ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE PARA RESOLVER DESIGUALDADES DE PRIMER GRADO EN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LOS COMUNEROS, SEDE JOSÉ ANTONIO GALÁN Nº 1

MICHAEL EDUARDO CHILMA PIZO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2020

ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE PARA RESOLVER DESIGUALDADES DE PRIMER GRADOEN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LOS COMUNEROS, SEDE JOSÉ ANTONIO GALÁN Nº 1

Trabajo de sistematización de la Práctica Pedagógica presentado como uno de los requisitos para optar al título de Licenciado en Matemáticas

MICHAEL EDUARDO CHILMA PIZO

Director

Mg. Orlando Rodríguez Buitrago

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2020

Nota de aceptación

____

____

____

____

Asesor: _____________________________________

Lic. Mg. Orlando Rodriguez Buitrago

Jurado: _____________________________________

Mg. Wilson Enrique Murillo Cantero

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 14 de diciembre de 2020

Tabla de contenido

Tabla de imágenes

Tablas

Resumen

Este trabajo presenta los resultados sobre la solución de desigualdades de primer grado, en el marco de la práctica pedagógica, llevada a cabo con 19 estudiantes del grado once, de la Institución Educativa Los Comuneros, sede José Antonio Galán Nº 1. Dado que los estudiantes presentaron diversos inconvenientes al resolver una desigualdad de primer grado, el objetivo consistió en determinar estrategias que les permitiera resolver dicha temática con su conjunto de soluciones por medio de una secuencia de enseñanza. La metodología se implementó de acuerdo al plan de estudios del área de matemáticas de la Institución Educativa los Comuneros y con base a las condiciones curriculares y estándares básicos de competencias en matemáticas del Ministerio de Educación (MEN), adicionalmente, las aplicaciones didácticas se asociaron al diálogo entre maestro y alumno, para generar una interacción mutua para que el estudiante se apropie del tema, logrando epistemológicamente conocer la esencia de las desigualdades. Para ello, se realizaron diferentes actividades como una evaluación diagnóstica y talleres de retroalimentación que permitieron concluir al final de la práctica pedagógica, un progreso en el nivel de superación de los estudiantes para resolver una desigualdad de primer grado.

Palabras clave: conjunto, algebra, intervalos, desigualdad de primer grado

Abstract

This paper presents the results on the solution of first grade inequalities, within the framework of pedagogical practice, carried out with 19 eleventh grade students from the Los Comuneros Educational Institution, José Antonio Galán No. 1 campus. They presented various inconveniences when solving a first degree inequality, the objective was to determine strategies that would allow them to solve this issue with its set of solutions through a teaching sequence. The methodology was implemented according to the curriculum of the area of mathematics of the Educational Institution Los Comuneros and based on the curricular conditions and basic standards of competencies in mathematics of the Ministry of Education (MEN), additionally, the didactic applications were associated with dialogue between teacher and student, to generate a mutual interaction so that the student appropriates the subject, epistemologically achieving to know the essence of inequalities. For this, different activities were carried out such as a diagnostic evaluation and feedback workshops that allowed to conclude at the end of the pedagogical practice, a progress in the level of improvement of the students to solve a first degree inequality.

Keywords: set, algebra, intervals, inequality of the first

Glosario

Bola abierta en *R*	Sea $x_0 \in R$ y $r > 0$, entonces la bola de centro x_0y radio r, se denota por $B(x_0, r)$ y se define $B(x_0, r) = \{x \in R = \| x - x_0 \| < r\}$.
Bola cerrada en *R*	Sea $x_0 \in R$ y $r > 0$, entonces la bola de centro x_0y radio r, se denota por $B(x_0, r)$ y se define $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in R = \| x - x_0\| \leq r\}$.
Constante	Una constante es un símbolo que representa un valor fijo, es decir, es el símbolo que designa el elemento de un conjunto unitario.
Constantes numéricas	Las constantes numéricas o absolutas son aquellas que conservan los mismos valores en todos los problemas.
Cantidad algebraica	Una cantidad algebraica es la que expresa el valor absoluto de las cantidades y por medio del signo su valor relativo.
Ecuación	Es una igualdad que posee al menos una variable.
Función	Una función f es un conjunto de parejas ordenadas $f = \{(x, y) : f(x) = y\}$ tal que Si $(x.y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y = z$.
Función lineal	La función f, definida por la ecuación de primer grado: $f = \{(x, y) / y = mx + b\}$, donde m y b son constantes.
Suma algebraica	Una suma algebraica es una expresión algebraica que la componen

	partes diferentes conectadas por los signos más o menos.
Variable	Una variable es un símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto referencial, donde cada elemento del conjunto referencial es un valor de la variable. Las variables Por lo general son representadas con las últimas letras del alfabetox, y, z **.**
Expresión algebraica	Una expresión algebraica está compuesta por una o varias operaciones algebraicas.

Introducción

El aprendizaje de las matemáticas es un reto que el educador se propone cuando enseña, en particular cuando se trata de orientar los objetos matemáticos para la resolución de desigualdades de primer grado, ya que es el inicio de una nueva temática donde se manipulan diferentes variables. En este sentido, es interesante reflexionar acerca de los métodos que aplican los estudiantes cuando se enfrentan a una situación problema relacionada con la resolución de desigualdades de primer grado y métodos que el docente emplea cuando se encuentra en un contexto educativo real.

En correlación, el presente texto pretende revisar las estrategias que los estudiantes del grado once de la Institución Educativa Los Comuneros, sede José Antonio Galán Nº 1 aplicaron para resolver desigualdades de primer grado, usando modelización algebraica, siendo necesario determinar los saberes previos de cada estudiante acerca de lo objetos algebraicos y aritméticos, además de identificar los obstáculos didácticos y epistemológicos para lograr los objetivos propuestos en la práctica pedagógica.

De este modo, el trabajo se estructura de la siguiente manera**:** el *primer capítulo* expone el planteamiento del problema, la justificación y los objetivos de la presente práctica pedagógica que se desarrolló con los estudiantes y el docente a cargo. Posteriormente, el *segundo capítulo* aborda las nociones teóricas que permiten comprender los elementos claves que estructuran la columna vertebral del proyecto y el *tercer capítulo* presenta la metodología, la cual desemboca en los resultados que conforman el *penúltimo capítulo*. Finalmente, se enuncian en el *quinto capítulo* las conclusiones y recomendaciones sobre la práctica pedagógica.

1. Planteamiento del problema.

La baja calidad de la educación colombiana es una realidad que hoy no podemos negar, ya que en comparación con otros países latinoamericanos, nuestro país de acuerdo a las pruebas PISA, nos sitúa en el puesto 58 debido al bajo nivel educativo. Al respecto, el periódico El Espectador (2019) señala:

> Hay que llegar hasta el puesto 43 para encontrar el primer país de esta región latinoamericana: Chile, con 452 puntos en ciencias, 46 puntos menos que el promedio de OCDE. Le sigue Uruguay (48, 427), Costa Rica (49, 426), y Colombia (58, 412). En comparación con los resultados anteriores, las calificaciones de la prueba PISA apuntan a que el rendimiento promedio tuvo una mejoría en todas las asignaturas pero aún se siguen obteniendo bajos resultados en las tres pruebas centrales: lectura, ciencias y matemáticas. (Espectador, 2019, p. 4)

Es por esto que varios expertos y académicos se preguntan en qué ha fallado la educación del país y qué se debe hacer para mejorar, Julián de Subiría considera que, "la sociedad colombiana escoge a los que peor leen y a los que les leen a los demás" (Pulzo, 2019, p.1).vale decir que esta asociado al mal rendimiento académico de los estudiantes colombianos, ya que se recurre a una educación memorística con un currículo impertinente y fragmentado. Por tal razón, se considera que la enseñanza del lenguaje debe ser el eje transversal de la educación básica y media en el país.

En correlación, el estancamiento en las ciencias y matemáticas también está relacionado con la competencia lectora, pues estas falencias hacen que los estudiantes no entiendan los problemas, dado que quien lee mal, entiende mal un problema matemático; factor por el cual el sistema educativo no ha generado cambios y es hora que se tengan en cuenta aspectos importantes como la capacitación y contratación de maestros competentes en su área, además de verificar si el currículo que se está manejando es el pertinente en la actualidad.

> PISA revela además que las relaciones positivas, constructivas entre alumnos y profesores están asociadas a un mejor rendimiento en matemáticas. Esto puede ser un instrumento clave a través del cual los centros educativos fomenten el bienestar social y afectivo de los escolares (García, 2015, p. 1).

A lo anterior se suma que, en el Decreto 12-78 de 2012 se permite que profesionales no licenciados ejerzan la labor docente en cualquier área, sin importar la pedagogía y el manejo del tema que orienta en las aulas de clase. Por tanto, es importante destacar la importancia de la contratación de los licenciados especializados en cada área, ya que los profesionales que se enfocan en la matemática deben ser los encargados de realizar una mejor enseñanza y aprendizaje en esta asignatura. Sin embargo, el reto de los educadores matemáticos es proponer estrategias de aprendizaje para la construcción de un verdadero proceso de enseñanza y aprendizaje significativo de los objetos matemáticos.

> En lo que respecta al tema de la calidad educativa en Colombia, se considera que ésta debe estar fundamentada desde una perspectiva de carácter socializador, ya que en los diferentes espacios y tiempos donde se ha desarrollado la educación en nuestro país se ha evidenciado que lo educativo se encuentra ligado con lo social. Consecuentemente, para lograr una educación de calidad se requiere que enfrentemos retos en cuanto al verdadero sentido de educar. En consecuencia, es vital tener presentes los valores, el sentido de la vida y la realidad social que vivimos para ejercer en los educados una mentalidad de sentido de pertenencia, formando al hombre con sentido social que contribuya al desarrollo de la sociedad y de su cultura desde una perspectiva crítica y reflexiva que

aporte a las dificultades o problemas que se presentan en su entorno mediante posibles soluciones (Beltran, 2017, p. 2).

Contextualizando la postura de Beltrán (2017) al aprendizaje de las desigualdades de primer grado, permite considerar un conjunto de construcciones o esquemas que el alumno pueda desarrollar para poder comprender dicha temática, al mismo tiempo que se realice una propuesta de enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático. Por consiguiente, partiremos primero por observar la importancia que tiene el álgebra en este proceso, ya que nos concede resolver o facilitar un problema matemático con una simbología correcta, en donde lo complicado se volvería algo más simple y mejor definido para entender.

Luego se miran las temáticas que se trabaja en el álgebra, ya que nos ayuda a observar cómo ésta actúa en las resoluciones de dichos problemas, facilitando las solución de ecuaciones, en donde el resultado obtenido es un número, es decir, ecuaciones primer grado, segundo grado y de ahí en adelante dependerá del polinomio en el cual se trabaje (los resultados son finitos), ya que las soluciones a los problemas se pueden imaginar o establecer en un rango contable , pero, si damos un salto desde lo finito a lo infinito se puede evidenciar también un problema con el cálculo de estas soluciones y es ahí donde nos vamos a concentrar, dado que al desarrollar qué son las desigualdades surgen varios inconvenientes, pues los estudiantes no sólo trabajan con resultados finitos, sino también con resultados infinitos o más bien un conjunto de números atribuidos a la solución de un problema.

En consecuencia, los estudiantes empiezan a generar conceptos erróneos sobre la solución de una desigualdad y aparecen varios conceptos erróneos en los cuales tenemos el inadecuado concepto entre número y conjunto, la mala relación entre lo finito e infinito, errores de procedimiento por parte del álgebra o aritmética, errores de resultado por una mala interpretación, entre otras.

Por lo expuesto, se incentiva a reflexionar sobre la construcción de sus procesos de aprendizaje, a partir de plantear la siguiente pregunta investigativa:

¿Qué estrategias seguir para que el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de desigualdades sea de carácter significativo en la institución Educativa los Comuneros Sede Galán N.1 como intermediario social y el encargado directo en apoyar y promover el aprendizaje de los alumnos dentro del plantel?

1.1 Justificación.

La teoría de ecuaciones provee una de las herramientas más útiles para modelar problemas aplicados. Esto implica que la resolución de ecuaciones amerite un estudio más detallado y profundo. No obstante, existen ecuaciones cuya solución se puede determinar intuitivamente, siendo necesario desarrollar métodos sistemáticos para resolver ecuaciones. Así pues, la teoría de desigualdades también tiene amplias aplicaciones y su resolución es similar a la resolución de ecuaciones y por tanto, nuestro énfasis será desarrollar métodos sistemáticos para resolver desigualdades.

Adicionalmente, la práctica pedagógica contribuye a la Academia con los hallazgos encontrados en la Institución Educativa los Comuneros, sede Galán N.1, permitiendo comprender la importancia de desarrollar objetivos claros al ingresar a un plantel como maestro practicante, quien a su vez, debe tener en cuenta factores sociales, psicológicos y económicos de la población estudiada.

De otro lado, el presente texto aporta al estudio de “Desigualdades” (relación entre dos expresiones que no son iguales); centrando la atención en el análisis de los fundamentos matemáticos bien enseñados como también en la pedagogía y didáctica que el docente debe tener para educar, ya que es el intermediario social y el encargado directo en apoyar y promover el aprendizaje de los alumnos dentro del plantel.

Por último, destacar que el tema abordado permite caracterizar el efecto que trae consigo que un profesor sea o no licenciado en matemáticas, dado que la enseñanza como el aprendizaje que obtienen los estudiantes puede variar en su gran mayoría. Por tanto, requiere que el docente encargado no sólo se interese por dar a conocer sus capacidades y conocimientos matemáticos, sino que el método pedagógico empleado despierte el interés y el amor por las ciencias.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Determinar las estrategias a seguir con los estudiantes del grado once de la sede Galán Nº1 para resolver desigualdades de primer grado con su conjunto de soluciones por medio de una secuencia de enseñanza.

1.2.2 Objetivos específicos

- Precisar en los saberes previos de los estudiantes antes de abordar la solución de las desigualdades.
- Observar las dificultades que presentan los estudiantes de la sede Galán No 1 en la solución de desigualdades.
- Reconocer los obstáculos didácticos para el aprendizaje de esta temática y los obstáculos epistemológicos de los alumnos durante la secuencia didáctica.
- Analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje por parte del profesor y los estudiantes.

2. Marco teórico

El presente ítem expone algunos elementos de la disciplina de la Educación Matemática, así como objetos matemáticos y sus definiciones, claves para el desarrollo de la práctica pedagógica. De este modo, el marco teórico se divide en dos partes: *Aspectos pedagógicos* y *referentes matemáticos*. Observemos.

2.1 Aspectos pedagógicos

En este apartado se presentaran los aspectos pedagógicos utilizados en la investigación realizada en la Institución Educativa los Comuneros, sede Galán N.1.

2.1.1 Variables.

El concepto de variable es multifacético e incluye como un todo distintos aspectos. Los aspectos considerados como más relevantes para un manejo competente del álgebra elemental y han sido destacados en otras investigaciones son: el uso de variable como incógnita, como número general y en una relación funcional. La variable como incógnita requiere que el alumno pueda reconocer y determinar un valor desconocido en un problema. Así mismo, la variable como número general implica que el estudiante reconozca patrones y reglas en secuencias numéricas. Con relación a la variable como relación funcional, ésta establece la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquier tipo de representación(Tringueros & Ursini, 2011).

2.1.2 Lenguaje matemático.

Cuando hablamos de lenguaje matemático nos estamos refiriendo a dos cuestiones distintas pero interrelacionadas, a saber: la simbología utilizada en matemáticas y, por otro lado, la estructura y presentación de los contenidos matemáticos. La simbología matemática está repleta de caracteres gráficos denominados logogramas, que son como las “palabras” de un idioma. Estos símbolos se deben conocer para interpretar lo que se quiere decir con ellos. Por otra parte, la presentación de los contenidos matemáticos se realiza mediante enunciados como: Definición, Teorema, Proposición, Lema, Demostración, Corolario, etc., de manera que cada uno de ellos predice su contenido. Así, todo enunciado o afirmación en matemáticas debe ser presentado dentro de uno de estos epígrafes, ayudando a una clara organización y estructura de los contenidos de la materia.

2.1.3 Razonamiento algebraico.

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebido como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central. En consecuencia, los maestros en formación tienen que construir esta visión del papel central de las ideas algebraicas en la actividad matemática, y sobre cómo desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles. (Godino J. D., 2003, p. 704)

2.1.4 Igualdad.*Una igualdad es una equivalencia de dos expresiones o cantidades. Al respecto Godino Tabla 1 afirma que: El signo "=" (igual) indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo, primer miembro de la igualdad, y lo que se encuentra a la derecha de este signo, llamado el segundo miembro de la igualdad, son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo (Godino, 2004, p. 1).*

2.1.5 Desigualdad. En el grado once una de las prioridades de los educadores matemáticos es el desarrollo del pensamiento variacional. En particular, en la construcción de actividades que favorezcan un aprendizaje significativo acerca de las desigualdades. Al respecto Leman define dos tipos de desigualdades:

- *Desigualdad absoluta o incondicional*: son aquellas que tienen el mismo sentido para todos los valores de las variables para los que están definidos sus miembros. Son ejemplos de desigualdades absolutas 5 > - 7 y x 2 + 1 > 0. Observamos que la expresión "tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables", supone la existencia de una función proposicional cuantificada universalmente que será necesario validar. Esta validación se concreta para todos los elementos del dominio de valores admisibles de la variable. Interpretamos que refiere al fenómeno de generalización[1].

- *Desigualdades condicionales:* una desigualdad condicional o inecuación es aquella que tiene el mismo sentido solo para ciertos valores de las variables, tomados entre los valores para los que sus miembros estén definidos. Son ejemplos de desigualdades condicionales o inecuaciones. x - 2 < 3, válida sólo si x < 5; x 2 > 4, válida sólo si x > 2 o si x < -2, en la definición de desigualdad condicional expresa que es aquella que tiene el "mismo sentido para ciertos valores de las variables". Esta expresión es relevante ya que pone de manifiesto que existirán o no valores que se toman de un dominio admisible que harán cierta la desigualdad. Esta idea nos remite a la acción de particularizar las variables con valores del dominio (Bernardis, Liliana, & Scaglia, 2017, p. 3).

- **2.1.6 Desigualdades de primer grado.** Se llama inecuación lineal o de primer grado en una incógnita en la variable x a toda expresión que puede presentarse de alguna de las siguientes formas: a x+b > 0, a x+b ≥ 0, a x+b < 0 o a x+b ≤ 0 con a, b

[1]Fenómeno de generalización: la definición de desigualdad absoluta o incondicional se fundamenta en la lógica proposicional y en particular en el principio de generalización universal que establece que: "del ejemplo de sustitución de una función proposicional respecto del nombre de un individuo cualquiera arbitrariamente elegido, se puede inferir válidamente la cuantificación universal de la función proposicional". Este fenómeno se presenta en la necesidad de demostrar la validez de una desigualdad absoluta, es decir, una desigualdad que es cierta para todos los valores posibles de la variable.

$\in \Re$, $a \neq 0$ y x variable. Por tanto, resolver una inecuación de primer grado supone determinar los valores de la variable que satisfacen la desigualdad (Godino & Resito, 2017, p. 2). Para ello, demostraremos las propiedades de las relaciones de orden, en la siguiente desigualdad de primer orden.

$2 (x + 1) -3 (x - 2) < x + 6$

Para comenzarla a resolver esta desigualdad, empezaremos por quitar los paréntesis y multiplicar el primero por 2 y el segundo por -1,

$2x + 2 - 3x - 6 < x + 6$

Luego Agrupamos términos semejantes,

$2x - 3x - x < 6 – 6 + 2$

Dividimos por -2 y cambiamos el sentido de la desigualdad,

$-2x < -2$ entonces $x > 1$

Por último, la solución a esta desigualdad está dada por el intervalo $x \in (1, \infty)$.

2.1.7 Contrato didáctico. El contrato didáctico es un conjunto de reglas -con frecuencia no enunciadas explícitamente- que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemática (Brousseau, 1986).Los estudios sobre el contrato didáctico y sus relaciones con los procesos de aprendizaje son esenciales, ya que lo que está en juego es el significado real del conocimiento construido por los alumnos (Educación, 2017, p. 3).

2.1.8 Situación didáctica. Al referirnos a las Situaciones Didácticas, en principio debemos distinguir dos enfoques: uno, tradicional; otro, el enfoque planteado por la teoría de Brousseau. Ambos, con relación a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el primero, tendríamos una relación estudiante-profesor, en la cual el profesor simplemente provee (o deposita) los contenidos, instruye al estudiante, quien captura (o engulle) dichos conceptos y los reproduce tal cual le han sido administrados. Dentro de este enfoque no se contextualiza el conocimiento, no se tiene un aprendizaje significativo. Paulo Freire apunta con respecto al enfoque tradicional: “La educación padece de la enfermedad de la narración que convierte a los alumnos en contenedores que deben ser llenados por el profesor, y cuanto mayor sea la docilidad del receptáculo para ser llenado, mejores alumnos serán” (Cruz, 2014, p. 1). Esto con respecto al enfoque tradicional. Ahora bien, en el enfoque planteado por Brousseau intervienen tres elementos fundamentales: estudiante, profesor y el medio didáctico. En esta terna, el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento. Así, Situación Didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor-estudiante-medio didáctico (Chavarría, 2006a, p. 1).

2.1.9 Situación A-didáctica. La Situación A-Didáctica es el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos y le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica. En otras palabras, el estudiante se verá en una micro-comunidad científica resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar el saber adquirido (Chavarría, 2006b, p2).

2.1.10 Obstáculo didáctico. Para Brousseau (1997), los obstáculos en el aprendizaje matemático pueden tener tres orígenes distintos, siendo uno de ellos el desarrollo cognitivo (obstáculos de origen ontogenético). Asumiendo un punto de vista piagetiano, este autor reconoce que los conocimientos que van desarrollando los niños conllevan limitaciones que, mientras no se tornan evidentes para ellos, pueden obstaculizar el desarrollo de conocimientos más complejos. La reorganización de los conocimientos desarrollados mediante la asimilación y la acomodación es necesaria para poder superar esas limitaciones (Cortina, Zúñiga, & Visnovska, 2013, p. 2).

2.1.11 Obstáculo epistemológico. Brousseau (1997) citado en Cortina, Zúñiga, & Visnovska (2013), reconoce que hay un segundo tipo de obstáculos que tiene su origen en la propia disciplina matemática (obstáculos de origen epistemológico). Estos obstáculos se presentan cuando la comprensión de cierto concepto matemático interfiere con la comprensión de otro más complejo. Por ejemplo, en la literatura sobre fracciones, múltiples autores han considerado que el conocimiento que los estudiantes desarrollan de los números naturales interfiere con la comprensión de los números racionales (p. 2).

2.1.12 Error como herramienta de enseñanza y aprendizaje. Es oportuno considerar, el hecho que el alumno se equivoque y tenga consciencia de ello, porque esto sirve como punto de partida para enfocar el rumbo del proceso escolar. Es más importante enseñar a conciencia, para saber qué aprenden los estudiantes. Además, es tiempo de acabar con el síndrome del marcador rojo, utilizado para resaltar lo malo, por la rotulación que produce en los estudiantes, mucho menos que reciten lo que aprenden, sabiendo que se puede aprender del error, de la misma manera en que la práctica hace al maestro, pues nadie es perfecto. Así que es tiempo de dejar de lado la idea de que los errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje son uno de los mayores problemas que afronta la educación, ya que se puede hacer del error una nueva manera de acceder al conocimiento.

Es por esto que el error en el proceso de enseñanza, sugiere estimular la expresión del error mediante un clima de aula no amenazador, donde no exista ese sumergimiento al fallo, que toda cultura castiga por haberlo cometido. A cambio, exhorta a brindar la oportunidad a quien aprende, para que pueda participar con libertad, donde sienta que sus ideas son escuchadas, donde pueda desarrollar capacidades, que propendan por la superación de estos obstáculos.

Así queda un gran desafío para la academia escolar en cuanto a metodología y didáctica se refiere, para utilizar el error que cometen los estudiantes como materia prima del desarrollo del aprendizaje, ya que esto, requiere una postura profesional del docente, que reflexione respecto a las prácticas y métodos que se utiliza en el aula, pues de alguna manera "inciden en el tipo de errores que cometen los estudiantes, por ello, se debe dar sentido al aprendizaje, marcando la diferencia entre lo que se aprende de manera significativa y la decepción escolar" (González, 2018, p. 1).

2.1.13 Estrategias de enseñanza. Frecuentemente las estrategias de enseñanza están ligadas con los procedimientos utilizados por el docente para promover aprendizajes significativos donde se aplican actividades conscientes y orientadas a un fin. Dichas estrategias deben ser bien ejecutadas ya que conlleva a una buena instrucción interactiva y de alta calidad. Es por esto que el docente debe tener capacidades de mediador y debe ser un modelo de enseñanza para los estudiantes. Las estrategias en mención deben reunir las siguientes características:

- Deberán ser funcionales y significativas, que lleven a incrementar el rendimiento en las tareas previstas con una cantidad razonable de tiempo y esfuerzo.
- La instrucción debe demostrar qué estrategias pueden ser utilizadas, cómo pueden aplicarse y cuándo y por qué son útiles. Saber por qué, dónde y cuándo aplicar estrategias y su transferencia a otras situaciones.
- Los estudiantes deben creer que las estrategias son útiles y necesarias.

- Debe haber una conexión entre la estrategia enseñada y las percepciones del estudiante sobre el contexto de la tarea.
- Una instrucción eficaz y con éxito genera confianza y creencias de auto-eficiencia.
- La instrucción debe ser directa, informativa y explicativa.
- La responsabilidad para generar, aplicar y controlar estrategias eficaces es transferida del instructor al estudiante.
- Los materiales instruccionales deben ser claros, bien elaborados y agradables.

  (Pineda, 2003, p. 8).

Por lo tanto, las estrategias de aprendizaje constituyen actividades conscientes e intencionales que guían las acciones a seguir para alcanzar determinadas metas de aprendizaje por parte del estudiante, y son procedimientos que se aplican de un modo intencional y deliberado de una tarea y que no pueden reducirse a rutinas automatizadas, es decir, son más que simples secuencias o aglomeraciones de habilidades. También se pueden definir como conductas y pensamientos que un aprendiz utiliza durante el aprendizaje con la intención de influir en su proceso de codificación. Al respecto, Dansereaulas (2003) las define como secuencias integradas de procedimientos o actividades que se eligen con el propósito de facilitar la adquisición, almacenamiento y/o utilización de la información.

En correlación, entre las características de las estrategias de aprendizaje se encuentran:

- Su aplicación no es automática sino controlada.
- Implican un uso selectivo de los propios recursos y capacidades disponibles.
- Las estrategias están constituidas de otros elementos más simples que son las técnicas de aprendizaje, las destrezas o habilidades.

En resumen cuando se utilice el término *estrategias de enseñanza/aprendizaje,* el docente o el alumno, deberán emplearlas como procedimientos flexibles y adaptativos (nunca como algoritmos rígidos) a distintas circunstancias de enseñanzas (Pineda, 2003, p. 9).

2.1.14 Categorías de errores en el aprendizaje de las Matemáticas.

Es importante recordar que los errores, al igual que el fenómeno educativo, son la manifestación exterior de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables, entre ellas, profesor, alumno, currículo y contexto sociocultural. De allí la dificultad comprensible de aislar y delimitar las causas de un error con miras a su tratamiento. Es por esto que Sánchez, Araya y Mora (2017), presentan la siguiente caracterización de errores en el aprendizaje de la matemática:

- Errores debidos al lenguaje matemático. Son producidos por una traducción incorrecta de hechos matemáticos descriptos en un lenguaje natural a otro más formal en el lenguaje matemático, o de un lenguaje simbólico o icónico a otro simbólico o icónico distinto.
- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Son atribuidos a deficiencias en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales llevando a interpretaciones incorrectas de información o hechos matemáticos.
- Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas. Son generados por aplicar reglas y propiedades justificadas por esquemas similares o por inferir que son válidas en contextos parecidos o relacionados. En estas circunstancias, el alumno es consciente que la situación planteada es diferente de otras abordadas, no obstante, “inventa” nuevas reglas o deriva la validez de las que conoce de otras situaciones para el caso que está tratando.

- Errores debidos a la recuperación de un esquema previo. Son causados por la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de solución de una situación aun cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se han modificado. En estas instancias, el alumno no es consciente que la situación es diferente a otras planteadas, por lo que no realiza inferencias de validez de las reglas o propiedades, sino más bien, las aplica por considerar que se encuentra en un contexto conocido.
- Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales. Son errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto o responde a la lógica interna del procedimiento esperado, pero el resultado final no es la solución debido a los errores de cálculo que se presentaron en la ejecución de operaciones básicas, o acarreados por la transferencia equivocada de símbolos y números involucrados en la situación. En estas circunstancias si el alumno llevara a cabo un análisis retrospectivo advertiría la presencia del error.
- Errores eventuales debidos a deficiencias en la construcción de conocimientos previos. Son causados por aprendizajes incorrectos o inadecuados de hechos, destrezas y conceptos previos que interfieren en un adecuado procesamiento de la información. De esta forma, identificamos aquellas respuestas que se presentaron de manera aislada o casual, y de las que no fue posible establecer el patrón de error, aún después de llevar a cabo una entrevista con el alumno. Asimismo, incluimos en esta categoría aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno.

- Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos. Son causados por la carencia de aprendizajes de hechos, destrezas y conceptos previos, que inhiben totalmente el procesamiento de la información. De esta forma, identificamos las instancias en las que no se dieron respuestas a un ejercicio o situación por desconocimiento de la temática involucrada (Sánchez, Araya, & Mora, 2017, p. 72).

2.1.15 Patrones pedagógicos

Un modelo pedagógico es una construcción teórico formal que fundamentada científica e ideológicamente interpreta, diseña y ajústala realidad pedagógica que responde a una necesidad histórica concreta. Los modelos pedagógicos pueden agruparse en cinco grandes tipos. Este número contempla:1) los modelos conductistas o de reforzamiento, 2) los modelos cognitivistas y de procesamiento de la información, 3) los modelos humanistas, 4) los modelos de interacción social y 5) los modelos constructivistas.(Buitrago, 2012, p. 17)

Todas las formas de capturar conocimiento están basadas en mayor o menor medida en la teoría del Constructivismo Social de Vygotsky (vygotsky, 1995), que es uno de los modelos pedagógicos enunciados en el párrafo anterior. Los principios generales de la teoría constructivista indican que el aprendizaje es un proceso activo, la motivación es clave, la experiencia juega un rol crítico, debe ser contextualizado y es una actividad social. Existen básicamente tres formas de capturar conocimiento para construir aprendizajes.

1. Diseño Instruccional. Basado principalmente en la Teorías de Aprendizaje derivadas del Conductismo, Cognitivismo y Constructivismo.

2. Identificación de “Buenas Prácticas”. La más utilizada, principalmente por ingenieros docentes que no tienen una formación pedagógica y que en la práctica utilizan en gran medida el constructivismo social

3. Uso de “Patrones Pedagógicos”. Los patrones pedagógicos están diseñados para capturar las mejores prácticas en un determinado dominio.

Un patrón pedagógico o una estrategia de enseñanza describe un problema y una solución a ese problema, cuando este se presenta con frecuencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje en contextos similares y la solución a ese problema ha demostrado su efectividad de modo que dicha solución puede ser adoptada ante problemas semejantes.

Se trata de problemas relacionados con cualquier aspecto, situación o elemento del proceso (motivación de los estudiantes, selección de contenidos, elección de materiales, selección de actividades, procedimientos de evaluación, criterios de calificación, etc.). Los patrones pedagógicos reflejan un listado de buenas prácticas. En el resto del documento el término que se usara con frecuencia es el de patrón pedagógico (Rodríguez-Jiménez 2009). Otras definiciones frecuentes de patrones pedagógicos son:

Los patrones Pedagógicos tratan de capturar el conocimiento de expertos en el proceso de la enseñanza y aprendizaje. La idea es capturar la esencia de la práctica pedagógica en una forma compacta de tal manera que puede ser fácilmente transmitida a quienes la necesitan. También se trata de la presentación de esta información en una forma accesible y coherente de tal manera que cualquier docente pueda reaprender lo que conocen profesores de alto nivel de la comunidad educativa.

Se puede decir que los patrones comprimen el conocimiento de experiencias anteriores y pueden utilizarse en crear nuevas soluciones a problemas en contextos similares. En esencia un patrón pedagógico resuelve un problema, este problema debe ser un problema del tipo de los que se repiten en distintos contextos. En el ámbito de la enseñanza tenemos muchos problemas de este tipo como son los que tienen que ver con la motivación de los estudiantes, la elección de los materiales y la secuencia de los contenidos, la evaluación de los estudiantes, y otras cosas por el estilo.

Los “Patrones Pedagógicos”. Corresponden a una reciente línea de investigación, basada en la captura de conocimiento de expertos para la enseñanza y el aprendizaje. Para su formalización existe un “lenguaje de patrones”. Como ejemplo a continuación en la Tabla 2 se muestran los patrones pedagógicos que soportan el aprendizaje activo. (Buitrago, 2012, p. 15)

***Tabla 2.*-** Ejemplo de patrones pedagógicos que soportan el aprendizaje activo

Maximizar el aprendizaje ocupando al estudiante.	Estudiante Activo, Preferir Escribir, Preguntas de Honor, Profesor Invisible, Conferencia “escopeta”, Tubo de Ensayo, Inténtalo Tú Mismo
Tomar en cuenta diferentes niveles de habilidad e intereses.	Ejercicios de Diferentes Niveles, Estudiantes Deciden, El Profesor Selecciona Equipos, Explora Por Ti Mismo
Hacer un puente entre las diferencias del mundo educativo y el mundo real (producción/industrial).	Adoptar un Artefacto, Experiencia del Mundo Real, Maestro-Aprendiz, Crítica, Máquina que Resuelve Problemas.
Estimular el trabajo en equipo.	Grupos de Trabajo, Grupos de Estudio, Juego de Rol, Juego de Guerra
Fundamentarse en experiencias pasadas.	Profesor Invisible, Explora por Ti Mismo, Grupos de Estudio, El Profesor Selecciona Equipos, Ampliar el Mundo Conocido

Concéntrese en el panorama entero.	Estudiantes Diseñando Ágilmente, Más Largo que La Vida
Aprobar y entender la teoría.	Tubo de Ensayo, Inténtalo Tú Mismo

Fuente, Evaluación del Sistema de Recomendación de Patrones Pedagógicos (SRPP) en cursos de Geometría Euclidiana, 2012.

2.2 Referentes matemáticos

A continuación se presenta una serie de objetos matemáticos que se tendrán de referente para consolidar la investigación y tener una visión más amplia sobre la misma. Observemos.

2.2.1 Conjuntos. La palabra conjunto es un término no definido, pero intuitivamente se puede decir que, un conjunto es una lista o colección de objetos bien definidos. Los conjuntos se representan por letras mayúsculas $A, B, X, Y, \dots$ Los objetos comprendidos en un conjunto son los elementos del conjunto y se representan por letras minúsculas $a, b, x, y, \dots$ La proposición "p es un elemento de A" o, equivalentemente, "p pertenece a A" se expresa $p \in A$. La negación de $p \in A$ se escribe $p \notin A$.

2.2.2 Operaciones entre conjuntos. La unión de dos conjuntos A y B, que se denota $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B, es decir, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$ la intersección de dos conjuntos A y B, que se denota $A \cap B$, es el conjunto de los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B, es decir, $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$ Si $A \cap B = \emptyset$, es decir, si A y B no tienen elementos comunes, se dice que A y B son disjuntos.

El complemento relativo de un conjunto B respecto a un conjunto A, o simplemente la diferencia de A y B, que se denota $A \setminus B$, es el conjunto de los elementos que pertenecen a A pero que no pertenecen a B. Esto es, $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Obsérvese que $A \setminus B$ y B son disjuntos, es decir, $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

El complemento absoluto o simplemente, complemento de un conjunto A, que se denota A^ces el conjunto de los elementos que no pertenecen a A, es decir, $A^c = \{x: x \in E, x \notin A\}$

En otras palabras, es la diferencia del conjunto referencial E y el conjunto A.

2.2.3 Números naturales. Dado un conjunto A definimos el sucesor de A como $s(A) = A\ U\ \{A\}$. El conjunto N de los números naturales se construye de la siguiente manera: En primer lugar $\emptyset \in N$. Luego, agregamos $s\ (\emptyset)$ y así sucesivamente, para cada $n \epsilon N$ agregamos $s(n)$. De esta forma, un conjunto pertenece a N, si es vacío o si se puede obtener a partir del vacío mediante aplicaciones sucesivas de la regla s. Se denota así:

$0 = \emptyset$

$1 = S\ (0) = \emptyset\ U\ \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

$2 = S\ (1) = 1\ U\ \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$3 = s\ (2) = 2\ U\ \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$$4 = s\ (3) = 3\ U\ \{3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

$$N = \{0,1,2,3, \dots\}.$$

2.2.4 Números enteros. Los números enteros surgen por la necesidad de resolver problemas en que involucran a números naturales a, b de la forma $a - b$ con $a < b$.

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0,1,2,3, \dots\}$ Conjunto de los números enteros.

$Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ Conjunto de los números enteros positivos.

$Z^+\ U\ \{0\} = \{0,1,2,3, \dots\}$ Conjunto de los números enteros no negativos.

$Z^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ Conjunto de los números enteros negativos.

$Z^- U\ \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ Conjunto de los números enteros no positivos.

2.2.5 Números racionales. Los números racionales son todos los números que pueden representarse como el cociente de dos números enteros o, más exactamente, un entero y un natural positivo.

$$Q = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in Z \wedge q \neq 0\right\}.$$

2.2.6 Números irracionales. El conjunto de los números irracionales se conoce como el conjunto de los números decimales infinitos no periódicos los cuales se denotan I y se pueden ver como el complemento de los números racionales.

$$I = Q^c$$

2.2.7 Números reales. Los números reales es el conjunto de elementos que están en I o están en Q.

$$R = I \cup Q$$

Se tiene que $I \cap Q = \emptyset$

Los números reales correspondientes a los puntos a la derecha de 0 en la recta numérica se llaman números reales positivos mientras que aquellos correspondientes a los puntos a la izquierda de 0 se llaman números reales negativos. El número real 0 no es ni positivo ni negativo. La colección de números reales positivos.

2.2.8 Cardinalidad. Denotemos por $In = \{1, 2,3, ... , n\}$, el cual representa un conjunto con cantidad finita de elementos. Dos conjuntos son coordinables si existe una bisección entre ellos. Un conjunto X es finito si es vacío o si es coordinable con In para algún $n \in N$. Si X es coordinable con In decimos que la cardinalidad de X es n, o que X tiene n elementos ($n = 0$ si $X = \emptyset$). También escribimos $|X| = n$. Si X no es finito decimos que es infinito.

2.2.9 Desigualdades. Si a y b son números reales positivos y $a - b$ es positivo, decimos que a es mayor que b, y escribimos $a > b$. Esto es equivalente a decir que b es menor que a, lo cual se escribe $b < a$

Sean $a, b \in R$, entonces $a \leq b$ si y solo si $a - b \leq 0$. Se dice que " $\leq$ " es una relación de orden lineal en un conjunto X si para todo $a, b, c \in X$ se cumple:

1) $a \leq a$
2) $a \leq b,\ b \leq a \ \rightarrow a = b$
3) $a \leq b,\ b \leq c \ \rightarrow \ a \leq c.$

Dados $a, b \in X$ siempre se cumple exactamente una de las relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$. Sean $a, b \in R$ y $a < b$, entonces a está a la izquierda del punto b en la recta numérica.

2.2. 10 Valor absoluto.

$$\left| a \right| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si a < 0 \end{cases}$$

El número no negativo $\left| a \right|$ se llama el valor absoluto de a.

Para todo a y b que pertenecen al conjunto de los reales, se tiene:

$$\left| a \right| < b \quad \leftrightarrow \quad (-b < a < b) \wedge \mathrm{b} \geq 0$$

$$\left| a \right| > b \quad \leftrightarrow \quad a > b \ o \ a < -b$$

$$\left| a \right| = b \quad \leftrightarrow \quad a = b \ o \ a = -b$$

$$\left| a \right| \leq b \quad \leftrightarrow \quad (-b \leq a \leq b) \wedge b \geq 0$$

$$\left| a \right| \geq b \quad \leftrightarrow \quad a \geq b \; o \; a \leq -b$$

2.2.11 Intervalos. Los intervalos son subconjuntos de números reales. Algunas de sus representaciones gráficas son las que se presentan a continuación:

- Intervalos de la recta real se definen: Sean a, b números reales tales que $a < b$
- Intervalo abierto de a hasta $b = \{x: a < x < b\} = (a, b)$
- Intervalo cerrado de a hasta $b = \{x: a \leq x \leq b\} = [a, b]$
- Intervalo abierto - cerrado de a hasta $b = \{x: a < x \leq b\} = (a, b]$
- Intervalo cerrado - abierto de a hasta $b = \{x: a \leq x < b\} = [a, b)$.

A continuación en la tabla 1. Se observa la tabla 1 en donde podemos observar los intervalos acotados y no acotados

Tabla 3.-Intervalos abiertos y cerrados

Acotados

Nombre	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Intervalo cerrado	[a ; b]	{x/ a ≤ x ≤ b}	a b
Intervalo abierto	(a ; b)	{x/ a < x < b}	a b
Intervalos semiabiertos ó semicerrados	[a ; b)	{x/ a ≤ x < b}	a b
	(a ; b]	{x/ a < x ≤ b}	a b

No acotados

Nombre	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Superiormente	[a ; +∞)	{x / x ≥ a }	a
	(a ; +∞)	{x / x > a }	a
Inferiormente	(-∞ ; a]	{x /x ≤ a }	a
	(-∞ ; a)	{x / x < a }	a

Fuente., material didactico

2.2.12 Propiedades. A continuación tenemos algunas propiedades en los números reales en las desigualdades.

1. $\forall$ a, b, c $\in \Re$; a < b $\Leftrightarrow$ a+c < b+c.
2. $\forall$ a, b, c, d $\in \Re$ con a < b y c < d $\Rightarrow$ a+c < b+d.
3. $\forall$ a, b, c, $\in \Re$ con a < b y c > o $\Rightarrow$ a. c < b. c.
4. $\forall$ a, b, c, $\in \Re$ con a < b y c < o $\Rightarrow$a. c >b. c.

De este modo, las nociones y referentes teóricos abordados en el capítulo II, permiten comprender elementos relevantes de la Educación Matemática como de la práctica pedagógica, fundamentales en el desarrollo de la práctica pedagógica.

3. Metodología de la investigación

Este capítulo hace referencia a la metodología que se utilizó en la intervención de la práctica, durante la experiencia con los estudiantes del grado once de la Institución Educativa Los comuneros sede José Antonio Galán Nº 1, ubicada en el barrio Alfonso López de la ciudad de Popayán, con estudiantes que viven en situaciones de desplazamiento, hacinamiento familiar, además estudian y trabajan a pesar de su corta edad y en sus barrios como alrededores conviven en contextos de inseguridad, consumo de sustancias psicoactivas, violencia intrafamiliar, entre otros factores psico-sociales.

De este modo, la metodología cualitativa enfatizó en la importancia de las estrategias pedagógicas para abordar asertivamente las desigualdades de primer grado. Para ello, se tomó en cuenta el plan de estudios[2] del área de matemáticas de la Institución Educativa los Comuneros y las aplicaciones didácticas que vienen asociadas al diálogo entre maestro y alumno para que haya

[2]En dicho plan se plantean aspectos importantes, tales como, el saber hacer, el saber ser, que van a implementarse en el manejo crítico del sujeto, caracterizando el desarrollo lógico y el pensamiento matemático del estudiante.

una interacción mutua, según las condiciones curriculares y estándares básicos de competencias en matemáticas del Ministerio de Educación (MEN). Esto, teniendo en cuenta, el cómo enseñar, para qué enseñar; condiciones indispensables en el aprendizaje del estudiante, para que éste se apropie del tema y pueda epistemológicamente, conocer la esencia misma de las matemáticas.

3.1 Método de investigación

La investigación utilizada fue cualitativa, la cual tiene significados diferentes en cada momento.

> Una primera definición, aportada por Denzin y Lincoln, destaca que es “Multimetódica en el enfoque, implica un enfoque interpretativo, naturalista hacia su objeto de estudio". Esto significa que los investigadores cualitativos estudian la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas. La investigación cualitativa implica la utilización y recogida de una gran variedad de materiales: entrevista, experiencia personal, historias de vida, observaciones, textos históricas, imágenes, sonidos, que describen la rutina y las situaciones problemáticas y los significados en la vida de las personas (Rodrígez, Flores, & Eduardo, 1996).

Por lo tanto, este enfoque permitió reflexionar acerca de nuestro oficio como docentes. Dado que el practicante es un sujeto que está en constante observación y puede determinar las dificultades y obstáculos que presentan los estudiantes en la resolución de desigualdades de primer grado y a su vez con la recolección de datos contribuir de manera crítica y analítica en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

3.2 Población de la investigación

La práctica pedagógica se llevó a cabo con 19 estudiantes del grado once de la Institución Educativa Los Comuneros, sede José Antonio Galán Nº 1. El 90% de los alumnos vive en la comuna 6 de la ciudad de Popayán y el 10% restante proviene de municipios y comunas vecinas.

3.3 Recolección de datos

Para la recolección de datos fue necesario acompañar el proceso de aprendizaje de cada estudiante (observación participante). Adicionalmente, se usaron herramientas metodológicas como un diagnóstico inicial que permitió identificar los saberes previos sobre los objetos matemáticos para la resolución de desigualdades de primer grado (operaciones entre números reales, conjuntos, operaciones algebraicas, solución de desigualdades, entre otros), y se implementó imágenes, hojas de talleres, evaluaciones que permitieran el análisis en cada uno de los procedimientos realizados por los estudiantes de grado once del plantel en mención.

3.4 Fases de investigación

Antes de enunciar las fases de investigación, es importante mencionar que la práctica pedagógica en la Institución Educativa Los Comuneros Sede José Antonio Galán No. 1, empezó desde nuestra primera visita a dicho plantel, con el fin de interactuar con directivos, docentes y practicantes; de esta manera, establecimos compromisos y responsabilidades para el desarrollo de la misma. Esa primera inmersión, permitió conocer los practicantes y docentes, a partir de una breve presentación de cada uno, además de conocer las instalaciones del centro educativo. Seguidamente, cada practicante pasó por los diferentes cursos en las distintas asignaturas, conociendo distintos enfoques pedagógicos de cada docente en el aula de clase y permitiendo una buena relación con la mayoría de estudiantes y educadores. Una vez culminadas las rotaciones, los practicantes escogimos un curso donde se realizaría la práctica pedagógica, mi elección: grado once.

En consecuencia, a continuación se presentan las dos fases de investigación tenidas en cuenta para el desarrollo de este trabajo.

3.4.1 Diagnóstico. Se inició con un examen tipo diagnóstico para identificar los saberes previos de cada estudiante. El objetivo de este diagnóstico era identificar el desarrollo de los procesos de aprendizaje de los 19 estudiantes de grado once de la sede José Antonio Galán No 1 en el área de matemáticas, además, reconocer las competencias matemáticas como los errores y problemas que tenían para empezar a construir estrategias de enseñanza que facilitaran el proceso de aprendizaje y reconocimiento de las desigualdades de primer grado. El examen diagnóstico estaba constituido de la siguiente manera:

- Operaciones entre números reales (suma, producto, diferencia y división).
- Operaciones entre conjuntos.
- Operaciones algebraicas.
- Utilización del plano cartesiano.

3.4.2 Diseño de actividades

A continuación en la Tabla 4, se puede observar las actividades propuestas para los 19 estudiantes del grado once de la Institución enunciada a lo largo y ancho del texto.

Tabla 4-. Diseño de actividades

Actividad de diagnóstico #1	Hallar el resultado de operar las siguientes expresiones	1. 8(x- 6x)- 4x + 5= 2. 5(- 3x - 2) - (x - 3) = -4(4x + 5) + 13 = 3. $\mathbf{2(a - 3) + 4b - 2(a - b - 3) =}$ 4. |x - 2| - 4|-6|=
Actividad de diagnóstico #2	Representar algebraicamente las siguientes proposiciones.	1. disminuye en seis el doble del cuadrado de un número 2. el doble de un número, menos su mitad 3. la base excede en cinco unidades a la altura. 4. El área del rectángulo es de 75 cm2. a·b=75
Actividad de diagnóstico #3	Representar algebraicamente las siguientes proposiciones y resolverlas	1. 1(2x + 7) = 2(x + 5) 2. 12 + 2(x – 3) = 3 3. $(3x + 8) + (x + 5) = 16x^2 + 1$

Fuente. Propia, 2019.

A partir de dichas actividades busqué que el estudiante participara activamente, haciendo uso de la lectura de los enunciados y transformando estos en expresiones algebraicas. Cabe destacar que los estudiantes siempre fueron el centro de atención, ya que ellos analizaban y hallaban la solución a cada problema, apropiándose del conocimiento. Esto me permitió identificar fortalezas, dificultades y métodos de trabajo.

4. Análisis de resultados

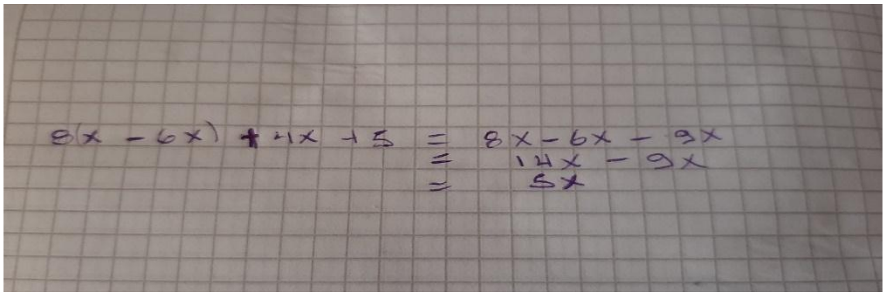
En este apartado se revisarán las dificultades y los obstáculos (didácticos y epistemológicos) que el practicante observó en la experiencia pedagógica con los 19 alumnos del grado once de la sede José Antonio Galán Nº 1 dentro y fuera del aula, ya que también se hicieron refuerzos extracurriculares.

4.1 Resultados del diagnóstico

Los datos de la fase diagnóstica se registraron a través de notas, fotografías y en los cuadernos de cada uno de los 19 estudiantes, no obstante, en algunas ocasiones se escribió en la hoja de la evaluación. Por tanto, el material escrito se recopiló con el objetivo de hacer un análisis acerca de los saberes previos de los estudiantes antes de abordar la solución de desigualdades de primer grado. Aquí vemos algunos de los puntos de la evaluación diagnóstica.

- **Dificulta 1.** En la imagen 1 se observa un obstáculo epistemológico que presenta un estudiante cuando se pide hallar el resultado de la siguiente expresión algebraica.

Imagen 1-.Obstáculo epistemológico en expresión algebraica.



Fuente. Propia, 2019.

En la imagen 1 se puede observar que el estudiante resuelve la expresión algebraica y su resultado es $5x$, dado que realiza la suma de todos los coeficientes sin tener en cuenta las variables, es decir, no ha logrado comprender la suma como la diferencia algebraica de cualquier conjunto, donde la operación (+) y (-) esté definida y sólo sea posible con objetos de la misma naturaleza.

Cabe resaltar que al aplicarse la evaluación diagnóstica, el 85% de los alumnos del grado once presentaron este obstáculo epistemológico.

El análisis de este resultado pudo determinar la estrategia que usó el estudiante para escribir la respuesta incorrecta. En la siguiente tabla se describe una interpretación de su razonamiento.

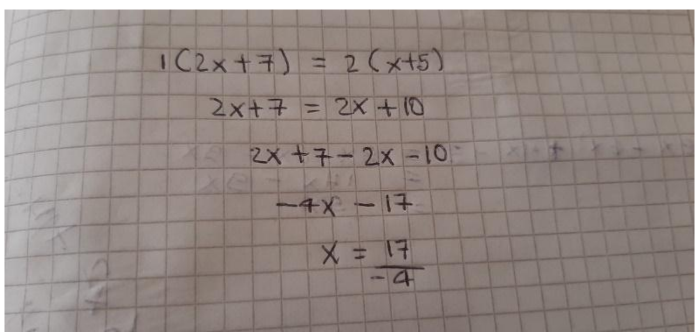
Tabla 5-. Interpretación de razonamiento dificultad 1.

Procedimiento	Justificación
8(x- 6x)- 4x + 5=	Ejercicio propuesto
$= (8 - 6 - 4 + 5)x$	Error encontrado
$= 5x$	Respuesta incorrecta, es un error debido a la ausencia de conocimientos previos.

Fuente. Propia, 2019

- **Dificultad 2.** En la imagen 2se observa un obstáculo epistemológico que presenta un estudiante cuando se pide hallar el resultado de la siguiente ecuación.

Imagen 2-. Obstáculo epistemológico en ecuación

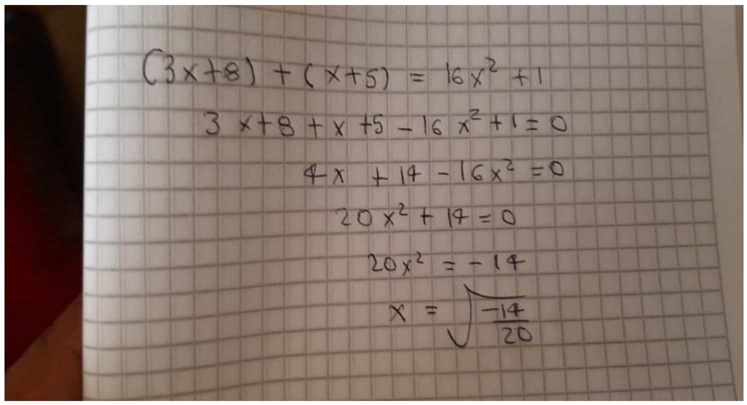


Fuente. Propia, 2019.

En la imagen 2 se puede observar que el estudiante aplica bien la propiedad distributiva de los números enteros para “eliminar los paréntesis”, es decir, opera correctamente el producto entre 1(2x + 7) y 2(x + 5) para obtener 2x + 7= 2x +10, sin embargo, se observa que el estudiante escribe como resultado final $x = \frac{17}{-4}$. El inconveniente de este ejercicio para el estudiante radica en la dificultad de operar números enteros, dado que él obtiene como resultado la suma de coeficientes $2 - 2 = 4\ y\ 7 - 10 = 17$.

- **Dificultad 3.** En la imagen 3 se pueden evidenciar dos resultados que escribió un estudiante cuando se pide hallar la solución a la siguiente ecuación:

Imagen 3-. Dificulta para analizar inversos aditivos y operar números enteros



Fuente. Propia, 2019

En el primer caso, el estudiante obtiene $3x + 8 + x + 5 - 16x^2 + 1 = 0$ Se podría interpretar mediante la observación que, el alumno está teniendo dificulta al analizar los inversos aditivos dado que la correcta solución viene dada por $3x + 8 + x + 5 - 16x^2 - 1 = 0$, por otro lado luego el obtiene esta deducción $20x^2$ + 14 = 0 lo cual es muy interesante dado que nuevamente parece tener problema en identificar objetos de la misma naturaleza y por esta cuestión se origina una suma errónea , dado que se identificó que el estudiante sumo (4x - $16x^2$), pero además, se puede observar que también presenta dificultades en operar con números enteros, dado que él obtiene como resultado al realizar la suma de coeficientes lo siguiente $4 - 16 = 20$.

Esta última apreciación permite deducir que el 87% de los estudiantes de grado once tienen problemas con operaciones entre números reales como también al identificar la naturaleza de los objetos, por esta cuestión la resolución de ecuaciones tiene una gran dificultad en su desarrollo.

El análisis del resultado anterior permite concluir que el alumno procedió de la siguiente manera.

Tabla 6-. Interpretación de razonamiento dificultad 3.

Procedimiento	Argumento
$(3x+8)+(x+5)=16x^2+1$	Ejercicio propuesto
$0\ =3x+8+x+5-16x^2+1$	Error debido a cálculos incorrectos o accidentales
$0\ = 4x + 14 - 16x^2$	
$0=(4\pm(-16))x^2+14$	Es un error debido a la ausencia de conocimientos previos.
$0 = 20x^2\ + 14$	Error a causa de lo anterior
$x = \sqrt{\frac{-14}{20}}$	Respuesta incorrecta

Fuente. Propia, 2019

4.2 Resultados de las actividades (# 1,2 y 3).

El análisis de los resultados de la fase diagnóstica determinó que la mayoría de los estudiantes del grado once de la sede José Antonio Galán Nº 1, presentó dificultades en:

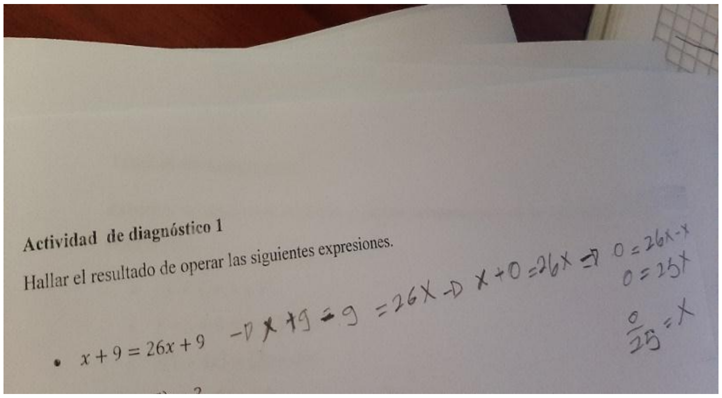
- ✓ Dificultad para sumar términos semejantes.
- ✓ Errores de operaciones elementales y procedimiento en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico en la resolución de ecuaciones.

- ✓ No reconocen el significado de las ecuaciones y no usan el signo de igualdad, lo que impide resolver problemas que contienen un lenguaje algebraico.
- ✓ Dificultad con las sumas algebraicas.
- ✓ Dificultad en operaciones aritméticas.

Por esto fue necesario desde el papel del practicante, reforzar todas estas ideas para avanzar hacia la resolución de desigualdades de primer grado. En las clases se propusieron ejercicios para operar ecuaciones donde se aplicara la suma de términos semejantes, se realizaran operaciones algebraicas y aritméticas, y así poder nivelar de alguna forma a los estudiantes. Es importante resaltar que algunos obstáculos que presentaron los 19 estudiantes del grado once en la fase diagnóstica, fueron superándose a medida que se implementaron las actividades, sin embargo, también prevalecieron algunos obstáculos. A continuación, algunos de los resultados encontrados.

- Actividad de retroalimentación ejercicio 1.

Imagen 4-. Dificultad 1(Diagnóstico) superada.



Fuente. Propia, 2019.

En la imagen 4 se puede observar el resultado correcto que escribió el estudiante durante la actividad I. Este resultado evidencia la superación de la dificultad 1 que apareció en la fase anterior (diagnóstico).

Por otra parte, el análisis de este resultado deja en evidencia el procedimiento que realizó el estudiante para dar la respuesta correcta, sin embargo, lo interesante es la interpretación que el chico obtiene ya que él deja la expresión algebraica en términos comunes 9 -9 = 26x – 1x, evitando así los errores que obtuvo en el diagnóstico.

Un aspecto relevante acerca del primer refuerzo es que cerca del 70% de los alumnos de grado once superaron este obstáculo, es decir, empezaron a comprender mejor la naturaleza de los objetos, como las adecuadas manipulaciones en las operaciones algebraicas y aritméticas. A continuación, se presenta una interpretación de dichos procedimientos en la siguiente tabla.

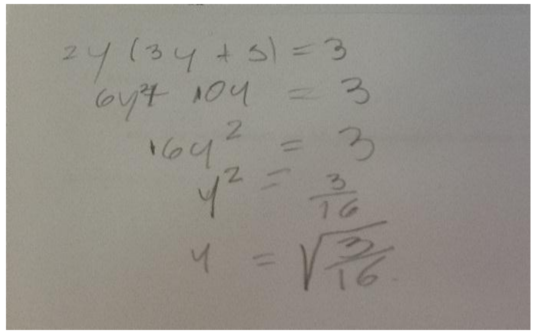
Tabla 7-. Interpretación de razonamiento Dificultad 1(Diagnóstico) superada.

Procedimiento	**Argumento**
$x + 9 = 26x + 9$	Ejercicio Propuesto.
9-9 = 26x – 1x	Entiende satisfactoriamente la naturaleza de los objetos comunes.
0 = 25x	Efectúa bien las operación sustracción entre coeficiente enteros.
$3\ \sqrt{\frac{0}{25}} = x$	Respuesta correcta.

Fuente. Propia, 2020

- **Taller de retroalimentación ejercicio 5.** En la imagen se puede ver la dificultad que tuvo el estudiante con el desarrollo de este ejercicio. En este resultado particular, se observa que él desarrolló bien la distribución pero presentó un error al sumar objetos de diferente naturaleza.

Imagen 5-. Error a causa de la operación



Fuente. Propia, 2019.

El análisis de los datos permitió determinar los posibles procedimientos que aplicó el estudiante en el momento de resolver el ejercicio. A continuación, se presenta una interpretación de dichos procedimientos en la siguiente tabla.

Tabla 8-. Interpretación de razonamiento taller de retroalimentación ejercicio 5.

Procedimiento	**Argumento**
$2y(3y+5)=3$	Ejercicio Propuesto.
$3=6y^2+10y$	Comienza aplicando incorrectamente la propiedad distributiva respecto a la suma.
$3=(6+10)y^2$	Es un error debido a la ausencia de conocimientos previos.
$3=16y^2$	Error a causa de la operación anterior
$\sqrt{\frac{3}{16}}=$ y	Procedimiento correcto pero la respuesta es incorrecta.

Fuente. Propia, 2019.

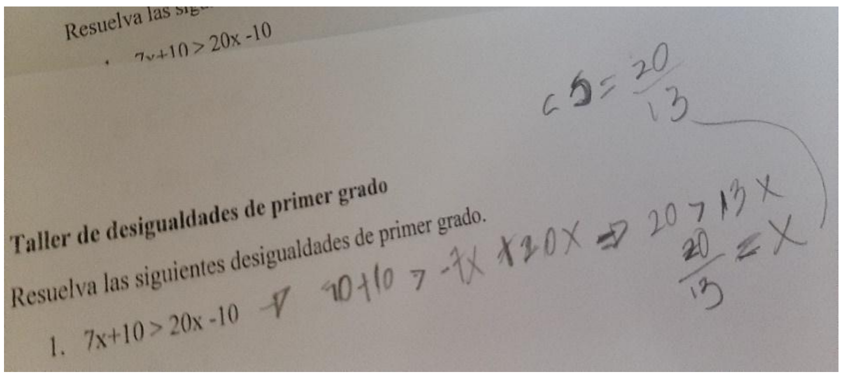
Por lo expuesto, se evidencia que la dificultad del estudiante radicó en sumar objetos de diferente naturaleza, no obstante, es oportuno señalar también que él superó las fallas que tenía en los procedimientos en las operaciones con número reales.

4.3 Resultados Desigualdades de primer grado.

En este apartado se revisan los resultados que se obtuvieron en la ejecución de los ejercicios de desigualdades de primer grado. Esto, permite un análisis reflexivo acerca de las estrategias que aplicaron los estudiantes del grado once en la resolución desigualdades de primer grado. A continuación, se presentan algunos obstáculos y dificultades que dejaron en evidencia los alumnos luego de realizarse un análisis de los resultados.

- **Actividad de desigualdades de primer grado, ejercicio 1.**

Imagen 6-. Dificultad desigualdades de primer grado, ejercicio 1.



Fuente. Propia, 2019.

La imagen anterior muestra el procedimiento que realizó un estudiante del grado once cuando se disponía a realizar solución de la desigualdad. Por tanto, se evidencia que la estrategia que usó para resolver el ejercicio fue realizar el mismo procedimiento que se había trabajo con las ecuaciones lineales y lo implementó a las desigualdades de primer grado. Sin embargo, en este caso, la dificultad radica en la mala interpretación del conjunto solución, ya que el 75% de los estudiantes resolvieron la desigualdad pero interpretaron de forma errónea el conjunto solución. Es importante resaltar que se utilizó como propuesta en este ejercicio el patrón llamado Maximizar el aprendizaje ocupando al estudiante, el cual permitió que se despertara el interés, una mejor apropiación, competencia y compresión de esta temática.

En la siguiente tabla, se presenta un análisis del resultado descrito, en ella se muestra una aproximación por parte del practicante acerca del procedimiento que consideró el estudiante.

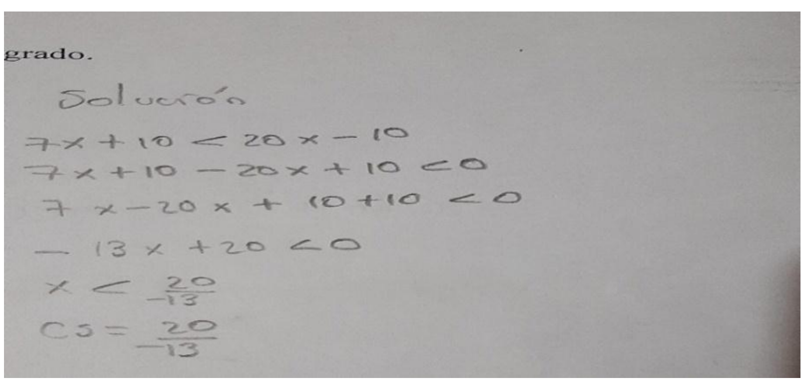
Tabla 9-. Interpretación de razonamiento dificultad desigualdades de primer grado, ejercicio 1.

Procedimiento	Argumento
7x + 10 < 20x - 10	Desigualdad propuesta
10+ 10 < 20x - 7x	Deja la desigualdad en términos semejantes (correcto)
20 < 13x	Realiza la suma los términos semejantes (correcto)
$\frac{20}{13} < x$ c	Efectúa correctamente el despeje de la incógnita x
$s = \frac{20}{13}$	Error debido a la ausencia de conocimientos previos

Fuente. Propia, 2019.

- **Actividad de desigualdades de primer grado, ejercicio 1.**

Imagen 7-. Dificultad desigualdades de primer grado, ejercicio 1.



Fuente. Propia, 2019

Para este ejercicio los estudiantes crearon grupos de estudio en donde en primera estancia se nombra un monitor, el cual tiene como función debatir el análisis y la comprensión que los integrantes de su grupo habían hecho sobre el ejercicio para luego exponerlo. Esto permite como docente identificar los errores e inconvenientes que se pudieron encontrar. (Fundamentarse en experiencias pasadas).

En la imagen se puede observar el mismo ejercicio anterior, es decir, se pide al estudiante que despeje la incógnita x de la desigualdad anterior, sin embargo, este resultado es aún más interesante dado el resultado final $x < \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{-13}}$, como se puede notar, efectúa bien el procedimiento al resolver la desigualdad, pero olvida la orientación del signo en la desigualad. El procedimiento se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 10-. Interpretación de razonamiento dificultad desigualdades de primer grado, ejercicio 1.

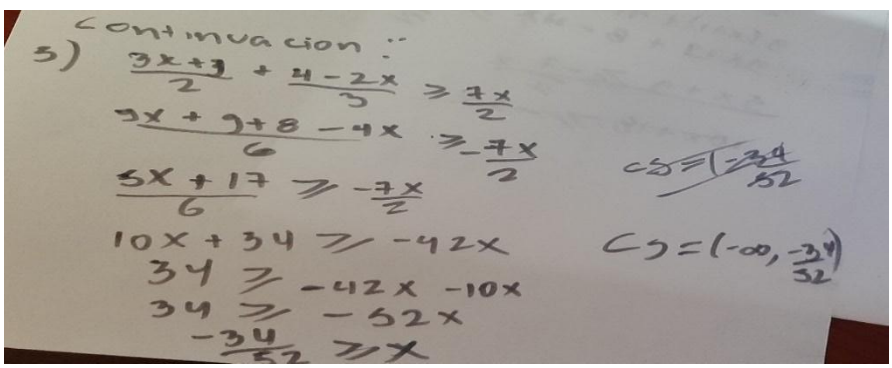
Procedimiento	Argumento
7x + 10 < 20x - 10	Desigualdad propuesta
7x + 10 - 20x + 10 < 0	Pasó correctamente los términos de la derecha de la desigualdad con los signos adecuados.
(7x - 20x) + (10 + 10)< 0	Agrupa correctamente los términos semejantes.
-13x +20 < 0	Opera correctamente la suma de números enteros.
$x < \frac{20}{-13}$	Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales.
$cs = \frac{20}{-13}$	Error debido a la ausencia de conocimientos previos.

Fuente. Propia, 2019

Claramente, se puede ver que el resultado final no es correcto, así pues, como docente encargado de su aprendizaje fue importante corregirle y explicarle el ejercicio, ya que el error estuvo en cómo efectuó el despeje de la incógnita x y en el conjunto solución.

- **Actividad de desigualdades de primer grado, ejercicio 4.**

Imagen 8-. Dificultad desigualdades de primer grado, ejercicio 4.



Fuente. Propia, 2019.

En la imagen 8 se puede observar el resultado que escribió un estudiante cuando se le pidió encontrar el valor de la incógnita de la desigualdad $\frac{3(X+1)+}{2}\frac{2(2-X)}{3} \geq -\frac{7X}{2}$. Este ejercicio es un poco más complejo que el anterior, pues le exige al estudiante manipulación algebraica, aritmética, al igual que conceptos que se trabajaron en el diagnóstico y talleres próximos a él (Aprobar y entender la teoría). De este modo, aunque el estudiante resolvió el ejercicio, éste concluye incorrectamente. A continuación, un análisis del procedimiento para resolver la desigualdad de primer grado.

Tabla 11-. Interpretación de razonamiento dificultad desigualdades de primer grado, ejercicio 4.

Procedimiento	Argumento
$\frac{3(X+1)+2(2-X)}{2\quad\quad 3} \geq -\frac{7X}{2}$	Desigualdad propuesta.
$\frac{3x+3}{2}+\frac{4-2x}{3} \geq -\frac{7X}{2}$	Elimina bien el paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva respecto a la suma de número enteros.
$\frac{9x+9+8-4x}{6} \geq -\frac{7X}{2}$	Realiza bien los procedimientos algebraicos. Agrupa bien los términos semejantes, este paso fue muy interesante ya que el estudiante logra superar los errores del diagnóstico anterior y comprende mejor la naturaleza de los objetos.
$\frac{(9x-4x)+(9+8)}{6} \geq -\frac{7X}{2}$	Opera bien la suma de los números enteros.
$\frac{5x+17}{6} \geq -\frac{7X}{2}$	Efectúa bien la operación producto entre números enteros.
$10x+34 \geq -42x$	Realiza una buena agrupación de términos semejantes

$34 \geq -42x - 10x$	Realiza bien la suma de los coeficientes enteros.
$34 \geq -52x$	Este paso es importante resaltarlo ya que el estudiante efectúa una multiplicación por -1 a ambos lados de la desigualdad, pero no tuvo en cuenta el signo de la desigualada lo cual produjo que la respuesta fuera errónea.
$-\mathbf{\frac{34}{52}} \geq x$	Este paso es interesante ya que por el concepto anterior la solución es errónea, pero se puede evidenciar que el estudiante no realiza una asimilación entre los intervalos abiertos como los intervalos cerrados.
Cs= $(-\infty, \mathbf{\frac{-34}{52}}$ **)**	Esta dificulta se presenta ya que en la teoría aplicada por el profesor titular hubo inconvenientes en el proceso de enseñanza de este tema en particular y así se puede identificar como un obstáculo didáctico. Este es un error debido a la ausencia de conocimientos previos.

Fuente. Propia, 2019

5. Propuesta de enseñanza y aprendizaje sobre las desigualdades de primer grado.

Esta propuesta presenta algunas actividades que pueden ser utilizadas para trabajar la temática de desigualdades de primer grado en la alguna institución. En la primera parte se tiene en cuenta algunos ítems importantes que debemos tener presente los docentes antes de dictar cualquier temática; en la segunda parte se proponen actividades que permitan retomar algunos conceptos matemáticos básicos que deben ser comprendidos a profundidad por el grupo de estudiantes para poder estudiar el concepto de desigualdad. Posteriormente se plantean algunos problemas relacionados con situaciones de la vida Cotidiana, de manera que se logre mayor profundización de los conceptos y la comprensión de la utilidad de las desigualdades.

5.1. Conceptos que deben tener en cuenta los docentes en formación y práctica:

- Crear condiciones que permiten a cada estudiante "desenvolverse" y reflexionar sobre el tema realizado: no se trata de simplemente repetir, sino analizar, construir y reconstruir lo que fue analizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de desigualdades de primer grado considerando el enfoque constructivista.
- Aprendizaje a partir de experiencia, dado que a partir de ellas los estudiantes asimilan e integran nuevos conocimientos.
- Contexto cultural y natural: debe considerarse lo que está presente en el programa de estudios como parte de lo que el alumnado conoce previamente y es parte del contexto cultural, pero también debe integrarse lo que sabe a partir de su entorno y su experiencia cotidiana.
- Ofrecer opciones para los diferentes ritmos y estilos de aprendizaje: la enseñanza constructivista permite a cada alumno avanzar según sus necesidades de aprendizaje y el nivel de desarrollo que haya alcanzado.

- Propiciar el descubrimiento y la construcción de nuevos conocimientos
- Provocar conflictos cognitivos, se reconoce la importancia del error como un elemento esencial del proceso de aprendizaje.
- Propiciar la vivencia de relaciones docente-alumno, alumno-alumno: permite compartir conocimientos y experiencias (Vargas, 2013)

5.2. Actividades propuestas:

Actividad 1: Con estos ejercicios se pretende que el grupo de estudiantes de grado 11:

1. Examen diagnóstico.
2. Profundice en el significado de los números reales y sus relaciones de orden.
3. Utilice de manera adecuada la simbología.
4. Use situaciones concretas para comprender el significado los signos de la relaciones de orden.

Ejercicios:

- Determine 5 valores que se encuentre en el siguiente intervalo $10< X< 5$
- Establezca 7 valores que correspondan a las alturas de edificios que midan más de 1,5 metros y menos de 1,87 metros.
- Determine posibles estaturas de personas que miden más de 1.55 metros.
- Represente en una recta numérica cada una de las situaciones planteadas en 1, 2 y 3.
- Realizar ejemplos donde se determinen las relaciones de orden entre números reales.

Actividad 2: Se pretende que los estudiantes de grado 11:

1. Justifiquen los resultados obtenidos y puedan identificar las propiedades de las operaciones como el conjunto solución posible.
2. Relacione dichos resultados y puedan encontrar por si mismos la solución a las desigualdades de primer grado

Ejercicios:

- Identificar que clase es el intervalo de la actividad 1, ítem 3
- Observar cuales son los intervalos correspondientes en la actividad 1, ítem 1 y 2.
- Proponer ejemplos donde se pueda observar los intervalos cerrados, abiertos, semicerrado y semiabierto.
- $5 < -3y$, realice detalladamente el siguiente ejercicio.

Actividad 3: Se espera que el grupo de estudiantes:

1. Comprenda el significado de la solución de una desigualdad primer grado.

Ejercicios: Resuelva las siguientes desigualdades y grafique su solución.

- $-5(x+1) < x - 7$
- $2(x-1) - 4 > 3x +$
- $-2x+1 > x - 3\left(\frac{x+5}{2}\right)$
- $.1 \geq 5x+6$
- $\frac{a}{2} - 1 \leq \frac{2a}{3} + 2$
- $\frac{3-x}{2} - \frac{4-6x}{3} \leq \frac{2x-8}{3}$

Actividad 4: los estudiantes deben:

1. Analizar el procedimiento para resolver una desigualdad de primer grado.

Ejerció:

Se debe examinar los procedimientos que se utilizaron para resolver las desigualdades en la actividad 3 y argumentar el porqué de los resultados en cada caso.

Actividad 5: Se pretende:

1. Aplicar desigualdades de primer grado en la solución de problemas.

Ejercicios:

- Lorena tiene 20 años menos que Andrea. Si las edades de ambas, suman menos de 86 años. ¿Cuál es la máxima edad que podría tener Lorena?
- Un número natural es tal que la sexta parte del número anterior es menor que 6; además la sexta parte del número natural siguiente es más que 6. ¿Cuál será la raíz cuadrada del número natural, disminuido en 1?
- Si en medio kilogramo de manzanas se puede tener de 4 a 6 manzanas, ¿cuál es el menor peso que puede obtenerse con 9 docenas de ellas?
- El número de alumnos de un aula es menor que 240 y mayor que 100; se observa que los 2/7 del total usan anteojos y los 5/13 son alumnos de ciencia. La suma de los alumnos que usan anteojos con los de la especialidad de ciencia, será:
- Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre el peso de la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1. Conclusiones

Las siguientes conclusiones se generan a partir de los instrumentos de observación que se construyeron para cada momento y fase del trabajo de investigación realizada sobre desigualdades de primer grado.

- Los estudiantes del grado once de la sede José Antonio Galán Nº 1, en un 70% superaron los errores matemáticos, debido a la recuperación de un esquema previo y los errores por cálculos incorrectos o accidentales, se superaron gracias a los talleres de retroalimentación como a las clases extracurriculares, dado que éstas sirvieron para que ellos interactuaran, observaran y despertaran su curiosidad y gusto por las matemáticas, específicamente, en el tema de desigualdades de primer grado.
- Se identifica también que en 75% de los estudiantes de grado once de la sede en mención, resolvió desigualdades de primer grado, pero no pudieron generar los conjuntos solución correctamente, dado que tenían dificultades en generar estas soluciones por la apropiación de conceptos que están inmersos en la clase de conjuntos: números reales, desigualdades, infinito, entre otros.
- Las situaciones problema planteadas donde se combinó el álgebra, la aritmética, con las desigualdades, permitió en los estudiantes nuevas alternativas y caminos solución, dado que mejoró y amplió en ellos, las competencias pensamiento variacional y algebraico.
- La superación en gran parte a todos estos vacíos matemáticos se debió al empeño y esfuerzo de los estudiantes por querer un futuro mejor, dado que el ámbito donde ellos

conviven no es el adecuado y estar inmersos en diversas situaciones psico-sociales, muchas veces desembocan en deserción escolar.

6.2. Recomendaciones

- Se debe tener en cuenta la contratación de docentes licenciados en matemáticas, ya que ellos tienen la pedagogía y el conocimiento matemático para fortalecer dicha área en los estudiantes.
- Se recomienda estimular constantemente el desarrollo del álgebra aplicada a los ejercicios que se realicen en cada período, ya que desarrollando gradualmente la comprensión de ésta, se puede evidenciar que el estudiante realiza una mejor apropiación de temas matemáticos.
- Se debe propiciar espacios en la clase para hacer lecturas de pensamiento crítico y opinión, ya que el estudiante debe tener la posibilidad de debatir con argumentos los resultados obtenidos, dejando así lo tradicional, lo memorístico, lo mecánico. Hay que enseñar a saber hacer, a saber resolver un problema de la vida cotidiana, permitir que el educando sea el creador de su conocimiento, explotando la creatividad e innovación.
- Se recomienda leer la Propuesta de enseñanza y aprendizaje sobre las desigualdades de primer grado, ítem 5.

Bibliografía

Beltran, D. R. (24 de agosto de 2017). La calidad de la educación en Colombia, una mirada crítica. *las 2 orillas* .

Bernardis, S., Liliana, N., & Scaglia, S. (3 de 12 de 2017). *scielo.*Obtenido de scielo: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262017000300161

Chavarría, J. (2006a). *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.Obtenido de Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.

Chavarría, J. (2006b). *Teoría de las situaciones didácticas.* Obtenido de Teoría de las situaciones didácticas: http://www.unige.ch/fapse/clidi/textos/teoria%20de%20las%20situaciones%20didacticas.pdf

Cortina, J., Zúñiga, C., & Visnovska, J. (23 de 08 de 2013). *scielo.*Obtenido de scielo: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262013000200002

D, G. J. (2003). *Razonamiento algebraico y su didactica para maestros* . Obtenido de Razonamiento algebraico y su didactica para maestros : https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf

Educacion, M. d. (22 de 11 de 2017). *La didáctica de la matemática como disciplina científica.* Obtenido de La didáctica de la matemática como disciplina científica: http://www.aportes.educ.ar/sitios/aportes/recurso/index?rec_id=107764&nucleo=matematica_nucleo_ense%C3%B1anza

El Espectador. (3 de diciembre de 2019). Pruebas Pisa. *Colombia obtuvo puntajes más bajos que el promedio de la OCDE*.

García, J. J. (10 de 08 de 2015). *educadLAB.* Obtenido de educadLAB: http://educalab.es/-/las-buenas-relaciones-entre-profesores-y-alumnos-juegan-un-papel-fundamental-en-el-desarrollo-socioafectivo-y-rendimiento-academico-en-la-escuela

Godino. (2004). *Igualdad, Mapa mental* . Obtenido de Igualdad, Mapa mental .

Godino, P., & Resito, M. (17 de 03 de 2017). *universidad Nacional del Rosario.* Obtenido de universidad Nacional del Rosario: https://rephip.unr.edu.ar/bitstream/handle/2133/7175/1303-17%20MATEMATICA%20Inecuaciones.pdf?sequence=2

González, M. d. (2018). El error como herramienta de enseñanza y aprendizaje. *tiching*, 2.

Pineda, M. P. (12 de 2003). *Manual de estrategias de enseñanza / aprendizaje* . Obtenido de Manual de estrategias de enseñanza / aprendizaje : https://www.ucn.edu.co/Biblioteca%20Institucional%20Cemav/AyudaDI/recursos/ManualEstrategiasEnsenanzaAprendizaje.pdf

Pulzo. (04 de diciembre de 2019). Pruebas pisa. *Rajada de estudiantes colombianos en las pruebas pisa es culpa de maestros, dice experto*, pág. 1.

Rodríguez, G., Flores, J., & Eduardo, J. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa* . Obtenido de Metodología de la Investigación Cualitativa : http://www.albertomayol.cl/wp-content/uploads/2014/03/Rodriguez-Gil-y-Garcia-Metodologia-Investigacion-Cualitativa-Caps-1-y-2.pdf

Sánchez, M., Araya, R., & Mora, R. (27- 29 de 09 de 2017). *Encuentro Provincial de Educación Matemática.* Obtenido de Encuentro Provincial de Educación Matemática: https://core.ac.uk/download/pdf/193097872.pdf

Tringueros, M., & Ursini, S. (03 de 2011). *la conceptualizacion de la variable en la enseñanza media.* Obtenido de la conceptualizacion de la variable en la enseñanza media: https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=http://funes.uniandes.edu.co/10214/1/Conceptualizacion2000Trigueros.pdf&ved=2ahUKEwiWzK3pt_XpAhUHTN8KHW1cBY4QFjACegQIBhAB&usg=AOvVaw2RWbUMySw8YQjx1W_h2wV8

Anexos

Anexo 1. Actividad de diagnóstico 1.

Hallar el resultado de operar las siguientes expresiones.

- $x + 9 = 26x + 9$
- $2y(3y + 5) = 3$
- $(3a + 1)(5a + 4) = 2$
- $4z + z(2z + 3) = 3 - z$

Anexo 2. Actividad de diagnóstico 2.

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes de grado once transformen un enunciado en lenguaje común a un lenguaje simbólico, es decir modelar algebraicamente una proposición. De esta manera, la actividad consistía en representar algebraicamente las siguientes proposiciones.

7. disminuye en seis el doble del cuadrado de un número
8. el doble de un número, menos su mitad
9. la base excede en cinco unidades a la altura.
10. El área del rectángulo es de 75 cm2. a·b=75

Anexo 3. Actividad diagnóstico No 3.

El objetivo de esta actividad se centra en la resolución de ecuaciones; se pretende que el estudiante modele algebraicamente el ejercicio y posteriormente la resuelva.

Representar algebraicamente las siguientes proposiciones y resolverlas.

11. $1(2x + 7) = 2(x + 5)$

12. $12 + 2(x – 3) = 3$

13. $(3x + 8) + (x + 5) = 16x^2 + 1$

Anexo 4. Taller de retroalimentación.

Resuelva los siguientes ejercicios y realice comparaciones de los resultados con sus compañeros.

- $2x + 3 = x + 9$
- $1 - x + 3 = x - 3 - 5x$
- $3(1 + 4x) = (3x - 3)4$
- $x + 9 = 26x + 9$
- $2y(3y + 5) = 3$

Anexo 5. Taller de desigualdades de primer grado.

Resuelva las siguientes desigualdades de primer grado.

1. $7x+10 > 20x -10$
2. $5 - x < 12$
3. $4(6 - x) + 1 \leq 12$
4. $(3x- 6) + 5 (4x-41) \geq 3$
5. $\frac{3X+1}{3} + \frac{2-X}{2} \geq - \frac{7X}{2}$
6. $\frac{X-3}{2} + \frac{2-X}{23} < 2$