

**DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN
INSTRUMENTO DE MEDIDA INERCIAL
PARA LA DETERMINACIÓN DE LA
ACTITUD/ORIENTACIÓN
(ATTITUDE DETERMINATION)
DE UN PICOSATÉLITE**

**KARIN CORREA ARANA
FABIAN HERNANDO VELASCO CIFUENTES**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE INGENIERÍA FÍSICA
POPAYÁN
2010**

**DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN
INSTRUMENTO DE MEDIDA INERCIAL
PARA LA DETERMINACIÓN DE LA
ACTITUD/ORIENTACIÓN
(ATTITUDE DETERMINATION)
DE UN PICOSATÉLITE**

**KARIN CORREA ARANA
FABIAN HERNANDO VELASCO CIFUENTES**

**Trabajo de Grado
Presentado como requisito parcial para optar al título de Ingeniero Físico**

**Director
ING. MARIO ANDRES CORDOBA GONZALEZ**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE INGENIERÍA FÍSICA
POPAYÁN
2010**

CONTENIDO

	Pág.
GLOSARIO	2
1. PRESENTACION	3
2. MARCO REFERENCIAL	5
2.1. SATELITES	5
2.1.1. Diseño de un satélite	5
2.1.2. Partes básicas de un satélite	7
• Estructura y sistema de propulsión	7
• Sistema de orientación	7
• Provisión energética	8
• Escudo térmico	9
• Sistema principal de telemetría y seguimiento de ordenes	9
• Modulo de carga útil	9
2.2. UNIDAD DE MEDIDA INERCIAL	9
2.2.1. La navegación inercial	9
2.2.2. El acelerómetro	10
2.2.3. El giróscopo	12
2.2.4. Clasificación de los sistemas de navegación inerciales	15
2.2.5. Plataforma inercial terrestre	16
2.2.6. La estabilidad del sistema inercial	18
2.2.7. Últimos avances	21
2.2.8. La navegación inercial en los viajes espaciales	23

2.3.	PROCESADOR DIGITAL DE SEÑAL (DSP)	23
2.3.1.	Familia dsPIC33FJXXMCMX10	24
2.4.	SEÑALES ALEATORIAS	25
2.4.1.	Probabilidad	26
2.4.2.	Medidas de variables aleatorias	27
2.4.3.	Distribuciones de probabilidad	28
2.5.	FILTROS ANALOGICOS	29
2.5.1.	Introducción	29
2.5.2.	Transformaciones prototipo	30
•	Especificaciones del prototipo pasa bajas	31
2.5.3.	Proceso de diseño	32
2.5.4.	Filtro de Butterworth	32
•	Diseño del filtro Butterworth	34
•	Función de transferencia del prototipo Butterworth	35
2.6.	FILTROS DIGITALES IIR	37
2.6.1.	Proceso de diseño	37
2.6.2.	Técnicas para diseñar filtros digitales	38
2.6.3.	Diseño de filtros IIR	38
•	Equivalencia de sistemas analógicos y digitales	38
•	Proyecciones practicas	40
2.6.4.	Transformación bilineal	40
•	Uso de la transformación bilineal	42
2.7.	FILTRO DE WIENER	43

2.7.1. Optimización con respecto a un parámetro	44
2.7.2. La optimización del problema estacionario- función ponderal aproximada	47
• Solución no causal	49
• Solución causal	52
2.7.3. El problema no estacionario	55
2.7.4. Ortogonalidad	61
2.7.5. Filtro complementario	62
2.7.6. Filtro de Wiener discreto	66
3. METODOLOGIA	69
3.1. Localización	69
3.2. Lista de materiales y Equipos	69
3.2.1. Materiales	69
3.2.2. Equipos	69
3.3. Metodología de trabajo	70
4. RESULTADOS	71
4.1. Diseño y construcción de la plataforma hardware	71
4.2. Caracterización de los sensores	74
4.2.1. Prueba 1. Caracterización de los giróscopos con la plataforma en equilibrio	78
4.2.2. Prueba 2. Caracterización de los giróscopos con la plataforma girando a 33 RPM	78
4.2.3. Prueba 3. Caracterización de los acelerómetros con la plataforma en equilibrio	82
4.3. Diseño e implementación del algoritmo para la determinación de la actitud del pico satélite	83

4.4. Simulación del modelo computacional para la determinación de actitud	105
4.5. Implementación de la Unidad de Medida Inercial	107
5. CONCLUSIONES	111
6. RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS	112
7. BIBLIOGRAFIA	113

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. <i>Transformación del prototipo pasa-bajas a la forma requerida.</i>	Pág. 31
Tabla 2. <i>Comparación de resultados de los ejemplos 4.1, 4.2 y 4.3.</i>	55

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. <i>Diagrama de bloque para un acelerómetro</i>	10
Figura 2. <i>Representación esquemática de un acelerómetro</i>	11
Figura 3. <i>Representación clásica de un giróscopo</i>	12
Figura 4. <i>Modelo esquemático para la ley del giróscopo</i>	14
Figura 5. <i>Giróscopo girando alrededor del eje X</i>	15
Figura 6. <i>Modelo de una plataforma inercial terrestre</i>	17
Figura 7. <i>Sistema de referencia móvil para una nave orbitando con una m velocidad \vec{v}_0</i>	18
Figura 8. <i>Esquema de un giróscopo laser</i>	22
Figura 9. <i>Diseño general para un sistema inercial</i>	23
Figura 10. <i>Realizaciones de un proceso determinista y de uno estocástico.</i>	26
Figura 11. <i>Las distribuciones de probabilidad uniforme y normal.</i>	28
Figura 12. <i>Terminología de los filtros.</i>	29
Figura 13. <i>Transformación pasa-bajas a pasa-bajas.</i>	31
Figura 14. <i>Transformaciones pasa-bajas a pasa-altas.</i>	31
Figura 15. <i>Filtro pasa-bajas Butterworth.</i>	33
Figura 16. <i>Los polos de un filtro de Butterworth se encuentran sobre un círculo.</i>	36
Figura 17. <i>Efecto de la envolvente de la transformación bilineal.</i>	41
Figura 18. <i>Relación de envolvente $\omega = C \tan(0.5\Omega)$ para varias opciones de C.</i>	42
Figura 19. <i>Densidad de espectros de la señal y el ruido.</i>	44

Figura 20. <i>Problema de optimización del filtro.</i>	44
Figura 21. <i>Problema del filtro Wiener.</i>	46
Figura 22. <i>Funciones ponderales óptima y perturbada.</i>	49
Figura 23. <i>Filtro que pondera las funciones para óptimo no-casual y parámetro-optimizado casual filtro.</i>	51
Figura 24. <i>Diagrama en bloques para el problema no estacionario.</i>	56
Figura 25. <i>Filtro de Wiener general para dos entradas.</i>	62
Figura 26. <i>Filtro Complementario.</i>	62
Figura 27. <i>Filtro de Wiener con dos entradas.</i>	64
Figura 28. <i>Filtro Complementario Conceptual que combinar señales de un tacómetro y un acelerómetro.</i>	64
Figura 29. <i>Filtro Complementario simplificado para combinar señales de un tacómetro y un acelerómetro.</i>	65
Figura 30. <i>Situación de medidas discretas.</i>	66
Figura 31. <i>Diseño hardware de la unidad de medida inercial.</i>	73
Figura 32. <i>Disposición de los sensores de acuerdo a los ejes ligados al cuerpo, acondicionadores de señal y ordenador de la unidad de medida inercial en la plataforma hardware.</i>	74
Figura 33. <i>Diagrama de bloques del sistema de adquisición de datos implementado para cada señal.</i>	75
Figura 34. <i>Esquema de recepción de señales de los acelerómetros, giróscopos y temperatura de los giróscopos en labView.</i>	76
Figura 35. <i>Respuesta ideal del giróscopo ADXRS300 en el rango de operación de $\pm 300^\circ/s$.</i>	77
Figura 36. <i>Respuesta ideal del giróscopo ADXRS300 en el rango de operación de $\pm 198^\circ/s$</i>	79
Figura 37. <i>Comportamiento experimental del giróscopo en X en un rango $\pm 198^\circ/s$ (curva negra) y linealización de la curva experimental (roja).</i>	80
Figura 38. <i>Comportamiento experimental del giróscopo en Y en un rango</i>	81

± 198 °/s (curva negra) y linealización de la curva experimental (roja).

Figura 39. *Comportamiento experimental del giróscopo en Z en un rango ± 198 °/s (curva negra) y linealización de la curva experimental (roja).* **82**

Figura 40. *Diagrama de bloques para la estimación de un ángulo de orientación utilizando la información brindada por el giróscopo y el acelerómetro.* **84**

Figura 41. *Respuesta del filtro pasa bajas para la señal proveniente del acelerómetro.* **87**

Figura 42. *Respuesta del filtro pasa altas para la señal proveniente del giróscopo.* **88**

Figura 43. *Ambiente de desarrollo de los algoritmos para la determinación de la actitud.* **89**

Figura 44. *Interfaz desarrollada en Labview para la simulación de la actitud.* **105**

Figura 45. *Esquema general de la fusión de los diseños hardware y software.* **107**

Figura 46. *Estimación del ángulo de orientación en Roll.* **108**

Figura 47. *Estimación del ángulo de orientación en Pitch.* **109**

Figura 48. *Estimación del ángulo de orientación en Yaw.* **109**

AGRADECIMIENTOS

A Dios, a nuestras familias, nuestros profesores y todos aquellos que nos apoyaron queremos agradecerles por ayudarnos a subir un nuevo escalón en el camino de la vida y por brindarnos el mejor de los tesoros “el conocimiento”.

GLOSARIO.

ACTITUD. *Orientación de un cuerpo en 3D con respecto a un sistema de referencia.*

DSP. *Procesador digital de señal.*

DTFT. *Transformada discreta de Fourier para espectros periódicos.*

IMU. *Unidad de medida inercial.*

Ksps. *Miles de muestras por segundo.*

MIPS. *Millones de instrucciones por segundo.*

Msp. *Millones de muestras por segundo.*

1. PRESENTACIÓN

Los satélites son un invento cuya enorme utilidad ha sorprendido a sus propios promotores, lo demuestra la existencia de cientos de ellos girando sobre nuestro planeta y una creciente demanda de sus servicios. Estos vehículos son diseñados como un ensamblaje de instrumentos situados en una plataforma espacial. Los satélites posibilitan la obtención de un mejor punto de vista para observar e investigar nuestro planeta, así como para mirar hacia al cosmos sin la interposición de la atmósfera.

Un satélite mínimamente equipado necesita saber en todo momento *hacia donde está orientado para obrar en consecuencia*. Esto implica que el satélite debe poseer un **módulo encargado de la determinación de actitud/orientación**, que esté atento a los efectos producidos por las perturbaciones externas (gravedad lunar y solar, viento solar, etc.). Estos efectos después de ser evaluados por la IMU deben ser corregidos si suponen un cambio en la orientación del satélite. Dicha corrección es realizada por el módulo de control de actitud que opera bajo los datos suministrados por la unidad de medida inercial.

Este proyecto pretende fortalecer el estudio del sistema modular de actitud/orientación presente en un pico/micro satélite ya que con este tipo de avances se posibilita el diseño y construcción de vehículos espaciales con un mejor desempeño y autonomía. Es de suma importancia resaltar que el diseño e implementación de estos dispositivos (IMU) es de menor costo con referencia a los módulos ofrecidos por empresas extranjeras, viéndose fortalecida la posibilidad de recursos para la construcción de instrumentos encargados de sensar la actitud, realizados en nuestro país.

Los principales objetivos de este proyecto son:

- Diseñar y construir la plataforma hardware del sistema de medición inercial, lo cual involucra la selección de transductores, acondicionadores de señal analógica, tipo de procesador embebido (DSP o FPGA) y los protocolos de comunicación.

- Diseñar e implementar el algoritmo para la determinación de actitud/orientación en un sistema espacial (Pico satélite) de órbita baja LEO, basado en las técnicas strap-down y los filtros complementarios.
- Simular el modelo computacional de determinación de actitud/orientación para la unidad de medida inercial.
- Implementar la unidad de medida inercial integrando los sistemas hardware y software.

Mediante este trabajo se logró: “El diseño e implementación de una unidad de Medida Inercial (IMU) con la cual se puede sensar la actitud/orientación de un pico-satélite”.

A continuación se muestra el orden de los siguientes capítulos con la finalidad de que el lector adquiera información sobre este producto.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO.

CAPITULO 3. METODOLOGÍA.

CAPITULO 4. RESULTADOS OBTENIDOS.

CAPITULO 5. CONCLUSIONES.

CAPITULO 6. RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS.

2. MARCO REFERENCIAL

2.1 SATÉLITES

Los satélites, son vehículos artificiales no tripulados que se hallan en órbita alrededor de la Tierra. El satélite artificial es una de las herramientas más útiles que hasta la fecha haya creado el Hombre, cual verdaderos robots capaces de actuar cada vez con mayor autonomía. Ciertamente, donde nosotros tenemos poco que hacer, ellos se desenvuelven a la perfección.

2.1.1 Diseño de un satélite.

El diseño de los satélites ha sufrido una espectacular evolución desde los años cincuenta hasta la actualidad. A pesar de todo, unos y otros comparten la misma filosofía y la mayor parte de los elementos que los caracterizan. Que el paso del tiempo nos haya proporcionado instrumentos más precisos, sistemas de provisión eléctrica más potentes o componentes de menor peso, no significa que en su esencia hayan cambiado mucho. La astronáutica es aún una ciencia demasiado joven.

En ingeniería de satélites, como en cualquier otra área de la astronáutica, confluyen múltiples aspectos tales como: instrumentación, materiales, determinación de orientación y posición entre otros. No sólo se trata de construir una máquina, sino también de conseguir que sea capaz de resistir los rigores, y sobre todo, de funcionar en el hostil medio ambiente del espacio.

No es posible construir un vehículo para funcionamiento indefinido. Normalmente se elige una vida útil mínima y se intenta garantizar que todos los componentes puedan cumplir con ella. No es posible (en general) acudir junto a un satélite para repararlo, a menos que su pérdida sea aún más costosa, de modo que hay que asegurarse de que nada falle durante un tiempo preestablecido. Esto se consigue mediante la prueba intensiva de sus piezas en tierra (por separado y funcionando en conjunto), intentando simular las condiciones que se encuentran en órbita. Nunca como aquí es tan importante el control de calidad en la fabricación: de nada sirve que todo esté a punto si una pequeña pieza puede impedir con su fallo la buena actuación del resto. Para minimizar esta posibilidad, los ingenieros han aprendido a innovar, pero también a mejorar y hacer evolucionar aquello que ya funciona bien, si es posible duplicando y triplicando los sistemas más esenciales (transmisores, ordenador de a bordo, etc.). Incluso así, los satélites pueden tener puntos débiles ocultos antes del lanzamiento, sobre todo en el caso de nuevos diseños. Las equivocaciones no son frecuentes, pero ocurren y son enormemente costosas.

Plataforma y carga útil son los elementos principales de todo satélite. La primera es la estructura que permite su propio funcionamiento y el de los instrumentos. La carga útil o “de pago” es aquella que se instala sobre la plataforma para llevar a cabo la misión. Si bien las plataformas son más o menos parecidas entre los diferentes vehículos (poseen casi los mismos elementos), los instrumentos pueden variar mucho entre un satélite y otro. No es lo mismo la carga útil de un satélite científico que otro dedicado al espionaje militar.

Una buena forma de hacer una división inicial en cuanto a tipos de satélite es prestar atención a su manera de estabilizarse en órbita. Aunque con excepciones, los satélites deben ser capaces de *permanecer mínimamente orientados*, al menos respecto a uno de sus ejes. Un vehículo que girara incontrolablemente y sobre sí mismo en cualquier dirección no podría efectuar bien su trabajo y además sería difícil de contactar.

Los dos métodos principales de estabilización son el giro a lo largo de un eje (aprovechando el fenómeno giroscópico) o el control de la orientación en los tres ejes, inmovilizando el satélite y posibilitando una orientación estacionaria en dirección a algún punto concreto del espacio. Ambos sistemas tienen sus ventajas y desventajas, que las compañías y agencias espaciales tratan de explotar para la misión particular a la que estará dedicado el satélite. Así por ejemplo, un vehículo giratorio ocasiona complicaciones cuando queremos fotografiar un objetivo durante un cierto tiempo, ya sea hacia el espacio profundo o sobre la superficie terrestre. Debido a la imposibilidad de dotarlo con unos paneles solares que puedan permanecer orientados hacia el Sol, su cara externa debe ser recubierta totalmente con celdas solares, de modo que en cualquier momento exista una cantidad suficiente de ellas que genere la energía necesaria para su funcionamiento. Si es necesaria mayor energía, la superficie colectora debe aumentar, dificultando su construcción. Al mismo tiempo, este tipo de estabilización es más sencilla y barata, facilita el control térmico y reduce la complejidad del sistema de propulsión autónomo. En cambio, los satélites estabilizados en sus tres ejes pueden acrecentar el tamaño de sus paneles solares sin perjudicar su rendimiento. Son perfectos para tareas de teledetección y toma de imágenes, o para transmisiones hacia un punto determinado del espacio sin que sea necesaria la instalación de antenas giratorias que cancelen el movimiento de rotación de la plataforma. Ahora bien, la estabilidad en sus tres ejes se consigue mediante sistemas giroscópicos complejos y múltiples, un sistema de propulsión muy preciso para cambios de orientación, etc. En definitiva, la elección de un método u otro depende de la tarea que vayamos a encargar a nuestro vehículo. Una vez hecha la selección, ésta precisará el diseño y la fijación de los componentes e instrumentos que podrán viajar a bordo.

Precisamente, la construcción de los satélites, hoy en día, se efectúa de manera modular. La época del desarrollo a medida está ya pasando y, cada vez más, las empresas aeroespaciales ofrecen diseños modulares que son fácilmente adaptables a diversos trabajos. Claro está, los módulos más importantes son los ya mencionados: el módulo de carga útil (los instrumentos) y el módulo de servicio (la plataforma). A menudo, estos dos módulos se construyen por separado e incluso por compañías o centros distintos. Los instrumentos suelen ser proporcionados por universidades y centros de investigación, mientras que la plataforma la diseña el contratista principal, el responsable de integrar el satélite y entregarlo listo al cliente. Los subcontratistas, a su vez, son aquéllos que reciben el encargo de construir piezas individuales y subsistemas (paneles solares, cables, etc.) para el vehículo. Son empresas muy especializadas cuyos productos pueden llegar a instalarse en multitud de satélites diferentes.

Las piezas son además muy costosas dado que no suelen producirse en grandes cantidades. En constante mejora, su rendimiento aumenta día a día, apoyadas por el trabajo de infinidad de ingenieros y técnicos especializados. Éstos no sólo diseñan el elemento mecánico o electrónico, sino que también deben elegir los materiales apropiados y ensayar el producto de forma incansable para garantizar que sabrá resistir el medio ambiente espacial y lo que ello conlleva (diferencias de temperatura, descargas electrostáticas, etc.). [WIESEL]

2.1.2 Partes básicas de un satélite.

El satélite está constituido por varios módulos que permiten un mejor desempeño los módulos básicos para un satélite se muestran a continuación.

- **Estructura y sistemas de propulsión.** El corazón del satélite es su estructura física interna, derivada de técnicas aeronáuticas convencionales. Puede tener muy distintas formas, pero su diseño siempre busca transferir todas las cargas que soportan los subsistemas durante el lanzamiento al punto de conexión con el cohete. Vibraciones y torsiones deben ser minimizadas para no dañar la carga. Para reducir al máximo el peso al despegue, la estructura se construye actualmente en metales muy ligeros y resistentes, o en materiales compuestos.
- **Sistemas de orientación.** Aquí entra en juego el sistema de control orbital y de **orientación** (AOC), el cual está pendiente de las posibles perturbaciones para evaluarlas y corregirlas, logrando que la orientación del satélite sea adecuada. Incluso en posiciones geoestacionarias, los satélites de comunicaciones tienen un movimiento natural norte-sur y este-oeste alrededor de un punto. Para que el vehículo haga bien su trabajo y no desvíe las

emisiones que envía a tierra, es necesario usar el sistema de propulsión auxiliar compensando estos movimientos. Cómo hacerlo y cuándo es la labor del AOC.

De la misma manera, el movimiento orbital alrededor de la Tierra debe ser compensado por un ritmo de rotación sobre un eje de una vuelta por órbita, o de lo contrario el satélite perdería de vista su objetivo constantemente. El AOC también colabora a la hora de saber cómo deberán orientarse los paneles solares, ya que éstos tienen que mirar siempre hacia el Sol, no importa cómo esté orientado el satélite.

El AOC puede ordenar a los propulsores cualquier maniobra de corrección pero lo normal es que actúe sobre medios más económicos, como las ruedas de reacción o las ruedas giratorias de momento angular. Alimentadas eléctricamente, estas ruedas están instaladas de forma estratégica en los diversos ejes del satélite, al girar ayudan a mantener la orientación. Las ruedas de momento suelen girar siempre a más o menos velocidad, en función de las necesidades, en cambio, las ruedas de reacción lo que hacen es cambiar la dirección de su eje. Ambos sistemas obtienen resultados útiles para mantener el satélite perfectamente orientado.

Por supuesto, el AOC debe disponer de una serie de pistas que le ayuden a determinar hacia dónde mira el satélite en cada momento. Para ello usa sensores solares, terrestres e incluso estelares, los cuales usan objetivos predeterminados como puntos de referencia. Los datos obtenidos se procesan en la electrónica del AOC, el cual a su vez envía las órdenes oportunas a los actuadores (ruedas o sistema de propulsión). [COBRASI]

- **Provisión energética.** Otro de los elementos fundamentales de toda plataforma orbital es la provisión energética. Esta provisión debe ser suficiente no sólo para alimentar a sus sistemas sino también para mantener en marcha a los instrumentos de la carga útil (la razón por la cual ha sido lanzado el satélite). El sistema más sencillo es una o varias baterías, cargadas poco antes del despegue y que delimitan con su capacidad la duración de la misión.

Las baterías son sin embargo pesadas y si los requerimientos energéticos son muy grandes no es recomendable utilizarlas como única fuente. Gracias a que nos encontramos cerca del Sol, es posible solucionar el problema mediante celdas solares, cuya eficiencia no deja de crecer.

- **Escudo térmico.** Agredidos por las diferencias térmicas que se encuentran en el espacio, los satélites deben ser construidos para resistir en lo posible esta dificultad adicional. Además, los sistemas electrónicos del vehículo son generadores natos de calor. Los ingenieros han diseñado métodos de control térmico que eliminen la posibilidad de que un cambio de temperaturas pueda impedir el funcionamiento de los componentes.
- **Sistema principal de telemetría, seguimiento y órdenes.** Tanto si su función principal es proporcionar servicios de comunicaciones como si no, todos los satélites deben poseer un medio de contactar con las estaciones de seguimiento y recibir órdenes de sus controladores. La telemetría enviada a tierra lleva la información esencial del funcionamiento de todos los sistemas a bordo. Las emisiones procedentes de la superficie transportan órdenes para realizar el mantenimiento del vehículo, variar la programación de sus subsistemas, etc.

El sistema también recibe la información producida por los instrumentos y la procesa para su envío a la Tierra. Otra función del TTC es colaborar en la determinación de la posición y orientación del satélite.

- **Módulo de carga útil.** Junto al módulo de servicio o plataforma está el módulo de carga útil, donde están instalados los instrumentos que justifican la misión espacial. Podremos encontrar desde cámaras hasta telescopios, pasando por detectores sensibles a fenómenos atmosféricos, antenas y amplificadores para comunicaciones, etc. [SONDERSROD]

2.2 UNIDAD DE MEDIDA INERCIAL.

Este es el componente principal de un sistema de guía inercial utilizado en los vehículos, como aviones, submarinos y satélites. Una IMU trabaja detectando su propio movimiento y la dirección de dichos movimientos usando una combinación de giróscopos y acelerómetros, que permiten que un equipo de orientación realice un seguimiento de su posición mediante un proceso conocido como cálculos deductivos.

2.2.1 La navegación inercial. La base de la navegación inercial reside en las leyes del movimiento postuladas por Isaac Newton, y su aplicación a la navegación data de 1931, cuando Henri Busignies, en París, concibió la posibilidad

de construir un navegador inercial, y finalmente, en 1938, el alemán Boykow registro la patente de un <<instrumento indicador de factores de navegación>>

Los elementos esenciales de la navegación inercial son:

- Los acelerómetros, que miden la aceleración del móvil.
- Los giróscopos, que miden la dirección de estas aceleraciones a lo largo del sistema de coordenadas elegido.
- La plataforma inercial, que sirve de soporte para los acelerómetros y para los giróscopos. En ella se materializa el triedro de referencia.
- Un ordenador que integra la aceleración detectada por los acelerómetros para obtener la velocidad y la distancia recorrida por el móvil en el sistema de coordenadas elegido. [GREWAL, WEILL, ANDREWS]

2.2.2 El acelerómetro. Los acelerómetros son dispositivos capaces de medir aceleraciones y están basados en la medida de la fuerza hacia atrás de una masa conocida. Cuando experimenta una fuerza real hacia adelante, el dispositivo no sólo mide la aceleración a que está sometido, sino que también mide la aceleración gravitatoria debida a la atracción sometida por la superficie terrestre. En realidad son dispositivos sensores transductores a los que se aplican aceleraciones y suministran desplazamientos.



Figura 1. Diagrama de bloque para un acelerómetro.

La Figura 2. Representa un acelerómetro, que esencialmente consiste en un eje con una masa M dotada de un amortiguamiento viscoso B y un muelle k , que sujeta a la masa M . Existe además dos escalas: una y , que marca el desplazamiento de la masa respecto a la caja, y otra x , que marca el desplazamiento de la caja respecto al origen.

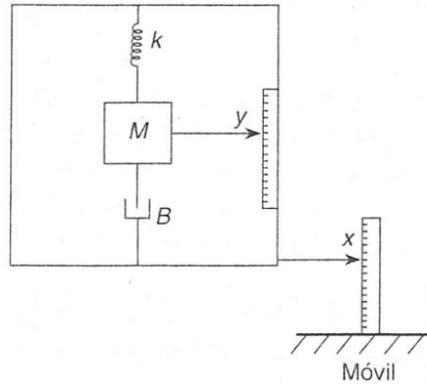


Figura 2. Representación esquemática de un acelerómetro.

Aplicando las ecuaciones fundamentales se tiene:

$$M \frac{d^2}{dt^2} (y - x) + B \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (1)$$

Aplicando la trasformada de Laplace:

$$Ms^2(y - x) + Bsy + ky = 0 \quad (2)$$

$$Y(s)[Ms^2 + BS + K] = Ms^2x(s) = MA(s) \quad (3)$$

$$\frac{Y(s)}{A(s)} = \frac{M}{Ms^2 + Bs + k} = \frac{1}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{k}{M}} \quad (4)$$

Siguiendo los pasos de un sistema de segundo orden tendremos como frecuencia natural: [2]

$$\omega_n^2 = \frac{k}{M}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (5)$$

El coeficiente de amortiguamiento z vendrá [2] dado por:

$$\frac{\frac{B}{M}}{2\sqrt{\frac{k}{M}}} = \frac{B\sqrt{M}}{2M\sqrt{k}} = \frac{B}{2\sqrt{kM}} \quad (6)$$

Y por pulsación propia [2] amortiguada:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{\frac{k}{M}} \sqrt{1 - \frac{B^2}{4Mk}} \quad (7)$$

2.2.3 El giróscopo. Los principios giroscópicos han sido estudiados desde el siglo XVIII. Fue el matemático suizo Leonardo Euler el primero en estudiar el comportamiento de un rotor girando, un siglo más tarde, Foucault los empleó en sus experimentos para demostrar la rotación de la Tierra. El giróscopo se puede definir como un cuerpo de revolución capaz de girar a una gran velocidad alrededor de su eje.

El giróscopo es un dispositivo formado esencialmente por un cuerpo con simetría de rotación que gira alrededor de su eje de simetría. Cuando se somete el giróscopo a un torque que tiende a cambiar la orientación del eje de rotación su comportamiento es aparentemente paradójico ya que el eje de rotación, en lugar de cambiar de dirección como lo haría un cuerpo que no girase, cambia de orientación en una dirección perpendicular a la dirección "intuitiva".

Para poder estudiar los fenómenos giroscópicos hay que dar al rotor una suspensión cardánica completa. Con este objeto se monta su eje Z (Figura 3.) de forma que se apoye sobre un marco (cuna), el cual a su vez puede girar sobre otro eje X perpendicular al anterior. Un giróscopo así dispuesto tiene dos grados de libertad.

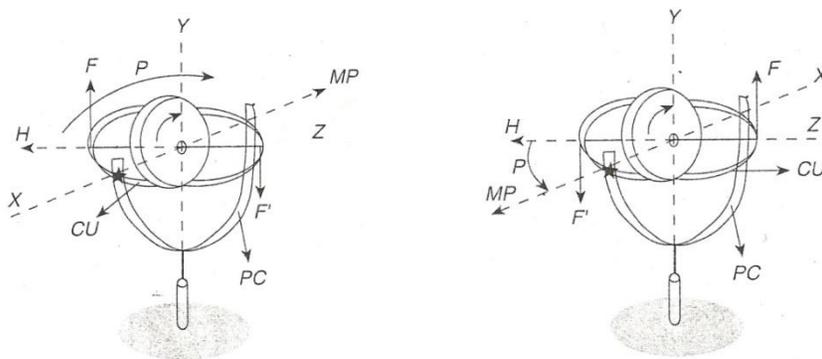


Figura 3. Representación clásica de un giróscopo.

Si el eje X se apoya sobre otro marco (portacuna), el cual a su vez puede girar sobre un tercer eje Y, perpendicular al eje X, entonces el giróscopo tiene tres grados de libertad. En la Figura 3:

\vec{H} = Momento cinético.

CU = Cuna.

PC = Portacuna.

$M\vec{P}$ = Momento del par.

Las propiedades más importantes del giróscopo son:

- La inercia giroscópica (a veces llamada rigidez giroscópica).
- La precesión.

La primera es la propiedad que tiene el giróscopo de mantener su eje de rotación fija en el espacio inercial y su resistencia a cualquier cambio.

La precesión es la propiedad por virtud de la cual el plano de rotación cambia a una velocidad uniforme cuando un par es aplicado. La precesión es siempre en la dirección que hace coincidir el momento cinético \vec{H} (eje de rotación) con el momento del par (el momento cinético va a buscar siempre al momento del par, ver Figura 3).

Foucault aprovechó la primera propiedad del giróscopo para demostrar la rotación de la tierra; su experimento consistió en un giróscopo con su plano de rotación orientado en la dirección del norte magnético de la tierra y observó cómo esta dirección cambiaba a lo largo del transcurso del día. En realidad, lo que ocurría era que la tierra giraba.

La ley del giróscopo se deduce de la ley fundamental de la dinámica y dice que el momento de las fuerzas aplicadas a un sistema es igual a la variación del momento cinético con respecto al tiempo:

$$\vec{M} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{inercial}, \quad \vec{H} = I \cdot \vec{\omega} \quad (8)$$

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{Tierra} + \vec{\omega}_{IT} \times \vec{H}, \quad \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{Tierra} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{móvil} + \vec{\omega} \times \vec{H} \quad (9)$$

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{móvil} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{pc} + \vec{\omega}_{m(pc)} \times \vec{H}, \quad \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{pc} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{cu} + \vec{\omega}_{pc(u)} \times \vec{H} \quad (10)$$

Sustituyendo, tendremos:

$$\vec{M}_{apli} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{cuna} + (\vec{\omega}_{IT} + \vec{\omega}_{Tm} + \vec{\omega}_{m(pc)} + \vec{\omega}_{pc(cu)}) \times \vec{H} \quad (11)$$

$$\vec{\omega}_{I,cu} = \vec{\omega}_{IT} + \vec{\omega}_{Tm} + \vec{\omega}_{m(pc)} + \vec{\omega}_{pc(cu)} \quad (12)$$

$$\vec{M}_{apli} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{cu} + \vec{\omega}_{I,cu} \times \vec{H} \quad (13)$$

La derivada de \vec{H}_{cu} la podemos expresar en función de la tangente, y la normal:

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{cu} = \vec{t}_H \cdot \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right) + \left(\frac{d\vec{t}_H}{dt} \right) \cdot \vec{H} \quad (14)$$

$$\vec{H} = I \cdot \vec{\omega} \quad (15)$$

Si

$$\vec{\omega} = cte$$

Entonces:

$$\vec{H} = cte \quad y \quad \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right) = 0 \quad (15)$$

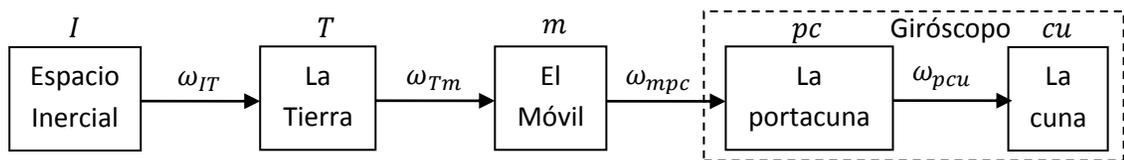


Figura 4. Modelo esquemático para la ley del giróscopo. [1]

La cuna no tiene velocidad relativa respecto a sus ejes, luego:

$$\vec{\omega}_{cu} = \left(\frac{d\vec{t}_H}{dt} \right) = 0 \quad (16)$$

Por lo que se deduce que

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{cu} = 0 \quad (17)$$

Y por lo tanto, finalmente nos quedara que:

$$\vec{M}_{apli} = \vec{\omega}_{Icu} \times \vec{H} \quad (18)$$

Pero, ¿Qué es la ley de precesión del giróscopo? Supongamos un giróscopo que está girando con una velocidad angular $\vec{\omega}_X$ en a su eje X (Figura 5.) y, por lo tanto, exhibe un momento cinético \vec{H}_X ; si aplicamos un momento \vec{M}_Y en el eje Y, entonces el giróscopo en apariencia parece intuitivamente que debería volcarse de izquierda a derecha, pero precesiona de tal forma que el momento cinético \vec{H}_X tiende a buscar el momento del par aplicado \vec{M}_Y (Figura 5.)

$$\vec{M}_Y = \vec{\Omega}_Z \times \vec{H}_X \quad (19)$$

El transductor nos cambia \vec{M}_Y en tensión. [COBRASI]

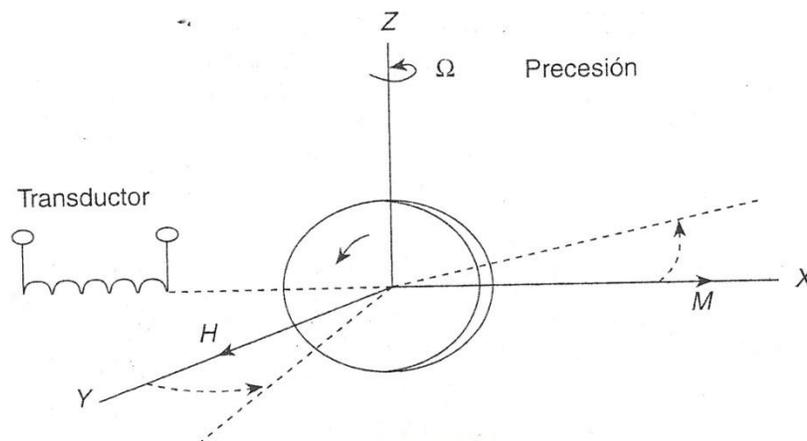


Figura 5. Giróscopo girando alrededor del eje X.

2.2.4 Clasificación de los sistemas de navegación inerciales. La elección de los ejes de referencia utilizados nos permite una clasificación funcional de los diferentes sistemas utilizados:

- ✓ Sistemas referidos a unos ejes absolutos. La plataforma se mantiene orientada hacia unas direcciones fijas en el espacio (X, Y, Z); siendo X la dirección de Aries, Z la dirección del eje de la tierra, el eje Y está en el ecuador y es perpendicular al plano XZ. Aunque estas direcciones no son totalmente invariables (debido a la precesión y a la atenuación de la tierra), su variación es despreciable.

- ✓ Sistemas con plataforma terrestre. En este sistema, la plataforma es siempre perpendicular la eje de la tierra y, por lo tanto, horizontalmente nivelada. Los acelerómetros son montados en la plataforma para medir las aceleraciones a lo largo del Norte y del Este geográfico.
- ✓ Sistemas con los ejes ligados a los ejes del móvil. En este sistema no se usa la plataforma y las aceleraciones son medidas entonces en coordenadas del vehículo; el computador recibe esta información más la actitud del móvil, efectúa el cambio de ejes correspondientes y realiza los mismos cálculos que en los casos anteriores. [DE WECK]

2.2.5 Plataforma inercial terrestre. La plataforma se sujeta al móvil mediante una suspensión cardánica con tres grados de libertad, de forma que sea posible orientarla en las tres direcciones. Los tres posibles errores angulares se pueden detectar a través de dos giróscopos con dos grados de libertad, o tres con un grado de libertad, además, tiene tres servomecanismos para corregir los errores y orientar la plataforma en la dirección deseada.

El problema de la estabilización de la plataforma se consigue mediante un sistema pendular ideado por el alemán Maximiliano Schüller; sin embargo, para que el péndulo se independice de las aceleraciones que actúan sobre su soporte, deberá tener una longitud igual al radio de la tierra; esto se consigue eficazmente mediante un servosistema con una respuesta periódica no amortiguada de periodo igual al péndulo terrestre.

De acuerdo con la figura 6, una inclinación de la plataforma hacia la izquierda origina una fuerza debida a la gravedad que será sentida por el acelerómetro como una fuerza de inercia y cuyo valor para valores pequeños valdrá:

$$mg \operatorname{sen} \phi \approx mg \phi \quad (20)$$

Como podemos ver al desarrollar en serie $\operatorname{sen} \phi$, considerando valores pequeños de ϕ :

$$\operatorname{sen} \phi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\phi^n}{n!} \left(\frac{d^n}{d\phi^n} (\operatorname{sen} \phi)_{\phi=0} \right) = \left(\phi + \frac{\phi^3}{3!} + \dots \right) \quad (21)$$

Para valores de ϕ pequeños:

$$\phi = \frac{e}{R} \quad (22)$$

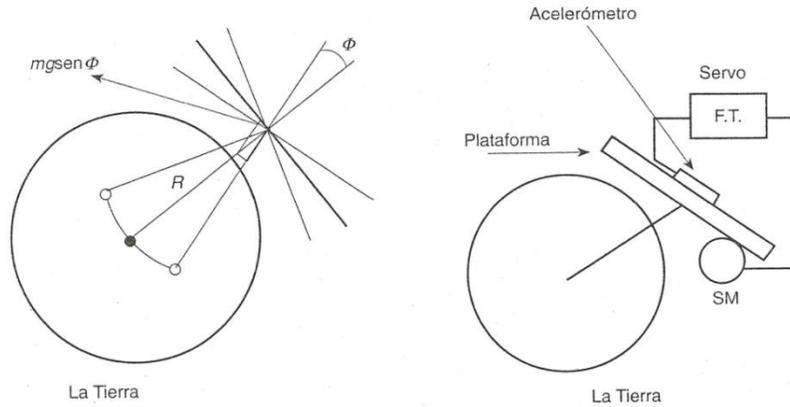


Figura 6. Modelo de una plataforma inercial terrestre.

Se puede deducir de la figura 6:

$$-mg \frac{e}{R} = m \frac{d^2 e}{dt^2} \quad , \quad \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{g}{R} e = 0 \quad (23)$$

Que es la ecuación de un péndulo de longitud igual al radio [3] terrestre y de periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84,4 \text{ Minutos} \quad (24)$$

Aplicando la trasformada de Laplace nos queda:

$$s^2 E(s) + \frac{g}{R} E(s) = 0 \quad , \quad E(s) \left(s^2 + \frac{g}{R} \right) = 0 \quad (25)$$

Luego si

$$\left(s^2 + \frac{g}{R} \right) = 0 \quad (26)$$

$$1 + \frac{g}{Rs^2} = 0 \quad (27)$$

Y por tanto:

$$s^2 = -\frac{g}{R} \quad (28)$$

Que corresponde a un periodo T igual a:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (29)$$

Este periodo corresponde al del péndulo de Schüller, también conocido como sintonía de Schüller. Con este tipo de estabilización, los errores se repiten cíclicamente y están limitados en amplitud. Esta regulación gravitatoria actúa al mismo tiempo que la regulación giroscópica, y aunque esta es más exacta, está afectada de errores acumulativos en el tiempo que pueden ser corregidos cíclicamente con la regulación gravitatoria. [AHRENDT]

2.2.6 La estabilidad del sistema inercial. La estabilidad de un sistema viene determinada por su respuesta a las perturbaciones. Intuitivamente entendemos por sistema estable aquel que permanece en reposo a no ser que sufra una perturbación, a en tal caso, volverá al estado de reposo cuando desaparezca la perturbación. Igualmente, la estabilidad en el sistema inercial viene definida por el requerimiento de que cuando el sistema sufre una perturbación, este debe ser capaz de recuperar el estado anterior a la misma.

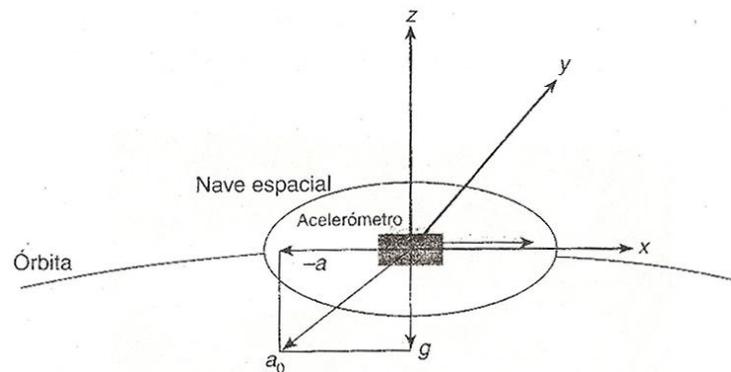


Figura 7. Sistema de referencia móvil para una nave orbitando con una velocidad \vec{v}_0 .

El sistema inercial está sujeto a los errores en los acelerómetros, las vibraciones y la calibración en la plataforma; los errores numéricos cometidos por el ordenador, los errores en la posición y velocidad inicial y los errores cometidos por el campo gravitacional. Para que la navegación inercial sea una técnica fiable, sus errores tienen que ser pequeños o cuando menos oscilar en magnitud.

Supongamos que una nave espacial en órbita circular con una velocidad \vec{v}_0 se encuentra a una distancia \vec{R}_0 del centro de la tierra y el sistema de referencia elegido se mueve con la nave espacial [3]. Los acelerómetros del sistema inercial sentirán la siguiente aceleración debido a la naturaleza no inercial del sistema elegido:

$$\vec{a}_0 = -\frac{GM}{R_0^3}\vec{R}_0 - \left(\frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2}\right)_N - 2\vec{\omega}_0 \times \left(\frac{d\vec{R}_0}{dt}\right)_N - \vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}_0 \times \vec{R}_0 \quad (30)$$

Siendo

$$\vec{\omega}_0 = \vec{\Omega}_a + \vec{\omega}_r, \quad \vec{\omega}_0 = \frac{v_0}{R_0}\vec{j} \quad (31)$$

Dónde:

$\vec{\Omega}_a$ = Rotación de la tierra.

$\vec{\omega}_r$ = Velocidad angular de la nave espacial.

Supongamos ahora que el vector de posición de la nave espacial medido por el sistema de navegación inercial no es \vec{R}_0 , sino que realmente es:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + d\vec{R} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + (R_0 + \delta z)\vec{k} \quad (32)$$

Entonces:

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_N = \delta \dot{x}\vec{i} + \delta \dot{y}\vec{j} + \delta \dot{z}\vec{k} \quad (33)$$

$$\left(\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right)_N = \delta \ddot{x}\vec{i} + \delta \ddot{y}\vec{j} + \delta \ddot{z}\vec{k} \quad (34)$$

La diferencia entre la gravedad real y la medida vendrá dada por:

$$\delta \vec{g} = -GM \left[\frac{\vec{R}_0 + \delta \vec{R}}{|\vec{R}_0 + \delta \vec{R}|^3} - \frac{\vec{R}_0}{R_0^3} \right] \quad (35)$$

Dónde:

$$|\vec{R}_0 + \delta \vec{R}|^3 = (R_0^2 + 2\vec{R}_0 \cdot \delta \vec{R} + \delta R^2)^{-3/2} \approx R_0^{-3} \left(1 + \frac{2\vec{R}_0 \cdot \delta \vec{R}}{R_0^2} + \dots \right)^{-3/2} \approx (36)$$

Aplicando el teorema del binomio al término entre paréntesis y considerando solo los términos de [3] primer orden:

$$\approx R_0^{-3} \left(1 + \frac{3\vec{R}_0 \cdot \delta\vec{R}}{R_0^2} + \dots \right) \quad (37)$$

Sustituyendo en (35), tendremos que

$$\delta\vec{g} = -\frac{GM}{R_0^3} (\delta x i + \delta y j - 2\delta z k) \quad (38)$$

Finalmente, los acelerómetros son también una fuente de error, indicando no la verdadera aceleración \vec{a}_0 , sino $\vec{a}_0 + \delta\vec{a}$; diferenciando la aceleración en la ecuación (30) tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta\vec{a} = & -\delta\vec{g} - \left(\frac{d^2(\vec{R}_0 + \delta\vec{R})}{dt^2} \right)_N - 2\vec{\omega}_0 \times \left(\frac{d(\vec{R}_0 + \delta\vec{R})}{dt} \right)_N - \delta\vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}_0 \times (\vec{R}_0 + \delta\vec{R}) \\ & - \vec{\omega}_0 \times \delta\vec{\omega}_0 \times (\vec{R}_0 + \delta\vec{R}) - \vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}_0 \times \delta\vec{R} \end{aligned} \quad (39)$$

Conocidos los valores de

$$\delta\vec{R}, \delta\vec{g}, \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_N, \left(\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \right)_N, \vec{\omega}_0 \quad (40)$$

Y sustituyendo en la formula anterior, obtendremos las tres ecuaciones que gobiernan la estabilidad de un sistema inercial:

$$\ddot{x} + \left(\frac{GM}{R_0^3} - \frac{v_0^2}{R_0^2} \right) \delta x = -2 \left(\frac{v_0}{R_0} \right) \dot{z} - \delta a_x \quad (41)$$

$$\ddot{y} + \frac{GM}{R_0^3} \delta y = -\delta a_y \quad (42)$$

$$\ddot{z} + \left(\frac{2GM}{R_0^3} - \frac{v_0^2}{R_0^2} \right) \delta z = 2 \left(\frac{v_0}{R_0} \right) \dot{x} - \delta a_z \quad (43)$$

La ecuación (42) es un oscilador armónico forzado, con una frecuencia fundamental

$$\sqrt{\frac{GM}{R_0^3}} \quad (44)$$

Conocida como la frecuencia de Schüller (en la superficie de la Tierra tiene un periodo de 84 minutos), y nos da el error transversal de la trayectoria.

La ecuación (41) gobierna el error en dirección de la trayectoria y será estable si el término entre paréntesis es positivo:

$$v_0 < \left(\frac{GM}{R_0}\right)^{1/2} \quad (45)$$

Es decir, tiene que tener una velocidad inferior a la orbital. El error dirección de la trayectoria esta forzado por el término de Coriolis, que involucra la variación en el error vertical, que es siempre inestable. Para resolver este problema, los vehículos suborbitales, como, por ejemplo, las aeronaves, obtienen esta información por otros medios, como los altímetros. El error en esta dirección oscilara con una frecuencia:

$$f_x = \left(\frac{GM}{R_0^3} - \frac{v_0^2}{R_0^2}\right) \quad (46)$$

Que para casi todos los vehículos coincide con la frecuencia de Schüller. [HOWLEY]

2.2.7 Últimos Avances. Un desarrollo reciente en la navegación inercial es la utilización de un giróscopo laser. La operación de un giróscopo laser depende de uno de los axiomas de la relatividad especial: la luz se propaga en un sistema inercial a una velocidad $c = 2.998 \times 10^8 \text{ cm/s}$, independiente del movimiento de la fuente emisora o del receptor. En el dispositivo de la figura 8, si los dos haces emitidos siguen trayectorias en sentido opuesto: si el dispositivo no gira, la longitud del camino seguido por los dos haces será el mismo; si el dispositivo gira, la longitud del camino recorrido por el haz que gira en contra del dispositivo será más corta que el que gira a favor; como la diferencia es muy pequeña, es utilizado un láser. Como la velocidad de la luz es una constante absoluta, el efecto del movimiento del móvil es que el observador en reposo percibe un desplazamiento en frecuencia debido al efecto Doppler.

Consideremos el caso de un rayo de luz coherente emitido por el tubo de la figura 8. Esta luz será reflejada por los tres espejos, de tal forma que si la plataforma gira en la misma dirección que lo hace el rayo de luz, aumenta la frecuencia, e inversamente, cuando la plataforma gire en sentido contrario. El cambio de

frecuencia se puede medir haciendo pasar un segundo rayo de luz emitido por la misma fuente y siguiendo la misma trayectoria, pero en sentido contrario. Esto lo podemos conseguir haciendo pasar un pequeño porcentaje de luz por uno de los espejos. Uno de los rayos es reflejado por un prisma de tal forma que forme con el otro rayo de luz un pequeño ángulo; el efecto de este pequeño ángulo es generar un espectro de franjas ópticas. Cuando la plataforma gira, la diferencia de frecuencias entre los haces origina un espectro de franjas con una velocidad y dirección proporcionales a la velocidad angular de la plataforma. [WESTER]

Los fotodiodos de la figura 8. Convierten esta información en señales cuya frecuencia y fase relativa son función de la rotación de la plataforma, y su valor es:

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi RL}{\lambda c} \omega \quad (47)$$

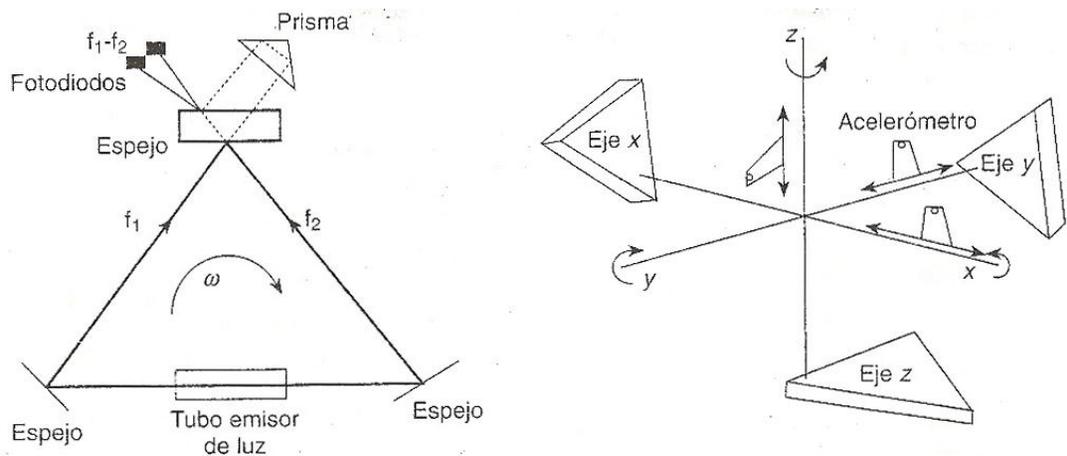


Figura 8. Esquema de un giróscopo laser.

Dónde:

- $\Delta\Phi$ = Desplazamiento de fase entre los dos rayos de luz.
- L = Longitud de una fibra óptica enrollada sobre un cilindro de radio R .
- ω = Velocidad angular de la plataforma.
- λ = Longitud de la onda en el espacio libre.
- c = Velocidad de la luz.

Este fenómeno es conocido como efecto Sagnac y fue descrito por primera vez en 1913. Entre las ventajas más importantes de este tipo de giróscopos cabe reseñar las siguientes:

- No tiene partes móviles.
- No necesita precalentamiento (en unos segundos se puede alcanzar la plena operatividad).
- Insensible a las aceleraciones.
- Alta fiabilidad.

2.2.8 La navegación inercial en los viajes espaciales. En las misiones espaciales en órbitas próximas a la Tierra, en la primera fase del vuelo, hasta que el lanzador pone en órbita la nave espacial, el control de la actitud del lanzador y la navegación corresponde al sistema inercial. Cuando se encuentra en la órbita prefijada, el control de la actitud es realizado por el sistema inercial y los sensores estelares, mientras la función de navegación es realizada desde Tierra por las estaciones de seguimiento. La figura 9 muestra los elementos de un sistema inercial. Este fue el sistema utilizado en los viajes espaciales que llevaron al hombre a la luna.

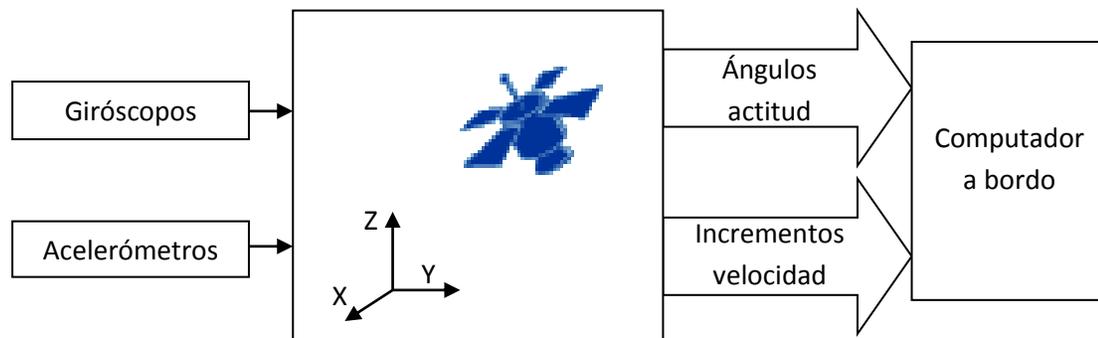


Figura 9. Diseño general para un sistema inercial.

En el universo real, los efectos de la relatividad son grandes y en un viaje interestelar será necesario tenerlo en cuenta. [EGZIABHER]

2.3 PROCESADOR DIGITAL DE SEÑAL (DSP)

Un DSP es un sistema basado en un procesador o microprocesador que posee un juego de instrucciones, un hardware y un software optimizados para aplicaciones que requieran operaciones numéricas a muy alta velocidad.

Debido a esto es especialmente útil para el procesado y representación de señales analógicas en tiempo real: en un sistema que trabaje de esta forma (tiempo real) se reciben muestras, normalmente provenientes de un conversor analógico/digital (ADC).

Se ha dicho que puede trabajar con señales analógicas, pero es un sistema digital, por lo tanto necesitará un conversor analógico/digital a su entrada y digital/analógico en la salida.

Como todo sistema basado en procesador programable necesita una memoria donde almacenar los datos con los que trabajará y el programa que ejecuta.

Si se tiene en cuenta que un DSP puede trabajar con varios datos en paralelo y un diseño e instrucciones específicas para el procesado digital, se puede dar una idea de su enorme potencia para este tipo de aplicaciones. Estas características constituyen la principal diferencia de un DSP y otros tipos de procesadores.

2.3.1 Familia dsPIC33FJXXMCX10.

En este trabajo de grado, donde el consumo de energía del sistema y la frecuencia de trabajo del procesador son variables muy importantes se ha sumado un DSP de la familia *dsPIC33FJXXMCX10* de microchip. Este es un DSP con las siguientes características:

Rango de trabajo.

Operación del procesador hasta 40 MIPS.
Rango de temperatura: -40°C hasta +85°C.
Voltaje de operación 3.3V ($\pm 10\%$).

CPU de Alto Rendimiento.

Arquitectura Harvard modificada.
Conjunto de instrucciones optimizadas para el compilador C.
Registros de 16 bits.
Latencia de 5 ciclos.
Entre otros.

Acceso Directo a Memoria DMA.

8 canales hardware DMA.
La mayoría de los periféricos del dispositivo pueden trabajar con el módulo DMA.

Entradas y salidas digitales.

De uno hasta 85 salidas/entradas digitales.

Entradas Analógicas.

De uno hasta 24 canales análogos.

Memoria Flash y SRAM.

Memoria Flash de Programación hasta de 256 Kbytes.

Memoria de datos SRAM hasta de 30 Kbytes (incluidos 2 Kbytes de la memoria RAM DMA).

Módulos de Comunicación.

Módulos SPI, I²C, UART, ECAN, CAN.

Conversores Análogos a Digital (ADCs).

ADC de 10 bits – 1, 1 Msps.

ADC de 12 bits – 500 Ksps.

2.4 SEÑALES ALEATORIAS.

Las señales comúnmente encontradas se llaman determinísticas o predecibles. Son gobernadas por una representación matemática única que, una vez establecida, nos permite caracterizar por completo la señal en todo tiempo, pasado, presente o futuro. En contraste con esto se encuentra la clase de señales conocidas como **aleatorias** o **estocásticas** cuyo valor preciso no puede predecirse en principio. Subrayemos que solo los valores futuros de una señal aleatoria imponen un problema pues los valores pasados de cualquier señal, aleatoria o de otro tipo, se conoce con exactitud una vez que han ocurrido. La aleatoriedad o incertidumbre en torno a los valores de señales futuras es inherente en muchas situaciones prácticas. De hecho, un grado de incertidumbre es esencial para comunicar información. Cuanto más se observe una señal aleatoria, tanta más información adicional ganaremos y menor resulta la incertidumbre. Entender por completo la naturaleza de señales aleatorias requiere el uso de la teoría de la probabilidad, variables aleatorias y estadísticas.

2.4.1 Probabilidad.

La figura 3.3 muestra el resultado de dos experimentos, cada uno repetidos en idénticas condiciones. El primer experimento siempre da idénticos resultados sin importar cuantas veces se ejecute y produce una señal determinista. Necesitamos ejecutar el experimento solo una vez para predecir que producirá la siguiente, o cualquier otra, ejecución.

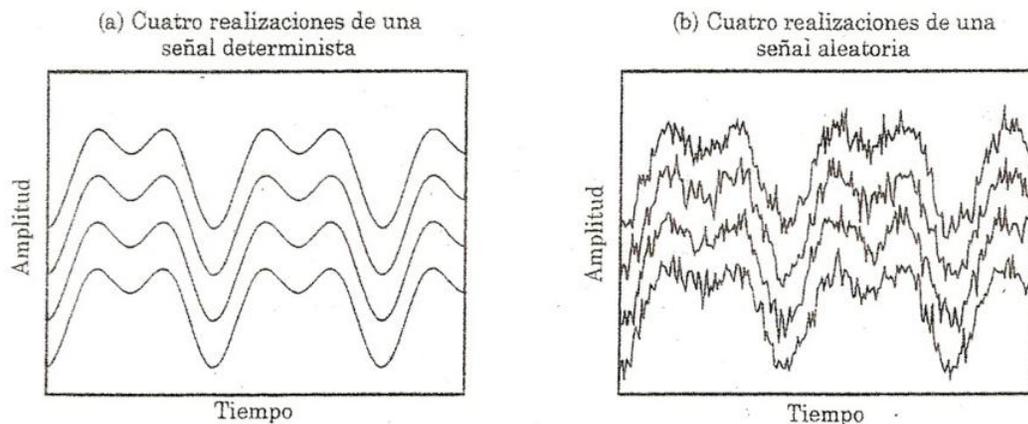


Figura 10. Realizaciones de un proceso determinista y de uno estocástico.

El segundo experimento da un resultado o realización diferente $x(t)$ cada vez que se repite y describe un sistema **estocástico** o aleatorio. Una señal aleatoria o proceso aleatorio $X(t)$ comprende la familia o totalidad de todas las realizaciones obtenidas repitiendo el experimento muchas veces. Cada realización de $x(t)$, una vez obtenida, cesa de ser aleatoria y puede sujetarse a las mismas a las mismas operaciones que utilizamos para las señales deterministas (tales como derivadas, integrales y similares). La aleatoriedad de la señal surge del hecho de que una realización no brinda ninguna clave en cuanto a lo que la siguiente, o cualquier otra, realización podría originar. En un instante dado t , cada realización de una señal aleatoria puede asumir un valor diferente, y la colección de tales valores define una **variable aleatoria**. Algunos valores son más factibles de ocurrir, o más probables, que otros. El concepto de probabilidad se une a la idea de repetir un experimento un gran número de veces para estimar tal probabilidad. De este modo, si el valor 2 voltios ocurre 600 veces en 1000 ejecuciones, decimos que la probabilidad de ocurrencia de 2 voltios es 0,6.

La **probabilidad de un evento** A denotada por $Pr(A)$, es la proporción entre los resultados exitosos con el número (muy grande) de veces que el experimento se

ejecuta y es una fracción entre 0 y 1, ya que el número de resultados exitosos no puede ser mayor que el número de ejecuciones. Cuando mayor sea la probabilidad $Pr(A)$, tanto mayor será la posibilidad de que ocurra el evento A. Para caracterizar por completo la variable aleatoria, debemos responder dos preguntas:

1. ¿Cuál es el intervalo de todos los valores posibles (no aleatorios) que pueden ocurrir? **Esto define un espacio de totalidad**, que puede ser finito o infinito.
2. ¿Cuáles son las probabilidades para todos los valores posibles en este intervalo? Esto define la **función de distribución de probabilidad** $F(x)$. Claramente, $F(x)$ debe estar siempre entre 0 y 1.

Es común trabajar con la derivada de la función de distribución de probabilidad llamada la **función de densidad de probabilidad** $f(x)$. La función de distribución $F(x)$ es simplemente la integral indefinida de la densidad $f(x)$:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \text{o} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(\lambda) d\lambda \quad (48)$$

La probabilidad $F(x_1) = Pr[X \leq x_1]$ de que X sea menor que x_1 está dada por

$$Pr[X \leq x_1] = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx \quad (49)$$

La probabilidad de que X se encuentre entre x_1 y x_2 es:

$$Pr[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1).$$

El área de $f(x)$ es 1.

2.4.2 Medidas de variables aleatorias.

Las medidas o características de una variable aleatoria X se basan en su distribución. Dos características utilizadas comúnmente son la **media** y la **varianza**, definidas por

$$\hat{E}(x) = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad \sigma_x^2 = \hat{E}[(x - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} ((x - m_x)^2) f(x)dx \quad (50)$$

La media, o **esperanza**, es una medida de dónde se *centra* la distribución. La **varianza** mide la dispersión de la distribución en torno a la dispersión en torno a la media. Cuanto menor es la dispersión, más pequeña es la varianza. Ésta es

también una medida de la potencia de ca en una señal. La cantidad σ se conoce como la **desviación estándar** y proporciona una medida de la incertidumbre en una medición física.

2.4.3 Distribuciones de Probabilidad.

Dos de las distribuciones de probabilidad encontradas más comúnmente son la distribución uniforme y la distribución normal (o gaussiana). Estas se ilustran en la figura 3.4.

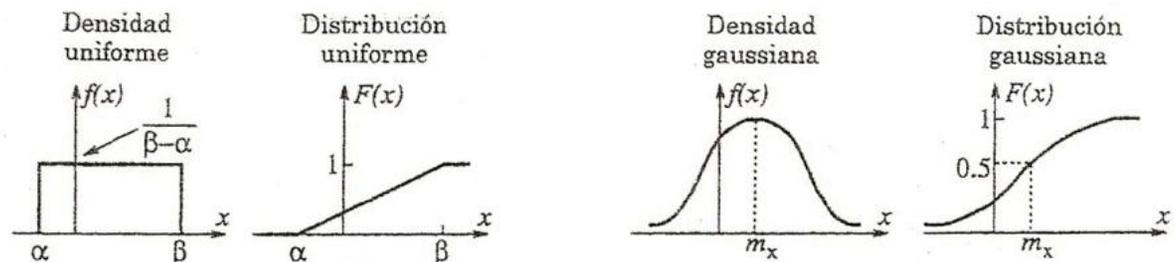


Figura 11. Las distribuciones de probabilidad uniforme y normal.

En una distribución uniforme, todo valor es igualmente probable, puesto que la variable aleatoria no muestra preferencia por un valor particular. La función de densidad $f(x)$ es justo un pulso rectangular definido por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{distribución uniforme}) \quad (51)$$

y la distribución $F(x)$ es una rampa que se aplana. Cuando se subdividen las señales en escalones uniformes, el error en la representación del valor de una señal se considera que se distribuirá de manera uniforme entre -0.5Δ y 0.5Δ , donde Δ es el escalón de cuantificación. La función de densidad de la fase de una selenoide con fase aleatoria también se distribuye uniformemente entre $-\pi$ y π .

La densidad de probabilidad gaussiana en forma de campana se conoce también como *norma* y se define mediante:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (\text{distribución normal}) \quad (52)$$

La media (o varianza) de la suma de las distribuciones gaussianas es igual a la suma de las medidas individuales (o varianzas). La distribución de probabilidad de

combinaciones de fenómenos aleatorios estadísticamente independientes tienden a menudo a una gaussiana. Esto es el *teorema del límite central*.

La idea de distribuciones se aplica también a señales periódicas deterministas para las cuales estas pueden encontrarse como expresiones analíticas exactas.

2.5 FILTROS ANALÓGICOS.

Los filtros analógicos son indispensables en muchas situaciones. La entrada a muchos dispositivos de procesamiento digital de señal es un filtro analógico antialias, que limita el contenido de frecuencia de la señal de entrada a un intervalo que pueda manejar el filtro digital. El diseño clásico de filtros analógicos se basa en la aproximación de las especificaciones de magnitud o fase mediante polinomios o funciones racionales.

A continuación se describe la síntesis y el diseño de filtros analógicos reales y se desarrollan métodos de diseño para filtros Butterworth, teniendo en cuenta que su diseño se basa en especificaciones de magnitud.

2.5.1 Introducción.

El filtro puede considerarse como un dispositivo selectivo de frecuencia, que permite dar forma, de una manera prescrita, a la respuesta en magnitud o fase. La terminología de los filtros se basa en las especificaciones de magnitud ilustradas en la figura 12. Lo usual es describir el rizo en la banda de paso (desviación de la ganancia máxima) y el rizo en la banda de supresión (desviación con respecto a la ganancia cero) mediante su atenuación (recíproco de la ganancia lineal).

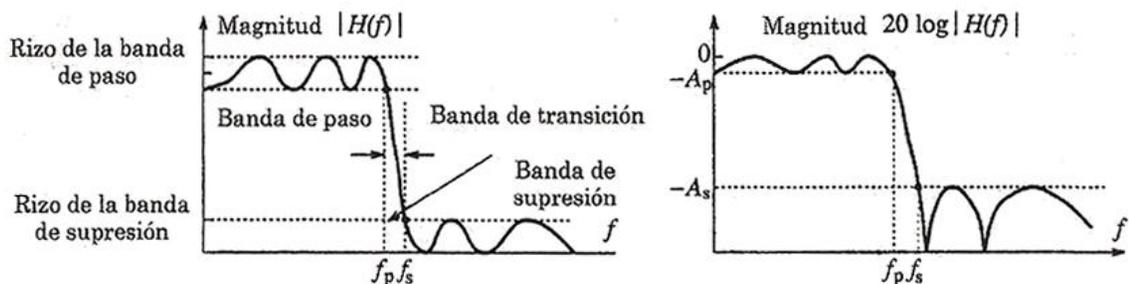


Figura 12. Terminología de los filtros.

La ganancia y la atenuación están relacionadas de la siguiente forma:

- Escala lineal: La atenuación es igual al recíproco de la ganancia:

$$G = |H(f)| \quad (53)$$

$$A = 1/|H(f)| \quad (54)$$

- Escala decibeles: La atenuación es igual al negativo de la ganancia en dB:

$$G_{dB} = 20 \log|H(f)| \quad (55)$$

$$A_{dB} = -20 \log|H(f)| \quad (56)$$

De los tipos de filtros utilizados en especificaciones de magnitud, el filtro Butterworth es monótono en las bandas de paso y supresión mientras que los filtros elípticos tienen rizados en las dos bandas.

En general, el diseño de filtros analógicos se basa en especificaciones de frecuencia (aristas de las bandas de paso y supresión) y en especificaciones de magnitud (atenuación máxima en la banda de paso y atenuación mínima en la banda de supresión) para generar la función de transferencia de fase mínima del filtro con el orden más pequeño que cumpla o exceda las especificaciones. La mayoría de las estrategias de diseño se basan en la conversión de un conjunto de especificaciones de frecuencia dadas en otras aplicables a un prototipo pasa-bajas (LPP) con una frecuencia de corte de 1 rad/s (que comúnmente es la arista en la base de paso), seguida por el diseño del prototipo pasa-bajas y, posteriormente, de la conversión al tipo de filtro requerido mediante el uso de transformaciones de frecuencia.

2.5.2 Transformaciones Prototipo.

La transformación pasa-bajas a pasa-bajas (LP2LP) convierte un prototipo pasa-bajas $H_p(s)$ con una frecuencia de corte de 1 rad/s en un filtro pasa-bajas $H(s)$ con una frecuencia de corte de $w_x \text{ rad/s}$ usando la transformación $s \Rightarrow s/w_x$, como se muestra en la figura 13. Este tipo de transformación es solo un escalamiento lineal en frecuencia.

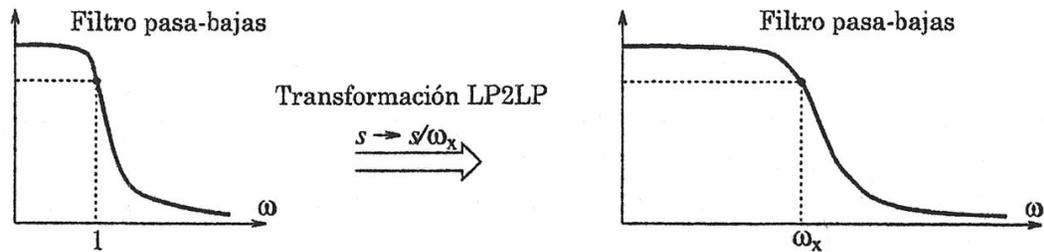


Figura 13. Transformación pasa-bajas a pasa-bajas.

La transformación pasa-bajas a pasa altas (LP2HP) convierte un prototipo pasa-bajas $H_p(s)$ con una frecuencia de corte 1 rad/s en un filtro pasa-altas $H(s)$ con una frecuencia de corte $w_x \text{ rad/s}$ usando la transformación *no lineal* $\Rightarrow w_x/s$, como se ilustra en la figura 14.

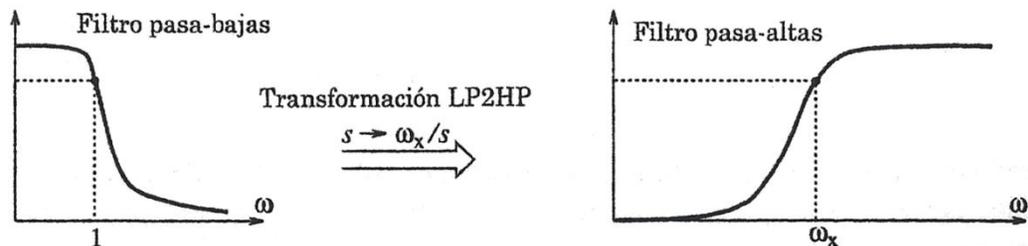


Figura 14. Transformación pasa-bajas a pasa-altas.

- **Especificaciones del prototipo pasa-bajas.**

Dadas las especificaciones en frecuencia de un filtro pasa-bajas con límites de banda de paso 1 rad/s son $v_p = 1 \text{ rad/s}$ y $v_s = w_s/w_p \text{ rad/s}$. La transformación LP2LP es $s \rightarrow s/w_p$. Para un prototipo pasa-bajas con un límite de banda de supresión de 1 rad/s , los valores son $v_p = w_s/w_p \text{ rad/s}$ y $v_s = 1 \text{ rad/s}$.

Para un filtro pasa-altas con márgenes de banda w_p y w_s , las especificaciones del prototipo pasa-bajas con un límite de banda de paso de 1 rad/s son $v_p = 1 \text{ rad/s}$ y $v_s = w_p/w_s \text{ rad/s}$. La transformación LP2HP es $s \rightarrow w_p/s$.

Filtro Pasa-Bajas	Filtro Pasa-Altas
$LP \Rightarrow \frac{s}{2\pi f_p}$	$HP \Rightarrow \frac{2\pi f_p}{s}$

Tabla 1. Transformación del prototipo pasa-bajas a la forma requerida.

2.5.3 Proceso de Diseño.

Las especificaciones de magnitud de un filtro por lo general son dadas por la *atenuación* A_p en la banda de paso y la *atenuación* A_s en la banda de supresión, expresadas en decibeles. La ganancia y la atenuación del filtro son recíprocos entre sí en una escala lineal, mientras que en una escala de decibeles difieren solo por el signo. Los filtros clásicos aproximan el cuadrado de la función de magnitud $|H(v)|^2$ de un prototipo pasa-bajas por un polinomio o razón de polinomios en v^2 , y se obtiene una función de transferencia de fase mínima a partir de esta aproximación.

El cuadrado de la función de magnitud y la atenuación de un prototipo pasa-bajas de n -ésimo orden tiene la fórmula:

$$|H(v)|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 L_n^2(v)} \quad (57)$$

$$A_{dB}(v) = 10 \log[1 + \alpha^2 L_n^2(v)] \quad (58)$$

En estas expresiones, $L_n(v)$ es un polinomio o función racional de n -ésimo grado, y α controla el rizo en la banda de paso (que es la desviación con respecto a la ganancia máxima). La diferencia entre los distintos filtros clásicos se encuentra principalmente en la selección de $L_n^2(v)$, la cual se hace con la finalidad de satisfacer de la mejor manera las especificaciones deseadas. Se necesita que $L_n^2(v) \approx 0$ en la banda de paso (para asegurar en ella una ganancia casi unitaria) y que $L_n^2(v) \gg 0$ en la banda de supresión (para asegurar que la ganancia en ella sea casi cero). La única ecuación de diseño que se necesita es la de atenuación. El orden del filtro n y el parámetro α se obtienen evaluando la relación de atenuación en los límites de la banda de paso y de supresión. Con esto se establece la forma exacta de $|H(v)|^2$, a partir de la cual es fácil obtener la función de transferencia $H_p(s)$ del prototipo. Si el diseño del prototipo se hace de modo que este *cumpla exactamente* con los requerimientos en la frecuencia de corte (que generalmente es el límite de la banda de paso), entonces los requerimientos de atenuación *serán mayores* en todas las demás frecuencias. El paso final es utilizar las transformaciones en frecuencia para obtener el filtro requerido.

2.5.4 Filtro de Butterworth.

El prototipo pasa-bajas de Butterworth se basa en la selección $L_n(v) = v^n$ de modo que:

$$|H(v)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 v^{2n}} \quad (59)$$

$$A_{dB}(v) = 10 \log[1 + \epsilon^2 v^{2n}] \quad (60)$$

El filtro Butterworth también se conoce como *filtro máximamente plano* porque la elección de $L_n(v) = v^n$ (sin la presencia de alguno de los demás coeficientes de menor grado) obliga a que todas sus derivadas sean cero en $v = 0$, lo que garantiza no solo la respuesta más plana en $v = 0$ sino también la menor desviación con respecto a la ganancia unitaria en la banda de paso. Todos los grados de libertad (que son los coeficientes libres en el polinomio de n -ésimo grado $L(v)$) se invierten en hacer que la respuesta en magnitud del filtro de Butterworth sea lo más plana posible en el origen (lo que se obtiene al hacerlos cero). Con esto se tiene una respuesta en frecuencia monótona libre de sobretiros, pero a costa de una transición lenta de la banda de paso a la supresión.

La cantidad ϵ^2 es una medida de la desviación con respecto a la magnitud unitaria en la banda de paso. La magnitud es monótona y disminuye con la frecuencia. La ganancia del filtro en el límite de la banda de paso $v = 1$ es igual a

$$|H(1)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \quad (61)$$

La figura 15 muestra un espectro de magnitud representativo de esta clase de filtro.

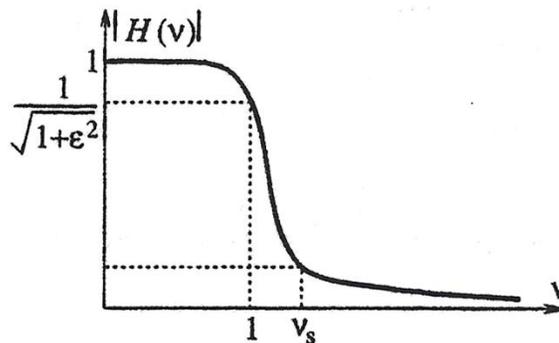


Figura 15. Filtro pasa-bajas Butterworth

Para un filtro Butterworth de n -ésimo orden, la rapidez de atenuación a frecuencias altas es $20n \text{ dB/dec}$, y la atenuación puede aproximarse mediante

$$A(v) = 10 \log[1 + \epsilon^2 v^{2n}] \approx 10 \log[\epsilon^2 v^{2n}] = 20 \log \epsilon + 20n \log v \quad (62)$$

El filtro de Butterworth tiene un espectro de magnitud al cuadrado máximamente plano.

$$|H(v)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 v^{2n}} \quad (63)$$

$$|H(0)| = 1 \quad (64)$$

$$|H(1)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \quad (65)$$

$$H_{dB} = -10 \log[1 + \epsilon^2 v^{2n}] \quad (66)$$

- **Diseño del filtro Butterworth.**

La forma de $|H(v)|^2$ requiere sólo el parámetro de rizo ϵ y el orden de filtro n . El valor de ϵ^2 se obtiene al evaluar la atenuación $A_{dB}(v)$ en el límite de la banda de paso ($v = v_p = 1 \text{ rad/s}$):

$$A_p = A_{dB}(1) = 10 \log(1 + \epsilon^2) \quad \epsilon^2 = 10^{0.1A_p} - 1 \quad (67)$$

El valor de n se calcula evaluando $A_{dB}(v)$ en el límite de la banda de supresión $v = v_s \text{ rad/s}$, con lo que se tiene:

$$A_s = A_{dB}(v_s) = 10 \log(1 + \epsilon^2 v_s^{2n}) \quad (68)$$

$$n = \frac{\log[(10^{0.1A_s} - 1)/\epsilon^2]^{1/2}}{\log v_s} \quad (69)$$

El orden del filtro debe redondearse a un valor entero. Si la atenuación está especificada en varias frecuencias, entonces es necesario encontrar el orden para cada frecuencia seleccionando el máximo valor de éste para n . El orden del filtro n aumenta cuando menor sea la atenuación en la banda de paso A_p (lo que significa un valor pequeño de ϵ^2 o una banda de paso más plana) o mayor la atenuación en la banda de supresión A_s (lo que significa una transición más pronunciada).

La frecuencia de potencia media v_3 se obtiene al hacer $|H(v_3)|^2 = 0.5$, con lo que se tiene

$$\epsilon^2 v_3^{2n} v_3 = (1/\epsilon)^{1/n} \quad (70)$$

El rizo (ϵ), orden (n) y frecuencia de 3 dB (v_3) de un prototipo Butterworth:

$$\epsilon^2 = 10^{0.1A_p} - 1 \quad (71)$$

$$n = \frac{\log[(10^{0.1A_s} - 1)/\epsilon^2]^{1/2}}{\log v_s} \quad (72)$$

$$v_3 = (1/\epsilon)^{1/n} \quad (73)$$

- ***Función de transferencia del prototipo de Butterworth.***

Para encontrar la función de transferencia del prototipo Butterworth pasabajas $H_p(s)$ a partir de $|H(v)|^2$, se reemplaza v^2 por $-s^2$ y se escogen solo las raíces que se encuentran en el semiplano izquierdo (LHP) para generar con ellas la función de transferencia de fase mínima requerida. Con $v^2 = -s^2$ se obtiene:

$$H_p(s)H_p(-s) = \frac{1}{1+\epsilon^2(-s^2)^n} = \frac{1}{1+(-1)^n(s/R)^{2n}} \quad (74)$$

$$R = (1/\epsilon)^{1/n} \quad (75)$$

Esta función tiene $2n$ polos, y sólo la mitad de ellos se encuentra en el semiplano izquierdo. Las posiciones de los polos están dadas por

$$(-1)^n(s/R)^{2n} = -1 \quad (76)$$

$$(-js/R)^{2n} = -1 \quad (77)$$

Esta expresión sugiere que se encuentren las $2n$ raíces de -1 . Con $e^{j(2k-1)\pi} = -1$, se tiene que

$$(-js/R)^{2n} = e^{j(2k-1)\pi} \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, 2n \quad (78)$$

Con esto, los $2n$ polos de p_k son:

$$p_k = R e^{j(\theta_k + \pi/2)} \quad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, 2n \quad (79)$$

Los polos se encuentran sobre un círculo de radio $R = (1/\epsilon)^{1/n}$ en el plano s . Los polos están igualmente espaciados una distancia π/n radianes. Su orientación angular (con respecto al eje positivo jw) está dada por $\theta_k = (2k-1)\pi/2n$. No puede haber nunca un polo sobre el eje jw porque θ_k nunca es cero. La figura 16 ilustra las posiciones de los polos para $n = 2$ y $n = 3$.

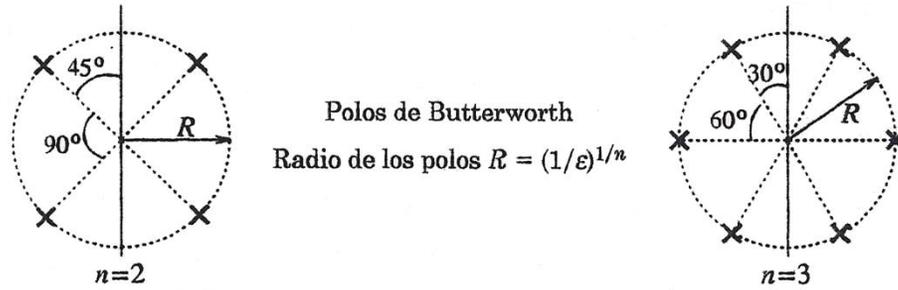


Figura 16. Los polos de un filtro de Butterworth se encuentran sobre un círculo.

Las partes reales e imaginarias de los polos del semiplano izquierdo están dadas por:

$$p_k = -R \operatorname{sen} \theta_k + jR \operatorname{cos} \theta_k \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (80)$$

Cada par de polos conjugados complejos produce un factor cuadrático de la forma:

$$(s - p_k)(s - p_k^*) = s^2 + 2sR \operatorname{sen} \theta_k + R^2 \quad (81)$$

Para n , siempre existe un polo real localizado en $s = -R$. La forma factorizada de $H_p(s)$ (que es útil para realizar filtros de orden superior mediante la conexión en cascada de varias secciones) puede entonces escribirse como:

$$H_p(s) = \frac{K}{Q_p(s)} Q_p(s) = (s + R)^M \prod_{k=1}^{\operatorname{int}(n/2)} (s^2 + 2sR \operatorname{sen} \theta_k + R^2), \quad \begin{cases} M = 0, & n \text{ par} \\ M = 1, & n \text{ impar} \end{cases} \quad (82)$$

Para obtener una ganancia pico unitaria, se escoge $K = Q_p(0)$. También puede expresarse el denominador $Q_p(s)$ en forma polinomial (esto es, sin factorizar) como:

$$Q_p(s) = q_0 s^n + q_1 s^{n-1} + q_2 s^{n-2} + \dots + q_{n-1} s + q_n \quad (83)$$

Para encontrar q_k se usa la relación recursiva:

$$q_0 = 1 \quad q_k = \frac{R \operatorname{cos}[(k-1)\pi/2n]}{\operatorname{sen}(k\pi/2n)} q_{k-1} \quad (84)$$

En conclusión los polos p_k en el LHP se encuentran sobre un círculo de radio $R = v_3 = (1/n)^{1/n}$ con un espaciamiento angular θ_k con respecto al eje jw . Ningún polo se encuentra sobre el eje jw . Para n impar, existe un polo sobre el eje real ubicado en $s = -R$.

$$p_k = -R \operatorname{sen} \theta_k + jR \operatorname{cos} \theta_k \text{ donde } \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \text{ con } k = 1, 2, \dots, 2n \quad (85)$$

(Con respecto al eje jw)

$$H_p(s) = \frac{K}{Q_p(s)} \quad Q_p(s) = \prod_{k=1}^n (s - p_k) \quad K = Q_p(0) = \prod_{k=1}^n p_k \quad (86)$$

2.6. FILTROS DIGITALES IIR.

Los filtros digitales son ampliamente usados en casi todas las áreas del procesamiento digital de señales. Si la fase lineal no es crítica, los filtros de respuesta al impulso infinita (IIR) producen un filtro de orden mucho menor para una aplicación dada. Podemos utilizar diversas proyecciones que se usan para convertir filtros analógicos a filtros digitales.

Los filtros digitales procesan señales discretas en el tiempo. En esencia son ejecuciones matemáticas de la ecuación filtro en software o hardware. Aunque los filtros tienen algunas limitantes, entre sus muchas ventajas se encuentran: inmunidad al ruido fuerte, mucha exactitud (limitada solo por el error de redondeo en la aritmética del procesador), fácil modificación de las características del filtro, libertad de variaciones en las componentes y, por supuesto, costo bajo y en disminución.

2.6.1 Proceso de diseño.

Las especificaciones comunes de magnitud y fase para filtros digitales son idénticas a las de los filtros analógicos, pero además también debe especificarse una frecuencia de muestreo. Esta frecuencia se usa a menudo para normalizar todas las demás frecuencias del diseño. En esencia, el proceso de diseño es un proceso de tres pasos que requiere que se especifiquen los parámetros de diseño, el diseño de la función de transferencia que satisfaga las especificaciones de diseño y la realización de la función de transferencia en software o hardware. El diseño basado en cualquier conjunto de especificaciones de desempeño es, el mejor de los casos, un compromiso en tres niveles: en el primero, el filtro real puede que nunca satisfaga las especificaciones de desempeño si estas son muy estrictas; en el segundo, el mismo conjunto de especificaciones puede conducir a varias realizaciones posibles, y en el tercero, los errores de cuantificación y redondeo pueden inutilizar el diseño si este se basa en un conjunto muy crítico de

valores. Entre menos estrictas sean las especificaciones, mayor es la posibilidad de lograr los objetivos y establecer el diseño.

2.6.2 Técnicas para diseñar filtros digitales.

El diseño de filtros digitales se basa en dos enfoques diferentes. Si la fase lineal no es crítica, los filtros IIR producen un filtro de orden mucho más pequeño para una aplicación dada. El diseño comienza con un *prototipo pasa-bajas* analógico basado en las especificaciones dadas. Éste se convierte luego en el filtro digital requerido usando una *proyección* y una *transformación espectral* apropiadas. Un filtro IIR estable causal nunca presenta una fase lineal por diversas razones, pues en principio la función de transferencia de un filtro de fase lineal debe corresponder a una secuencia simétrica y garantizar que $H(z) = \pm H(-1/z)$. Para cada polo dentro del círculo unitario hay un polo recíproco fuera del círculo unitario. Esto hace al sistema inestable (si es causal) o no causal (si es estable). Para hacer causal la infinitamente larga y simétrica secuencia de respuesta al impulso de un filtro IIR, es necesario un retraso infinito, lo que no es nada práctico, y un truncamiento simétrico (para preservar la fase lineal) simplemente transforma el filtro IIR en un filtro FIR.

Sólo los filtros FIR pueden diseñarse con fase lineal (ninguna distorsión de fase). Es común basar su diseño en la selección de una secuencia de respuesta al impulso simétrica, seleccionando su longitud para satisfacer las especificaciones de diseño. Esta selección se basa a menudo en procedimientos iterativos o en tanteos. Para especificaciones dadas, los filtros FIR requieren muchos más elementos en su realización que los filtros IIR.

2.6.3 Diseño de filtros IIR.

Existen dos enfoques para diseñar filtros digitales IIR. Un método popular se basa en el uso de los bien establecidos métodos para diseñar filtros analógicos, seguidos de una proyección que convierte el filtro analógico en digital. Un método alternativo se basa en diseñar el filtro digital directamente, usando equivalentes digitales de aproximaciones analógicas. Cualquier transformación de un filtro analógico en digital debería idealmente conservar la respuesta y la estabilidad del filtro analógico. En la práctica esto es difícilmente posible debido a los efectos del muestreo.

- ***Equivalencia de los sistemas analógicos y digitales.***

La respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema analógico puede aproximarse mediante:

$$h(t) \approx \tilde{h}_a(t) = t_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t) \delta(t - nt_s) = t_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nt_s) \delta(t - nt_s) \quad (87)$$

Aquí, t_s es el intervalo de muestreo que corresponde a la tasa de muestreo $S = 1/t_s$. La respuesta al impulso en tiempo discreto $h_s[n]$ describe las muestras $h(nt_s)$ de $h(t)$ y puede escribirse como:

$$h_s[n] = h(nt_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_s[k] \delta[n - k] \quad (88)$$

La transformada de Laplace $H_a(s)$ de $\tilde{h}_a(t)$ y la transformada z $H_d(z)$ de $h_s[n]$ son:

$$H(s) \approx H_a(s) = t_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kt_s) e^{-skt_s} H_d(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_s[k] z^{-k} \quad (89)$$

La comparación sugiere la equivalencia $H_a(s) = t_s H_d(z)$ si $z^{-k} = e^{-skt_s}$, es decir,

$$z \Rightarrow e^{st_s} \quad s \Rightarrow \ln(z)/t_s \quad (90)$$

Estas relaciones describen una **proyección** entre las variables z y s . Como $s = \sigma + j\omega$, donde ω es la frecuencia continua, es posible expresar la variable compleja z de la forma:

$$z = e^{(\sigma + j\omega)t_s} = e^{\sigma t_s} e^{j\omega t_s} = e^{\sigma t_s} e^{j\Omega} \quad (91)$$

Aquí, $\Omega = \omega t_s = 2\pi f/S = 2\pi F$ es la frecuencia digital en radianes/muestra.

La señal muestreada $h_s[n]$ tiene un espectro periódico dado por su DTFT:

$$H_p(f) = S \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(f - kS) \quad (92)$$

Si la señal analógica $h(t)$ está limitada en banda a B y se muestrea por arriba de la razón de Nyquist ($S > 2B$), el periodo principal ($-0.5 \leq F \leq 0.5$) de $H_p(f)$ es igual a $SH(f)$, una versión escalada del espectro verdadero $H(f)$. Entonces es posible relacionar los sistemas analógico y digital por medio de:

$$H(f) = t_s H_p(f) \quad o \quad H_a(s)|_{s=j2\pi f} \approx t_s H_d(z)|_{z=e^{j2\pi f/S}}, \quad |f| < 0.5S \quad (93)$$

Si $S < 2B$, se tiene un alias y esto ya no se cumple.

- **Proyecciones prácticas.**

La naturaleza trascendente de la transformación $s \Rightarrow \ln(z)/t_s$ no permite la conversión directa de una función de transferencia racional $H(s)$ en una función de transferencia racional $H(z)$. Tampoco permite una correspondencia punto a punto en las frecuencias mayores a $0.5s$ Hz. Una representación única en el plano z sólo es posible en las señales de banda muestreadas por encima de la razón de Nyquist. Las proyecciones prácticas se basan en uno de los siguientes métodos:

- *Equivalencia de la respuesta.*
- Equivalencia de la respuesta en el tiempo (la transformación de respuesta invariante).
- *La transformada z equivalente para formas factorizadas.*
- Equivalencia de los términos en un $H(s)$ factorizado (la transformada z equivalente).
- *Proyecciones a partir de algoritmos discretos.*
- Conversión de ecuaciones diferenciales del sistema en ecuaciones de diferencias.
- *Transformación bilineal.*
- Aproximaciones racionales para $z \Rightarrow e^{st_s}$ o $s \Rightarrow \ln(z)/t_s$.

En general, cada método tiene reglas de proyección diferentes y produce distintas formas para el filtro digital $H(z)$ a partir de un filtro analógico $H(s)$ dado. Al comparar la respuesta en frecuencia, es conveniente recordar que el intervalo de la frecuencia analógica $0 \leq f \leq 0.5S$ para la respuesta de frecuencias de $H(s)$ equivale al intervalo de frecuencia digital $0 \leq F \leq 0.5$ para la frecuencia de respuesta $H(z)$. Sólo es posible comparar la respuesta en el dominio del tiempo en los instantes de muestreo $t = nt_s$.

2.6.4 Transformación Bilineal.

Al generalizar la proyección con base en la regla trapezoidal haciendo $C = 2/t_s$, se obtiene la *transformación bilineal*, definida por:

$$s = C \frac{z-1}{z+1} \quad z = \frac{C+s}{C-s} \quad (94)$$

Si se hace $\sigma = 0$, se obtiene la variable compleja z en la forma:

$$z = \frac{C+j\omega}{C-j\omega} = e^{j2\tan^{-1}(\omega/C)} \quad (95)$$

Como $z = e^{j\Omega}$, donde $\Omega = 2\pi F$ es la frecuencia digital, se encuentra:

$$\Omega = 2 \tan^{-1}(\omega/C) \quad \omega = C \tan(0.5\Omega) \quad (96)$$

Esta es una relación *no lineal* entre la frecuencia analógica ω y la frecuencia digital Ω . Cuando $\omega = 0$, $\Omega = 0$, y cuando $\omega \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow \infty$. Se trata entonces de una proyección punto a punto que comprime de manera no lineal el intervalo de frecuencias analógicas $-\infty < f < \infty$ al intervalo de frecuencias digitales $-\pi < \Omega < \pi$. Esto evita los efectos del alias a costa de distorsionar, comprimir o envolver las frecuencias analógicas, como se muestra en la figura 17.

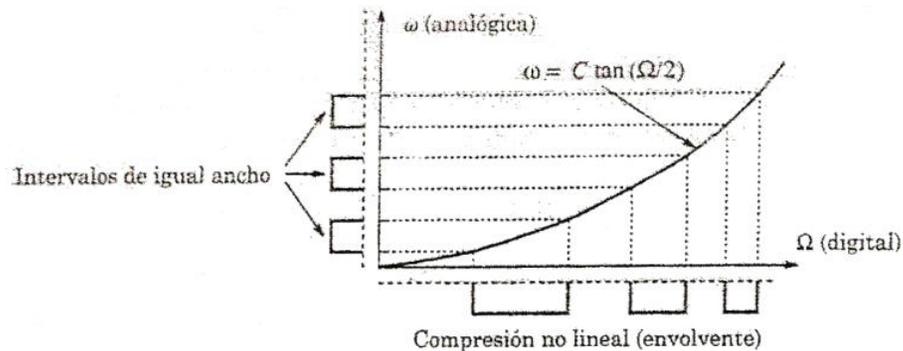


Figura 17. Efecto de la envolvente de la transformación bilineal.

Entre mayor es la frecuencia, más severa es la envolvente. Es posible compensar esta envolvente (pero no eliminarla) si “pre envolvemos” las especificaciones de frecuencia antes de diseñar el sistema analógico $H(s)$ o aplicando la transformación bilineal. La pre envolvente de las frecuencias antes del diseño analógico es meramente una operación de escalamiento (alargamiento) con base en la relación inversa de la envolvente, y está dada por:

$$\omega = C \tan(0.5\Omega) \quad (97)$$

En la figura 18 se muestra una gráfica de ω contra Ω para varios valores de C , comparada con la relación lineal $\omega = \Omega$. Las frecuencias analógicas y digitales siempre muestran equivalencia en el origen $\omega = \Omega = 0$ y en algún otro valor dictado por la selección de C .

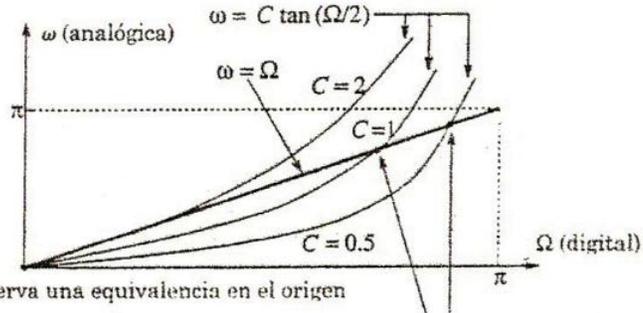


Figura 18. Relación de envolvente $\omega = C \tan(0.5\Omega)$ para varias opciones de C .

Señalemos que el efecto de alargamiento no lineal de la pre envolvente suele tener como resultado un filtro de orden menor, en especial si la frecuencia de muestreo no es suficientemente alta. Para tasas de muestreo altas, resulta que la pre envolvente tiene poco efecto y puede hasta ser redundante.

El uso extenso de la transformación bilineal se deriva de su proyección simple, estable y punto a punto. Ella evita los problemas causados por el fenómeno del alias y por ello puede usarse para filtros pasa-bajos, pasa-altos y supresores de banda.

- **Uso de la transformación bilineal.**

Dada una función de transferencia analógica $H(s)$ cuya respuesta en la frecuencia analógica ω_A debe equipararse con la de $H(z)$ en la frecuencia digital Ω_D , es posible diseñar $H(z)$ de dos maneras:

- Se selecciona C equiparando ω_A y la frecuencia preenvolvente Ω_D , y se obtiene $H(z)$ de $H(s)$, usando la transformación $s = C \frac{z-1}{z+1}$. Este proceso puede resumirse como se indica a continuación:

$$\omega_A = C \tan(0.5\Omega_D) \quad C = \frac{\omega_A}{\tan(0.5)\Omega_D} \quad H(z) = H(s)|_{s=C(z-1)/(z+1)} \quad (98)$$

- Se selecciona un valor conveniente para C (como $C = 1$). Esto en realidad equipara la respuesta con una frecuencia arbitraria preenvolvente ω_x dada por:

$$\omega_x = \tan(0.5)\Omega_D \quad (99)$$

Luego se escala la frecuencia $H(s)$ a $H_1(s) = H(s\omega_A/\omega_x)$ y se obtiene $H(z)$ de $H_1(s)$, usando la transformación $s = \frac{z-1}{z+1}$ (con $C = 1$). Este proceso puede resumirse como sigue (para $C = 1$):

$$\omega_x = \tan(0.5\Omega_D) \quad H_1(s) = H(s)|_{s=s\omega_A/\omega_x} \quad H(z) = H_1(s)|_{s=(z-1)/(z+1)} \quad (100)$$

Ambos métodos producen un filtro digital idéntico $H(z)$. El primero evita el escalamiento de $H(s)$ y el segundo permite una selección conveniente de C .

2.7. FILTRO DE WIENER.

El propósito de cualquier filtro es separar una cosa de otra. En el caso de los filtros eléctricos, estos generalmente pasan señales en un rango de frecuencias específicas y rechazan las que estén fuera del rango; históricamente, la teoría de filtros empezó con el problema de diseñar un circuito que cediera las frecuencias deseadas. Este es aún un problema importante. En muchas aplicaciones en comunicación y control, uno conoce intuitivamente cual podría ser la frecuencia ideal de respuesta. Por ejemplo, si queremos recibir una señal desde una emisora particular de AM, sabemos que el filtro apropiado es uno que permita el paso de todas las frecuencias dentro de unos pocos Kilohertzios sobre cualquier parte de la frecuencia asignada a la estación y rechace todas las otras. Claramente, no es necesario elaborar una teoría para determinar la frecuencia deseada de respuesta en este caso. El problema es simplemente de diseño de circuitos. Veremos, sin embargo, que este no es siempre el caso. Durante la segunda guerra mundial, Norbert Wiener considero un tipo de problema diferente para los filtros. Supongamos que la señal, así como el ruido, son semejantes en tipo, y supongamos además que hay una superposición significativa en los espectros de ambos, la señal y el ruido. Por ejemplo, digamos que la señal es un proceso Gauss-Markov y el ruido es ruido blanco. Sus espectros de densidades son mostrados en la figura 19. Ahora, en este caso, es evidente que ningún filtro hará la separación perfecta, y el filtro que entregue la mejor solución permitiendo el paso de la señal y, al mismo tiempo, suprima la mayor parte del ruido no es de todo obvio. Ni es obvio como se definiría "la mejor solución" en orden de hacer el problema matemáticamente tratable. Este es el problema examinado por Wiener en 1940. Notamos que él no estaba preocupado en el diseño por elegir correctamente resistencias, capacitores, en adelante. En vez, su problema fue más fundamental; concretamente, ¿cuál debería ser la respuesta del filtro en frecuencia para de entregar la mejor separación posible de la señal del ruido?

La teoría que es ahora conocida como la teoría del filtro de Wiener es caracterizada por:

1. La suposición que tanto la señal como el ruido son procesos aleatorios con características espectrales conocidas, equivalentes, Auto - y Cross-funciones de correlación conocida.
2. El criterio para el mejor rendimiento es el error medio cuadrático mínimo. Este parcialmente hace el problema matemáticamente tratable, y además también es un buen criterio físico en muchas aplicaciones.
3. Una solución basada sobre métodos escalares que lleva hacia un filtro óptimo, son funciones ponderales (o función de transferencia en el caso estacionario).

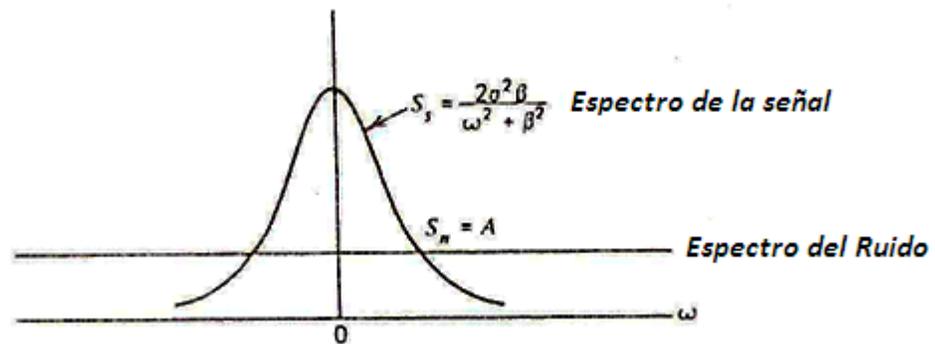


Figura 19. Densidad de espectros de la señal y el ruido.

Seguimos ahora al problema de la optimización del filtro.

2.7.1 Optimización con respecto a un parámetro.

Uno de los métodos tempranos para la optimización de filtros estocásticos fue presentado por R. S. Phillips. Su acercamiento fue menos general que el de Wiener pero este es aun usado en muchas aplicaciones. Básicamente, el método es escoger la forma de la función de transferencia del filtro intuitivamente, dejando uno o más parámetros libres para variar. Uno luego minimiza el error cuadrático mínimo con respecto a esos parámetros.



Figura 20. Problema de optimización del filtro.

Antes de mirar un ejemplo del procedimiento de Phillips, necesitamos derivar una expresión para el error cuadrático medio del filtro. En términos de su transformada de Laplace, la salida del filtro mostrada en la figura 20 es:

$$X(s) = G(s)[S(s) + N(s)] \quad (100)$$

Definimos el error del filtro como la diferencia entre la salida actual y la señal que nos gustaría fuera la ideal. Por lo tanto tenemos:

$$e(t) = s(t) - x(t) \quad (102)$$

$$\text{y} \quad E(s) = S(s) - X(s) \quad (103)$$

Sustituyendo la ecuación (101) dentro de la ecuación (103) se obtiene:

$$E(s) = S(s) - G(s)[S(s) + N(s)] = [1 - G(s)]S(s) - [G(s)]N(s) \quad (104)$$

Puede verse que el error puede ser pensado como una superposición de dos componentes, uno debido a la señal modificada por la función de transferencia $[1 - G(s)]$ y otra debido al ruido modificado por $-[G(s)]$. Si la señal y el ruido tienen cero crosscorrelación, el error cuadrático medio es obtenido como simplemente la suma de dos términos, que son:

$$E(e^2) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-jx}^{jx} [1 - G(s)][1 - G(-s)]S_s(s)ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{-jx}^{jx} G(s)G(-s)S_n(s)ds \quad (105)$$

Ahora tenemos una expresión explícita para el error cuadrático medio en términos de las funciones espectrales de $s(t)$ y $n(t)$ (presumiblemente conocidas) y la función de transferencia del filtro. Si $G(s)$ contiene un parámetro libre para variar, nosotros podemos ahora usar cálculo diferencial ordinario para minimizar $E(e^2)$ con respecto al parámetro, ahora seguimos con un ejemplo.

Ejemplo 4.1

Considere la señal Gauss-Markov y el ruido blanco de la situación mostrada en la figura 19. Aparentemente algún tipo de filtro pasa-bajas es necesario para separar la señal del ruido. Probemos un sencillo filtro de primer orden de la forma:

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

Tenemos ahora especificada la forma funcional para $G(s)$, y por lo tanto estamos listos para usar la ecuación (105). Las cantidades necesarias son:

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts} = \frac{1/T}{(1/T) + Ts/T} = \frac{1/T}{s + (1/T)}$$

$$1 - G(s) = 1 - \frac{1}{1 + Ts} = \frac{s}{s + (1/T)}$$

$$S_s(s) = \frac{2\sigma^2\beta}{-s^2 + \beta^2} = \frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s + \beta} \cdot \frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{-s + \beta}$$

$$S_n(s) = A = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A}$$

Sustituyendo las anteriores cantidades dentro de la ecuación (105) y evaluando $E(e^2)$ usando una tabla de integrales obtenemos

$$E(e^2) = \frac{\sigma^2\beta T}{1 + \beta T} + \frac{A}{2T} \quad (106)$$

Esto puede ahora ser minimizado con respecto a T usando calculo diferencial. El resultado es que $E(e^2)$ es un mínimo para:

$$T = \frac{\sqrt{A}}{\sigma\sqrt{2\beta} - \beta\sqrt{A}} \quad (107)$$

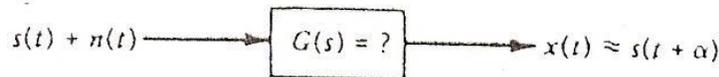


Figura 21. Problema del filtro Wiener.

Es interesante notar que esto producirá un valor positivo para T solamente para ciertos valores de los parámetros. Una solución negativa para T simplemente significa que no existe mínimo relativo dentro del intervalo desde cero hasta infinito.

Debe ser recordado que el mínimo obtenido no es el posible mínimo absoluto (a menos que por una coincidencia), Porque la forma de la función de transferencia del filtro fue elegida intuitivamente. Otra forma funcional podría haber funcionado mejor.

2.7.2 La optimización del problema estacionario - función ponderal aproximada.

Ahora consideremos el problema de optimización del filtro que Wiener resolvió primero en 1940. Refiriéndonos a la figura 21. Se asume lo siguiente:

1. La entrada del filtro es una combinación aditiva de señal y ruido, ambos con covarianza estacionaria con funciones de auto- y cross-correlación conocidas (o funciones espectrales correspondientes).
2. El filtro es lineal y no variante en el tiempo. Ninguna suposición es hecha respecto a su forma.
3. La salida es covariante estacionaria. (Mucho tiempo ha transcurrido desde que no hay cambio en la operación).
4. El criterio de rendimiento es error medio cuadrático mínimo, donde el error está definido como $e(t) = s(t + \alpha) - x(t)$.

Además de la generalización en comparación con la forma de la función de transferencia del filtro, también estamos generalizando al decir que la salida ideal del filtro es $s(t + \alpha)$ en vez de solo $s(t)$. La siguiente terminología se ha desarrollado en comparación con la elección del parámetro α :

1. **α positivo:** Este es el llamado problema de *predicción*. (El filtro está tratando de predecir las unidades de α del valor de la señal delante del tiempo presente t .)
2. **$\alpha = 0$:** Este es el llamado problema del *filtro*. (El problema que hemos considerado antes.)
3. **α negativo:** Este es el llamado problema de *alisado*. (El filtro está tratando de estimar las unidades de α del valor de la señal en el pasado.)

Esta es una generalización importante y allí hay numerosas aplicaciones físicas correspondientes para los tres casos. El parámetro α es elegido de forma particular para cada caso en particular dependiendo de la aplicación, y es ajustado en el proceso de optimización.

Empezamos por definir el error del filtro como:

$$e(t) = s(t + \alpha) - x(t) \quad (108)$$

El error cuadrático es entonces:

$$e^2(t) = s^2(t + \alpha) - 2s(t + \alpha)x(t) + x^2(t) \quad (109)$$

Escribimos después $x(t)$ como una integral de convolución:

$$\int_{-x}^x g(u)[s(t - u) + n(t - u)]du \quad (110)$$

Esta puede ser sustituida dentro de la ecuación (4.3.2) y ambos lados determinan el promedio para el rendimiento:

$$E(e^2) = \int_{-x}^x \int_{-x}^x g(u)g(v)R_{s+n}(u - v)dudv - 2 \int_{-x}^x g(u)R_{s+n.s}(\alpha + u)du + R_s(0) \quad (111)$$

Dónde:

R_s = Función de auto-correlación de $s(t)$.

R_{s+n} = Función de auto-correlación de $s(t) + n(t)$.

$R_{s+n.s}$ = Cross-correlación entre $s(t) + n(t)$ y $s(t)$.

Note que si la señal y el ruido tienen cross-correlación cero:

$$\left. \begin{array}{l} R_{s+n} = R_s + R_n \\ R_{s+n.s} = R_s \end{array} \right\} \quad (\text{para correlacion cero}) \quad (112)$$

Deseamos encontrar la función $g(u)$ en la ecuación (111) que minimice $E(e^2)$. Esto sería reconocido como un problema en cálculo diferencial. Luego el procedimiento habitual, remplazamos $g(u)$ con una función ponderal perturbada $g(u) + \varepsilon\eta(u)$ donde:

$g(u)$ = Función ponderada óptima [nota: de aquí en adelante la solución, $g(u)$ indicara la función ponderada óptima.]

$\eta(u)$ = Una función perturbadora arbitraria.

ε = Factor perturbador.

- **Solución no Causal.**

Si no ponemos restricciones en la función ponderal del filtro, muy probablemente obtendremos una $g(u)$ que es no trivial para valores negativos así como u positivos. Esta función ponderal es no-casual porque esta requiere el filtro para “mirar adelante” del tiempo real y usa datos que no están todavía disponibles. Esto no es, por supuesto, posible si el filtro está operando en línea. Sin embargo, en aplicaciones fuera de línea, tal como análisis postflight de grabado de datos, la solución no casual es posible y de mucho interés. Por lo tanto esta no puede ser ignorada.

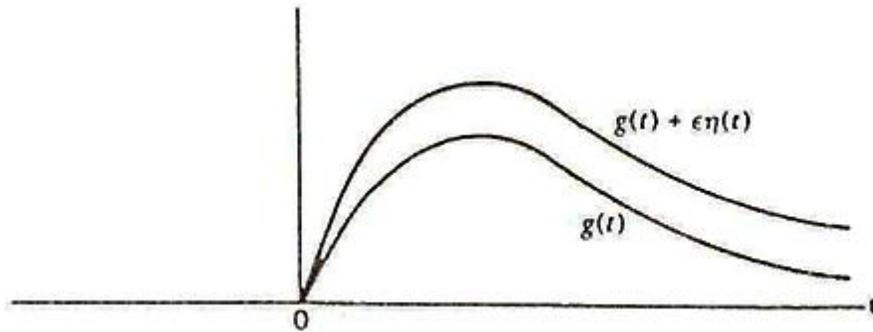


Figura 22. Funciones ponderales óptima y perturbada.

Si no hay limitaciones sobre $g(u)$, entonces, similarmente, no hay restricciones sobre la función de perturbación $\eta(\tau)$. Esto es arbitrario para todos los valores de su argumento. Así, si la integral con respecto a τ esto debe ser cero, el término entre paréntesis debe ser cero para todo τ . Esto conduce a:

$$\int_{-x}^x g(u)R_{s+n}(u - \tau)du = R_{s+n.s}(\alpha + \tau) \quad \text{con} \quad -\infty < \tau < \infty \quad (113)$$

Esta es una ecuación integral de primera clase, y en este caso puede ser resuelta fácilmente usando los métodos de la transformada de Fourier. Desde que R_{s+n} es simétrico, el término de la parte izquierda de la ecuación (113) tiene la forma exacta de una integral de convolución. Por lo tanto, transformando ambos lados resulta:

$$G(s)S_{s+n}(s) = S_{s+n.s}(s)e^{\alpha s} \quad (114)$$

O

$$G(s) = \frac{S_{s+n.s}(s)e^{\alpha s}}{S_{s+n}(s)} \quad (115)$$

Recordamos que las transformadas indicadas en la ecuación (115) no son dos transformadas sino más bien que la usual transformada sencilla. Por su puesto, si deseamos encontrar la función ponderal $g(u)$, simplemente tomamos la transformada inversa de la expresión entregada por la ecuación (115).

El error medio cuadrático para el filtro está dado por la ecuación (111). Si $g(u)$ es la función ponderal óptima satisfactoria ecuación (113), la ecuación para el error medio cuadrático puede ser simplificada como sigue. Primero se escribe el segundo término de la ecuación (111) como la suma de dos términos iguales y combinando uno de estos con el término de la doble integral. Después reagrupamos los términos, conduciendo a:

$$\begin{aligned}
 E(e^2) = R_s(0) - & \int_{-x}^x g(u)R_{s+n.s}(\alpha + u)du \\
 & + \int_{-x}^x g(u) \left[-R_{s+n.s}(\alpha + u) \right. \\
 & \left. + \int_{-x}^x g(v)R_{s+n}(v - u)dv \right] du
 \end{aligned} \tag{116}$$

La cantidad dentro del paréntesis en la ecuación (4.3.11) es cero para $g(v)$ óptima para todo u . Por lo tanto, el error cuadrático medio es:

$$E(e^2) = R_s(0) - \int_{-x}^x g(u)R_{s+n.s}(\alpha + u)du \tag{117}$$

Ejemplo 4.2

Considere la misma combinación de la señal Markov y el ruido blanco usados en el ejemplo 4.1. Deseamos encontrar el filtro no-casual óptimo (es decir, $\alpha = 0$). Para simplificar la aritmética, dejamos $\sigma^2 = \beta = A = 1$. debido a que la señal y el ruido tienen cross-correlación cero.

$$S_{s+n} = S_s + S_n = \frac{2}{-s^2 + 1} + 1 = \frac{-s^2 + 3}{-s^2 + 1} \tag{118}$$

$$S_{s+n.s} = S_s = \frac{2}{-s^2 + 1} \tag{119}$$

$$e^{\alpha s} = 1 \tag{120}$$

De la ecuación (115) tenemos:

$$G(s) = \frac{\frac{2}{-s^2 + 1}}{\frac{-s^2 + 3}{-s^2 + 1}} = \frac{2}{-s^2 + 3}$$

Expandiendo esta expresión con fracciones parciales se obtiene:

$$G(s) = \frac{1/\sqrt{3}}{s + \sqrt{3}} + \frac{1/\sqrt{3}}{-s + \sqrt{3}} \quad (121)$$

Las partes positivas y negativas de $g(u)$ son entregadas por los términos primer y segundo de la ecuación (121). Por lo tanto, $g(u)$ es:

$$g(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}u} & u \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}u}, & u < 0 \end{cases} \quad (122)$$

Esta es una función ponderal no-casual óptima, esta es esbozada en la figura 23 con la función ponderal intuitiva del ejemplo 4.1 (evaluando para $\sigma^2 = \beta = A = 1$ y $T = 1 + \sqrt{2}$). Note que debido a que el filtro no-casual pondera tanto a los datos pasados como los futuros, puede permitir tener un tiempo constante más pequeño que el filtro intuitivo, que está permitiendo ponderar solamente los datos de entrada anteriores.

Este es solo de interés para comparar los errores del filtro no-casual y óptimo y el parámetro-optimizado para el filtro del ejemplo 4.1. Estos pueden ser computados por las ecuaciones (106) y (117) con el resultado:

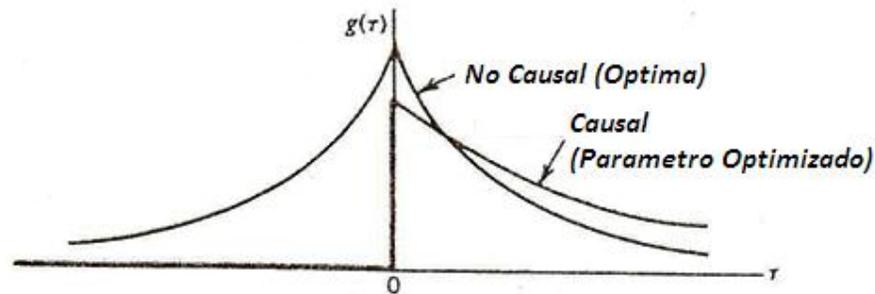


Figura 23. Filtro que pondera las funciones para óptimo no-casual y parámetro-optimizado casual filtro.

$$E(e^2) \quad (\text{parámetro-optimizado}) \approx 0.914$$

$$E(e^2) \quad (\text{Óptimo no-casual}) \approx 0.577$$

Nos damos cuenta que el filtro no-casual tiene significativamente menos error que el filtro causal. Por supuesto, en aplicaciones fuera de línea podría ser útil implementar el filtro causal en preferencia al filtro intuitivo causal.

- **Solución Causal.**

El cálculo diferencial lleva a la ecuación (123), que es repetido aquí por conveniencia.

$$\int_{-x}^x \eta(\tau) \left[-R_{s+n.s}(\alpha + \tau) \int_{-x}^x g(u) R_{s+n}(u - \tau) du \right] d\tau = 0 \quad (123)$$

Recordando que $\eta(\tau)$ es una función perturbadora arbitraria. Si deseamos restringir la función del filtro ponderal para ser causal, debemos poner una constante similar sobre la variación de $\eta(\tau)$. A parte de eso, obtenemos la solución libre (no-casual). Así, para el caso causal requerimos que $\eta(\tau)$ sea cero para τ negativo, y permitir que el sea arbitrario para τ positivo. Lo que está dentro del paréntesis en la ecuación (4.3.7) luego necesita ser cero solamente para τ positivo. El criterio del cero es satisfecho para τ negativo por virtud de nuestra restricción sobre $\eta(\tau)$, que es, $\eta(\tau) = 0$ para $\tau < 0$. Por lo tanto, la ecuación integral es:

$$\int_{-x}^x g(u) R_{s+n}(u - \tau) du - R_{s+n.s}(\alpha + \tau) = 0 \quad \tau \geq 0 \quad (124)$$

La ecuación (124) es conocida como la ecuación de Wiener-Hopf, y el hecho que esta es válida solo para $\tau \geq 0$ complica la solución considerablemente. Una solución de la ecuación (124) que está basada en procesos de factorización espectral como sigue. Primero, se reemplaza la parte derecha con una función negativa-tiempo desconocida $a(\tau)$ [es decir, $a(\tau)$ es desconocida para tiempo negativo, pero es sabido que es cero para tiempo positivo.] La ecuación (124) puede ser escrito como:

$$\int_{-x}^x g(u) R_{s+n}(u - \tau) du - R_{s+n.s}(\alpha + \tau) = a(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty \quad (125)$$

Trasformando ambos lados de la ecuación (125) luego se obtiene:

$$G(s)S_{s+n}(s) - S_{s+n.s}(s)e^{\alpha s} = A(s) \quad (126)$$

Lugo, use la factorización espectral sobre S_{s+n} y el grupo de términos como sigue:

$$[G(s)S_{s+n}^+(s)]S_{s+n}^-(s) - S_{s+n.s}(s)e^{\alpha s} = A(s)$$

o

$$G(s)S_{s+n}^+(s) = \frac{A(s)}{S_{s+n}^-(s)} + \frac{S_{s+n.s}(s)e^{\alpha s}}{S_{s+n}^-(s)} \quad (127)$$

En la ecuación (127), el “súper índice +” indica la descomposición en factores de la función espectral que tiene todos sus polos y ceros en el medio del plano izquierdo. Similarmente, los polos y ceros de S_{s+n}^- son reflejos opuestos de esos de S_{s+n}^+ . Notemos aquí que $g(u)$ es una función de tiempo-positivo estable; por lo tanto $G(s)$ tendrá todos sus polos en el medio del plano izquierdo. Así, $G(s)S_{s+n}^+(s)$ tendrá todos sus polos en el medio del plano izquierdo, y este será la trasformada de una función positiva en el tiempo. Similarmente, $A(s)$ es la trasformada de una función negativa en el tiempo, así sus polos estarán en el medio del plano derecho. También, ambos los ceros y polos de $S_{s+n}^-(s)$ están en el plano medio derecho. Por eso los tres términos de la ecuación (127) traducen en palabras como:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Función} \\ \text{Tiempo Positivo} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Función} \\ \text{Tiempo Negativo} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Función} \\ \text{Tiempo Positivo y Negativo} \end{array} \right]$$

Ejemplo 4.3.

Considere la misma combinación entre la señal Markov y el ruido blanco usada en los ejemplos 4.1 y 4.2. Nuevamente dejamos $\sigma^2 = \beta = A = 1$ para simplificar la aritmética y, en este ejemplo, miraremos la solución causal óptima. Debido a que la señal y el ruido se ha asumido que tiene cross-correlación cero, las funciones espectrales necesarias son:

$$S_{s+n} = S_s + S_n = \frac{2}{-s^2 + 1} + 1 = \frac{-s^2 + 3}{-s^2 + 1} \quad (129)$$

$$S_{s+n.s} = S_s = \frac{2}{-s^2 + 1} \quad (130)$$

También, debido a que la predicción del tiempo α es asumido para ser cero,

$$e^{\alpha s} = 1 \quad (131)$$

Primero, descomponemos en factores S_{s+n} :

$$S_{s+n} = S_{s+n}^+ S_{s+n}^- = \left[\frac{s + \sqrt{3}}{s + 1} \right] \left[\frac{-s + \sqrt{3}}{-s + 1} \right] \quad (132)$$

Después, construimos la función $S_{s+n,s}/S_{s+n}^-$:

$$\frac{S_{s+n,s}}{S_{s+n}^-} = \frac{\frac{2}{-s^2 + 1}}{\frac{-s + \sqrt{3}}{-s + 1}} = \frac{2}{(-s + \sqrt{3})(s + 1)} \quad (133)$$

Esta, en cambio, puede ser expandida en términos utilizando fracciones parciales:

$$\frac{S_{s+n,s}}{S_{s+n}^-} = \frac{\sqrt{3} - 1}{s + 1} + \frac{\sqrt{3} - 1}{-s + \sqrt{3}} \quad (134)$$

Claramente, el primer término de la ecuación (4.3.28) es la parte del tiempo positivo. Por lo tanto, $G(s)$ determinado por la ecuación (4.3.22) es:

$$G(s) = \frac{1}{\frac{s + \sqrt{3}}{s + 1}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{s + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{s + \sqrt{3}} \quad (135)$$

O, en términos de la función ponderal del filtro,

$$g(t) = \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)e^{-\sqrt{3}t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (136)$$

Como antes, el error medio cuadrático del filtro puede ser calculado usando la ecuación (4.3.12). El resultado es:

$$E(e^2) = 0.732 \quad (137)$$

Tenemos ahora tres propuestas de optimización diferentes examinadas para la misma situación de señal y ruido. Una comparación del resultado es mostrada en la tabla 4.1 empezando con el filtro más restrictivo enumerando de primero y terminando con el menos restrictivo al final de la lista. Como debe ser esperado, el error medio cuadrático decrece con cada relajación sucesiva de las restricciones sobre el surtido de funciones de transferencia. Las restricciones lineales están, por supuesto, presentes en las tres soluciones.

Tabla 2. Comparación de resultados de los ejemplos 4.1, 4.2 y 4.3.

Tipo de solución	Función de transferencia del filtro	Función ponderal	Error medio cuadrático
Optimización con parámetro sencillo	$G(s) = \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{2})s}$	$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sqrt{2}} e^{-(\sqrt{2}-1)t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	0.941
Filtro de Wiener Causal	$G(s) = \frac{\sqrt{3} - 1}{s + \sqrt{3}}$	$g(t) = \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)e^{-\sqrt{3}t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	0.732
Filtro de Wiener no-causal	$G(s) = \frac{2}{(s + \sqrt{3})(-s + \sqrt{3})}$	$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}t} & t \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}t}, & t < 0 \end{cases}$	0.577

2.7.3 El problema no estacionario.

En la anterior discusión esta fue asumida tal que el filtro estaba “encendido” en $t = -\infty$, que hace el entero historial del pasado $s(t) + n(t)$ disponible para ponderar. Esto lleva a la solución estacionaria o de estado-estable. En el problema transiente o no estacionario, consideremos la señal y el ruido siendo un proceso estacionario covariante con características espectrales conocidas como antes, pero consideremos la entrada estando puesta en $t = 0$ en vez de $-\infty$. Esto se indica en la figura 24 como una operación de cambio en la entrada.

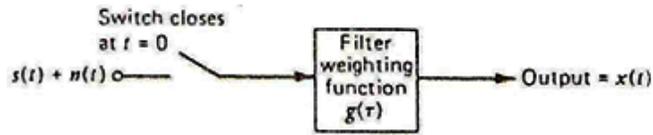


Figura 24. Diagrama en bloques para el problema no estacionario.

Asumimos condiciones iniciales cero; de aquí la salida del filtro puede ser escrita como:

$$x(t) = \int_0^t g(\tau)[s(t - \tau) + n(t - \tau)]d\tau, \quad t \geq 0 \quad (138)$$

Como antes, la salida ideal sería $s(t - \tau)$. Así, el error del filtro es

$$e(t) = s(t + \alpha) - x(t) \quad (139)$$

Sustituyendo la ecuación (138) dentro de la ecuación (139), elevando al cuadrado, y luego tomando la e a ambos lados produce:

$$E(e^2) = \int_0^t \int_0^t g(u)g(v)R_{s+n}(u - v)dudv - 2 \int_0^t g(u)R_{s+n,s}(\alpha - u)du + R_s(0) \quad (140)$$

El problema es escoger $g(u)$ como para minimizar $E(e^2)$. El procedimiento variacional seguido es esencialmente el mismo como para el caso estacionario, por eso no será repetido. La única diferencia es en los límites de integración, que cambian, encontrando atrás la expresión para $x(t)$ entregada por la ecuación (138). Aunque esta es una importante diferencia. No necesitamos preocuparnos acerca de colocar una restricción casual sobre $g(\tau)$ o su perturbación, por que el rango de integración está limitado para estar desde 0 a t . Podemos arbitrariamente truncar $g(\tau)$ a cero fuera de este rango.

Como antes, el procedimiento variacional conduce a una ecuación integral en $g(\tau)$. Para el problema no estacionario, esto es:

$$\int_0^t g(u)R_{s+n}(\tau - u)du = R_{s+n,s}(\alpha - \tau), \quad 0 \leq \tau \leq t \quad (141)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación de Wiener-Hopf excepto por los límites en la integral y el rango de τ para la cual la ecuación es válida. Sin embargo estas aparentes pequeñas diferencias complican la solución aún más. El método de factorización espectral no puede ser aplicado a la ecuación (141) por que el rango de τ es finito algo que es semifinito como en la ecuación Winer-hopf. La ecuación

(141) es sujeta a examinar por otra solución, sin embargo, por otro método que involucre transformar la ecuación integral a una ecuación diferencial y luego resolver la ecuación diferencial para $g(\tau)$. Esta técnica trabajará solamente para el caso cuando la función espectral para cuando $s(t) + n(t)$ es racional, que es, una proporción de polinomios en s^2 . Sin embargo, notemos que esta misma restricción es necesaria para la factorización espectral, y por lo tanto solo limita clases de situaciones espectrales que pueden ser operadas por cualquier caso estacionario o no estacionario.

La solución de la ecuación (141) sigue a continuación. Primero escribimos R_{s+n} como una integral de Fourier:

$$\int_0^t g(u) \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_{s+n}(s) e^{s(\tau-u)} ds \right] du = R_{s+n,s}(\alpha - \tau) \quad (142)$$

Después. Escribimos $S_{s+n}(s)$ como una proporción de polinomios en s^2 :

$$S_{s+n}(s) = \frac{N(s^2)}{D(s^2)} \quad (143)$$

Ahora observemos que operando sobre $e^{s(\tau-u)}$ con el operador diferencia $D(d^2/d\tau^2)$ generaremos $D(s^2)e^{s(\tau-u)}$. Por lo tanto, el denominador de S_{s+n} en la ecuación (142) puede ser cancelado por operación en ambos lados de la ecuación con $D(d^2/d\tau^2)$. Similarmente, una multiplicación algebraica dentro de la integral por $N(s^2)$ es equivalente a operar en frente de la primera integral con $N(d^2/d\tau^2)$. Insertando estas operaciones equivalentes en la ecuación (142) obtenemos:

$$N\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\right) \int_0^t g(u) \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} e^{s(\tau-u)} ds \right] du = D\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\right) R_{s+n,s}(\alpha - \tau) \quad (144)$$

Ahora observemos que la integral de Fourier dentro de los paréntesis en la ecuación (144) es justo la función Delta Dirac $\delta(\tau - u)$. Introduciendo esta y usando la propiedad de desplazar la función impulso, conduce a:

$$N\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\right) g(\tau) = D\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\right) R_{s+n,s}(\alpha - \tau), \quad 0 < \tau < t \quad (145)$$

Ahora tenemos una ecuación diferencial en términos de $g(\tau)$ en vez de un ecuación integral. Además, esta es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, y la solución de este tipo de bien conocida. Antes de seguir, se observa que el intervalo sobre τ en la ecuación (145) es el intervalo abierto $(0, t)$

en vez del intervalo cerrado $[0, t]$ asociado con la ecuación integral (141). Esto es intencional y aparece porque del problema de continuidad y diferenciación en los puntos finales. En otras palabras, podemos sin peligro asumir solamente que la ecuación diferencial es válida en el interior de la región del intervalo.

La solución de la ecuación (145) puede, por supuesto, contener constantes arbitrarias de integración. Además, porque el problema del punto final, la función impulso con indeterminadas amplitudes debe ser adherida en $\tau = 0 +$ y $\tau = -t$. (El $+$ y el $-$ indican que los impulsos son puestos dentro del borde del intervalo.) La regla para adherir los impulsos son como sigue: si el orden de $D(s^2)$ es:

1. El mismo como $N(s^2)$, no adhiere impulsos.
2. Si este es dos mayores que $N(s^2)$, adhiere impulsos simples.
3. Si este es cuatro veces mayores que $N(s^2)$, adhiere impulsos simples además de impulsos dobles.
4. Etc.

Los coeficientes desconocidos en la solución general son evaluados sustituyendo la presunta solución respecto a la ecuación integral original y exigiendo igualdad en ambos lados de la ecuación. Este es el mismo, como usando la condición inicial para evaluar las constantes de integración en el problema usual de condición inicial.

Recuerde que el procedimiento solo descrito es muy especializado y aplicable solo en el caso cuando $S_{s+n}(s)$ puede ser escrito como un polinomio de proporción en s^2 . La justificación del procedimiento en algún caso particular se encuentra en la sustitución final de la solución en la ecuación integral. Podemos no buscar más de la solución que satisface la ecuación integral original.

Ejemplo 4.5

Miremos nuevamente la situación donde la señal es Markov y el ruido es blanco. La combinación aditiva forma la entrada que es aplicada a el filtro en $t = 0$. Tenemos:

$$R_s(\tau) = e^{-|\tau|} \quad o \quad S_s(s) = \frac{2}{-s^2 + 1} \quad (146)$$

$$R_n(\tau) = \delta(\tau) \quad o \quad S_n(s) = 1 \quad (147)$$

Si asumimos que la señal y el ruido tienen cross-correlación cero,

$$S_{s+n}(s) = \frac{2}{-s^2 + 1} + 1 = \frac{-s^2 + 3}{-s^2 + 1} = \frac{N(s^2)}{D(s^2)} \quad (148)$$

También, si $\alpha = 0$,

$$R_{s+n,s}(\alpha + \tau) = R_s(\tau) = e^{-\tau}, \quad \tau \geq 0 \quad (149)$$

Observa que el signo de magnitud absoluta alrededor de τ puede ser quitada porque τ es siempre positivo. Si usamos el polinomio $N(s^2)$ y $D(s^2)$ como lo entrega la ecuación (148), la ecuación diferencial (145) queda:

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 3\right)g(\tau) = \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)e^{-\tau} \quad (150)$$

Y esto se reduce a:

$$-\frac{d^2g(\tau)}{d\tau^2} + 3g(\tau) = 0 \quad (151)$$

La solución general de esta ecuación es reconocida siendo:

$$g(\tau) = ae^{-\sqrt{3}\tau} + be^{\sqrt{3}\tau} \quad (152)$$

No necesitamos sumar impulsos en este caso porque $N(s^2)$ y $D(s^2)$ son ambas de segundo orden. Por lo tanto, sabemos que la función ponderal del filtro es de la forma entregada por la ecuación (152) sin impulsos adicionales. Los coeficientes a y b pueden ser evaluados sustituyendo la forma de solución conocida (es decir la ecuación 152) respecto a la ecuación integral original, ecuación (141), y luego escogiendo a y b tal que la función resultante en los lados izquierdo y derecho de la ecuación son funciones idénticas de τ . Esto es sencillo, pero el algebra está involucrada, la cual será omitida. El resultado final es

$$a(t) = \frac{2(\sqrt{3} + 1)e^{\sqrt{3}t}}{(\sqrt{3} + 1)^2 e^{\sqrt{3}t} - (-\sqrt{3} + 1)^2 e^{-\sqrt{3}t}} \quad (153)$$

$$b(t) = \frac{-2(-3\sqrt{3} + 1)e^{-\sqrt{3}t}}{(\sqrt{3} + 1)^2 e^{\sqrt{3}t} - (-\sqrt{3} + 1)^2 e^{-\sqrt{3}t}} \quad (154)$$

Note que las “constantes” son funciones de ejecución variables en el tiempo t . La solución final para la función ponderal es luego:

$$g(\tau; t) = a(t)e^{-\sqrt{3}\tau} + b(t)e^{\sqrt{3}\tau} \quad (155)$$

Donde $a(t)$ y $b(t)$ son dadas. El punto y coma en $g(\tau; t)$ es usado para enfatizar el hecho que τ es variable acostumbrada en la función ponderal y t es solo un parámetro. El resultado del filtro es, por supuesto, un filtro variable en el tiempo.

Esto es fácilmente comprobado haciendo t aproximado a ∞ , la solución para $g(t)$ es la sigue:

$$g(\tau) = (\sqrt{3} - 1)e^{-\sqrt{3}\tau} \quad (156)$$

Como debería ser esperado, esta es la misma solución de estado-estable que fue obtenida previamente usando métodos de factorización espectral. Es de interés observar que la propuesta de la ecuación diferencial provee una método alternativo para resolver el problema estacionario.

En el ejemplo 4.5 esto es meritorio notar que la variable de tiempo en ejecución t viene en la solución de la función ponderal naturalmente (es decir sin cualquier esfuerzo deliberado) porque se escoge escribir la integral de superposición en la forma:

$$x(t) = \int_0^t g(\tau; t)f(t - \tau)d\tau \quad (157)$$

La otra forma, la cual es igualmente valida, y algunas veces preferida in libros sobre teoría de sistemas lineales (9), es:

$$x(t) = \int_0^t h(t, \tau)f(\tau)d\tau \quad (158)$$

En la ecuación (158), $h(t; \tau)$ tiene el significado físico de la respuesta del sistema para un impulso unitario aplicado en el tiempo τ . La relación entre la respuesta al impulso y la función ponderal es obtenida haciendo los cambios apropiados de variable en cualquiera la ecuación (157) o en la ecuación (158) y luego comparando las dos integrales. El resultado es:

$$h(t, \tau) = g(t - \tau; t) \quad (159)$$

2.8 ORTOGONALIDAD

La función ponderal del filtro que minimiza el error cuadrático medio debe satisfacer la ecuación integral:

$$\int_0^t g(u)R_{s+n}(\tau - u)du = R_{s+n,s}(\alpha + \tau), \quad 0 \leq \tau \leq t \quad (160)$$

También, el error del filtro es entregado por

$$e(t) = s(t + \alpha) - x(t) = s(t + \alpha) - \int_0^t g(u)[s(t - u) + n(t - u)]du, \quad 0 \leq \tau \leq t \quad (161)$$

Deseamos examinar la expectativa del resultado del error del filtro en el tiempo t y entrada en algún tiempo t_1 donde $0 \leq t_1 \leq t$. Dejamos la entrada siendo denotada como $z(t)$. Luego

$$z(t_1) = s(t_1) + n(t_1) \quad (162)$$

Y

$$E[z(t_1)e(t)] = E\left\{[s(t_1) + n(t_1)] \times \left[s(t + \alpha) - \int_0^t g(u)[s(t - u) + n(t - u)]du\right]\right\} \quad (163)$$

Mover $s(t_1) + n(t_1)$ de sitio y la integración llevarla fuera la operación de expectativa, se obtiene:

$$E[z(t_1)e(t)] = R_{s+n,s}(t - t_1 + \alpha) - \int_0^t g(u)R_{s+n}(t - t_1 - u)du \quad (164)$$

Sin embargo, $g(u)$ debe satisfacer la ecuación integral (160). Así, el anterior debe ser cero para $0 \leq (t - t_1) \leq t$. Ya que el tiempo fue asumido en un intervalo entre 0 y t , esto es equivalente a decir:

$$E[z(t_1)e(t)] = 0, \quad 0 \leq t_1 \leq t \quad (165)$$

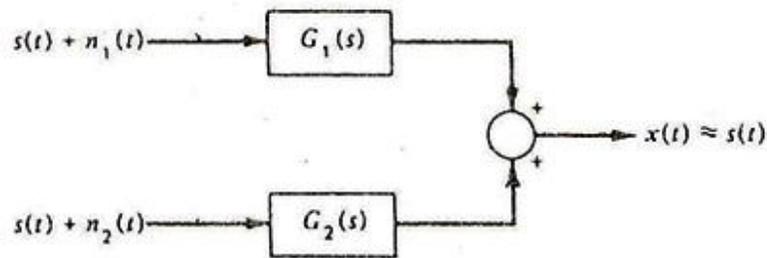


Figura 25. Filtro de Wiener general para dos entradas.

Si la expectativa del resultado de dos variables aleatorias es cero, se dice que las variables son ortogonales.

2.7.5 FILTRO COMPLEMENTARIO.

Las aplicaciones de la teoría del filtro de Wiener no son tan comunes como uno podría esperar. Quizás una razón para esto es que la teoría de Wiener requiere que la señal, así como el ruido, sea noiselike en carácter. En el problema de la comunicación acostumbrado, este no es el caso. La señal generalmente tiene al menos alguna estructura determinista, y no es a menudo razonable suponer que sea totalmente aleatoria. Así, el problema típico de filtrado encontrado en la ingeniería de la comunicación simplemente no se ajusta al modelo de Wiener. Sin embargo, este es una aplicación de la instrumentación, donde los métodos de Wiener han sido usados exhaustivamente. En esta aplicación, medidas redundantes de la misma señal están disponibles, y el problema es combinar toda la información de tal manera como para minimizar los errores de instrumentación. Para guardar la discusión tan simple como sea posible, nos concentraremos en el caso de dos entradas y simplemente mencionaremos que la técnica es fácilmente extendida para más de dos entradas.

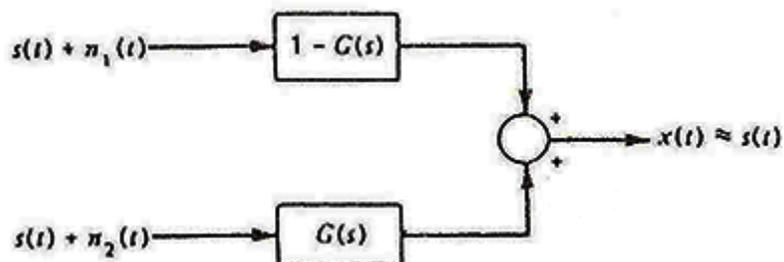


Figura 26. Filtro Complementario.

Considere el problema general de combinar dos medidas con ruidos independientes de la misma señal como está representado en la figura 25. En el contexto de la instrumentación, las medidas pueden venir desde dos tipos de

instrumento completamente diferentes, cada uno con su propia característica particular de error. Deseamos combinar las dos medidas entre sí de tal manera como para eliminar todo el error que sea posible. Si la señal $s(t)$ es noiselike, los métodos de Wiener pueden, en principio, ser usados para determinar las funciones de transferencia $G_1(s)$ y $G_2(s)$ que minimicen el error cuadrático medio. Sin embargo, frecuentemente la señal no puede ser propiamente modelada como un proceso aleatorio con características espectrales conocidas. Por ejemplo si $s(t)$ representa la posición de un aeroplano en vuelo a lo largo de una ruta preestablecida, indudablemente la señal no es aleatoria. Además, en este caso no querríamos demorar o distorsionar la señal de ninguna forma en el proceso de filtrar los errores de las medidas. Por lo tanto busquemos una manera de filtrar la señal sin pagar el precio de un retraso o distorsión no deseados.

Un método de filtrar el ruido sin distorsionar la señal es mostrado en la figura 26. Desde el diagrama de bloques, podría ser evidente que la transformada de Laplace a la salida puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 X(s) &= [S(s) + N_1][1 - G(s)] + [S(s) + N_2][G(s)] \\
 X(s) &= S(s) - S(s)G(s) + N_1(s) - N_1(s)G(s) + S(s)G(s) + N_2(s)G(s) \\
 X(s) &= S(s) + N_1(s) - N_1(s)G(s) + N_2(s)G(s) \\
 X(s) &= \underbrace{S(s) + N_1(s)[1 - G(s)]}_{\text{Término de la señal}} + \underbrace{N_2(s)G(s)}_{\text{Término del ruido}} \tag{166}
 \end{aligned}$$

Claramente, el término de la señal $S(s)$ no es afectado por la elección de $G(s)$ en ninguna parte. Por otro lado, las dos entradas de ruido son modificadas por las funciones de transferencia complementarias $[1 - G(s)]$ y $G(s)$. Si los dos ruidos tienen características espectrales complementarias, $G(s)$ puede ser escogida para mitigar el ruido en ambos canales. Por ejemplo, si n_1 es predominantemente ruido de baja-frecuencia y n_2 de alta-frecuencia, entonces escogiendo $G(s)$ para ser un filtro pasa-bajo automáticamente será atenuado n_1 así como n_2 .

Ahora notemos que el término del ruido en la ecuación (166) tiene la misma forma como se vio antes en la ecuación (104) excepto por el signo en el término $N_2(s)$. Por lo tanto, esperaríamos poder usar métodos de Wiener en la minimización de este término. Este es quizás aun más evidente de la figura 27. Puede ser fácilmente verificado que la relación entrada-salida es idéntica para los sistemas de las figuras 26 y 27, y así ellos son equivalentes. De la figura 27 vemos que el propósito del filtro $G(s)$ es entregar la mejor estimación posible de $n_1(t)$, y este,

por turno, es restar de $S(t) + N_1(t)$, por orden para entregar un mejoramiento de la estimación de $S(t)$.

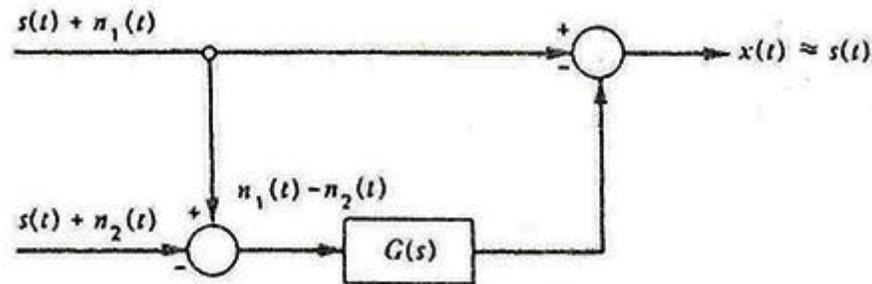


Figura 27. Filtro de Wiener con dos entradas.

La entrada a $G(s)$ es $n_1(t) - n_2(t)$, y por eso el filtro puede separar una señal noiselike de otra. Claramente, si dejamos que $n_1(t)$ tome el papel de señal y $-n_2(t)$ el papel del ruido, este problema se ajusta perfectamente a la teoría de Wiener para una sola entrada. Un ejemplo ilustrará una aplicación ingenieril del método del filtro complementario al combinar datos de medidas redundantes.

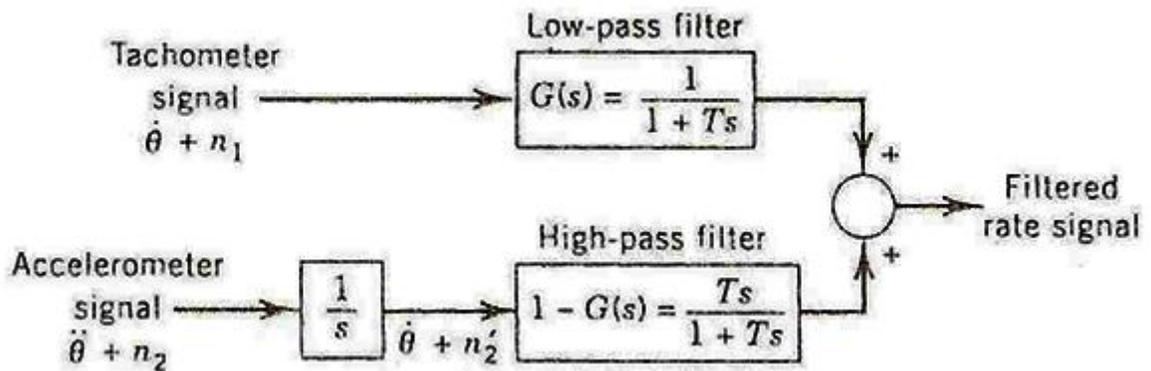


Figura 28. Filtro Complementario Conceptual que combinar señales de un tacómetro y un acelerómetro.

Ejemplo 4.6.

Digamos que un particular lazo cerrado de posición de un servo, es deseable añadir un valor de realimentación para que se mejore la estabilidad del sistema. El valor de la señal proviene de un tacómetro DC de magneto permanente montado sobre el eje de salida del servo. No obstante, es notado que la salida del tacómetro tiene ruido debido a la acción combinada del roce y la conmutación. Un filtro pasa bajos a la señal del tacómetro es una posibilidad, pero esto introduce un retardo no deseado dentro del valor de la señal. Alguien sugiere que si fuéramos a

añadir un acelerómetro angular (así como el tacómetro) en el eje de salida, luego podríamos usar un filtro complementario, obteniendo un valor de la señal limpia sin el habitual retardo.

El esquema sugerido se muestra en la figura 28. Este es un diagrama de bloques conceptual, porque evidentemente, no querríamos implementar una integración en el camino de la aceleración y luego seguir directamente con una diferenciación. La función de transferencia general para este camino es solo $T/(1 + Ts)$. Esto, por turno, puede ser combinado con el camino superior produciendo la simplificación del diagrama de bloques visto en la figura 29. No hemos intentado optimizar el filtro pasa bajos en este ejemplo. Sino más bien, escogimos la más simple forma para $G(s)$ para obtener el filtro pasa bajas. Por sencillez, hemos asumido que ambos n_1 y n_2 son ruidos de altas frecuencias. Este ha sido el caso, n_2 contendrá principalmente componentes de baja frecuencia debido a la integración. La constante de tiempo T puede ser ajustada para minimizar los efectos de las fuentes de ruido n_1 y n_2 , sujeto a la restricción sobre la forma que fue escogido $G(s)$. Es dejado como ejercicio encontrar el valor óptimo de T , entregar la densidad de potencia espectral de n_1 y n_2 (ver el problema 4.14).

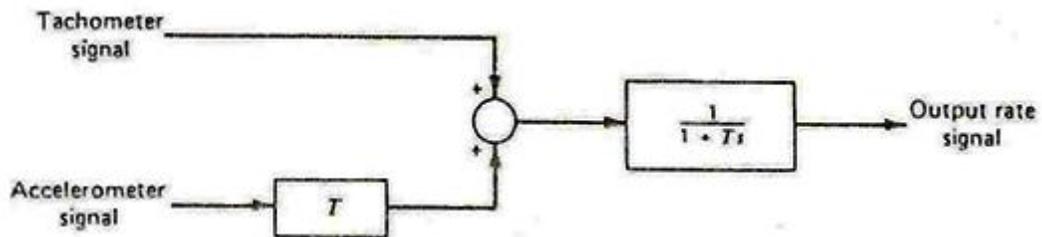


Figura 29. Filtro Complementario simplificado para combinar señales de un tacómetro y un acelerómetro.

El filtro complementario es fácilmente extendido en el caso de que se trabaje con más que dos señales. Todo lo que se tiene que hacer es dejar una de las características de transferencia por el complemento de la suma de las otras. Por ejemplo, para el caso de tres entradas, se deja:

$$G_1(s) = \text{Función de transferencia para la medida del ruido 1.}$$

$$G_2(s) = \text{Función de transferencia para la medida del ruido 2.}$$

$$1 - G_1(s) - G_2(s) = \text{Función de transferencia para la medida del ruido 3.}$$

Luego la componente de la señal pasa a través del sistema sin distorsiones, y se selecciona $G_1(s)$ y $G_2(s)$ tal que se obtenga la mejor supresión del ruido. El problema de determinar la optima $G_1(s)$ y $G_2(s)$ es un problema Wiener de dos entradas.

Es importante notar que la selección de la función de transferencia del filtro complementario no depende de ninguna suposición previa acerca de la estructura de la señal. Esta puede ser cualquiera noiselike o determinista, y el filtro complementario especial garantiza que la señal no será distorsionada de ninguna manera por la acción de filtrar. Por esta razón, el filtro complementario es solo referido como una mecanización dinámicamente exacta. Es un buen diseño y es una aplicación particular en situaciones donde el diseñador quiere un filtro que se las arregle razonablemente bien, con situaciones estadísticamente inusuales sin entregar grandes y desastrosos errores. Un estricto diseño Wiener con restricciones no complementarias es, por supuesto, escogido para minimizar el promedio del error cuadrático. Así que en la situación anormal, el error puede ser muy grande. Esto puede ser desastroso en algunas aplicaciones.

2.7.6 Filtro de wiener discreto.

La propuesta de Wiener para el filtrado menor-cuadrático es básicamente una propuesta de función ponderal. Cuando vimos esta forma, el problema básico siempre se reduce a: ¿cómo debe ser el historial de la entrada ponderado en orden para producir en el presente la mejor estimación de la variable de interés? Es instructivo ver como este enfoque es extendido en la situación de medidas discretas. Podríamos empezar por discretizar la función ponderal continua en la ecuación (141), y luego aproximar la integral en la ecuación con una suma finita. Esta aproximación no es necesaria, sin embargo, porque el problema del error cuadrático medio mínimo puede ser replanteado en términos del tiempo discreto y ser resuelto exactamente en su propio dominio. Este sería nuestro enfoque.

Considere la entrada al filtro, como una secuencia de medidas con ruido discretas z_1, z_2, \dots, z_n como se muestra en la figura 30.

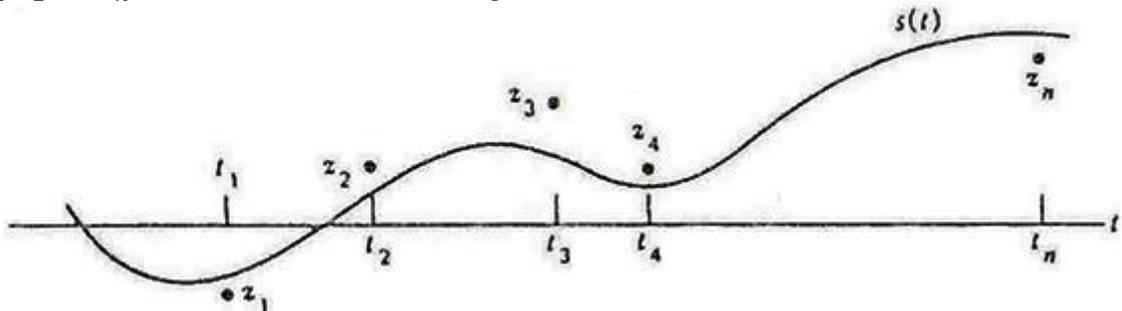


Figura 30. Situación de medidas discretas.

Estas son combinaciones aditivas de señales y ruido; de aquí, $z_1 = s_1 + n_1, z_2 = s_2 + n_2$, etc. Como antes, denotamos las salidas del filtro como x , y por lo tanto las muestras correspondientes a la salida son: x_1, x_2, \dots, x_n . Ahora escribimos las salidas en el tiempo t_n como una combinación lineal general de las medidas pasadas.

$$x_n = k_1 z_1 + k_2 z_2 + \dots + k_n z_n \quad (167)$$

El error del filtro puede luego ser escrito como:

$$e_n = s_n - x_n = s_n - (k_1 z_1 + k_2 z_2 + \dots + k_n z_n) \quad (168)$$

Entonces el error cuadrático medio es:

$$\begin{aligned} E(e_n^2) &= E[s_n - (k_1 z_1 + k_2 z_2 + \dots + k_n z_n)]^2 \\ &= E(s_n^2) + [k_1^2 E(z_1^2) + k_2^2 E(z_2^2) + \dots + k_n^2 E(z_n^2) + 2k_1 k_2 E(z_1 z_2) + 2k_1 k_3 E(z_1 z_3) + \dots] \\ &\quad - [2k_1 E(z_1 s_n) + 2k_2 E(z_2 s_n) + \dots + 2k_n E(z_n s_n)] \end{aligned} \quad (169)$$

Ahora deseamos encontrar k_1, k_2, \dots, k_n tal que minimice $E(e_n^2)$. Los métodos usuales del cálculo diferencial conducen al siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} E(z_n^2) & E(z_1 z_2) & \dots & \dots \\ E(z_2 z_1) & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ E(z_n z_1) & & & E(z_n^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(z_1 s_n) \\ E(z_2 s_n) \\ \vdots \\ E(z_n s_n) \end{bmatrix} \quad (170)$$

Justo como en el problema continuo, asumimos que las funciones de auto- y cross-correlación de la señal y el ruido son conocidas, así que todas las expectativas indicadas en la ecuación (170) están disponibles y la ecuación puede ser resuelta por los factores de peso k_1, k_2, \dots, k_n . Note que el problema crece en tamaño con cada nueva medida como n incrementos en tiempo. También, note que en nuestra notación el orden de los factores de peso es opuesto al que corresponde en el problema continuo. Es decir, el "ultimo" factor de peso k_n es el peso entregado por la última medida en el tiempo t_n , mientras que el correspondiente ponderado en el caso continuo es "empezando" en el valor de $g(u)$, es decir, $g(0)$ (Ver la ecuación 138). Debe estar claro que el tamaño del problema puede fácilmente salirse de las manos numéricamente cuando n se

hace grande. Hay un caso especial que bastante manejable, aunque, se verá más adelante con algún detalle.

Suponga considerar el problema estacionario y suponga además que la auto- y cross-correlación para z y s se hace pequeña como el “lapso” entre ellos se hace grande. Es entonces razonable suponer que la cadena de factores de peso puede ser truncada un poco para valores un poco grandes de n . Esto es decir (en nuestra notación) que si vamos hacia atrás y miramos a k_n, k_{n-1}, \dots, k_1 , el factor de peso k_1 (y pesos cercanos) serán insignificantes. Ahora imagine una situación estacionaria en tiempo real, donde solamente guardamos las n medidas más recientes. Como el tiempo evoluciona, cada vez que tomamos una nueva medida, la añadimos a nuestro conjunto de las mediciones y descartamos las más viejas.

3 METODOLOGÍA.

3.1 LOCALIZACIÓN.

El proyecto se llevó a cabo en Colombia, principalmente en las instalaciones de la Universidad del Cauca de la ciudad de Popayán, bajo el programa de Ingeniería Física.

3.2 LISTA DE MATERIALES Y EQUIPOS.

Los dispositivos utilizados en el desarrollo e implementación de la unidad de medida inercial son:

3.2.1 Materiales.

- ✓ Giróscopos ADXRS300.
- ✓ Acelerómetro ADXZL330.
- ✓ Procesadores Digital de Señal dsPIC33FJ710MC.
- ✓ Dispositivos electrónicos para acondicionamiento de señal.
- ✓ Board de desarrollo, resistencias, capacitores, etc.

3.2.2 Equipos.

- ✓ Computador.
- ✓ Programador para DSP (ICD 2).
- ✓ Multímetros.
- ✓ Osciloscopio.
- ✓ Otros.

3.3 METODOLOGÍA DE TRABAJO.

La primera parte del proyecto se fundamentó en un diseño preliminar hardware y software acerca de la unidad de medida inercial, basado en la generalidad y actualidad de este tipo de instrumento de medida.

La escogencia de los transductores a utilizar en la IMU fue esencial. La selección de estos dispositivos se basó en un estudio detallado del diseño hardware del instrumento. La caracterización de los sensores elegidos mostro el comportamiento experimental de los dispositivos, con base a esta caracterización se realizaron los ajustes necesarios. Posteriormente se definieron el tipo de acondicionadores de señal analógica y se utilizó el dsPIC33FJ710MC como ordenador principal el cual entrega los datos obtenidos utilizando la comunicación serial RS232.

Por consiguiente se realizó un análisis preciso de los algoritmos de determinación de la actitud/orientación del satélite, dicha operación se llevó a cabo con el fin de implementar los algoritmos en el PC utilizando el software adecuado.

Luego se realizó la simulación y evaluación de los algoritmos implementados para la IMU, entregando una aproximación real del comportamiento del sistema.

Ya en este momento, donde se cuenta con el diseño hardware y el diseño software elegido y evaluado; y por ende han completado las etapas preliminares de desarrollo, se implementó la unidad de medida inercial donde se acoplaron: los giróscopos, los acelerómetros y el procesador digital de señal, teniendo en cuenta la disposición recomendada para cada dispositivo sin olvidar las etapas a las que conlleva cada ensamblaje.

4. RESULTADOS.

Los objetivos del proyecto fueron alcanzados satisfactoriamente recordemos más adelante uno a uno y analicemos las respuestas obtenidas.

El objetivo general es “Diseñar e implementar una unidad de medida inercial para la determinación de la actitud/orientación de un Pico satélite”.

Para la consecución del objetivo general se inició con el cumplimiento de los objetivos específicos.

4.1 DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE LA PLATAFORMA HARDWARE.

Diseñar y construir la plataforma hardware del sistema de medición inercial, lo cual involucra la selección de transductores, los acondicionadores de señal analógica, el tipo de procesador embebido (DSP o FPGA) y los protocolos de comunicación.

Para el diseño hardware del instrumento se realizó un estudio acerca de los sensores necesarios para el sensado de aceleraciones lineales, velocidades angulares y la forma de tomar estas mediciones en un tiempo establecido, además de las etapas de acondicionamiento de señal. También se requirió un procesador embebido capaz de procesar la información suministrada por los sensores.

En la escogencia de todos los componentes hardware se tuvo en cuenta las características eléctricas (consumo de energía, etc.) y los rangos de operación (temperaturas de trabajo, etc.) de los dispositivos al igual que su tamaño.

Las conclusiones del estudio mencionado arrojó que los transductores adecuados a utilizar para este instrumento de medida son:

- Giróscopo ADXRS300, fabricado por analog devices y con un rango de trabajo de $\pm 300^\circ/\text{s}$.
- Acelerómetro ADXZL330, fabricado por analog devices, con un rango de trabajo de $\pm 3,0 \text{ g}$ y de bajo consumo de energía.

- Procesador digital de señal dsPIC33FJ710MC, fabricado por microchip, procesamiento a 40 MIPS y bajo consumo de energía.
- Otros, para el acondicionamiento de señal.

Partiendo de los requerimientos hardware fue necesario incluir tres giróscopos, ya que cada uno de ellos va asignado a un eje perteneciente a un triedro de referencia. El chip ADXZL330 escogido incluye tres acelerómetros alineados (en un triedro de referencia) dentro de la capsula de silicio, por lo tanto con una sola unidad es suficiente. En la figura 31 se muestra el esquema del diseño hardware de la unidad de medida inercial.

Diseño e Implementación de una Unidad de Medida Inercial para la determinación de la Actitud/Orientación (Attitude Determination) de un Pico satélite.

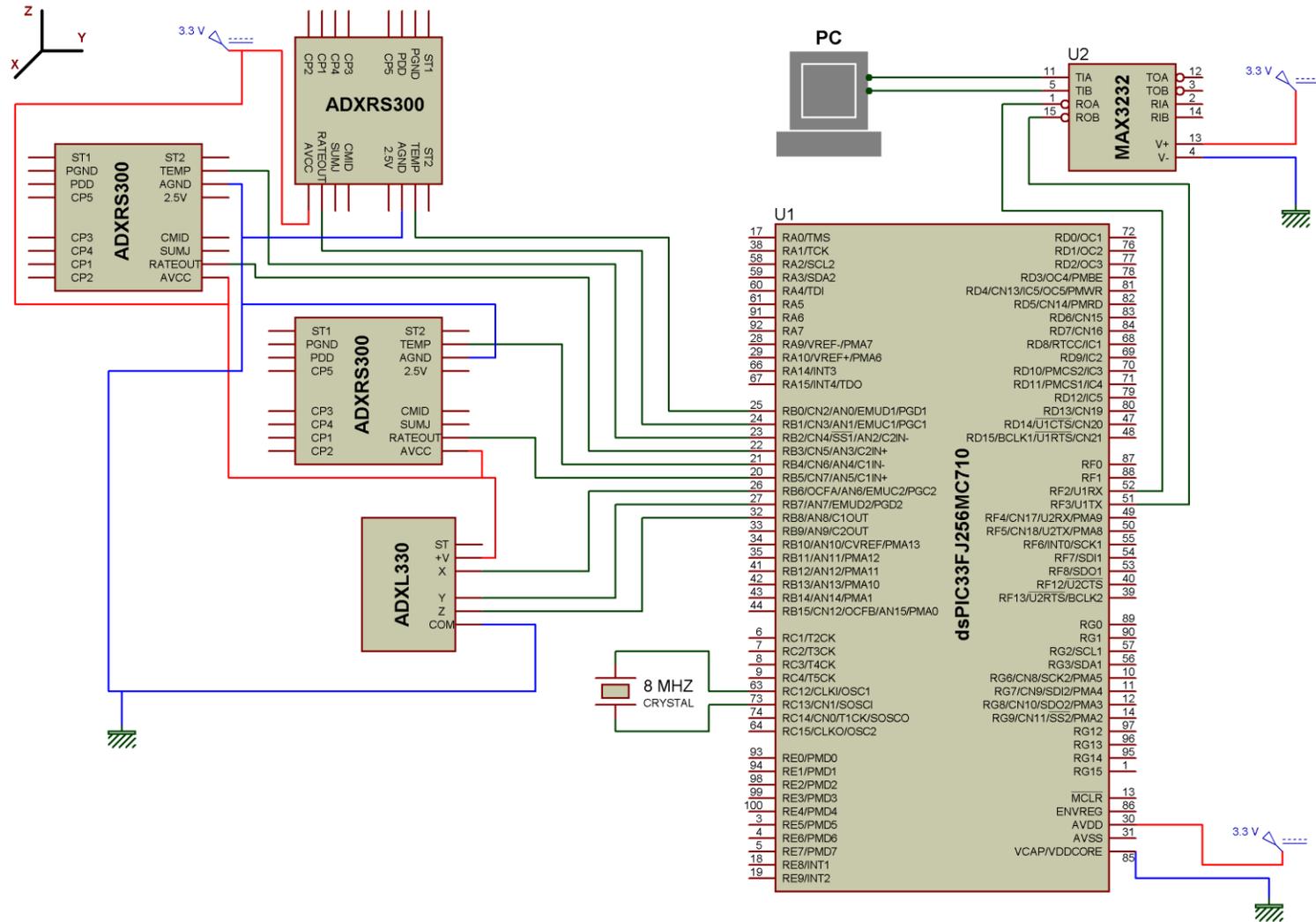


Figura 31. Diseño hardware de la unidad de medida inercial.

En este momento donde ya se contaban con todos los sensores y el DSP seleccionado, se escoge el protocolo de comunicación serial, indicando que las mediciones realizadas por la IMU van a ser entregadas por RS232 en un formato estándar.

La figura 32 muestra la plataforma hardware de la unidad de medida inercial.

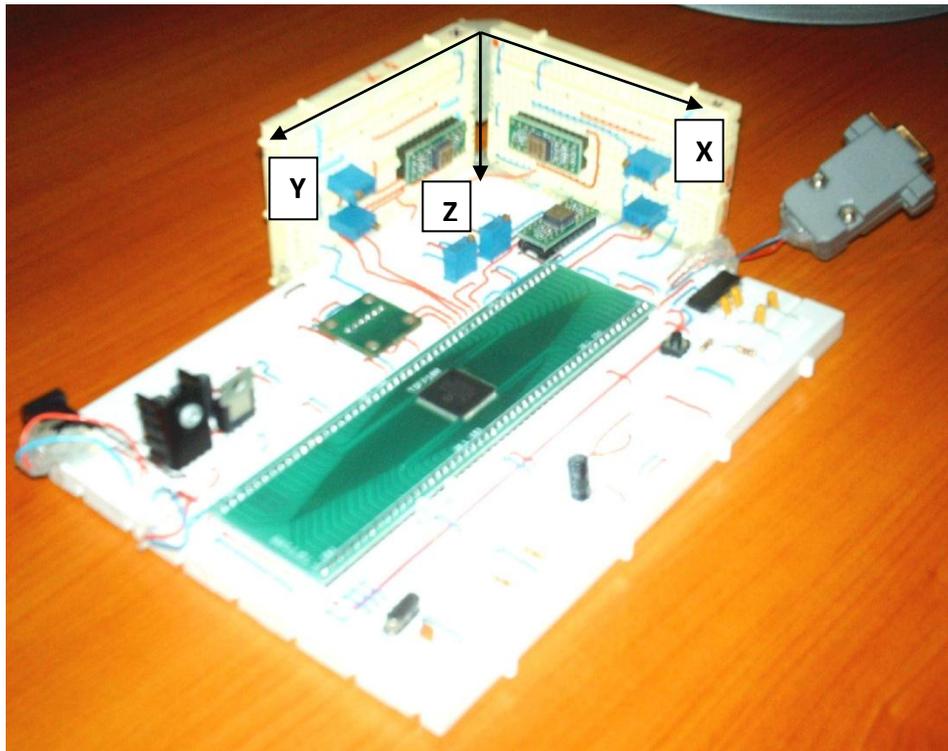


Figura 32. Disposición de los sensores de acuerdo a los ejes ligados al cuerpo, acondicionadores de señal y ordenador de la unidad de medida inercial en la plataforma hardware.

4.2 CARACTERIZACIÓN DE LOS SENSORES.

Para la caracterización de los sensores fue necesaria la implementación de un sistema de adquisición de datos, que pueda recepcionar al menos nueve señales (tres señales pertenecientes a los giróscopos, tres provenientes del acelerómetro, tres correspondientes a las temperaturas de los giróscopos) análogas.

A continuación se muestra el diagrama de bloques correspondiente al acondicionamiento de la señal y a su conversión de analógica a digital con ayuda del ADC del DSP.

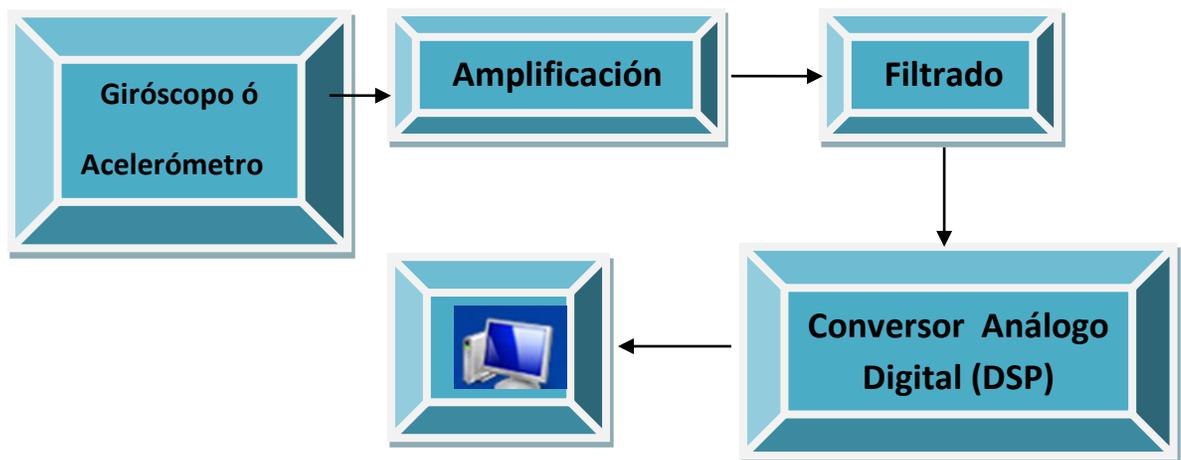


Figura 33. *Diagrama de bloques del sistema de adquisición de datos implementado para cada señal.*

La interfaz computador – sistema de adquisición para la recepción de las señales al PC fue realizada con la ayuda labView versión estudiante.

En la figura 34 se puede observar la interfaz computacional para el sistema de adquisición de datos (de más de nueve señales) desarrollado en labView.

Diseño e Implementación de una Unidad de Medida Inercial para la determinación de la Actitud/Orientación (Attitude Determination) de un Pico satélite.

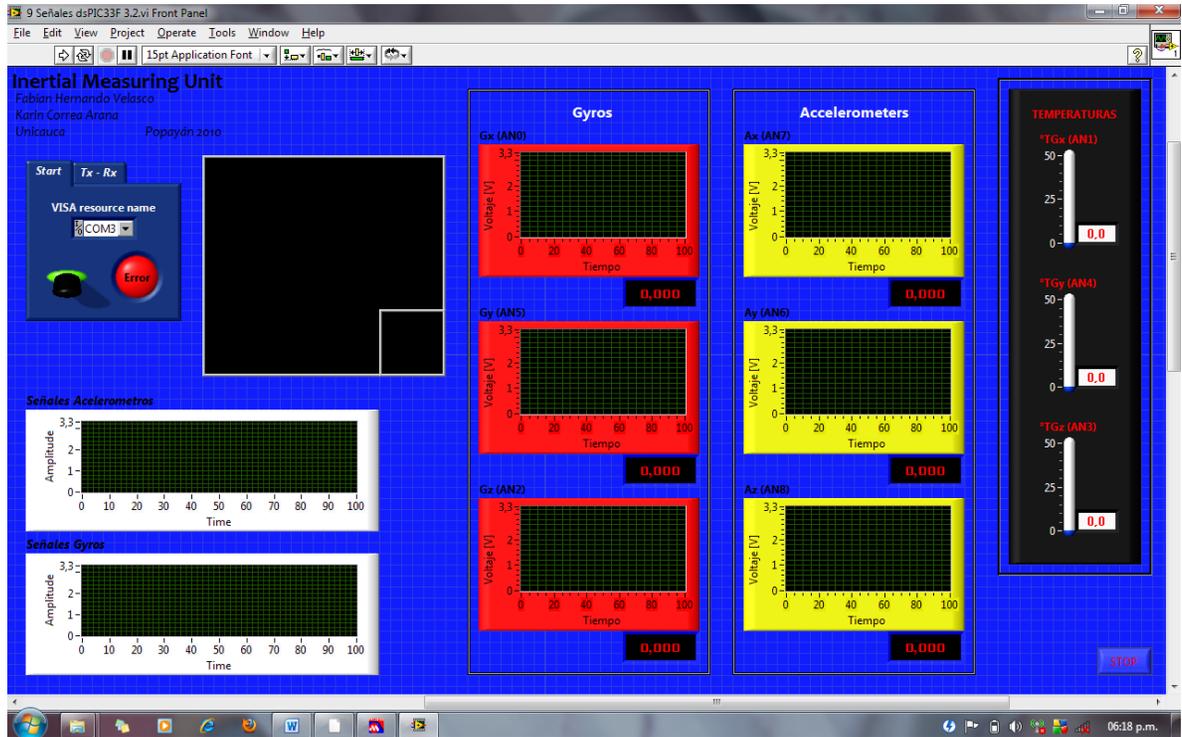


Figura 34. Esquema de recepción de señales de los acelerómetros, giróscopos y temperatura de los giróscopos en labView.

Para iniciar la adquisición de las señales el sistema es encendido a través del botón verde al lado superior izquierdo, seguido de un indicador de error que proporciona la información del funcionamiento adecuado del sistema de adquisición.

En la interfaz contamos con graficas rojas que son utilizadas para conocer el comportamiento de los giróscopos, en ellas se lee el voltaje proporcional entregado por el giróscopo como respuesta a la velocidad angular medida por el dispositivo, se utilizan tres graficas rojas ya que por cada eje (x, y, z) está dispuesto un giróscopo ADXRS300. Similarmente se cuenta con tres graficas amarillas que son utilizadas para conocer el comportamiento de los acelerómetros, el dispositivo entrega un voltaje proporcional a las aceleraciones lineales captadas. En esta interfaz también se recibe la información de las temperaturas a la que se encuentra cada giróscopo, utilizadas para inferir que los sensores estén en su rango de operación (observe al lado derecho los termómetros). También se

cuenta con dos graficas (blancas), en una de ellas se comparan los voltajes entregados por los tres giróscopos y en la otra los voltajes de entregados por los tres acelerómetros, indicándonos si hay correspondencia en el comportamiento de las señales.

Una vez puesto a punto el sistema de adquisición de datos se realizaron las siguientes pruebas para conocer la respuesta de cada dispositivo, sin olvidar que la respuesta ideal del giróscopo ADXRS300 es:

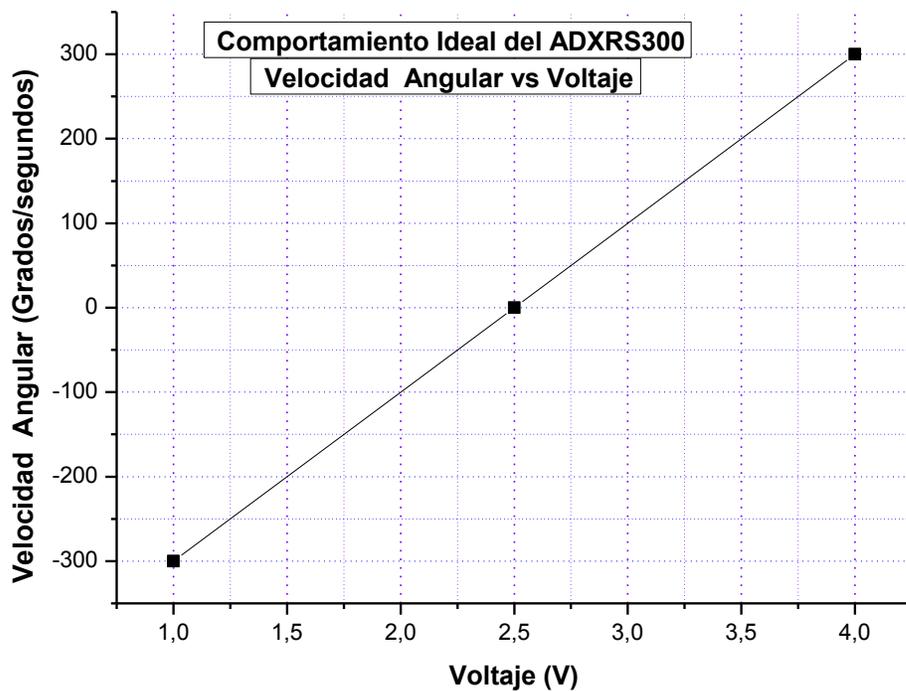


Figura 35. Respuesta ideal del giróscopo ADXRS300 en el rango de operación de $\pm 300^\circ/s$.

4.2.1 PRUEBA 1. CARACTERIZACION DE LOS GIROSCOPOS CON LA PLATAFORMA EN EQUILIBRIO.

Los resultados obtenidos en la caracterización de los giróscopos, en equilibrio son los siguientes.

Cabe resaltar que el voltaje entregado por los dispositivos en esta prueba corresponde a una velocidad angular que tiende a cero °/s.

Giróscopo en X (giro alrededor del eje X- Roll rate).

El valor correspondiente a ω_x cuando tiende a 0 °/s en voltaje es $2,47V \pm 0,005V$.

Giróscopo en Y (giro alrededor del eje Y- Pitch rate).

El valor correspondiente a ω_y cuando tiende a 0 °/s en voltaje es $2,45V \pm 0,005V$.

Giróscopo en Z (giro alrededor del eje Z- Yaw rate).

El valor correspondiente a ω_z cuando tiende a 0 °/s en voltaje es $2,45V \pm 0,005V$

Los valores entregados por los tres giróscopos están muy cerca del valor ideal de voltaje entregado cuando el dispositivo esta en equilibrio (0 °/s), las desviaciones presentes a los voltajes obtenidos con respecto al valor ideal son introducidos generalmente por el drift.

4.2.2 PRUEBA 2. CARACTERIZACION DE LOS GIROSCOPOS CON LA PLATAFORMA GIRANDO A 33 RPM.

Los resultados obtenidos en la caracterización de los giróscopos girando a 33 RPM son los siguientes.

Cabe resaltar que el voltaje entregado por los dispositivos en esta prueba corresponde a una velocidad angular que tiende a ± 198 °/s. Observemos primero la respuesta ideal del ADXRS300 entre ± 198 °/s.

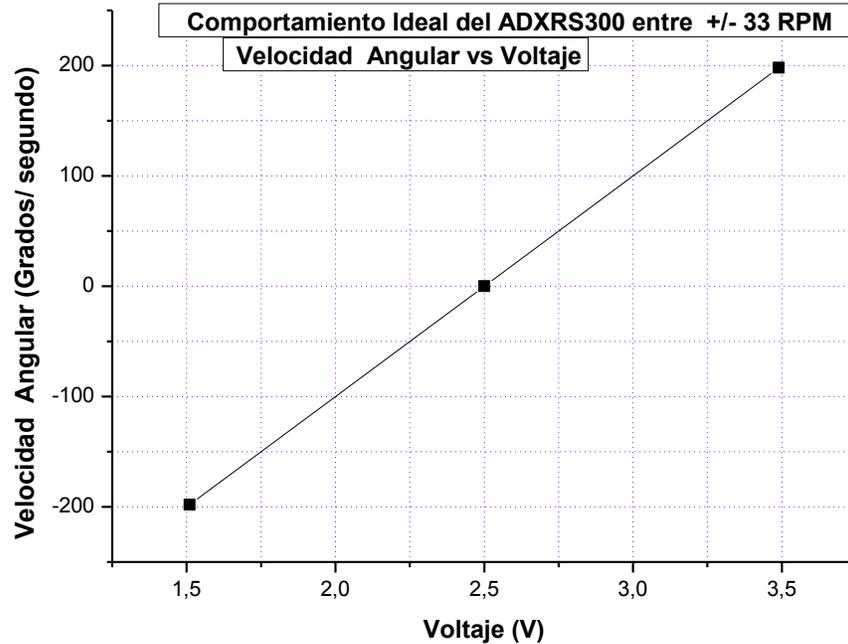


Figura 36. Respuesta ideal del giróscopo ADXRS300 en el rango de operación de ± 198 °/s.

Giróscopo en X (giro alrededor del eje X- Roll rate).

El valor correspondiente a ω_x cuando tiende a -198 °/s en voltaje es $1,51V \pm 0,005V$ y cuando tiende a 198 °/s es $3,52V \pm 0,005V$.

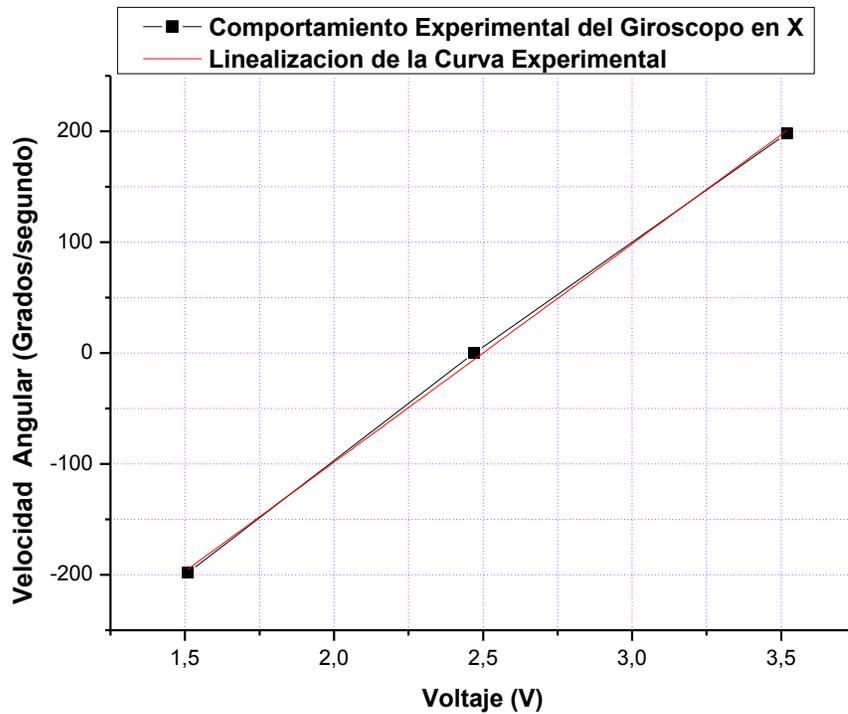


Figura 37. Comportamiento experimental del gir6scopo en X en un rango ± 198 $^{\circ}/s$ (curva negra) y linealizaci6n de la curva experimental (roja).

Gir6scopo en Y (giro alrededor del eje Y- Pitch rate).

El valor correspondiente a ω_y cuando tiende a $-198^{\circ}/s$ en voltaje es $1,36V \pm 0,005V$ y cuando tiende a $198^{\circ}/s$ es $3,39V \pm 0,005V$.

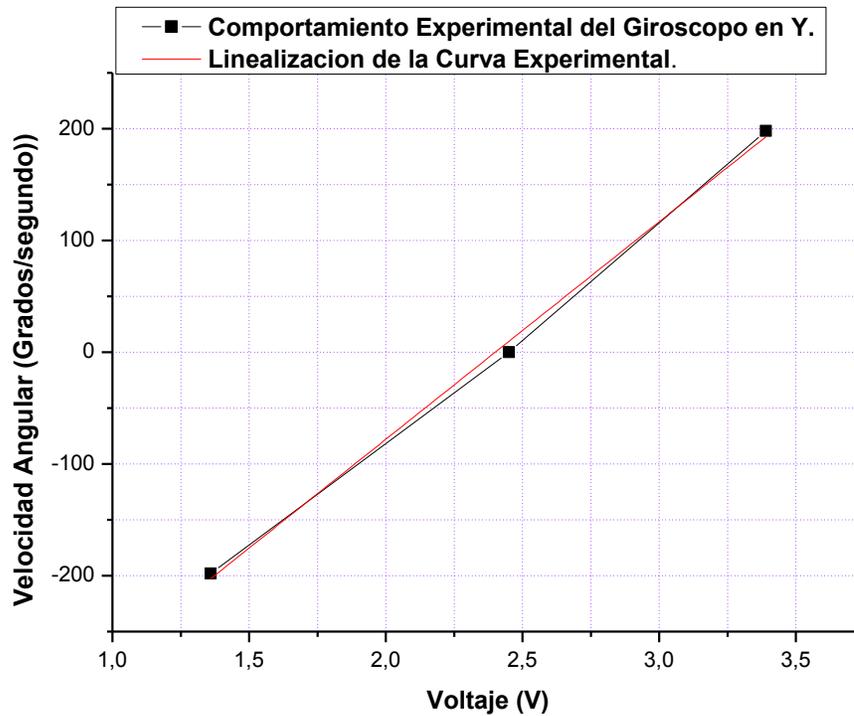


Figura 38. *Comportamiento experimental del giróscopo en Y en un rango ± 198 °/s (curva negra) y linealización de la curva experimental (roja).*

Giróscopo en Z (giro alrededor del eje Z- Yaw rate).

El valor correspondiente a ω_z cuando tiende a -198 °/s en voltaje es $1,38V \pm 0,005V$ y cuando tiende a 198 °/s es $3,37V \pm 0,005V$.

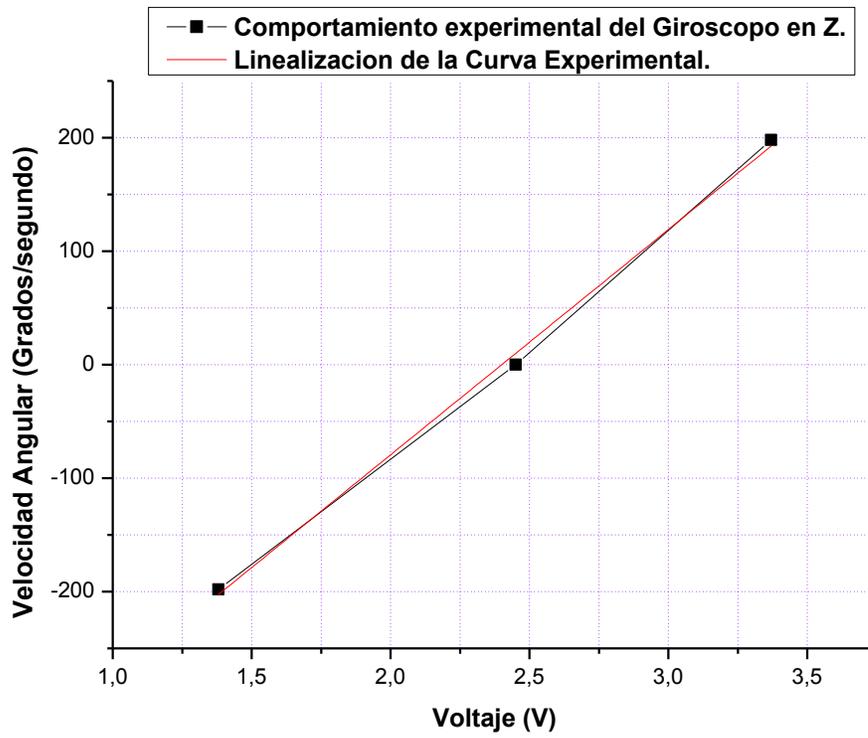


Figura 39. Comportamiento experimental del giróscopo en Z en un rango ± 198 °/s (curva negra) y linealización de la curva experimental (roja).

4.2.3 PRUEBA 3. CARACTERIZACION DE LOS ACELERÓMETROS CON LA PLATAFORMA EN EQUILIBRIO.

Los resultados obtenidos en la caracterización de los acelerómetros en equilibrio son los siguientes. Cabe resaltar que el voltaje entregado por los dispositivos en esta prueba corresponde a una aceleración que tiende a cero g en los ejes x y y . Para el eje z corresponde a una aceleración de $1g$ debida a la gravedad (por ser caracterizado en tierra).

Acelerómetro en X (aceleración a lo largo del eje X).

El valor correspondiente a $a_x=0g$ es $1,63V \pm 0,005V$.

Acelerómetro en Y (aceleración a lo largo del eje Y).

El valor correspondiente a $a_y=0g$ es $1,62V \pm 0,005V$.

Acelerómetro en Z (aceleración a lo largo del eje Z).

El valor correspondiente a $a_z=1g$ es $1,25V \pm 0,005V$.

NOTA: los valores de voltaje entregados por los transductores corresponden al promedio de 10 mediciones, cada medición es realizada con una duración de diez minutos.

De acuerdo a la caracterización de los transductores se concluye que los giróscopos ADXRS300 y los acelerómetros ADXLZ330 son lineales en los rangos de trabajo antes mencionados y se implementan las funciones de transferencia de cada uno de los sensores dentro del DSP.

4.1 DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DE ACTITUD DEL PICO SATÉLITE.

Diseñar e implementar el algoritmo para la determinación de actitud/orientación en un sistema espacial (Pico satélite) de órbita baja LEO, basado en las técnicas strap-down y los filtros complementarios.

El diseño del algoritmo para la determinación de la actitud del pico satélite se basa en la estimación de los ángulos de orientación en el body frame con respecto a un triedro de referencia en tierra. Los cambios de la actitud del pico satélite son determinados utilizando técnicas strap-down en donde la plataforma de los sensores inerciales es fija y las posibles rotaciones en los ejes del triedro de referencia del vehículo (body frame) se realizan con modelos fisicomatématicos. Cabe resaltar que para la estimación de cada ángulo de orientación (respecto a cada eje) se implementó un filtro de Wiener (una primera aproximación al filtro de Kalman) para combinar de manera adecuada la información brindada por el giróscopo y el acelerómetro.

Esquema general para la estimación de cada ángulo de orientación del pico satélite:

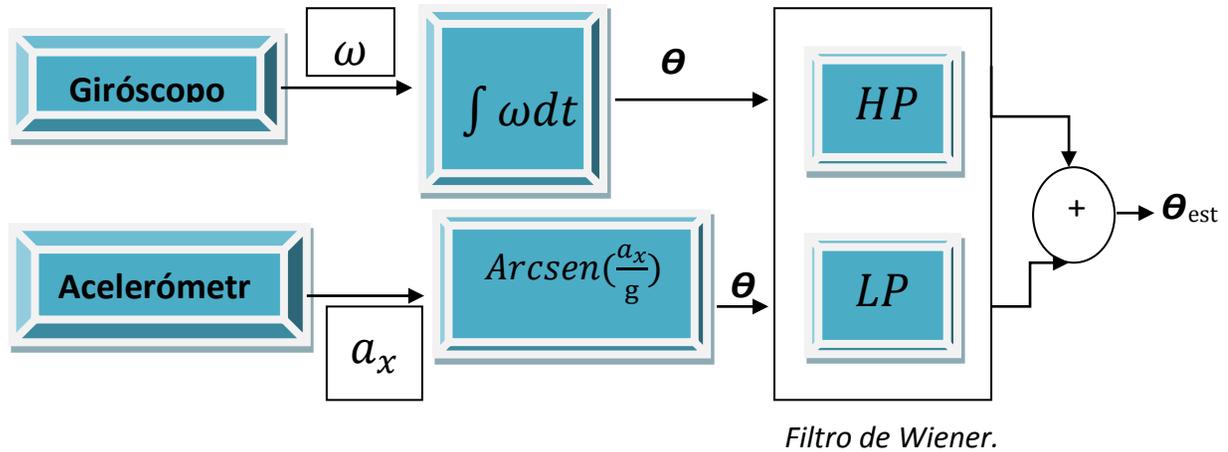


Figura 40. Diagrama de bloques para la estimación de un ángulo de orientación utilizando la información brindada por el giróscopo y el acelerómetro.

DESARROLLO DEL FILTRO BUTTERWORTH DE CUARTO ORDEN (n=4).

Polos $2n = 8$.

$k = 1,2,3,4,5,6,7,8$.

Como $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, entonces se tiene:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{8}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{8}, \quad \theta_3 = \frac{5\pi}{8}, \quad \theta_4 = \frac{7\pi}{8}, \quad \theta_5 = \frac{9\pi}{8}, \quad \theta_6 = \frac{11\pi}{8}, \quad \theta_7 = \frac{13\pi}{8}, \quad \theta_8 = \frac{15\pi}{8}.$$

Si $A_p = 3_{dB}$ entonces:

$$\epsilon^2 = 10^{0.1A_p} - 1 = 0,995$$

$$\epsilon^2 = 0,995.$$

Utilizando $R = (1/\epsilon)^{1/n}$, se obtiene:

$$R = (1/0,997)^{1/4} = 1,001 \approx 1.$$

Luego $p_k = -R \operatorname{sen} \theta_k + jR \operatorname{cos} \theta_k$, entonces:

$$p_1 = -0,383 + 0,924j$$

$$p_2 = -0,924 + 0,383j$$

$$p_3 = -0,924 - 0,383j$$

$$p_4 = -0,383 - 0,924j$$

$$p_5 = 0,383 - 0,924j$$

$$p_6 = 0,924 - 0,383j$$

$$p_7 = 0,924 + 0,383j$$

$$p_8 = 0,383 + 0,924j$$

Las orientaciones de los polos en el semiplano izquierdo son: $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}]$ rad.

Por lo tanto, las posiciones de los polos son:

$$s = -0,383 \pm 0,924j$$

$$s = -0,924 \pm 0,383j$$

Ahora tenemos:

$$H_p(s) = \frac{K}{Q_p(s)} \quad ; \quad Q_p(s) = \prod_{k=1}^n (s - p_k) \quad ; \quad K = Q_p(0) = \prod_{k=1}^n p_k$$

$$Q_p(s) = (s - (-0,383 + 0,924j))^* (s - (-0,383 - 0,924j))^* (s - (-0,924 + 0,383j))^* (s - (-0,924 - 0,383j)).$$

Operando se tiene:

$$Q_p(s) = [s^4 + 2,614s^3 + 3,418s^2 + 2,617s + 1]$$

Hallando K :

$$K = Q_p(0)$$

$$K = (-0,383 + 0,924j)(-0,924 + 0,383j)(-0,924 - 0,383j)(-0,383 - 0,924j)$$

Realizando los cálculos necesarios:

$$K \approx 1.$$

Por lo tanto la función de transferencia para un filtro butterworth de cuarto orden a una frecuencia de corte $w = 1 \text{ rad/s}$ es:

$$H_p(s) = \frac{1}{[s^4 + 2,614s^3 + 3,418s^2 + 2,617s + 1]}$$

Con la función de transferencia anterior se pueden obtener las transformaciones prototipo, para obtener los filtros requeridos a las frecuencias necesarias del acelerómetro y giróscopo.

Filtro Pasa Bajas para el Acelerómetro.

La transformación prototipo necesaria a utilizar en este caso es:

$$s \Rightarrow \frac{s}{w_x}$$

$$w_x = 2\pi f, \quad f = 50 \text{ Hz}, \quad w_x = 314,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Y reemplazando el valor de w_x , se obtiene:

$$s \Rightarrow \frac{s}{314,2}$$

La función de transferencia del filtro pasa bajas a la frecuencia mencionada es:

$$L_p(s) = \frac{1}{[s^4 + 821,3s^3 + 337400s^2 + 81180000s + 1]}$$

La respuesta del filtro Pasa bajas diseñado (acelerómetro) es mostrada en la figura 41.

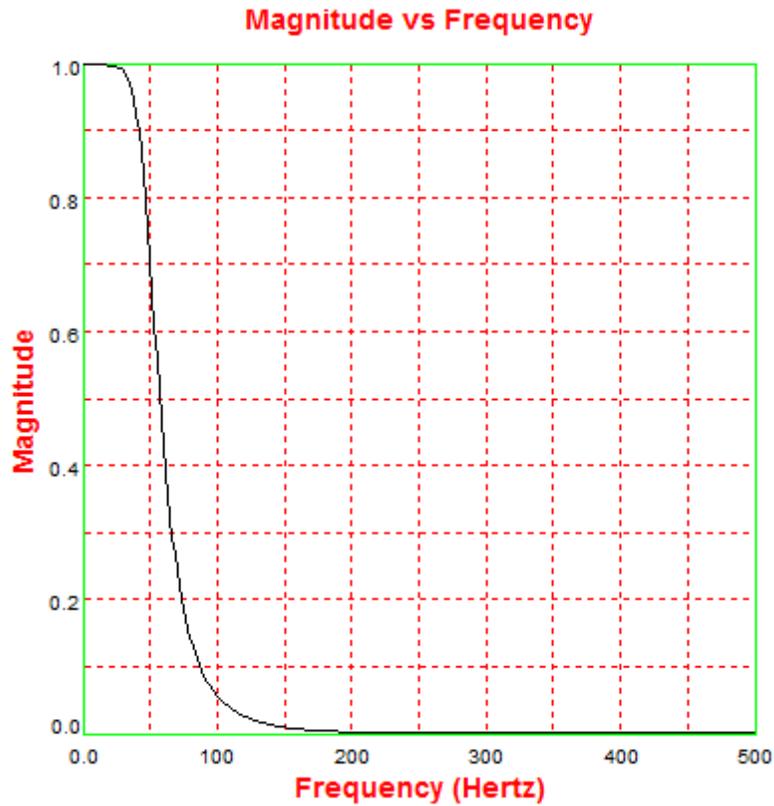


Figura 41. Respuesta del filtro pasa bajas para la señal proveniente del acelerómetro.

Filtro Pasa Altas para el Giróscopo.

La transformación prototipo necesaria a utilizar en este caso es:

$$s \Rightarrow \frac{w_y}{s}$$

$$w_y = 2\pi f \quad , \quad f = 40 \text{ Hz}, \quad w_y = 251,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Y reemplazando el valor de w_y , se obtiene:

$$s \Rightarrow \frac{251,3}{s}$$

La función de transferencia del filtro pasa altas a la frecuencia mencionada es:

$$H_{pa}(s) = \frac{s^4}{[s^4 + 657,6s^3 + 215800s^2 + 41480000s + 3988000000]}$$

La respuesta del filtro Pasa Altas diseñado (giróscopo) es mostrada en la figura 42.

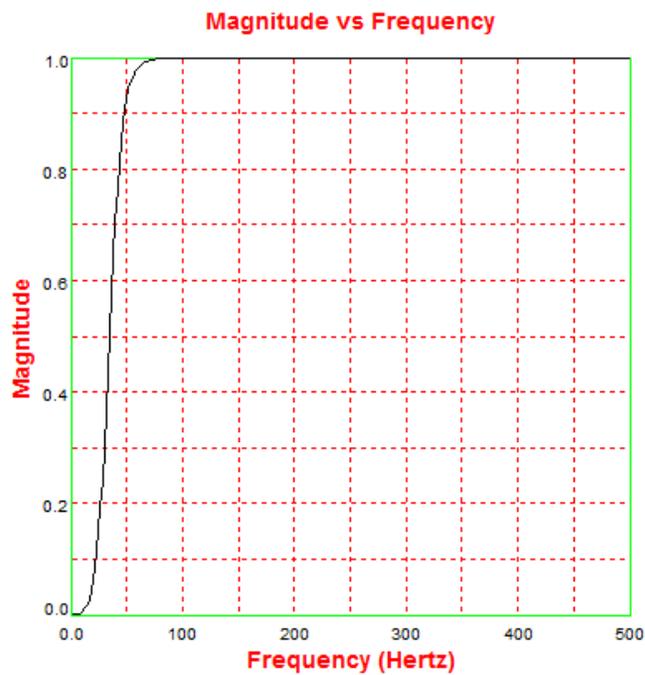
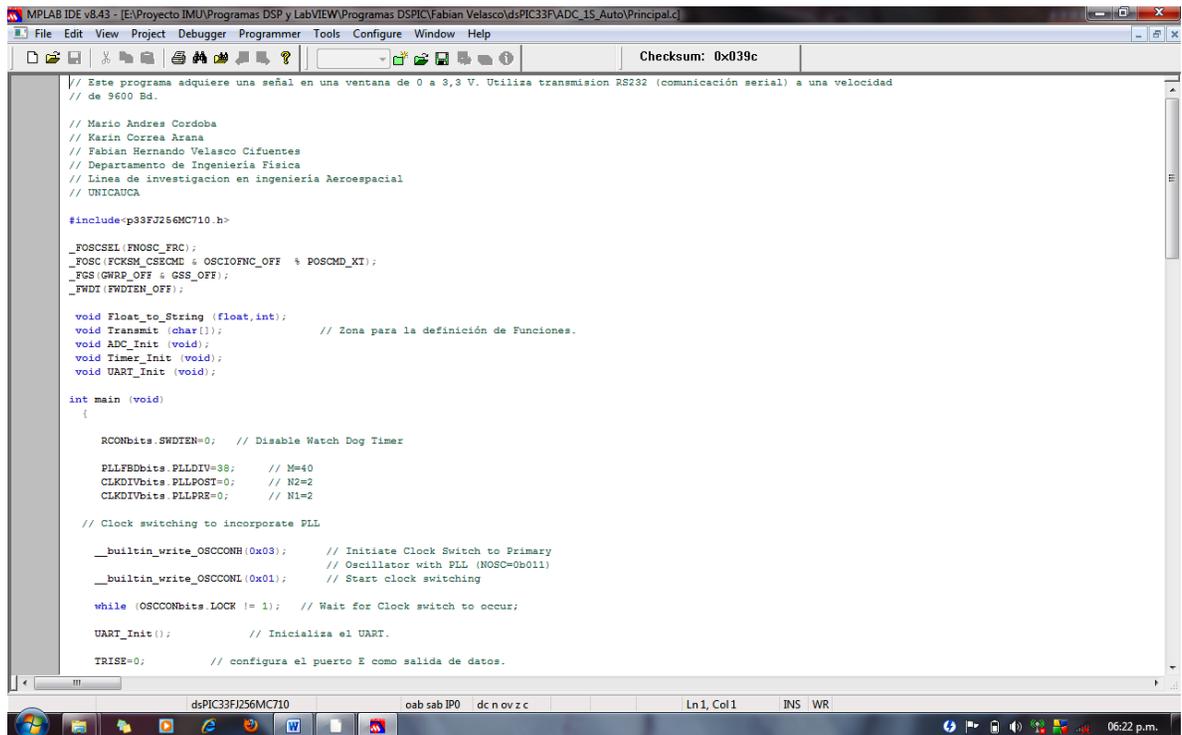


Figura 42. *Respuesta del filtro pasa altas para la señal proveniente del giróscopo.*

En este momento ya contamos con las funciones del filtro pasa bajas y pasa altas y con una respuesta adecuada, ya se puede implementar el filtro complementario de acuerdo al diagrama de bloques de la figura 40.

El algoritmo para la estimación de la actitud del pico satélite esta descrito en el lenguaje C30 versión estudiante bajo el entorno de desarrollo MpLab IDE de microchip y el cual es embebido en el dsPIC33FJ710MC. En la figura 43 se puede observar parte del algoritmo desarrollado para la determinación de la actitud del Pico satélite. A continuación se hará un desglose del programa implementado y de las etapas a tener en cuenta en el desarrollo del algoritmo.



```
// Este programa adquiere una señal en una ventana de 0 a 3,3 V. Utiliza transmisión RS232 (comunicación serial) a una velocidad
// de 9600 Bd.

// Mario Andres Cordoba
// Karin Correa Arana
// Fabian Hernando Velasco Cifuentes
// Departamento de Ingenieria Fisica
// Linea de investigacion en ingenieria Aeroespacial
// UNICAUCA

#include<p33fj256mc710.h>

_FOSCSEL (_FNOSC_FRC);
_FOSC (_FCKSM_CSECMD & OSCIOFNC_OFF & POSCMD_XTI);
_FGS (_GWRP_OFF & GSS_OFF);
_FWDT (_FWDTEN_OFF);

void Float_to_String (float,int);
void Transmit (char[]); // Zona para la definición de Funciones.
void ADC_Init (void);
void Timer_Init (void);
void UART_Init (void);

int main (void)
{
    RCONbits.SWDTEN=0; // Disable Watch Dog Timer

    PLLFBDbits.PLLDIV=38; // M=40
    CLKDIVbits.PLLPOST=0; // N2=2
    CLKDIVbits.PLLPRE=0; // N1=2

    // Clock switching to incorporate PLL
    __builtin_write_OSCCONH (0x03); // Initiate Clock Switch to Primary
    // Oscillator with PLL (NOSC=0b011)
    __builtin_write_OSCCONL (0x01); // Start clock switching

    while (OSCCONbits.LOCK != 1); // Wait for Clock switch to occur;

    UART_Init(); // Inicializa el UART.

    TRISE=0; // configura el puerto E como salida de datos.
```

Figura 43. Ambiente de desarrollo de los algoritmos para la determinación de la actitud.

Etapas a tener en cuenta en desarrollo del algoritmo de determinación de actitud usando un dsPIC33FJ256MC710.

- Configuración del sistema de reloj.
- Sincronización del software con el hardware para puesta en marcha de la IMU.
- Inicialización del módulo ADC para la adquisición de las señales provenientes de los sensores.
- Configuración del módulo DMA para la optimización del proceso de conversión Analógico Digital de las señales.

- e. Procesamiento de las señales digitalizadas.
- f. Preparación de los datos para ser transmitidos vía Puerto serial protocolo RS2-32.
- g. Trasmisión de los datos desde la IMU al computador.

Observemos el diseño software implementado (desarrollado en lenguaje C) y embebido en el DSP es cual se encarga de la ejecución de los algoritmos de determinación de actitud/orientación del pico-satélite.

PRINCIPAL.

```
int main (void)
{
  PLLFBDbits.PLLDIV = 38;
  CLKDIVbits.PLLPOST = 0;
  CLKDIVbits.PLLPRE = 0;
  __builtin_write_OSCCONH(0x03);
  __builtin_write_OSCCONL(0x01);
  while (OSCCONbits.COSC != 0b011);
  while (OSCCONbits.LOCK != 1){};
  int i=0,z=0,recibido;
  char D[8];
  D[0]='S'; D[1]='i'; D[2]='g'; D[3]='n'; D[4]='O'; D[5]='f';D[6]='f'; D[7]=13;
  U1MODEbits.UARTEN=1;
  do
  {
    int k=0;
    U1STAbits.UTXEN=1;
    for(z=0;z<2;z++)
    {
      for(i=0;i<4;i++)
      {
        U1TXREG = D[k];
        k++;
      }
      while(!U1STAbits.UTXBF && !U1STAbits.TRMT);
    }
    while(!U1STAbits.UTXBF && !U1STAbits.TRMT);
    if(U1STAbits.FERR == 1)
    {
      continue;
    }
  }
}
```

```
    }  
if(U1STAbits.OERR == 1)  
    {  
        U1STAbits.OERR = 0;  
    continue;  
    }  
if(U1STAbits.URXDA == 1)  
    {  
    recibido = U1RXREG;  
    }  
    }  
while (recibido != 97);  
return 0;  
}
```

CONFIGURACION DE LA DMA, ADC Y TIMER.

```
#include<p33FJ256MC710.h>  
  
#define fcy 40000000  
  
intBufferA[9][1] __attribute__((space(dma),aligned(16)));  
  
voidProcessADCSamples(int * AdcBuffer);  
  
void cfg_adc1(void)  
{  
    AD1CON1bits.FORM = 0;  
    AD1CON1bits.SSRC = 2;  
    AD1CON1bits.ASAM = 1;  
    AD1CON1bits.AD12B = 1;  
    AD1CON2bits.CSCNA = 1;  
    AD1CON2bits.CHPS = 0;  
    AD1CON3bits.ADRC = 0;  
    AD1CON3bits.ADCS = 4;  
    AD1CON1bits.ADDMABM = 0;  
    AD1CON2bits.SMPI = 8;  
  
    scannedProcessADCSamples(&BufferB[0][0]);  
  
    AD1CON4bits.DMABL = 0;  
    AD1CSSH = 0x0000;  
    AD1CSSLbits.CSS0=1;
```

```
AD1CSSLbits.CSS1=1;
AD1CSSLbits.CSS2=1;
AD1CSSLbits.CSS3=1;
AD1CSSLbits.CSS4=1;
AD1CSSLbits.CSS5=1;
AD1CSSLbits.CSS6=1;
AD1CSSLbits.CSS7=1;
AD1CSSLbits.CSS8=1;

AD1PCFGL=0xFFFF;
AD1PCFGH=0xFFFF;
AD1PCFGLbits.PCFG0 = 0;
AD1PCFGLbits.PCFG1 = 0;
AD1PCFGLbits.PCFG2 = 0;
AD1PCFGLbits.PCFG3 = 0;
AD1PCFGLbits.PCFG4 = 0;
AD1PCFGLbits.PCFG5 = 0;
AD1PCFGLbits.PCFG6 = 0;
AD1PCFGLbits.PCFG7 = 0;
AD1PCFGLbits.PCFG8 = 0;

IFS0bits.AD1IF = 0;
IEC0bits.AD1IE = 0;
AD1CON1bits.ADON = 1;
}

void cfg_timer3()
{
    // T3CONbits.TCKPS=0b11;
    TMR3 = 0x0000;
    PR3=(fcy/256)/1000;
    IFS0bits.T3IF = 0;
    IEC0bits.T3IE = 0;
    T3CONbits.TON = 1;
}

void cfg_dma0_adc1(void)
{
    DMA0CONbits.AMODE = 2;
    DMA0CONbits.MODE = 0;
    DMA0PAD=(int)&ADC1BUF0;
    DMA0CNT = 8;
    DMA0REQ = 13;
}
```

```
DMA0STA = __builtin_dmaoffset(&BufferA);

IFS0bits.DMA0IF = 0;
IEC0bits.DMA0IE = 1;
DMA0CONbits.CHEN=1;
}

unsignedintDmaBuffer = 0;

void __attribute__((interrupt, no_auto_psv)) _DMA0Interrupt(void)
{
    ProcessADCSamples(&BufferA[0][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[1][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[2][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[3][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[4][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[5][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[6][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[7][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[8][0]);

    IFS0bits.DMA0IF = 0;
}
```

TRATAMIENTO DE DATOS.

```
#include<p33FJ256MC710.h>

#define fcy 40000000

intBufferA[9][1] __attribute__((space(dma),aligned(16)));

voidProcessADCSamples(int * AdcBuffer);

void cfg_adc1(void)
{
    AD1CON1bits.FORM = 0;
    AD1CON1bits.SSRC = 2;
    AD1CON1bits.ASAM = 1;
    AD1CON1bits.AD12B = 1;
```

```
AD1CON2bits.CSCNA = 1;  
AD1CON2bits.CHPS = 0;  
AD1CON3bits.ADRC = 0;  
AD1CON3bits.ADCS = 4;  
AD1CON1bits.ADDMABM = 0;  
AD1CON2bits.SMPI = 8;
```

```
scannedProcessADCSamples(&BufferB[0][0]);
```

```
AD1CON4bits.DMABL = 0;  
AD1CSSH = 0x0000;  
AD1CSSLbits.CSS0=1;  
AD1CSSLbits.CSS1=1;  
AD1CSSLbits.CSS2=1;  
AD1CSSLbits.CSS3=1;  
AD1CSSLbits.CSS4=1;  
AD1CSSLbits.CSS5=1;  
AD1CSSLbits.CSS6=1;  
AD1CSSLbits.CSS7=1;  
AD1CSSLbits.CSS8=1;
```

```
AD1PCFGL=0xFFFF;  
AD1PCFGH=0xFFFF;  
AD1PCFGLbits.PCFG0 = 0;  
AD1PCFGLbits.PCFG1 = 0;  
AD1PCFGLbits.PCFG2 = 0;  
AD1PCFGLbits.PCFG3 = 0;  
AD1PCFGLbits.PCFG4 = 0;  
AD1PCFGLbits.PCFG5 = 0;  
AD1PCFGLbits.PCFG6 = 0;  
AD1PCFGLbits.PCFG7 = 0;  
AD1PCFGLbits.PCFG8 = 0;
```

```
IFS0bits.AD1IF = 0;  
IEC0bits.AD1IE = 0;  
AD1CON1bits.ADON = 1;
```

```
}
```

```
void cfg_timer3()
```

```
{  
    TMR3 = 0x0000;  
    PR3=(fcy/256)/1000;  
    IFS0bits.T3IF = 0;
```

```
        IEC0bits.T3IE = 0;
        T3CONbits.TON = 1;
    }

void cfg_dma0_adc1(void)
{
    DMA0CONbits.AMODE = 2;
    DMA0CONbits.MODE = 0;
    DMA0PAD=(int)&ADC1BUF0;
    DMA0CNT = 8;
    DMA0REQ = 13;
    DMA0STA = __builtin_dmaoffset(&BufferA);
    IFS0bits.DMA0IF = 0;
    IEC0bits.DMA0IE = 1;
    DMA0CONbits.CHEN=1;
}

unsignedintDmaBuffer = 0;

void __attribute__((interrupt, no_auto_psv)) _DMA0Interrupt(void)
{
    ProcessADCSamples(&BufferA[0][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[1][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[2][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[3][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[4][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[5][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[6][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[7][0]);
    ProcessADCSamples(&BufferA[8][0]);

    IFS0bits.DMA0IF = 0;
}

```

INTEGRAL.

```
#include<p33FJ256MC710.h>

static float lx=0;
static float Wx0=0;

```

```
floatIntegralGx (float Wx)
{
  if (Wx< -1.0 || Wx> 1.0)
  {
    lx =lx + (0.5)*(0.172)*(Wx0+Wx);
  }
  Wx0=Wx;

  return (lx);
}
```

FLOAT TO STRING.

```
#include<p33FJ256MC710.h>
#include <stdio.h>

void Transmit (char[]);
voidFloat_to_String (double valor,intident)
{
  charDato[8],VP[7];
  inti,j;

  Dato[0]=ident;
  if (valor>=0)
  {
    Dato[1]='+';
    j=2;
  }
  else
  {
    j=1;
  }

  sprintf(VP,"%f",valor);

  for(i=0;i<=6;i++)
  {
    Dato[i+j]=VP[i];
  }

  Transmit(Dato);
}
```

TRANSMISION.

```
#include<p33FJ256MC710.h>

void Transmit(char Vector[])
{
    int i=0,j=0,k=0;

        U1STAbits.UTXEN=1;

    for(j=0;j<2;j++)
        {
        for(i=0;i<4;i++)
            {
            U1TXREG = Vector[k];
            k++;
            }
        while(!U1STAbits.UTXBF && !U1STAbits.TRMT);
        }

    while(!U1STAbits.UTXBF && !U1STAbits.TRMT);
}
```

CONFIGURACION DE LA UART.

```
#include<p33FJ256MC710.h>

#define Fcy 4000000
#define BaudRate 9600
#define BRGVal ((Fcy/BaudRate)/16)-1

void UART_Init(void)
{
    U1BRG=BRGVal;
    U1MODEbits.PDSEL=0;
    U1MODEbits.STSEL=0;
    U1MODEbits.BRGH=0;
    U1MODEbits.URXINV=0;
    U1MODEbits.ABAUD=0;
    U1MODEbits.LPBACK=0;
    U1STAbits.URXISEL=0;
}
```

```
U1STAbits.UTXISEL0=0;
U1STAbits.UTXISEL1=0;
}
```

FILTRO DIGITAL.

```
#include<p33FJ256MC710.h>
#include "math.h"
```

```
static float Vgx[13],Vgy[13],Vgz[13],Vax[13],Vay[13],Vaz[13];
```

```
floatfiltro (float dato,int parametro)
{
floatfiltrado=0;
int t=0;
```

```
switch (parametro)
{
case 0:
for (t=12;t>0;t--)
{
Vgx[t] = Vgx[t-1];
filtrado = filtrado + Vgx[t-1];
}
Vgx[0]=dato;
filtrado=(filtrado+dato)/13;
break;
```

```
case 1:
for (t=12;t>0;t--)
{
Vgz[t] = Vgz[t-1];
filtrado = filtrado + Vgz[t-1];
}
Vgz[0]=dato;
filtrado=(filtrado+dato)/13;
break;
```

```
case 2:
for (t=12;t>0;t--)
{
Vgy[t] = Vgy[t-1];
```

```
filtrado = filtrado + Vgy[t-1];  
    }  
Vgy[0]=dato;  
filtrado=(filtrado+dato)/13;  
break;
```

```
case 3:  
for (t=12;t>0;t--)  
{  
Vay[t] = Vay[t-1];  
filtrado = filtrado + Vay[t-1];  
    }  
Vay[0]=dato;  
filtrado=(filtrado+dato)/13;  
break;
```

```
case 4:  
for (t=12;t>0;t--)  
{  
Vax[t] = Vax[t-1];  
filtrado = filtrado + Vax[t-1];  
    }  
Vax[0]=dato;  
filtrado=(filtrado+dato)/13;  
break;
```

```
case 5:  
for (t=12;t>0;t--)  
{  
Vaz[t] = Vaz[t-1];  
filtrado = filtrado + Vaz[t-1];  
    }  
Vaz[0]=dato;  
filtrado=(filtrado+dato)/13;  
break;
```

```
case 10:  
for (t=0;t<13;t++)  
    {  
Vgx[t]=0;  
Vgy[t]=0;  
Vgz[t]=0;  
Vax[t]=0;
```

```
Vay[t]=0;
Vaz[t]=0;
}
filtrado=0;
break;
}
return (filtrado);
}
```

FILTRO COMPLEMENTARIO.

Filtro pasa altas.

```
#define DEFINE_SUBROUTINE
```

```
float Filtro_Hp_num[ 6] = {
    4.002380371094e-001F, /* b[ 1, 0] */
    -8.004760742188e-001F, /* b[ 1, 1] */
    4.002380371094e-001F, /* b[ 1, 2] */
    4.494018554688e-001F, /* b[ 2, 0] */
    -8.988037109375e-001F, /* b[ 2, 1] */
    4.494018554688e-001F}; /* b[ 2, 2] */
```

```
float Filtro_Hp_den[ 6] = {
    5.000000000000e-001F, /* a[ 1, 0] */
    -7.877197265625e-001F, /* a[ 1, 1] */
    3.132324218750e-001F, /* a[ 1, 2] */
    5.000000000000e-001F, /* a[ 2, 0] */
    -8.844909667969e-001F, /* a[ 2, 1] */
    4.131164550781e-001F}; /* a[ 2, 2] */
```

```
float Filtro_Hp_m1[2];
float Filtro_Hp_m2[2];
```

```
float Filtro_Hp_gain = 1.000000000000e+000F;
float Filtro_Hp_pars = 1.000000000000e+000F;
```

```
BiquadSections IIR_Filtro_Hp = {
    2,
    0,
    1,
    1,
```

```
    0,  
    0,  
  
    &Filtro_Hp_gain,  
    &Filtro_Hp_pars,  
    Filtro_Hp_num,  
    Filtro_Hp_den,  
    Filtro_Hp_m1,  
    Filtro_Hp_m2,  
    cas_blkfloat_fm1};  
  
#include "qed_filt.c"  
#include <stdio.h>  
#include <string.h>  
#include <stdlib.h>  
#include <math.h>  
  
float filtro_Higt_Pass( float entrada)  
{  
    float salida;  
  
    float x[],y[];  
  
    x[0]=entrada;  
  
    init_biquad_float (&IIR_Filtro_Hp);  
  
    IIR_Filtro_Hp.filter( x, y, 1, &IIR_Filtro_Hp);  
  
    salida=y[0];  
  
    return(salida);  
}  
  
#endif
```

Filtro pasa bajas.

```
#define DEFINE_SUBROUTINE
```

```
float Filtro_Lp_num[ 6] = {  
    9.521484375000e-003F, /* b[ 1, 0] */  
    1.904296875000e-002F, /* b[ 1, 1] */  
    9.521484375000e-003F, /* b[ 1, 2] */  
    1.092529296875e-002F, /* b[ 2, 0] */  
    2.188110351563e-002F, /* b[ 2, 1] */  
    1.092529296875e-002F}; /* b[ 2, 2] */
```

```
float Filtro_Lp_den[ 6] = {  
    5.000000000000e-001F, /* a[ 1, 0] */  
    -7.396850585938e-001F, /* a[ 1, 1] */  
    2.778015136719e-001F, /* a[ 1, 2] */  
    5.000000000000e-001F, /* a[ 2, 0] */  
    -8.503723144531e-001F, /* a[ 2, 1] */  
    3.941955566406e-001F}; /* a[ 2, 2] */
```

```
float Filtro_Lp_m1[2];  
float Filtro_Lp_m2[2];
```

```
float Filtro_Lp_gain = 1.000000000000e+000F;  
float Filtro_Lp_pars = 1.000000000000e+000F;  
BiquadSections IIR_Filtro_Lp = {
```

```
    2,  
    0,  
    1,  
    1,  
    0,  
    0,
```

```
    &Filtro_Lp_gain,  
    &Filtro_Lp_pars,  
    Filtro_Lp_num,  
    Filtro_Lp_den,  
    Filtro_Lp_m1,  
    Filtro_Lp_m2,  
    cas_blkfloat_fm1};
```

```
#ifndef DEFINE_SUBROUTINE
```

```
#include "qed_filt.c"
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

float filtro_low_Pass(float entrada)

{
    float salida;

    float x[ ],y[ ];

    x[0]=entrada;

    init_biquad_float (&IIR_Filtro_Lp);

    IIR_Filtro_Lp.filter( x, y, 1, &IIR_Filtro_Lp);

    salida=y[0];

    return(salida);
}

#endif
```

El programa está dividido en subrutinas diferentes que se presentan a continuación:

- **PRINCIPAL.**

La rutina *principal* está diseñada para configurar el sistema del reloj el cual trabaja a una velocidad de 40 MIPS, se utiliza un cristal de 8 MHz para generar la estimulación. Esta rutina además tiene la labor de sincronizar el arranque entre el software y el hardware.

- **CONFIGURACION DE LA DMA, ADC Y TIMER.**

Esta parte del programa se encarga de configurar los registros del módulo DMA, ADC y TIMER.

El módulo DMA (DirectMemory Access) optimiza el rendimiento del DSP al ocuparse de la recepción y alojamiento de los datos provenientes de los canales analógicos, permitiendo que la CPU domine otras tareas primordiales.

El ADC de 12 bits es el modulo conversor analógico digital del DSP el cual debe configurarse para que escanee 9 señales analógicas provenientes de los sensores. El TIMER se encarga de sincronizar los disparos del reloj para poner en marcha los diferentes sistemas.

- **TRATAMIENTO DE LOS DATOS.**

Los datos recibidos por el módulo DMA son operados de tal manera que podemos obtener los valores de las variables que necesitamos, tales como velocidad angular, aceleración, temperatura, etc. Este módulo se encarga de que las funciones de transferencia sean operadas.

- **INTEGRAL.**

La rutina integral nos permite convertir las velocidades angulares en ángulos para generar posteriormente la estimación por medio del filtro.

- **FLOAT TO STRING.**

El PC se comunica por medio de código ANSSI, Float to string convierte los datos de tipo flotante operados en el DSP, en datos tipo string para su posterior comunicación con el computador.

- **TRANSMISIÓN.**

Se encarga de transmitir los datos desde el DSP hacia el puerto serial del computador.

- **FILTRO DIGITAL.**

Esta rutina es la encargada de filtrar las señales provenientes de los sensores.

- **FILTRO COMPLEMENTARIO.**

Esta rutina es la encargada de mezclar convenientemente las señales provenientes de los giróscopos y los acelerómetros.

4.2 SIMULACIÓN DEL MODELO COMPUTACIONAL DE DETERMINACIÓN DE ACTITUD.

Simular el modelo computacional de determinación de actitud/orientación para la unidad de medida inercial.

El modelo computacional desarrollado en C30 simuló con la ayuda de LabView con el fin de analizar el comportamiento del dispositivo. A continuación se muestra la interfaz realizada en labview para estudiar el comportamiento de los algoritmos.

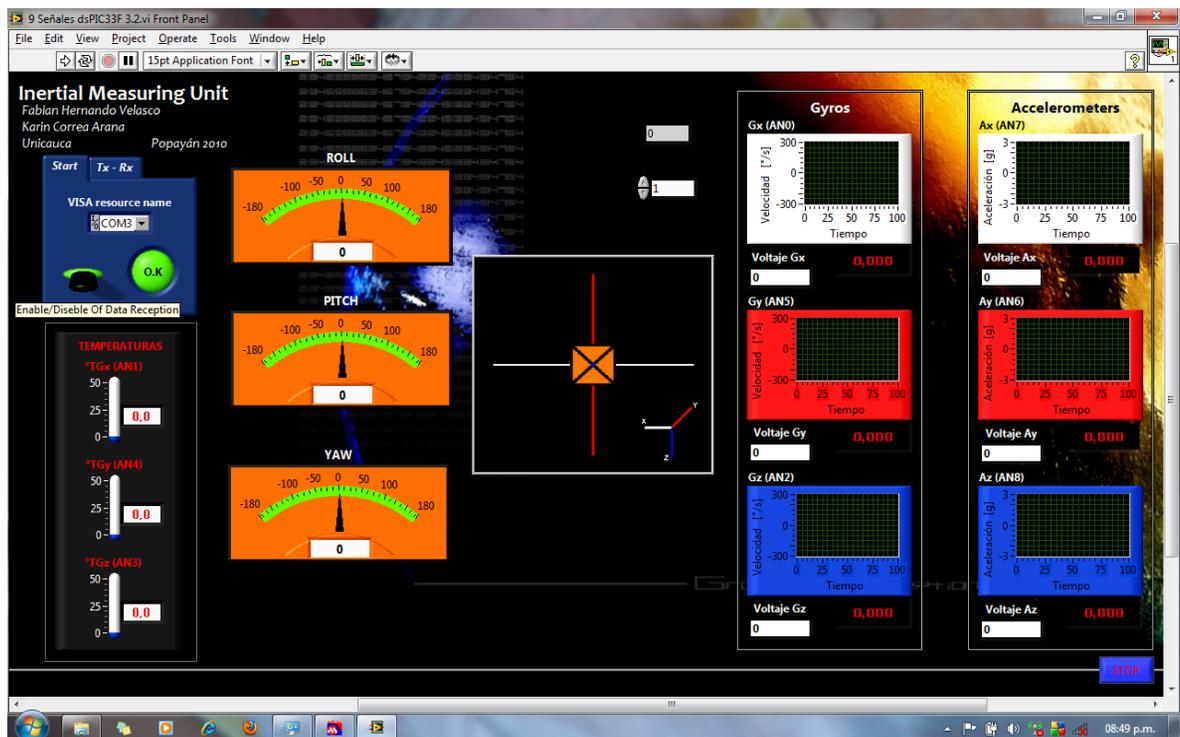


Figura 44. *Interfaz desarrollada en Labview para la simulación de la actitud.*

Para obtener el ángulo de orientación con respecto a cada eje, se integraron las señales de velocidad angular provenientes del giróscopo con el método de integración numérica trapezoidal. Para calcular el ángulo de orientación con la ayuda de los acelerómetros se utilizan las funciones trigonométricas inversas con la medición de aceleraciones lineales y comparación con la aceleración de la gravedad.

Cabe resaltar que esta interfaz realizada fue de gran ayuda para visualizar las medidas tomadas por la IMU y se logró simular satisfactoriamente el modelo de determinación de actitud.

4.3 IMPLEMENTACIÓN DE LA UNIDAD DE MEDIDA INERCIAL.

Implementar la unidad de medida inercial integrando los sistemas hardware y software.

En esta etapa del proyecto se fusionaron el diseño hardware y software para la unidad de medida inercial de acuerdo al siguiente diagrama de bloques:

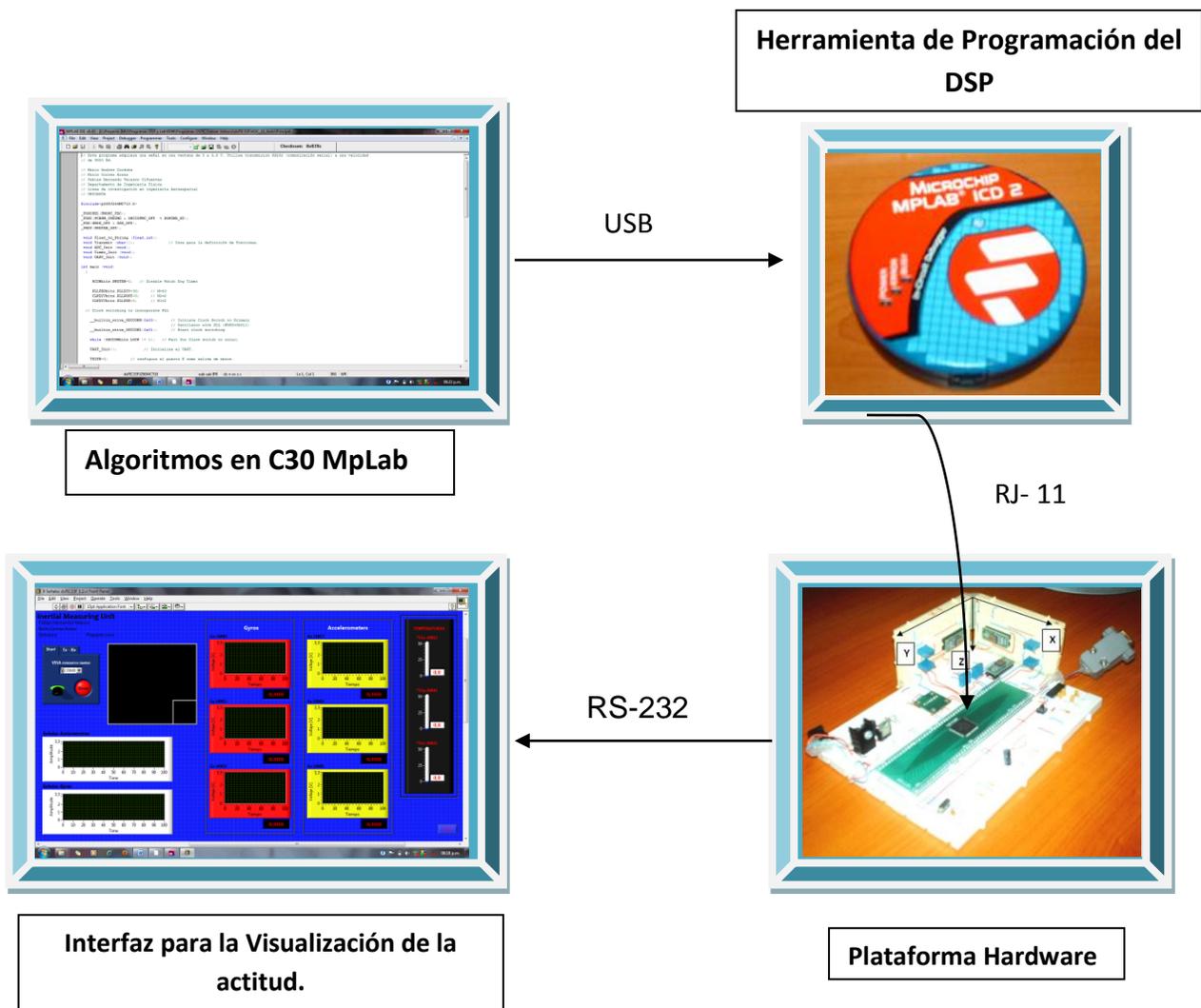


Figura 45. Esquema general de la fusión de los diseños hardware y software.

En este momento donde ya están evaluados los algoritmos para la determinación de la actitud/orientación del pico satélite, el paso a seguir es embeber el código fuente dentro del procesador digital de señal, este proceso se realiza con la ayuda del ICD-2 (programador y debugger de microchip) que se conecta al computador a través del cable USB, el ICD-2 se conecta a la plataforma hardware a través del cable RJ-11 y se ordena desde MpLab IDE programar el dsPIC33FJ256MC710.

Para mostrar el proceso de fusión de los diseños mencionados la IMU se comunica con el PC a través del protocolo RS-232 y en la interfaz realizada en labview donde se pueden observar los valores medidos por el instrumento, el error en los ángulos estimados es de $\pm 0,025^\circ$.

Ahora observemos las siguientes gráficas, en la cual la IMU está funcionando y registrando la orientación en Roll (ϕ), Pitch (θ) y Yaw (ψ).

Giro alrededor del eje X- Roll.

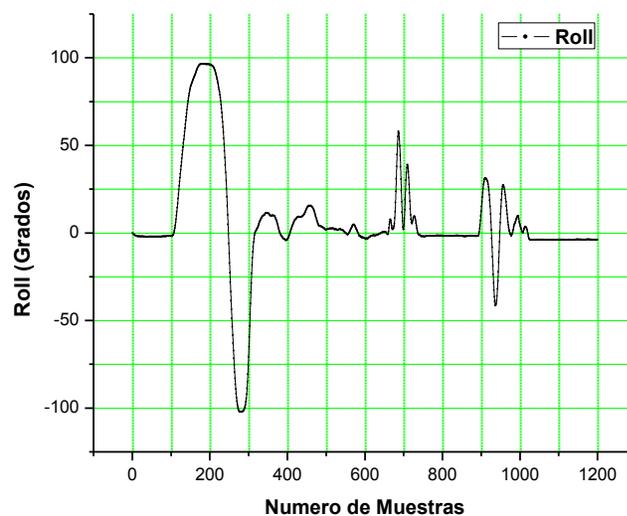


Figura 46. *Estimación del ángulo de orientación en Roll (ϕ).*

Giro alrededor del eje Y- Pitch.

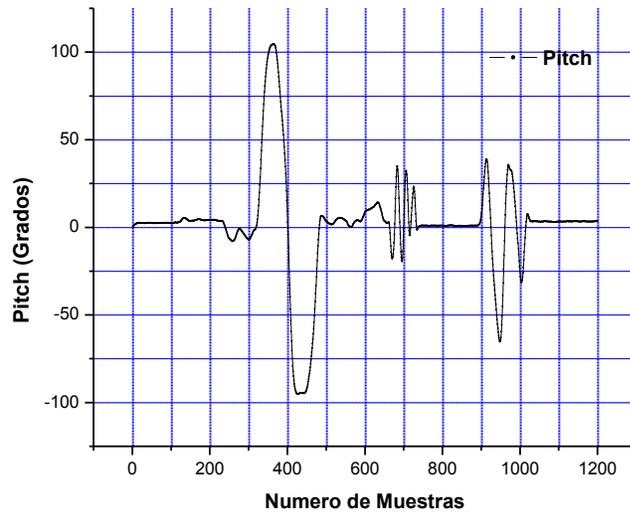


Figura 47. *Estimación del ángulo de orientación en Pitch (θ).*

Giro alrededor del eje Z- Yaw.

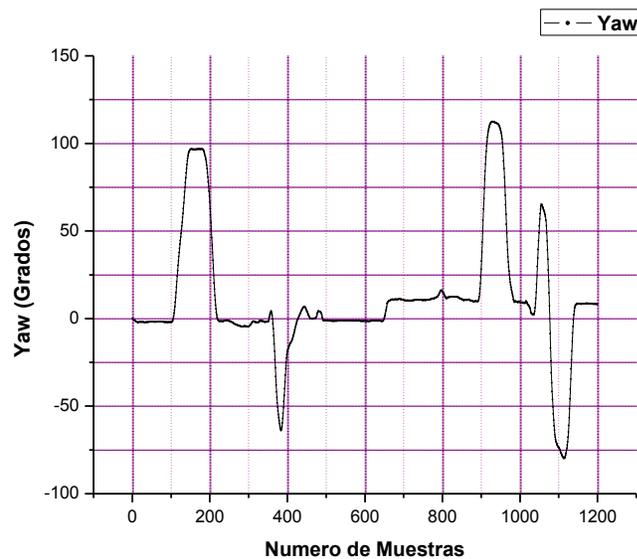


Figura 48. *Estimación del ángulo de orientación en Yaw (ψ).*

En las figuras 46, 47 y 48 se muestra la información de los ángulos de orientación (Φ , θ , Ψ) y por ende ya podemos estimar la actitud del pico satélite. En estas gráficas, las muestras son tomadas cada 172 ms, indicando que la IMU ha operado alrededor de los 3,44 minutos en esta prueba y gracias a la implementación del filtro complementario los ángulos con la IMU son registrados correctamente y observamos que el sistema tiende a la medida de cero grados cuando no se detecta movimiento. La IMU desarrollada en este trabajo tiene una resolución de medida de 0,05°.

5. CONCLUSIONES.

- Se diseñó e implemento una unidad de medida inercial de bajo costo con la cual se puede sensor la actitud de un pico satélite.
- El estudio acerca del diseño hardware del instrumento arrojo como conclusión la conveniencia de utilizar los sensores ADXRS300 y ADXZL330 por manejar un amplio rango de trabajo, posteriormente se procesaron las señales respectivas con un dsPIC33FJ710MC, presentándose un error del $\pm 0,025^\circ$ en la estimación de la actitud.
- Se fusionaron las señales provenientes de los giróscopos y acelerómetros usando un filtro complementario por cada eje (pasa bajas de cuarto orden y pasa altas de cuarto orden) para determinación de la actitud del pico satélite.
- Se logró compensar correctamente las señales de la aceleración lineal entregadas por los acelerómetros con las señales de velocidad angular provenientes de los giróscopos.
- Se diseñó e implemento un sistema de adquisición de datos para recibir nueve señales provenientes de la IMU construida, al igual que se desarrolló una interfaz gráfica en LabView para realizar la simulación y análisis respectivo de dichas señales.
- El algoritmo desarrollado para la estimación de actitud del pico satélite se embebió en un DSP de gama alta, que hace juego con los sensores utilizados para que el sistema final implementado sea de bajo consumo de energía.

6. RECOMENDACIONES A TRABAJOS FUTUROS.

Para los trabajos futuros sería una buena idea utilizar sensores inerciales de mejor resolución y giróscopos alineados dentro del chip, por ejemplo los ADIS de analog devices serían una buena opción para implementarlos en la IMU y sensar la actitud del vehículo con mayor precisión.

Podría hacerse una mejora en el diseño del filtro, pasando del complementario utilizado en nuestra IMU a un filtro de Kalman, el cual permite aumentar la precisión a la hora de estimar los ángulos.

7. BIBLIOGRAFÍA.

- WIESEL, WILLIAM E; *Spaceflight Dynamics Second Edition*; McGraw-Hill, Singapore, Singapore; 1997; Pp 125- 158, 165-175, 181-183.
- COBRASI, A; *Sistemas de Navegación, Desde el Compas Magnético a la Navegación por Satélite*; McGraw-Hill, New York, USA; 1998; Pp 135-155.
- GREWAL, MOHINDER S; WEILL, LAWRENCE R; ANDREWS, ANGUS P; *Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration*; A John Wiley & Sons, New York, USA; 2001; Pp 1, 9-14,131-136, 140-144, 154-155.
- AHRENDT, MYRL H; *The Mathematics of Space Exploration*; Holt, Rinehart and Winston, New York, USA; 1997; Pp 11-15, 83-103.
- VASEGHI, SAEDD V; *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction Second Edition*; John Wiley & Sons, Chichester, England; 2000; Pp 1-6, 205 - 210.
- AMBARDAR ASHOK; *Procesamiento de Señales Analógicas y Digitales Segunda Edición*; Thomson Editores, México DF; 2002; Pp 55-58, 446 - 456.
- GREWAL, MOHINDER S and ANDREWS, ANGUS P; *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB Second Edition*; A John Wiley & Sons, New York, USA; 2001; Pp 1- 4.

ARTICULOS.

- SONDESRØD, STIAN; *Attitude Determination for the Norwegian Student Satellite nCube*; Department of Engineering Cybernetics, Norwegian University of Science and Technology; Trondheim, Norway; 2004.
- DE WECK, OLIVIER; *Attitude Determination and Control (ADCS)*; Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology; USA; 2001.

- HOWLEY, BRIAN; *Overview of Spacecraft GN&C Subsystems*; Lockheed Martin, Space Systems Company; USA; 2006.
- WESTER, J.G; *Measurement, Instrumentation and Sensors Handbook*; Capítulo 10; USA; 2000.
- EGZIABHER, DEMOZ GEBRE; ELKAIM, GABRIEL H; POWELL, J. D. and PARKINSON, BRADFORD W; *A Gyro-Free Quaternion-Based Attitude Determination System Suitable for Implementation Using Low Cost Sensors*; Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University; USA; 2000.

SITIOS WEB.

- <http://www.jpl.nasa.org>, 12/11/2007.
- <http://spaceflight.nasa.gov>, 12/11/2007.
- <http://www.microchip.com>, 13/11/2007.
- <http://www.xilinx.com>, 13/11/2007.

Diseño e Implementación de una Unidad de Medida Inercial para la determinación de la Actitud/Orientación (Attitude Determination) de un Picosatélite.