Aproximación del registro tabular del concepto de función en la cultura Babilónica

Guillermo Alberto Galindez Córdoba

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Maestría en Educación

Popayán

2023

Aproximación del registro tabular del concepto de función en la cultura Babilónica

Trabajo de grado `para optar al título de Magister en Educación

Línea: Historia y Epistemología de las Matemáticas

Guillermo Alberto Galíndez Córdoba

Tutor:

Mg. Hugo Manzano

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Maestría en Educación

Popayán

2023

Nota de aceptación

____

____

____

____

Director: __________________________________

Mg. Hugo Manzano

Gabriela Arbeláez

Jurado: __________________________________

Dra. Gabriela Arbeláez

John Geyber Bedón LL.

Jurado: __________________________________

Mg. John Bedón Llantén

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 2 de Marzo de 2023

Índice

Pág.

Introducción 9
1. Planteamiento del problema 12
  1.1 Pregunta problema 12
2. Justificación 13
3. Estado del Arte 14
4. Marco Teórico 18
5. Objetivos 40
  5.1 Objetivo general 40
  5.2. Objetivos específicos 40
6. Metodología 41
  6.1 Características del método histórico 42
    6.1.1 Objetivo del método histórico 42
    6.1.2 Pasos para realizar investigaciones con el método histórico 43
  6.2 Sistematización de resultados 45
7. Resultados de la investigación 46
  7.1 Capítulo uno. Métodos rudimentarios de conteo 46
    7.1.1 Período sumério o período Uruk 48
    7.1.2 Período sumerio o período dinástico-arcaico 50
    7.1.3 Segundo período: Período acadio 51
    7.1.4 Tercer período: Período babilónico 53
  7.2 Capítulo dos. Escritura Cuneiforme 61
    7.2.1 Funcionamiento de la escritura cuneiforme 65
    7.2.2 Tabla Kish 67
    7.2.3 Características de la escritura cuneiforme. 68
  7.3 Capítulo tres. Sistema sexagesimal 69
    7.3.1 Principio Aditivo 70
    7.3.2. Principio Posicional 71
    7.3.3 Características del Sistema Sexagesimal 73

7.3.4 Base del sistema babilónico 73
7.4 Capítulo cuatro. Representaciones aproximadas al registro tabular del concepto de función a partir de la interpretación de tablas cuneiformes 76
7.4.1 Tabla Plimpton 322. 76
7.4.2 Tabla YBC 789 82
7.4.3 Trigonometría babilónica 85
8. Conclusiones 90
Referencias bibliográficas 92

Índice de tablas

Tabla 1. Interpretación de la tablilla plimpton 322 de forma completa 80
Tabla 2. Tabulación de valores. 81
Tabla 3. Relación sexagesimal y sistema decimal 84
Tabla 4. Tabla trigonométríca incompleta 85
Tabla 5. Tabla trigonométrica completa. 87
Tabla 6. Tabla trigonométrica aplicada. 88

Índice de figuras

Pág.

Figura 1. Triangulo rectángulo 15
Figura 2. Tabla de cuadrados 20
Figura 3. N9 serie infinitiva 31
Figura 4. Calculo Dirichlet 33
Figura 5. Símbolos 37
Figura 6. Tablas de Cálculo de los Babilonios 37
Figura 7. Posición geográfica de los ríos Tigris y Éufrates 50
Figura 8. Zona de Mesopotamia 52
Figura 9. Marcas hechas por los babilónicos en árboles y huesos. 56
Figura 10. Relación entre marcas de un árbol y el número de animales a contar 56
Figura 11. Relación entre marcas de un árbol y el número de animales a contar en más cantidad 57
Figura 12. Secuencia numérica con los dedos de la mano 58
Figura 13. Secuencia numérica con los dedos de la mano 59
Figura 14. Método de suma con los dedos de la mano en la cultura Sumeria 59
Figura 15. Método de suma con los dedos de la mano en la cultura Sumeria 60
Figura 16. Escrito cuneiforme en una tablilla de arcilla, de Shuruppak o Abu Salabikh, Irak, sobre el 2500 antes de Cristo. 61
Figura 17. Tablillas de escritura 62
Figura 18. Escritura no cuneiforme 63
Figura 19. Simbología 64
Figura 20. Tabilla de barro y arcilla 65
Figura 21. Símbolos cuneiformes 66
Figura 22. Tablilla de Kish 67
Figura 23. Tablillas cuneiformes hechas a base de cuñas 67
Figura 24. Región de Mesopotamia 69
Figura 25. Símbolo 1 y 10 69

Figura 26. Símbolo 3 ... 70
Figura 27. Símbolo 5 ... 70
Figura 28. Símbolo 12 ... 71
Figura 29. Símbolos 15 ... 71
Figura 30. Proceso números del 1 al 59 ... 71
Figura 31. Guarismo ... 72
Figura 32. Operaciones con sistema sexagesimal ... 72
Figura 33. Resultado de multiplicar las 12 falanges de una mano y los cinco dedos de la otra ... 73
Figura 34. Representación del O ... 74
Figura 35. Uso del guarismo ... 74
Figura 36. Símbolo representativo de las unidades ... 75
Figura 37. Representación del sistema decimal ... 75
Figura 38. Sistema decimal ... 75
Figura 39. Sistema Decimal ... 75
Figura 40. Tablilla Plimpton 322. ... 77
Figura 41. Transformación de números arábigos en sistema sexagesimal al sistema decimal ... 78
Figura 42. Tabla construida a partir de la información del triángulo rectángulo ... 79
Figura 43. Tablilla YBC 789 ... 82
Figura 44. Tablilla y sistema decimal ... 83
Figura 45. Triángulo rectángulo. ... 85
Figura 46. Relación triángulos rectángulos ... 87
Figura 47. Triángulo rectángulo de lado uno. ... 88

Introducción

Es innegable que los desarrollos históricos de las ciencias existentes (ciencias formales, ciencias naturales y ciencias sociales respectivamente) han sido fundamentales para comprender las formas de pensamiento subyacentes en la humanidad, mismas que se relacionan de primera mano con los diversos acontecimientos sociales que han tenido lugar en cada una de las épocas que determinan la evolución del ser humano. No obstante, tales desarrollos históricos siguen siendo exhibidos como un conjunto de sucesos que dejan en evidencia el carácter internalista de los avances científicos que potenciaron el crecimiento de las civilizaciones, sin tener en cuenta aquellos aspectos culturales, sociales y políticos que posiblemente influyeron en dichos desarrollos.

De este modo, es posible afirmar que las matemáticas como disciplina científica también han sido parte de dicho proceso, además que el conocimiento de los sucesos que marcaron su desarrollo, permiten en primer término reflexionar desde su contexto filosófico, sociocultural y epistemológico respectivamente, siendo este último el que conlleva a una reflexión respecto de la naturaleza de dicha disciplina. En segundo término, (Goldstein, 1996) afirma que: "*Comúnmente se acepta como un hecho que la actividad matemática en países diferentes permanece inalterada. Es decir, pueden cambiar las formas externas y los énfasis en la manera de practicar la matemática, pero ella se mantiene idéntica a sí misma*". Empero, Schubring en (Goldstein, 1996), pone en evidencia en sus trabajos investigativos, que el aumento considerado de las discrepancias existentes entre las formas de practicar la ciencia en diversas regiones del mundo, deriva indudablemente en que los modos de comunicación no poseen la libertad que se creía inicialmente. En ese orden de ideas, se hace necesario reconocer que las políticas educativas elaboradas por cada país, influyen indiscutiblemente en las formas de presentación de los desarrollos académicos de cada comunidad matemática.

Ahora bien, es bien sabido que las matemáticas poseen una estructura especial que la hace merecedora de un tratamiento singular con relación a otras disciplinas, lo que hace que su correspondencia con la historia se establezca de forma específica. En ese sentido, es importante el análisis de dos corrientes filosóficas para concebir el conocimiento histórico, la corriente internalista y la corriente externalista. El internalismo establece que el origen y validación de los procesos de producción de conocimiento están libres de influencias externas, y el externalismo asume que lo dicho anteriormente está sujeto netamente a influencias extrínsecas. Asimismo, toma en cuenta aquellos aspectos psicológicos, políticos, culturales, administrativos, etc., que minimizan los elementos lógico – deductivos propios de la ciencia y especialmente de las matemáticas.

Así pues, y con relación a lo anterior, se pueden encontrar posiciones contrarias referentes a la perspectiva con que se deben desarrollar los estudios en historia de las matemáticas, dado que a partir de ello es posible descubrir no sólo la epistemología inmersa en el proceso, sino también sentar posición sobre la naturaleza real del conocimiento matemático. No obstante, se infiere que ningún análisis de las corrientes mencionadas (internalista – externalista) satisface a placer el deseo de comprender el proceso de desarrollo de las matemáticas, ya que existen componentes internos y externos que actúan simultáneamente en su evolución. Cabe resaltar que no es prioridad de la presente investigación analizar cuáles de los componentes citados son más relevantes. Lo importante aquí es entender que la discusión entre dichas posturas ha contribuido a la aparición de una forma alterna de considerar la historia de las matemáticas, fundamentada en una especie de alianza estratégica entre los componentes.

Por consiguiente, la realización del presente proyecto de investigación denominado ***APROXIMACIÓN DEL REGISTRO TABULAR DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LA CULTURA BABILÓNICA,*** busca identificar una serie de elementos que se constituyen como un notorio acercamiento a la representación tabular de la noción de función a partir de la lectura e interpretación de tablas babilónicas. Para esto fue necesario dividir la investigación en nueve aspectos importantes que determinan su estructura y organización, a saber: Planteamiento del problema, justificación, estado del arte, marco teórico, objetivos, metodología, resultados de la investigación, conclusiones y bibliografía.

En el planteamiento del problema se exhibe la razón fundamental que motivó el desarrollo del presente documento. Razón que surge de diversos procesos de reflexión en torno a la escogencia de un concepto matemático relevante para el quehacer de la disciplina. En ese sentido, surge la necesidad de analizar la representación tabular del concepto de función por su importancia en distintos ámbitos de las matemáticas, principalmente a la hora de analizar e interpretar datos. Proceso que permite realizar comparaciones, relaciones y demás, en pro de obtener conclusiones válidas que conlleven a la toma de decisiones acertadas.

En la justificación se muestran aquellos aspectos que determinan la importancia del proceso investigativos desde diversos puntos de vista. Por ejemplo desde la utilidad del concepto de función y de su representación tabular como aplicación a teorías de distintas disciplinas.

En el estado del arte se hace un recorrido por algunas investigaciones relacionadas con el concepto de función desde distintos enfoques (históricos y pedagógicos). Esto con el fin de conocer su proceso evolutivo a partir del sentir de diferentes autores como Fernández, Ugalde, Rondón, Díaz, entre otros. Algunos de los cuales realizaron investigaciones alrededor de lo hecho por la cultura babilónica.

En el marco teórico se presentan aquellos elementos que potenciaron la construcción del concepto de función a lo largo de su historia. Algunos de ellos se relacionan con las actividades que dieron origen a sus primeros vestigios, los aportes de grandes matemáticos que contribuyeron al fortalecimiento de su estructura y los obstáculos epistemológicos que sorteó en pro de su consolidación. A este respecto vale la pena destacar que lo mencionado se enmarca esencialmente en cuatro periodos fundamentales, Prehistoria, edad antigua, edad media y edad moderna.

De igual forma, en los objetivos (General y específicos) se expone la finalidad que se persigue con la ejecución de la investigación y con la que se busca resaltar la importancia de la historia de las matemáticas desde lo hecho por la cultura babilónica.

Del mismo modo, en la metodología se señala el enfoque metodológico utilizado para la obtención de resultados durante el proceso investigativo, mismos que están sujetos a cuatro momentos indispensables denominados de la siguiente forma: Métodos rudimentarios de conteo, escritura cuneiforme, sistema de numeración sexagesimal, y representaciones aproximadas del registro tabular del concepto de función a partir de la interpretación de tablas cuneiformes.

Por último, las conclusiones y la bibliografía. En las conclusiones se hace una reflexión sobre la importancia de la historia de los conceptos matemáticos y en particular del concepto de función desde su representación tabular. Análogamente, sobre la relación que existe entre las matemáticas y otras disciplinas, y sobre el sentir del autor en torno a la enseñanza y aprendizaje de la noción de función. En la bibliografía se presenta la referencia de aquellos documentos (físicos y audiovisuales) que soportaron el ejercicio investigativo desde diferentes concepciones, históricas, didácticas, pedagógicas e investigativas.

1. Planteamiento del problema

Históricamente el concepto de función ha sido reconocido como uno de los conceptos más importantes de las matemáticas, esto debido a su utilidad para modelar problemas a través de la relación entre variables y mediante el empleo de ecuaciones y representaciones gráficas, lo que condujo a que disciplinas como la física, la química, la economía, la estadística, etc., desarrollaran algunas de sus teorías gracias a la posibilidad de establecer relaciones funcionales entre magnitudes tales como: El tiempo y la velocidad, el tiempo y la posición, los compuestos químicos con características comunes los cuales constituyen una función química, el costo y el beneficio asociados a la rentabilidad de un proyecto económico, la frecuencia absoluta o relativa de una variable estadística, entre otras.

Sin embargo, al buscar investigaciones relacionadas con dicho concepto, encontramos que muchas de ellas se centran exclusivamente en conocer la transformación de su definición y no en la evolución de sus diversas formas de representación, lo que determina un elemento importante para investigar. No obstante, es relevante resaltar que el concepto de función logra consolidarse a mediados del siglo XX con los aportes del grupo francés Nicolás Bourbaki y la aparición de la teoría de conjuntos.

En ese sentido, algunos historiadores matemáticos afirman que los primeros vestigios del concepto de función aparecen en la cultura babilónica en el año 2500 A.C, aunque su transformación ha estado supeditada al desarrollo de teorías matemáticas como la mencionada anteriormente, así como también de la geometría analítica y el álgebra respectivamente, (Fernández, 2012). De este modo, el presente proyecto de investigación busca identificar algunos aspectos de las matemáticas babilónicas que pueden considerarse como una notoria aproximación al registro tabular del concepto de función, a partir de la lectura e interpretación de tablas.

1.1 Pregunta problema

Por consiguiente, la pregunta de investigación para la elaboración de este documento yace planteada en los siguientes términos:

¿Qué aspectos se pueden extraer del proceso de interpretación de tablas babilónicas que se relacionen con la representación tabular del concepto de función?

2. Justificación

Las razones principales que justifican el desarrollo del presente proyecto de investigación, se fundamentan en primera instancia en la importancia que tiene el concepto de función no sólo en el campo de las matemáticas sino también en disciplinas como la física, la química, la estadística, la música, etc. Representada en su utilidad para modelar, representar e interpretar fenómenos a través de gráficos, ecuaciones y tablas de valores. En segunda instancia, por su relevancia en contextos académicos que determinan la necesidad de buscar estrategias que contribuyan al fortalecimiento de su aprendizaje desde la vinculación de la historia en el diseño y desarrollo de las mismas. Y en tercera instancia, porque se considera que toda investigación constituye un insumo relevante para la elaboración de nuevas investigaciones afines, con las cuales se pueda complementar lo hecho con antelación, o para que sirva de referente en la construcción de investigaciones que giren en torno a la temática en cuestión, misma que en este caso se relaciona con los registros de representación del concepto de función, y en particular, de su representación tabular.

De igual forma, por la significación que tiene la representación tabular del concepto de función en sus diversas aplicaciones, dado que constituye un vínculo importante entre la representación algebraica (ecuación) y la representación gráfica, visto desde la posibilidad de pasar de un registro a otro de manera recíproca. Asimismo, porque al conocer los trabajos de la cultura babilónica se rompe en una pequeña proporción la brecha que liga el conocimiento matemático a la cultura griega de manera exclusiva, destacando consigo su importancia en la evolución de dicha disciplina, y fortaleciendo el postulado que afirma que, las matemáticas no son más que un constructo social que paulatinamente ha evolucionado con el tiempo y a partir de desafíos propios de diversas culturas. Del mismo modo, porque resalta el valor de la historia como fuente de información para conocer y comprender algunos procedimientos rudimentarios que constituyen la base de lo que hoy es, una matemática práctica y bien estructurada. Por último, porque conlleva a conocer un poco la riqueza histórica de la cultura babilónica, no sólo desde sus aportes al progreso científico de la humanidad, sino también desde la organización de su sociedad en términos políticos, religiosos, culturales, económicos, etc.

3. Estado del Arte

Si bien es cierto que el concepto de función ha motivado el desarrollo de diversas investigaciones en torno a su definición, clasificación y estructura en general, también lo es que algunas de esas investigaciones se han centrado en la búsqueda de herramientas que contribuyan al mejoramiento de su enseñanza y aprendizaje desde diversos puntos de vista. Sin embargo, y sin pretender hacer un análisis minucioso de lo ahí planteado, es importante traer a colación algunos de los trabajos investigativos alrededor de dicho concepto.

Por consiguiente, dentro del conjunto de investigaciones que se revisaron se encontró que algunas de ellas atribuyen su desarrollo a la cultura Babilónica, dado que existen evidencias relacionadas con el uso de tablas de cálculo en las que se registraban las observaciones hechas a distintos fenómenos de la naturaleza, de los que se destacan las fases lunares y los movimientos planetarios principalmente, estableciendo así, un primer acercamiento a la noción de función a través de una idea intuitiva de relación, (Ugalde, 2013).

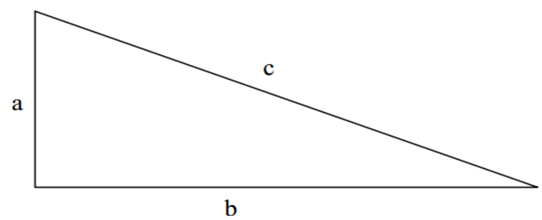
De igual forma, es bien sabido que muchos de los fenómenos y objetos visibles de la naturaleza han sido el objeto de estudio por excelencia de diversas culturas a lo largo de la historia, principalmente de la cultura babilónica. Asimismo, existen evidencias que dan cuenta de ciertos cálculos matemáticos utilizados para la construcción de palacios, templos y otras actividades comerciales que se registraban en tablas de arcilla. Instrumentos que soportan algunas de las investigaciones analizadas, mismas que hicieron posible conocer el desarrollo de las matemáticas babilónicas pasando por la construcción del sistema sexagesimal e interpretando algunas de sus tablas.

En un primer documento investigativo denominado “**Babilonia y las matemáticas en el aula”** de Fernández (2012), se analizaron los métodos utilizados por los babilonios para la ejecución de operaciones aritméticas ligadas principalmente a la necesidad de contar. Asimismo, se observó que en esta investigación se hace un estudio general del sistema numérico desarrollado por Babilonia y al que se le atribuyen características especiales propias de un sistema de numeración posicional y operacional. Igualmente, se hace alusión a las tablas de cálculo diseñadas por los babilonios como herramientas en las que se evidencia un conocimiento pragmático de la multiplicación, del inverso de un número, del cálculo de potencias cuadradas, cubicas, raíces cuadradas y raíces cubicas respectivamente.

Del mismo modo, Fernández (2012) trae a colación algunos de los trabajos realizados por Pitágoras y los relaciona con los saberes propios de los babilonios. En este caso, el autor confronta el conocido teorema de Pitágoras con uno de los elementos emblema de Babilonia, la tabla Plimpton 322, en la que se muestra la relación entre los elementos de una terna numérica implícitos en un triángulo rectángulo como el que se muestra en la figura 1.

Figura 1

Triangulo rectángulo



Fuente. Propia del autor.

Por último, el documento establece una comparación entre las matemáticas babilonias y las matemáticas griegas, resaltando algunos aspectos que muestran cierto grado de similitud entre las mismas, al mismo tiempo que resalta sus diferencias de forma clara y concreta, destacando el empleo de tablas de cálculo en donde se evidencia una relación clara entre sus cantidades, siendo este un paso significativo hacia la noción de función.

Simultáneamente, la investigación en mención permitió conocer de primera mano información relevante concerniente a aquellos procesos académicos implementados por los babilonios al interior de sus escuelas, mismos que para el caso de las matemáticas consistían en efectuar operaciones aritméticas básicas, que en su gran mayoría eran registradas en tablas de arcilla en términos de resultados y no en términos procedimentales.

En un segundo documento denominado **"Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza y aprendizaje"** de Ugalde (2013) de la escuela de matemáticas de la Universidad de Costa Rica, se analizó el desarrollo histórico del concepto de función como herramienta indispensable para fortalecer su proceso de enseñanza y aprendizaje. Análisis que resalta la noción de dependencia entre cantidades distribuidas en filas y columnas como un notorio anticipo a la representación tabular del concepto de función.

De igual forma, y dado que los primeros vestigios de la noción de función provienen de la necesidad de modelar fenómenos, fue pertinente analizar un tercer documento con el fin de comprender el desarrollo de este proceso desde el empleo de dicho concepto. En ese orden de ideas, Rondón (2013) establece en su documento **“Introducción al modelamiento de fenómenos físicos a través de funciones”,** que el concepto de función es una necesidad fundamental para comprender el funcionamiento de la naturaleza, ya que permite la modelación de muchos de sus fenómenos.

En un tercer documento denominado “**El concepto de función: ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones”** de Díaz (2013), se analizó el recorrido histórico del concepto identificando algunas de sus etapas más significativas antes de alcanzar una estructura sólida y bien definida. En esta investigación se exhiben algunos de los obstáculos epistemológicos de la noción de función a lo largo de su historia.

En un cuarto documento denominado: “**La construcción histórica del concepto de función*”*** de Da Silva Bueno (s,f), se hace una revisión histórica desde sus primeros vestigios hasta su definición actual, identificando algunos elementos importantes de dicho proceso.

Indistintamente, en el proceso de búsqueda de investigaciones se encontró que varias proponen analizar algunos elementos esenciales en torno al empleo del concepto de función desde el manejo de ciertos elementos por parte de los estudiantes. A continuación, una lista de investigadores que han ahondado en este propósito:

- Explorar la comprensión de los estudiantes del concepto de función. Aquí sobresalen (Orton, 1070 como se citó en Lovell, 1971), (Tomas, 1971,1975).
- Proponer marcos teóricos para investigar el conocimiento de los estudiantes acerca de las funciones. (Vinner,1983), (Vinner y Dreyfus, 1989), (Even,1990)
- Estudiar los errores conceptuales y dificultades del concepto (Markovits, Eylon y Bruckheimer 1989,1989).
- Estudiar las diferentes componentes y representaciones de las funciones, así como la interpretación de sus respectivas gráficas, (Duval, 1988).
- Análisis de la taxonomía del concepto de función (Lovell,1971).

En consecuencia, los resultados obtenidos con las investigaciones anteriores dan cuenta de algunos aspectos esenciales, a saber:

- El concepto de función es inherentemente difícil para los alumnos cualquiera que sea el método de enseñanza, (Ruiz, 1993).

Del mismo modo, y conforme a las diversas representaciones del concepto de función se concluye que:

- Los estudiantes se quedan en los niveles más bajos de la comprensión del concepto de función sin importar cuál sea su nivel de intelectualidad.

En conclusión, aunque se encontraron diversas investigaciones relacionadas con el desarrollo histórico del concepto de función, hay que resaltar que existe poca evidencia en el estudio de sus formas de representación y en particular de su representación tabular.

4. Marco Teórico

Teniendo en cuenta que la propuesta del presente proyecto de investigación es de corte histórico, se busca comprender a la luz de la historia de las matemáticas el recorrido epistemológico del concepto de función, destacando los momentos relevantes de su desarrollo, los aportes de algunos matemáticos que con sus trabajos contribuyeron al fortalecimiento de su definición, y los obstáculos epistemológicos que marcaron su evolución y a los que ha tenido que enfrentarse la humanidad a lo largo de la historia. Por último, reflexionar sobre la importancia y necesidad de fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en particular de la noción de función.

Para tal fin, se tuvieron en cuenta una serie de investigaciones como las mencionadas anteriormente, que proveen información importante para la construcción del marco teórico que rige el presente documento, mismo que muestra los diversos acontecimientos que derivaron en avances significativos del concepto de función. No obstante, antes de exhibir tales sucesos, es necesario reflexionar sobre el porqué de la importancia de la noción de función en el quehacer de las matemáticas desde el siguiente interrogante:

¿Por qué estudiar la historia del concepto de función?

Para responder a esta pregunta, basta traer a colación a Spivak, el cual y siendo citado por Ugalde (2013) afirma lo siguiente:

> El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función sea de gran generalidad. (p.2)

Asimismo, es relevante tener en cuenta que el concepto de función ha contribuido considerablemente a la interpretación del comportamiento de la naturaleza desde la observación y modelación de fenómenos naturales inmersos en la cotidianidad del ser humano, partiendo de ideas primitivas de relación y consolidándose con el tiempo como un objeto matemático fundamental que yace en la estructura de una matemática práctica y esencial para el desarrollo de la humanidad. Esto como producto del trabajo interminable de grandes pensadores, los cuales llevan a reflexionar que, "Tal y como se define actualmente en matemáticas, es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años” (Ruiz, 1998, como se citó en Pollio, 2016, p.1).

Análogamente, se dice que muchos de los objetos y fenómenos que se observan en el contexto de la naturaleza, mantienen una estrecha relación a partir de sus características intrínsecas y extrínsecas, mismas que en su gran mayoría son expresadas a partir de leyes físicas, de las que se infiere que, las magnitudes inmersas en la estructura de un fenómeno determinado, establecen una relación entre sí al punto que los valores de algunas de estas quedan definidos por los valores de las otras. Fue esta idea de correspondencia que sentó las bases que dieron origen al concepto de función.

Es de destacar que muchas de las nociones matemáticas surgieron gracias a la interacción del hombre con su entorno, interacción que condujo a la búsqueda de mecanismos que potenciaran el desarrollo de las distintas actividades que en su contexto tenían lugar. Por ejemplo, la construcción de edificaciones necesarias para su supervivencia, el diseño y elaboración de herramientas para la caza, el cálculo de distancias y demás actividades matemáticas involucrando elementos de sus cuerpos (dedos, pies, pasos, entre otros), el movimiento de algunos cuerpos celestes, etc. Todas estas acciones tenían como piedra angular las concepciones de número, orden y medida respectivamente, mismas que también tienen razón de ser en el trueque como actividad comercial, ya que está basado en la idea de correspondencia.

En la prehistoria, y principalmente en la zona de Mesopotamia, existía una idea ligera de la noción de función que se reducía exclusivamente a la tabulación de fenómenos naturales a partir de ciertas características que despertaban el interés por su estudio, a saber: Periodo de ocurrencia, duración del mismo, intensidad, etc. Esto con el fin de obtener información generalizada con base a las observaciones hechas, y a partir de la aritmetización de sus resultados. Pues como lo plantea Boyer (1986, p.489, como se citó en Farfán y García, 2005): “Si no hubiera una regla general subyacente sería difícil explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo tipo” (p.1).

Empero, y a pesar de lo anterior, no se aislaron las concepciones existentes de cantidad variable y de función respectivamente. También vale la pena enfatizar que, además de lo dicho anteriormente, el concepto de función como noción matemática ha estado supeditado a una serie de cambios o trasformaciones que con el pasar del tiempo han consolidado su estructura en lo referente a su definición, clasificación, propiedades, etc., tal como sucedió con los conceptos de límite, derivada e integral.

De igual forma, es importante resaltar que a pesar de no contar con herramientas matemáticas sólidas, ya se evidenciaba un "*instinto de funcionalidad"* en la cultura Babilónica. Así lo expone Ugalde (2013) Obteniendo así, *"la versión más rudimentaria del concepto de función"* (p.5), aquella que está asociada a la dependencia entre cantidades.

En ese orden de ideas, los babilonios lograron desarrollar una serie de tablas de cálculo a partir de la idea anterior, proceso que les permitió la construcción de la tabla de los cuadrados del 1 al 59, la tabla que exhibe los cubos del 1 al 32, y la tabla de cuadrados que se muestra a continuación, la cual y según algunos historiadores, no es más que una notoria aproximación al conocido teorema de Pitágoras.

Figura 2

Tabla de cuadrados

Fuente. Villatoro, 7 septiembre, 2017

Es de anotar que el análisis de esta tabla se hará en el capítulo concerniente a los resultados de la investigación.

Simultáneamente, y continuando con la idea intuitiva del concepto de función, es necesario reconocer que, si bien es cierto los babilonios no percibieron la noción de función como se hace hoy en día, se interesaron por estudiar fenómenos relacionados con el movimiento, como la rotación y traslación de los planetas, la aparición de los mismos con respecto a la posición del sol, la variación de la luminosidad de la luna en función del tiempo, etc., marcando consigo una notable diferencia con el pensamiento griego, el cual consideró el movimiento como un proceso externo a las matemáticas. Esto a pesar que la cultura babilónica no contaba con el concepto general de fórmula, o como lo afirma Ugalde (2013): “Por lo empírico e intuitivo de su matemática” (p.6).

Este acontecimiento (pensamiento griego) condujo a que se hablara de incógnitas e inseminadas en lugar de variables, lo que según Ruiz (1998, p.490 como se citó en Farfán y García, 2005): “Da origen a las proporciones y ecuaciones y no a las funciones” (p.2). Por eso, dichas nociones matemáticas son consideradas como elementos negativos con relación a la evolución del concepto de función.

Continuando con el pensamiento griego, hubo un momento relevante en favor del concepto de función, mismo que estuvo sujeto a lo que se conoció como ideas de cambio, intrínsecas en la relación entre magnitudes variables, e inmersas principalmente en el lenguaje de la física y en particular en la teoría del movimiento, pues consideraban que las matemáticas eran una disciplina ciento por ciento estática. Por ende, y según Díaz (2013) quien hace un análisis de los elementos de Euclides:

> Los objetos matemáticos son estáticos, esto condujo a las proporciones y ecuaciones, pero no a las funciones, se consideran a los números enteros y discretos, y a las magnitudes continuas, lo que dificultó en gran medida la construcción de la noción de función. (p.15)

En consecuencia, e independiente de las características de las matemáticas en el pensamiento prehistórico, no hubo un desarrollo significativo de la noción de función o cantidad variable.

La antigüedad tuvo un desarrollo significativo en el estudio de casos particulares ligados a la idea de dependencia entre dos cantidades, sin embargo, y al igual que en la prehistoria, no hubo un avance importante en términos de la separación de las nociones de cantidad variable y función, lo que conlleva a concluir que en este periodo tampoco se contaba con una concepción clara concerniente a la idea de relación funcional. No obstante, en el pensamiento antiguo se pueden encontrar una serie de ideas relacionadas con lo anterior, ideas que yacen plasmadas en tablas hechas por los babilonios, y en las cuales se observan cálculos matemáticos referidos a actividades comerciales, observación de fenómenos, entre otras actividades.

De modo similar, los matemáticos de la Grecia antigua empleaban una variedad de correspondencias funcionales caracterizadas por el uso de tablas de cálculo, descripciones verbales que daban cuenta de la conexión entre elementos de dos conjuntos, gráficos, reglas, y otras estructuras desarrolladas desde su pensamiento filosófico. Así pues, surgen algunas ideas preliminares asociadas al concepto de función, no obstante, es importante resaltar que dicha noción matemática logra consolidarse en el siglo XVII. Empero, y a pesar de lo dicho anteriormente, durante este periodo, y en particular desde los albores del siglo XIV, se utilizó la noción de relación variable entre cantidades en la construcción de tablas, cuya estructura mostraba la organización de cuantías en filas y columnas, similar a lo que se hace en la actualidad con la tabulación de valores.

Análogamente, en el siglo XIV se dio un paso relevante en términos de la construcción de nuevas teorías, una de ellas es la cinemática, rama de la física que estudia el movimiento de los cuerpos, y que está relacionada significativamente con el desarrollo de la geometría. Por ende, su evolución no puede ser separada de las ideas generales que surgen a partir de las reflexiones humanas concernientes a su entorno natural.

En el contexto de la edad media, el desarrollo del concepto de función pasa por dos momentos notables. Un primer momento denominado no latino, comprendido entre los años 500 y 1200, y un segundo momento comprendido entre los años 1200 y 1500, y al cual se le denominó fase latina. Dentro de la coyuntura del primer momento, muchas de las matemáticas que asomaban por aquel entonces, incluyendo las árabes y las hindúes, caen en el campo del algebra y la trigonometría. Aquí se dan pasos importantes con relación a la solución de ecuaciones con una incógnita, sin embargo, y según Boyer (1946, como se citó en Díaz, 2013) “no hubo avances reveladores con respecto a la idea de variable, lo que sin duda limitó la resolución de ecuaciones con dos incógnitas, dado que no se contaba con la idea de relación funcional entre dos variables” (p.15).

De igual forma, en el segundo periodo denominado periodo latino, y especialmente en el siglo XIII y en la génesis del periodo moderno, aparecieron paulatinamente documentos relacionados con la teoría de proporciones, teoría que estaba fundamentada en el estudio de relaciones del tipo $y = kx^n$ donde n representa un valor netamente racional. Vale decir que expresiones como estas marcaron un punto importante en todas las ciencias cuantitativas hasta la era de Isaac Newton. Pero quizá uno de los precursores en explorar las reglas que permitían el manejo de lo que hoy se conoce como funciones potencia, es, sin duda alguna, Nicole de Oresmes (1323-1382), quien concibió la idea de potencia fraccionaria estableciendo mecanismos para multiplicar y dividir proporciones, singularmente aquellas cuyos exponentes eran enteros o fraccionarios. Por consiguiente, Oresmes establece las reglas que permiten multiplicar y dividir expresiones racionales, y posteriormente, hace un análisis exhaustivo de aquellas expresiones cuyos exponentes son exclusivamente fraccionarios.

En el marco de la teoría de funciones, Oresmes se destacó por el empleo de trazos de gráficas correspondientes a las variaciones de ciertos fenómenos relacionados con el cambio de temperatura, la intensidad luminosa, la velocidad, entre otros. Análogamente, utiliza las expresiones "longitud "y "latitud" para representar gráficamente la trayectoria de los astros, siendo la latitud de forma, "una teoría primitiva de funciones que mostraba la dependencia de una cantidad variable sobre otra" (Díaz, 2013, p.15). Empero, con la ausencia del lenguaje algebraico, "fue difícil expresar la ley de variación o la correspondencia funcional" (Boyer, 1946, p.10, como se citó en Díaz, 2013, p.16).

Cabe resaltar que en este periodo también se da la separación del algebra y la trigonometría, separación que determina objetivos diferentes para dichas disciplinas, pero sin contribuciones sobresalientes al concepto de función. No obstante, se destaca la intención de explicar de forma cuantitativa los fenómenos naturales mediante procesos de abstracción, mismos que resultan infructuosos por la disociación existente entre número y magnitud. Sin embargo, y gracias a este acontecimiento se logra lo que tiempo después se conoció como la modelización de fenómenos, proceso fundamentado en la obtención de resultados producto de prácticas experimentales, lo que llevó a Rene de Cotret (1985, p.58, como se citó en Farfán y García, 2005) a aseverar: "La historia nos va a mostrar que es unificando, fundiendo las dos concepciones, como se van a poner las bases de la noción de función" (p.2)

Pasando al periodo moderno, se puede decir que el concepto de función sufre avances significativos a partir de la aparición de ciertos desarrollos matemáticos que potenciaron su estructura. Estos adelantos se dieron en un lapso de 200 años (1450-1650), y se relacionaron según Díaz (2013) con aspectos tales como:

1. La unión del algebra y la geometría.
2. La introducción de la teoría del movimiento como problema central de la ciencia.
3. El desarrollo del algebra simbólica.
4. El desarrollo de la geometría analítica. (Kleiner, 1989, p.283, como se citó en Díaz, 2013, p.16)

Del mismo modo, y especialmente en los siglos XV y XVI (periodos auxiliares), y a pesar que no se lograron contribuciones destacables a la evolución de la noción de función, se sientan las bases de lo que hoy se conoce como simbología algebraica, simbología que establece una notable diferencia entre "La variable de una función y la incógnita de una ecuación" (Ruiz, 1998, p.491 como se citó en Farfán y García, 2005, p.3), lo que jugó un papel importante para estructurar plenamente el concepto de función.

Otro suceso importante para resaltar en la construcción del presente documento, tiene que ver con lo hecho por Galileo, pues logró un resultado extraordinario que favoreció el desarrollo del concepto de función desde la modelización matemática de los fenómenos mediante resultados experimentales, dado que, "tuvo el deseo de relacionar de forma funcional las causas y los efectos, y esta necesidad fue un factor esencial en la concepción de la variable dependiente". (Rene de Cotret, 1985, p.13 como se citó en Farfán y García, 2005, p.3). Empero, la forma de expresar los resultados determina una notación ligada a un gran obstáculo epistemológico, la noción de proporción.

En el siglo XVII se desarrolla una matemática con una visión continua y dinámica de lo que hasta ese momento era una relación funcional. Visión que contrasta considerablemente con la concepción que se tenía en la antigüedad, la cual era visibilizada como "estática y discreta". (Kleiner, 1989, p.283, como se citó en Díaz, 2013, p.16). Así pues, y por primera vez, aparece la palabra función en los manuscritos de Leibniz, los cuales mostraban que dicha designación hacía referencia a: "Todo objeto geométrico asociado a una curva, coordenadas de un punto sobre la curva o a la pendiente de una curva". (Yushkevitch, 1976, p.56 como se citó en Díaz, 2013, p.16). Asimismo, en 1718, Bernoulli dio la primera definición formal de función en los siguientes términos: "Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes" (Ruthing, 1984 como se citó en Díaz, 2013, p.16).

Indistintamente, la aparición del análisis matemático como disciplina que proporciona métodos para el desarrollo de investigaciones cuantitativas, enfocadas en la variedad de procesos de cambio ligados al movimiento y dependencia de una magnitud respecto a otra, hizo que la noción de función tuviera un avance relevante a partir de que muchos de los problemas derivados de las formas de movimiento, pudieran modelarse a través del proceso anterior, es decir, con la relación de dependencia entre variables. En ese orden de ideas, surgen dos tipos de problemas, primero, aquellos que están relacionados con la necesidad de determinar la velocidad de un cuerpo en un instante específico de un movimiento no uniforme, y aquellos que se relacionan con el trazo de una recta tangente a una curva. Es de destacar que problemas como estos condujeron al desarrollo del cálculo diferencial. Segundo, aquellos problemas asociados a la búsqueda del área de una figura curvilínea (problemas de la cuadratura), o la distancia recorrida en un movimiento no uniforme, los cuales dieron origen a otra rama del análisis matemático, el cálculo integral. Como resultado de ello, se infiere que el análisis centra su esfuerzo en el estudio de la dependencia de una variable respecto a otra, dependencia que en el lenguaje actual se denomina función.

Otro punto importante para destacar es la aparición de la geometría analítica derivada de los trabajos de Fermat y en especial de Descartes, quienes lograron renunciar a la concepción de número y magnitud establecida por los griegos y logrando fusionarlas. De esta forma, (Yushkevitch, 1976, p.491 como se citó en Farfán y García, 2005) afirma que:

> Es aquí donde por primera vez, y de una forma completamente clara, se sostiene la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades, de manera que permite el cálculo de los valores de una de ellas correspondiente a los valores dados de la otra. (p.3)

De esta forma, el concepto de función alcanza una evolución considerable. Asimismo, y a través del uso del sistema de coordenadas cartesianas, se inicia un estudio minucioso de las curvas y las expresiones algebraicas que las describen, suceso que abre paso al desarrollo de la teoría de funciones. Teoría que se fundamenta en tres elementos esenciales, “el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, la creación del algebra simbólico-literal, y la extensión del concepto de número”. (Yushkevitch, 1976, p,.491 como se citó en Farfán y García, 2005, p.3).

Ahora bien, dada la importancia de conocer los diferentes aportes al concepto de función, es necesario mostrar las contribuciones de ciertos matemáticos que durante el siglo XVII permitieron que dicha noción matemática se potenciara consecuentemente. Estos son: Rene Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz.

De Descartes (1596-1650) se puede decir que fue un filósofo y matemático francés que hizo aportes esenciales al desarrollo de las matemáticas, es de recordar que antes de Descartes las curvas se definían por las propiedades geométricas que cumplían, sin embargo, el concepto de función se mantenía distante del estudio de estas. Pero es gracias a la aplicación de métodos algebraicos en la geometría que se abre una brecha importante para la introducción del concepto de función, proceso que mostró una geometría distante a la geometría desarrollada por la cultura griega, pues Descartes y Fermat la hicieron analítica, característica que se visualizaba en el cálculo de tangentes de algunas curvas, determinación de áreas, y otras operaciones que visibilizaban una matemática con un avance importante.

El punto clave de esto se da cuando Descartes centra su interés en el análisis de los fenómenos naturales, los cuales eran considerados como invariables a las leyes de las matemáticas, siendo la mecánica el modelo por excelencia para lo que en ese momento se denominó, la "matematización de las ciencias". En su obra magna titulada ***discurso del método,*** Descartes señala estrategias geométricas para la solución de cierto tipo de ecuaciones, por ejemplo, ecuaciones cuadráticas, para posteriormente concentrar sus esfuerzos en la aplicación del algebra a la solución de problemas geométricos. Igualmente, realiza estudios relacionados con curvas de diferente orden, y finaliza su arduo trabajo con la teoría general de ecuaciones. De este modo podría decirse que un amplio fragmento de su obra está destinado a la búsqueda de relaciones o correspondencias entre el álgebra y la geometría.

Por consiguiente, el aporte más relevante que hizo Descartes al desarrollo de las matemáticas según algunos historiadores, radica en la posibilidad de representar un punto cualquiera del plano a través de un par ordenado de la forma (x, y), que representa la distancia perpendicular de cada uno de los ejes a dicho punto. Lo anterior permitió establecer una loable conexión entre el lenguaje algebraico que para ese entonces poseía un carácter experimental y el lenguaje geométrico. Conexión que se puede observar a través de la relación existente entre una ecuación y una curva en el plano, donde las coordenadas (x, y) de los puntos que la forman, corresponden a la solución de su respectiva ecuación, constituyendo así el principio general de la geometría analítica. Esto derivó en un avance relevante para las matemáticas, cambiar la regla y el compás por expresiones numéricas, mismas que pueden ser representadas mediante coordenadas cartesianas.

Pero lo valioso de este asunto en términos del concepto de función, es la manera en que la geometría analítica expresa figuras geométricas a través de la ecuación $f(x, y) = 0$, siendo f una función.

De otro lado, Isaac Newton (1643-1727) también hizo valiosos aportes a la evolución del concepto de función desde dos puntos de vista, primero, con el método denominado las primeras y últimas razones, de las cantidades que nacen y se desvanecen, y segundo, con el método de las fluxiones, el cual les da un amplio sentido cinemático a las funciones, y se define como la velocidad con la que una variable cambia, varia o fluye con respecto al tiempo. Este proceso coadyuvó rotundamente a que se desligara de los infinitesimales. De esta forma, y con el concepto antes mencionado (fluxión), *"*Newton estudia las magnitudes variables como formas distintas del movimiento mecánico continuo, al cual le denominó fluentes, mismos que se caracterizaban por ser variables independientes con un mismo argumento, el tiempo" (Yushkevitch, 1976 como se citó en Farfán y García, 2005, p.3). También es importante destacar que, con el concepto de fluxión, hace un descubrimiento relevante en torno a la reciprocidad de las operaciones derivada e integración, lo cual constituye una aproximación al concepto de función.

Indistintamente, en sus primeras investigaciones Newton batalló exclusivamente con la solución de problemas geométricos caracterizados por la búsqueda de tangentes, cálculo de áreas, curvaturas, etc., haciendo uso de la geometría analítica de Descartes como herramienta matemática fundamental. Empero, el punto más álgido de lo hecho por Newton con relación al concepto de función, fue la representación de funciones como expresiones analíticas de diversas constantes, a pesar que uno de sus grandes deseos era poder describir el concepto de función en términos del lenguaje de la geometría y la mecánica simultáneamente.

De igual forma, a Leibniz (1646-1716) matemático alemán, se le debe la introducción del término función, mismo que uso por primera vez en su obra "**Methodus tangentium inversa sen de fontionibus"**, al trabajar con el cálculo de diferenciales y al referirse a cantidades con variaciones relacionadas por una ley específica. Ya que según Yushkevitch, 1976, p.491, como se citó en Farfán y García, 2005). "A falta de un término general entre él y Bernoulli, para representar las cantidades arbitrarias que dependen de una variable, va a conducir bien pronto el uso de la palabra función en el senito de una expresión analítica". (p.3)

Sin embargo, es necesario destacar que el concepto desarrollado por Leibniz, varía en algunos aspectos de la noción de función que se trabaja hoy en día. De igual forma, el trabajo de Leibiz estuvo motivado por el deseo de analizar matemáticamente los puntos donde las curvas alcanzan sus valores máximo y mínimo respectivamente, así como también, por el anhelo de encontrar rectas tangentes asociadas a dichos puntos.

En resumen, Descartes abrió una brecha importante para la introducción del concepto de función a partir de la aplicación de métodos algebraicos en la geometría. Por su parte Newton logra un avance significativo al darle a la noción de función un sentido mecánico, y Leibniz emplea el término función en su obra magna para referirse a las cantidades con variaciones relacionadas por una ley específica.

Ahora bien, a partir del siglo XVIII el concepto de función pasa por cuatro momentos importantes en términos de su desarrollo y evolución, asimismo, en este periodo las matemáticas alcanzan un punto relevante en su transformación al darse la posibilidad de analizar fenómenos físicos mediante el empleo de un objeto matemático de naturaleza analítica, que deja a un lado su investidura de curva para tomar la investidura de función. Herencia de lo hecho por Leibniz con la noción de infinitesimal.

Empero, y antes de ahondar en estos periodos claves, es inevitable reconocer que fueron Euler y Bernoulli los artífices de que el concepto de función sea considerado como una expresión analítica, siendo el primero el precursor del empleo de la letra f para representar funciones con sus respectivas características, lo que dio origen a la expresión fx en un primer momento, para posteriormente y con la llegada de Euler evolucionar a la forma f(x).

Este avance constituyó un puente para conectar el cálculo diferencial desarrollado por Leibniz y el método de fluxiones establecido por Newton, operación que dio pie al análisis matemático como disciplina que centra su interés en los procesos infinitos.

A continuación, se ilustran los cuatro momentos por los que transitó el concepto de función a partir del siglo XVIII.

Primer momento:

Este primer momento tuvo como protagonista al matemático suizo Leonhar Euler (1707-1783), y se caracterizó por expresar funciones a través de fórmulas. Es importante resaltar que la definición dada por Euler tiene como soporte la definición de Bernoulli. Así pues, Euler define funciones a partir de los siguientes parámetros: "Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes" (Ruthing, 1948, p. 72 como se citó en Díaz, 2013, p.16).

Como dato sobresaliente de lo ejecutado por Euler, se resalta el hecho de considerar funciones implícitas y explicitas en sus trabajos. Asimismo, vale decir que la definición de función expuesta por el mencionado, permaneció incólume hasta inicios del 1800, tiempo en que el matemático francés Fourier encontró relaciones generales entre variables al trabajar las series trigonométricas.

Segundo momento:

Este segundo momento tuvo como protagonista a Fourier, pues dio una definición en la cual el elemento más valioso de la misma es la asignación de valores para la función, proceso que se desarrollaba por una o varias fórmulas matemáticas. De este modo, la definición de función expuesta por Fourier se expresa de la siguiente forma:

> En general, la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas f(x). Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única. (Ruting, 1984 como se citó en Díaz, 2013, p.17).

Tercer momento:

El tercer momento se caracterizó porque es aquí donde se da la primera definición moderna de función y=f(x) en un intervalo (a, b), siendo x una variable independiente. Esta definición tiene una connotación general con relación a las definiciones anteriores, dado que no considera fórmula alguna. En ese orden de ideas, la definición de función dada por Dirichlet queda expresada de la siguiente forma:

> Y es una función de una variable x, definida en el intervalo $a < x < b$, si a todo valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia. (Ruting, 1984 como se citó en Díaz, 2013, p.17).

Cuarto momento:

El cuarto momento resalta el trabajo realizado por Bourbaki en el año 1939, y cuya característica radica en la arbitrariedad del dominio y el rango. Por ende, la definición de función expuesta por Bourbaki, yace escrita en los siguientes términos:

> Sean E y F dos conjuntos, que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional en y, si para todo x de E existe un único y de F el cual está en la relación dada con x. (Ruting, 1984 como se citó en Díaz, 2013, p.18).

Como se puede observar, la definición de función establecida por Bourbaki, data de dos conjuntos arbitrarios ligados por una regla de correspondencia, los cuales se denominan dominio y rango. Sin embargo, es de reconocer que la discusión en torno a su defunción no ha sufrido modificaciones importantes, al menos en comparación con el milenio anterior.

Seguidamente, y partiendo de la importancia de conocer otros elementos relevantes en torno al desarrollo del concepto de función, es necesario mostrar lo hecho por estos y otros matemáticos de la época para profundizar lo escrito anteriormente, los cuales, y al igual que los ya mencionados, potenciaron o influenciaron su evolución desde diferentes perspectivas. Tal es el caso del matemático suizo Jean Bornoulli (1667-1748), el cual, y como se dijo en párrafos anteriores, incidió en la definición establecida por Euler, quien hace una modificación de la palabra "cantidad" y la sustituye por "expresión analítica". Cabe resaltar que la llegada de la noción de función resulta de gran utilidad para Bernoulli, pues para entonces estaba analizando problemas relacionados con el cálculo de variaciones, los cuales admitían funciones como posibles soluciones. Asimismo, y complementando lo planteado en el primer momento (concerniente a lo hecho por Euler), hay dos definiciones dadas por Euler según algunos investigadores matemáticos, las cuales y dada su importancia para el presente proyecto de investigación, resultan pertinentes de traer a colación:

La primera definición expuesta por Euler aparece consignada en su obra "**Introductor in analysis infinitorum"**, cuya redacción yace plasmada en los mismos términos con que aparece en el primer momento, es decir: "Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes" (Ruthing, 1948 como se citó en Díaz, 2013, p.16). De igual forma, vale la pena resaltar el estudio que hizo Euler (1707-1783 como se citó en Díaz, 2013) referente a la continuidad de una función, misma que define como "aquella donde todos los valores están ligados por una misma ley o dependen de la misma ecuación". (p.16). Simultáneamente, la noción de función le permitió a Euler avanzar indudablemente hacia nuevas estructuras matemáticas mucho antes de redactar su obra magna. Un ejemplo de ello es que logra definir la función gama, y encuentra la solución de la suma de su serie:

Figura 3

N9 serie Infinitiva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Fuente. Matemáticas en tu bolsillo, 2018

La segunda definición desarrollada por Euler aparece publicada en su segunda obra denominada **Institutiones calculi differentialis**, la cual yace planteada en los siguientes términos:

> Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las últimas, las primeras también sufren cambio, y entonces las primeras se llaman funciones de las últimas. Una cantidad puede ser determinada por otras, así, si x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x en cualquier forma están determinadas por x y se les llama funciones de x. (Euler, 1783, p.211)

A la vez, y no menos importante. Euler introduce en el campo de las matemáticas la notación f(x) para referirse a una función f aplicada a un argumento x. Esta forma de representar funciones brindaba un alto grado de comodidad en comparación a los métodos rudimentarios empleados por Newton y Leibniz, y fundamentados en el cálculo infinitesimal. Simultáneamente, con el problema de la cuerda vibrante, que en palabras de Euler "queda totalmente determinado si se dan para un instante cualquiera y la velocidad en cada punto" (Farfán, 1997, p.492, como se citó en Farfán y García, 2005, p.4) se da un paso importante en el empleo de nuevas funciones que distan de las utilizadas en aquella época, considerando incluso las denominadas funciones trascendentales como ln y e, así como también, las funciones trigonométricas. En consecuencia, es posible afirmar "que quien reestructuró el cálculo leibniziano y lo convirtió en un cuerpo organizado fue Euler, figura central de las matemáticas del siglo XVIII" (Farfán, 1997, p.492, como se citó en Farfán y García, 2005, p.4).

Por otro lado, el matemático francés Nicolás de Condorcet (1743-1794), es reconocido por considerar que para definir una función no hay necesidad de contar con una expresión explicita, una ecuación o una formula analítica definida implícitamente. Análogamente, se dice que fue el primero en retomar la definición expuesta por Euler para sentar su definición de la siguiente forma: Asumo que tengo un cierto número de cantidades x, y, z…y para cada valor definido de x, y, z…F tiene uno o más valores definidos correspondientes a ellos, yo digo que F es una función de x, y, z…

Similarmente, el matemático italiano Joseph Lagrange (1736-1813), jugó un papel importante en el establecimiento de los fundamentos del análisis y el desarrollo de la teoría de funciones. Es de destacar que en su obra ***"teoría de funciones analíticas"***, Lagrange define una función de una o más cantidades como:

> A cualquier expresión del cálculo en la cual esas cantidades entran de manera cualquiera, mezcladas o no con otras cantidades que miramos como teniendo valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones consideramos solo las cantidades que suponemos variables sin ninguna mirada a las contantes. (Lagrange, 1983, p.1)

Por último, el matemático y físico francés Jean Joseph Fourier (1768- 1830), mencionado en párrafos anteriores, define una función fundamentada en los siguientes términos:

> En general, la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dada una infinidad de valores de la abscisa x, hay un número igual de ordenadas f(x). Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que esas ordenadas estén sujetas a una ley común, se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola. (García, 2011, p.2)

Vale decir que la definición de función expuesta por Fourier, se da cuando analizaba la posibilidad de representar funciones en series trigonométricas de senos y cosenos. Definición que dista considerablemente de las expresiones analíticas.

Por otra parte, en el siglo XIX las matemáticas sufren una coyuntura importante, misma que está relacionada con la incertidumbre que trajo consigo los principios del análisis. No obstante, y a pesar de ello, el concepto de función alcanza un avance relevante en manos de matemáticos como Dirichlet, Riemann y Weirstrass respectivamente, avance que dada su importancia para el presente proyecto de investigación es necesario traer a colación:

De Dirichlet se puede decir que contribuyó al perfeccionamiento del concepto de función desde el campo del análisis, al presentar una definición clara, concisa y práctica de lo que representa una función en matemáticas. Se dice también que en el 1829 define funciones de la forma y=f(x) en una variable independiente e inscrita en un intervalo $a < x < b$. De este modo, su definición fue presentada de la siguiente forma:

“y es una función de una variable x definida en el intervalo $\mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b}$". (Kleiner, 1989)

Posteriormente, la definición dada por Dirichlet es objeto de análisis a partir de la introducción de los espacios métricos y la topología, pues a partir de aquí se hace la deducción que, las propiedades de una función están ligadas a la estructura general del conjunto sobre la cual se define, lo que abrió una brecha sobresaliente para el desarrollo de los conceptos de dominio y rango de una función. Del mismo modo, y ya en el contexto de la teoría de funciones discontinuas, Dirichlet mostró un tipo especial de función no continua en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, la cual está definida por la siguiente estructura:

Figura 4

Calculo Dirichlet

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{si\ x} \in \mathbb{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{si\ x} \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Fuente. Cálculo integral, 2021

Al igual que los matemáticos anteriores, el alemán Bernhard Riemann (1826-1866) hizo valiosos aportes al desarrollo del concepto de función, tan es así que es considerado como uno de los pioneros en la evolución de la teoría moderna de funciones, así como también, en establecer una notoria diferencia entre las nociones de discontinuidad y diferenciabilidad. Así pues, Riemann define como función continua en un intervalo definido, “A toda función f(x) que cumple con la condición que, al hacer x un recorrido de manera continua por todos los valores comprendidos entre dos valores fijos, la función f(x) varia igualmente de una manera continua”. (Uriarte, 2018, p. 46)

No obstante, y tiempo después de su fallecimiento, se encontraron documentos donde muestra una definición alterna de continuidad, misma que hace alusión a lo que hoy en día se conoce como continuidad uniforme definida en intervalos cerrados $a \leq x \leq b$.

Por su parte, Karl Weierstrass (1815-1897) en uno de los apartes de su obra denominada **“Capítulos seleccionados de la teoría de funciones”,** piensa el concepto de función como una relación netamente aritmética entre dos variables. Del mismo modo, establece su definición de función como “*Una correspondencia entre sus elementos”,* llegando a la conclusión que, mientras dicha correspondencia se establezca de forma continua, las dos nociones son iguales, (Espinoza, 2019).

Ya en el siglo XX, aparecen algunos pensadores que con sus trabajos e iniciativas contribuyeron indiscutiblemente a la formalización del concepto de función, entre ellos, el matemático francés Edouard Goursat (1858-1936), que expone su definición de función con base en los siguientes términos:

“y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y, esta correspondencia se indica mediante la ecuación y=f(x)”

Similarmente, el francés Lebesgue (1875-1941), reflexiona respecto al concepto de función al afirmar que:

> Bien que después de Dirichlet uno está generalmente de acuerdo en decir que existe una función cuando hay correspondencia entre x y los números x1, x2, x3,…, xn, sin preocuparse del procedimiento que sirve para establecer esta correspondencia, muchos matemáticos parecen no considerar como funciones más que aquellas que son establecidas por correspondencias analíticas. (García, 2011 p.1)

De igual manera, Rene Frechet (1878-1973) generaliza el concepto de función a través de su tesis denominada ***Generalisation de un theoreme de weirstrass,*** y la define a partir de los siguientes parámetros:

> Supongamos que damos una cierta categoría (elementos cualesquiera, números, superficies, etc.) en la cual se sabe discernir los diferentes elementos. Podemos decir que

> Vx es una función (operación funcional), uniforme en el conjunto E de elementos de c, si a todo elemento A de E le corresponde un número bien definido Vx. (García, 2011 p.1)

Sin embargo, el concepto de función alcanza un avance notable con la aparición de la teoría de conjuntos a finales del siglo XIX e inicios del siglo XX, misma que influyó considerablemente en la consolidación de su estructura. Pues, aunque hubo varios intentos de dar una definición formal, se dice que la establecida por el grupo francés Nicolás Bourbaki es la más completa hasta el momento. He aquí lo planteado: "Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos, de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto". (Martínez, 2021, p. 1)

Donde el primer conjunto recibe el nombre de dominio y se presenta por D, y el segundo conjunto recibe el nombre de contra dominio y se presenta por C.

Ahora bien, cambiando un poco de contexto y teniendo en cuenta que el objetivo fundamental del presente proyecto de investigación, es encontrar elementos que determinen una aproximación al registro tabular del concepto de función a partir de la interpretación de tablas babilónicas, se hace necesario identificar aspectos indispensables subyacentes a dicha cultura que contribuyan a tal fin. En ese orden de ideas, se debe reconocer que aunque muchos son los avances de las matemáticas a lo largo de su historia, tal vez uno de los más significativos ha sido el desarrollo del número, Sin embargo, y mucho antes de esto, en algunas civilizaciones de las que se destaca la cultura Babilónica, se implementaron algunos métodos rudimentarios para ejecutar labores de conteo a través de marcas en los árboles, uso de objetos hechos a barro y otros elementos que serán analizados en el capítulo correspondiente a los resultados de la investigación.

No obstante, y con el pasar del tiempo, estos métodos perdieron utilidad debido a que eran bastante limitados y poco prácticos, principalmente cuando la cantidad de elementos a contar crecía de forma exponencial, haciendo que se tornaran engorrosos e infructuosos. Por consiguiente, surge la necesidad de desarrollar un método alternativo que pudiese suplir las falencias de los métodos anteriores, desarrollo que fue posible con la aparición de la escritura cuneiforme y el sistema sexagesimal, lo cual da sentido al planteamiento filosófico que afirma que las matemáticas son una serie de construcciones teóricas que surgen de la necesidad de dar solución a un problema específico. O como lo plantea Stewart (2012) "las matemáticas no nacieron previamente formadas. Fueron haciéndose gracias a los esfuerzos acumulativos de muchas personas que procedían de muchas culturas y hablaban diferentes lenguas. Ideas matemáticas que se siguen utilizando hoy, datan de hace más de 4000 años" (p.26).

Esto hizo que hubiese un avance significativo al interior de diversas culturas y principalmente en la babilónica, pues muchos de sus procesos eran registrados en tablas de arcilla, las cuales daban cuenta de sus actividades comerciales, así como también de la contabilidad de familias adineradas, templos religiosos y palacios de monarcas. Igualmente, es importante resaltar que la elaboración de tales tablas era competencia de los escribas, personas con formación académica en escuelas existentes desde el año 2500 A.C, en donde se instruían en lectura, escritura y manejo de números desde sus primeros años de infancia.

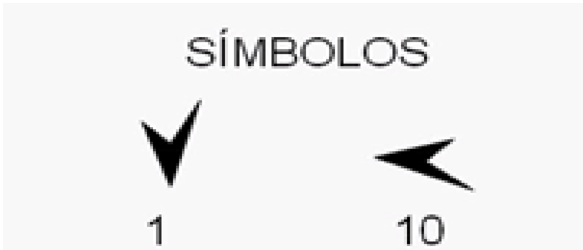
Indistintamente, y al igual que los egipcios, los babilónicos centraron su interés en la solución de problemas cotidianos relacionados con el cálculo del peso de ciertos objetos y la determinación de sus respectivas medidas, actividades que encontraron soluciones prácticas en el sistema sexagesimal. Esto hizo que dicha cultura consolidara importantes desarrollos en términos de estructura social y conocimiento científico. Del sistema sexagesimal se puede decir que fue un sistema numérico que se caracterizó por ser netamente posicional, es decir, se reconoce el lugar de ubicación de cada cifra de la misma forma que lo hace el sistema decimal o sistema de base diez, hecho que permitió no sólo la ejecución de las tareas descritas anteriormente, sino también el desarrollo de operaciones aritméticas básicas. Es de anotar que algunos elementos de dicho sistema han logrado subsistir a los avances de la ciencia y particularmente de las matemáticas. De ahí que todavía es posible representar unidades de tiempo con base en el número sesenta. A saber:

- 1 hora contiene sesenta minutos.
- 1 minuto contiene sesenta segundos.

A su vez, los símbolos utilizados por los babilónicos para la utilización de dicho sistema, cuyos nombren fueron Cuña y Vela y sus equivalencias 1 y 10 respectivamente, pertenecían a un estilo especial de escritura denominada escritura cuneiforme. A continuación, se muestran sus guarismos y algunas tablas babilónicas con dicha simbología.

Figura 5

Símbolos



Fuente. Stewart, 2012.

Tablas babilónicas hechas con escritura cuneiforme.

Figura 6

Tablas de Cálculo de los Babilonios

Fuente. Archivo Universidad St Andrews.

De manera similar, es indispensable conocer no sólo la evolución de las matemáticas en términos del desarrollo de sus conceptos, sino también el sentido filosófico de su pensamiento visto desde la necesidad de buscar soluciones a problemas cotidianos subyacentes en una cultura determinada, las cuales potenciaron y fortalecieron paulatinamente su estructura académica, social y comercial.

> Proceso que vivió Babilonia en la génesis de las ciencias, y que se relacionó masivamente con el desarrollo de procedimientos de cálculo supeditados a labores de medición, conteo y ordenamiento, elementos que coadyuvaron a la evolución de las matemáticas como disciplina científica. (Galán, 2012, p.1).

También es bien sabido que las primeras apariciones de las matemáticas datan aproximadamente del año 3000 A.C, que sus primeros vestigios estaban ligados exclusivamente a procesos aritméticos en donde el elemento fundamental para su

> desarrollo era la idea de número, y que su trasformación ha estado enmarcada por el menester de encontrar soluciones a una serie de problemas que les dan un sentido práctico a las nociones matemáticas, dado que las confrontan con la realidad humana. (Torres, 2016, p.1).

En ese sentido existen dos aspectos filosóficos relevantes para destacar en torno a las matemáticas:

1. Las matemáticas son verdades descubiertas por el hombre (Idealista). Una de las concepciones más fuertes alrededor de la invención de las matemáticas, es aquella que establece que esta disciplina no puede ser una construcción humana, dado que son verdades que han existido desde la creación del universo, a tal punto que se mantienen distantes de la realidad por su carácter abstracto. Es decir, los conceptos matemáticos están fuera de la mente humana, (Ruiz, 2012).
2. Las matemáticas son una construcción humana (Constructivista). Esta es una concepción que tiene bastante fuerza teniendo en cuenta el carácter histórico del presente proyecto de investigación, y que hace alusión al sentido constructivista que han tenido las matemáticas a lo largo de su historia. En ese orden de ideas, hay quienes afirman que dicha disciplina no es más que un lenguaje que sólo sirve de herramienta para intentar explicar el funcionamiento de la naturaleza independientemente de su origen, estructura y composición, (Ruiz, 2012).

En síntesis, la línea histórica que muestra la evolución del concepto de función, permite conocer, reflexionar y admirar de manera cercana el desarrollo epistemológico de su definición, convirtiéndolo en una de las nociones más importantes de las matemáticas. A ese respecto, fue importante traer a colación las contribuciones de cada uno de los matemáticos que a lo largo de la historia coadyuvaron a la transformación del concepto, así como también los distintos mecanismos que dieron pie a la variación de tales concepciones según el tiempo y el contexto social donde fueron concebidas. Lo anterior nos lleva a reflexionar sobre los diversos fenómenos que existen al interior de los procesos educativos (enseñanza y aprendizaje) y en cada uno de sus niveles, básica, media y educación superior. Así lo estipula Rugarcia (2000, p.493, como se citó en Farfán y García, 2005) al afirmar que: “Es el momento de cuestionar en serio nuestros paradigmas educativos para concebir e intentar lograr un hombre nuevo, una nueva sociedad, otra cultura" (p.5)

Como consecuencia de lo anterior, es posible deducir que el análisis hecho al desarrollo histórico epistemológico del concepto de función, muestra indudablemente que muchas de las dificultades que experimentan los estudiantes al operar con dicho concepto son semejantes a las presentadas por los antiguos matemáticos en procura de su evolución, poniendo de manifiesto no sólo la variedad de formas con las que paulatinamente la noción de función fue cobrando sentido, sino también los obstáculos epistemológicos subyacentes en su evolución. Así pues, surgen algunas ideas pedagógicas a tener en cuenta, a saber:

- Despertar interés por la búsqueda de elementos que relacionen las formas de representación del concepto de función.
- Ampliar la manera de presentar el concepto de función.
- Utilizar algunos elementos históricos como las tablas babilónicas para acercar al estudiante a la representación tabular del concepto de función como una alternativa de expresar funciones.

Entre otros.

5. Objetivos

Para la elaboración del presente proyecto de investigación se tendrán los siguientes objetivos:

5.1 Objetivo general

Encontrar elementos matemáticos que determinen una aproximación al registro tabular del concepto de función a partir de la interpretación de tablas babilónicas.

5.2. Objetivos específicos

- Identificar algunos hitos históricos en la cultura babilónica fundamentales para el desarrollo y comprensión de tablas.
- Mostrar la evolución matemática de la cultura babilónica a partir de los hitos históricos previamente encontrados y hasta la consolidación del sistema sexagesimal como elemento fundamental para la interpretación de tablas.
- Resaltar la importancia de la representación tabular del concepto de función como el vínculo entre su representación algebraica y su representación gráfica.

6. Metodología

Teniendo en cuenta que el presente proyecto de investigación es de corte histórico epistemológico, fue necesario considerar una metodología de investigación que proporcionara estrategias de búsqueda de información que condujeran a la obtención de resultados, que coadyuvaran al cumplimiento de los objetivos planteados para la elaboración del mismo. Por tal motivo, el enfoque considerado después de un proceso de análisis a diversos enfoques y metodologías, tiene una perspectiva cualitativa que está representada en el método histórico.

Ahora bien, dada su importancia en el quehacer investigativo, y más aún en el desarrollo del presente documento, se hace necesario en primera instancia, citar los elementos que hacen del método histórico una técnica de investigación cualitativa que proporciona las herramientas necesarias para la revisión de sucesos históricos que marcaron el transitar de la humanidad. En segunda instancia, mostrar la forma de cómo estos elementos fueron aplicados al proceso de investigación, cuyos resultados permitieron el conocimiento de aquellos sucesos que potenciaron la transformación del concepto de función, y aquellos que mostraron una aproximación a su representación tabular.

¿Pero qué es el método histórico? Al respecto existen algunas definiciones, sin embargo, la que más se ajusta al interés e intencionalidad del presente proyecto de investigación, es aquella que la exhibe como la metodología utilizada por los historiadores que contribuye al estudio y al análisis de los hechos ocurridos en el pasado. En ese sentido, y con relación a la historia, Ruiz (1976) afirma en su documento "**el método histórico en la investigación histórica de la educación"** que**:**

> La historia tiene su propio método conocido como método histórico, Cosa distinta es que está abierta a un pluralismo metodal aprovechando el gran desarrollo metodológico de las ciencias sociales y humanas en los últimos cincuenta años principalmente. Por este pluralismo es por lo que se puede hablar de métodos en plural. Pero ello significa simplemente que pueden enriquecerse sus perspectivas utilizando métodos de esas otras ciencias que hemos mencionado, sin abandonar el suyo especifico y adaptando los ajenos a las características propias de la investigación y la ciencia histórica. (p.1)

Así pues, y acotando un poco lo concerniente al método histórico, vale la pena destacar que, este resulta útil para conocer los distintos acontecimientos ocurridos en el mundo y en cada una de sus regiones, asimismo, las diversas etapas en que tuvieron lugar, con el objetivo de reflexionar y comprender las diferentes manifestaciones de las sociedades actuales. (Ruiz, 1976). En ese orden de ideas, conviene identificar las características, objetivo y los pasos dispuestos por el método histórico para el desarrollo de investigaciones de corte epistemológico, mismas que como la presente, pretende conocer aquellos sucesos trascendentales que giraron alrededor del concepto de función en términos generales, y que atañen en términos particulares a la representación tabular de dicha noción matemática en la cultura babilónica.

6.1 Características del método histórico

- Consta de una serie de técnicas que el investigador utiliza para investigar y describir acontecimientos del pasado y en una época determinada.
- Tiene un carácter objetivo. Es decir, el investigador debe analizar objetivamente las fuentes y toda la información recopilada en su proceso de búsqueda, y si es el caso, interrelacionar lo encontrado con hechos presentes en aras de identificar la existencia de algún patrón hacia el futuro.
- No es recomendable su aplicación a corto plazo. Esto se debe a que las unidades de tiempo que estudia la historia tienden a ser extensas. En ese sentido, el método histórico resulta más efectivo a la hora de analizar hechos inscritos en décadas, siglos y milenios.

6.1.1 Objetivo del método histórico

A parte de traer a colación sucesos del pasado, y describir con sutileza la forma en que sucedieron las cosas, el método histórico busca generar hipótesis con relación al por qué de las mismas.

De igual forma, existe un insumo importante para tener en cuenta dentro de la aplicación del método histórico, y tiene que ver con las fuentes de información consultadas dentro del proceso investigativo. Las cuales pueden estar constituidas por libros, documentos, memorias, diarios, investigaciones ya existentes sobre el objeto en cuestión, y otros elementos que brinden información al respecto.

No obstante, es necesario resaltar que, para la aplicación del método histórico en el presente proyecto de investigación, se tuvieron en cuenta algunas investigaciones relacionadas con el recorrido epistemológico del concepto de función, que a su vez se han fundamentado en otras investigaciones con las cuales se ha podido conocer la evolución de dicha noción matemática en distintos periodos de la historia. Asimismo, no se hizo uso de disciplinas como la arqueología o la paleografía, dado que sus objetivos distan de los estipulados para la elaboración de este documento.

6.1.2 Pasos para realizar investigaciones con el método histórico

Para realizar investigaciones fundamentadas en el método histórico es pertinente considerar los siguientes pasos:

1. Identificación de las fuentes.

Estas pueden ser de tipo primario o secundario, en este caso, las fuentes a tener en cuenta como fundamento de información están constituidas por una serie de investigaciones sobre el concepto de función, que han centrado esfuerzos en conocer aspectos de su evolución desde sus primeros vestigios en la época prehistórica. Similarmente, en documentales de historia de los que se pudo extraer datos esenciales para la construcción del presente documento, y que giraban en torno a la idiosincrasia de la cultura babilónica. Por consiguiente, y dado que ninguna de las tesis analizadas es propia de la época, es factible decir que las fuentes de información consultadas son de tipo secundario.

2. Tradición oral

La tradición oral constituye un tipo especial de fuente de información, esta puede ser de orden primario o secundario, y hace referencia a “cuentos, relatos y anécdotas que han sido transmitidas por diversas generaciones a lo largo de su historia, y en los que se resalta aspectos culturales, sociales, económicos, religiosos, políticos, comerciales, etc., de una civilización específica” (Ayala, 2020, p.1). Cabe resaltar que una característica visible de la tradición oral, es la no existencia de una escritura formal o informal, que pueda dar cuenta de aquellos eventos que trascendieron con el tiempo. Para el caso de la presente investigación, podría hablarse de un proceso de tradición oral, desde la información adquirida por medios audiovisuales como videos y documentales que también aportaron a la obtención de resultados.

3. Evaluación de las fuentes.

Es bien sabido que, para el desarrollo de cualquier investigación, es necesario y pertinente evaluar las fuentes de información a considerar, es decir, analizar la veracidad de las mismas, su confiabilidad a la hora de proporcionar datos indispensables para la construcción de nuevos documentos, características del autor, etc. Por lo tanto, y en contexto del presente documento, es preciso enfatizar que las fuentes analizadas para la obtención de resultados corresponden a investigaciones académicas realizadas por académicos en diversos contextos, docentes, estudiantes de posgrados, grupos de investigación, pedagogos e historiadores matemáticos.

4. Elección del tema.

La elección del tema por supuesto está sujeta al criterio del investigador, esta puede hacerse de manera general cuando se estudian sucesos globales, o de forma particular cuando se estudian acontecimientos ocurridos en contextos específicos. Para el caso del presente documento, el tema en cuestión está relacionado con la representación tabular del concepto de función, y tiene como ambiente la cultura babilónica. No obstante, y dada su importancia y trascendencia, fue necesario hacer el análisis de dicha noción matemática desde su definición, pues esta recoge elementos indispensables que en el transcurso del tiempo dinamizaron su desarrollo y el de las matemáticas en general. De este modo, fue posible extraer información relevante relacionada principalmente con la interpretación de tablas babilónicas, en las cuales yacen aspectos que acercan a dicha cultura y en cierta medida, a la representación tabular de la noción de función.

Similarmente, la elección del tema puede estar direccionada por formulaciones de hipótesis, las cuales responden a preguntas del tipo, ¿Qué?, ¿Por qué?, ¿para qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?, entre otras. En este caso, la pregunta de investigación que orienta la elaboración del presente documento aparece plasmada en el planteamiento del problema.

5. Síntesis y planteamiento de argumentos.

En este caso se realiza un razonamiento histórico basado en la información previamente recopilada. Aquí el investigador tiene la oportunidad de desarrollar sus propias hipótesis y conjeturas con base en el material analizado. Es por eso que se dice que "es tal vez el único paso de carácter subjetivo dentro de un proceso investigativo basado en el método histórico" (Ayala, 2020, p.1). Cabe aclarar que la postura de quien realiza la investigación se ve con más fuerza dentro de las conclusiones de la misma, y se espera que esté sujeta al pensamiento reflexivo en cualquiera de sus variantes, crítico, argumentativo, propositivo, o en sus posibles combinaciones.

En resumen, el método histórico como metodología de investigación está fundamentado en aspectos como los mencionados anteriormente, mismos que se relacionan con los que se describen a continuación:

- Planteamiento del problema.
- Hipótesis.
- Investigación previa.
- Búsqueda de fuentes.
- Análisis de la información.
- Evaluación de la información.
- Conclusiones.
- Divulgación.

6.2 Sistematización de resultados

Para la sistematización de resultados se consideraron los siguientes capítulos:

- **Capítulo uno**: Métodos rudimentarios de conteo utilizados por la cultura babilónica.
- **Capítulo dos:** Escritura cuneiforme.
- **Capítulo tres:** Sistema de numeración sexagesimal.
- **Capítulo cuatro:** Representaciones aproximadas al registro tabular del concepto de función a partir de la interpretación de tablas cuneiformes.

7. Resultados de la investigación

Para la obtención de resultados del presente proyecto de investigación, se tuvo en cuenta cuatro momentos esenciales (capítulos) con los cuales fue posible conocer el recorrido histórico de las matemáticas babilónicas, con el objetivo de obtener herramientas necesarias para la interpretación de tablas de cálculo en las cuales yace información concerniente a las distintas actividades desarrolladas por los babilónicos a lo largo de su historia. De esta forma, la estructura general de dicho documento queda determinada por los siguientes capítulos:

- **Capítulo uno**: Métodos rudimentarios de conteo.
- **Capítulo dos**: Escritura cuneiforme.
- **Capítulo tres:** Sistema de numeración sexagesimal.
- **Capítulo cuatro:** Representaciones aproximadas al registro tabular del concepto de función a partir de la interpretación de tablas cuneiformes.

Es importante resaltar que estos capítulos surgen de la necesidad de interpretar algunas tablas babilónicas, en las cuales yacen consignados ciertos elementos esenciales que permiten inferir una aproximación práctica a la representación tabular del concepto de función.

7.1 Capítulo uno. Métodos rudimentarios de conteo

El contexto geográfico de la cultura babilónica permite identificar que sus primeros cimientos datan del año 3000 A. C en la antigua Mesopotamia, nombre dado por los griegos a una zona comprendida por una extensa región entre los ríos Tigris y Éufrates, en lo que hoy se conoce como Irak. De ahí que la etimología de dicha palabra es, tierra entre ríos. Análogamente, es importante resaltar que en el milenio VI A.C, empezó a gestarse una relevante actividad que alcanzaría su esplendor en el milenio IV, cuando la civilización sumeria comenzó a utilizar la escritura cuneiforme en la baja Mesopotamia.

> Actividad que estaba relacionada en gran parte con la necesidad de dar solución a diversos problemas sociales, enmarcados principalmente en la economía a través de registros comerciales relacionados con la compra y venta de productos, así como también, con el inventario constante de sus posesiones. (Fernández García, 2015, p.9).

De igual forma, es relevante resaltar que en la zona de Mesopotamia nacieron las primeras civilizaciones que poblaron la tierra a excepción de los egipcios, al mismo tiempo que se da el surgimiento de la escritura con una antigüedad de 3000 años A.C. Del mismo modo, se debe destacar que las culturas más sobresalientes que emergieron en esta comarca son: Los sumerios como se había dicho anteriormente, los acadios y los babilónicos. De este modo, la aparición de dichas culturas determina tres periodos fundamentales que resultan importantes de conocer, teniendo en cuenta los objetivos trazados para el desarrollo de este proyecto de investigación.

Sin embargo, y antes de hablar de estos periodos, es necesario hacer un recorrido por las zonas de influencia de dicha cultura, para posteriormente conocer los elementos más preponderantes de tales momentos.

De los sumerios se puede decir que fue una cultura que habitó la región de sumeria, ubicada en la zona del oriente medio del costado sur de lo que se conocía como la antigua Mesopotamia. Cabe resaltar que dicho territorio también estaba delimitado por las regiones de Acat en la zona central y Asiria en la zona norte. Además de esto, la historia da cuenta de su surgimiento a partir del año 3500 A.C, y de su desaparición como cultura autónoma e independiente en el año 2350 A.C, aproximadamente. Esto debido al nacimiento del imperio acadio que con el tiempo pasó a dominar esa área, (Vázquez, 2015**)**.

Simultáneamente, en muchas de sus ciudades se pueden apreciar los vestigios de un pasado brillante y asombroso, que la catalogan como una de las civilizaciones más prolíficas en la historia de la humanidad, siendo esta la más antigua del mundo. En consecuencia, es normal encontrar una sucesión de registros que demuestran un conjunto de prominentes resultados científicos, artísticos, productivos y materiales, que no sólo avalan lo dicho anteriormente, sino que también fueron sustanciales en términos de creencias, principios y conocimientos, que fueron transmitidos a culturas como la Acadia, la Asiria y a la Babilónica.

No obstante, existen algunas preguntas relacionadas con la cultura sumeria que conllevan a reflexionar sobre su génesis y evolución. Por ejemplo: ¿quiénes eran los sumerios?, ¿de qué lugar provenían?, ¿Cómo lograron ubicarse en este sector de Mesopotamia? Si bien es cierto son preguntas interesantes para ampliar el conocimiento respecto a dicha civilización, no hay una respuesta clara y concisa fundamentada en pruebas antropológicas que permitan comprender de primera mano los antecedentes de su existencia.

A pesar de ello, se cree que la cultura sumeria llegó a Mesopotamia proveniente de un lugar distante del medio oriente. Del mismo modo, se dice que el nombre sumerio fue dado por otra civilización denominada los semitas acadios, quienes serían sus sucesores según la historia.

Indistintamente, es conveniente destacar que los sumerios se llamaban a sí mismos, el pueblo de las cabezas negras, lo que sumado a lo dicho por el historiador babilónico Bezosus Caldeus, “los sumerios fueron un pueblo extranjero cuyo rostro era negro”, permite inferir que, “en realidad no eran nativos de Mesopotamia, dado el empleo de la palabra extranjero en su aseveración” (Such, 2015, p.26).

Por lo tanto, la instalación de la cultura sumeria en la zona baja de Mesopotamia, da origen al primer periodo sumerio subdividido en dos momentos fundamentales denominados periodo Uruk y periodo dinástico – arcaico.

7.1.1 Período sumério o período Uruk

El periodo sumério o periodo Uruk, fue un período que se caracterizó por la creación de un país constituido por varias ciudades denominadas ciudades estado, sin llegar a alcanzar la denominación de reino. Estas ciudades estado eran gobernadas de manera independiente con relación a las ciudades circunvecinas, así pues, este grupo de urbes constituían un conjunto de procesos mercantiles esenciales para el desarrollo de la comarca en diferentes ámbitos. Es de anotar, que al inicio los gobernantes de las ciudades estados sumerias, eran sacerdotes denominados Patesis, “los cuales tenían como función, la distribución de los trabajos públicos, la organización de las distintas labores agrícolas y tributos de campesinos, el culto a los dioses, entre otras funciones” (Benito, 2017, p.13).

Dentro de las principales actividades económicas realizadas por los sumerios en el periodo Uruk, están la agricultura con el comercio de cereales, la elaboración de artesanías y el trueque con algunas regiones cercanas del medio oriente. Similarmente, y ya en los altos estamentos de la sociedad, existía una forma de economía representada por el empleo de materiales en plata o granos de cereal para la compra de productos, como una idea de moneda que razonaba de forma intuitiva con el concepto de cantidad.

De modo equivalente, los sumerios desarrollaron sistemas de crédito con características limitadas entre sus ciudadanos, para facilitar la venta de productos y el intercambio de otros. También se dice que este fue un periodo caracterizado por la existencia de una sociedad jerarquizada en donde cada Patesis desempeñaba un papel importante como líder político y religioso. Otra característica esencial intrínseca en el periodo Uruk, fue la transformación de la arquitectura con base en el empleo de la piedra caliza (piedra compuesta por algunos minerales como la arcilla y el cuarzo) con cierto tipo de decoraciones, en las que predominaban los mosaicos de animales y los mosaicos con formas humanoides, sustituyendo radicalmente el uso del adobe como elemento de construcción.

Pero quizá lo más notorio y significativo de la cultura Sumeria en el periodo Uruk, fue la invención de la escritura (primer hito histórico), aunque no existe un documento claro que atribuya a los sumerios el desarrollo de esta. Empero, se tiene constancia de ser la civilización más antigua en utilizarla, dado que existen tablas de barro que muestran algunos mensajes hechos en símbolos, relacionándolo con lo que hoy se conoce como pictografía. Vale decir, *que este periodo tuvo un* intervalo de ocurrencia comprendido entre los años 3800 a 3300 A.C, en donde se utilizó la escritura netamente con fines administrativos. Es decir, era usada por el Patesis o por sus allegados, (Lach, 2018).

Otro elemento a destacar de la civilización sumeria según algunos registros de investigación, es la utilización de la rueda alrededor del año 3500 A.C, empleo que hizo posible la elaboración de carruajes para transporte civil y carruajes de guerra. De manera similar, se dice que los sumerios fueron los primeros astrónomos que existieron en la historia de la humanidad, puesto que fueron los pioneros en hacer un análisis minucioso y detallado de cada una de las constelaciones presentes en el cielo, identificando doce de ellas las cuales dieron origen a los signos del zodíaco.

Ahora bien, con relación al hito histórico descrito anteriormente, se puede decir que, constituye un insumo esencial para el presente proyecto de investigación, dado que al ser los sumerios los responsables de heredar la escritura a los babilónicos, estos tuvieron la posibilidad de desarrollar actividades cotidianas relevantes para su evolución, principalmente en matemáticas, siendo esta la piedra angular que sentó las bases para la notación utilizada por el sistema sexagesimal, el cual facilita la interpretación de ciertas tablas babilónicas, mismas que favorecen la intención del presente documento. De esta forma, se reconoce en primer término la importancia de su existencia en la historia de la humanidad, y en segundo término porque nos lleva a comprender la transformación de los métodos de registros usados en Mesopotamia hasta la consecución del sistema de base 60.

7.1.2 Período sumerio o período dinástico-arcaico

El segundo período llamado dinástico o arcaico, fue un período comprendido entre los años 2300 a 2900 A.C, y se caracterizó esencialmente por la aparición de ciertas ciudades denominadas ciudades amuralladas, dado que se encontraban encerradas por murallas cuya altura podía alcanzar los diez metros, las cuales servían como defensa para evitar posibles invasiones determinadas por procesos de expansión liderados por otras civilizaciones. Algunas de las ciudades amurallas más reconocidas en este periodo son: Lagash, Nippur, Isin, Sippar, Kish entre otras.

En la siguiente figura se puede observar su posición geográfica con relación a la ubicación de los ríos Tigris y Éufrates respectivamente, al tiempo que se aprecia a simple vista la distancia entre ellas:

Figura 7

Posición geográfica de los ríos Tigris y Éufrates

Fuente. Luces en la oscuridad, 2016.

Aparte de esto y relacionado al periodo Uruk, y según el documento "**la caída de la civilización sumeria"** de Esquer (2007):

> Los sumerios mantuvieron la figura del Patesis en el periodo arcaico, el culto a los dioses como seres superiores, divinos y omnipotentes, y conservaron su asentamiento en la región de Samer al sur de Mesopotamia en el oriente medio". Similarmente, "mantuvieron la costumbre de construir ciudades amuralladas como las mencionadas anteriormente, el levantamiento de templos dedicados a los dioses, entre otras acciones. (p.23)

Otro elemento fundamental para destacar del periodo dinástico o periodo arcaico, es la formalización de la escritura en términos de su utilización para la elaboración de mensajes alusivos a la religión, los cuales eran escritos en monumentos de piedra, con el fin de reconocer la existencia y divinidad de un ser superior, originando de esta forma lo que se conoce como escritura cuneiforme; escritura que entraremos a analizar con detalle en el segundo capítulo del presente documento. Por este y otros motivos, "la historia reconoce en la civilización sumeria la invención de la escritura cuneiforme como una de las herramientas más fecundas y dominantes de la antigüedad", (López, 2014, p.1). La cual fue adoptada por la cultura babilónica dando consigo un paso relevante a la postrer construcción de su sistema de numeración.

7.1.3 Segundo período: Período acadio

Según algunos referentes históricos, los acadios fueron otra civilización que hizo parte del territorio conocido con el nombre de Mesopotamia, y surgen aproximadamente en el año 2350 A.C. Algo importante para resaltar de los acadios, es la notable diferencia que existía entre estos y los sumerios en aspectos culturales, sociales, raciales, de lengua y ciertos elementos de la religión.

> Pero el inicio de la cultura acadia se da exactamente con la aparición de Sargón de Akkad, también conocido como Sargón el grande, quien tomaría el poder más o menos en el siglo 24 A.C, realizando una sucesión de conquistas de diversas ciudades, esencialmente en la zona sur de Mesopotamia. (Montagud, 2018, p.1).

En consecuencia, Sargón el grande se hace con el poder de la ciudad sumeria de Kish a través de una incursión militar, y posteriormente funda una nueva urbe denominada Agadé. De modo que esta nueva ciudad, se trasformaría en el eje central para la planeación de estrategias en pro de nuevas conquistas, logrando de esta forma, consolidar el primer gran imperio de la historia del mundo. Cabe resaltar, que hubo un acontecimiento fundamental en el contexto de los sumerios, que fue aprovechado por Sargón para darle éxito a su intención de invadir otras ciudades de aquella comarca. Este suceso tuvo que ver con la libertad que Lugalzagesi les otorgo a las urbes sumerias en cuanto a gobernabilidad se refiere, lo que facilitó el trabajo de Sargón dado que carecían de una cabeza principal que dirigiera las luchas armadas en aras de defender la estabilidad de cada una de esas regiones. Así pues, logró invadir toda la cuenca de la zona de Mesopotamia tal como se ilustra en la figura 8.

Figura 8

Zona de Mesopotamia

Fuente. Cliophilos, 2018

Pero lo relevante de esta serie de acontecimientos, fue que, en primer lugar, Sargón tuvo la oportunidad de coronarse como rey de aquella nueva región, y, en segundo lugar, la posibilidad de contar con el conocimiento de los sumerios que habían sido sometidos a sus leyes y estatutos. Además de esto:

> El nuevo rey de los acadios toma la decisión de asignarles a algunos líderes de la tribu de los sumerios ciertos cargos administrativos y políticos, con el objetivo de mantenerlos leales a su reinado y fundamentalmente, para hacerse del conocimiento que estos tenían sobre la escritura. (Montagud, 2018, p.1)

Así, la redacción de documentos referentes a leyes, reglamentos y demás, se efectuó teniendo en cuenta la escritura sumeria, misma que le permitió la expansión de su reino a otras regiones aledañas. Ahora bien, aprovechando todo lo que hasta ese momento habían obtenido, los acadios continuaron con su campaña expansionista hasta llegar a dominar a los Etitas. Por lo tanto, efectúan cambios estructurales en la política, la economía, la agricultura y demás organismos sociales, con cimientos mucho más sólidos en comparación a la cultura sumeria. Recuérdese que esta última, la constituían ciudades estado, cuyos conceptos políticos y administrativos difieren considerablemente de los que tenían los acadios.

7.1.4 Tercer período: Período babilónico

Con respecto a la cultura babilónica, se puede decir que constituye una de las civilizaciones más representativas e importantes en la historia de la humanidad y en la historia de las ciencias, pues dicha cultural es vista por los historiadores como un centro de acopio en donde convergían tradiciones, costumbres y conocimientos de diferente tipo, y en particular, conocimientos derivados de los acadios y sumerios, quienes fueron los principales promotores de la fundamentación y crecimiento de sus técnicas, potenciando el desarrollo de disciplinas como la química, la biología y las matemáticas respectivamente, (Máxima, 2019).

Por ejemplo, es relevante reconocer que en el campo de la química la cultura babilónica hizo aportes significativos al tratamiento de sustancias desde los trabajos realizados por Tapputi Belatekallim, quien dedicó su vida al estudio de esta ciencia desde el interés suscitado por el deseo de encontrar nuevas sustancias a partir de la combinación y separación de otras, lo cual le permitió en primera instancia la creación de perfumes para usarlos en ceremonias religiosas, y en segunda instancia, alcanzar un reconocimiento general al interior de dicha cultura, ostentando hasta el día de hoy, el titulo de ser la primera química en la historia de la humanidad, tal como lo registra Molina (2009) en su documento **la mujer en la ciencia.**

"En el campo de la biología, la cultura babilónica se destacó por contribuir al tratamiento de diversas enfermedades con el empleo de compuestos orgánicos como la miel y algunas plantas medicinales", así lo afirma Fólguera (2011, p.24) en su artículo ***Babilonia y la biología,*** dando lugar a una primera aproximación de lo que hoy se conoce como medicina alternativa. Adicionalmente**,** a la utilización de métodos de riego para fortalecimiento de la agricultura, el reciclaje y cultivos de plantas.

Pero ¿por qué resaltar estos logros en la cultura babilónica? Porque es un elemento adicional para destacar su importancia en el desarrollo científico de la humanidad, y porque dicha cultura constituye un recurso necesario para la elaboración del presente proyecto de investigación.

Ahora bien, para comprender un poco la idiosincrasia de la cultura babilónica, es necesario recordar la existencia de Sargón el grande (Rey de los acadios), dado que contribuyó de alguna forma al establecimiento de Babilonia como una ciudad caracterizada por ser el centro político, cultural y religioso de toda la región del sur de Mesopotamia, pues es ahí donde se instaura el estado como una forma sobresaliente de la organización de la vida política, (Yubero, 2013).

Asimismo, es importante traer a colación que en el año 2900 A.C. existía un imperio unificado por todas las ciudades estados subyacentes en Mesopotamia, en donde cada una contaba con sus propios dioses y sus propias zonas reservadas para procesos agrícolas. Este imperio fue dirigido por Sargón, quien derrocó al rey de Kish y se autoproclamó nuevo gobernante de aquella urbe. Del mismo modo, de la ciudad de Nagade, y de otras ciudades ubicadas al sur de Mesopotamia, a las que llegó en compañía del ejército acadio, (Yubero, 2013).

Es de reconocer que uno de los logros más importantes alcanzados por Sargón en aquella época, fue la unificación de los sistemas de pesos y medidas de cada una de las ciudades pertenecientes a su imperio, consolidando así, un sistema estándar de medidas que posteriormente facilitó el comercio entre urbes próximas y distantes. Por consiguiente, el desarrollo del imperio acadio era cada vez más notorio y significativo, todo esto, a partir de la expansión territorial que iban obteniendo con el transcurrir del tiempo. No obstante, con el pasar de los años, apareció una nueva cultura que poco a poco se fue haciendo con el poder de aquel territorio, sometiendo incluso a la misma civilización acadia y fundando dinastías en ciudades como Isin, Larsa y Babilonia. Según la historia, esta nueva cultura denominada los Amoritas y con características de nómadas, aparece por el noroeste de Mesopotamia sembrando el terror entre los habitantes de esta región, sin embargo, tuvo en primera instancia un breve proceso de adaptación a las costumbres de Mesopotamia, y en segunda instancia, y aprovechando la escritura desarrollada por lo Sumerios y formalizada por los Acadios, tomaron posesión de diversos cargos relevantes dentro de la civilización acadia, principalmente de aquellos que tenían relación con el comercio y la económica de la región, (Cristian, 2016).

Se dice también que en gran parte la llegada de los amoritas benefició de alguna forma la evolución de Mesopotamia y especialmente de las ciudades mencionadas anteriormente, en particular de Babilonia. De esta manera, surge un nuevo rey de nombre Hamurabbi que hizo que Mesopotamia aumentase considerablemente en términos de territorio, dados las nuevas conquistas que este lideró al igual que lo hizo su antecesor Sargón el grande. Pero quizá lo más sobresaliente de su accionar como monarca, fue la implementación de leyes redactadas en escritura cuneiforme que contribuían a la protección del pueblo y no al sometimiento del mismo como si lo hizo en su momento el Rey Sargón y el imperio acadio, (Zora, 2017).

Por estas razones, el sur de Mesopotamia fue conocido como el reino unificado de Babilonia, reino que tuvo su mayor auge con la llegada del rey Nabuconodosor varios años después, y cuyos desarrollos se visibilizaron esencialmente en áreas como la astronomía, la medicina, la filosofía, la arquitectura y las matemáticas. Al mismo tiempo que obtuvieron alcances valiosos en biología y química como se dijo en párrafos anteriores. En el campo de la astronomía, los babilónicos fueron capaces de predecir los eclipses ubicando el sol como el centro del universo, lo que les daba la condición de ser una cultura netamente helio centrista.

En el campo de las matemáticas, los babilónicos alcanzaron su máximo esplendor al desarrollar el sistema de numeración sexagesimal basado en la utilización de símbolos cuneiformes desarrollados por la cultura sumeria. Sin embargo, no fue así al principio, ya que mucho antes de la aparición del sistema sexagesimal, los babilónicos emplearon algunas formas rudimentarias de conteo, de las cuales se destacan las marcas en los árboles, marcas en las cuevas y el uso de huesos de animales para llevar sus registros, y posteriormente, el método de numeración sumerio basado exclusivamente en el empleo de los dedos de la mano. No obstante, eran técnicas limitadas que facilitaban principalmente la cuantificación de cantidades pequeñas y no de cantidades grandes; necesidad que surge una vez se establecen en un lugar específico convirtiéndose en una civilización sedentaria y no nómada.

Así pues, respecto a las formas de conteo descritas anteriormente, se dice que fueron utilizadas por las primeras civilizaciones con el objetivo de llevar un control de cada de una de sus pertenencias, reflejadas en gran parte en número de animales y producción agrícola. Lo tedioso de esta técnica, era que su aplicación dependía de algunos factores que la hacían confusa e inmanejable, en términos de la relación que se debía establecer entre el número de elementos a cuantificar y las respectivas marcas hechas en tales objetos, siendo esta quizás, la primera aproximación a la representación tabular del concepto de función, (Garnett, 2015).

Por ejemplo, si una persona contaba con un número elevado de posesiones, debía contar con suficientes árboles, cuevas o huesos para efectuar el correspondiente registro, lo que generaba complicaciones considerables dado que debía existir una correspondencia biunívoca entre el elemento a contar y la respectiva marca, razón por la cual tendía a colapsar dada la necesidad de utilizar un nuevo elemento de representación (árbol, cueva, hueso) para seguir efectuando la enumeración de los objetos. Asimismo, es de resaltar que inicialmente la marca o muesca más usada por los antiguos residía en el empleo de líneas horizontales o verticales, dado su limitado conocimiento respecto a la existencia de otras figuras.

A continuación, se muestran algunas imágenes relacionadas con el proceso.

Figura 9

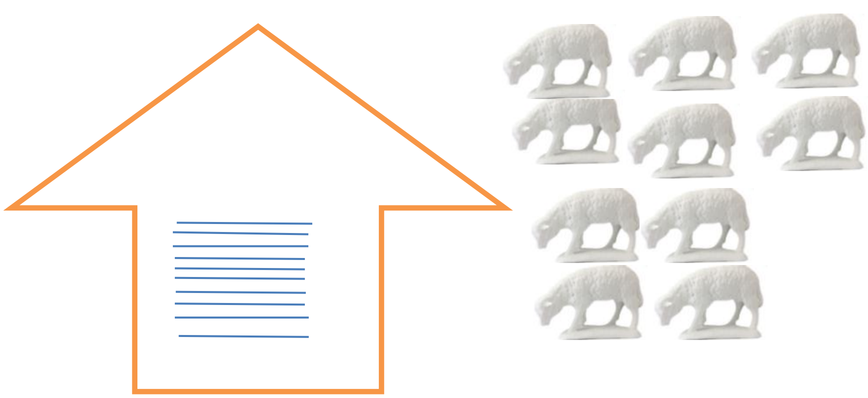
Marcas hechas por los babilónicos en árboles y huesos.

Fuente. Propia del autor

Así pues, y para recrear un poco el proceso, supóngase que se desea llevar un control de diez ovejas a través de marcas en un árbol, claramente se puede apreciar que el procedimiento establece una relación entre marcas y animales, misma que en ocasiones era registrada en tablas de cálculo.

Figura 10

Relación entre marcas de un árbol y el número de animales a contar

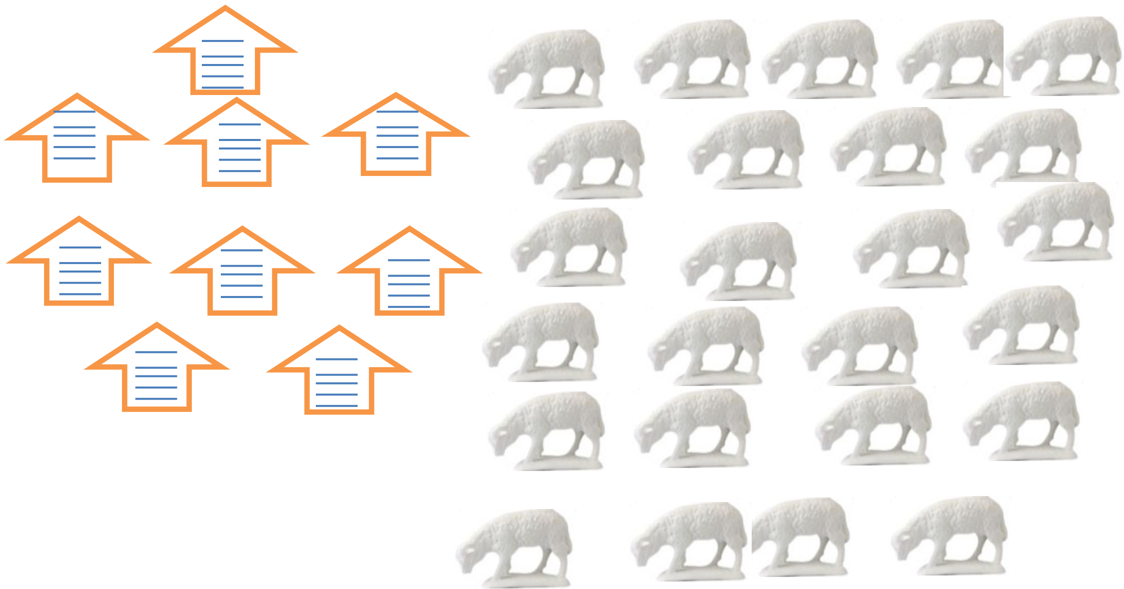


Fuente. Propia del autor

Ahora supóngase que se desea llevar el registro de mil ovejas, por supuesto que para facilitar el conteo de las mismas es necesario contar con suficientes árboles de tal forma que este proceso sea fácil y eficaz. A continuación, una pequeña ilustración de lo que sería este procedimiento:

Figura 11

Relación entre marcas de un árbol y el número de animales a contar en más cantidad



Fuente. Propia del autor

Como se puede observar, no existe una correspondencia biunívoca entre el número de ovejas y el número de árboles, lo que constituía una razón suficiente para pensar en un método alternativo de conteo que les permitiese llevar un control exacto de cada una de sus posesiones. Cabe aclarar que, si bien en cierto los babilónicos no conocían el concepto de número, tenían una clara idea de la noción de cantidad.

Pero con el pasar del tiempo y la aparición de la cultura sumeria, surge un método alternativo de conteo fundamentado en el uso de los dedos de la mano, que desplazó contundentemente al método de marcas empleado por diversas culturas durante sus primeros años de existencia. Es de destacar que el sistema de numeración sumerio no era un sistema posicional ni operacional, lo que hacía que se centrara exclusivamente en la relación de cantidad, al tiempo que se convirtió en la clave para el desarrollo del sistema sexagesimal o sistema de base sesenta propios de la cultura babilónica, (Belizario, 2013).

A continuación, se explica el funcionamiento del sistema sumerio ilustrando algunas de sus características esenciales:

En primera instancia, el sistema de numeración sumerio hacía uso de las manos para sus procesos de conteo en el comercio, la agricultura, el control de siembras y ríos, las construcciones y demás campos involucrados en la evolución de su estructura social. La mano derecha para el registro de unidades y la mano izquierda para el registro de las docenas. En segunda instancia, cada una de las unidades era representada por las falanges de los dedos de la mano derecha sin contar el dedo pulgar, el cual era utilizado para señalar las falanges de los dedos restantes. Es de reconocer que este proceso iniciaba a partir de la primera falange del dedo meñique (De arriba hacia abajo) tal como se ilustra en la siguiente secuencia.

Figura 12

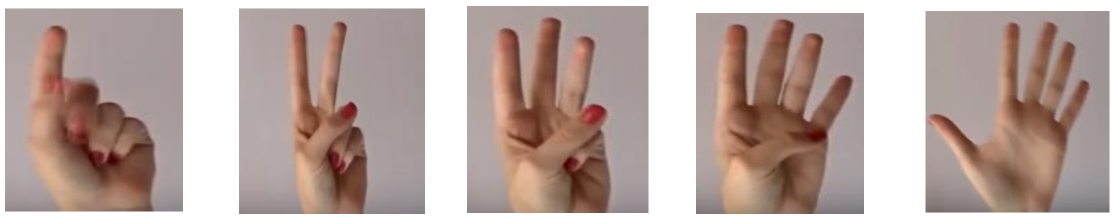
Secuencia numérica con los dedos de la mano

Fuente. Puerta, s,f

Del mismo modo, al terminar el proceso de conteo de las falanges de los dedos de la mano derecha (Su suma es igual a doce), se registra cada docena con un dedo de la mano izquierda, tal como se ilustra en la siguiente secuencia.

Figura 13

Secuencia numérica con los dedos de la mano



Fuente. Puerta, s,f

Es necesario enfatizar que el valor máximo obtenido mediante la aplicación de este sistema numérico es sesenta, mismo que corresponde al producto de las doce falanges de los cuatro dedos de la mano derecha y los cinco dedos de la mano izquierda. A continuación, se presentan algunos ejemplos para comprender el mecanismo de uso del sistema sumerio usando el símbolo de la suma (Notación actual) para facilitar su comprensión.

Supóngase que se efectúa el conteo de un grupo de 18 ovejas, en este caso el registro de dicho proceso está determinado por un dedo de la mano izquierda que representa una docena, y dos dedos de la mano derecha que representa las unidades.

Figura 14

Método de suma con los dedos de la mano en la cultura Sumeria

Dedo de la mano izquierda que representaba una docena.

Conteo de las falanges de los dedos de la mano derecha que representaban las unidades.

Fuente. Puerta, s,f

Ahora supóngase que se desea contar un total de 35 ovejas con el mismo mecanismo. En este caso el registro se realiza con dos dedos de la mano izquierda los cuales representan dos docenas o lo que es lo mismo 24 unidades, y cuatro dedos de la mano derecha terminando en la segunda falange del cuarto dedo.

A continuación, se ilustra este procedimiento a través de las siguientes imágenes:

Figura 15

Método de suma con los dedos de la mano en la cultura Sumeria

Dos dedos de la mano izquierda que representan 24 unidades o dos docenas.

Cuatro dedos de la mano derecha cuyas falanges representan las once unidades restantes.

Fuente. Puerta, s,f. Las matemáticas en Egipto y babilonia.

De esta forma, y a pesar que en su momento era considerado como un sistema numérico innovador, este sistema también presentaba una serie de dificultades que lo hacían limitado y poco práctico para el conteo de grandes cantidades. Sin embargo, el sistema sumerio constituyó una herramienta fundamental para el desarrollo del sistema sexagesimal fundamentado en la escritura cuneiforme, tal como se ha venido diciendo desde el inicio de este documento. Todo esto, desde la consecución de su base sesenta como resultado de multiplicar los cinco dedos de la mano izquierda y las 12 falanges de los cuatro dedos de la mano derecha.

Así pues, y como consecuencia de ello e independiente de los métodos utilizados, la cultura babilónica poseía una forma estándar para representar los resultados de sus operaciones contables, el uso de tablas de arcilla distribuidas en filas y columnas, mismas que registraban tales observaciones a través de escritura cuneiforme, pictórica en una primera instancia y mediante el empleo de ciertos símbolos (cuñas principalmente) en una segunda instancia. He aquí una figura ilustrativa.

Figura 16

Escrito cuneiforme en una tablilla de arcilla, de Shuruppak o Abu Salabikh, Irak, sobre el 2500 antes de Cristo.

Fuente. Ángel Eulises Ortiz,2017

7.2 Capítulo dos. Escritura Cuneiforme

La escritura cuneiforme tiene su nacimiento en la antigua Mesopotamia, también conocida como tierra entre ríos, ahí donde se originaron las primeras civilizaciones de la historia de la humanidad, tuvo lugar una cultura prolífica para su época denominada civilización sumeria, la cual estuvo marcada por un considerable desarrollo intelectual que se puede apreciar en el trabajo minucioso de sus construcciones, sus aportes significativos al progreso teórico de las matemáticas y esencialmente de la aritmética, y en la exuberancia de su escritura fundamentada en la implementación de símbolos, (Ángel, 2004).

Con respecto a la escritura cuneiforme, se dice que quizá ha sido el aporte más valioso que la cultura sumeria ha dado a la humanidad desde el principio de los tiempos, pues muchos de los documentos (tablas de arcilla) encontrados a lo largo de la historia por los arqueólogos y demás, muestran la perspicacia de los sumerios para redactar leyes, mandamientos, compromisos, etc. a través de un tipo especial de escritura representada en un principio por pictogramas y posteriormente por cuñas, lo que constituye un conjunto relevante de escritos que hacen parte de la riqueza intelectual más antigua del planeta, y que fue encontrada en gran parte en los restos arquitectónicos de la ciudad de Uruk, (Velveth,2017).

Así pues, se dice que la escritura cuneiforme es la forma de escritura más antigua que haya podio conocer la humanidad. Desarrollada por los sumerios en el sur de Mesopotamia hace más de seis mil años aproximadamente. Se caracterizó porque sus producciones se registraban en una sucesión de tablas de arcilla dispuestas en filas y columnas, en las cuales y haciendo uso de un instrumento denominado punzón que se mantenía plenamente afilado, se dibujaba un conjunto de símbolos que específicamente estaban asociados con un número determinado de elementos. Así pues, encontramos el segundo hito histórico para efectos de la construcción de este documento investigativo, el nacimiento de una escritura netamente cuneiforme.

He aquí algunas tablas de escritura cuneiforme.

Figura 17

Tablillas de escritura

Fuente. Velveth,2017

También se puede decir que la escritura cuneiforme fue uno de los inventos más relevantes del cuarto siglo A.C. Inicialmente y en su primera etapa, se contaba con una escritura simbólica fundamentada en el empleo de símbolos básicos (pictogramas) que representaban algunos objetos y números especiales, y que posteriormente evolucionó a marcas mucho más sofisticadas. En este sentido, las primeras imágenes pictográficas utilizadas por los sumerios, fueron los dibujos de vacas, peces, flechas, etc., que representó un tipo especial de escritura no cuneiforme, para luego dar paso en una segunda etapa, al uso de cierta escritura convencional fundamentada en la realización de marcas en forma de cuña, que derivó en el nombre de escritura cuneiforme, (Such, 2012).

Por lo tanto, y en una primera instancia, para establecer un registro de animales se hacía uso de algunos símbolos no cuneiformes, los cuales facilitaban su conteo a partir del número de representaciones existentes, lo que tiempo después se hizo más practico a través de la escritura cuneiforme, resaltando consigo su utilización en actividades comerciales, al mismo tiempo que solía utilizarse para procesos de comunicación, composiciones literarias y otras actividades propias del ser humano. En ese orden de ideas, se muestran algunas figuras representativas de una escritura no cuneiforme cuya simbolización se muestra en la figura 18.

Figura 18

Escritura no cuneiforme

Símbolo que representaba una vaca.

Símbolo que representaba un pescado.

Fuente. Such, 2012

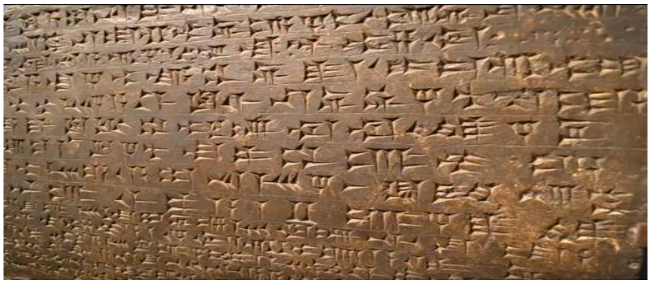
En consecuencia, es importante reconocer que muchas de las tablas encontradas en la antigua zona de Mesopotamia, recogen algunos aspectos esenciales de su cultura y básicamente en lo relacionado con labores administrativas y gubernamentales. Pero lo verdaderamente interesante de este asunto, es que los antiguos sumerios ya tenían implícita una idea educativa desde el trabajo hecho por los escribas de la época, mismo que se puede apreciar en algunas tablas en las que se observa un número considerable de palabras para ser aprendidas de forma mecánica.

Por tal motivo, la evolución de su cultura se hizo cada vez más notoria gracias a la progresiva utilización de la escritura cuneiforme en contextos políticos y académicos, permitiendo comprender las distintas fases del quehacer de los sumerios. Así pues, la historia garantiza la existencia de un sinnúmero de escribas que coadyuvaron al aprendizaje de esta escritura en una amplia gama de academias distribuidas a lo largo y ancho de la región, siendo estos clasificados como escribas de alta categoría y escribas subalternos, estos últimos pertenecientes al cuerpo de servicio privado del rey, (Charatense, 2013).

No obstante, no existe hasta el momento una tabla que dé cuenta de forma explícita del funcionamiento del sistema educativo de los sumerios, ni tampoco de las estrategias pedagógicas empleadas para la enseñanza de su escritura. Empero, existe información relacionada con los trabajos hechos por los estudiantes en las academias sumerias, en los que se puede evidenciar su evolución partiendo desde una escritura básica e imperfecta propia de educandos principiantes, hasta llegar a ciertos niveles avanzados representados en la elegancia de la simbología utilizada, cuyos trazos fueron hechos con un alto grado de exactitud y precisión como se muestra en la figura 19.

Figura 19

Simbología



Fuente. Charatense, 2013

En ese orden de ideas, es importante reconocer que gran parte de las tablas que se han encontrado a lo largo de los años y que están relacionadas con la escritura cuneiforme, muestran exclusivamente el empleo de las mismas en deberes académicos, y no en investigaciones científicas concernientes a una problemática específica. De este modo, es posible conocer un poco más el carácter de la escuela sumeria, misma que en un principio se enfocaba en la formación de escribas expertos en el tratamiento de este tipo de escritura, necesarios para el manejo administrativo de empresas y el buen funcionamiento de las distintas ramas que conformaban la naturaleza de dicha cultura.

Por consiguiente, es necesario comprender de primera mano todo lo relacionado con el funcionamiento de la escritura cuneiforme, a fin de reunir argumentos suficientes para abordar el análisis del sistema sexagesimal o sistema numérico babilónico, (Prieto,2012).

Ahora bien, con relación al presente proyecto de investigación y al segundo hito histórico descrito anteriormente, se puede decir que el conocimiento de la escritura cuneiforme representa un paso importante en la evolución de las matemáticas en la cultura babilónica, esto en términos de escritura y simbología respectivamente, lo que nos permite inferir que su evolución paulatina se dio a partir de las distintas necesidades subyacentes en dicha cultura, sentando consigo un precedente relevante relacionado con la hipótesis que plantea que, las matemáticas son una construcción humana producto del desafío constante de dar solución a problemas inmersos en la cotidianidad del ser humano. De igual forma, es necesario resaltar que el paso de una escritura pictográfica a una escritura cuneiforme facilita considerablemente la interpretación de tablas, dado que en la primera se desconoce el significado de gran parte de la simbología utilizada por los babilónicos en sus procesos escriturales.

7.2.1 Funcionamiento de la escritura cuneiforme

Como ya se había dicho, se dice que el término cuneiforme surge a raíz de la utilización de un punzón que dejaba ciertas marcas en forma de cuña. Así, y a partir de la necesidad de registrar cada una de sus actividades económicas, es que se da origen a la escritura cuneiforme. En un primer momento, este tipo de escritura se caracterizó por el empleo de dibujos tallados sobre la superficie de una tabla hecha de barro o arcilla, tal como se muestra en la siguiente figura:

Figura 20

Tabilla de barro y arcilla

Fuente. Charatense, 2013

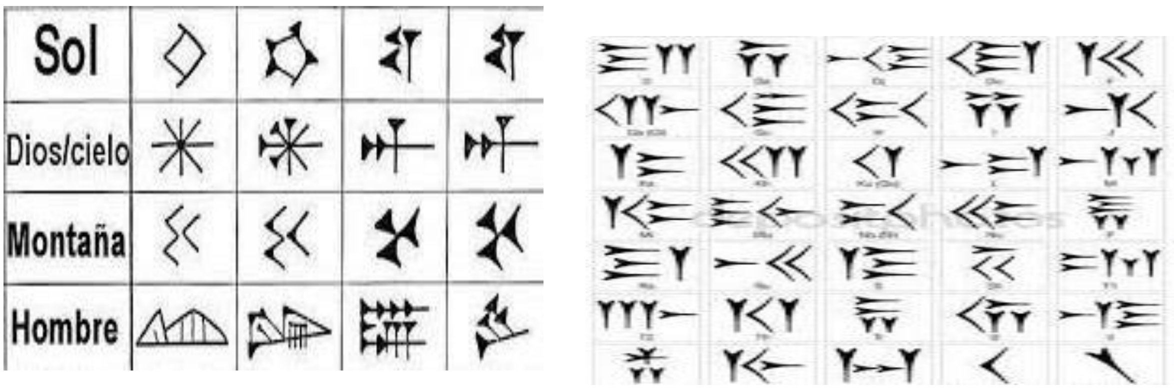
Aquí se puede observar una estrecha conexión entre símbolos y objetos, de donde se infiere una notoria aproximación a la representación tabular del concepto de función, dada la relación de dependencia que entre estos se podía establecer.

Por consiguiente, como se puede apreciar, la escritura no cuneiforme hacia uso de un sinnúmero de símbolos para representar palabras asociadas a la rutina de los sumerios, las cuales y en su gran mayoría tenían que ver con asuntos de política, economía y educación. Vale la pena reconocer que, en un principio este tipo de escritura fue importante para la representación de ideas y pensamientos, con los que se fue dando origen a la construcción de mecanismos de conteo que suplieron en la medida que les fue posible, las necesidades aritméticas de los babilónicos. (Navarro, 2013).

Seguidamente, y ya en la escritura cuneiforme, es relevante destacar que este tipo de escritura facilitó la interacción de las civilizaciones de la época, principalmente entre los sumerios, acadios y babilónicos respectivamente. Asimismo, se debe resaltar que la escritura cuneiforme hacia uso de un sinnúmero de símbolos, de los cuales también se desconoce el significado de la gran mayoría de ellos. Lo cierto es que sustituyó la escritura pictográfica, fundamentada en la representación de objetos mediante dibujos. De igual forma, se desconoce si el discernimiento de este tipo de escritura, motivo a los egipcios al desarrollo de la escritura jeroglífica, o simplemente fue una actividad aislada de lo hecho por los sumerios en Mesopotamia. A continuación, se muestran algunos símbolos cuneiformes utilizados por los babilónicos:

Figura 21

Símbolos cuneiformes



Fuente. Artesanía y Replicas.

Otro punto importante respecto a la escritura no cuneiforme, es la no abstracción de los objetos empleados para ejecutar representaciones. Por ejemplo, una vaca se representaba con el dibujo de una vaca, una casa con el dibujo de una casa, un árbol con el dibujo de un árbol y así sucesivamente, esto se puede apreciar en una de las tablas más reconocidas en el mundo, **la tabla kish,** la cual según los historiadores es la muestra más antigua que se tiene de este tipo de escritura, dado el empleo de ciertos símbolos (cuñas) que la enmarcan en este tipo especial de escritura, aunque para algunos de ellos, esta constituye solamente una tabla pictográfica.

No obstante, y como opinión personal, considero que independientemente del tipo de escritura utilizada por los babilónicos (cuneiforme o no cuneiforme), esta contribuyó considerablemente al desarrollo de su cultura en diversos aspectos (comerciales, económicos, religiosos y políticos), los cuales permitieron su consolidación como estado y la organización de su sociedad. Pues al contar con un sistema de escritura se abrió la puerta hacia la posibilidad de transmitir conocimientos de generación en generación, necesarios para mantener su cultura incólume a lo largo de la historia.

7.2.2 Tabla Kish

La tabla Kish fue encontrada en la aldea de Tell al- Uhaymir, ubicada en la zona de Babilonia donde hoy es Irak. Se dice que es una piedra calzada que probablemente contiene información relacionada con actividades económicas propias de la cultura sumeria, y expresadas en escritura pictórica. Sin embargo, ha sido difícil para los historiadores descifrar la simbología presente en esta tabla, ya que gran parte de los signos registrados ahí no son identificables. La siguiente figura muestra la tabla Kish en cada una de sus caras:

Figura 22

Tablilla de Kish

Fuente. Navarro, 2013

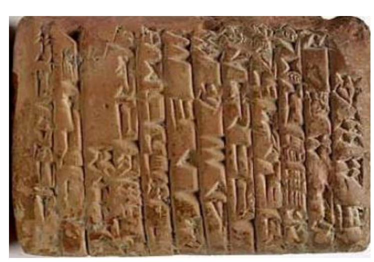
Pero años después, los símbolos empleados para el registro de actividades como los que se observan en la tabla anterior, se fueron modificando paulatinamente, a tal punto que para el año 2600 A.C. ya se había roto la relación entre símbolos y objetos representados. Por lo tanto, el uso de cuñas se fue haciendo cada vez más común, teniendo en cuenta que quizá una de las mayores riquezas de Mesopotamia era la alta concentración de arcilla, elemento indispensable para la elaboración de tablas de cálculo esenciales para el registro de actividades.

A continuación, se muestran algunas tablas cuneiformes hechas a base de cuñas.

Figura 23

Tablillas cuneiformes hechas a base de cuñas





Fuente. Navarro, 2013

De forma equivalente, y según algunas fuentes históricas, se han encontrado alrededor de un millón de tablas en diferentes expediciones hechas en distintos lugares del medio oriente, sin embargo, muchas de estas aún no han sido de conocimiento popular. No obstante, se puede afirmar que algunas de las tablas encontradas están relacionadas con operaciones matemáticas básicas como, por ejemplo, tablas de multiplicar, tablas del cálculo de inversos, tablas de cuadrados, tablas de cubos, y tablas de cálculo de raíces cuadradas y raíces cubicas, que hacen parte del quehacer matemático propio de la cultura babilónica, (Such, 2013).

7.2.3 Características de la escritura cuneiforme.

Respecto a la escritura cuneiforme, existen algunas características relevantes para tener en cuenta, las cuales hacen que este tipo de escritura tenga un carácter especial a lo largo de su historia. He aquí algunas de ellas:

- La escritura cuneiforme es el método de escritura más antiguo en la historia de la humanidad.
- La escritura cuneiforme no constituye un idioma específico. Esto dado que no representa ningún alfabeto y no hace uso de ninguna letra. Así pues, cabe resaltar que la escritura cuneiforme emplea entre 600 y 1000 caracteres para escribir palabras o silabas de manera simbólica. Por último, resaltar que esta escritura fue esencial para el desarrollo de dos idiomas (sumerio y acadio).
- El uso de la escritura cuneiforme se dio por primera vez a partir del año 3.400 A.C. es importante resaltar que en un primer momento la escritura cuneiforme fue utilizada para representar algunos sonidos característicos de la naturaleza, principalmente, los sonidos de los truenos, los rayos y de los ríos.
- La escritura cuneiforme se fundamentó en el uso de arcilla y en el empleo de cuñas para realizar figuras. Estos materiales se podían encontrar fácilmente en la zona de Mesopotamia.
- “El descifrado de la escritura cuneiforme es bastante complejo, dado que se desconoce el significado de muchas de las figuras que aparecen registradas en las tablas”. (Vié-Wohrer, 2006, p. 6).

7.3 Capítulo tres. Sistema sexagesimal

El sistema de numeración Babilónico también conocido como sistema sexagesimal, era un sistema de numeración que estaba fundamentado en la escritura cuneiforme para representar números. Usaba dos símbolos para expresar cantidades del 1 al 59, siendo el número 60 la base de su estructura. Históricamente se dice que apareció en la zona de Mesopotamia entre los años (1792-1750 A. C) y en tiempos del rey Hamurabi, quien fuera considerado el sexto rey de Babilonia, y al que se le atribuye la consolidación del imperio babilónico y la promulgación de un conjunto de leyes enmarcadas en lo que se conoció como el código Hammurabi. Logrando consigo obtener el control de las zonas que constituían la región de Mesopotamia.

Figura 24

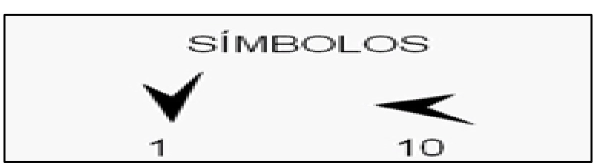
Región de Mesopotamia

Fuente. Troches, 2016

Es importante destacar que los símbolos utilizados por el sistema sexagesimal poseían características particulares. El primero era una cuña larga con dirección vertical que representaba la unidad, y el segundo una cuña de grosor considerable y de forma horizontal que simbolizaba diez unidades. Vale decir que ambos símbolos tenían nombres peculiares, Cuña y Vela respectivamente. A continuación, se ilustra la grafía correspondiente a tales expresiones.

Figura 25.

Símbolo 1 y 10



Fuente. Troches, 2016

También es necesario resaltar que el sistema sexagesimal poseía dos principios relevantes denominados principio aditivo y el principio posicional, mismos que se explican a continuación dada su importancia para el presente proyecto de investigación:

7.3.1 Principio Aditivo

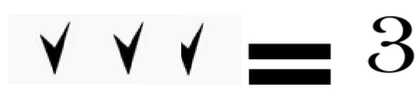
El principio aditivo permite representar números del 1 al 59 sumando los dos símbolos correspondientes y a partir del valor específico de cada uno de ellos según sea el caso. De este modo, el símbolo que representa la unidad es susceptible de usarse hasta nueve veces, sin embargo, para representar números mayores que diez y menores o iguales a 59, es necesario sumar al total de la adición de las unidades el valor correspondiente de las decenas. (Grupo Alquerque, 2012).

He aquí algunos ejemplos:

Supóngase que se desea representar el número tres en sistema sexagesimal. En este caso, basta utilizar tres veces la cuña.

Figura 26

Símbolo 3



Fuente. Troches, 2016

Ahora supóngase que se quiere representa el número cinco.

Figura 27

Símbolo 5

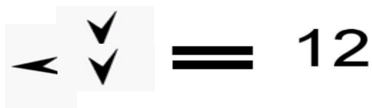
Fuente. Troches, 2016

Del mismo modo, haciendo uso de los símbolos descritos represéntense los números 12 y 15 respectivamente.

Para el número 12 se cuenta con la siguiente representación:

Figura 28

Símbolo 12

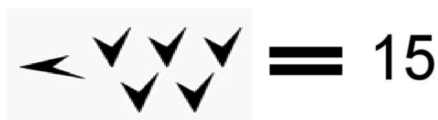


Fuente. Troches, 2016

Para el número 15:

Figura 29

Símbolos 15

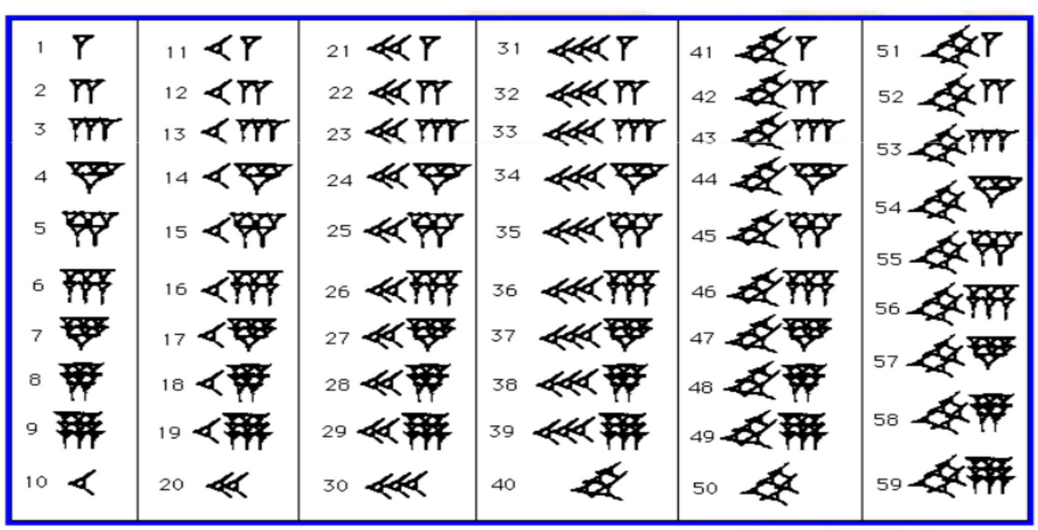


Fuente. Troches, 2016.

De este modo es posible expresar cualquier número en simbología babilónica al sistema decimal. La siguiente tabla exhibe este proceso con los números del 1 al 59.

Figura 30

Proceso números del 1 al 59



Fuente. Troches, 2016.

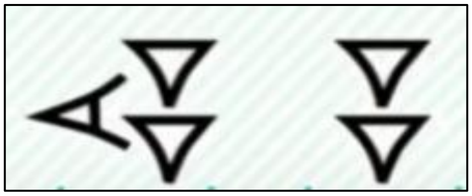
7.3.2. Principio Posicional

El principio posicional está reglado en primera instancia por la escritura de números mayores a 59, en segunda instancia por el empleo de espacios entre cantidades, y en tercera instancia y no menos importante, por la condición que, al ser un sistema posicional, su escritura se lee de derecha a izquierda tomando como base el número 60. A continuación un ejemplo de ello:

Supóngase que se desea conocer qué número representa en el sistema decimal el siguiente guarismo:

Figura 31

Guarismo



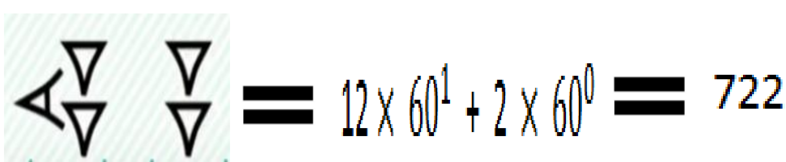
Fuente. Troches, 2016

Como se puede observar, en esta representación hay un espacio considerable entre los símbolos que yacen a la izquierda y a la derecha. Esto indica que el número que se desea representar es mayor a 59. Por tal motivo, el mecanismo a tenar en cuenta queda sustentado en los siguientes pasos:

1. Como el número consta de dos grupos de símbolos, entonces cada grupo debe multiplicarse por una potencia de sesenta, comenzando por la potencia 60^0 para el primero y 60^1 para el segundo. Esto se sabe a partir del espacio que se observa entre cada una de las representaciones.
2. El valor correspondiente a cada potencia se multiplica por la suma total del valor de los símbolos que aparecen en la representación.

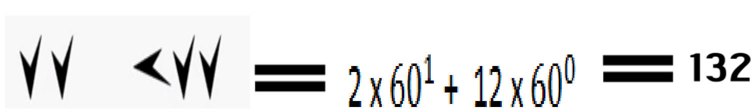
Figura 32.

Operaciones con sistema sexagesimal



Fuente. Troches, 2016.

Un segundo ejemplo seria el siguiente:



Fuente. Troches, 2016.

En términos prácticos, el sistema sexagesimal tuvo relevancia en áreas como la astronomía y la astrología, ya que facilitó el registro de información concerniente a observaciones hechas por sus científicos a los diferentes fenómenos de la naturaleza. Registro hecho en tablas de cálculo donde se evidencian relaciones entre magnitudes, (Grupo Alquerque, 2012). En ese sentido, hay una serie de características que los estudiosos del sistema babilónico han logrado reconocer. He aquí algunas de ellas:

7.3.3 Características del Sistema Sexagesimal

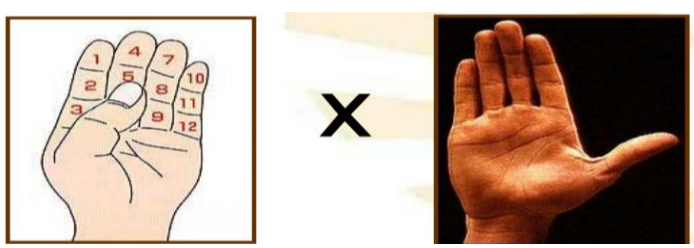
1. El sistema sexagesimal es el primer sistema posicional del que se tiene conocimiento en la historia de la humanidad.
2. Es probable que la base sesenta se deba a la división del día en horas, minutos y segundos.
3. El sistema sexagesimal está fundamentado en el sistema de numeración sumerio y en la escritura cuneiforme.
4. Aditivo para los números del 1 al 59 y posicional para los números mayores a 60.
5. Representa un insumo importante para el proceso de interpretación de algunas tablas.

7.3.4 Base del sistema babilónico

Como se dijo anteriormente, el 60 es la base del sistema sexagesimal o sistema de numeración babilónico. Al respecto existen varias teorías con las que se ha intentado explicar el porqué de su designación. Una de ellas plantea que se debe a que el 60 cumple con la condición de ser un número compuesto, pues 60 es divisible entre 1, 2, 3, 4, 5, 6,10, 12, 15, 20 y 30 respectivamente. Otra asevera que es gracias a la división del tiempo en horas, minutos y segundos, y de los ángulos en grados, minutos y segundos. Una última suscita que se debe al resultado de multiplicar las 12 falanges de una mano y los cinco dedos de la otra.

Figura 33

Resultado de multiplicar las 12 falanges de una mano y los cinco dedos de la otra

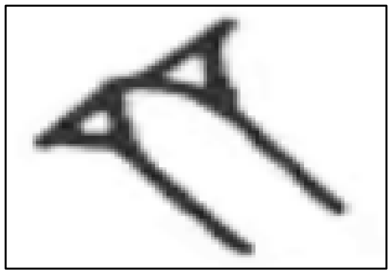


Fuente. Casado, s,f

Un dato importante con respecto al sistema sexagesimal tiene que ver con el cero babilónico, el cual es catalogado por algunos historiadores como el más antiguo de la humanidad, y quizá con el mismo carácter físico y filosófico del cero actual. En términos gráficos, el guarismo utilizado para su representación es el siguiente:

Figura 34.

Representación del 0

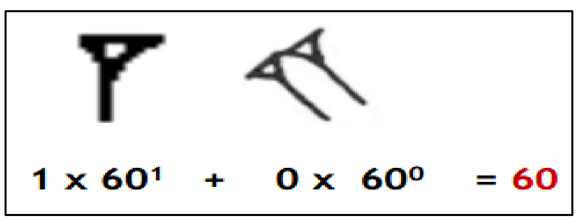


Fuente. Vázquez, 2007

En términos aritméticos el cero babilónico no contaba con una relevancia considerable, sin embargo, el sistema sexagesimal permitía la escritura de diversos números de forma práctica, incluso de aquellos que contaban con un cero dentro de su estructura. He aquí un ejemplo de ello.

Figura 35

Uso del guarismo

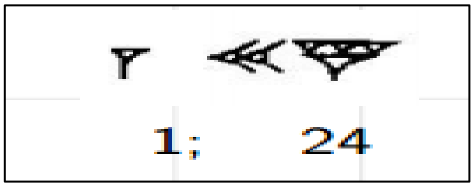


Fuente. Vázquez, 2007

Similarmente, se debe enfatizar en que el sistema sexagesimal permitía la escritura de números muy grandes, asimismo, de números que poseían una estructura decimal, misma que se caracterizaba porque en su caligrafía aparecía primero el símbolo de las unidades (cuña) y posteriormente el de las decenas (vela). Por consiguiente, la representación de este tipo de números quedaba expresada de la siguiente forma.

Figura 36

Símbolo representativo de las unidades



Fuente. Vázquez, 2007

Aquí se puede observar la simbología correspondiente a los números 1 y 24 respectivamente, escritura que de acuerdo a la posición de los símbolos cuña y vela representa un número decimal. Por lo tanto, la representación en el sistema decimal está dada por la siguiente expresión.

Figura 37

Representación del sistema decimal

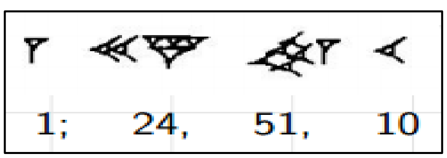
$$1 + 24 \times 60^{-1} = 1.416666\ldots$$

Fuente. Vázquez, 2007

Otro ejemplo al respecto es el siguiente:

Figura 38

Sistema decimal



Fuente. Vázquez, 2007

Aquí están representados los números, 1, 24, 51 y 10 respectivamente. Por lo tanto, su representación en el sistema decimal está dada por:

Figura 39

Sistema Decimal

$$1 + 24 \times 60^{-1} + 51 \times 60^{-2} + 10 \times 60^{-3} = 1.4142129\ldots$$

Fuente. Vázquez, 2007

Por último, se debe resaltar que, a pesar de la existencia de un guarismo representativo para el cero, en algunas tablas no aparece registro alguno de su uso en la escritura de números decimales y no decimales según algunos historiadores. Tal vez porque muchas de las tablas babilónicas fueron diseñadas muchos antes de que los babilónicos desarrollaran un símbolo para su representación.

En consecuencia, y de acuerdo a lo expuesto anteriormente, considero que la cultura babilónica tuvo un acercamiento significativo a la representación tabular del concepto de función en dos aspectos esenciales. Primero a través de la relación entre símbolos y objetos, y segundo, desde la forma en que estos organizaban los datos en tablas de cálculo. Otro elemento importante para destacar es que muchas de las tablas babilónicas encontradas hasta el momento, exhiben desarrollos matemáticos que al ser traducidos muestran una notoria aproximación a la trigonometría.

7.4 Capítulo cuatro. Representaciones aproximadas al registro tabular del concepto de función a partir de la interpretación de tablas cuneiformes

Lo que se busca ahora es analizar algunas tablas cuneiformes que contienen información concerniente a las matemáticas babilónicas, y en cuya redacción está inmersa la simbología del sistema sexagesimal. Es necesario aclarar que dicho análisis está sujeto al empleo de conceptos y simbología matemática actual, con el ánimo de facilitar su comprensión y postrera interpretación. En ese sentido, los resultados obtenidos en dicho proceso serán expresados en términos del sistema decimal.

Bajo este principio se da inicio al proceso de lectura e interpretación de tablas, partiendo de una de las más relevantes y reconocidas en la historia de la humanidad, la tabla Plimpton 322.

7.4.1 Tabla Plimpton 322.

La tabla Plimpton 322 es una de las tablas de cálculo más antiguas en la historia de la humanidad, y uno de los documentos más longevos de las matemáticas junto al papiro de Moscú y el papiro de Rhind respectivamente. Se dice que fue encontrada en la región de Senkereh al sur de Irak, zona que en la antigüedad correspondía a la ciudad de Larsa, urbe que hacia parte del grupo de ciudades que conformaban el territorio de Mesopotamia. Respecto al tiempo de existencia, se cree que fue escrita alrededor del año 1800 A. C, y su estilo se remonta a una escritura cuneiforme fundamentada en el empleo de los símbolos característicos del sistema sexagesimal.

El numeral 322 se debe especialmente al registro con el que aparece en la colección GA Plimpton de la universidad de Columbia de la ciudad de Nueva york, la cual sobresale por ser una de las Instituciones de educación superior de orden privado más importantes de los Estados Unidos, y por poseer una riqueza arqueológica derivada de investigaciones hechas en diversas zonas del planeta, y de las que se destacan las tablas babilónicas, (Sacristán, 2017).

Respecto a su estructura, la tabla cuenta con un total de 60 cifras, 15 filas y 4 columnas, en las cuales yacen consignadas una serie de números en notación decimal, similar a lo que hoy se conoce como terna pitagórica. Es decir, números enteros X , $Y y$ Z que satisfacen la ecuación $X^2 + Y^2 = Z^2$. Análogamente, se debe resaltar que la tabla analizada constituye una porción de la tabla original, misma que según los expertos contaba con un total de 38 filas y 8 columnas respectivamente. Del mismo modo, se ha comprobado que la tabla Plimpón 322 representa una especie de cuaderno de notas en el que aparece la solución de un problema matemático y no su respectivo planteamiento.

De esta forma, algunos historiadores matemáticos manifiestan que los datos que aparecen en la tabla Pilmpton 322, corresponden a la solución de un problema aritmético formulado en los siguientes términos:

Determinar las soluciones de la ecuación $X^2 + Y^2 = Z^2$.

Los valores de la tabla en escritura sexagesimal son aquellos que se muestran a continuación.

Figura 40

Tablilla Plimpton 322.

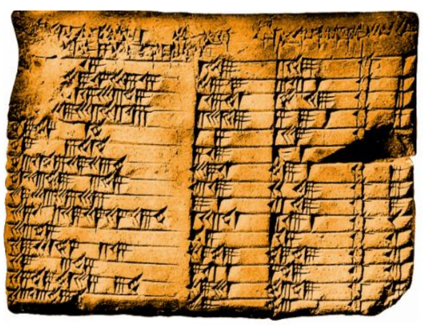
Fuente. Vázquez, 2007

Como se puede observar, la tabla consta de 15 ternas, y su interpretación requiere de la transformación de su simbología (propia del sistema sexagesimal) a valores del sistema decimal, lo cual facilita la identificación de los números que aparecen en las filas y en las columnas respectivamente. A continuación, se ilustra dicho proceso:

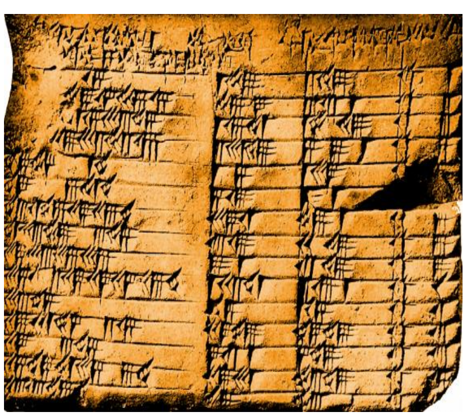
En primera instancia, la información consignada en la tabla corresponde a números decimales expresados en sistema sexagesimal. En segunda instancia, obsérvese la equivalencia en sistema decimal de cada símbolo que aparece en la tabla. Cabe resaltar que hasta el momento se desconoce la procedencia matemática de dichos valores, dado que las tablas fueron hechas por escribas que transcribían resultados y no procedimientos. Empero, muchos de los historiadores matemáticos y estudiosos de la tabla Plimpton 322, coinciden en que se trata de la verificación de ternas pitagóricas, (Sacristán, 2017).

Figura 41

Transformación de números arábigos en sistema sexagesimal al sistema decimal



1,983402	119	169	1
1,949158	3367	4825	2
1,918802	4601	6649	3
1,886247	12709	18541	4
1,815007	65	97	5
1,785192	319	481	6
1,719983	2291	3541	7
1,692709	799	1249	8
1,642669	481	769	9
1,586122	4961	8161	10
1,5625	45	75	11
1,489416	1679	2929	12
1,450017	161	289	13
1,430238	1771	3229	14
1,387160	56	106	15



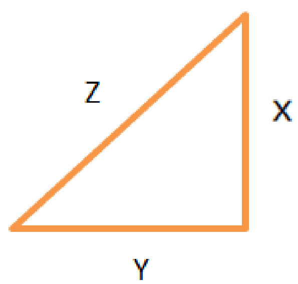
1, 59 0,15	1.59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56. 7	1,20,25	2
1,55 7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,40	5, 9, 1	4
1,48,54,1,40	1, 5	1,37	5
1,47, 6,41,40	5, 19	8, 1	6
1,43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
1,41,33,59, 3,45	13,19	20,49	8
1,38,33,36,36	8,1	12,49	9
1,35,10, 2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16, 1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54, 2,15	27,59	48,49	12
1,27, 3,45	2,41	4,49	13
1,25,48,51,35, 6,40	29,31	53,49	14
1,23,13,46,40	56	1,46	15

Fuente. Vázquez, 2007.

Ahora bien, como se observa en la siguiente imagen, las columnas corresponden a las variables $j = (\frac{Z}{Y})^2$, X, Z y No respectivamente, tomando como referencia un triángulo rectángulo de dimensiones X e Y para los catetos, y Z para la hipotenusa.

Figura 42

Tabla construida a partir de la información del triángulo rectángulo



$(\frac{Z}{Y})^2$	X	Z	No
1,983402	119	169	1
1,949158	3367	4825	2
1,918802	4601	6649	3
1,886247	12709	18541	4
1,815007	65	97	5
1,785192	319	481	6
1,719983	2291	3541	7
1,692709	799	1249	8
1,642669	481	769	9
1,586122	4961	8161	10
1,5625	45	75	11
1,489416	1679	2929	12
1,450017	161	289	13
1,430238	1771	3229	14
1,387160	56	106	15

Fuente. Vázquez, 2007

Según las dimensiones del triángulo, y la información registrada en la tabla anterior, se desconoce el valor de la variable correspondiente al cateto adyacente, es decir, de la variable Y. Por consiguiente, y para calcular su valor, los intérpretes de la tabla consideraron la expresión:

$$J = (\frac{Z}{Y})^2$$

La cual corresponde al cuadrado de la razón entre la hipotenusa del triángulo y el cateto adyacente del mismo. De donde al despejar la variable Y se obtiene como resultado:

$$Y = \frac{Z}{\sqrt{J}}$$

Así, al sustituir los valores de las variables Z y J se obtiene el primer valor correspondiente de la variable Y.

$$Y = \frac{169}{\sqrt{1.983402}} \text{ de donde } y = 120.$$

Asimismo, es posible obtener los valores de la segunda fila asociados a la variable Y.

$$Y = \frac{4825}{\sqrt{1.949158}} = 3456$$

De este modo, y siguiendo un procedimiento análogo para el resto de valores de las variables Z e J, se pueden hallar los correspondientes de la variable Y. El total de la información se puede apreciar en la siguiente tabla:

Tabla 1

Interpretación de la tablilla plimpton 322 de forma completa

No	$J = (\frac{Z}{Y})^2$	X	Y	Z
1	1,983402	119	120	169
2	1,949158	3367	3456	4825
3	1,918802	4601	4800	6649
4	1,886247	12709	13500	18541
5	1,815007	65	72	97
6	1,785192	319	360	481
7	1,719983	2291	2700	3541
8	1,622709	799	960	1249
9	1,642669	481	600	769
10	1,586122	4961	6480	8161
11	1,5625	45	60	75
12	1,489416	1679	2400	2929
13	1,450017	161	240	289
14	1,430238	1771	2700	3229
15	1,387160	56	90	106

Fuente. Vázquez, 2007

Un aspecto importante para resaltar tiene que ver con el desconocimiento del objetivo real que perseguían los babilónicos con el desarrollo de la tabla. Sin embargo, algunos historiadores aseveran que este resultado es una prueba fehaciente del conocimiento del teorema de Pitágoras mucho antes que los griegos. Pero lo interesante del asunto es la relación que se establece entre la razón de la hipotenusa del triángulo y uno de sus catetos, misma que posibilita el hallazgo de la expresión correspondiente al otro cateto.

He aquí algunos de los valores resultantes asociados a este procedimiento.

Tabla 2

Tabulación de valores.

$\frac{Z}{\sqrt{J}}$.	169 / 1.983402	4825 / 1.949158	6649 / 1,918802	1,886247 / 18541
Y	120	3456	4800	13500

Fuente. Propia del autor.

Otro elemento para destacar es que no existe certeza del empleo de la igualdad anterior por parte de los babilónicos para determinar los valores de la tabla. Lo cierto es que su estructura permitió dar una aproximación al significado real de la misma, desde la relación inmersa en la ecuación $X^2 + Y^2 = Z^2$.

Por lo tanto, como $X^2 + Y^2 = Z^2$ entonces se obtiene las siguientes igualdades:

- X=119 , Y=120 entonces: $(119)^2 + (120)^2 = (169)^2$ ↔ 28.561 = 28.561
- X=3367 , Y=3456 entonces $(3367)^2 + (3456)^2 = (4815)^2$ ↔ 23.2 = 23.2

Y así sucesivamente.

En síntesis, de la tabla Plimpton 322 se pueden extraer algunos elementos que evidencian un acercamiento a la representación tabular del concepto de función desde los siguientes parámetros.

1. La tabla está distribuida en filas y columnas de la misma forma que se distribuyen los valores de una función cuando se expresa a partir de la representación tabular.
2. Existe una relación directa entre las variables de la igualdad $X^2 + Y^2 = Z^2$.
3. En la ecuación $X^2 + Y^2 = Z^2$ se evidencia una relación de dependencia de la variable Z respecto a las variables X e Y. En este caso podría decirse que Z constituye una variable dependiente, en tanto que X e Y constituyen variables independientes.
4. La tabla Plimpton 322 es netamente aritmética.
5. Los valores de la tabla Plimpton 322 corresponden a resultados de procesos matemáticos realizados tras bambalinas. De igual forma, las tablas de valores asociadas a una función determinada no exhiben elementos procedimentales.
6. Los valores correspondientes de la variable Y crecen y decrecen con respecto a los valores de las variables X e Z respectivamente. Asimismo, y en términos generales, no existe en la representación tabular un comportamiento estándar de unas variables respecto a otra.

7. Algunas de las relaciones funcionales que se establecen en la tabla se consiguen a través de operaciones aritméticas fundamentales.
8. Se desconoce hasta el momento el planteamiento original del problema matemático que originó los datos que yacen registrados en la tabla Plimpton 322.

7.4.2 Tabla YBC 789

La tabla YBC789 es otro de los documentos babilónicos que ha sido reconocido por los historiadores por su contenido matemático y su importancia arqueológica. Se trata de una tabla cuneiforme que muestra una aproximación al número irracional $\sqrt{2}$ a través del cociente entre el lado de un cuadrado y la diagonal del mismo. Su elaboración data aproximadamente del año 1900 A. C, y hace parte de la colección de tablas babilónicas que evidencian el desarrollo de sus matemáticas. Asimismo, la información consignada en su superficie yace expresada en términos de la simbología del sistema sexagesimal.

A continuación, se muestra una imagen correspondiente a la tabla YBC 789, (Fernández G, 2015).

Figura 43

Tablilla YBC 789

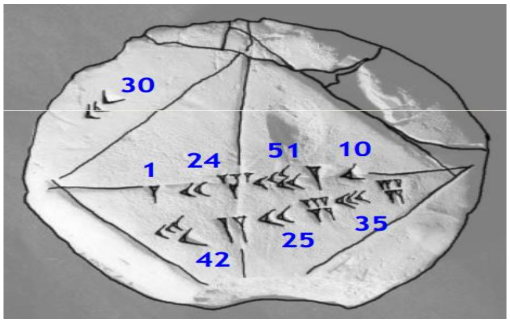
Fuente. Fernández García, 2015

Como se puede apreciar, esta imagen consta de dos esquemas correspondientes a una misma operación. La figura del lado izquierdo corresponde a la tabla en su versión original, en tanto que la del lado derecho exhibe la tabla sometida a un proceso de iluminación, mismo que muestra con claridad la simbología en su estructura, la cual y al igual que la Plimpton 322, yace en símbolos del sistema sexagesimal.

A continuación, se ilustra su proceso de análisis e interpretación.

Figura 44

Tablilla y sistema decimal



Fuente. Fernández García, 2015

En esta figura se observa un cuadrado de lado 30 cuyo cociente entre dicho valor y la diagonal del mismo es igual a $(1;24\ 51\ 10)_{60}$, siendo el valor de la diagonal igual a $(42;\ 25,35\ )_{60}$. Se quiere verificar que efectivamente el valor correspondiente a la división entre el lado y la diagonal del cuadrado corresponde a una aproximación del número irracional $\sqrt{2}$. En efecto:

Teniendo en cuenta los datos descritos anteriormente se obtiene.

- Lado del cuadrado = 30
- Cociente entre el lado y la diagonal del cuadrado= $(1;24\ 51\ 10)_{60}$
- Valor correspondiente de la diagonal del cuadrado = $(42;\ 25,35\ )_{60}$

Como se puede evidenciar, los números descritos anteriormente están en el sistema sexagesimal, haciendo la conversión al sistema decimal se obtienen los siguientes resultados:

- Lado del cuadra: $(30)_{60}$ = $30 \times\ 60^0$ = 30
- Valor correspondiente de la diagonal del cuadrado = $(42;\ 25,35\ )_{60}$
  $= 42 \times 60^0 + 25\ \times\ 60^{-1} + 35\ \times\ 60^{-2}$
  $=\ 42 + 0.41666 + 0.0097222 =\ 42.42638222.$
- Cociente entre el lado y la diagonal del cuadrado= $(1;24\ 51\ 10)_{60}$
  $= 1 \times\ 60^0 + 24\ \times\ 60^{-1} + 51\ \times\ 60^{-2} + 10\ \times\ 60^{-3}$
  $= 1 + 0.4\ + 0.0141666\ + 0.0000462962$ = 1.4142128…

Aquí se observa que el valor correspondiente al cociente entre el lado y la diagonal del cuadrado es efectivamente el número irracional $\sqrt{2}$, evidenciándose una relación entre el lado del cuadrado y su respectiva diagonal. Representando estos datos en una tabla de valores se obtiene lo siguiente:

Tabla 3

Relación sexagesimal y sistema decimal

Sistema numérico	$\boldsymbol{Lado\ del\ cuadrado}$	$\boldsymbol{Diagonal\ del\ cuadrado}$	$\dfrac{\boldsymbol{Lado\ del\ cudrado}}{\boldsymbol{Diagonal\ del\ cuadrado}}$
Babilónico	$(30)_{60}$	$(42;\ 25,35\ )_{60}$	$(\ 1;24\ \ 51\ \ 10)\ _{60}$
Decimal	30	42.42638222.	1.4142128…

Fuente. Propia del autor

En consecuencia, de la tabla YBC789 también es posible extraer elementos que determinan un notorio acercamiento a la representación tabular del concepto de función a partir de los siguientes aspectos:

1. Al igual que la tabla Plimpton 322, la tabla YBC789 es netamente aritmética.
2. Se evidencia que las magnitudes correspondientes al lado del cuadrado y a la diagonal del mismo son independientes entre sí.
3. Se establece una relación de dependencia entre el número $\sqrt{2}$ y el lado y la diagonal del cuadrado a través de la división como operación aritmética fundamental.
4. Se desconoce hasta el momento bajo qué condiciones se asignaron los valores del lado del cuadrado y la diagonal del mismo.
5. Aunque no aparezca registro de tabulación de los datos obtenidos en el proceso anterior, estos se pueden organizar a través de una tabla de valores.
6. Se observa un conocimiento moderado de algunas figuras geométricas como el cuadrado y de algunos de sus elementos.
7. Se desconoce a ciencia cierta si en realidad los babilónicos buscaban obtener el valor de raíz de dos a través del cociente entre el lado y la diagonal de un cuadrado.
8. La tabla en cuestión no muestra cálculos matemáticos.
9. Quizá el elemento más importante para destacar en el tratamiento anterior, es la correspondencia entre cantidades.

7.4.3 Trigonometría babilónica

Una interpretación adicional de la tabla Plimton 322 está relacionada con el estudio de la trigonometría bajo un parámetro especial, la no existencia de ángulos. De esta forma y según algunos historiadores matemáticos, el sentido trigonométrico de la tabla yace en la utilidad para construir templos y palacios, mismos que dejan ver la precisión de sus cálculos a partir de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Ahora bien, como se hizo anteriormente, es necesario transformar la tabla a escritura actual (Sistema decimal) para facilitar su comprensión. Es importante resaltar que esta interpretación difiere considerablemente de la interpretación hecha para el caso de ternas pitagóricas.

Tabla 4

Tabla trigonométríca incompleta

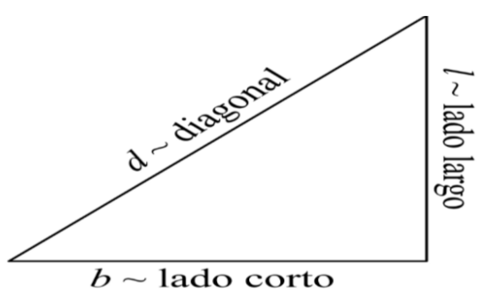
δ^2	b	d	rk
1.983403	119	169	1
1.949159	3367	4825	2
1.918802	4601	6649	3
1.886248	12709	18541	4
1.815008	65	97	5
1.785193	319	481	6
1.719984	2291	3541	7
1.692709	799	1249	8
1.642669	481	769	9
1.586123	4961	8161	10
1.5625	45	75	11
1.489417	1679	2929	12
1.450017	161	289	13
1.430239	1771	3229	14
1.38716	28	53	15

Fuente. Camino Beck Tomas

Para el análisis respectivo considérese el siguiente triangulo rectángulo.

Figura 45

Triángulo rectángulo.



Fuente. Camino Beck Tomas

Los valores de la tabla se relacionan con las dimensiones del triángulo anterior. No obstante, y según algunos investigadores, la tabla carece de algunas columnas cuya información podría determinarse haciendo uso de la siguiente expresión:

$$\delta^2 - 1 = \beta^2 \qquad \text{(Notación actual)}$$

De este modo, considerando la expresión $\delta^2 = \left(\frac{d}{l}\right)^2$:omo se hizo en la primera interpretación

(Ternas pitagóricas), la ecuación $\delta^2 - 1 = \beta^2$, y aplicando algunos procedimientos algebraicos tenemos:

$$b^2 + l^2 = d^2 \quad \text{(teorema de Pitágoras en lenguaje actual)}$$

$$\delta^2 - 1 = \beta^2$$

Ahora, como $\delta^2 = \left(\frac{d}{l}\right)^2$ entonces: $\left(\frac{d}{l}\right)^2 - 1 = \beta^2$ O lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2}{l^2} - 1 = \beta^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{b^2 + l^2}{l^2} - 1 = \beta^2 \quad \text{(aplicando la terna pitagórica)}$$

Así pues, se obtiene: $\frac{b^2}{l^2} + \frac{l^2}{l^2} - 1 = \beta^2 \leftrightarrow \frac{b^2}{l^2} + \cancel{1} - \cancel{1} = \beta^2$.

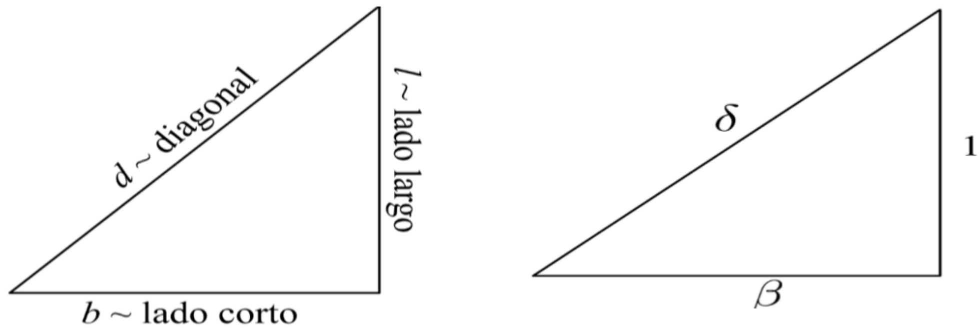
Por último: $\beta^2 = (\frac{b}{l})^2$ $\delta^2 = \left(\frac{d}{l}\right)^2$ $\beta^2 = \left(\frac{b}{l}\right)^2$ ɔ

$$\beta = \frac{b}{l}, \delta = \frac{d}{l}$$

De donde: $\beta = b$ y $\delta = d$ con $l = 1$. De esta forma, el triángulo anterior queda transformado en el triángulo siguiente:

Figura 46

Relación triángulos rectángulos



Fuente. Camino Beck Tomas.

En consecuencia, los historiadores matemáticos consideran que las columnas que faltan en la tabla Plimpton 322, son aquellas que están representadas por los valores de las letras α y β respectivamente.

Tabla 5

Tabla trigonométrica completa.

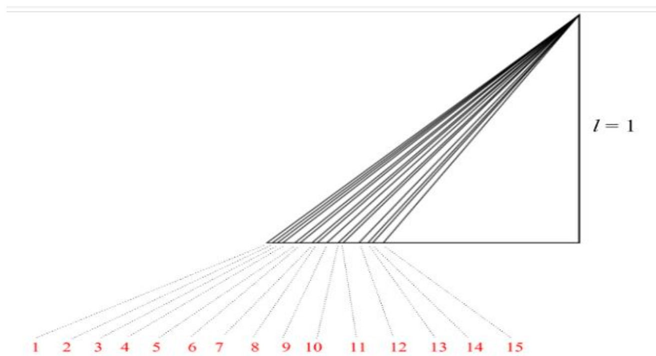
δ	β	β^2	b	d	rk
1.40833	0.991667	0.983403	119	169	1
1.39612	0.974248	0.949159	3367	4825	2
1.38521	0.958542	0.918802	4601	6649	3
1.37341	0.941407	0.886248	12709	18541	4
1.34722	0.902778	0.815008	65	97	5
1.33611	0.886111	0.785193	319	481	6
1.31148	0.848519	0.719984	2291	3541	7
1.30104	0.832292	0.692709	799	1249	8
1.28167	0.801667	0.642669	481	769	9
1.25941	0.765586	0.586123	4961	8161	10
1.25	0.75	0.5625	45	75	11
1.22042	0.699583	0.489417	1679	2929	12
1.20417	0.670833	0.450017	161	289	13
1.19593	0.655926	0.430239	1771	3229	14
1.17778	0.622222	0.38716	28	53	15

Fuente. Camino Beck Tomas.

Por lo tanto, es posible aseverar que al parecer lo que buscaban los babilónicos era la construcción de una serie de triángulos con variación angular a través del uso de “ternas pitagóricas” (lenguaje actual), mismos que quedan definidos por cada una de las filas de la tabla anterior. En consecuencia, se obtiene una tabla trigonométrica sin el uso de ángulos y sin la utilización de conceptos como la ley del seno y la ley del coseno, los cuales fueron desarrollados posteriormente por otras culturas.

Figura 47

Triángulo rectángulo de lado uno.



Fuente. Camino Beck Tomas.

A continuación, se ilustra un ejemplo correspondiente a la utilización de esta tabla en el cálculo de dimensiones.

Supóngase que se desea conocer el valor del largo de la diagonal de un terreno dispuesto para labores de agricultura, donde las medidas del lado corto son 80 metros y del lado largo 105 metros respectivamente. Determinar el valor de

Como $\beta = \frac{b}{l} = \frac{80}{105} = 0.761905$, al buscar un valor cercano a 0.761905 en la tabla se obtiene:

Tabla 6

Tabla trigonométrica aplicada.

δ	β	β^2	b	d	rk
1.40833	0.991667	0.983403	119	169	1
1.39612	0.974248	0.949159	3367	4825	2
1.38521	0.958542	0.918802	4601	6649	3
1.37341	0.941407	0.886248	12709	18541	4
1.34722	0.902778	0.815008	65	97	5
1.33611	0.886111	0.785193	319	481	6
1.31148	0.848519	0.719984	2291	3541	7
1.30104	0.832292	0.692709	799	1249	8
1.28167	0.801667	0.642669	481	769	9
1.25941	0.765586	0.586123	4961	8161	10
1.25	0.75	0.5625	45	75	11

Fuente. Camino Beck Tomas.

En la tabla se puede verificar que el valor más cercano está en la décima fila de la tabla. Ahora lo que se hace es multiplicar el valor del largo 105 por el valor de delta, y de esa forma se halla el valor asociado a la diagonal.

$$\approx 105 \times 1.25941 \quad 132.$$

Para terminar, se resalta la destreza en los cálculos teniendo en cuenta que para la época no se contaban con leyes trigonométricas como las leyes del seno y coseno respectivamente, ni tampoco con el teorema de Pitágoras. De este modo, y en términos de relación con la representación tabular del concepto de función, es posible afirmar que:

1. Se evidencian relaciones de dependencia e independencia entre las magnitudes involucradas.
2. No existe un comportamiento estándar entre los valores asociados a las magnitudes de la tabla, tal como sucede en la tabulación de algunas funciones.
3. Los valores correspondientes están distribuidos en filas y columnas.
4. La información obtenida en términos trigonométricos complementa la información obtenida en la primera tabla.

8. Conclusiones

De los resultados obtenidos con el desarrollo del proyecto de investigación denominado ***aproximación del registro tabular del concepto de función en la cultura babilónica,*** se puede inferir en términos generales que el conocimiento de la historia de los conceptos matemáticos amplía el abanico de posibilidades para mejorar su presentación en contextos educativos, dado que genera procesos de reflexión (critica, argumentativa y propositiva) que conllevan a la búsqueda de herramientas didácticas y pedagógicas para mejorar su enseñanza y aprendizaje. Esto a partir de la posibilidad de mostrar el origen y evolución de los conceptos, y no simplemente mostrarlos como un producto terminado. De igual forma, que las matemáticas no son una disciplina independiente, ya que en ella convergen asignaturas como la historia, la psicología, la sociología, la antropología, la didáctica, la pedagogía, las ciencias naturales y la lingüística .respectivamente, tal como lo plantea el profesor Carlos Eduardo Vasco en su octógono. En ese sentido, vale la pena destacar que durante el proceso investigativo se desarrollaron procesos de reflexión en torno a la escritura de los babilónicos, su filosofía de vida, su idiosincrasia, sus desarrollos sociales, políticos, entre otros.

Asimismo, que la escritura cuneiforme contribuyó indiscutiblemente al desarrollo de la cultura babilónica en términos sociales, políticos, religiosos, científicos y matemáticos. Proceso que mostró el progreso de las matemáticas desde una óptica diferente a la desplegada por los griegos, y que fortaleció el criterio constructivista del autor del presente documento con relación a la invención de dicha disciplina. Análogamente, del análisis e interpretación de tablas se deduce que el concepto de función y en particular su representación tabular, comprende una serie de elementos aritméticos y algebraicos que la convierten en una de las nociones matemáticas más complejas de enseñar y por ende de comprender, esto debido a las concepciones erróneas existentes en el pensamiento funcional de los educandos, que limitan su capacidad de aprehender su definición y de relacionar sus formas de representación.

Ahora bien, desde el punto de vista histórico, las razones que justifican un acercamiento al concepto de función desde la representación tabular en la lectura e interpretación de tablas, se asocian especialmente con la idea intuitiva de relación concebida por los babilónicos para enlazar elementos de dos conjuntos. Esto se puede evidenciar en el empleo de símbolos cuneiformes para representar objetos. Análogamente, en la necesidad de conocer el valor de ciertas cantidades a partir de los valores de otras, lo que permite inferir una clara idea de dependencia e independencia entre cuantías. Simultáneamente, desde la organización y distribución de datos en filas y columnas y el empleo intuitivo de sistemas algebraicos.

En términos particulares, es del sentir del autor considerar que la enseñanza de la noción de función y especialmente de la representación tabular como una primera aproximación a dicho concepto a partir de la vinculación de elementos históricos, es importante dado que potencia la curiosidad de los educandos, la creatividad de los mismos, los pensamientos numéricos (Numérico, variacional, espacial, métrico y aleatorio), las competencias básicas, las habilidades blandas, las inteligencias múltiples y los razonamientos lógico y matemático respectivamente. De esta forma, es necesario la búsqueda de estrategias que fomenten espacios de reflexión y construcción de conocimiento, partiendo de la historia como base fundamental de los mismos, y haciendo que la enseñanza de la noción de función y en particular de su representación tabular refleje a cabalidad su proceso histórico, el cual podría realizarse desde la lectura de tablas babilónicas.

En el mismo sentido, se extiende la invitación para que la enseñanza de las matemáticas pueda realizarse sistemáticamente teniendo en cuenta los cinco enfoques que se describen a continuación: Histórico, mostrando aquellas situaciones que dieron origen y potenciaron el desarrollo de los conceptos matemáticos así como también su respectiva evolución. Teórico, exhibiendo la formalización de los conceptos desde su definición. Aplicativo, indicando los campos de aplicación de los conceptos matemáticos y su relación con otras disciplinas. Pedagógico, como se dijo anteriormente, desde la búsqueda de estrategias que contribuyan al fortalecimiento de su aprendizaje. Y social, señalando la importancia de las matemáticas en el desarrollo científico y tecnológico de la humanidad, mostrando aquellos aspectos históricos que determinaron su desarrollo y evolución.

Indistintamente, vale la pena destacar que la investigación en cuestión constituye un aporte importante al conjunto de investigaciones de corte histórico, dado que en primera instancia determina un acercamiento a una de las culturas más prolíficas de la historia (La cultura babilónica). En segunda instancia, porque abre una brecha para conocer los desarrollos matemáticos de culturas como los Mayas, los Incas, los Egipcios, los Aztecas, entre otros. Y en tercera instancia, porque resalta la necesidad de implementar la historia en los procesos educativos.

Referencias bibliográficas

Ángel del Rio, A. (2004). *Escritura y alfabetización, su impacto en la antigüedad.* (Tesis doctoral) Universidad Compus de Madrid. Facultad de geografía e historia. https://eprints.ucm.es/id/eprint/5401/1/T27686.pdf

Ayala, M. (2020). Método histórico: características, pasos y ejemplos. Lifeder. https://www.lifeder.com/metodo-historico/.

Babbie. S. (2000). *Fundamentos de la investigación social.* México: International Thomson Ed. https://tecnicasmasseroni.files.wordpress.com/2012/02/babbie-fundamentos-de-la-investigacic3b3n-social.pdf

Balboa, P. (2013). Los sistemas de numeración a lo largo de la historia. https://www.sutori.com/story/los-sistemas-de-numeracion-a-lo-largo-de-la-historia--4Mtg35nmK8EgeJ8Fa5BJL51w

Benito, J. (2017, septiembre 6). El periodo sumerio. *Revista EL Arcón del Clio* https://revista.elarcondeclio.com.ar/el-periodo-sumerio/.Si va a utilizar este texto cite la fuente: revista.elarcondeclio.com.ar

Bleizario, B. (2013). Memoria histórica: las matemáticas en Egipto y babilonia. [you tu be] https://prezi.com/1lss0gj2tvkz/historia-de-las-matematicas-en-egipto-y-babilonia/

Bressan, A. (s.f). Los principios de la educación matemática realista. file:///D:/USUARIO/Desktop/guillermo%20hacer%20norma/ANA%20BRESSAN.pdf

Castillo Sánchez, M. (2004). *Guía para la formulación de proyectos de investigación*. Bogotá: Magisterio. https://books.google.com.co/books?id=12QAoImkJxsC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

Cuevas Vallejo, C.A., Delgado Pineda, M., Martínez Reyes, M. (2018). Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y concepto de función real, antes de un curso de cálculo diferencial. *Revista Logos, Ciencia & Tecnología, 10 (2),* https://www.redalyc.org/journal/5177/517758004001/html/

Charatense. L. (2013, 30 de septiembre). La invención de la escritura. [You to be] https://www.youtube.com/watch?v=S4nN_yLb62g.

Cristian, C. (2016). Babilonia desvelada, la ciudad de babilonia y los jardines colgantes. [you tu be] https://www.youtube.com/watch?v=QR8tyB6GpvQ

Da Silva Bueno, R. W. (s,f). La construcción histórica del concepto de función.

Díaz Gómez, J. L. (2013). El concepto de función: ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. *El Cálculo y su Enseñanza, Vol. 4,* México, D.F. http://funes.uniandes.edu.co/14913/1/Diaz2013El.pdf

Eiler (1783). Institutiones calculi differentialis.

Espinoza Ramírez, L. (2019). Vínculo matemática-mundo: estudio socioepistemológico de la Geometría de Euclides. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, http://funes.uniandes.edu.co/15881/1/Espinoza2019Vinculo.pdf

Ezquer Espin, J. J. (2007) La Caída de la Civilización Sumeria. https://www.aiu.edu/spanish/publications/student/spanish/180-207/PDF/la%20ciauda%20de%20la%20civilizacion%20sumeria.pdf

Farfán, E. M. y García. M.A. (2005). El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico. https://core.ac.uk/download/pdf/33252479.pdf

Fernández Aguilar, E.M. (2012). Babilonia y las matemáticas en el aula. *Revista de imagenes e stories.* http://www.clubcientificobezmiliana.org/revista/images/stories/babiloniamatematicasaula.pdf

Fernández García, N. L. (2015). Sistema de numeración posicional de babilonia universidad de córdoba. Escuela Universitaria de Magisterio "sagrado corazón". https://www.uco.es/users/ma1fegan/Comunes/recursos-matematicos/Sistemas-numeracion/Sistema-de-numeracion-Babilonia.pdf

Fólguera, G. (2011). Babilonia y la biología. Localización: El Búho: *Revista electrónica de la Asociación Andaluza de Filosofía, ISSN-e 1138-3569, Nº. 10*. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5597166

Galán Atienza, B. (2012). La historia de las matemáticas. De dónde vienen y hacia dónde se Dirigen. https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1764/Gal%C3%A1n% 20 Atienza%2C%20Benjam%C3%ADn.pdf?sequence=1

García, Á. (2011). Evolución del Concepto Función hasta el Siglo XX. (Monografía presentada al seminario Historia de la Matemática como requisito para optar por el título de licenciado en Matemática). Universidad de panamá. Facultad de ciencias naturales y exactas escuela de matemática. https://www.monografias.com/trabajos88/evolucion-del-concepto-funcion-inicios-del-siglo-xx/evolucion-del-concepto-funcion-inicios-del-siglo-xx

Garnett, H. (2015, 6 de agosto). El misterio de babilonia. [you tu be] https://www.youtube.com/watch?v=1WY7ctbcL30

Grupo Alquerque. (2012). Sistema de numeración babilónica. http://www.grupoalquerque.es/ferias/2012/archivos/s-n_antiguos/numeracion_babilonica.pdf

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. The College Mathematics Journal, 20(4), 282-300.

Lach, R. (2018, 21 de enero). Civilizaciones pérdidas: el pueblo de los sumerios.

Lagrange. (1983). Teoría de funciones analíticas. https://rmhm.wordpress.com/2018/11/01/lagrange-y-la-teoria-de-las-funciones-analiticas/

López Saco, J. (6 de mayo de 2014). Sabidurías de las culturas antiguas. http://asiahistoria.blogspot.com/2014/05/el-dinastico-arcaico-en-la-antigua.html

Máxima Uriarte, J. (2019). "Civilización babilónica". Autor: Julia Para: Caracteristicas.co. https://www.caracteristicas.co/civilizacion-babilonica/.

Molina, M. C. (2009). La mujer en la ciencia. Revista digital innovación y experiencias N° 19 https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_19/CARMEN_MOLINA_1.pdf

Montagud Rubio, N. (2018) Acadios: quiénes fueron y cómo era su civilización mesopotámica En psicología y mente. https://psicologiaymente.com/cultura/acadios

Navarro, C. (2013). Las escrituras y Mesopotamia, sumeria, asiria y babilonia. [you tu be] https://www.youtube.com/watch?v=oiesGuP_br0

Nieto Martínez, J. Y. (2021). Funciones más comunes. https://rpubs.com/yaelnieto/tarea6

Ortiz Fernández, A. (2005). La matemática en la antigüedad. Pontificia universidad católica del Perú. Historia de la matemática. Lima-Perú. file:///D:/USUARIO/Desktop/guillermo%20hacer%20norma/BOYER.pdf

Pollio, A. (2016). La conceptualización de la noción de función en estudiantes de ciclo básico. http://funes.uniandes.edu.co/18086/1/Pollio2016La.pdf

Prieto Ospina, C.A. (2012). La comprensión del sistema de numeración decimal y su adecuado uso en las operaciones aritméticas. (Tesis)Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Bogotá, Colombia. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/21409/1186638.2013.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Rondón Durán, J. E. (2013). *Una introducción al modelamiento de fenómenos físicos a través de funciones.* [Trabajo de grado] Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Bogotá, Colombia. http://bdigital.unal.edu.co/12807/1/jorgeeliecerrond%C3%B3nduran.2013.pdf

Ruiz Olabuénaga, J.I. (2012). *Metodología de la investigación cualitativa*. 5 ed. Bilbao. https://books.google.es/books?id=WdaAt6ogAykC&printsec=copyright&hl=es#v=onepage&q&f=false

Ruiz Zúñiga, Á. (2012). *Historia y filosofía de las matemáticas*. N°ed.1. http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20las%20matematicas.pdf

Ruiz Olabuénaga, J. I. (2003). *Metodología de la investigación cualitativa*. 3ª. ed. Bilbao: Universidad de Deusto.

Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. https://revistadepedagogia.org/wp-content/uploads/2018/05/4-El-M%C3%A9todo-Hist%C3%B3rico-en-la-Investigaci%C3%B3n.pdf

Sacristán, E. (2017). Una tablilla babilónica esconde la tabla trigonométrica más antigua del mundo. https://www.agenciasinc.es/en/view/content/242271/full/1/110334

Sánchez Pérez, E.A., García Raffi, L.M. y Sánchez Pérez, J.V. (1999). Innovaciones didácticas. file:///D:/USUARIO/Desktop/guillermo%20hacer%20norma/DOCUMENTO%20DOS%20(1).pdf

Such, M. (2012). El nacimiento de la escritura en las culturas del Próximo Oriente. https://www.universidadpopularc3c.es/index.php/ultimos-videos/event/104-conferencia-el-nacimiento-de-la-escritura-en-las-culturas-del-proximo-oriente

Such, M. (2013) U. P. Carmen de Michelena Tres Cantos. El nacimiento de la escritura, en las culturas del próximo oriente. [You tu be] https://www.youtube.com/watch?v=WGJFtqxgN14

Such, M. (2015, 23 de abril). U. P. Carmen de Michelena Tres Cantos. Conferencia, el poder omnipresente de la monarquía sumeria. [You tu be] https://www.youtube.com/watch?v=UZvoMBsJeiI

Stewart, I. (2012). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 Años*. www.librosmaravillosos.com/historiadelasmatematicasenlosultimos10000anos/pdf/Historia%20de%20las%20matematicas%20-%20Ian%20Stewart.pdf

Torres, C. (2016). Documental. La filosofía de las matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM. [you tu be] https://www.youtube.com/watch?v=eP7ErcWKJuY

Troches (2016). Las matemáticas en babilonia. [you tu be] https://www.youtube.com/watch?v=zgJ_E77jNOU

Ugalde, G. F. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V14_N1_2013/RevistaDigital_ Ugalde_V14_n1_2013/RevistaDigital_Ugalde_V14_n1_2013.pdf

Uriarte Baranda, C. (2018). La Función Zeta de Riemann y su relación con la distribución de los números primos. (Trabajo final de grado). Universidad del País Vasco. file:///D:/USUARIO/Downloads/168408167_220709_133950%20(1).pdf

Yubero Cañas, F. (2013, 8 de diciembre). Los jardines colgantes. [you tu be] https://www.youtube.com/watch?v=cUC5pyczpog

Vásquez Fernández, S. (2015). *Guía docente historia.* Kapelusz Editora S. A. https://www.editorialkapelusz.com/wp-content/uploads/2018/01/GD-VAZQUEZ-HISTORIA-Prehistoria-Antig%C3%BCedad-Edad-Media.pdf

Velveth, G. (2017, 7 de septiembre). La historia empieza en sumer, educación, las primeras escuelas.

Vié-Wohrer, A. M. (2006). Las escrituras que privilegian la imagen: cuatro casos. Desacatos no.22. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1607-050X20060003 00002

Zora (2017). History channel, reyes de babilonia [you tu be] https://www.youtube.com/watch?v=uC9Xim7257w