¿EL INFINITO: POSIBLE OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO EN LA ADOPCIÓN DE CONCEPTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO?

ANYI DANIELA CORREDOR IMBACHI

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Popayán

2019

¿EL INFINITO: POSIBLE OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO EN LA ADOPCIÓN DE CONCEPTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO?

ANYI DANIELA CORREDOR IMBACHI

Trabajo de práctica pedagógica presentado como requisito parcial

para optar al título de Licenciada en Matemáticas

Directora:

Dra: GABRIELA INÉS ARBELÁEZ ROJAS

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas de la Educación

Departamento de Matemáticas

Popayán

2019

NOTA DE ACEPTACIÓN

El presente trabajo fue aprobado por:

Vo.Bo. Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Vo.Bo. Gabriela Arbeláez Rojas

Directora

Vo.Bo. Yeny Leonor Rosero

Evaluadora

Popayán, Agosto 6 de 2019

A mis padres, hermanos y novio,

son la fuente de mi felicidad y fortaleza.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por el maravillo regalo de la vida, por ser el motor inmóvil de mis sueños.

Agradezco infinitamente a mis padres por su valioso apoyo, amor, paciencia, por compartir conmigo este sueño. Fueron ellos junto a mis hermanos y sobrinos, mi fuente de fortaleza. Su voz de aliento ante las adversidades y tropiezos, me permitieron luchar y lograr la culminación de mis estudios de pregrado.

Quiero expresar mi profunda y extensa gratitud a mi profesora y directora del trabajo de práctica pedológica, Dra. Gabriela Inés Arbeláez Rojas, por sus valiosos aportes en el origen, evolución y progreso de este trabajo, por valorar hasta los más pequeños esfuerzos, por el tiempo que dedico en ayudarme a corregir mis errores una y otra vez, por su paciencia, por hacerme sentir cómoda para hacer cualquier pregunta. Mi deuda es grande no sólo por esto, sino por formarme como persona, por todos y cada uno de sus valiosos consejos que me motivaron a nunca bajar los brazos y a seguir en busca de mis sueños, por su apoyo incondicional.

Agradezco de manera muy especial a Ricardo, por su amor, compresión, apoyo incondicional, tiempo, palabras de aliento. Él es mi amigo, mi amor, mi compañero incondicional.

También agradezco a los profesores del Departamento de Matemáticas que aportaron en mi formación académica y personal, en especial a los profesores Francisco Enríquez Belalcázar, Martha Lucía Bobadilla, Alex Manuel Montes Padilla, Ángel Hernán Zúñiga, Samin Ingrith Cerón, Yeny Leonor Rosero.

Índice

1. Introducción

El presente documento contiene el resultado de un trabajo de práctica pedagógica, enmarcado dentro del proyecto de investigación: “la apropiación del infinito actual y el análisis matemático en R”, el cual es liderado por algunos profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca y se sustenta en el hecho de que históricamente los estudiantes de los programas de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas, han tenido problemas para abordar con éxito los cursos de análisis real y análisis I respectivamente, que corresponden a los planes de estudio de estos programas. Esta información es confirmada por los registros de estudiantes matriculados entre los años 2014 y 2018 en las asignaturas mencionadas (Anexo 1), los cuales indican que el 27.2% y el 40.8% de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas, respectivamente, han repetido por lo menos una estos cursos.

El desarrollo del proyecto, partió de una hipótesis: existe una dificultad de orden epistemológico en la adopción del infinito actual, lo cual hace que los estudiantes presenten problemas para abstraer nociones que forman parte de los fundamentos del curso de análisis matemático como límite, continuidad, convergencia, serie, derivada, integral; conceptos que previamente han trabajado en las materias de cálculo diferencial e integral.

En este sentido, el objetivo del proyecto es identificar si el infinito es un obstáculo epistemológico en la adopción de conceptos del análisis matemático, como los mencionados previamente.

Para verificar lo anterior, se hizo una inmersión en el aula con aproximadamente diez estudiantes de cálculo III del segundo semestre del 2018, de los programas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca, que consistió en cuatro sesiones, las cuales tuvieron duración de una a dos horas, estas sesiones se acordó con los estudiantes.

La metodología que se implementó, consistió en el desarrollo de un taller por sesión, de tal forma que los participantes respondieran de manera individual y voluntaria cada pregunta de acuerdo con sus conocimientos, sin presiones por ningún tipo de evaluación.

Para sustentar que el infinito es un obstáculo epistemológico en la adopción de conceptos como: límite, continuidad, series, sucesiones, convergencia, se toma como soporte el hecho de que la historia de las matemáticas puede actuar como un laboratorio epistemológico. En el caso que nos compete, el siglo XIX es un momento en el que emerge el análisis matemático como disciplina independiente del cálculo y aparecen las primeras huellas de la adopción del infinito actual. También es un momento en el que se está despojando al concepto de continuidad de referentes geométricos o físicos y los procesos infinitos se están destacando.

Como la historia de la matemática posee un gran bagaje conceptual de acontecimientos matemáticos, es pertinente presentar las generalidades históricas de algunos conceptos mencionados previamente y destacar su importancia en las matemáticas.

Para empezar, el número es un objeto matemático, que está dotado de propiedades y de una realidad que es asignada por una comunidad de matemáticos. Apoyando esta aserción Dedekind afirma lo siguiente: "Considerando esta liberación de sus elementos con respecto a cualquier contenido (abstracción), se puede llamar a los números, con derecho, creación libre del espíritu humano" (1888), en otras palabras, los números son el resultado del ingenio de la mente humana.

De acuerdo con registros históricos, el primer acercamiento a los números reales se podría encontrar en el concepto de magnitud inconmensurable, que es el elemento primigenio de la noción de número irracional. La constitución del conjunto de los números irracionales, es necesaria para la formulación de las propiedades de R[1], ya que, se considera a R como la unión de Q[2] e I[3]. Más aún**,** se puede considerar a "R como el límite de sucesiones de Cauchy en Q" (Arbeláez & Recalde, 2011).

Un último ejemplo en aras de afianzar la caracterización de R, lo constituye el concepto de continuidad, según Arbeláez (2011) se tiene que:

> …, la creación de los números reales obedece a la necesidad de dar forma matemática a la propiedad de completez. Cuando esto se logra nosotros consideramos que la continuidad deja de ser una mera propiedad de objetos y pasa a constituirse ella misma en objeto matemático, es decir, el continuo. (pág. 133)

Es decir, la continuidad deja de ser una cualidad física de los objetos, cuando se le asigna una definición matemática.

Conforme a Arbeláez (2011), se considera que la construcción formal de R se dio a mediados del siglo XIX y algunos de los precursores de este hecho fueron: Dedekind, Cantor, Charles Meray, Weierstrass.

Aunque el infinito no es un tema propiamente de los contenidos de los cursos de análisis real y análisis I, es un concepto que está inmerso en toda la matemática y en particular en la línea del análisis matemático, por lo que es relevante analizar las implicaciones que genera en los conceptos que lo contienen, como por ejemplo: el concepto límite, continuidad, series, convergencia de series y sucesiones.

---

[1] "R = Q ∪ I " (Recalde, Hinestroza, Alvarez, Marmolejo, & Acosta, 2007)

[2] Q=$\{\frac{p}{q} : p, q \in Z, q \neq 0\}$

[3] "Además de los números racionales, existen otros números que no son expresables como fracciones de enteros y que se llaman números irracionales. Utilizaremos el símbolo I para referirnos al conjunto de estos números" (Recalde, Hinestroza, Alvarez, Marmolejo, & Acosta, 2007).

Según historiadores el infinito apareció por primera vez en las paradojas de Zenón y desde ahí hasta la primera mitad del siglo XIX se mantuvo fuerte entre los matemáticos la concepción del infinito potencial, el cual se identifica con el adjetivo “sin fin” (Stewart, 2002).

En la noción de infinito actual presentada por Delahaye, (2001) se tiene que:

> Aristóteles se negaba a aceptar la infinitud “en acto” (o infinito actual), es decir, tomada de una sola vez. Negaba al infinito toda existencia física, si bien le reconocía una cierta existencia matemática, pues le parecía necesario considerar cantidades cada vez más grande; en efecto, cada número entero tiene uno que le sigue; ningún punto de una recta es el último. (pág. 37)

Lo que significa, que el infinito actual es un objeto matemático, que existe en sí mismo, más no es una cualidad de los objetos.

El salto del infinito potencial al actual se logró con la teoría de los números transfinitos de Cantor, esta teoría fue rechazada y criticada por los matemáticos más influyentes de la época del matemático Alemán, debido a que, se contrapone al pensamiento intuicionista, el cual considera que “los objetos matemáticos no existen más que si es posible construirlos” (Calder, 2001) y, por ende, no se puede asegurar la existencia de un objeto matemático, sino se exhibe su construcción. Recalde (2018) refiere que los orígenes del cálculo se remontan al problema de cuadrar figuras, que en un principio fue abordado y estudiado por Euclides. Uno de los problemas sobre la medida que resuelve Euclides en los libros I y II de los Elementos, fue el de cuadrar figuras planas rectilíneas por medio del método de regla y compás (cinco postulados de la geometría). Luego, Arquímedes amplió este problema, después de encontrar la solución de la cuadratura de algunas figuras planas no rectilíneas. Se debe agregar que una herramienta teórica que implementó para cuadrar figuras fue el método exhaustivo.

> El método exhaustivo se originó como respuesta a las paradojas surgidas en el tratamiento de los procesos infinitos. Utilizado ya desde la época de Eudoxo, el método exhaustivo se soporta sobre la proposición X.1 de los *Elementos.*
>
> **Proposición X.1** (*Elementos*). Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda, otra magnitud mayor que su mitad, y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas. (Recalde L. C., 2018, págs. 99-100)

Recalde (2018) considera que cada uno de los aportes de Arquímedes, sirvieron de base para matemáticos posteriores, especialmente para Bonaventura Cavalieri y Gottfried Leibniz. Estos matemáticos desarrollaron teorías que aportaron en la formación del cálculo moderno. Por esto, se conoce a Arquímedes como uno de los precursores del cálculo moderno.

Antes de finalizar con las generalidades históricas de los conceptos propuestos anteriormente, es pertinente mencionar, que todos ellos se encuentran íntimamente relacionados. Igualmente, se debe enfatizar que los desarrollos históricos permiten entender las definiciones de conceptos tan complejos y abstractos como los conceptos de límite, continuidad, series, convergencia de series y sucesiones, más aún, representan una fuerte herramienta teórica, que facilita la identificación de obstáculos epistemológicos.

2. Referente teórico.

La concepción de obstáculo epistemológico adoptado en este trabajo de práctica pedagógica, es una adaptación de la noción presentada por el francés Gastón Bachelard en su obra "La formación del espíritu científico: contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo" (Bachelard, 2000). A pesar de que este libro está dirigido hacia las ciencias experimentales, en particular para la física, muchos educadores de matemáticas, entre ellos Guy Brosseau, tomaron de allí la noción de obstáculo epistemológico y la ajustaron hasta obtener una versión propia de éste en el ámbito de las matemáticas.

De acuerdo con la noción de obstáculo epistemológico presentado por Bachelard, (2000) se tiene que:

> Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en término de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos (pág. 15).

Lo que significa que, en la construcción de la ciencia surge la necesidad de adquirir nuevos conocimientos científicos y, es en este proceso que surgen confusiones, entorpecimientos, estancamientos, debido a que las teorías primeramente establecidas, o las concepciones que se radican en la mente de los individuos, se transforman en barreras u obstáculos. Por ello, Bachelard, (2000)considera que:

> La idea de partir del cero para fundar y acrecentar sus bienes, no puede surgir sino en culturas de simple yuxtaposición en las que todo hecho conocido es inmediatamente una riqueza. Mas frente al misterio de lo real el alma no puede, por decreto, tornarse ingenua. Es entonces imposible hacer, de golpe tabla rasa de

> los conocimientos usuales. Frente a lo real, lo que cree saberse claramente ofusca lo que debería saberse (pág. 16).

Es decir, nunca se parte desde cero, sino que se tiene un conocimiento previo que se asume como correcto. En esta dirección el primer obstáculo que se debe superar es la opinión. Bachelard (2000) tiene como objetivo principal en su obra analizar la evolución de la ciencia. Para explicitar este hecho se debe entender que la palabra psicoanálisis hace referencia a un análisis retrospectivo de la mente, para observar cuestiones del subconsciente y así clarificar aspectos de la personalidad. En este sentido, utiliza el psicoanálisis, dado que hace un análisis retrospectivo de la historia para conocer cuáles son los elementos que hacen que la ciencia, en este caso la física, se haya retardado en su evolución, es decir, detectar cuáles son los obstáculos presentes en su desarrollo.

No obstante, dado que este trabajo de práctica pedagógica está enfocado en las matemáticas, es pertinente considerar la noción de obstáculo epistemológico que presentó Brosseau (2007) en su obra *"Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas"*. Según este autor, un obstáculo epistemológico es un conocimiento estable que funciona correctamente en ciertos ámbitos anteriores, pero que causa problemas cuando se lo intenta adaptar a nuevas situaciones. Éste conocimiento se presenta de manera universal y nunca desaparece a pesar de que se haya adquirido un nuevo conocimiento. En este punto, es importante tener presente el hecho de que el nuevo conocimiento no se adquiere a partir del obstáculo, sino que por el contrario se contrapone a él.

En relación con la noción de obstáculo presentada por Brosseau, se verifica desde la historia de las matemáticas que en la fase de apropiación de conceptos y procesos, que poseen implícitamente el infinito, se tienen obstáculos epistemológicos, tales como: no aceptación del infinito actual, aceptar como verdadera la afirmación de Euclides “el todo es mayor que las parte” para conjuntos infinitos, no admitir diferentes tipos de infinito y extender la aplicación de las propiedades de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos. Por otro lado, comprender conceptos como límite, continuidad, densidad, completez, series, convergencia de series y sucesiones, es complejo debido a que la noción de infinito se encuentra contenido en estos.

3. Metodología

Como se mencionó en la introducción, para verificar si el infinito representa un obstáculo epistemológico en la adopción de conceptos del análisis matemático, se diseñaron cuatro talleres, conformados entre cuatro a cinco ejercicios, enfocados en los siguientes temas: el infinito actual; continuidad, límites, series y sucesiones.

Antes de presentar los objetivos específicos de cada taller, el número de estudiantes que participaron fue:

- Taller 1: ocho estudiantes.
- Taller 2: doce estudiantes.
- Talleres 3 y 4: diez estudiantes.

Los dos primeros talleres (Anexo 2) tienen como objetivo verificar si las concepciones del infinito que tienen los estudiantes, se pueden catalogar como un concepto matemático, como un concepto metafísico o como un proceso, asimismo evidenciar si ellos consideran al infinito en sentido potencial. Se busca comprobar si en sus respuestas se evidencian obstáculos epistemológicos al considerar como verdadera la afirmación de Euclides para conjuntos infinitos y no aceptar distintos tipos de infinitos y, si estos obstáculos a su vez, dificultan la comprensión de relaciones biunívocas entre conjuntos infinitos y las diferencias entre las nociones topológicas de densidad y completez.

El tercer taller (Anexo 3) tiene como propósito evidenciar si los participantes aplican propiedades de los conjuntos finitos hacia los conjuntos infinitos y si entienden los conceptos de límite, serie y convergencia de una serie.

El cuarto taller (Anexo 4) rectifica si los alumnos tienen claridad sobre las definiciones de límite, continuidad y convergencia de una sucesión.

La formulación de los puntos de los talleres se basó en una rejilla analítica, en la que se plantearon algunos obstáculos epistemológicos que se pueden evidenciar desde la historia de las matemáticas, y unos referentes teóricos estudiados en los libros: "Infinitos Infinitos" (Arrigo, 2011), "¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales" (Stewart, 2002), "¿Qué son y para qué sirven los números?" (1888).

Antes de mostrar la rejilla analítica, se presentará las generalidades históricas de ciertos obstáculos que la conforman. Para comenzar, entender el concepto de infinito en el sentido potencial y aceptar como verdadera la afirmación de Euclides "el todo es mayor que la parte" para conjuntos infinitos, representa una dificultad para comparar con respecto al número de elementos de conjuntos infinitos, pues se puede pensar que un conjunto infinito es mayor que otro, si existe una contenencia propia entre ellos.

Los ejemplos 1 y 2 son una verificación de lo anterior y, fueron extraídos de los textos: "¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales" (Stewart, 2002) y "Infinitos Infinitos" (Arrigo, 2011), respectivamente.

Ejemplo 1: los conjuntos (0,1) y R, tienen el mismo número de elementos.

Ejemplo 2: los números naturales y el conjunto de los números naturales pares, tienen el mismo número de elementos.

Si en el primer caso se asume al infinito en el sentido potencial, o sea “sin límites” será complejo comprender que (0,1) y R son equipotentes, dado que (0,1) es un conjunto acotado y por lo tanto no cumple con la caracterización de ser ilimitado. Si en el segundo caso se supone como verdadera la afirmación “el todo es mayor que la parte”, es posible que se piense dicha consideración como falsa, puesto que el conjunto de los números naturales pares es un subconjunto propio del conjunto de números naturales.

En los ejemplos anteriores se pone en evidencia parte del trabajo de Cantor, quien definió la “igualdad” en el número de elementos entre conjuntos infinitos, a través de la existencia de una función biyectiva que los relacione.

En general, se evidencia que resulta complejo comprender la existencia de funciones biyectivas entre algunos conjuntos infinitos, debido a que la intuición no tiene lugar en este proceso. Para ello, se requiere de una lógica meramente matemática, la cual permite dominar conceptos tan complejos como el infinito.

De acuerdo con las investigaciones referenciadas en el libro Infinitos infinitos (Arrigo, 2011), se evidencia que las convicciones que tienen los estudiantes de distintos niveles de escolaridad (preescolar, primaria y bachillerato) y los profesores de Educación media sobre el infinito, no varían considerablemente. Tal vez, este hecho radica en que no se ha dado suficiente importancia al estudio y profundización del infinito matemático. Según los resultados de este texto, las convicciones de los estudiantes y profesores sobre el infinito, se pueden clasificar en las categorías de Sbaragli, (2004):

a. Infinito como ilimitado.

b. Infinito como indefinido.

c. Como algo finito muy grande.

d. Infinito como un proceso potencialmente interminable.

Con estas categorías se consigue evidenciar si los estudiantes consideran al infinito en el sentido potencial. Más aun, es posible clasificar si las concepciones que tienen los estudiantes sobre el infinito se pueden catalogar como un concepto matemático, como un concepto metafísico o como un proceso.

Por otra parte, el concepto de límite de una función es uno de los pilares fundamentales del análisis matemático, dado que la gran mayoría de definiciones, teoremas y teorías en las que el análisis matemático se sustenta, tienen como base la noción de límite. Según Arbeláez (2011) a comienzos del siglo XIX con Cauchy se dio el paso fundamental de la aritmetización del análisis, ya que él concretó la definición de límite en términos estrictamente numéricos, con ello y con otros aportes se logró obtener una estructura "manejable" para abordar los diferentes elementos que rodean esta rama de las matemáticas, permitiendo así que gran cantidad de vacíos conceptuales, aparición de ciertas paradojas (como las paradojas de Zenón) y contradicciones que surgían en el tratamiento del infinito empezarán a ser superadas.

En cuanto a los temas que se trabajan frecuentemente en los cursos de cálculo, encontramos las series numéricas; para lograr entender estas sumas infinitas se debe llegar al concepto de convergencia bajo el cual subyace el concepto de límite, como también la convergencia de sucesiones.

"Una serie numérica

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se llama **convergente**, si su suma parcial

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

Tiene límite cuando n → ∞” (Demidovich, 1967).

Históricamente se vio la dificultad de concebir la suma de series con la suma literal infinita o, dicho de otro modo, de aplicar las mismas propiedades de los conjuntos finitos a los infinitos. Como por ejemplo: la propiedad asociativa, distributiva, conmutativa, entre otras; pero, en los conjuntos infinitos, las propiedades que funcionan correctamente en los conjuntos finitos, no necesariamente se cumplen para los conjuntos infinitos. Por ejemplo, en la siguiente serie numérica.

$$s_n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \cdots$$

Bolzano demostró que si se aplica las propiedades asociativa y conmutativa, se podría tener que

$$s_n = \ 1 - 1 \ + \ 1 - 1 \ + \cdots = 0$$

$$s_n = 1 + \ -1 + 1 \ + \ -1 + 1 \ + \cdots = 1$$

$$s_n = \ 1 + 1 \ + \ 1 - 1 \ + \ 1 - 1 \ + \cdots = 2,$$

y así, sucesivamente se obtendría que $s_n = x, x \in N$. Siendo una respuesta incorrecta porque la serie es divergente.

Este caso se asocia con el obstáculo epistemológico, al considerar los procesos infinitos como “extensiones” de los procesos finitos. La solución de este problema se da cuando se instaura el infinito actual.

Finalmente, para identificar los obstáculos epistemológicos del infinito presentes en las respuestas de los estudiantes al realizar cada taller, se diseñó una rejilla analítica, como instrumento de visualización. Para ello, con base en fenomenologías problemáticas, históricas del desarrollo de las matemáticas se formularon categorías que permitieron leer los argumentos de los estudiantes y detectar posibles obstáculos.

Las categorías son las siguientes: concepciones sobre el infinito, comparación de conjuntos finitos o infinitos, concepciones sobre lo finito y concepciones sobre R como el continuo lineal. Cada una de las cuales abarca obstáculos epistemológicos específicos, que son los precedentes:

- Concepciones sobre el infinito:
  - El todo es mayor las partes
  - Lo infinito como una extensión de lo finito.
  - Hay un único infinito o diversos infinitos.
  - Representación de lo infinito como un concepto metafísico, como un proceso o como una entidad matemática.
  - Lo infinito como un concepto contrapuesto a lo finito.
  - Que es una suma finita.
- Comparación de conjuntos finitos o infinitos:
  - Qué herramienta matemática o heurística aparece en la comparación de conjuntos finitos.
  - Qué herramienta matemática o heurística aparece en la comparación de conjuntos finitos.
- Concepciones sobre lo finito:
  - Lo que es susceptible de contar.
  - Lo finito como un concepto contrapuesto a lo infinito.
- Concepciones sobre R como el continuo lineal:
  - Diferenciación entre las nociones topológicas de densidad y completez.
  - Relaciones entre los conceptos de convergencia, continuidad y límite.

Una vez clasificadas las respuestas a partir de estas categorías se procede a:

4. Análisis de resultados

Los resultados presentan de manera sintética algunos de los obstáculos epistemológicos encontrados en el desarrollo de los talleres, así como una serie de evidencias físicas de cada uno de estos, frente a los cuales se presentarán algunas observaciones y comentarios.

Los siguientes son los obstáculos epistemológicos que se pueden detallar en la lectura de las respuestas de cada taller:

4.1 El todo es mayor que la parte:

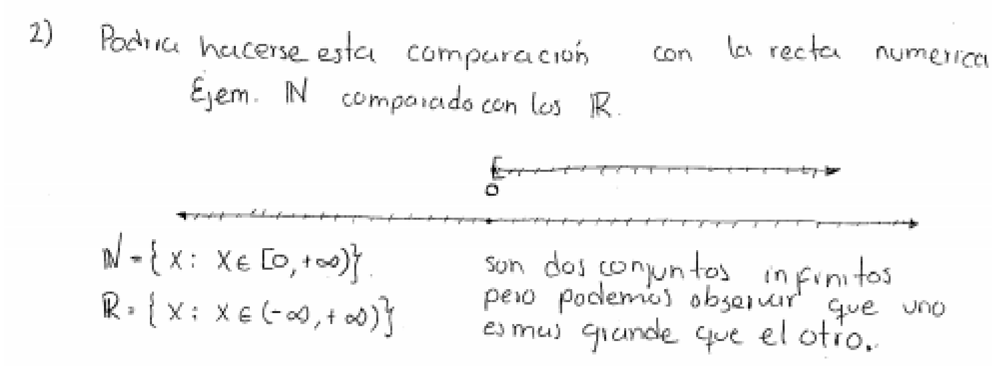
Exceptuando al estudiante E13, se puede afirmar que los estudiantes que desarrollaron los talleres 1 y 2, aceptan como verdadera la afirmación de Euclides para conjuntos infinitos, lo que se pude verificar en las respuestas de los puntos 2, 4, 5 y 6 del taller 1(imágenes 1, 2, y 3), y en los puntos 4, 5 y 6 del taller 2 (imágenes 4, 5, y 6).

Algunas evidencias de lo anterior son:

Respuestas del estudiante E9:

<u>Taller 1, punto 2:</u>

Argumente matemáticamente cómo se pueden comparar, con respecto al “numero” de elementos dos conjuntos infinitos.



2) Podría hacerse esta comparación con la recta numerica.
Ejem. $\mathbb{N}$ comparado con los $\mathbb{R}$.

0

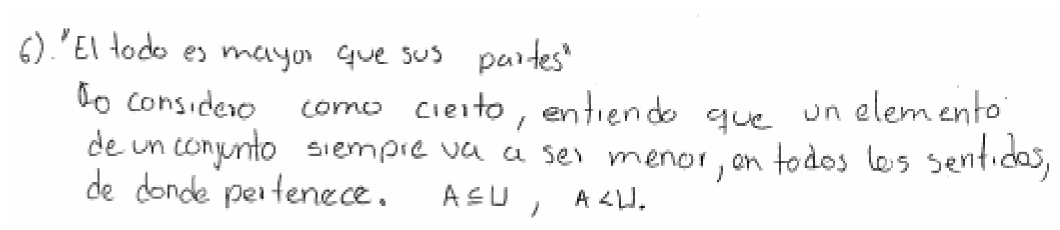
$\mathbb{N} = \{ x : x \in [0, +\infty)\}$.
$\mathbb{R} = \{ x : x \in (-\infty, +\infty)\}$

son dos conjuntos infinitos pero podemos observar que uno es mas grande que el otro.

Imagen 1. Respuesta de estudiante E9

Taller 1, punto 6:

Cuál es su interpretación de la afirmación: "El todo es mayor que sus partes"



6). "El todo es mayor que sus partes"
Lo considero como cierto, entiendo que un elemento de un conjunto siempre va a ser menor, en todos los sentidos, de donde pertenece. $A \subseteq U$, $A < U$.

Imagen 2. Respuesta de estudiante E9

Respuestas del estudiante E6:

Taller 1, punto 4 y 5:

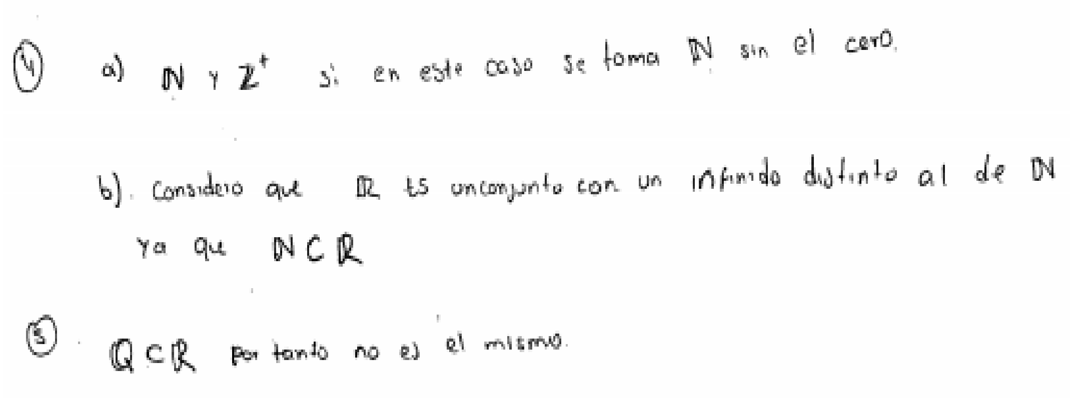
4. Considere la siguiente lista de conjuntos:

- N
- Z
- Z^-
- 0,1
- $\{\frac{1}{n}\}_{n \in N}$
- R
- Q
- 3,4

a) Determine cuáles de los anteriores conjuntos tienen el mismo infinito que el conjunto de los números Naturales.

b) Indique si hay un conjunto con un infinito distinto al conjunto de los números Naturales. Justifique su respuesta.

5. ¿Puede establecer si el infinito de los números Racionales y el infinito de los números Reales es el mismo?


4 a) $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^+$ si en este caso se toma $\mathbb{N}$ sin el cero.

b). Considero que $\mathbb{R}$ es unconjunto con un infinito distinto al de $\mathbb{N}$ ya que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

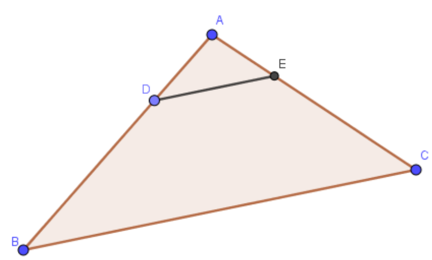
5. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ por tanto no es el mismo.

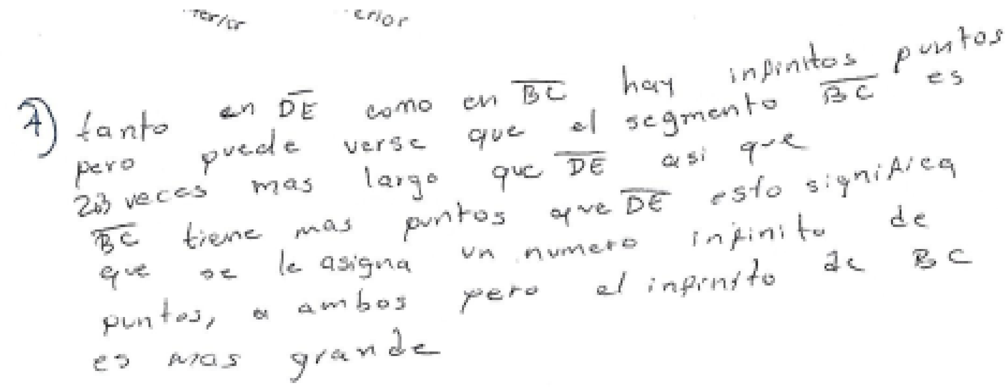
Imagen 3. Respuesta de estudiante E6

Respuestas del estudiante E1:

Taller 2, punto 4:

En la siguiente figura, determine en cuál de los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ hay más puntos.



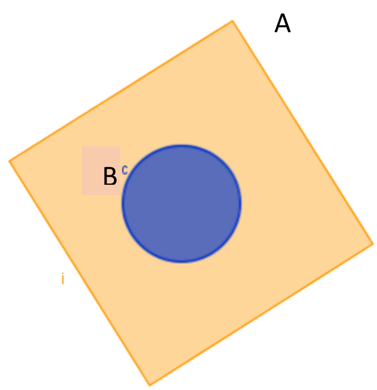


4) tanto en $\overline{DE}$ como en $\overline{BC}$ hay infinitos puntos pero puede verse que el segmento $\overline{BC}$ es 2.3 veces mas largo que $\overline{DE}$ asi que $\overline{BC}$ tiene mas puntos que $\overline{DE}$ esto significa que se le asigna un numero infinito de puntos, a ambos pero el infinito de BC es mas grande

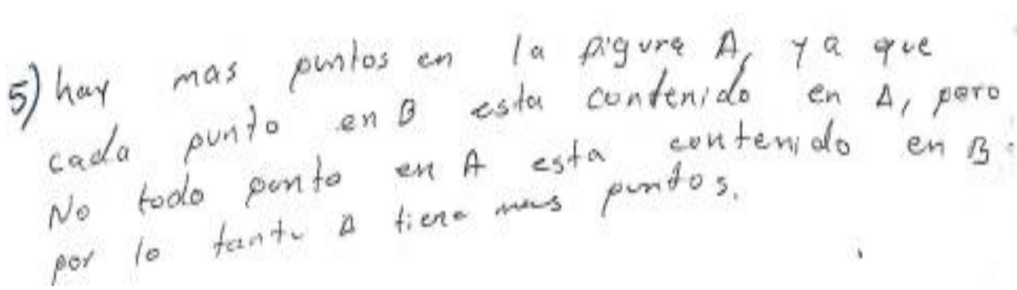
Imagen 4. Respuesta de estudiante E1

Taller 2, punto 5:

Considere las figuras geométricas A y B:



Determine, argumentando su respuesta, en cuál de las figuras A y B hay más puntos.



5) hay mas puntos en la figura A, ya que cada punto en B esta contenido en A, pero No todo punto en A esta contenido en B. por lo tanto A tiene mas puntos.

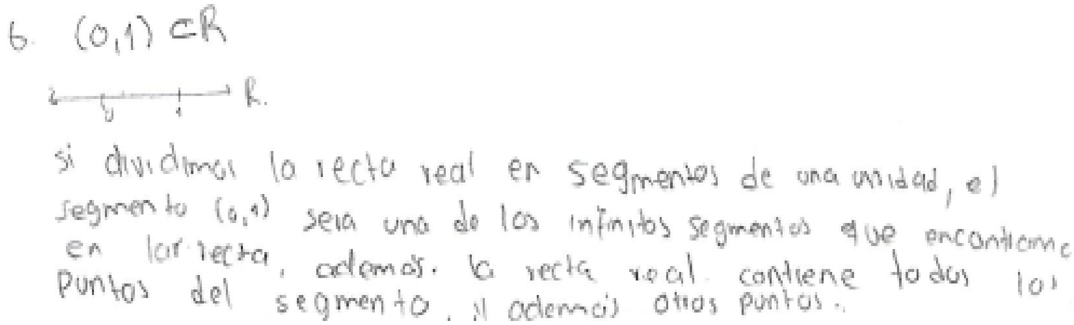
Imagen 5. Respuesta de estudiante E1

Respuesta del estudiante E7:

Taller 2, punto 6:

Escriba una interpretación del siguiente enunciado:

Dado que el conjunto $(0,1) \sqsubset R$, se tiene que el número de elementos de (0,1) es menor que el número de elementos de R.


6. $(0,1) \subset R$

si dividimos lo recta real en segmentos de una unidad, el segmento (0,1) seia una de los infinitos segmentos que encontiamos en la recta, ademas. la recta real contiene todos los puntos del segmento. y ademas otros puntos.

Imagen 6. Respuesta de estudiante E7

4.2 Hay un único o diversos infinitos:

En el punto 4 del taller 1, se constata que el estudiante E13 no acepta diferentes tipos de infinitos (imagen 7).

Tres participantes del taller 1 y 2, no tienen una postura definida sobre si existen diversos o un único infinito, pues sus repuestas son contradictorias, como se ve en las imágenes 8, 9 y 10.

En el taller 2 se observa que seis estudiantes aceptan sólo un infinito, lo que se puede comprobar en los puntos 4,5 y 6 (Imágenes 9 y 10).

Respuestas del estudiante E13:

Taller 1, punto 4, ítems (a) y (b):

Considere la siguiente lista de conjuntos:

- N
- Z
- Z^{-}
- 0,1
- $\{\frac{1}{n}\}_{n\in N}$
- R
- Q
- 3,4

a) Determine cuáles de los anteriores conjuntos tienen el mismo infinito que el conjunto de los números Naturales.

b) Indique si hay un conjunto con un infinito distinto al conjunto de los números Naturales. Justifique su respuesta.

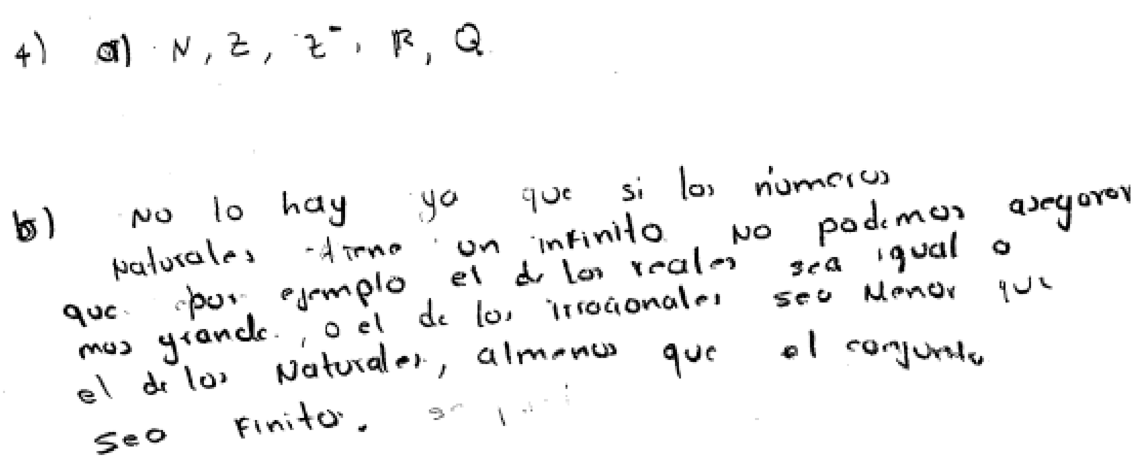


Imagen7 . Respuestas del estudiante E13

Respuestas del estudiante E10:

Taller 1, punto 4 ítem (b):

Considere la siguiente lista de conjuntos:

- N
- Z
- Z^{-}
- $\{\frac{1}{n}\}_{n\in N}$
- R
- Q

- 0,1
- 3,4

b) Indique si hay un conjunto con un infinito distinto al conjunto de los números Naturales. Justifique su respuesta.

b). Si hay conjuntos con un infinito distinto al conjunto de los numeros Naturales, entre estos tenemos

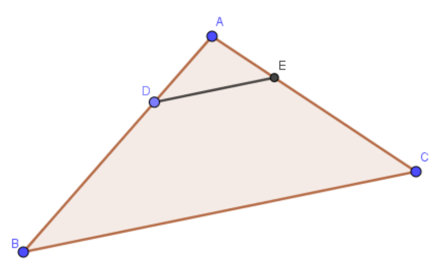
• Z , • [0,1] , • R • Q • (3,4).

Estos conjuntos son infinitos distintos al conjunto de numeros naturales ya que son infinitos mas grandes y tienen mayor cantidad de elementos que el conjunto de los naturales.

Imagen 8. Respuestas del estudiante E10

Taller 2, punto 4:

En la siguiente figura, determine en cuál de los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ hay más puntos.



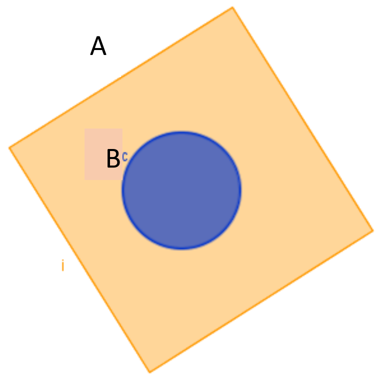
4) de los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ no se puede decir cual tiene mas puntos ya que estos segmentos tienen infinitos puntos y son segmentos que estan contenidos en la recta real.

Imagen 9. Respuestas del estudiante E10

Respuestas del estudiante E3:

Taller 2, puntos 5 y 6:

5. Considere las figuras geométricas A y B:



Determine, argumentando su respuesta, en cuál de las figuras A y B hay más puntos.

6. Escriba una interpretación del siguiente enunciado:

Dado que el conjunto $(0,1) \sqsubset R$, se tiene que el número de elementos de $(0,1)$ es menor que el número de elementos de R.

5 De acuerdo a las figuras $B \subseteq A$, y A podríamos tomarlo como un conjunto infinito al igual que B pero como por hipótesis $B \subseteq A$ entonces A tiene más puntos que B.

6.

El enunciado es falso, ya que como nombramos en el primer punto entre $(0,1)$ existen infinitos puntos y en el conjunto de los reales encontramos infinitos puntos, por lo tanto, el intervalo $(0,1)$ no es menor que $\mathbb{R}$.

Imagen 10. Respuestas del estudiante E3

4.3 Representación de lo infinito como un concepto metafísico, como un proceso o como una entidad matemática, el infinito como un concepto contrapuesto a lo finito, lo finito como un concepto contrapuesto a lo infinito y lo que es susceptible de contar:

En las repuestas de las preguntas 1 y 8 del taller 1, se nota que 8 estudiantes consideran al infinito y lo finito como conceptos contrarios, ya que identifican al infinito con la cualidad de ser ilimitado y lo finito lo caracterizan con la propiedad de ser limitado. Por ende, afirman que lo susceptible de contar es lo finito porque tiene un fin, lo que permite determinar una cantidad numérica.

Unas evidencias de lo anterior se ven en las imágenes 11-14

Respuestas del estudiante E4:

Taller 1, punto 1:

A través de un argumento, determine si el conjunto de granos de arena del planeta tierra es finito o infinito.

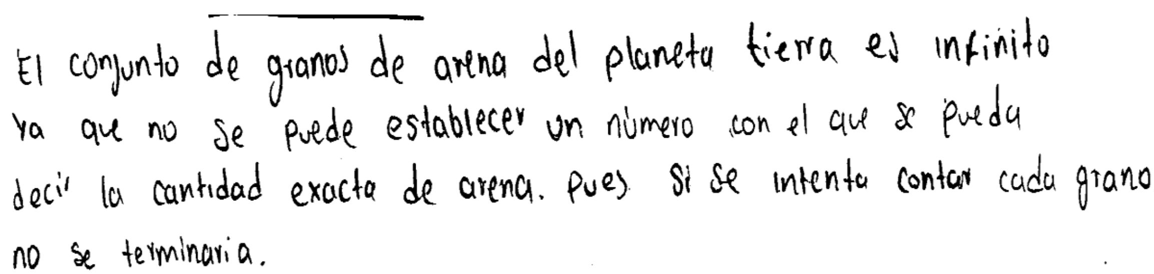

El conjunto de granos de arena del planeta tierra es infinito ya que no se puede establecer un número con el que se pueda decir la cantidad exacta de arena. pues si se intenta contar cada grano no se terminaria.

Imagen 11. Respuestas del estudiante E4

Taller 1, punto 8:

Para usted ¿qué es el infinito? ¿Cómo lo representa matemáticamente?

(8) El infinito es lo que no se puede restringir, es decir puedo intentar trabajar con algunos valores pero luego se llega a crecer tanto, que vo o ser dificil trabajar con ellos.

Imagen 12. Respuestas del estudiante E4

Respuestas del estudiante E9:

Taller 1, punto 1:

A través de un argumento, determine si el conjunto de granos de arena del planeta tierra es finito o infinito.

Es finito, entiendo como un conjunto finito al que se le puede determinar la cantidad de elementos que lo integran.

Para el conjunto de granos de arena este proceso puede ser complicado y parecer imposible, pero a comparación de otros conjuntos, el proceso de conteo si se puede realizar.

Imagen 13. Respuestas del estudiante E9

Taller 1, punto 8:

Para usted ¿qué es el infinito? ¿Cómo lo representa matemáticamente?

El infinito, matematicamente es algo que no es finito, entonces algo que no se puede contar cuantes elementos lo integran.

$[0, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$

Para mi infinito es algo que al tomar muchas direcciones no sale del conjunto.

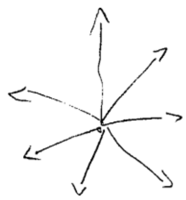


Imagen 14. Respuestas del estudiante E9

4.4 Qué herramienta matemática o heurística aparece en la comparación de conjuntos infinitos:

En general, se observa que los estudiantes no tienen claridad sobre cómo comparar con respecto al número de elementos conjuntos infinitos, ya que todos ellos se basan en la intuición para hacerlo, esto se comprueba las evidencias de los ítems 5.1 y 5.2, y en las imágenes 15 y 16.

No obstante, algunos participantes mencionan que dos conjuntos infinitos son iguales cuando se puede establecer una función biyectiva entre ellos (imágenes 17 y 19), pero se puede demostrar que ellos no tienen claridad sobre este concepto (imágenes 18 y 20).

Respuesta del estudiante E10:

Taller 1, punto 2:

Argumente matemáticamente cómo se pueden comparar, con respecto al “numero” de elementos dos conjuntos infinitos.

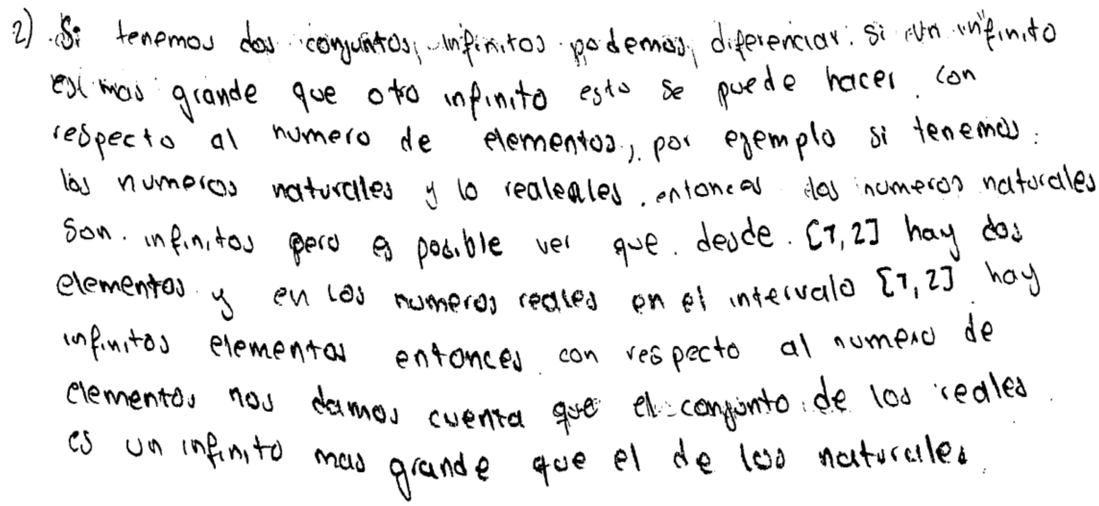

2) Si tenemos dos conjuntos infinitos podemos diferenciar si un infinito es mas grande que otro infinito esto se puede hacer con respecto al numero de elementos, por ejemplo si tenemos los numeros naturales y lo reales, entonces los numeros naturales son infinitos pero es posible ver que desde [1,2] hay dos elementos y en los numeros reales en el intervalo [1,2] hay infinitos elementos entonces con respecto al numero de elementos nos damos cuenta que el conjunto de los reales es un infinito mas grande que el de los naturales.

Imagen 15. Respuestas del estudiante E10

Respuesta del estudiante E2:

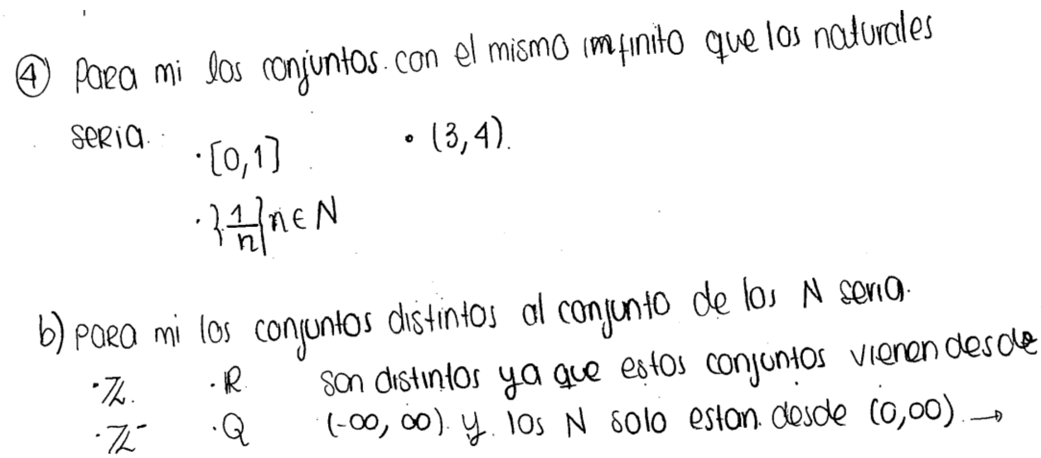
Taller 1, punto 4, ítems (a)-(b):

Considere la siguiente lista de conjuntos:

- N
- Z
- Z^{-}
- 0,1
- $\{\frac{1}{n}\}_{n\in N}$
- R
- Q
- 3,4

a) Determine cuáles de los anteriores conjuntos tienen el mismo infinito que el conjunto de los números Naturales.

b) Indique si hay un conjunto con un infinito distinto al conjunto de los números Naturales. Justifique su respuesta.



④ Para mi los conjuntos con el mismo infinito que los naturales seria.

- $[0,1]$
- $(3,4)$.
- $\{\frac{1}{n} | n \in N\}$

b) para mi los conjuntos distintos al conjunto de los N seria.

- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}^-$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Q}$

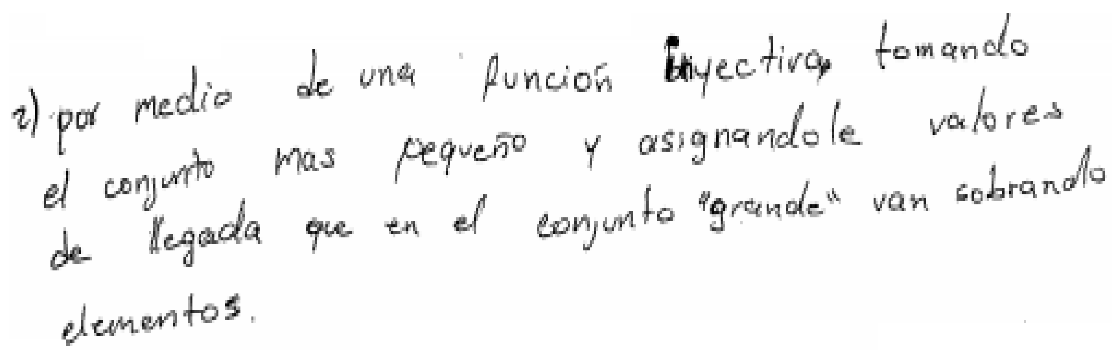
son distintos ya que estos conjuntos vienen desde $(-\infty, \infty)$ y los N solo estan desde $(0,\infty)$ →

Imagen 16. Respuestas del estudiante E2

Respuesta del estudiante E1:

Taller 1, punto 2:

Argumente matemáticamente cómo se pueden comparar, con respecto al “numero” de elementos dos conjuntos infinitos.

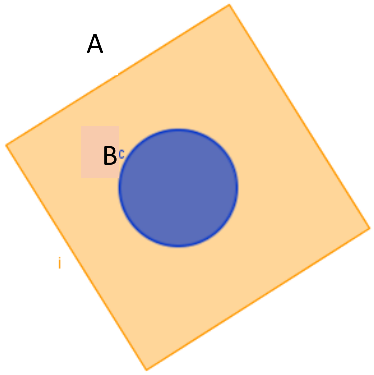


2) por medio de una función biyectiva tomando el conjunto mas pequeño y asignandole valores de llegada que en el conjunto "grande" van sobrando elementos.

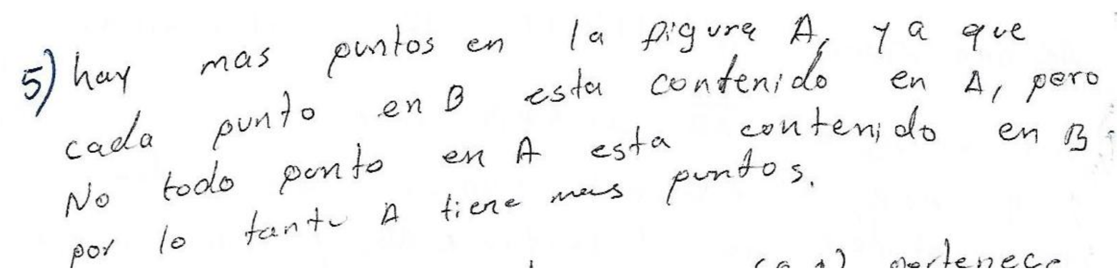
Imagen 17. Respuestas del estudiante E1

Taller 2, punto 5:

Considere las figuras geométricas A y B:



Determine, argumentando su respuesta, en cuál de las figuras A y B hay más puntos.



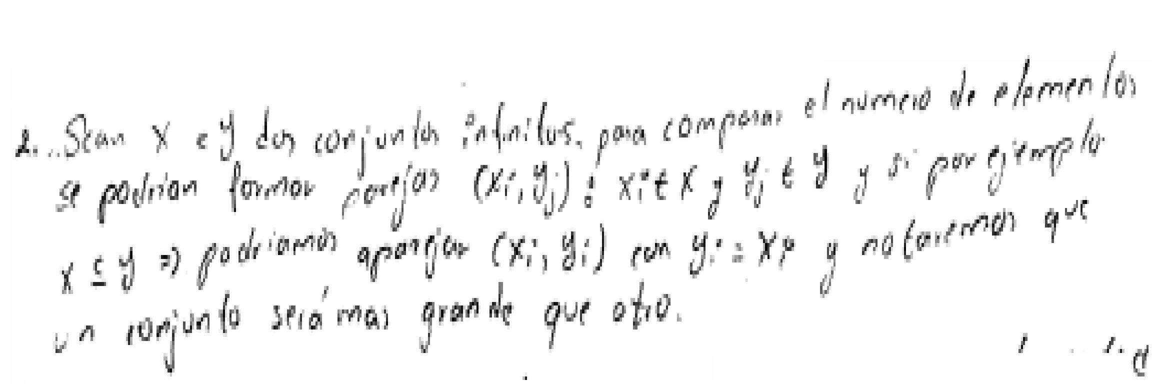
5) hay mas puntos en la figura A, ya que cada punto en B esta contenido en A, pero No todo punto en A esta contenido en B; por lo tanto A tiene mas puntos.

Imagen 18. Respuestas del estudiante E1

Respuesta del estudiante E4:

Taller 1, punto 2:

Argumente matemáticamente cómo se pueden comparar, con respecto al "numero" de elementos dos conjuntos infinitos.



2. Sean X e Y dos conjuntos infinitos, para comparar el numero de elementos se podrían formar parejas (x_i, y_j): $x_i \in X$ y $y_j \in Y$ y si por ejemplo $X \leq Y \Rightarrow$ podriamos aparejar (x_i, y_i) con $y_i = x_p$ y notaremos que un conjunto sería mas grande que otro.

Imagen 19. Respuestas del estudiante E4

Taller 2, punto 6:

Escriba una interpretación del siguiente enunciado:

Dado que el conjunto (0,1)⊏ R, se tiene que el número de elementos de (0,1) es menor que el número de elementos de R.

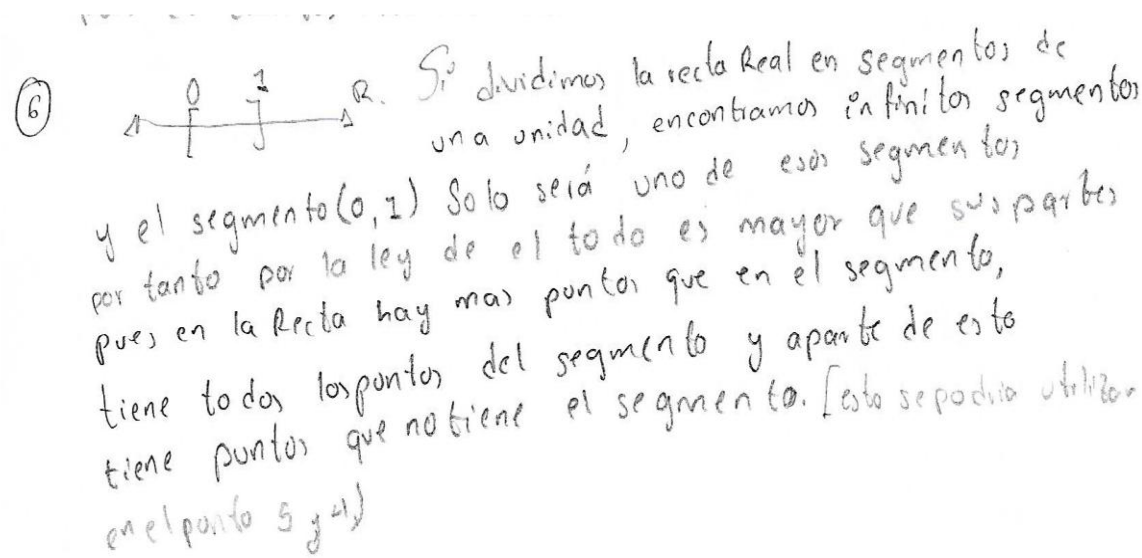

(6) 0 1 R. Si dividimos la recta Real en segmentos de una unidad, encontramos infinitos segmentos y el segmento (0,1) Solo será uno de esos segmentos por tanto por la ley de el todo es mayor que sus partes pues en la Recta hay mas puntos que en el segmento, tiene todos los puntos del segmento y aparte de esto tiene puntos que no tiene el segmento. [esto se podría utilizar en el punto 5 y 4)

Imagen 20. Respuestas del estudiante E4

4.5 Qué herramienta matemática o heurística aparece en la comparación de conjuntos finitos:

Ocho participantes del taller 1 manejan una herramienta matemática para comparar conjuntos finitos, debido a que ellos utilizan el concepto de cardinalidad de un conjunto finito. Este hecho, se evidencia en las imágenes 21 y 22.

Respuesta del estudiante E4:

Taller 1, punto 3:

Exprese matemáticamente cuándo dos conjuntos finitos tienen el mismo número de elementos. Cite un ejemplo de dos conjuntos finitos con el mismo número de elementos.

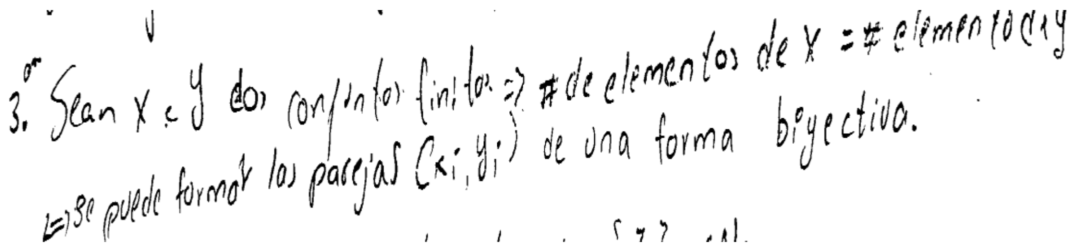
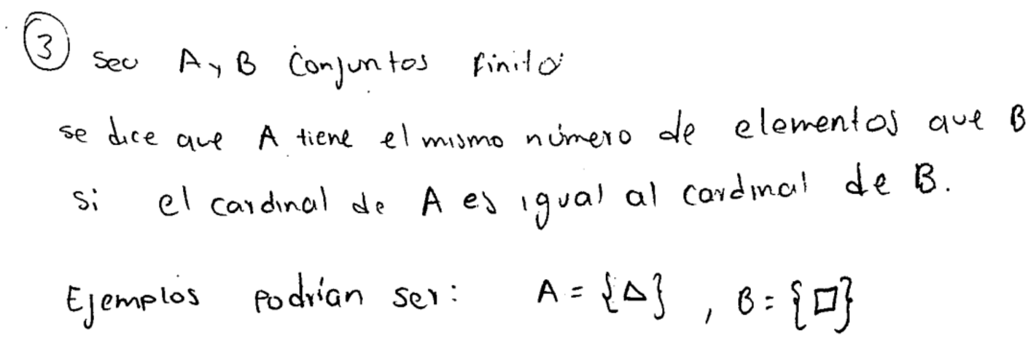

3. Sean X e Y dos conjuntos finitos ⇒ # de elementos de X = # elementos de Y ⇔ se puede formar las parejas (x_i, y_i) de una forma biyectiva.

Imagen 21. Respuestas del estudiante E4

Respuesta del estudiante E6:

Taller 1, punto 3:

Exprese matemáticamente cuándo dos conjuntos finitos tienen el mismo número de elementos. Cite un ejemplo de dos conjuntos finitos con el mismo número de elementos.


③ sea A y B Conjuntos finitos

se dice que A tiene el mismo número de elementos que B.

si el cardinal de A es igual al cardinal de B.

Ejemplos podrían ser: A = {△} , B = {□}

Imagen 22. Respuestas del estudiante E6

4.6 Diferencias entre las nociones topológicas de densidad y completez:

En el taller 1, se observa que a siete estudiantes tienen una noción confusa de la propiedad de completez que posee R, en vista de que, en las respuestas de la pregunta siete se basan en intuiciones (imágenes 24 y 25). También, tres estudiantes de esta sesión definen a N, Q y R así: N = $0, \infty$, $Q = -\infty, \infty$ y R = $-\infty, \infty$ como se evidencian en las imágenes 1 y 23.

De los puntos 1 y 2 del taller 2, no se puede inferir si seis participantes tienen claridad sobre la propiedad de densidad que posee un segmento, porque dados dos puntos solo consideran el punto medio (imágenes 26 y 27). Más aun, tres de ellos no responden.

Respuesta del estudiante E8:

Taller 1, puntos 4 y 5:

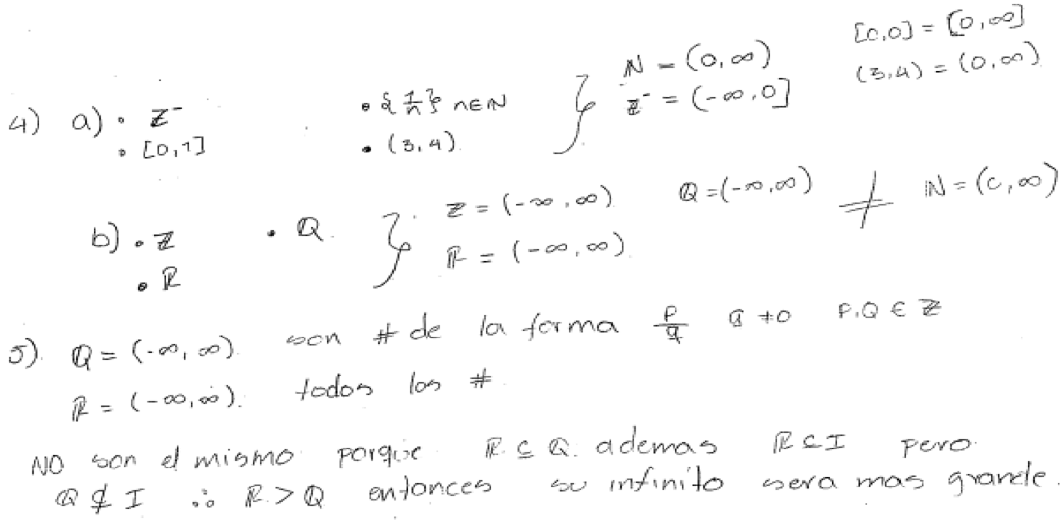
4. Considere la siguiente lista de conjuntos:

- N
- Z
- Z^{-}
- 0,1
- $\{\frac{1}{n}\}_{n\in N}$
- R
- Q
- 3,4

a) Determine cuáles de los anteriores conjuntos tienen el mismo infinito que el conjunto de los números Naturales.

b) Indique si hay un conjunto con un infinito distinto al conjunto de los números Naturales. Justifique su respuesta.

5. Puede establecer si el infinito de los números Racionales y el infinito de los números Reales es el mismo?



4) a) • $\mathbb{Z}^-$ • $\{\frac{1}{n}\}$ $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} = (0, \infty)$ $[0,0] = [0,\infty]$
• $[0,1]$ • $(3,4)$ $\mathbb{Z}^- = (-\infty, 0]$ $(3,4) = (0,\infty)$

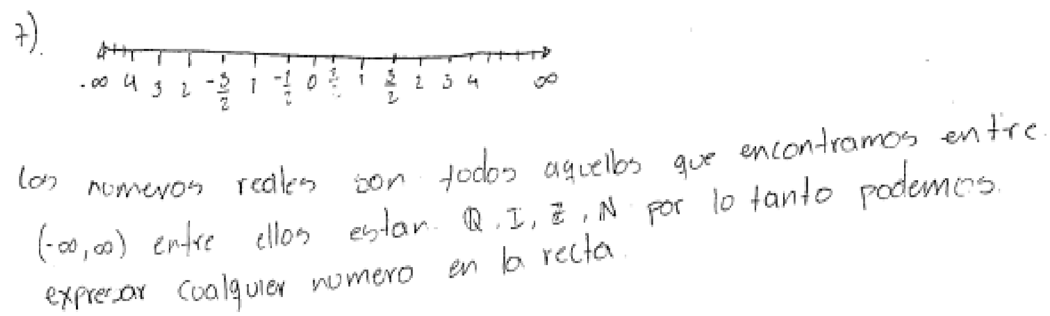
b) • $\mathbb{Z}$ • $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z} = (-\infty, \infty)$ $\mathbb{Q} = (-\infty, \infty)$ $\neq$ $\mathbb{N} = (0, \infty)$
• $\mathbb{R}$ $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

5). $\mathbb{Q} = (-\infty, \infty)$ son # de la forma $\frac{p}{q}$ $q \neq 0$ $p, q \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. todos los #
NO son el mismo porque $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q}$. ademas $\mathbb{R} \subseteq I$ pero $\mathbb{Q} \not\subseteq I$ $\therefore$ $\mathbb{R} > \mathbb{Q}$ entonces su infinito sera mas grande.

Imagen 23. Respuestas del estudiante E8

Taller 1, punto 7:

En muchos libros de cálculo se dice que los números Reales llenan la recta real. Represente geométricamente esta afirmación y argumente su interpretación.



7). $-\infty$ 4 3 2 $-\frac{3}{2}$ 1 $-\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$ 2 3 4 ∞

los numeros reales son todos aquellos que encontramos entre $(-\infty, \infty)$ entre ellos estan $\mathbb{Q}, I, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ por lo tanto podemos expresar cualquier numero en la recta.

Imagen 24. Respuestas del estudiante E8

Respuesta del estudiante E13:

Taller 1, punto 7:

En muchos libros de cálculo se dice que los números Reales llenan la recta real. Represente geométricamente esta afirmación y argumente su interpretación.

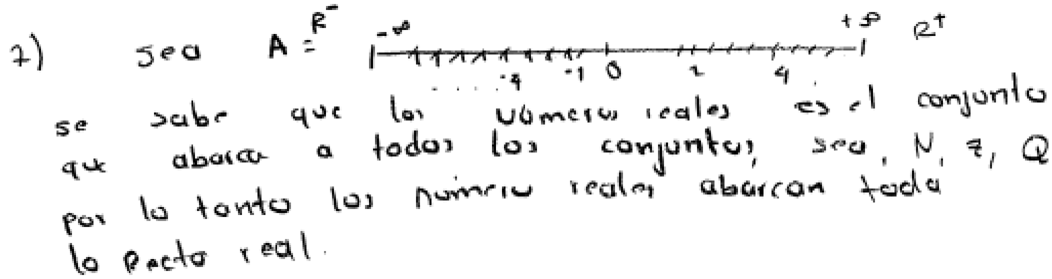


Imagen 25. Respuestas del estudiante E13

Respuesta del estudiante E5:

Taller 2, punto 1:

Argumente por qué, en un segmento AB existen infinitos puntos.

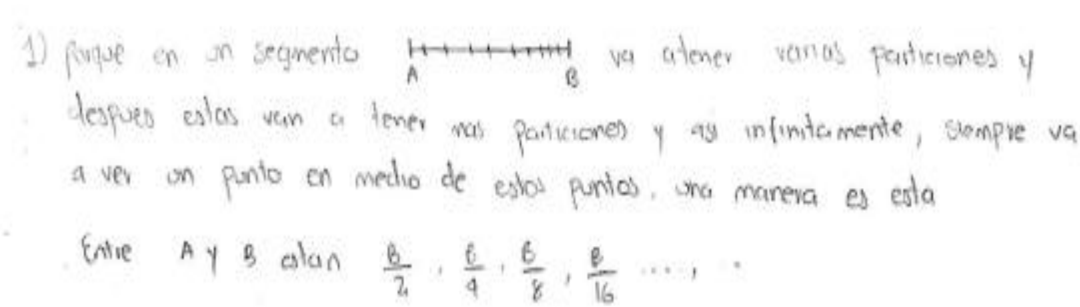


Imagen 26. Respuesta del estudiante E5

Respuesta del estudiante E7:

Taller 2, punto 2:

Divida un segmento en número infinito de partes.

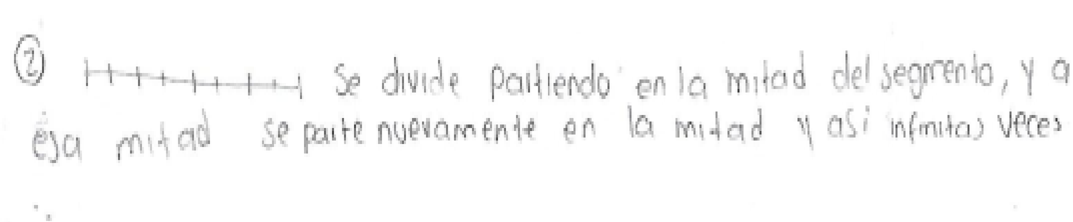


Imagen 27. Respuesta del estudiante E7

4.7 Lo infinito como extensión de lo finito y que es una suma infinita:

En el punto 3 del taller 3, se observa que los estudiantes presentan confusiones en el concepto de serie y convergencia de series, puesto que, algunos de ellos afirman que no se puede calcular una suma infinita (imagen 29) y otros a su vez, aplican propiedades de los conjuntos finitos hacia los conjuntos infinito para determinar el valor de la serie divergente (imagen 28).

En el punto 4 del taller 3, se nota que los participantes no claridad sobre el concepto de convergencia de una serie numérica, como se evidencia en la imagen 30.

Respuesta del estudiante E4:

Taller 3, punto 3:

Considere la siguiente suma infinita

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Determine (si es posible) el valor de dicha suma. Justifique su respuesta.

3) $(1-1)+1-1+\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(-1), \quad \text{Si } n \text{ par} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(-1) = 0.$$

$$\text{Si } n \text{ impar} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(-1) = 1.$$

Imagen 28. Respuesta del estudiante E4

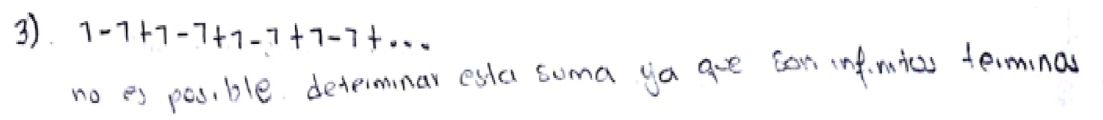
Respuesta del estudiante E10:

Taller 3, punto 3:

Considere la siguiente suma infinita

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Determine (si es posible) el valor de dicha suma. Justifique su respuesta.



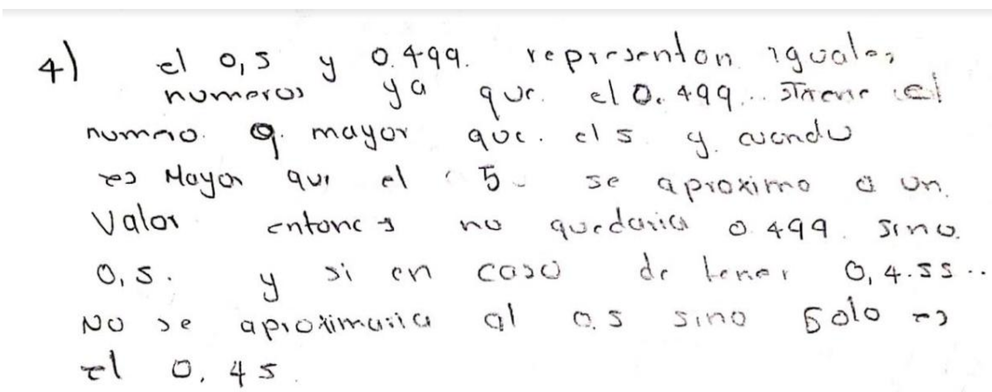
3) 1-1+1-1+1-1+1-1+...
no es posible determinar esta suma ya que son infinitos terminos

Imagen 29. Respuesta del estudiante E10

Respuesta del estudiante E13:

Taller 3, punto 4:

¿Representan el mismo número las siguientes expresiones: 0,5 y 0,4999…? Justifique.



4) el 0,5 y 0.499. representan iguales numeros ya que el 0.499... tiene el numero 9 mayor que el 5 y cuando es Mayor que el 5 se aproximo a un Valor entonces no quedaria 0.499 sino 0,5. y si en caso de tener 0,4.55.. No se aproximaria al 0.5 sino solo es el 0,45.

Imagen 30. Respuesta del estudiante E13

4.8 Relaciones entre los conceptos de convergencia, continuidad y límite:

De los talleres 3 y 4, en general se constata que los estudiantes tienen falencias en la fundamentación teórica de los cursos básicos, por ende, presentan confusiones en los conceptos de límite, continuidad, serie y convergencia, más aun, no los relacionan (imágenes 31-33).

Respuestas del estudiante E9:

Taller 3, puntos 1, 2, 3 y 4:

1. Describa y represente el significado de la siguiente expresión:

La variable x *"***tiende***"* al número real a.

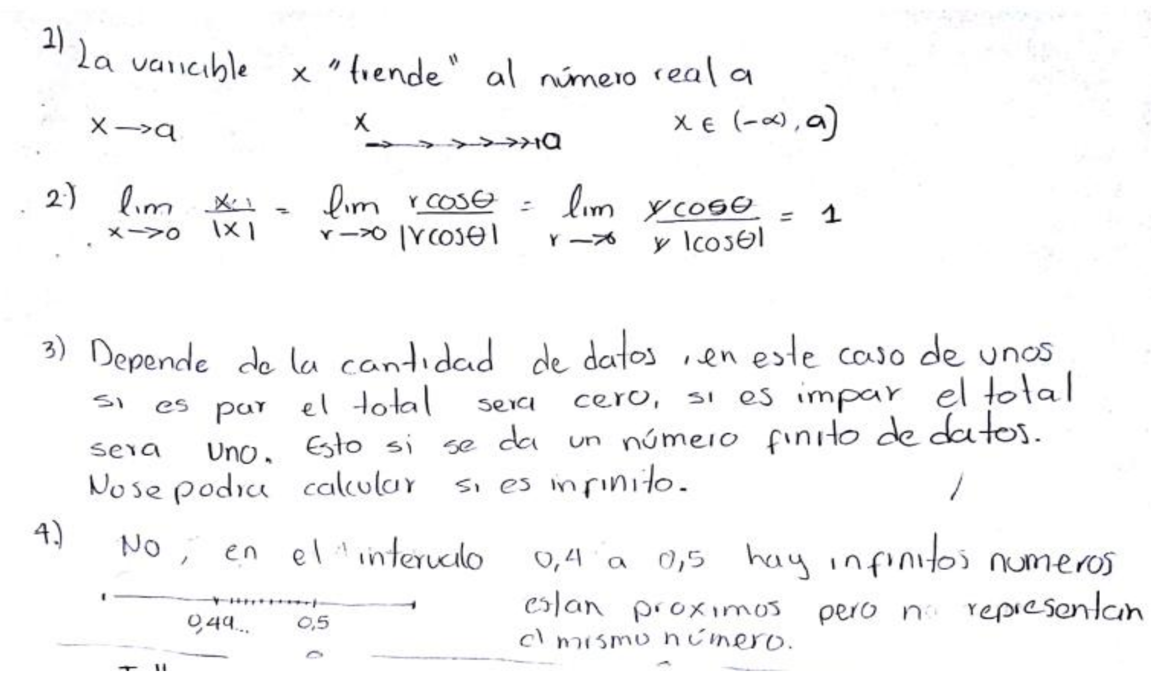
2. Si se tiene que $\lim_{x\to 0} x = 0$. Determine el siguiente límite $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$.

3. Considere la siguiente suma infinita

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$

Determine (si es posible) el valor de dicha suma. Justifique su respuesta.

4. ¿Representan el mismo número las siguientes expresiones: 0,5 y 0,4999…? Justifique.



1) La variable x "tiende" al número real a

$x \to a$ $\qquad x \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow a$ $\qquad x \in (-\infty, a)$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta}{|r\cos\theta|} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r}\cos\theta}{\cancel{r}\,|\cos\theta|} = 1$

3) Depende de la cantidad de datos, en este caso de unos si es par el total sera cero, si es impar el total sera uno. Esto si se da un número finito de datos. No se podria calcular si es infinito.

4) No, en el intervalo 0,4 a 0,5 hay infinitos numeros estan proximos pero no representan el mismo número.

0,49… 0,5

Imagen 31. Respuestas del estudiante E9

Respuestas del estudiante E7:

Taller 3, punto 1:

Describa y represente el significado de la siguiente expresión:

La variable x *"***tiende***"* al número real a.

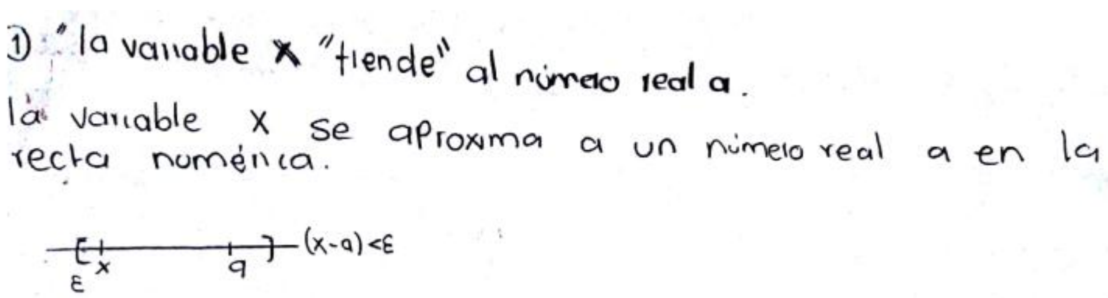

① "la variable x "tiende" al número real a.
la variable x se aproxima a un número real a en la recta numérica.

Imagen 32. Respuesta del estudiante E7

Taller 4, puntos 1, 2 y 3:

1. Represente geométricamente el conjunto

$$0, \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right) \quad \cup \left(\lim_{n\to-\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)+1\,,2\,\right]$$

y, analice la continuidad del conjunto obtenido.

2. Analice la convergencia de la sucesión $\frac{1}{e^{n!}}\ _{n\in N}$ definida en el intervalo $-1{,}0 \ \cup$ $0{,}1$.

3. Analice la continuidad de las siguientes funciones:

$$f\ x\ = \begin{matrix} 1, x \in Q \\ 0, x \notin Q \end{matrix}\ , \quad f^{*}\ x\ = \begin{matrix} x, x \in Q \\ 0, x \notin Q \end{matrix}$$

1) $\left[0, \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)\right) \cup \left(\lim_{n\to-\infty}\left(-\frac{1}{n}+1\right), 2\right]$

$[0,1] \cup (1,2]$

0 1 2

Es continuo porque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}+1$ se aproxima a 1 por la derecha y toma el punto 1.

2) $\left\{\frac{1}{e^{n!}}\right\}_{n\in N}$ en $(-1,0)\cup(0,1]$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n!}} = 0$; es convergente al punto cero pero nunca lo alcanza.

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & x\in Q \\ 0, & x\notin Q \end{cases}$, $f^{*}(x) = \begin{cases} x, & x\in Q \\ 0, & x\notin Q \end{cases}$

Imagen 33. Respuestas del estudiante E7

5. Conclusiones

- Con la realización de este trabajo de práctica pedagógica, se evidenció la importancia que éste enmarcado dentro de un proyecto de investigación, debido a que se pudo realizar en un ambiente universitario.
- La realización de esta práctica pedagógica aportó en mi formación como estudiante de licenciatura en matemáticas, en vista que me permitió tener una mirada histórica de las generalidades de algunas teorías matemáticas, lo cual admite asumir conciencia que para la mayoría de estudiantes es complejo comprender conceptos, proposiciones, teoremas y demostraciones en un período corto de tiempo, debido a que las teorías matemáticas, son el producto de los aportes de diferentes científicos de distintas épocas. Asimismo, me posibilitó adquirir destrezas en cuanto al dominio y manejo futuro de un aula, puesto que estuve a cargo de un grupo de estudiantes.
- Durante el desarrollo de esta práctica se demostró la importancia que tiene estudiar asignaturas como análisis real, análisis I, topología, entre otros cursos electivos en la línea de análisis matemático e historia de las matemáticas, dado que ellos permiten adquirir herramientas teóricas necesarias para orientar diferentes asignaturas en matemáticas.
- En el desarrollo de la práctica se observó que, en general, los participantes de los talleres, aprenden de memoria conceptos como límite, continuidad, serie, convergencia, sin comprenderlos, por ende, no profundizan sobre el significado y la importancia de los mismos. En esta dirección, es pertinente reflexionar sobre si es necesario agregar un seminario previo a los cursos de análisis, que

permita a los estudiantes profundizar y abordar desde otra mirada los conceptos como por ejemplo, los mencionados previamente.

- En la ejecución de la práctica se presentó un paro universitario que duro aproximadamente cuatro meses, lo que afectó la continuidad en la aplicación de los talleres. Además, en múltiples ocasiones se dificultó conseguir un espacio adecuado, para trabajar con los participantes de los talleres.
- Desde el desarrollo histórico de las matemáticas se evidencia que el infinito ha sido lo suficientemente problemático, pues los conceptos matemáticos que lo tienen implícito, han enfrentado obstáculos epistemológicos. De este modo, con los resultados de los talleres, se nota que los estudiantes no han logrado dar el salto del infinito potencial al actual durante el transcurso de sus cursos de cálculo. Por consiguiente, tienen dificultades para comprender conceptos como: límite, continuidad, densidad, completez, convergencia, serie, más aun, presentan obstáculos como los ya mencionados en la rejilla analítica, por consiguiente, el infinito si es un obstáculo epistemológico en la adopción de conceptos del análisis matemático.

6. Bibliografía

Arbeláez, G. I., & Recalde, L. C. (2011). *Los números reales como objeto matemático.* Cali, Colombia: Programa Editorial.

Arrigo, D. S. (2011). *Infinitos Infinitos.* Bogotá: Magisterio.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espiritu cientifico: contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo.* México: Siglo XXI editores s.a de c.v.

Brosseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Zorzal.

Calder, A. (2001). El infinito, piedra de toque del constructivismo. *Investigación y Ciencia* , 45.

Dedekind, R. (1888). *¿ Qué son y para qué sirven los números ?* Madrid : Alianza .

Delahaye, J.-P. (2001). El carácter paradójico del infinito. *Ideas del infinito*.

Demidovich. (1967). Series. En Demidovich, *Problemas y ejercicios de análisis matamático.* Moscú: Mir.

Kline, M. (1985). *Matemáticas la pérdida de la certidumbre.* Madrid: Siglo veintiuno de España Editores.

Recalde, L. C. (2018). *Lecturas de historia de las Matemáticas.* Cali: Programa Editorial.

Recalde, L., Hinestroza, D., Alvarez, J., Marmolejo, M., & Acosta, E. (2007). *Técnicas y conceptos básicos de Matemáticas.* Cali: Programa editorial.

Sbaragli, S. (2004). Le convinzioni degli insegnanti sull´infinito matematico.

Stewart, I. (2002). *¿ Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.* Fondo de cultura ecónomica.

7. Anexos

7.1 Anexo 1

Tabla 1: estudiantes repitentes de los cursos análisis real y análisis I.

	2014 -1			**2014-2**			**2015-1**			**2015-2**			**2016-1**			**2016-2**			**2017-1**			**2017-2**			**2018-1**			**2018-2**		
PROGRAMA	R1	R2	R3	R1	R2	R3	R1	R2	R3	R1	R2	R3	R1	R2	R3	R1	R2	R3	R1	R2	R3	R1	R2	R3	R1	R2	R3	R1	R2	R3
LICENCIATU-RA EN MATEMÁTICAS	2	5	3	4	2	0	0	0	0	5	0	0	2	2	0	2	0	1	5	1	0	1	0	0	1	2	0	1	0	1
Número de estudiantes por curso	16			16			17			8			16			16			21			9			26			18		
Número de estudiantes que cancelaron.	1			4			1			1			0			0			0			0			0			8		
MATEMÁ-TICAS	5	2	2	0	1	1	4	0	2	3	2	0	1	2	2	5	1	2	0	1	1	1	0	0	3	1	0	4	0	1
Número de estudiantes por curso	14			15			12			10			15			14			13			9			13			19		
Número de estudiantes que cancelaron.	0			2			1			2			2			0			6			2			1			3		

Según la anterior tabla, el total de estudiantes de licenciatura que cursaron análisis real, menos los que cancelaron es de: 147; el total de repitentes es de 40.

Así el porcentaje de repitentes es igual a:

$$\frac{40}{147} \times 100\% = 27.2\ \%$$

Además, el total de estudiantes de matemáticas que cursaron análisis I, menos los que cancelaron es de: 115; el total de repitentes es de 47.

Luego, el porcentaje de repitentes es igual a:

$$\frac{47}{115} \times 100\% = 40.8\ \%$$

7.2 Anexo 2

<u>Taller N°1</u>

En la matemática elemental se estudian los números Reales. Este conjunto forma una colección en la que se definen algunas operaciones adición y multiplicación. El propósito de este taller es indagar por la conceptualización sobre conjuntos finitos e infinitos y la propiedad de continuidad de los números Reales.

c) A través de un argumento, determine si el conjunto de granos de arena del planeta tierra es finito o infinito.

d) Argumente matemáticamente cómo se pueden comparar, con respecto al "numero" de elementos dos conjuntos infinitos.

e) Exprese matemáticamente cuándo dos conjuntos finitos tienen el mismo número de elementos. Cite un ejemplo de dos conjuntos finitos con el mismo número de elementos.

f) Considere la siguiente lista de conjuntos:

- N
- Z
- Z^{-}
- $0,1$
- $\{\frac{1}{n}\}_{n \in N}$
- R
- Q
- $3,4$

c) Determine cuáles de los anteriores conjuntos tienen el mismo infinito que el conjunto de los números Naturales.

d) Indique si hay un conjunto con un infinito distinto al conjunto de los números Naturales. Justifique su respuesta.

g) ¿Puede establecer si el infinito de los números Racionales y el infinito de los números Reales es el mismo?

h) Cuál es su interpretación de la afirmación de ¿El todo es mayor que sus partes"

i) En muchos libros de cálculo se dice que los números Reales llenan la recta real. Represente geométricamente esta afirmación y argumente su interpretación.

j) Para usted ¿qué es el infinito? ¿Cómo lo representa matemáticamente?

<u>Taller N°2</u>

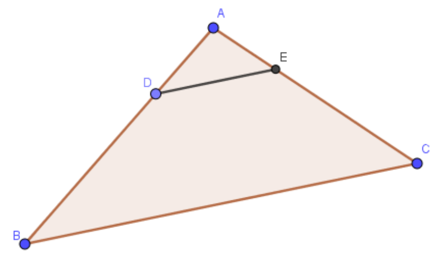
Geométricamente, el conjunto de los números Reales se representa con una recta orientada y a cada punto de la recta se le asocia un número Real. Por eso a esta recta le llamamos recta numérica

k) Argumente por qué, en un segmento AB existen infinitos puntos.

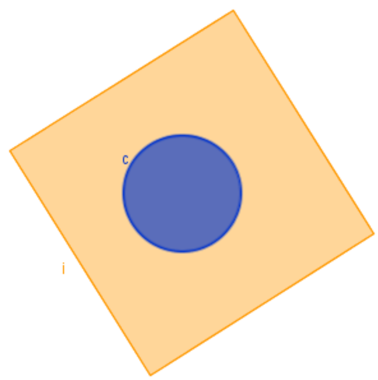
l) Divida un segmento en número infinito de partes.

m) Represente geométricamente la siguiente proposición " Dados A y C puntos en una recta ℓ existen puntos en ℓ que son puntos interiores al segmento AC y puntos en ℓ que son puntos exteriores al segmento AC

n) En la siguiente figura, determine en cuál de los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ hay más puntos.



o) Considere las figuras geométricas A y B:



Determine, argumentando su respuesta, en cuál de las figuras A y B hay más puntos.

p) Escriba una interpretación del siguiente enunciado:

Dado que el conjunto $(0,1) \sqsubset R$, se tiene que el número de elementos de (0,1) es menor que el número de elementos de R.

7.3 Anexo 3

<u>Taller N°3</u>

El concepto de límite de una función requiere para su comprensión distintos sistemas de representación semiótica, verbal, numérica, algebraica o geométrica. Para responder los siguientes puntos del taller, puede hacer uso de las representaciones que considere pertinentes.

5. Describa y represente el significado de la siguiente expresión:

La variable x "**tiende**" al número real a.

6. Si se tiene que $\lim_{x\to 0} x = 0$. Determine el siguiente límite $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$.

7. Considere la siguiente suma infinita

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$

Determine (si es posible) el valor de dicha suma. Justifique su respuesta.

¿Representan el mismo número las siguientes expresiones: 0,5 y 0,4999…? Justifique.

7.4 Anexo 4

<u>TallerNº4</u>

4. Represente geométricamente el conjunto

$$0, \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right) \quad \cup \left(\lim_{n\to-\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)+1\,,2\right]$$

y, analice la continuidad del conjunto obtenido.

5. Analice la convergencia de la sucesión $\frac{1}{e^{n!}} \; {}_{n\in N}$ definida en el intervalo $-1,0 \;\cup$ $0,1$.

6. Analice la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \notin Q \end{cases}, \quad f^*(x) = \begin{cases} x, x \in Q \\ 0, x \notin Q \end{cases}$$