados de equilibrio constantes	Condiciones	Estabilidad
$E_0^*$	Siempre	Estable
$E_2^*$	$(\underline{b} > \eta) \wedge 0 < (\underline{b} < b_1^* \vee b_2^* < \underline{b} < 1)$	Inestable
	$(\underline{b} < \eta) \wedge (0 < \underline{b} < b_1^* \vee b_2^* < \underline{b} < 1)$	Estable
$E_3^*$	$(\bar{b} > \eta) \wedge (0 < \bar{b} < b_1^* \vee b_2^* < \bar{b} < 1)$	Inestable
	$(\bar{b} < \eta) \wedge (0 < \bar{b} < b_1^* \vee b_2^* < \bar{b} < 1)$	Estable
$E_4^*$	$(b+1 > 2\eta) \wedge (0 < k^2 < k^*)$	Inestable
	$b+1 < 2\eta$	Estable

Tabla 2.2: Estabilidad de los estados de equilibrio constantes libres de depredadores.

A continuación, discutimos la estabilidad del estado de equilibrio constante positivo  $E^*$ . Para ello, tenemos

$$J_{E^*} = \begin{pmatrix} A(\eta, v_\eta) & -\eta \\ v_\eta & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$A(\eta, v_\eta) = r\eta \left[ \frac{(b+c)(c+1) + \alpha}{(\eta+c)^2} - 1 \right] := A(\eta) \quad (2.33)$$

Entonces, en la ecuación (2.22),

$$T_k(\eta) = -k^2(d_1 + d_2) + A(\eta)$$

y

$$D_k(\eta) = d_1 d_2 k^4 - A(\eta) d_2 k^2 + \eta v_\eta.$$

Observemos que si  $A(\eta) < 0$ , entonces

$$T_k(\eta) = -k^2(d_1 + d_2) + A(\eta) < 0, \quad D_k(\eta) = d_1 d_2 k^4 - A(\eta) d_2 k^2 + \eta v_\eta > 0.$$

Esto implica que  $E^*$  es localmente asintóticamente estable. Y si  $A(\eta) > 0$ , entonces para  $k = 0$ ,

$$T_0(\eta) = A(\eta) > 0,$$

lo que muestra que (2.22) tiene al menos una raíz con parte real positiva. Por tanto,  $E^*$  es inestable.

Así, solo necesitamos determinar el signo de  $A(\eta)$ .

Sea

$$\eta_1 = \sqrt{(c+b)(c+1) + \alpha} - c.$$

Tenemos que,  $0 < \eta_1 < 1$  es la única raíz positiva de  $A(\eta) = 0$ . Luego, (2.33) se puede reescribir como:

$$A(\eta) = r\eta \left[ \frac{(\eta_1 + c)^2}{(\eta + c)^2} - 1 \right],$$

de donde,

$$\begin{aligned} A(\eta) &= \frac{r\eta}{(\eta + c)^2} [(\eta_1 + c)^2 - (\eta + c)^2] \\ &= \frac{r\eta}{(\eta + c)^2} (\eta + \eta_1 + 2c)(\eta_1 - \eta) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

- Si  $0 < \eta < \eta_1$ , entonces  $A(\eta) > 0$ .
- Si  $\eta_1 < \eta$ , entonces  $A(\eta) < 0$ .

En resumen, la estabilidad del estado de equilibrio constante positivo  $E^*$ , se establece en el siguiente teorema.

**Teorema 10.** *Supongamos que  $\Delta_1 > 0$  y  $u_2^* < \eta < u_3^*$ . Entonces  $E^*$  es localmente asintóticamente estable si  $A(\eta) < 0$ , e inestable si  $A(\eta) > 0$ .*



### 2.2.3. Experimentación numerica

Para mostrar la estabilidad de la solución trivial  $E_0^* = (0, 0)$  y del estado de equilibrio constante positivo  $E^* = (\eta, v_\eta)$ , mediante simulación numérica, consideremos los siguientes valores de los parámetros,  $b = 0.1$ ,  $h = 0.21$ ,  $c = 0.9$ ,  $r = 4$  y  $\eta = 0.63$ . Así, tenemos que  $\Delta_1 = 0.6 > 0$ ,  $u_2^* = 0.163$ ,  $u_3^* = 0.937$  y  $A(\eta) = -0.418 < 0$ . Luego, se deduce del Teorema (10), que el estado de equilibrio constante positivo  $E^* = (0.63, 0.375)$  es localmente asintóticamente estable, del mismo modo, podemos ver que la solución trivial  $(0, 0)$  también es estable, como se observa en la figura 2.1.

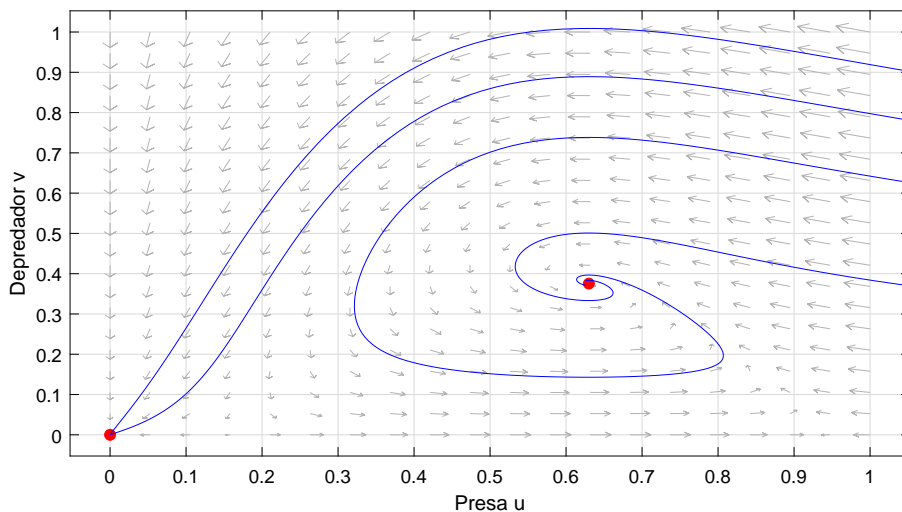


Figura 2.1: Dinámica biestable para la función captura  $H(u) = \frac{hu}{u+c}$ .

Antes de continuar, fijamos los parámetros  $d_1 = 0.2$ ,  $d_2 = 0.3$  y  $\Omega = (0, \pi)$  del sistema (3), para ilustrar algunos resultados teóricos.

Si ahora tenemos en cuenta que las poblaciones no están distribuidas de manera homogénea en el hábitad, es decir, si suponemos que las funciones  $u$  y  $v$  dependen también de la variable espacial, tendríamos los siguientes casos correspondientes al comportamiento de las densidades poblacionales, como los dados en las Figuras 2.2 y 2.3, donde consideremos datos iniciales constantes  $u_0(x) = 0.6$  y  $v_0(x) = 0.4$ , con valores de los parámetros  $b = 0.1$ ,  $h = 0.21$ ,  $r = 4$ ,  $c = 0.9$  y  $\eta = 0.63$

## 2.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

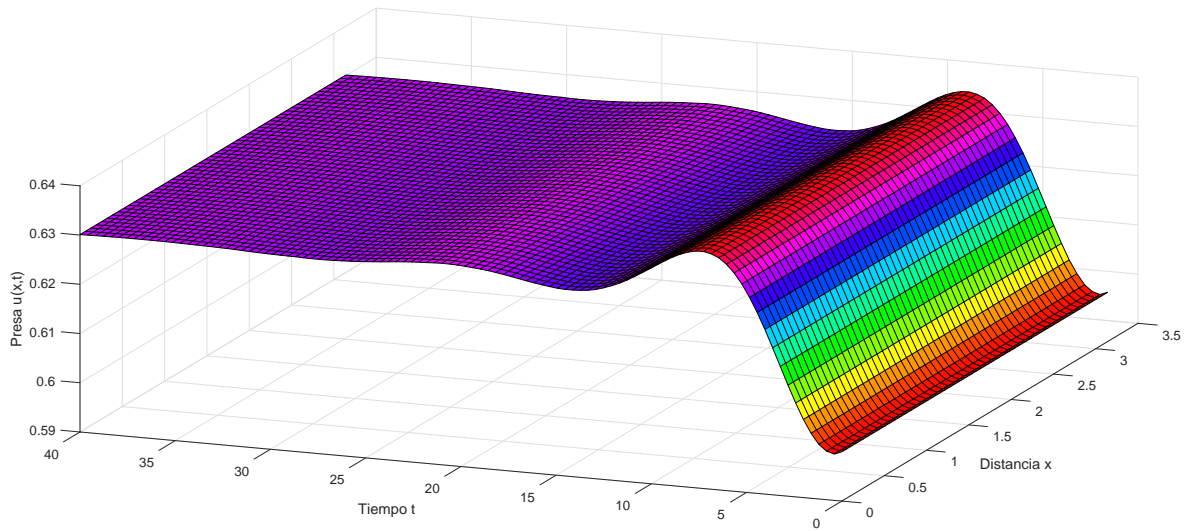


Figura 2.2: Presa. El estado de equilibrio constante positivo  $E^* = (0.63, 0.375)$  es localmente asintóticamente estable.

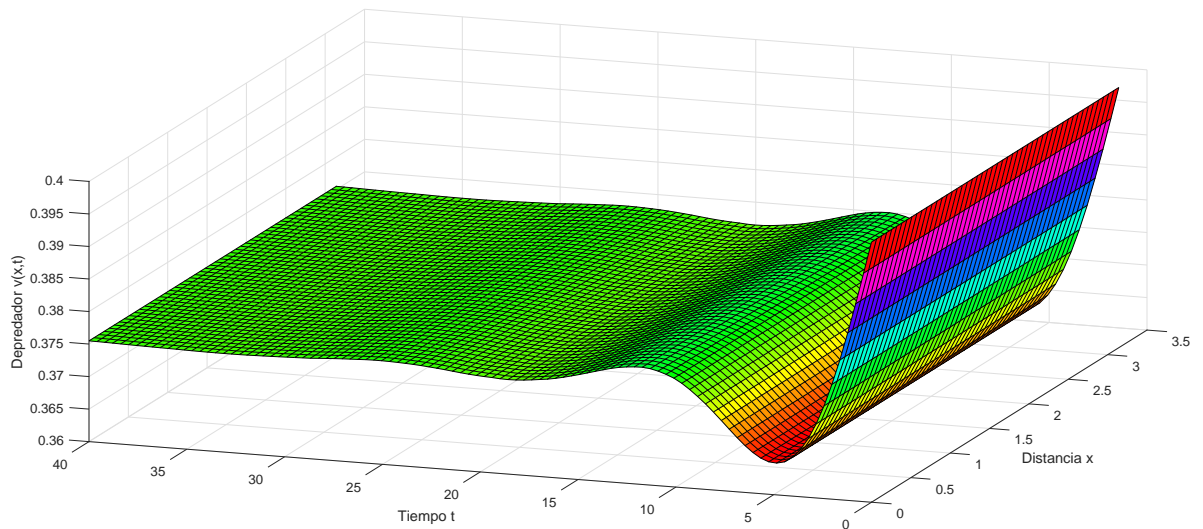


Figura 2.3: Depredador. El estado de equilibrio constante positivo  $E^* = (0.63, 0.375)$  es localmente asintóticamente estable.

## 2.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

Si tomamos como datos iniciales  $u_0(x) = 0.25$  y  $v_0(x) = 0.8$ , cuyos valores están más alejados del estado de equilibrio constante positivo  $E^* = (0.63, 0.375)$ , tenemos que tanto las presas como depredadores se van a  $(0, 0)$  uniformemente, como se observa en las Figuras 2.4 y 2.5, respectivamente. De nuevo consideramos que  $b = 0.1$ ,  $h = 0.21$ ,  $r = 4$ ,  $c = 0.9$  y  $\eta = 0.63$ .

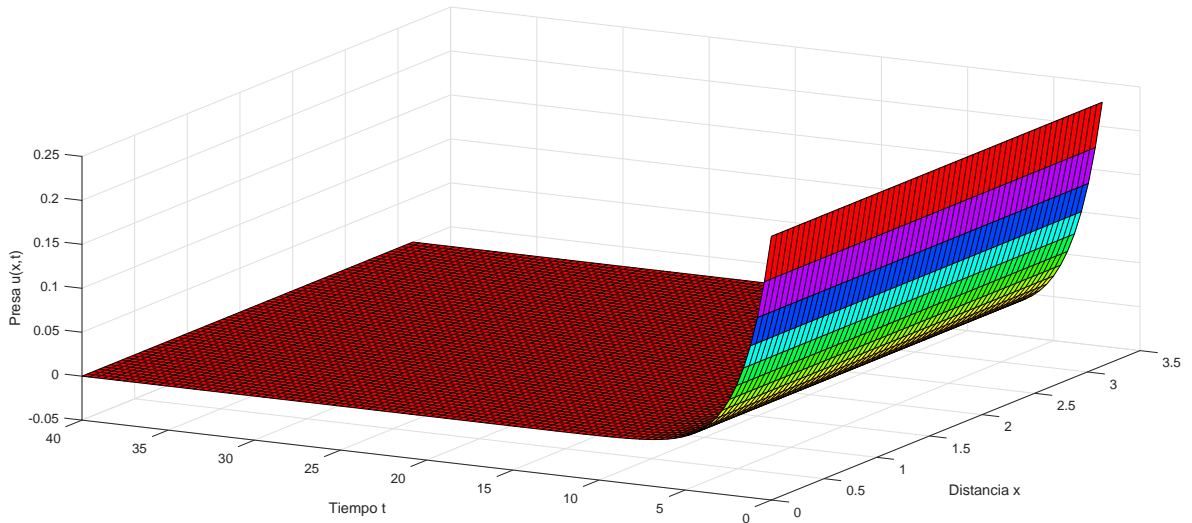


Figura 2.4: Presa. El estado de equilibrio trivial  $E_0^* = (0, 0)$  es localmente estable.

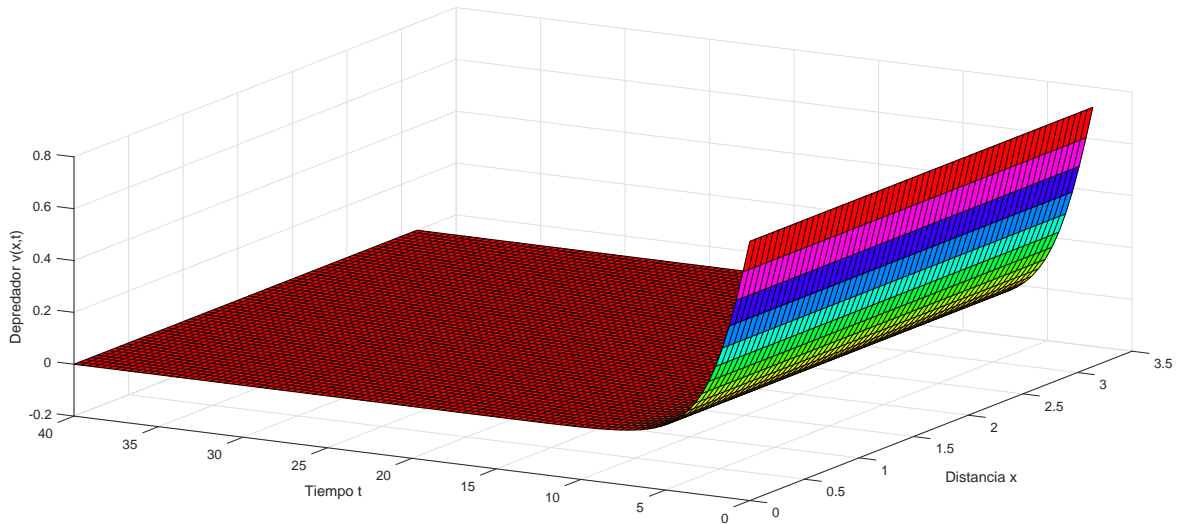


Figura 2.5: Depredador. El estado de equilibrio trivial  $E_0^* = (0, 0)$  es localmente estable.

## 2.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

Cuando consideramos datos iniciales constantes estamos suponiendo que la población no tiene un lugar de preferencia, esto es, que la población está distribuida de manera homogénea en el habitat; mientras que si suponemos que existe un lugar donde hay más individuos, es decir, si iniciamos con datos no constantes tales como  $u_0(x) = 0.5 + 0.05 \sin(2x)$  y  $v_0(x) = 0.32 + 0.02 \sin(2x)$ , tenemos un comportamiento como el que se observa en las Figuras 2.6 y 2.7, donde  $b = 0.1$ ,  $h = 0.21$ ,  $r = 4$ ,  $c = 0.9$  y  $\eta = 0.63$ .

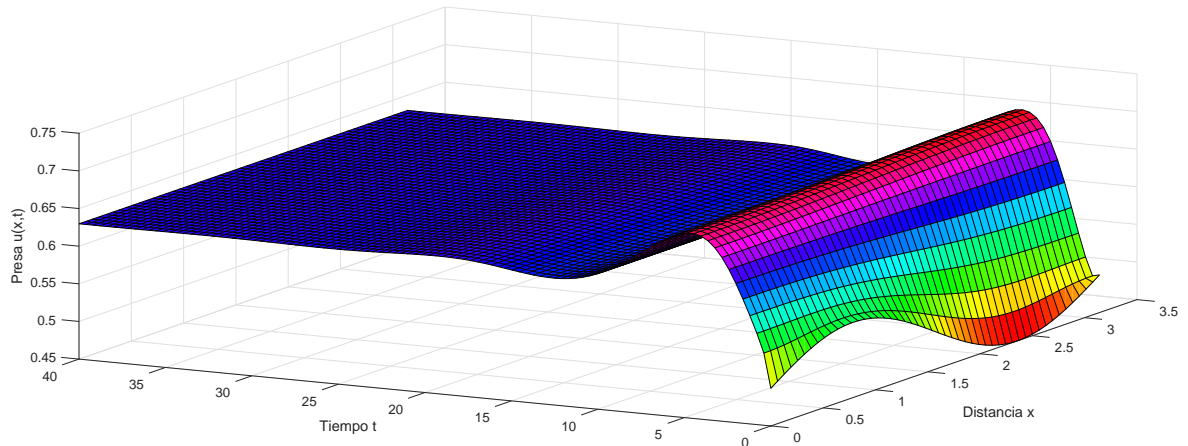


Figura 2.6: Presa. El estado de equilibrio constante positivo  $E^* = (0.63, 0.375)$  es localmente asintóticamente estable; aquí  $u_0(x) = 0.5 + 0.05 \sin(2x)$ .

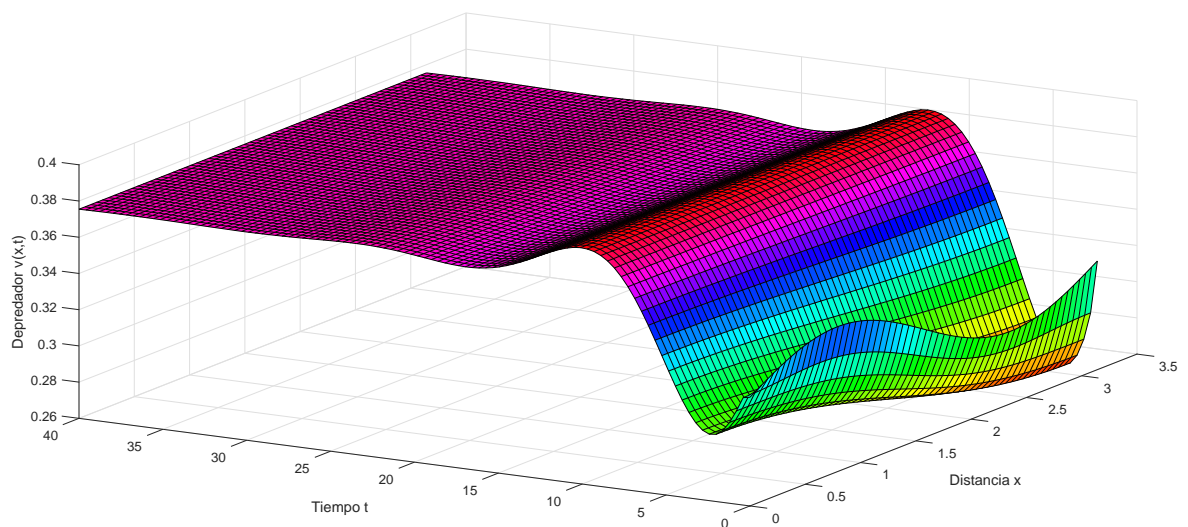


Figura 2.7: Depredador. El estado de equilibrio constante positivo  $E^* = (0.63, 0.375)$  es localmente asintóticamente estable; aquí  $v_0(x) = 0.32 + 0.02 \sin(2x)$ .

# Capítulo 3

## Dinámica considerando un umbral de captura

En este capítulo se estudia la dinámica del sistema (3) considerando la función de captura (1.22); en primer lugar, es importante mencionar que el Teorema (3) (*Existencia de soluciones no negativas*) que ya se demostró, también es válido con la función de captura (1.22). Así, se establecen condiciones bajo las cuales hay extinción de las especies, luego con ayuda de evidencia numérica se analizan los estados de equilibrio constantes del sistema (3) y se finaliza presentado una simulación numérica que permite garantizar la existencia de estados de equilibrio constantes y mostrar su respectiva estabilidad.

### 3.1. Dinámica fundamental

Recordemos la función de captura (1.22):

$$H(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \leq T, \\ \frac{h(u-T)}{h+u-T}, & \text{si } u > T. \end{cases}$$

**Teorema 11.** *Si  $u(x, t)$  es solución del sistema (3) y satisface que  $0 \leq u \leq b$ , entonces  $(u(x, t), v(x, t))$  tiende a  $(0, 0)$  uniformemente cuando  $t \rightarrow \infty$ .*

#### **Demostración.**

Dado que  $0 \leq u(x, t) \leq \tilde{u}(t)$ , donde  $\tilde{u}(t)$  es solución de la primera ecuación del sistema (2.2), es decir,  $\tilde{u}(t)$  satisface:

$$\frac{du}{dt} = \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - H(u), \quad (3.1)$$

mostremos que  $\tilde{u}(t) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . En efecto; observemos que de (3.1) se sigue:

$$\frac{du}{dt} \leq \frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b).$$

Como  $(u - b) \leq 0$  y  $(1 - u) \geq 0$ , se tiene que  $\frac{du}{dt} \leq 0$ . Así que  $\tilde{u}(t)$  es una función no creciente, lo cual implica que  $\tilde{u}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Así que,  $u(x, t) \rightarrow 0$  uniformemente en  $\bar{\Omega}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , dado que  $0 \leq u(x, t) \leq \tilde{u}(t)$ .

De la segunda ecuación del sistema (2.2):

$$\frac{dv}{dt} = v(u - \eta), \quad t \geq 0$$

podemos obtener  $\frac{dv}{dt} < 0$ , (dado que  $\tilde{u}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ) es decir, que  $\tilde{v}(t)$  es una función decreciente, así que  $\tilde{v}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Y como  $0 \leq v(x, t) \leq \tilde{v}(t)$ , entonces  $v(x, t) \rightarrow 0$  uniformemente en  $\bar{\Omega}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## 3.2. Estados de equilibrio constantes

### 3.2.1. Existencia de estados de equilibrio constantes

De nuevo, el sistema (3) tiene la solución trivial  $E_0^* = (0, 0)$ . Así mismo, observamos que el sistema (3) no tiene estados de equilibrio constantes libres de presas. A continuación, analizamos los estados de equilibrio constantes libre de depredadores del sistema (3), los cuales son raíces de la ecuación  $G(u) - H(u) = 0$ , donde

$$G(u) = \frac{ru(1-u)(u-b)}{u+c}$$

Así que debemos considerar las siguientes dos ecuaciones

$$\frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) = 0, \quad (3.2)$$

y

$$\frac{ru}{u+c}(1-u)(u-b) - \frac{h(u-T)}{h+u-T} = 0. \quad (3.3)$$

Observemos que (3.2) tiene una única raíz positiva menor que 1, denotada como  $u_2^* = b$ , siempre que  $b \leq T$ .

Ahora, veamos que

$$G'(u) = \frac{r[-3u^2 + 2(b+1)u - b]}{u+c} - \frac{ru(1-u)(u-b)}{(u+c)^2}.$$

Para determinar el signo de  $G'(u)$ , definimos

$$g(u) = [-3u^2 + 2(b+1)u - b](u+c) - u(1-u)(u-b),$$

donde,

$$G'(u) = \frac{g(u)}{(u+c)^2}.$$

Notar que,

$$g(b) = b(1-b)(b+c) > 0, \quad g(1) = (b-1)(1+c) < 0,$$

y como  $g'(u) = 4(b-1)(u+c) < 0$ , lo que implica que  $g(u) = 0$  tiene una única raíz en  $(b, 1)$ , denotada como  $\hat{u}$ . Esto muestra que  $G(u)$  alcanza un máximo local en  $(b, 1)$ , cuyo valor es  $G(\hat{u})$ . Así que  $G(u)$  es estrictamente creciente en  $(b, \hat{u})$  y decrece en  $(\hat{u}, 1)$ .

Por otra parte,

$$H(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \leq T, \\ \frac{h(u-T)}{h+u-T}, & \text{si } u > T, \end{cases}$$

### 3.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

tenemos que  $H(u)$  es una función no negativa y no decreciente, sin embargo, permanece acotado por  $h$ . Además, de la definición de  $G(u)$ , observamos que  $G(u) < 0$  para  $u \in (0, b)$  y  $G(u) > 0$  para  $u \in [b, 1)$ . Luego, en el caso de que  $G(u)$  y  $H(u)$  sean iguales, lo hacen en  $[b, 1)$ .

La evidencia numérica nos muestra que existen valores de los parámetros para los cuales no hay estados de equilibrio constantes positivos libres de depredadores, o existe uno solo o existen dos o hay tres. Por ejemplo, en la figura 3.1 observamos que no existen.

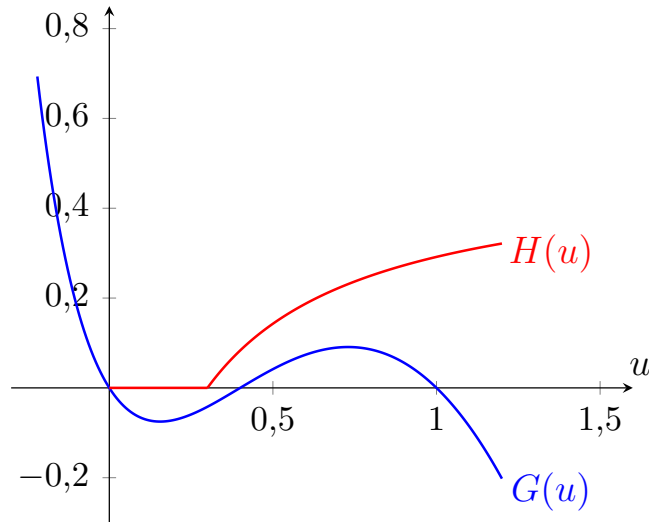


Figura 3.1:  $G$  y  $H$  con  $T = 0.3$ ,  $b = 0.4$ ,  $h = 0.5$ ,  $r = 2$  y  $c = 0.7$

Mientras que en la figura 3.2 se tiene un único estado de equilibrio constante positivo libre de depredador. Aquí observamos que para  $b = T$ , siempre tenemos por lo menos un estado de equilibrio constante positivo libre de depredador, dado que  $G(b) = H(T) = 0$ .

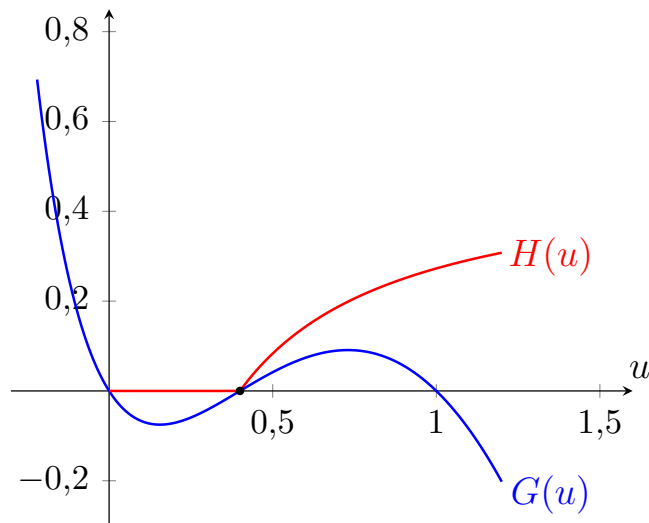


Figura 3.2:  $G$  y  $H$  con  $T = 0.4$ ,  $b = 0.4$ ,  $h = 0.5$ ,  $r = 2$  y  $c = 0.4$



### 3.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

---

En la figura 3.3 tenemos dos estados de equilibrio constantes positivos libres de depredador.

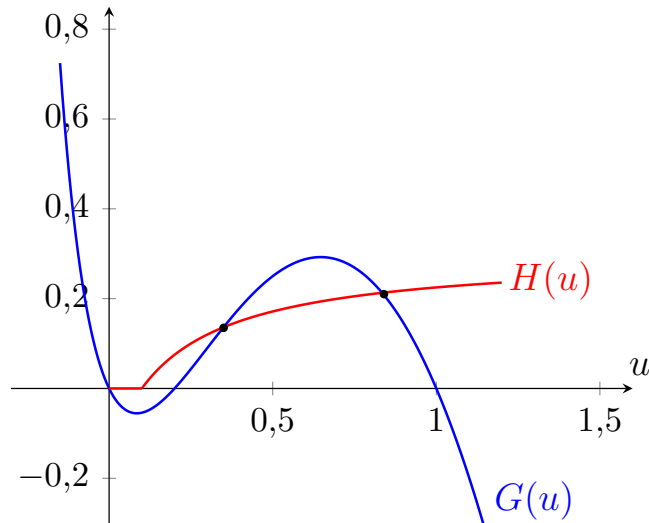


Figura 3.3:  $G$  y  $H$  con  $T = 0.1$ ,  $b = 0.2$ ,  $h = 0.3$ ,  $r = 3$  y  $c = 0.4$

Por último, en la figura 3.4 tenemos tres estados de equilibrio constantes positivos libres de depredador.

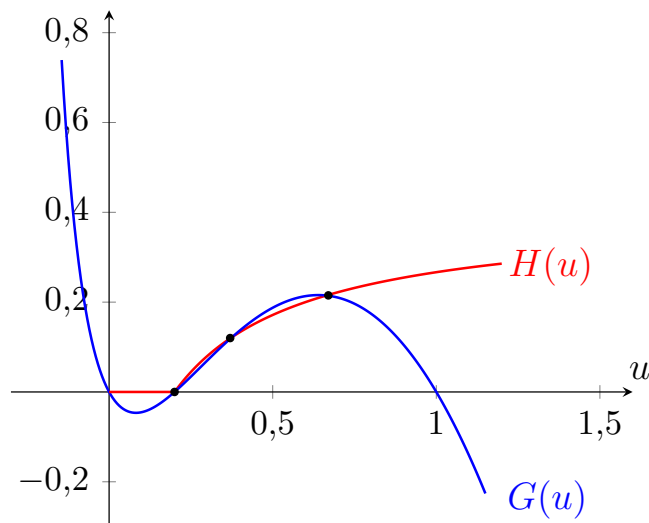


Figura 3.4:  $G$  y  $H$  con  $T = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $h = 0.4$ ,  $r = 2$  y  $c = 0.3$

Tenemos que al considerar el sistema (3) con la política de captura mencionada en el presente capítulo (1.22), se dificulta establecer criterios de existencia de estados de equilibrio constantes de manera analítica, dado a la naturaleza de la misma función de captura y a la cantidad de parámetros involucrados, en este sentido, es complejo garantizar bajo qué condiciones existen estados de equilibrio o más aún, hallarlos explícitamente.

### 3.2.2. Experimentación numérica de la dinámica

Como ya se mencionó, al considerar el sistema (3) con la política de captura (1.22), se dificulta establecer criterios de existencia de estados de equilibrio de manera analítica, por ende, se obstaculizó el estudio de la estabilidad; no obstante, la evidencia numérica nos muestra que existen valores admisibles para los parámetros que permiten garantizar la existencia de estados de equilibrio constantes y determinar su estabilidad. Como se muestra a continuación, la existencia de un estado de equilibrio constante libre de depredadores, el cual puede ser estable, como se observa en la figura 3.5a, o inestable, como se ve en la Figura 3.5b.

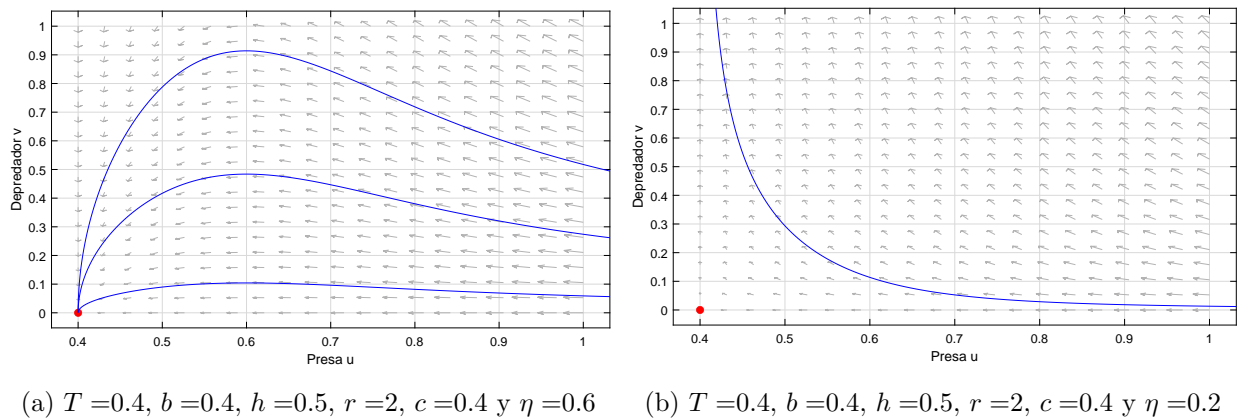


Figura 3.5: Un único estado de equilibrio constante libre de depredadores.

Del mismo modo, existen valores para los parámetros que permiten garantizar la existencia de dos estados de equilibrio constante libres de depredadores, los cuales se pueden observar en la Figura 3.6, junto con su respectiva dinámica.

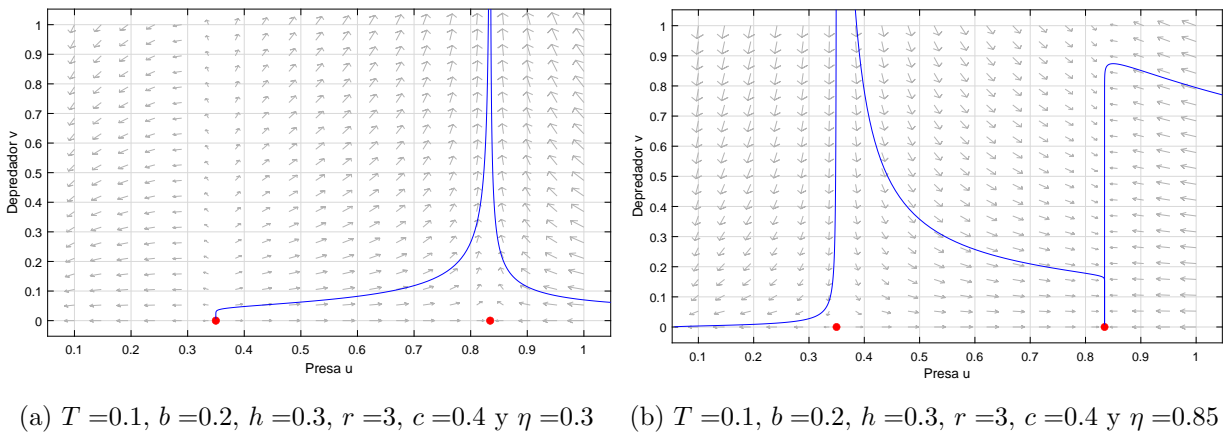
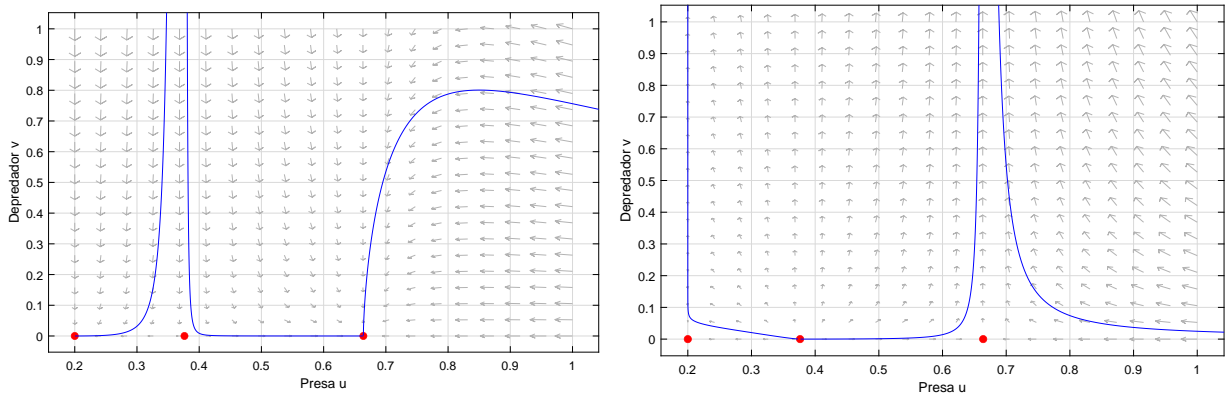


Figura 3.6: Dos estados de equilibrio constantes libres de depredadores.

### 3.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

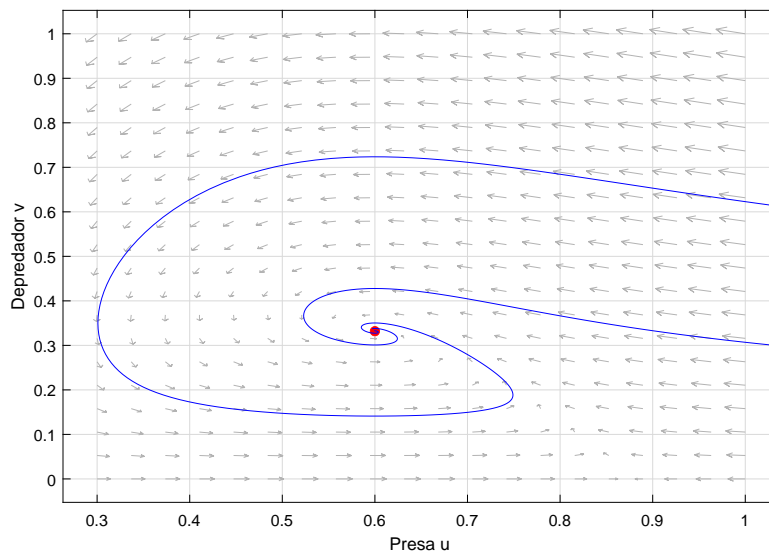
También tenemos la existencia de tres estados de equilibrio constantes libres de depredadores y podemos evidenciar su respectiva estabilidad e inestabilidad, como se ve en la Figura 3.7.



(a)  $T = 0.2, b = 0.2, h = 0.4, r = 2, c = 0.3$  y  $\eta = 0.85$  (b)  $T = 0.2, b = 0.2, h = 0.4, r = 2, c = 0.3$  y  $\eta = 0.15$

Figura 3.7: Tres estados de equilibrio libres de depredadores.

Igualmente, mediante simulación numérica logramos evidenciar que existe un estado de equilibrio constante positivo, que denotamos como  $\bar{E}_1 = (0.6, 0.33)$  y se observa en la Figura 3.8.



(a)  $T = 0.3, b = 0.2, h = 0.4, r = 4, c = 0.5$  y  $\eta = 0.6$

Figura 3.8: Estado de equilibrio constante positivo.

### 3.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

Si de nuevo consideramos que las poblaciones no están distribuidas de manera homogénea en el habitat, entonces respecto al estado de equilibrio constante positivo  $\bar{E}_1 = (0.6, 0.33)$ , tenemos el siguiente comportamiento cuando consideremos los datos iniciales constantes  $u_0(x) = 0.4$  y  $v_0(x) = 0.5$ , como el que se observa en las Figuras 3.9 y 3.10, donde  $T = 0.3$ ,  $b = 0.2$ ,  $h = 0.4$ ,  $r = 4$ ,  $c = 0.5$  y  $\eta = 0.6$ .

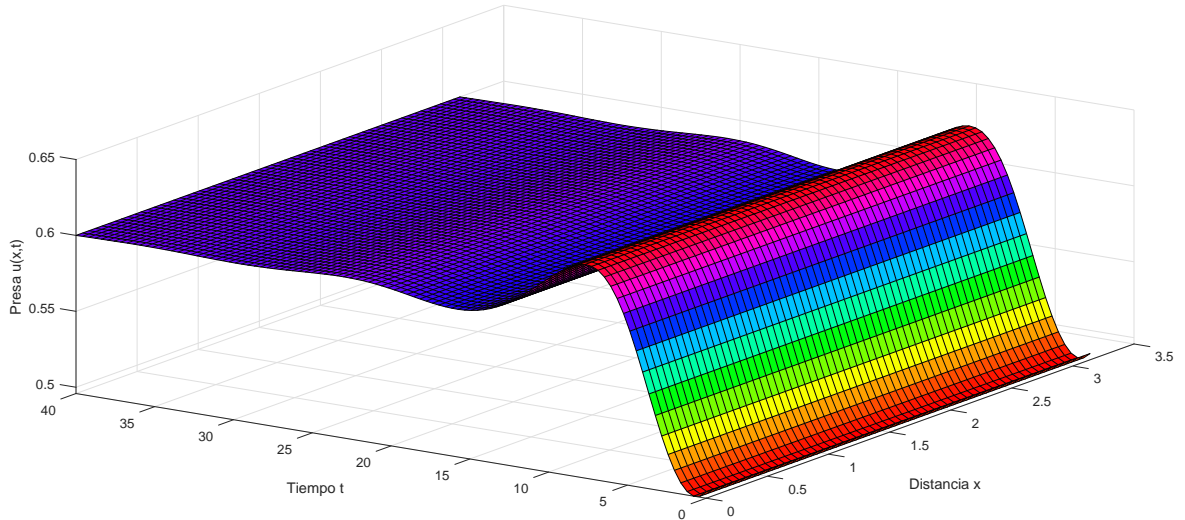


Figura 3.9: Presa. Estado de equilibrio constante positivo  $\bar{E}_1 = (0.6, 0.33)$ .

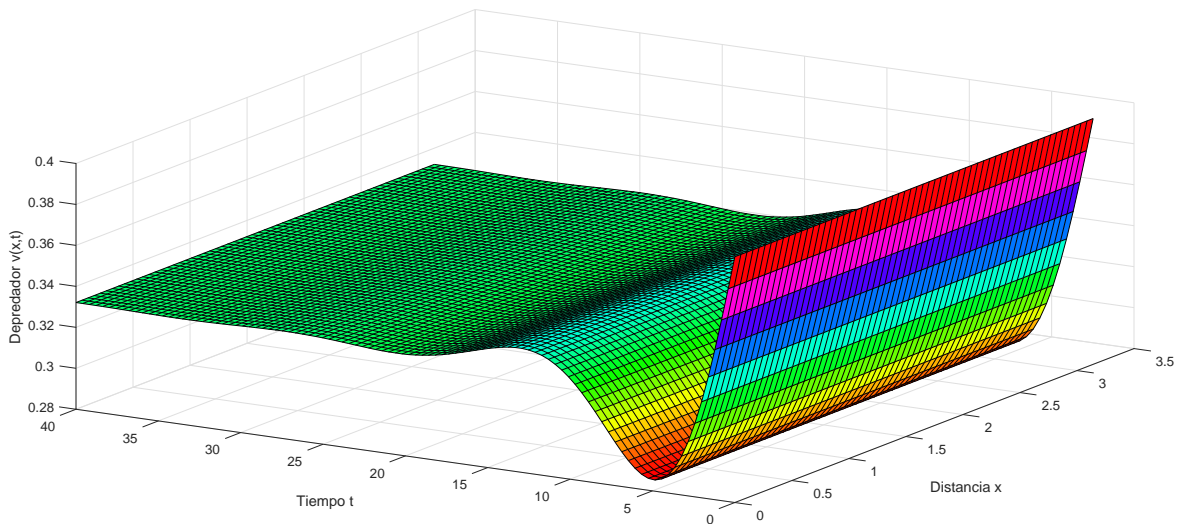


Figura 3.10: Depredador. Estado de equilibrio constante positivo  $\bar{E}_1 = (0.6, 0.33)$ .

### 3.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

Si ahora consideramos los datos iniciales no constantes  $u_0(x) = 0.65 + 0.04 \sin(2x)$  y  $v_0(x) = 0.45 + 0.05 \sin(2x)$ , tenemos un comportamiento como el que se evidencia en las Figuras 3.11 y 3.12, donde  $T = 0.3$ ,  $b = 0.2$ ,  $h = 0.4$ ,  $r = 4$ ,  $c = 0.5$  y  $\eta = 0.6$ .

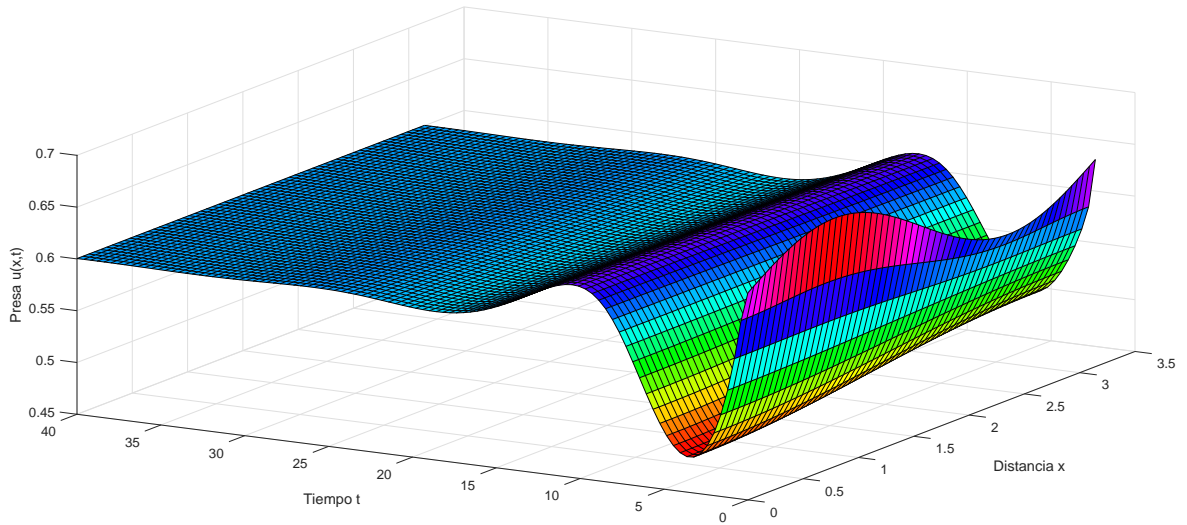


Figura 3.11: Presa. Estado de equilibrio constante positivo  $\bar{E}_1 = (0.6, 0.33)$ ; aquí  $u_0(x) = 0.65 + 0.04 \sin(2x)$ .

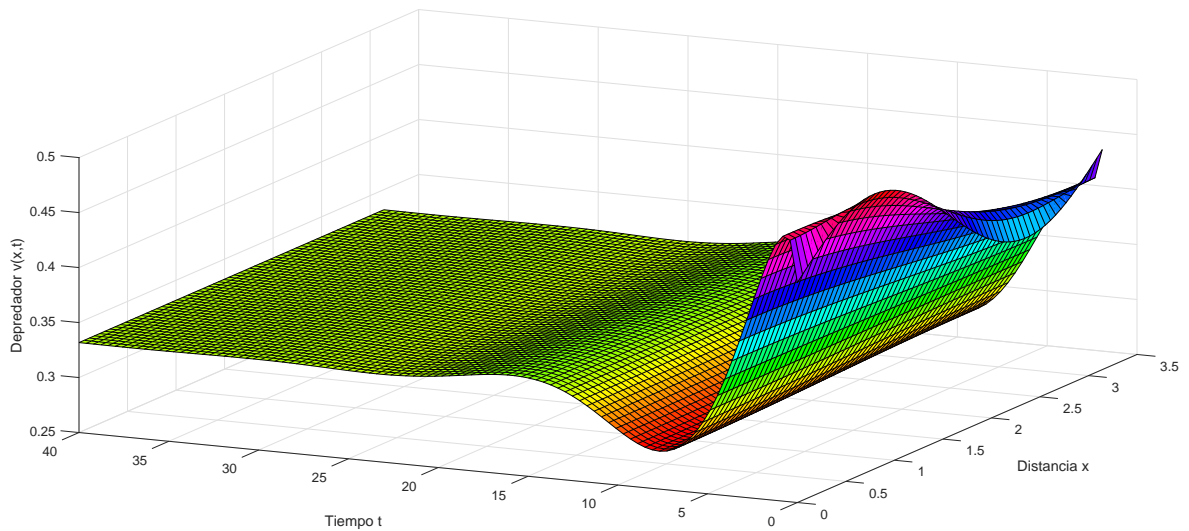


Figura 3.12: Depredador. Estado de equilibrio constante positivo  $\bar{E}_1 = (0.6, 0.33)$ ; aquí  $v_0(x) = 0.45 + 0.05 \sin(2x)$ .

### 3.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

Así mismo, podemos simular los estados de equilibrio libres de depredadores, como por ejemplo, el que se observó en la Figura 3.5a; para ello consideramos las condiciones iniciales constantes  $u_0(x) = 0.6$  y  $v_0(x) = 0.2$ , su dinámica lo vemos en las Figuras 3.13 y 3.14, con  $T = 0.4$ ,  $b = 0.4$ ,  $h = 0.5$ ,  $r = 2$ ,  $c = 0.4$  y  $\eta = 0.6$ .

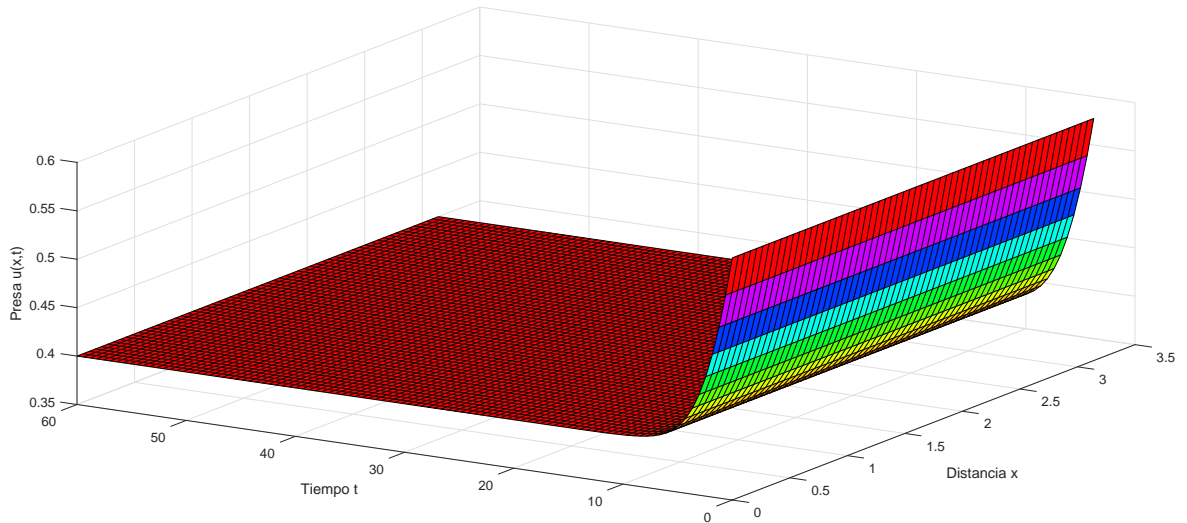


Figura 3.13: Presa. Estado de equilibrio libre de depredadores; aquí  $u_0(x) = 0.6$ .

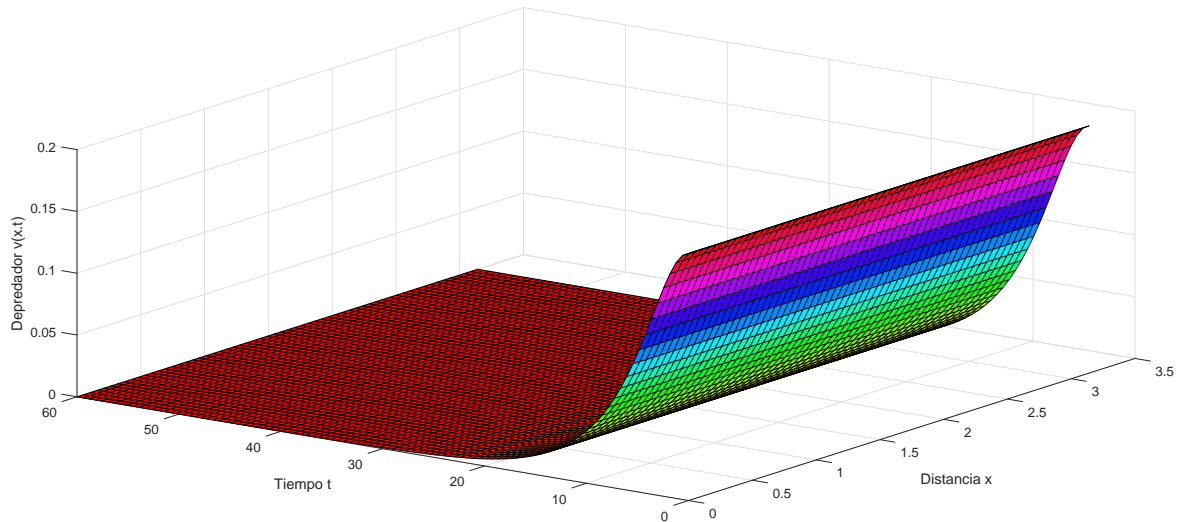


Figura 3.14: Depredador. Estado de equilibrio libre de depredadores, aquí  $v_0(x) = 0.2$ .

### 3.2. ESTADOS DE EQUILIBRIO CONSTANTES

Si en el mismo estado de equilibrio libre de depredadores de la Figura 3.5a, suponemos como datos iniciales a  $u_0(x) = 0.6 + 0.08 \sin(2x)$  y  $v_0(x) = 0.1 + 0.07 \sin(2x)$ , tenemos un comportamiento como el que se observa en las Figuras 3.15 y 3.16, donde  $T = 0.4$ ,  $b = 0.4$ ,  $h = 0.5$ ,  $r = 2$ ,  $c = 0.4$  y  $\eta = 0.6$ .

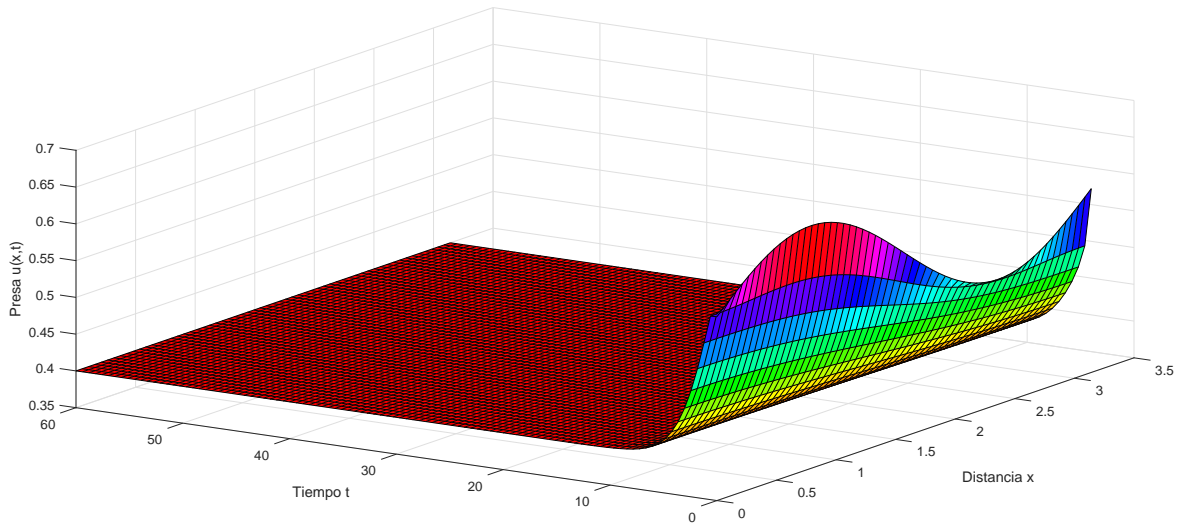


Figura 3.15: Presa. Estado de equilibrio libre de depredadores, aquí  $u_0(x) = 0.6 + 0.08 \sin(2x)$ .

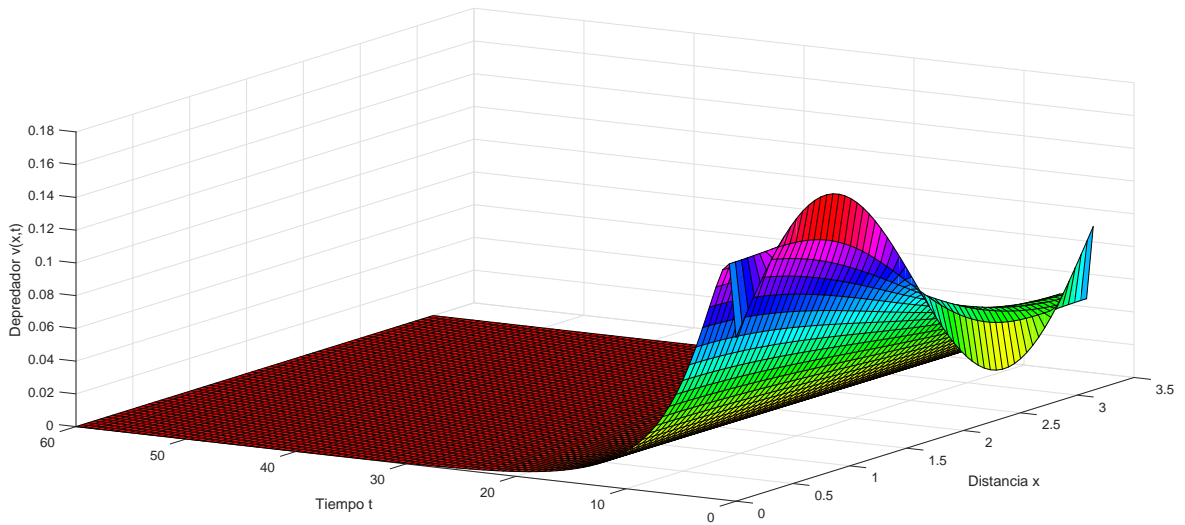


Figura 3.16: Depredador. Estado de equilibrio libre de depredadores, aquí  $v_0(x) = 0.1 + 0.07 \sin(2x)$ .

# Capítulo 4

## Incidencia de la función captura en la dinámica poblacional

En el presente capítulo, comparamos las dinámicas del sistema (3) considerando cada una de las funciones de captura, es decir, determinamos lo simple o compleja que puede resultar la dinámica al incluir cada una de las políticas de captura. En relación a lo anterior, la dinámica del sistema (3) ha sido estudiada modificando la función captura, las cuales se caracterizan por ser funciones no negativas, continuas y acotadas. Originalmente, el artículo de estudio [1], considera la siguiente función, que denotaremos como sigue:

$$H_1(u) = \begin{cases} Eu, & \text{si } 0 \leq u \leq T \\ h, & \text{si } u > T. \end{cases}$$

Luego, se realizó el análisis tomando la siguiente política de captura, que llamaremos:

$$H_2(u) = \frac{hu}{c+u}.$$

Del mismo modo, renombramos a la última función de captura con la que trabajamos:

$$H_3(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \leq T, \\ \frac{h(u-T)}{h+u-T}, & \text{si } u > T. \end{cases}$$

En primer lugar, exponemos las propiedades referentes a la dinámica del sistema (3) que son independientes de la función captura, tales como el Teorema (3) de *Existencia y unicidad de soluciones no negativas*, el cual es válido para todas las políticas de captura que hemos considerado, además, hemos hallado un Región Invariante del sistema (3), como se ve el Teorema (6). Así mismo, el Teorema 2.2(b) de [1] con función de captura  $H_1$ , que menciona las condiciones bajo las que hay extinción tanto de presas como de depredadores, ya que este resultado también se formuló y se probó para las funciones  $H_2$  y  $H_3$ , como lo observemos en el Teorema (4)(a) y en el Teroema (11), respectivamente.



---

Entre tanto, el Teorema 2.2(c), el cual garantiza que las soluciones del sistema (3) son finitas, es decir, que las poblaciones de presas y depredadores permanecen acotadas a medida que transcurre el tiempo, y el Teorema 2.2(d), que exhibe una relación entre los parámetros que implica la extinción de los depredadores, ambos resultados se encuentran en [1], considerando la función  $H_1$ ; igualmente, este par de resultados se lograron formular y demostrar para  $H_2$ , como se observa en los Teoremas (4)(b) y (4)(c).

Otro resultado que comparten las funciones  $H_1$  y  $H_2$  es el Teorema 2.3 en [1], el cual indica que existe un valor umbral para los depredadores  $v_0^*$ , que si es superado por el número de depredadores iniciales  $v_0(x)$ , el sistema (3) tendrá extinción de presas y depredadores, dicho resultado lo encontramos en el Teorema (5).

En cuanto a los estados de equilibrio constantes, tenemos que sin importar la función de captura que consideremos, el sistema (3) siempre tiene la solución trivial  $E_0^* = (0, 0)$ . Además, no tiene estados de equilibrio constantes libres de presas. Sin embargo, el sistema (3) tiene seis estados de equilibrio constantes positivos libres de depredadores, si se considera la función de captura  $H_1$ , tiene tres si tomamos las funciones  $H_2$  y con  $H_3$  hay uno, dos o tres, esto dependiendo de los valores de los parámetros. Además, al igual que el sistema (3) con la función  $H_1$ , obtuvimos con la función  $H_2$ , un único estado de equilibrio constante positivo, el cual hemos denotado como  $E^*$ , como se evidencia en el Teorema (7).

Referente a la estabilidad, tenemos que  $E_0^* = (0, 0)$  siempre estable cuando consideramos las funciones de captura  $H_1$  y  $H_2$ . Del mismo modo, que el Teorema 3.4 en [1], donde toman la función  $H_1$ , logramos establecer condiciones para la estabilidad e inestabilidad de  $E^* = (\eta, v_\eta)$  como lo vemos en el Teorema (10).

Así, la dinámica del sistema (3) se hace más compleja y se enriquece, cuando consideramos una política de cosecha con un umbral de captura, dado al número estados de equilibrio que aparecen, por otra parte, cuando consideramos una cosecha racional, la dinámica se hace un poco más simple. Con relación a la estabilidad del estado de equilibrio constante positivo, observamos que la relación de los parámetros es similar para las funciones de captura  $H_1$  y  $H_2$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo, analizamos un modelo difusivo presa-depredador con efecto Allee fuerte y políticas de captura sobre las presas. Se proporcionan algunos resultados teóricos para mostrar el impacto de la captura en el sistema. Específicamente,

1. En cualquiera de las siguientes condiciones, ambas especies están destinadas a la extinción.
  - a) Valor inicial de presas pequeño, es decir,  $u_0(x) < \underline{b}$  ver Teorema (4)(a).
  - b) Una gran cantidad de depredadores, como vemos en el Teorema (5).
2. El sistema (3) posee de cero a tres estados de equilibrio constantes libres de depredadores, cuando se considera la política de captura racional  $H_2$ . Con un umbral de captura como en  $H_1$ , tiene de cero a cuatro estados de equilibrio constantes libres de depredadores y de cero a tres con la función  $H_3$ . Por otra parte, para todos los estados de equilibrio constante del sistema (3) con la función  $H_2$ , hemos determinado las condiciones de estabilidad local dependiendo de las restricciones paramétricas.
3. Cuando tenemos el sistema (3) con la función  $H_2$ , mostramos que existe un único estado de equilibrio constante positivo  $E^* = (\eta, v_\eta)$ , al igual que se hace con la función  $H_1$ . Del mismo modo, determinamos condiciones para la estabilidad e inestabilidad de dicho estado de equilibrio.
4. La mayoría de modelos de presa-depredador con recolección, solo consideran funciones de captura constantes o lineales, que no son muy realistas. Sin embargo, considerar otras estrategias de captura como lo hemos tratado de hacer con  $H_2$  y  $H_3$  puede ser más complicado, ya que establecer condiciones o valores de los parámetros para garantizar la coexistencia de las especies, a causa de la interacción entre ellas y de la acción de captura, suele ser más complejo. No obstante, es importante estudiar este tipo de políticas de cosecha, ya que por un lado atrae el interés de la industria

---

comercial y de muchas comunidades científicas, incluidas la biología, la ecología y la economía, especialmente debido a preocupaciones como el beneficio, la sobreexplotación y la extinción de una especie que se cosecha. Por otro lado, son un lugar común para la aplicación de varios métodos teóricos y numéricos, en el campo de las ecuaciones diferenciales.

5. El análisis del sistema (3) considerando la función de captura  $H_3$ , presentó dificultad tanto desde el punto de vista de las matemáticas como desde la dinámica, en especial, en el estudio de los estados de equilibrio y su respectiva estabilidad, dado que a la cantidad de parámetros fue difícil hallarlos explícitamente o establecer bajo qué condiciones existían, sin embargo, mediante evidencia numérica mostramos que se tiene de cero a tres estados de equilibrio positivos libre de depredadores y un estado de equilibrio constante positivo, lo cual se encuentra en la Sección 3.2.2.
6. Los procesos de modelación de sistemas presa-depredador, donde una de las especies es objeto de captura, generalmente están orientados a la pesca, no obstante, existe poca información acerca de la aplicación de estos modelos a un ecosistema en particular; por ejemplo, en el artículo *Predictions from simple predator-prey theory about impacts of harvesting forage fishes* [24]; hablan de los peces forrajeros, que son una especie de peces pequeños los cuales son consumidos por depredadores de una posición superior en las redes tróficas como los piscívoros (animal carnívoro que se alimenta de peces) [25]. Aquí los modelos tratan de hacer predicciones sobre el impacto de la captura de peces forrajeros en los piscívoros, esperando que la demanda de captura crezca tanto para la alimentación de las personas como para la alimentación en la agricultura y la acuicultura [26], sin embargo, como ya habíamos mencionado, la falta de evidencia de campo ha llevado a un uso extensivo de modelos de ecosistemas y datos de redes alimentarias para predecir impactos [27].

Así mismo, en el artículo *The consequences of balanced harvesting of fish communities* [28], mencionan el interés de estudiar los patrones de explotación para mejorar los procesos de pesca y la conservación simultáneamente, ambos objetivos pueden lograrse y para ello se ha sugerido que las especies y los individuos se exploten en relación con su productividad natural, lo que se denominada captura equilibrada [29], para así minimizar los efectos de la pesca en las comunidades y ecosistemas de peces marinos. Por ejemplo, en muchos países ricos, la demanda de peces pequeños para consumo humano es baja, así en dichos países la captura equilibrada puede resultar en un cambio hacia la pesca industrial para la producción de harina y aceite de pescado o para proporcionar alimento a la industria de la acuicultura, al mismo tiempo que se reduce el rendimiento de pescado de alto valor capturado en el medio silvestre para el consumo humano. En los países en desarrollo dominados por la pesca artesanal, y donde los consumidores están dispuestos a comprar y utilizar peces pequeños para el consumo

---

humano, la captura equilibrada puede ser más fácil de implementar [30].

Otro caso más detallado, donde los humanos interactúan con poblaciones de animales, recolectando una de las especies, es nombrado en [31], el cual es un problema de gran importancia práctica, dado que se estudia la explotación exitosa y sostenible o sobreexplotación extrema, como por ejemplo, en la pesca de acceso abierto, la cual es una pesquería no reglamentada en la que los pescadores son libres de entrar y salir cuando deseen; un caso de este tipo es la pesquería de Pescado blanco (*Coregonus clupeaformis*, ver figura 5.1), en Lesser Slave Lake, Canadá [32]. En este caso, el nivel de equilibrio está determinado principalmente por factores económicos más que biológicos, no es sorprendente que una pesquería de acceso abierto pueda exhibir una sobrepesca biológica.

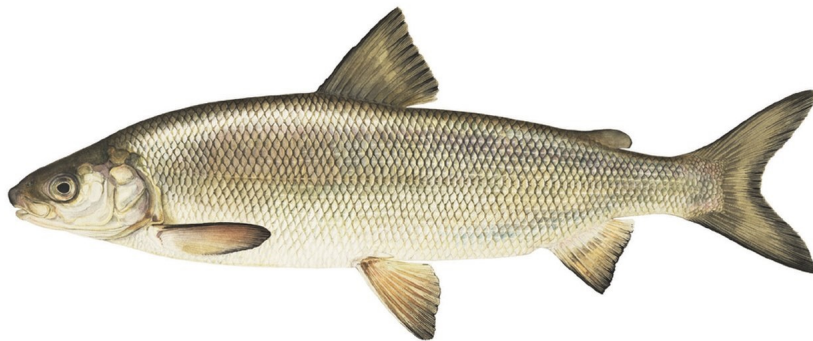


Figura 5.1: Pescado blanco (*Coregonus clupeaformis*). Tomada de [34].

Del mismo modo en [31], mencionan otro ejemplo opuesto al anterior, donde una pesquería puede ser propiedad y estar regulada por un solo individuo. Aquí el único motivo de esta persona es maximizar su beneficio (a largo plazo), deseando controlar el esfuerzo de pesca, para maximizar la renta económica neta descontada durante el período de propiedad  $T$ . Por lo general, habrá un esfuerzo de pesca máximo que el propietario puede aplicar, limitado, por ejemplo, por el número de barcos de pesca.

Para finalizar, es importante mencionar, que pese a la información teórica que existe en la literatura acerca de modelos presa-depredador, donde una de las especies está sujeta a una política de captura, es difícil encontrar casos concretos, donde se apliquen estos modelos a un ecosistema en particular, es decir, no aparecen las experimentaciones aplicadas a ecosistemas, donde el hombre este afectando alguna especie dado a la captura, lo cual es de suma importancia, no solo desde el punto de vista matemático, sino desde otras ciencias, tales como la ecología, biología, economía, sin embargo, esto requiere un trabajo más profundo e interdisciplinar.

7. Por último, cabe destacar que aún existe una gran cantidad de estudios por hacer en este modelo y que pueden tratarse en trabajos posteriores, tales como, modificar la

---

respuesta funcional o el tipo de efecto Allee. También sería interesante considerar una política de captura sobre los depredadores o en ambas especies (presas y depredadores). Así mismo, otro problema de interés matemático, es definir funciones de captura de acuerdo a una característica de la especie, lo que implica que la política de cosecha no solo sea función de la densidad poblacional, es decir, se hace una captura selectiva, donde solo se permite capturar si la población que se extrae no causa un impacto negativo en el ecosistema; como se menciona en [33], donde se habla de la cosecha dependiente de la edad, esto es, se considera una población estructurada por edad, en la que se captura una fracción de la población, por ejemplo, en la pesca, tratar de proteger a los peces juveniles de la captura.

# Apéndice A

## Conceptos biológicos

A continuación se introducirán algunos de los términos biológicos más usados en ecología. Los cuales fueron tomados de [19].

- **Ecología:** La ciencia que trata las interacciones de los organismos y sus ambientes.
- **Población:** Grupo de organismos, del mismo tipo (especie), que viven en un área específica.
- **Densidad de población:** Número de organismos por unidad de área.
- **Tasa de natalidad:** Porcentaje de nuevos individuos que se agregan a la población.
- **Tasa de mortalidad:** Porcentaje de individuos que mueren en una población.
- **Migración:** Movimientos de individuos dentro de la población. La inmigración corresponde a la entrada de nuevos individuos a la población y la emigración a la salida de individuos. Esta característica confiere a la población la propiedad de dispersión.
- **Potencial biótico(o tasa de crecimiento intrínseca de la población):** Capacidad de los organismos para reproducirse bajo condiciones óptimas.
- **Depredación:** Un tipo de interacción de dos especies en la cual una de ellas (la depredadora) ataca y mata a las otras especies (la presa).
- **Cooperación:** Un tipo de interacción de dos poblaciones donde ambas se benefician; la interacción tiene carácter optativo para cada una de las dos especies.
- **Mutualismo:** Un tipo de interacción de dos poblaciones en la que cada una de las poblaciones se beneficia, siendo dependientes de esta relación.
- **Competencia:** Un tipo de interacción de dos poblaciones en la cual ambas se disputan el mismo recurso limitado.

- **Nivel trófico:** Posición en la cadena alimenticia.
- **Ley del diez por ciento (o regla del diezmo ecológico):** Establece que los organismos únicamente pueden capturar aproximadamente el 10 % de la energía procedente de un nivel trófico.
- **Capacidad de carga:** La capacidad de un medio particular para mantener la vida.
- **Dinámica de poblaciones:** Toda población está constantemente bajo el efecto de factores (externos o internos) que tienden a hacer aumentar o disminuir, o a mantener en equilibrio el número de individuos de la población . Debido a esto los integrantes de cada población cambian con el tiempo, cambiando también la estructura y composición de la población. La dinámica de poblaciones trata de describir y cuantificar estos cambios que continuamente ocurren en la población, esto mediante modelos poblacionales.

# Apéndice B

## Simulación en MATLAB

La versión de MATLAB que se usó para simulación de los estados de equilibrio fue *MATLAB-R2019b*, en un computador con las siguientes características:

- **Marca:** Asus
- **Modelo:** X441U
- **Sistema operativo:** Windows 10 Pro
- **Procesador:** Inter(R) Core(TM) i3 6006U CPU @ 2.00GHz 1.99GHz
- **Memoria RAM:** 4,00 GB

A continuación, encontrarán el código:

```
m = 0;
x = linspace(0,pi,50);
t = linspace(0,40,100);

sol = pdepe(m,@pdex4pde,@pdex4ic,@pdex4bc,x,t);
u1 = sol(:,:,1);
u2 = sol(:,:,2);

figure;
colormap(jet);
surf(x,t,u1);
title('u(x,t)');
xlabel('Distancia x');
ylabel('Tiempo t');
```



---

```

figure;
colormap(jet);
surf(x,t,u2);
title('v(x,t)');
xlabel('Distancia x');
ylabel('Tiempo t');
% A continuación, consideremos un caso particular, donde damos valores a los parámetros
y a los datos iniciales.
function [c,f,s] = pdex4pde(x,t,u,DuDx)
d1=0.2;
d2=0.3;
c = [1; 1];
f = [d1; d2] .* DuDx;
r=4;
b=0.1;
k=0.9;
n=0.63;
h=0.21;
F1 = r*u(1)*(1-u(1))*(u(1)-b)/(u(1)+k)-u(1)*u(2)-h*u(1)/(u(1)+k);
F2 = u(2)*(u(1)-n);
s = [F1; F2];

function u0 = pdex4ic(x)
u0 = [0.5+0.04*sin(x); 0.4+0.03*sin(x)];

function [pl,ql,pr,qr] = pdex4bc(xl,ul,xr,ur,t) pl = [0; 0];
ql = [1; 1];
pr = [0; 0];
qr = [1; 1];

```

# Bibliografía

- [1] Wu, Daiyong Zhao, Hongyong Yuan, Yuan, *Complex dynamics of a diffusive predator-prey model with strong Allee effect and threshold harvesting*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **469** (2019), 982-1014.
- [2] J. F. Reyes, *Sobre la dinámica de algunos modelos depredador-presa tipo Leslie con respuesta funcional no monótona y efecto Allee en las presas*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, 2017.
- [3] Bhattacharya, Souvik Martcheva, Maia Li, Xue Zhi, *A predator-prey-disease model with immune response in infected prey*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **411** (2014), 297-313.
- [4] Walters, Carl Christensen, Villy Fulton, Beth Smith, Anthony D.M. Hilborn, Ray, *Predictions from simple predator-prey theory about impacts of harvesting forage fishes*, Ecological Modelling **337** (2016), 272-280.
- [5] Rebaza, Jorge, *Dynamics of prey threshold harvesting and refuge*, Journal of Computational and Applied Mathematics **236** (2012), 1743-1752.
- [6] Boukal, David S. Sabelis, Maurice W. Berc, Luděk, *How predator functional responses and Allee effects in prey affect the paradox of enrichment and population collapses*, Theoretical Population Biology **72** (2007), 136-147.
- [7] A.D. Bazykin, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, World Scientific Series on Nonlinear Science **11** (1998).
- [8] Alikakos, Nicholas D., *An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations*, Journal of Differential Equations **33** (1979), 201-225.
- [9] C.V. Pao, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press (1992).
- [10] S Salsa, *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*, Springer International Publishing (2008).

- 
- [11] V.I. Burenkov, *Sobolev spaces on domains*, Teubner-Texte zur Mathematik, 137. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH (1998).
- [12] Alikakos, Nicholas D., *An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations*, Journal of Differential Equations **33** (1979), 201-225.
- [13] Courchamp, Franck Clutton-Brock, Tim Grenfell, *Inverse density dependence and the Allee effect*, Trends in Ecology and Evolution **14** (1999), 405-410.
- [14] McCarthy, M. A., *The Allee effect, finding mates and theoretical models*, Ecological Modelling **103** (1997), 99-102.
- [15] F. Courchamp, L. Berec, J. Gascoigne., *Allee Effects in Ecology and Conservation*, Biological Conservation **142** (2009), 1557.
- [16] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (1998).
- [17] M. T. Anacona, *Dinámica de un sistema difusivo presa-depredador con efecto Allee fuerte y respuesta funcional tipo Holling-II*, Trabajo de grado, Universidad del Cauca, 2020.
- [18] A. C. Tunubalá, *Dinámica compleja inducida por el efecto Allee en un modelo presa-depredador*, Trabajo de grado, Universidad del Cauca, 2019.
- [19] J. Trujillo, *Dinámica de un sistema presa-depredador cuyo modelo considera el Efecto Allee*, Trabajo de grado, Universidad del Cauca, 2016.
- [20] Huang, Jicai Gong, Yijun Ruan, Shigui, *Bifurcation analysis in a predator-prey model with constant-yield predator harvesting*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B **18** (2013), 2101-2121.
- [21] Xiao, Dongmei Li, Wenxia Han, Maoan, *Dynamics in a ratio-dependent predator-prey model with predator harvesting*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **324** (2006), 14-29.
- [22] Leard Benjamin, Lewis Catherine, Rebaza Jorge, *Dynamics of ratio-dependent predator-prey models with nonconstant harvesting*, Dynamical Systems Series S **1** (2008), 303-315.
- [23] Dan Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1981).
- [24] C. Walters, V. Christensen, B. Fulton, *Predictions from simple predator-prey theory about impacts of harvesting forage fishes*, Ecol. Model. **337** (2016), 272-280.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [25] Cury, P.M., Boyd, I.L., Bonhommeau, S., Anker-Nilssen, T., Crawford, R.J.M., *Global seabird response to forage fish depletion—one-third for the birds*, *Science* **334** (2012), 1703–1706.
- [26] Salcido-Guevara, L.A., Arreguin-Sanchez, F., *Effects of biomass changes in the supply-demand balance of energy in aquatic food webs*, *Ecol. Model.* **276** (2014), 654–679.
- [27] Smith, A.D.M., Brown, C.J., Bulman, C.M., Fulton, E.A., Johnson, P., Kaplan, I.C., *Impacts of fishing low-trophic level species on marine ecosystems*, *Science* **333** (2011), 1147–1150.
- [28] Jacobsen Nis S., Gislason Henrik and Andersen Ken H., *The consequences of balanced harvesting of fish communities*, *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* **281** (2014).
- [29] Garcia SM et al., *Reconsidering the consequences of selective fisheries*, *Science* **335** (2012), 1045–1047.
- [30] Jul-Larsen E., *Management, co-management or no management? Major dilemmas in southern African freshwater fisheries 2: case studies*, *FAO Fisheries Technical Paper*. Rome, Italy: Food and Agriculture Organization of the United Nations (2003).
- [31] Mark Kot, *Elements of Mathematical Ecology*, Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York (2001).
- [32] Bell, G., Handford, P., and Dietz, C., *Dynamics of an exploited population of Lake Whitefish (*Coregonus clupeaformis*)*, *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, **34** (1977), 942-953.
- [33] Sanchez, D. A., *Linear age-dependent population growth with harvesting*, *Bulletin of Mathematical Biology*, **40** (1978), 377-385.
- [34] *Coregonus clupeaformis*, <https://stringfixer.com/es/Gangfisch>.