Enseñanza de Estrategias Heurísticas y su Incidencia en la Resolución de Problemas Tipo Olimpiadas Matemáticas

Edilson Moncayo Chaca

Leimar Benitez Ordoñez

Universidad del Cauca

Facultad de ciencias exactas y de la educación,

Popayán - Cauca

2023

Enseñanza de Estrategias Heurísticas y su Incidencia en la Resolución de Problemas Tipo Olimpiadas Matemáticas

Edilson Moncayo Chaca

Leimar Benitez Ordoñez

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director (a):

Dr. Jhon Jairo Perez

Línea de Investigación:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Universidad del Cauca

Facultad de educación, Departamento de matemáticas

Popayán- Cauca

2023

Nota de aceptación:

El presente trabajo de grado fue aprobado por el asesor y respectivo evaluador

Vo. Bo. Aldo Parra

Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Jhon Jairo Perez

Asesor

Vo. Bo. Jhon Jair Jiménez Gutierrez

Evaluador

fecha de sustentación: 14-03-2023

Tabla de contenido

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

Introducción

El propósito de esta investigación, consiste en orientar un trabajo a partir de estrategias heurísticas y observar su incidencia en la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas en estudiantes entre las edades de 12 a 16 años de algunas instituciones educativas del departamento del Cauca.

Asimismo, el proyecto que se denomina: *Enseñanza de estrategias heurísticas y su incidencia en la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas* se concibe como una investigación de tipo cuantitativa y cualitativa, ya que esto permite probar con exactitud las hipótesis planteadas en la investigación. La población objeto de estudio está integrada por estudiantes que participan en las olimpiadas Unicauca 2020 en modalidad virtual (esto debido a la actual pandemia del *Covid-19*), una muestra conformada por 30 estudiantes entre las edades de 12 a 16 años pertenecientes a algunas instituciones del departamento del Cauca de carácter público y privado.

De esta manera, las estrategias heurísticas a partir del modelo presentado por Schoenfeld son adaptadas en la resolución de problemas de tipo olimpiadas matemáticas mediante actividades que se llevan a cabo con el estudiantado en varias sesiones. Por lo tanto, desde un contexto situado, el proyecto se establece en la idea de que resolver un problema no es algo lineal, ni mecánico o de memorización; es decir, no se fija un proceso o algoritmo que lleve a la solución de todo tipo de problemas. Se pretende que el estudiantado sea consciente de su aprendizaje y de los beneficios que ofrece el uso de herramientas que le permitan un mayor afianzamiento del saber matemático; en consecuencia, una comprensión elevada de lo que se realiza.

Metodológicamente el proyecto, Enseñanza de heurísticas a través de problemas tipo olimpiada matemáticas, formula tres etapas de desarrollo, siendo estas:

La primera corresponde a la evaluación diagnóstica o Ronda 1 (anexo 1). Esta consta de 6 preguntas de tipo olimpiadas matemáticas, de las cuales se identifican y analizan los errores y estrategias que usa el estudiantado cuando intenta resolver los problemas de este tipo.

La segunda etapa consiste en la intervención en el aula virtual, cuyo objetivo es la enseñanza de estrategias heurísticas que han sido identificadas por Schoenfeld. Se consideran las fases de su modelo para elaborar las actividades con problemas del tipo olimpiada matemáticas.

Finalmente, la tercera etapa se establece la aplicación de un test de salida o Ronda 3, donde se identifican y analizan qué estrategias fueron acogidas por los estudiantes, donde esta información permite extraer las conclusiones finales.

Palabras claves: heurística, estrategia heurística, resolución de problemas.

CAPÍTULO 1.

Generalidades De La Investigación.

1.1 Descripción De La Intervención

La intervención se realizó en el semestre 2020-1. Esta investigación gira en torno al tema de la enseñanza de estrategias heurísticas y su incidencia en la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas. Posteriormente, se eligió un grupo de estudiantes para realizar un test de entrada (primera ronda de olimpiadas matemáticas), con el propósito de conocer la forma de resolver problemas por parte del estudiante, en particular problemas de olimpiadas matemáticas. Una vez realizado el test de entrada y análisis de resultados se procede a la intervención con los estudiantes; y en el transcurso del proceso de intervención, se realiza segunda y tercera ronda de olimpiadas matemáticas, para luego contrastar los resultados. Cabe resaltar que los talleres se realizaron de manera virtual, debido a la crisis sanitaria que vivió el país a causa del *Covid – 19*.

Por lo cual, se hace necesario incluir el uso de las TIC 's, al momento de llevar a cabo cada sesión. Se utiliza como medio de interacción la plataforma *Google Meet*, la cual permite reuniones virtuales como también la opción de grabar; esto favorece la investigación, en el momento de analizar los datos y procesos utilizados por los estudiantes cuando resuelven problemas; además de tener una retroalimentación de lo que se hace y así poder mejorar en cada sesión. También, se hizo uso de la aplicación *Liveaboard* o tablero virtual; esta herramienta fue de vital importancia; ya que permitió, alcanzar uno de los objetivos de la práctica el cual consiste en que los estudiantes visualicen cómo se incorporan las heurísticas en la solución de problemas.

El desarrollo de la intervención, se realizó en aproximadamente 3 meses con dos sesiones semanales, cada una de ellas de 2 horas; tuvieron lugar los días martes y jueves de 4 a 6 pm. En cada sesión se abordaron problemas diseñados con anterioridad, con el propósito de seleccionar problemas que tuvieran características que permitieran aplicar en su solución algunas estrategias heurísticas.

1.2 Contextualización Institucional

La práctica pedagógica se llevó a cabo conjuntamente con el proyecto de olimpiadas matemáticas, realizadas en la UNIVERSIDAD DEL CAUCA y dirigidas por los profesores Jhon Jairo Pérez y Francisco Enríquez. En la segunda olimpiada matemática (OLM) Unicauca modalidad virtual realizada entre 23 de julio y 8 de octubre de 2020, la cual estuvo dirigida a estudiantes de bachillerato y donde las pruebas fueron organizadas por niveles académicos. En particular, nuestro trabajo de investigación se enfocó en el nivel 2 donde participaron cuatro instituciones educativas:

Academia Militar General Tomas Cipriano de Mosquera. Es una Institución Educativa mixta, de carácter privado, ubicada en la zona urbana de Popayán.

Instituto Nacional mixto Piendamó. Es una institución educativa mixta oficial, ubicada en la zona urbana del municipio de Piendamó Cauca.

Colegio Champagnat de Popayán. Es una institución educativa mixta de carácter privado y está ubicada en la zona urbana de Popayán.

La Institución Educativa Instituto Técnico. Es un establecimiento de carácter oficial y mixto ubicado en el municipio de Santander de Quilichado del departamento del Cauca.

1.3 Planteamiento De La Pregunta problema

El dominio de habilidades matemáticas en el aula de clases suele asociarse generalmente con la memorización mecánica de fórmulas y algoritmos como una receta que el estudiantado debe aprender y replicar al momento de ser evaluados.

Con lo cual, el estudiantado puede llegar a memorizar y seguir las indicaciones del docente, pero sin entender o comprender lo que está haciendo, como un procedimiento que deben aprender y replicar . Pero luego, cuando se les presenta un reto mayor, en este caso las olimpiadas matemáticas, puede esto llegar a frustrar sus intentos de resolver los problemas, puesto que no han logrado una verdadera apropiación y comprensión en las competencias matemáticas.

En consecuencia, el abandono y el desinterés crece año tras año en el aula, y pese a esto, algunos docentes priorizan métodos mecánicos y estrategias inadecuadas. Esto limita la adquisición de un alto nivel en la capacidad de pensamiento y la resolución de problemas matemáticos (Pérez y Ramírez, 2011).

A nivel de las olimpiadas matemáticas que se realizan en el departamento del Cauca, este proyecto de investigación observa que tras aplicar la prueba inicial o Ronda 1 de las olimpiadas matemáticas 2020 a estudiantes de grado octavo y noveno, algunos estudiantes presentan diversas dificultades a la hora de resolver problemas de olimpiadas. De manera general la mayoría de los estudiantes tienen dificultad en el reconocimiento o análisis de los elemento s básicos que constituyen un problema, es decir, no extraen la información que les proporciona los datos, no identifican los procedimientos adecuados para resolverlos, desconocen el motivo o razón de la elección de un procedimiento, no comprueban el resultado y, además, se observa en muchos casos que ellos no establecen una relación básica entre el tipo de problema y el tipo de respuesta que se da. Alrededor de esto surgen preguntas frente a las necesidades que presentan los estudiantes en su proceso de aprendizaje tales como: ¿De qué manera mejorar la resolución de problemas de olimpiadas matemáticas con estudiantes de básica secundaria? ¿Cuál o cuáles estrategias son las más usadas por los estudiantes en olimpiadas matemáticas? ¿Enseñar estrategias heurísticas mejora los resultados en las olimpiadas matemáticas?

En el marco de las reflexiones hasta ahora mencionadas la investigación se centra en la siguiente pregunta específica: ¿Cuál es la incidencia de la enseñanza de estrategias heurísticas en la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas en estudiantes de grado octavo y noveno participantes de la segunda olimpiada matemática modalidad virtual?

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 *Objetivo General*

Determinar la incidencia de la enseñanza de estrategias heurísticas, en la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas.

1.4.2 *Objetivos Específicos.*

- Identificar y caracterizar las dificultades y fortalezas en relación con la resolución de problemas de tipo olimpiadas matemáticas, a partir de una evaluación diagnóstica inicial.
- Desarrollar una secuencia metodológica entorno a la enseñanza de estrategias heurísticas como herramienta útil en la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas.
- Fortalecer los procesos de resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas a través de la implementación de estrategias heurísticas.
- Implementar una serie de actividades con problemas de olimpiadas matemáticas, donde se expone el uso de estrategias heurísticas.
- Evaluar el rendimiento de los estudiantes mediante la realización de pruebas.

1.5 Justificación

En las aulas de clase, el docente tiene la responsabilidad de guiar al estudiante en su proceso de aprendizaje; en particular la forma más común de enseñar matemáticas, es plantear ejercicios con el objetivo de que los estudiantes adquieran una habilidad para resolver problemas. En ese sentido, a lo largo del tiempo la sociedad se ha preguntado ¿Qué estrategias utilizar para que los estudiantes sean buenos resolutores de problemas?, tal pregunta ha llevado a múltiples investigaciones, las cuales han hecho que la resolución de problemas se convierta en un campo de investigación importante de la educación matemática.

Heyworth (1999) expresa lo siguiente:

> La enseñanza en las ciencias generalmente pretende lograr dos objetivos: la adquisición de un cuerpo de conocimiento organizado en un dominio particular y la capacidad de resolver problemas en ese dominio. Gran parte de la resolución de problemas es cuantitativa, involucra fórmulas y la aplicación de las matemáticas, y es una fuente de gran dificultad para muchos estudiantes (p,195).

Por lo anterior, la resolución de problemas se convierte en un aspecto fundamental dentro del campo educativo, en particular, en Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN 2006) define la resolución de problemas como:

> Un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problemas proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido (p.7).

Esto le permite al estudiantado apropiarse de lo que aprende, para que pueda construir una serie de alternativas de solución diferentes a la solución mecánica de problemas y en consecuencia obtener un aprendizaje significativo. Por otra parte, el Ministerio de Educación Nacional (MEN 2006) indica que:

> Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos (p.4).

Por lo cual, la resolución de problemas está relacionada con otros factores, por ejemplo: el tipo de problema y el ambiente de aprendizaje, de ahí que, si se pretende mejorar la resolución de problemas en los estudiantes es conveniente hacer una reflexión en torno a los distintos factores que emergen alrededor de la solución problemas matemáticos. Del mismo modo, en Colombia se establece la resolución de problemas como el primero de los cinco procesos generales que es el de formular y resolver problemas, según los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) resalta su importancia, en que:

> permite alcanzar metas significativas en el proceso de construcción del conocimiento matemático, tales como: desarrollar habilidad para comunicarse matemáticamente; provocar procesos de investigación que subyacen al razonamiento matemático; investigación y comprensión de conceptos y de procesos matemáticos; investigar estrategias diversas; explorar caminos alternos y flexibilizar la exploración de ideas matemáticas (p.53).

En conclusión, se considera que la resolución de problemas es uno de los campos que merecen la atención en la educación matemática, puesto que la enseñanza de las matemáticas trae consigo el objetivo de alcanzar habilidades que llevan inmersa el arte de resolver problemas; por tal motivo se pretende que a través de la implementación de estrategias heurísticas los estudiantes sean más reflexivos y adquieran mayores herramientas que le permitan enfrentarse a problemas matemáticos y de la vida cotidiana.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este capítulo se hace una revisión de la literatura relacionada con el tema de investigación. En primer lugar, se analizan los enfoques que se han utilizado en la investigación de resolución de problemas, en particular en la línea de investigación de entrenamiento en heurísticas. En segundo lugar, se estudian las diferentes definiciones de los términos problema, heurística, resolución de problemas y problemas de olimpiadas matemáticas, identificando su estructura de acuerdo a qué campo matemático pertenece.

El propósito de este proyecto es Determinar la incidencia de la enseñanza de estrategias heurísticas, en la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas con estudiantes de grado octavo y noveno, participantes de la olimpiada matemática 2020 modalidad virtual. Para ello, se hace necesario esclarecer los conceptos que emergen de los diferentes aportes teóricos, Así, considérese los conceptos: Problema y la resolución de problemas.

2.1 Definición De Problema

La idea de problema ha sido abordada por diferentes teóricos que a través del tiempo han propuesto una serie de conceptualizaciones, de ahí que el término problema admite diversos significados. De manera general Callejo y Vila (2004) definen el término problema “como una situación en la que el camino hacia la solución no es inmediata o conocida” (p,98); por consiguiente, en matemáticas, los problemas requieren que el estudiante utilice sus habilidades analíticas y de pensamiento en combinación con su conocimiento conceptual. Para Parra (1990) define el término problema de la siguiente manera:

> Un problema plantea una solución que debe ser modelada para encontrar la respuesta a una pregunta que se deriva de la misma situación. Pero también un problema debería permitir derivar preguntas nuevas, pistas nuevas, ideas nuevas. (p. 22)

Lo anterior, implica que un problema es una situación en la que se presenta un obstáculo y cuya solución no se encuentra fácilmente, de lo cual se necesita secuenciar un modelo de su solución y esto genera un entorno donde se construyen nuevos conocimientos.

Hay que aclarar, que no hay un consenso en la definición del término problema puesto que se presentan múltiples definiciones; lo cual se da por la relación que hay entre un problema y la resolución de problemas. Según Schoenfeld (1985):

> La dificultad para definir el término problema se da porque la resolución de problemas es relativa. Las mismas tareas que requieren un esfuerzo significativo por parte de algunos estudiantes pueden ser ejercicios de rutina para otros, y responderlas puede ser simplemente una cuestión de recordar. (p.74)

Por lo tanto, Schoenfeld indica que un problema es una relación particular entre el individuo y la tarea, en la cual los problemas generalmente se establecen en un contexto único, donde los estudiantes tienen que desarrollar representaciones y estas requieren que se traduzcan palabras escritas, gráficas y demás, en conceptos matemáticos que posteriormente se vinculan a la solución del problema. Por último, citando a Martínez y Negrete (2010) definen problema como:

> Un problema surge cuando queremos conseguir algo y los sistemas que tenemos a nuestra disposición para conseguirlo no sirven. Es decir, existe una meta más o menos definida y no existe un camino claro y sencillo que nos conduzca hacia ella. Precisando un poco más,

> la mayoría de los psicólogos consideran que un problema existe cuando hay algún obstáculo entre una situación dada y una situación meta.(p.185)

Sintetizando lo expuesto hasta ahora, se puede afirmar que existe un consenso al considerar que un problema es una situación en la que el camino hacia la solución no es inmediato, incluso puede haber varias maneras de resolverlo; es así como un problema reta al estudiante a poner en juego conocimientos diversos y buscar relaciones nuevas entre ellos. Esto hace que los estudiantes utilicen activa y conscientemente sus habilidades metacognitivas[1].

En matemáticas, y en particular en las instituciones educativas de básica secundaria, se espera que los estudiantes resuelvan problemas; pero no se preocupan en reflexionar cómo ayudar a los estudiantes a ser resolutores de problemas. Es claro que no hay un camino fijo, pero sí se pueden proporcionar a los estudiantes el dominio de habilidades analíticas (estrategias heurísticas) que les ayuden a enfrentarse a problemas matemáticos.

2.2 Resolución De Problemas

Al principio de este documento se mencionó la importancia que tiene la resolución de problemas en educación matemática. Esta sección trata de mostrar las definiciones que tienen algunos teóricos en base al concepto de resolución de problemas. Para iniciar, se podría decir que la ciencia es una construcción que se da a partir de la solución de problemas, en efecto:

---

[1] Las habilidades metacognitivas implican aquellos aspectos de control y regulación de nuestra actividad cognitiva y el proceso de aprendizaje. Estas habilidades hacen referencia a procesos de planificación, monitorización y autoevaluación (García, J, & González-Castro, 2015)

> Esta consideración de que la investigación científica tiene como objetivo la resolución de problemas, al margen de la verdad o falsedad de las teorías. La comparten investigadores de diversas disciplinas, filósofos e historiadores de la ciencia, y ocurre así porque la resolución de problemas forma parte de la actividad intrínseca al quehacer científico (Castro y Martínez, 2008, p.2).

Ahora bien, podemos decir que la resolución de problemas es un tema central en las matemáticas y también en la educación. Actualmente en la educación matemática, se ha establecido que el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas merece una atención especial, en particular la enseñanza de las matemáticas se ha convertido en un estilo, el de enseñar matemáticas y resolver problemas. Pero en esencia, ¿qué es la resolución de problemas? Schoenfed (1992), habla acerca de cómo a lo largo de los años la definición del término resolución de problemas ha tenido múltiples significados y a menudo contradictorios. por tal motivo En la actualidad nos encontramos con diversas definiciones que han realizado teóricos y de los cuales a continuación se precisan algunas como:

> El proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas. (Lesh y Zawojewski,2007, citado por Castro, 2008)

Por otra parte, la resolución de problemas no es solo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje, en efecto:

> Los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo. Mediante la resolución de problemas matemáticos los estudiantes deberán adquirir modos de pensamiento adecuados, hábitos

de persistencia, curiosidad y confianza ante situaciones no familiares que les serán útiles fuera de la clase de matemáticas. Incluso en la vida diaria y profesional es importante ser un buen resolutor de problemas (Godino y Batanero, 2003 p.39).

Por lo cual, se podría decir que el término resolución de problemas se toma desde un punto más general, donde involucra tres aspectos: los estudiantes, el profesor y el medio[2]; de esta forma se busca un acercamiento a resolver situaciones en las que los estudiantes puedan experimentar la potencialidad y utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea.

Por otro lado, los estándares curriculares recomiendan que los estudiantes desarrollen nuevos conocimientos matemáticos a través de resolución de problemas. Ya que por medio de problemas matemáticos y en otros contextos, pues aplicar y adaptar distintas estrategias para resolver problemas encaminan a que el estudiante reflexione sobre su propio proceso y así pueda asumir una postura crítica y de comprensión de lo que realizar (Colombia, MEN. 2006).

2.2.1 *Estrategias Heurísticas*

La heurística en matemáticas ha contribuido con el desarrollo de los procesos de resolución de problemas, en especial, a partir de los trabajos realizados por Polya (1945) y Schoenfeld (1985), como también en otras áreas de investigación. Inicialmente el término heurística de acuerdo con Polya (1945) significaba lo siguiente:

---

[2] La tríada didáctica ha sido un modelo básico que respalda una gran cantidad de prácticas de investigación en la educación matemática, debido a la complejidad de las variables o los factores considerados para hacer manejables y realizables los proyectos de investigación. (Valero, P.2012)

> Heurístico, o heurética, o "ars inveniendi", tal era el nombre de una ciencia bastante mal definida, y que se relacionaba tan pronto a la lógica como a la filosofía o a la psicología; se exponían con frecuencia las líneas generales, pero rara vez sus detalles. En nuestros días está prácticamente olvidada. Tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos de descubrimiento y de la invención. (p.101)

Por otra parte, en la Ciencia Matemática la heurística es un término relacionado con las estrategias de resolver problemas, en la cual se utilizan reglas y métodos que guían al descubrimiento mediante su implementación, a la búsqueda de distintas soluciones, procedimientos no algorítmicos e incluso el planteamiento de nuevos problemas (Contreras & Mejía 2019).

> Polya (1945) es el primer teórico en educación matemática en introducir dicho término en trabajos de resolución de problemas. En palabras de Schoenfeld (1985) manifiesta que: “El estudio de la heurística era de hecho casi olvidado. *How to solving* fue un intento de revivir la heurística en una forma moderna y modesta” (p. 23).

En la literatura, se han encontrado diversas definiciones acerca del término Heurística. De acuerdo con Schoenfeld (1985) establece el término Heurística como:

> Las estrategias heurísticas son reglas generales para la resolución exitosa de problemas, sugerencias generales que ayudan a una persona a comprender mejor un problema o avanzar hacia su solución. Tales estrategias incluyen explorar analogías, introducir elementos auxiliares en un problema, argumentar por contradicción, avanzar a partir de los datos, descomponer y recombinar (p. 23).

De lo anterior, se considera que las estrategias heurísticas son principios o herramientas para resolver problemas matemáticos, donde estas habilidades se adquieren con el tiempo, a partir de las reflexiones que surgen al enfrentarse a nuevos problemas y en consecuencia cuando el estudiante se le presente un nuevo reto tendrá mejores herramientas para llegar a una solución.

Por otra parte, Puig (citado por Contreras (2019) considera que:

> Las estrategias heurísticas o heurísticas son aquellas operaciones o algoritmos que se realizan de manera mental y que resultan luego de atender un problema o situación desconocida, por lo que se busca una secuencia de actividades a realizar para llegar a la solución de dicha situación. Además, la complejidad de las diversas operaciones depende de lo complicado que se presente la situación. (p. 47).

En conclusión, existe cierto consenso entre los matemáticos en que las estrategias heurísticas son útiles en la resolución de problemas, pues ellas son cruciales porque son las herramientas a través de las cuales los estudiantes se enfrentan y solucionan nuevos retos matemáticos.

2.2.2 *Identificación De Estrategias Y Entrenamiento En Heurísticas*

Con base en la literatura, en las Ciencias de la Educación cada disciplina aborda el estudio de la resolución de problemas con una visión propia; asimismo en Educación Matemática se pueden distinguir diversas aproximaciones que han realizado distintos teóricos; en ese sentido Castro (2008) menciona cómo las múltiples investigaciones realizadas por los profesionales de la educación a partir de una postura propia frente a lo que significa la resolución de problemas; conlleva a múltiples investigaciones e implicando que la resolución de problemas sea un campo de la educación matemática donde todavía faltan diversos estudios por realizar, en efecto:

> Cada uno de estos profesionales ha dado un enfoque propio a la investigación en resolución de problemas, lo que hace que hoy día nos encontremos, como ya manifestaba Silver

(1985), con una considerable masa de investigación en resolución de problemas, cuya completa sistematización está aún por concluir. (Silver, 1985, citado en Castro, 2008, p.3)

Conviene subrayar, que el panorama del estudio de la resolución de problemas se muestra amplio y complejo. Por eso, al considerar este campo, el aprendizaje de las matemáticas a partir de diferentes enfoques se necesita caracterizar y situar dicha investigación; por ese motivo surge la necesidad de distinguir los distintos agentes que intervienen en la resolución de un problema y los componentes que lo articulan. De manera general Castro (2008) menciona que se distinguen cuatro factores, los cuales son: el problema, el alumno, la situación, el profesor. Lo anterior implica que existan varias líneas de investigación de las cuales se encuentran incluidas las siguientes:

- Aislamiento de determinantes claves de la dificultad de los problemas.
- Esquemas de resolución de problemas (Marshall.1995).
- Identificación de las características de buenos resolutores de problemas.
- Comparación entre buenos y malos resolutores de problemas (expertos y novatos).
- Tecnología y resolución de problemas.
- Identificación de estrategias y entrenamiento en heurísticas.

El tema que atañe este trabajo se encuentra específicamente en la última línea de investigación de las descritas anteriormente, por tanto, se pretende lograr que los estudiantes obtengan un mayor éxito en la resolución de problemas a partir de enseñanza de estrategias heurísticas que han sido distinguidas por Schoenfeld y George Polya, con el fin de que se apropien del conocimiento y de esta manera sean eficaces en diversas situaciones matemáticas que emergen en su proceso de aprendizaje.

Se debe agregar que el aprendizaje de las matemáticas va más allá de la memorización mecánica de los conceptos, ejercicios rutinarios y aplicación; por tal motivo se pretende desarrollar una disposición hacia esta asignatura como un poderoso medio para observar las situaciones, las actitudes y la manera con que los estudiantes se enfrentan a problemas no sólo matemáticos sino en la vida cotidiana.

Asimismo, en la educación matemática varios autores han creído que es posible enseñar a resolver problemas, algunos autores tales como: Santos Trigo, Schoenfeld y George Polya quien es sin duda alguna el matemático más conocido por su trabajo *How to solve it* en la resolución de problemas; presentando un modelo de la enseñanza de estrategias heurísticas, siendo uno de los aportes más significativos en el campo de la resolución de problemas. De hecho, Schoenfeld (1992) respalda lo anterior expresando que:

> La resolución de problemas en las dos últimas décadas se sustenta en gran medida sobre los cimientos de su obra. La comunidad de educación matemática está más familiarizada con el trabajo de Polya a través de su volumen introductorio (1945/1957) *How to solve it,* en el que introdujo el término "heurística moderna" para describir el arte de la resolución de problemas y sus posteriores elaboraciones sobre el tema en los dos conjuntos de volúmenes Matemáticas y razonamiento plausible. (p. 16).

Posterior a Polya está Schoenfeld, quien haciendo uso de métodos heurísticos, buscó que los estudiantes no solo tengan una cantidad de estrategias para resolver problemas, sino que al mismo tiempo sepan cuándo implementar cada una de estas; por lo que el proceso de resolución no es lineal. Inicialmente Schoenfeld (1985) documentó aspectos relacionados con el empleo de estrategias heurísticas basados en la naturaleza del pensamiento matemático, las creencias de los estudiantes y la relevancia de las estrategias metacognitivas en la resolución de los problemas.

De lo anterior, la comunidad académica habla de pensar matemáticamente haciendo referencia a desarrollar un punto de vista matemático distinto, donde se involucran procesos de matematización, abstracción y reflexión, por lo cual, Schoenfeld (1982) refiere que aprender a pensar matemáticamente da entender desde un punto de vista matemático: primero, a valorar los procesos de matematización, abstracción y con predilección para aplicar los conocimientos; segundo, a desarrollar competencias con las herramientas o conceptos matemáticos obtenidos y finalmente usar esas herramientas al servicio del objetivo de comprender ciertas estructuras matemáticas.

Finalmente, y debido a que los estudiantes de secundaria están siendo evaluados por el estado a través de las pruebas Saber once implica que, las instituciones educativas busquen que los estudiantes sean buenos resolutores de problemas. De ahí que se genera una transformación en el contenido curricular de matemáticas y en especial en la instrucción de estrategias heurísticas en el aula de clase, donde se busca explorar soluciones al contrario de solo memorizar procedimientos; así, como también, explorar patrones y formular conjeturas

2.2.3 *Métodos Heurísticos De Polya*

Polya, tras publicar su libro titulado, *How to Solve It*, es uno de los teóricos más destacados exponentes del uso y la utilidad de las estrategias heurísticas a la hora de resolver problemas matemáticos, posteriormente en 1954 publicó su libro Matemáticas y razonamiento plausible, y más tarde los dos volúmenes de Descubrimiento matemático (1962 y 1965), en los que Pólya elaboró el tema y los detalles de las estrategias heurísticas, donde, con posterioridad a su publicación, la heurística, que no tomaba un valor relevante, ahora se ha convertido en casi sinónimo de resolución de problemas matemáticos (Schoenfeld,1985).

Tabla 1

Método heurístico de George Polya

Pasos	Definición y preguntas claves
Comprensión del problema	¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones? ¿Es posible cumplir con las condiciones? ¿Son suficientes las condiciones para hallar la incógnita? ¿O son insuficientes? ¿O son contradictorias? Dibuje una figura. Adopte una notación adecuada. Separe las diferentes partes de las condiciones. ¿Puede ponerlas por escrito?
Concepción de un plan	Descubra las relaciones entre datos e incógnita. Puede verse obligado a tener en cuenta problemas auxiliares, si no encuentra una Relación inmediata. Deberá llegar a obtener un plan de resolución. Algunas preguntas que se sugiere hacer en esta etapa son: ¿Se ha encontrado antes con el problema? ¿O lo ha visto antes de forma algo diferente? ¿Conoce algún problema relacionado? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire la incógnita. Intente recordar algún problema familiar que tenga incógnita igual o parecida. He aquí un problema relacionado con el suyo y que se ha resuelto antes. ¿Podría utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado?
Llevar a cabo el plan	Cuando lleve a cabo su plan de resolución, compruebe cada paso. ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrar que es correcto?
Verificar la solución	¿Puede comprobar el resultado? ¿Puede comprobar el razonamiento? ¿Puede extraer el resultado de otra manera? ¿Puede percibirlo a primera vista? ¿Puede utilizar el resultado o el método para algún otro problema?

Nota. Cuadro de Polya (1945) (Citado por Schoenfeld, 1985).

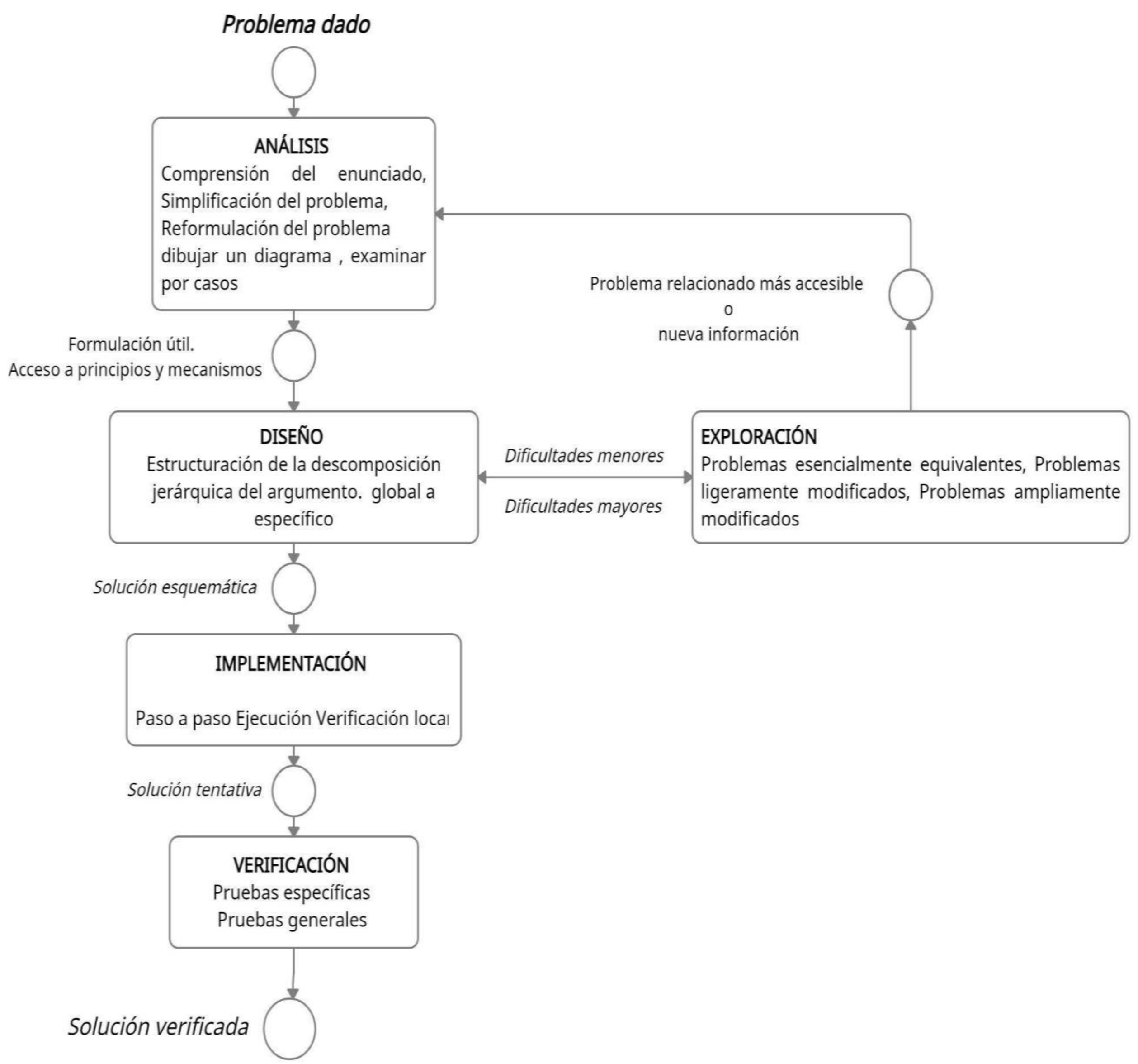
En su obra *How to Solve It* explica métodos con los que pudiera ayudar en la resolución de problemas, donde su objetivo principal es que, tanto profesores como estudiantes, tuvieran, a través de su obra, una metodología heurística que contribuya a la solución de problemas matemáticos como también a problemas de la vida cotidiana.

2.2.4 *Método Heurístico de Alan H.Schoenfeld*

Por otra parte, Schoenfeld (1985) considera que las estrategias heurísticas presentadas por Polya (1945) son muy generales, por lo cual considera desarrollar una estrategia directiva que se divide en cinco fases acompañadas de métodos heurísticos.

Figura 1

Estrategia directiva de las principales etapas del proceso de resolución de problemas:



Nota. Estrategia directiva que se divide en cinco fases acompañadas de métodos heurísticos (Schoenfeld, *1985)*

Schoenfeld, basándose en los trabajos realizados por Pólya, plantea una forma para el análisis del comportamiento durante la resolución de problemas. Además de las heurísticas plantea tres aspectos que considera cualitativamente diferentes pero que son muy importantes. Dichos aspectos son: C***onocimientos previos*****:** qué es un conjunto de hechos y procedimientos que el sujeto dispone**;** ***Sistema de creencias***: son las perspectivas del sujeto hacia las matemáticas y sobre su trabajo en ella; ***Heurísticas****:* que son las reglas para la exploración con las cuales se procede en situaciones difíciles al intentar resolver un problema (Schoenfeld, 1992).

2.2.4.1 *Las Fases de Alan H.Schoenfeld*.

Fase de Análisis. En esta fase se utilizan estrategias generales tanto de comprensión del problema, identificación de datos e incógnitas y minimizar la complejidad. Algunas de las heurísticas más importantes en esta primera fase son:

a) Dibuje un diagrama siempre que sea posible.

b) Examine casos especiales.

c) Trate de simplificar el problema.

Fase de Diseño. Schoenfeld califica esta fase como un "control maestro". Su función es asegurar que el estudiante esté involucrado en actividades que probablemente sean rentables en la solución del problema, es decir en el diseño de un plan.

Fase de Exploración. Esta fase se utiliza cuando no se tiene un plan claro, cuando las heurísticas de análisis no alcanzan. En palabras de Schoenfeld, esta fase es el corazón heurístico de la estrategia, porque es en la fase exploratoria donde entran en juego la mayoría de las heurísticas de resolución de problemas. En esta fase se consideran heurísticas como:

a) Considere problemas esencialmente equivalentes.

b) Considere un problema ligeramente modificado.

c) Considere problemas sustancialmente modificados.

Fase de Realización. En esta fase se ejecuta como tal el plan propuesto en la fase de diseño. Aquí es donde se procede a realizar la ejecución de operaciones y demás herramientas necesarias que en consecuencia muestran la solución del problema.

Fase de Verificación. El objetivo de esta fase consiste en controlar la solución del problema y evitar que por operaciones erróneas o errores de cálculo fracase la solución.

a) Verifica su solución con estas preguntas.

b) ¿Usa todos los datos pertinentes?

c) ¿Está de acuerdo con estimaciones o predicciones razonables?

d) ¿Soporta pruebas de simetría, análisis dimensional y escala?

Finalmente, el aspecto de ***Monitoreo y Control***, que tiene que ver con la eficiencia con la que los estudiantes utilizan el conocimiento que disponen y del acompañamiento por parte del profesor; muestra de ello, en Schoenfeld (1992 b), presenta un ejemplo en donde examina el nivel con que los estudiantes reflexionan a los siguientes aspectos:

Análisis de Problema, Exploración, Planificación, Ejecución del Plan y Verificación

La conclusión a la que se llegó es que los aspectos anteriores son necesarios para el desarrollo de habilidades de control. Además que este comportamiento generalmente no aparece cuando los estudiantes trabajan ejercicios de rutina, ya que el problema en contexto en ese caso le dice qué técnicas usar; sin embargo, recalca que estas habilidades se pueden aprender con una instrucción explícita que se centra en aspectos metacognitivos del pensamiento matemático, el cual se denomina ***monitoreo***, donde el docente debe intervenir activamente mientras los estudiantes trabajan los problemas, ayudándose de preguntas tales como: ¿Qué está haciendo exactamente? ¿Puede describirlo con precisión? ¿Por qué lo hace? ¿Cómo encaja en la solución? ¿Cómo le ayuda? ¿Qué hará con el resultado cuando lo obtenga? En conclusión, preguntas como las anteriores ayudan a una reflexión sobre cómo el estudiante está abordando el problema implicando un desarrollo de habilidades con las cuales mejora su resultado en la resolución de problemas.

Por último, y tras los resultados que muestran diversos trabajos enfocados en métodos heurísticos, se asume que es necesario dominar algunas técnicas y estrategias que ayuden a los estudiantes a la hora de resolver problemas, en particular problemas tipo olimpiadas matemáticas. Tras lo anterior, se pretende diseñar un plan de actividades, el cual sea un escenario de discusión y reflexión, con participantes de olimpiadas Unicauca, y así determinar si la incidencia de enseñar estrategias heurísticas contribuye a los estudiantes a mejorar la resolución de problemas en las olimpiadas matemáticas.

2.3 Las Olimpiadas Matemáticas

Tras una revisión en la literatura, se encontró que la primera olimpiada matemática se realizó en el año 1894 en los concursos Eotvos de Hungría; posteriormente en el año 1956, países del este y la antigua Unión Soviética organizan la primera Olimpiada Matemática Internacional (OMI), celebrada en Brasov, donde participaron países como Estados Unidos y Canadá (Nieto, J. H. 2005).

Según la Real Sociedad Matemática Español (RSME): “Las olimpiadas matemáticas buscan promocionar las Matemáticas y dotarlas de un contenido lúdico que lamentablemente han perdido casi por completo por muy diversas razones, por ejemplo, la confusión entre ejercicios y problemas, con la consiguiente desaparición de estos” (s.p). En ese sentido, se consideran las olimpiadas matemáticas como un espacio donde compartir ideas, generar conjeturas y de ese modo mostrar que las matemáticas no son una ciencia terminada.

2.3.1 *Olimpiadas Matemáticas En Colombia*

A nivel internacional, Colombia ha sido uno de los países iberoamericanos más representativos dentro de la olimpiada matemática internacional (OMI), participando en esta olimpiada desde el año 1981, además Colombia fue el organizador de la primera Olimpiada Iberoamericana junto con la Organización de Estados Iberoamericanos, dicha olimpiada se realizó en el año 1985 en Villa de Leyva Boyacá (Losada, M. E, Bernal & Mesa. 2007). Este evento fue de tal aceptación que más adelante se integraron más países iberoamericanos teniendo así un gran impacto en la comunidad matemática y siendo uno de los eventos internacionales más importantes de las Olimpiadas Matemáticas.

A nivel interno, Colombia realiza diversos concursos, entre los que se destacan: La Olimpiada Colombiana de Matemáticas (OCM), la Olimpiada Regional de Matemáticas, el Concurso Futuros Olímpicos y el Concurso Internacional Canguro Matemático.

En el año 1997, la Universidad del Cauca conformó el Grupo de Olimpiadas Matemáticas denominado (GOMU). Actualmente el grupo está coordinado por los docentes universitarios

Francisco Enríquez, Jhon J. Pérez, y un grupo de docentes de matemáticas de diferentes instituciones educativas de básica secundaria y media del departamento Cauca. De ese modo, cada año la Universidad del Cauca organiza las olimpiadas matemáticas Unicauca, con estudiantes organizados por los siguientes niveles niveles; nivel 1para los grados 6° y 7°, nivel 2 para los grados 8° y 9° y el nivel 3 con los grados 10° y 11°, donde participan estudiantes de colegios caucanos y también fuera de la región. Últimamente, Unicauca participó en la olimpiada OLIMPRI y también de las olimpiadas regionales organizadas por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ANTONIO NARIÑO.

2.4 Clasificación de Problemas de Olimpiadas Matemáticas

En la resolución de problemas se utiliza el término no rutinario para diferenciar los problemas de tipo olimpiadas matemáticas y los ejercicios estándar que generalmente aparecen en libros matemáticos. Los problemas no rutinarios retan al estudiante, ponen en juicio sus conocimientos previos e invitan a que el estudiante pueda explorar diferentes estrategias, donde la imaginación y la creatividad son los principales factores de éxito. Las olimpiadas matemáticas han establecido un estilo propio en los problemas propuestos, además de acercar al estudiante en nuevos temas matemáticos, tales como, ecuaciones funcionales, teoría de grafos, combinatorio, teoría de juegos y más. (Martines .2013, p 12)

Si bien, existen varios tipos de clasificación de problemas tipo olimpiadas matemáticas, aquí se expone una clasificación que realiza Martínez (2013), el cual divide los problemas de olimpiadas matemáticas en cuatro áreas principales, que son: geometría, matemáticas discretas, teoría de números y álgebra; definidos a continuación:

Geometría. Se refiere a la geometría del plano y del espacio, no a la geometría analítica ni a la trigonometría. Se requiere de los resultados de ángulos entre paralelas, ángulos opuestos por el vértice, suma de ángulos en un triángulo, definición de tipos de triángulos (equilátero, isósceles, triángulo rectángulo, etc.), postulados de triángulos congruentes, área de figuras elementales y el teorema de Pitágoras. (Martínez, 2013)

Matemáticas Discretas. Se refiere a las situaciones donde se trata con conjuntos finitos o conjuntos que pueden enumerarse (1,2,3...). Los problemas de este tipo incluyen temas de combinatoria, permutaciones, principios de conteo, conjuntos y otros que se cubren en etapas posteriores. Algunos de los problemas más interesantes son de conteo. Aunque los niños aprenden a contar desde los 4 años, contar puede no ser tan fácil algunas veces. (Martínez, 2013).

Teoría de Números. Se refiere a las propiedades de los números enteros {…,-3,-2,-1,0,1,2,3,...}. Son importantes los conceptos de múltiplos, divisores, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, números primos, factorizar en primos, algoritmo de la división, residuos y el sistema decimal. (Martínez, 2013).

Álgebra. Se requiere manipular expresiones algebraicas, conocer las identidades o productos notables (diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, suma y diferencia de cubos, etc.), factorización, leyes de los exponentes y radicales, solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales (Martínez, 2013).

CAPÍTULO 3 -DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN Y PROCEDIMIENTO DE RECOGIDA DE DATOS

La finalidad de este capítulo es describir el procedimiento utilizado para la recogida de los datos, el diseño del estudio y los instrumentos de evaluación. Metodológicamente el proyecto se ha dividido en tres etapas:

3.1 Etapas De Investigación

Primera Etapa. Se realizará un examen inicial (*Ronda 1)* con el fin de conocer las fortalezas y dificultades de los estudiantes en cuanto a la manera de resolver problemas de olimpiadas matemáticas. El examen consta de 6 problemas, los cuales son seleccionados teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes.

Segunda Etapa. Se realizará una serie de actividades con el fin de enseñar estrategias heurísticas. Cada actividad será diseñada considerando los resultados de la prueba inicial o Ronda 1, y la enseñanza de estrategias se da a partir de las fases del modelo utilizado por Alan H.Schoenfeld.

Tercera Etapa. Contrastar el avance del estudiantado mediante las pruebas o rondas, de acuerdo al número de preguntas acertadas y las estrategias utilizadas, a partir del entrenamiento heurístico.

3.2 Diseño Del Estudio

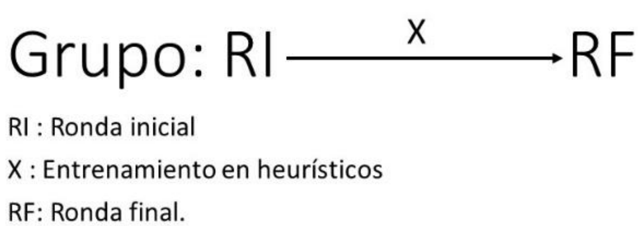
De acuerdo con lo antes mencionado, y recordando que el objetivo de esta investigación es determinar el aporte de la enseñanza de estrategias heurísticas a la población de estudio, en la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas. Se clasifica como una investigación experimental con un enfoque longitudinal.

> Según Fidias Arias, autor del libro *El* Proyecto *de Investigación*, la investigación experimental es un proceso que consiste en someter a un objeto o grupo de individuos en determinadas condiciones, estímulos o tratamiento (variable independiente), para observar los efectos o reacciones que se producen (variable dependiente). Y un estudio longitudinal es un tipo de diseño de investigación que consiste en estudiar y evaluar a las mismas personas por un periodo prolongado de tiempo. (Fidias, 2016., pp. 34-35)

Esta investigación es de tipo descriptivo, puesto que se realizará la descripción, registro, análisis e interpretación de las diferentes estrategias heurísticas utilizadas por los estudiantes, con un enfoque cuantitativo, ya que este es el que mejor se adapta a las características y necesidades de la investigación. El enfoque cuantitativo utiliza la recolección y el análisis de datos para contestar preguntas de investigación y probar hipótesis establecidas previamente, y confía en la medición numérica, el conteo y frecuentemente en el uso de la estadística para establecer con exactitud patrones de comportamiento en una población. (Hernández et al. 2003 p.5)

Figura 2

Esquema de investigación



Nota. Elaboración propia

Posteriormente, se realizan consideraciones sobre la variable independiente, que se ha manipulado experimentalmente, y de la variable dependiente, periodo de tiempo y de cómo se contrastan los datos obtenidos, descripción de la población, de los instrumentos de medida utilizados, del procedimiento de aplicación del test de entrada, test de salida y la caracterización del proceso heurístico en cada actividad.

3.3 Las Variables

Con el objeto de dar respuesta a la pregunta planteada, se elabora un diseño que permite observar el comportamiento que tienen los estudiantes de olimpiadas matemáticas al ser instruidos en estrategias heurísticas, mediante el cual se definen en el marco de investigación las variables dependientes e independientes, y posteriormente dar seguimiento del comportamiento de la variable dependiente.

Variable Dependiente. Resolución de problemas de olimpiada matemáticas. Las dimensiones a tener en cuenta para esta variable son:

- Se realizará una revisión y transcripción de registros audiovisuales, con el objetivo de caracterizar y analizar las estrategias heurísticas en cada actividad.
- Rendimiento general: comparación de acuerdo al número de aciertos (*variable estandarizada*) entre cada ronda de olimpiadas matemáticas.

- Contraste entre estrategias heurísticas iniciales y estrategias heurísticas luego de la intervención en el aula (*Ronda 1 y Ronda 3*).

- ***Variable Independiente***. Entrenamiento en heurísticos, teniendo en cuenta las fases del modelo utilizado por Schoenfeld.

- **Tabla 2**

Estrategias heurísticas de acuerdo a las fases de Schoenfeld

Dimensión	Indicadores
Análisis	• Escoger subtemas • Reemplaza condiciones • Considere problemas esencialmente equivalentes. • Considere un problema ligeramente modificado • Considere problemas sustancialmente modificado • Reformular el problema • Introducir elementos auxiliares •Descompone el problema
Diseño	•Determinar la relación entre los datos y la incógnita •Representa el problema en forma esquemática • Considerar los conocimientos previos • Considerar un plan
Exploración	• Escoger subtemas • Reemplaza condiciones • Considere problemas esencialmente equivalentes. • Considere un problema ligeramente modificado • Considere problemas sustancialmente modificados • Reformular el problema • Introducir elementos auxiliares •Descompone el problema
Realización	•Uso de técnicas matemáticas • Relaciona las incógnitas con las técnicas utilizadas • Examina detalles • Verifica cada paso • Redacta la solución
Verificación	Verifica su solución con estas preguntas ¿Usa todos los datos pertinentes? ¿Está de acuerdo con estimaciones o predicciones razonables? ¿Soporta pruebas de simetría, análisis dimensional y escala?

Nota: Citado de Contreras & Mejía (2019, p,76).

3.4 Tiempo De Intervención

La intervención se realizó durante un periodo de 2 meses con dos sesiones semanales, cada sesión de dos horas, para un total de 32 horas, que es el mínimo tiempo requerido por parte del programa de Licenciatura en Matemáticas de Universidad del Cauca; por lo tanto, durante ese periodo se necesita contrastar el cambio que tienen los estudiantes.

3.5 Descripción de la Población

Los alumnos que conforman la población de este estudio son adolescentes de ambos sexos, los cuales cursan los grados octavo y noveno de básica secundaria, de edades comprendidas entre los 12 y 16 años, pertenecientes a instituciones educativas que se encuentran en el Departamento del Cauca, tanto públicas como privadas. La cantidad de la muestra no aleatoria ha sido escogida por los estudiantes participantes de las olimpiadas Unicauca 2020, una muestra conformada por 30 estudiantes**:** 13 de grado noveno y 17 de octavo.

Las Olimpiadas Unicauca es un proyecto universitario con el fin de fortalecer el pensamiento matemático y el gusto por las matemáticas en los estudiantes de educación básica y media, a partir de la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas. En particular en el año 2020 las Olimpiadas Unicauca se realizaron de manera virtual debido a la pandemia del COVID – 19 por lo cual participaron estudiantes que tuvieran acceso a internet, de ahí que hicieron parte cuatro instituciones educativas, dos de carácter privado y dos de carácter público. La siguiente tabla muestra el número de estudiantes de acuerdo al grado académico e institución educativa.

Tabla 3.

Población de estudio.

Institución educativa	Grado 8°	Grado 9°	Modalidad
Academia Militar General Tomas Cipriano de Mosquera	9	9	Privado
Instituto Nacional Mixto Piendamó	1	0	Público
Colegio Champagnat de Popayán	3	1	Privado
Institución Educativa Instituto Técnico	4	3	Público
Total	17	13	

Nota. Elaboración propia.

3.6 Instrumentos De Evaluación

En este estudio se han utilizado tres tipos de instrumentos de evaluación: a) Cuestionarios en *Google forms* de opción múltiple y de rango seleccionado, b) entrevistas en clase y registro audiovisual, c) Respuestas escritas de cada ronda por parte de cada estudiante.

3.7 Herramientas En El Aula

Debido a la crisis sanitaria que vive el país por la pandemia *Covid-19*, las clases con los estudiantes se realizan de forma virtual utilizando la plataforma *Google meet*, el cual es un medio de fácil acceso y, además, que permite grabar las clases. Esto brinda al proyecto una mejor evaluación en el análisis de los datos.

Asimismo, la pizarra *Jamboard* y *Liveboard*, la cual es una herramienta de gran utilidad para la presentación y solución de problemas propuestos como también del registro y observación en clase.

3.8 Composición De Los Cuestionarios (Ronda 1, Ronda 2 y Ronda 3)

En esta sección se proponen los cuestionarios, asumiendo ciertas características que se ajustan al evento de las olimpiadas matemáticas 2020, modalidad virtual, y al interés de la investigación. De lo anterior, se definen 3 criterios para su elaboración, los cuales son: conocimientos previos, nivel de dificultad del problema y tipo de problema.

Según lo mencionado, los problemas propuestos durante las sesiones y cada uno de los cuestionarios se deben ajustar a los derechos básicos de aprendizaje y los lineamientos curriculares en matemáticas, que son documentos públicos por parte del Ministerio de Educación Nacional de Colombia y que cada establecimiento educativo de básica secundaria debe cumplir.

Tabla 4.

Test inicial; test de observación y test final.

Cuestionario	Número de problemas /nivel de dificultad	Problemas de Geometría	Problemas de Teoría de números
Ronda 1	6 nivel -Básico	1	5
Ronda 2	6 nivel - Medio	1	5
Ronda 3	4 nivel – superior	1	3

Nota. Elaboración propia

3.9 Descripción De Las Actividades Presentadas En Clase

En la intervención en el aula, se realizaron en total 6 actividades que se desarrollaron entre 23 de julio y 8 de octubre de 2020, de acuerdo al objetivo planteado en esta investigación; el cual es determinar la incidencia de la enseñanza de estrategias heurísticas, en la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas, en estudiantes participantes de las olimpiadas Unicauca 2020 modalidad virtual. Se opta por enseñar algunas estrategias heurísticas que les pueden ser útiles a los estudiantes en la solución de nuevos problemas matemáticos. Todo esto a partir de realizar un análisis por cada prueba y desarrollo de cada sesión. En consecuencia, se diseñan las siguientes actividades:

Actividad N°1

En la primera actividad, se realiza la aplicación de la primera Ronda con lo cual se pretende encontrar qué tipo de errores y estrategias presentan los estudiantes en la resolución de problemas de olimpiadas matemáticas y posteriormente mostrar a los estudiantes la estrategia que resuelve cada problema.

Actividad N°2

En esta actividad propone trabajar 2 problemas de olimpiadas matemáticas de nivel básico, con la intención de acercar al estudiante en el uso de estrategias heurísticas; en ese sentido se presentará problemas de menor a mayor complejidad y de esa manera observar los cambios que presente.

Actividad N°3.

En esta actividad propone trabajar un total de tres problemas de olimpiadas matemáticas de tipo geométrico, donde se empiezan a trabajar estrategias heurísticas tales como: dibujar un gráfico siempre que sea posible y considerar problemas modificados.

Actividad N4°.

esta actividad propone trabajar un total de 5 problemas tipo olimpíadas matemáticas de nivel superior; esto con el objetivo de poner en reto las herramientas heurísticas y acercar al estudiante a una reflexión más profunda en la resolución de problemas.

Actividad N°5

Esta actividad, se realiza la aplicación de la segunda Ronda de olimpiadas matemáticas, la cual permite observar el rendimiento y cambios que presenten los estudiantes en el uso de estrategias heurísticas, para ello se realiza un análisis estadístico con el software minitab 19; como también observar las soluciones que presentan los estudiantes.

Actividad N°6

Finalmente, en esta actividad, se trabaja entorno a la solución de los problemas de la segunda ronda como también considerar problemas modificados y semejantes , además se realiza la aplicación de la Ronda final de olimpiadas matemáticas, donde los problemas son de un nivel superior, en ese sentido, con esta prueba se pretende observar que estrategias finalmente son acogidas por los estudiantes, como también observar si la enseñanza de estrategias heurísticas les brinda mayores herramientas en la resolución de problemas; para ello se realiza una caracterización de las soluciones enviadas de acuerdo a las fases de Schoenfeld

3.10 Cronograma de Actividades

Actividad	julio - septiembre											
	23 J	30 J	6A	13 A	20 A	27 A	3 S	10 S	17 S	24 S		8 oct
RONDA 1 OLIMPIADAS (2 horas)	2:h											
discusión problemas (1-3) Ronda 1		2:h										
discusión problemas (4-6) Ronda 1			2:h									
Actividad 2 problemas (1-3)				2:h								
Actividad 2 problemas (4-7)					2:h							
Actividad 2 problemas (8-10)						2:h						
RONDA 2 OLIMPIADAS (2 horas)							2:h					
discusión problemas (1-3) Ronda 2								2:h				
discusión problemas (4-6) Ronda 2									2:h			
Actividad 4 problemas (1-3)										2:h		
RONDA 3 OLIMPIADAS (2 horas)												2:h

CAPÍTULO 4 - ANÁLISIS DE ACTIVIDADES

Tras el modelo experimental utilizado para la recolección de datos, se procede a realizar el análisis de estos; para ello se tiene en cuenta que este análisis se realiza a partir de cuatro factores los cuales son: Tipo de Ronda de olimpiadas matemáticas, errores más comunes que cometen los estudiantes, enseñanza de estrategias heurísticas (variable independiente), y como último factor un análisis estadístico en cada ronda, de esta manera se dará un seguimiento a lo planteado en el proyecto.

4.1 Análisis De La Ronda 1.

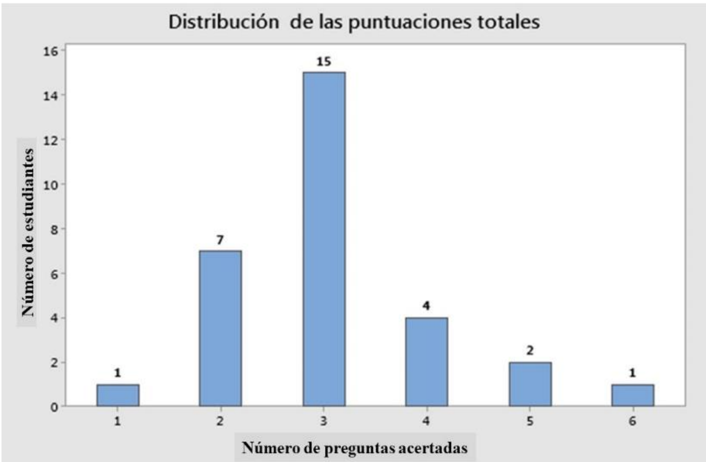
La primera ronda se realizó a un total de 30 estudiantes inscritos en las olimpiadas Unicauca 2020 modalidad virtual. Este grupo de estudiantes es muy específico, ya que participan estudiantes de diferentes instituciones de educación media tanto públicas como privadas, antes de realizar la prueba, se notó un entusiasmo y motivación por parte del estudiantado, donde ellos manifestaron querer obtener el mejor resultado. Para esta actividad se proponen dos objetivos los cuales son:

1. Encontrar qué tipo de errores y estrategias presentan los estudiantes en la resolución de problemas de olimpiadas matemáticas.
2. Mostrar a los estudiantes la estrategia que resuelve cada problema de la ronda 1.

En ese sentido, se inicia este análisis observando cómo fue el rendimiento de los estudiantes de acuerdo al número de aciertos; por lo tanto, se toma la base de datos del formulario *Google Forms* con las respuestas de la primera ronda y se procede a analizar los resultados mediante el software estadístico *Minitab 19*.

Figura 3

Resumen de la primera ronda de acuerdo al número de problemas acertados.



Nota. Datos arrojados por el software *Minitab 19*.

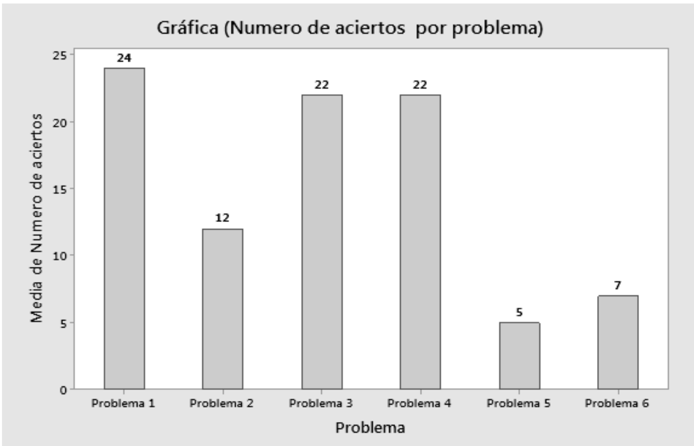
En la figura 3 muestra un resumen de la primera ronda de acuerdo a la cantidad de aciertos por número de estudiantes, de donde se encontró que:

- Solo un estudiante de 30 alcanzó el puntaje máximo.
- Solo dos estudiantes de 30 respondieron correctamente cinco problemas.
- Solo un estudiante de 30 respondió correctamente un problema.

A partir de lo anterior, se distinguen cuáles estudiantes son los que presentan un buen rendimiento en la resolución de problemas olímpicos, en este caso los que tienen entre 5 y 6 aciertos presentan menor dificultad, por otra parte, quienes respondieron entre 1 y 2 aciertos presentan mayores dificultades para encontrar una adecuada solución. Otro factor importante fue el comportamiento de los estudiantes de acuerdo al tipo de problema, con el fin de evidenciar los que presentan poca o mayor dificultad determinando los factores que impiden una buena resolución por parte del estudiante; a continuación, el siguiente gráfico describe el número de aciertos por cada problema de las 30 respuestas.

Figura 4

Número de aciertos por problema



Nota. Datos arrojados por el software *Minitab 19*.

A partir de la figura anterior se concluye que:

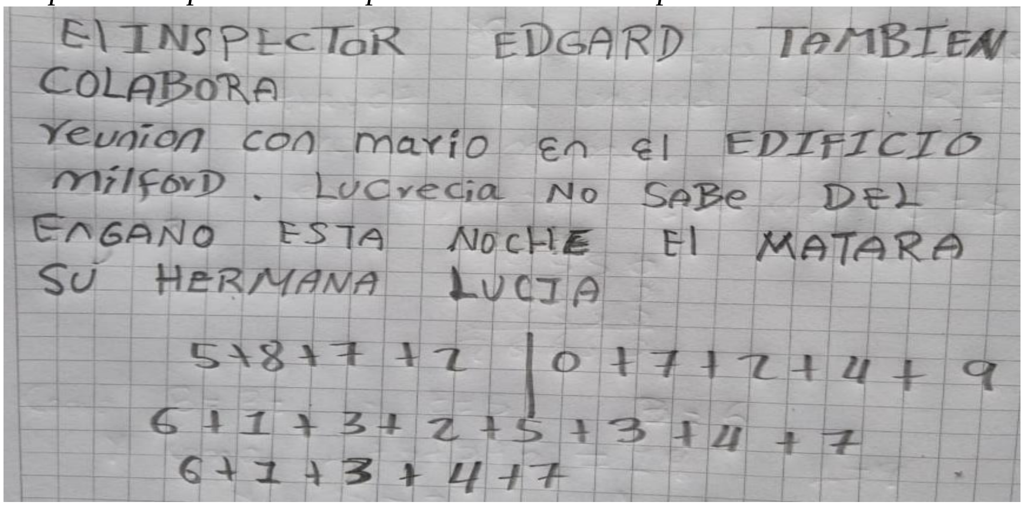
- La mayoría de los estudiantes respondieron de forma correcta los problemas 1,3 y 4.
- El problema 1 es el más acertado y el problema 5 el de menor número de aciertos.

Cabe resaltar que en la ronda 1 los problemas se organizaron de menor a mayor complejidad, como lo muestra la gráfica anterior. En base a los anteriores resultados de la primera prueba, inicialmente se procede a analizar las respuestas escritas enviadas por los estudiantes, donde se observan los errores y el tipo de estrategias heurísticas utilizadas.

Se inicia este análisis con el primer problema de la ronda 1 (anexo 1*)*, donde *se* observó que los estudiantes comprendieron en su gran mayoría el problema, debido a que 24 de los 30 mostraron una solución correcta, mientras que los 6 restantes tuvieron errores de descuido. El principal error de ellos fue considerar en el problema el edificio MILFORD como el nombre de una persona; por otra parte, otro de los errores encontrados fue realizar cálculos matemáticos sin cuidado.

Figura 5

Respuesta del problema 1 – primera ronda de olimpiadas matemáticas 2020

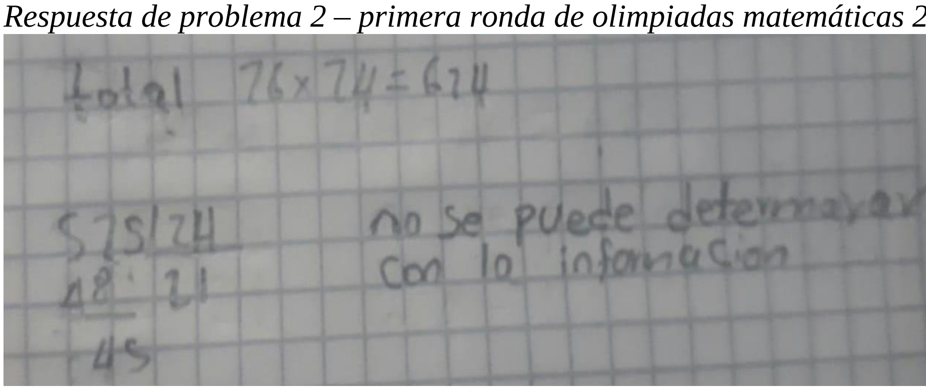


Nota: Evidencia enviada por estudiante participante de las olimpiadas 2020

En el segundo problema de la ronda 1 (ver anexo 1) el cual es uno de los problemas con menor número de aciertos, donde 12 de los 30 estudiantes respondieron acertadamente, se evidencio que el principal factor de error fue la comprensión del problema, puesto que en la mayoría de respuestas no había una relación lógica entre la solución y los datos del problema.

Figura 6

Respuesta de problema 2 – primera ronda de olimpiadas matemáticas 2020

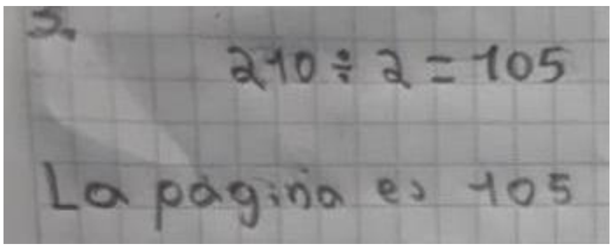


Nota. Evidencia enviada por estudiante participante de las olimpiadas 2020

En particular, la anterior figura muestra dicha afirmación, debido a que no se observa una secuencia lógica que lleve a una conclusión; para este caso el estudiante dio como respuesta la opción “no es posible determinar la solución a partir de los datos dados”. Por otra parte, en la secuencia de la solución el estudiante presenta aspectos muy importantes, tales como: total de número de asientos y la cantidad de asientos restantes, lo cual evidencia un acercamiento a la solución del problema. Finalmente, cabe mencionar que 10 estudiantes no dieron una justificación escrita del problema y solo escogieron una de las posibilidades en el formulario, dejando así dudas en cuanto a la manera de cómo interpretaron el problema.

Figura 7

Respuesta de problema 3 – primera ronda de olimpiadas matemáticas 2020

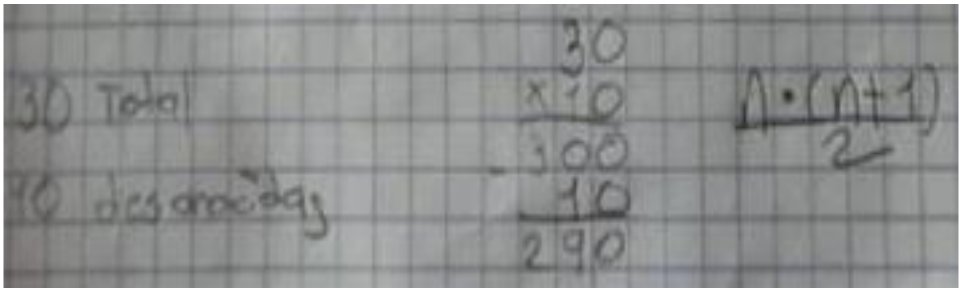


Nota: Evidencia enviada por estudiante participante de las olimpiadas 2020.

En el tercer y cuarto problema de la ronda 1 (ver anexo 1), a nivel general se encontró que 23 de los 30 estudiantes dieron una respuesta correcta; además, se evidencia que las respuestas equivocadas se produjeron por la falta de comprensión del problema. En efecto, en la figura 7 se observa que el estudiante busca de alguna manera operar los datos y, por lo tanto, realiza un procedimiento equivocado, lo cual se observa cuando el estudiante divide 210 entre 2 o cuando escoge la página anterior a la 210. Por otra parte, en el cuarto problema; se evidencia de igual manera una mala interpretación del problema, donde el estudiante suma dos números de diferente cantidad de cifras.

Figura 8

Respuesta de problema 5 – primera ronda de olimpiadas matemáticas 2020



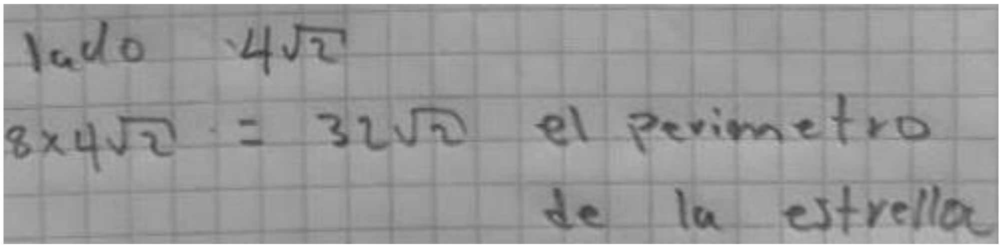
Nota. Evidencia enviada por estudiante participante de las olimpiadas 2020.

En el quinto problema (ver anexo 1), sólo 5 de 30 estudiantes dieron una respuesta acertada, convirtiéndolo en el problema donde presentan mayor dificultad los estudiantes. Aquí se encontró que los estudiantes manejan algunas técnicas de conteo. En efecto, en la figura 8 se observa cómo el estudiante conoce técnicas de conteo; en este caso escribe la fórmula de la suma de los primeros números naturales, de igual manera distingue la variable "personas desconocidas y número de personas en total". Como ejecución de la solución del problema el estudiante decide hacer un cálculo matemático obteniendo como resultado 290 saludos, lo que concuerda como una de las opciones del problema en el formulario, siendo así una respuesta equivocada.

En efecto, en esta solución se nota cómo el estudiante sabe técnicas que solucionan el problema de manera rápida, pero existen factores que hacen que no pueda ejecutar de la mejor manera sus conocimientos. Además, cabe resaltar, que en esta pregunta 15 de los estudiantes no dieron una respuesta escrita; por tanto, se impide observar qué otro tipo de dificultades se presentaron. Particularmente en este problema solo un estudiante presentó una solución escrita que muestra una secuencia lógica en la solución. Finalmente, este problema deja entre dicho cómo se realizaron las otras cuatro soluciones de las 5 correctamente reportadas.

Figura 9

Respuesta de problema 6 – primera ronda de olimpiadas matemáticas 2020


lado $4\sqrt{2}$

$8 \times 4\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$ el perimetro de la estrella

Nota. Evidencia enviada por estudiante participante de las olimpiadas 2020.

Finalmente, en el problema número seis de la ronda 1 (ver anexo 1) es el segundo con menos aciertos, puesto que sólo 7 de 30 estudiantes acertaron correctamente dicho problema, evidenciándose lo siguiente: mala interpretación del teorema de Pitágoras, acciones apresuradas por parte del estudiante, relación equivocada entre la diagonal y los lados de un cuadrado; en particular las acciones apresuradas del estudiante, como se evidencia en la figura 9 busca multiplicar $4\sqrt{2}*8$, lo cual concuerda con una de las respuestas del cuestionario y hace creer al estudiante que está en lo correcto. Cabe mencionar que este tipo de acciones consiste en tratar de buscar la respuesta multiplicando los datos sin antes comprender el problema, llevando a la mayoría de estudiantes a una respuesta equivocada.

Ahora bien, en el uso del teorema de Pitágoras, se evidencia la mala ejecución de este mismo tras considerar en su aplicación la ecuación $a + a = 4\sqrt{2}$. En resumen, en este problema de geometría se observa que los estudiantes presentan varias falencias, lo que se asume que en los colegios se le dedica un menor tiempo al área de geometría en comparación con otras asignaturas, como lo es el álgebra, teoría de números y entre otras.

A Partir de lo anterior, se detectó que los principales factores que llevaron al estudiante a una respuesta no acertada fueron:

- ➢ La falta de interpretación de los problemas.
- ➢ Identificación equivocada de los datos.
- ➢ Identificación equivocada de las variables.
- ➢ Error en cálculos matemáticos.
- ➢ Escoger un método equivocado.
- ➢ Relación equivocada entre los datos y las variables.

En conclusión, en esta actividad se encontró que los estudiantes manejan los conceptos matemáticos de álgebra y procedimientos algorítmicos, pero no se halló el uso de estrategias de análisis, tales como: simplificar el problema por casos, examinar casos especiales, reformulación del problema y, por otra parte, la estrategia de dibujar un gráfico siempre que sea posible (fue muy poco utilizada en el problema 6); por lo cual, también se considera pertinente fortalecerla. Por otro lado, a nivel general, el principal factor de error fue la mala comprensión del problema, lo que lleva al estudiante a buscar soluciones apresuradas. Esto se evidencia en los problemas 2, 5 y 6, donde los estudiantes buscan operar los datos sin el cuidado de comprender su significado dentro del problema.

El siguiente apartado de esta actividad tiene como objetivo mostrar la estrategia que soluciona cada problema de la primera ronda. Inicialmente se realiza un diálogo con los estudiantes sobre cómo se sintieron durante la prueba; en consecuencia, los estudiantes manifestaron que la prueba fue fácil, y varios justificaron lo anterior con la siguiente afirmación: "*Con los conocimientos que le enseñan a uno en el colegio se podían responder todas las preguntas*[3]" Lo anterior, los estudiantes manifiestan que se sienten con la capacidad de solucionar

[3]Estudiante de olimpiadas Unicauca 2020 modalidad virtual, grabación, 10 de agosto 2020.

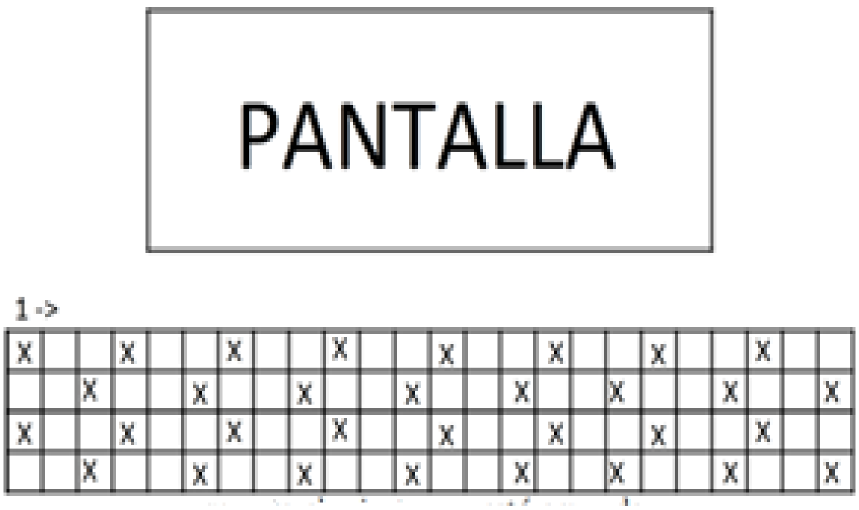
los problemas; evidenciándose como un indicador frente al nivel de dificultad planteado en la prueba. Otro aspecto importante es que consideraron la pregunta número 2 como la más difícil, manifestando no comprender el problema.

Posteriormente se procede a presentar cada uno de los problemas de la primera ronda y preguntarles: ¿Cuál de las opciones creen que es la respuesta correcta? Como resultado se encontró que: en el primer problema, la mayoría de estudiantes manifestaron que era fácil de resolver, mostrando de manera verbal los pasos de la solución e indicando la respuesta. Por otra parte, los estudiantes que no acertaron correctamente fueron conscientes de que podían resolverlo, pero un descuido los llevó a una respuesta errada. En este problema la solución se dio en conjunto con los estudiantes casi de manera inmediata, debido a que la mayoría sabía el camino o estrategia hacia solución, la cual era descifrar el enunciado con la ayuda del código dado y posteriormente sumar los números involucrados en los nombres de las cuatro personas.

En el segundo problema, tal y como se esperaba, los estudiantes manifestaron no comprender el problema; además de ello consideraron este problema como el más difícil de todos. En base a lo anterior, se propone empezar a distinguir y caracterizar todos los datos dados, como lo son: el número de filas, el número de columnas y relacionar estos datos con el número 525. Se encontró que la principal razón de no comprender el problema fue interpretar el orden que seguía la secuencia de las filas a causa del Covid -19; de esa manera, para explicar el orden, se procede a graficar dos filas de más tal y como aparece en la figura 10.

Figura 10

Segundo problema de la primera Ronda de olimpiadas matemáticas 2020

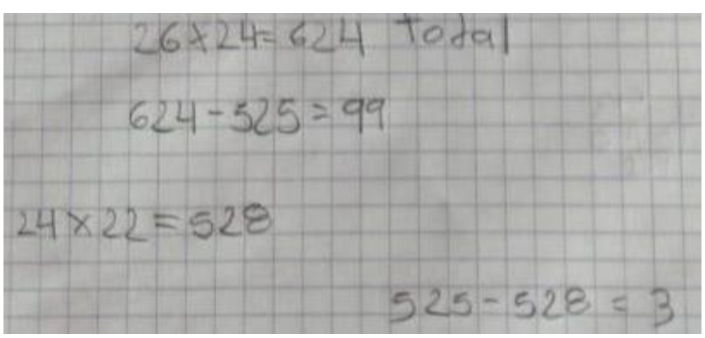


Nota. X representa el asiento ocupado.

Luego de la explicación anterior, los estudiantes ya pueden resolver el problema. Aquí se notaron dos formas de resolverlo.

Figura 11

Solución del problema 2 planteado en la primera ronda de olimpiadas matemáticas 2020

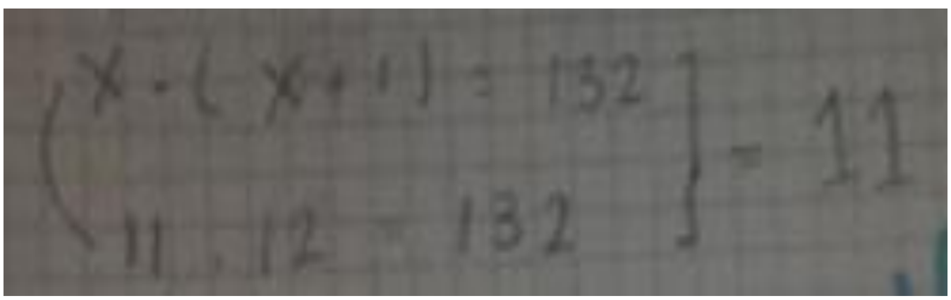


Nota. Solución enviada por estudiante participante de las olimpiadas matemáticas 2020.

La anterior figura muestra cómo uno de los estudiantes resuelve el problema 2, buscando el número de filas a conveniencia, para este caso un número de filas cercano al número 525; como resultado encuentra que el número 24*22 es tres unidades mayor que el 225, y de esa forma encuentra que la posición de la silla está en la fila 22 y es la número 21 en su respectivo orden. Otra solución que se notó en este problema fue dividir el número 525 entre 24, encontrando el número de filas totales para luego contar las 21 sillas de la fila 22 y así dar solución al problema. De esa forma los estudiantes descubren la estrategia que da solución al problema 2, la cual es tener en cuenta el número de filas totales, en este caso 21 filas, y de acuerdo al orden ubicar las 21 sillas restantes en su respectivo orden de la fila 22. Superado lo anterior, se plantea una situación, donde se modifica el problema 2 de la siguiente manera: Considerar el problema 2 con la condición de que entre dos sillas ocupadas debe haber tres libres.

Figura 12.

Solución problema 4 planteado en la primera ronda de las olimpiadas matemáticas 2020.



Nota. Solución enviada por estudiante participante de las olimpiadas matemáticas 2020.

En el tercer y cuarto problema, al igual que el problema número uno, los estudiantes en su mayoría sabían qué estrategia usar para la solución; en cuanto al tercer problema, algunas soluciones implican el uso de variables tal y como se observa en la *Figura 12*, y otros justifican su respuesta, donde multiplicaron números a conveniencia de tal manera que consecutivamente dieran como resultado 210. De esa manera se institucionaliza con los estudiantes la estrategia que da solución al problema 3. Finalmente, se plantea a los estudiantes la siguiente situación:

- Si el número no fuera 210 sino 211, ¿cuál sería la solución del problema?

Como resultado la mayoría respondieron que la solución podría ser 14 o 15; otros manifestaron encontrar un número decimal. Al escuchar las múltiples respuestas donde no hubo un consenso, se explica que dicha situación planteada no tiene respuesta, debido a que no existen dos números enteros positivos consecutivos que multiplicados den como resultado 211. Lo anterior se justifica porque si los números son consecutivos entonces uno de ellos debe ser par y, por lo tanto, al multiplicar un número par con otro número siempre dará como resultado un número par.

Para fortalecer la anterior afirmación, por medio de la aplicación *algeo* se pide a los estudiantes multiplicar dos números que ellos propongan al azar con la condición de que uno de ellos sea par, verificando que el resultado de este es un número es par. Finalmente, la anterior situación queda superada dejando como resultado nuevos aprendizajes, así como también que un problema planteado a veces puede o no tener solución.

Por otra parte, en el problema 5 los estudiantes no están seguros de sus soluciones, debido a que varios de ellos manifiestan operar los datos proporcionados del problema en busca de una concordancia con las posibles soluciones en el cuestionario y así garantizar una posible solución. Ante las anteriores justificaciones se procede a trabajar este problema disminuyendo su nivel de dificultad mediante la estrategia heurística por casos. Por lo cual, se propone trabajar el siguiente problema equivalente:

- En una reunión de 6 personas, hay 4 personas que todas se conocen entre sí y 2 personas que no conocen a nadie. Los que se conocen se saludan de abrazo y los que no se conocen se saludan de mano. ¿Cuántos saludos de mano ocurren?

Luego de plantearles la situación anterior, algunas de las soluciones verbales del problema son las siguientes:

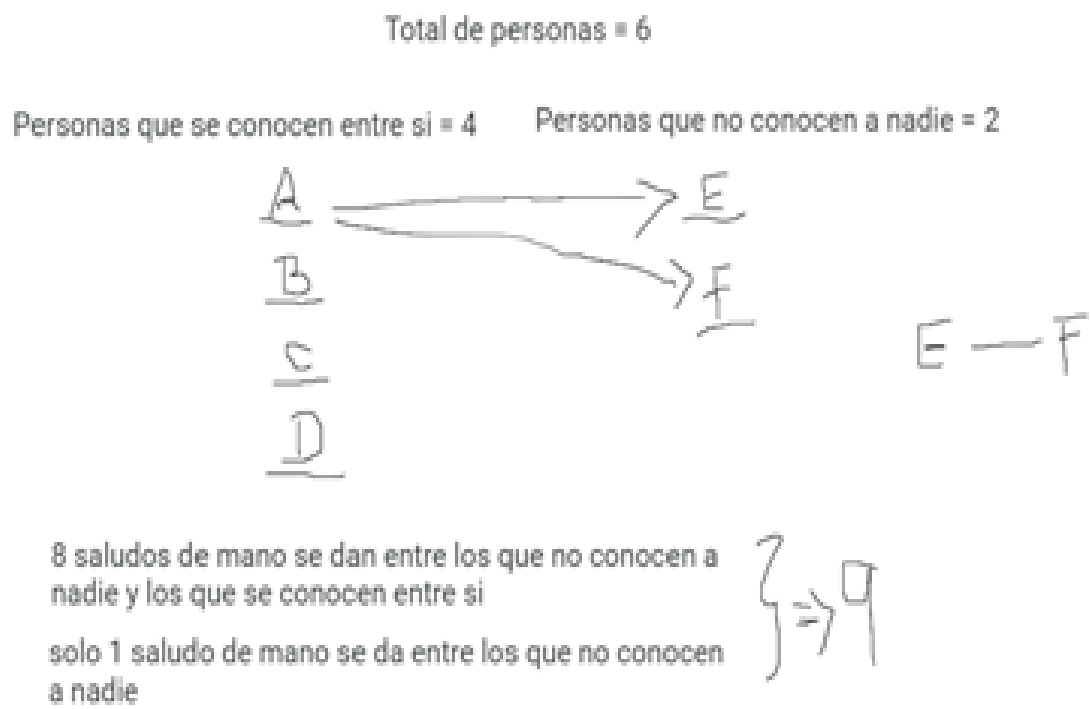
E*[4]*1: *Es 6, porque multiplica 4 por 2 y resta los dos que no conocen a nadie.*

E2: *la respuesta es 8, porque hay cuatro personas que se conocen y 2 que no; entonces, dos por cuatro son ocho.*

E3: *Yo digo que es 9, porque conté las 8 primeras y luego donde se saludan los que no se conocen; entonces me dio 9.*

Figura 13

Recreación del problema planteado en el aula virtual a través de la aplicación liveBoard.



Nota: imagen tomada desde la aplicación *Meet*

[4] Entiéndase /E/ como estudiante. grabación, 28 de agosto, 2023).

A partir de lo anterior, se procede a dar solución a la situación planteada. Lo que indica la figura 13 es la organización de las 6 personas entre las que se conocen entre sí y las que no. Por lo tanto, 8 sería la cantidad de saludos de mano entre las personas que no conocen a nadie y las que se conocen entre sí; luego se le suma la cantidad de saludos entre las personas que no se conocen, lo cual sería 1. Después de explicar la solución se plantea otro problema equivalente con un mayor nivel de dificultad, con el objetivo de evaluar la comprensión de la estrategia planteada en el anterior problema, como se describe a continuación:

- En una reunión de 15 personas, hay 5 personas que todas se conocen entre sí y 10 personas que no conocen a nadie. Los que se conocen se saludan de abrazo y los que no se conocen se saludan de mano. ¿Cuántos saludos de mano ocurren?

Como resultado los estudiantes resolvieron el anterior problema de manera rápida. A partir de lo anterior, se concluye que los estudiantes no tuvieron problemas en la solución del problema 5 planteado en la ronda 1 (Anexo 1). Lo cual indica que los estudiantes concuerdan en que 245 es la solución del problema; además, se notó que los estudiantes estaban conformes con el método propuesto y también se recomendó tratar de utilizar este tipo de estrategia para resolver nuevos retos matemáticos, debido a que brinda un mayor panorama, y así hallar una solución adecuada.

Para concluir con el problema 6 se inicia presentando algunos conceptos, tales como: Teorema de Pitágoras y encontrar la diagonal de un triángulo rectángulo. Los estudiantes debían presentar el problema y su solución. Algunas de sus respuestas se presentan a continuación:

E1: *Operé los valores que me daban en el problema y me dio 16 $\sqrt{2}$cm.*

E2: *Lo dibujé y medí con la regla, y me dio igual la diagonal y el lado, por eso me da como respuesta* $32\sqrt{2}$*cm.*

E3: *Yo utilicé el teorema de Pitágoras y con eso encontré que el lado del cuadrado vale 4, por eso me da como respuesta 32 cm.*

Tras las anteriores respuestas, primero se recomienda que en problemas de tipo geométrico se busque dibujar la figura y, además, dejar a un lado la forma y la similitud, debido a que, aunque en un dibujo podemos encontrar semejanzas, a nivel matemático no es así. Para tratar de buscar la solución en este problema se utilizó la estrategia de dibujar un gráfico siempre que sea posible; en este caso se dibuja la estrella respectivamente y luego se procede a buscar el valor de los lados del cuadrado con el teorema de Pitágoras. En consecuencia, se obtiene la solución y de esa manera los estudiantes son conscientes que apresurarse los lleva a una respuesta equivocada.

En conclusión, los objetivos propuestos en esta actividad se cumplieron, puesto que: Primero, se pudo identificar las fortalezas, dificultades y las estrategias utilizadas, como también identificar a los estudiantes más talentosos. Segundo, se trabajó con los estudiantes las estrategias que solucionen cada problema de la ronda 1; estrategias de exploración tales como: examinar casos, problemas equivalentes y dibujar un gráfico siempre que sea posible, de esa manera acercar al estudiante a una apropiación de estas mismas.

4.2 Análisis Actividad 2

A partir de la primera actividad, la cual muestra el estado inicial de los estudiantes. En esta sección se proponen 2 problemas de olimpiadas matemáticas de nivel básico, con los cuales se empiezan a trabajar estrategias heurísticas de análisis tales como: utilizar problemas equivalentes y dibujar un gráfico siempre que sea posible; de esta manera, con este tipo de estrategias de análisis se busca que el estudiante tenga más herramientas en la fase de entender el problema, debido a que esta fase es el primer acercamiento al éxito en la resolución de problemas matemáticos. Con lo anterior se busca que el estudiante trabaje estas estrategias.

Metodológicamente se empieza a trabajar sobre problemas de menor complejidad hasta llegar a un problema de mayor complejidad; en ese sentido se propone presentar algunas situaciones para que los estudiantes modelen y empiecen a familiarizarse con conceptos y así observar características que más adelante ayude a resolver problemas de mayor dificultad.

Figura 14

Problema de teoría de números- Aula virtual

Del número

$$\mathbb{N} = 12345678910111213\ldots353637383940$$

eliminar 60 cifras de tal forma que el numero resultante sea lo más grande posible.

Nota. Problema propuesto en las olimpiadas Unicauca-2019

Inicialmente se pide a los estudiantes trabajar sobre el problema que aparece en la figura 14 y se solicita que interpreten, caractericen o escriban los datos correspondientes y de esta manera trate de relacionarlos; para ello se da un tiempo de 5 minutos. Como observación, en clase, antes de cumplir el tiempo dado, varios estudiantes manifestaron no entender el problema; debido a que esta situación se tenía prevista, se decide emplear problemas semejantes. En ese sentido, inicialmente se pregunta, ¿cuántas cifras tiene el número 1793809? Como respuesta, todos responden que hay 7 cifras. Dicha respuesta indica que los estudiantes saben a qué se refiere el término cifra. Superada la primera pregunta, se plantea lo siguiente:

Problema S1: Del número 1793809, eliminar cuatro cifras de tal manera que el número que nos quede sea el más grande posible, con la condición de eliminar cifras sin alterar el orden.

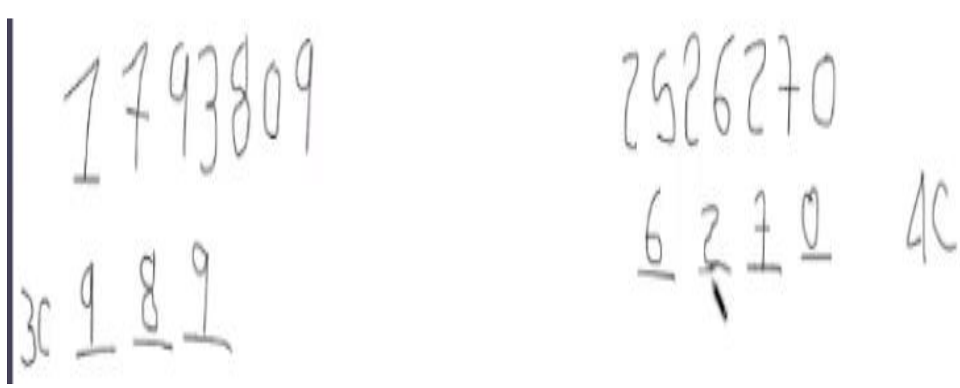
A partir de lo anterior, se plantea la siguiente pregunta: ¿De cuántas cifras debe ser el número más grande? En general, todos indicaron que el número debe tener 3 cifras. En resumen, las respuestas que dieron fueron 998 y 989 como posible solución al problema. De acuerdo a lo antes expuesto, se explica por qué el número 998 no es una posibilidad, debido a que estaría intercambiando el orden de las cifras, y con el objetivo de aclarar dicha condición, se propone el siguiente problema semejante:

Problema S2: Del número 2526270, eliminar tres cifras de tal manera que el número que nos quede sea el más grande posible, con la condición de eliminar cifras sin alterar el orden.

Respecto a lo anterior, varios alumnos dieron sus respuestas, unas acertadas y otras equivocadas, lo cual se debe al afán que tenían por dar una respuesta. Luego se pide que analicen con calma la situación planteada. Al final, se evidenció que los estudiantes habían comprendido que significa "conservar el orden en el problema", puesto que todos llegaron a un acuerdo y dieron como respuesta 6270 tal y como lo muestra la figura 15.

Figura 15

Solución del problema semejante.



Nota: Resultado obtenido del *Jamboard* de un estudiante participante en las olimpiadas 2020

Posteriormente se procede a preguntar a los estudiantes, ¿cómo encontraron dicho número? Algunas de sus respuestas son:

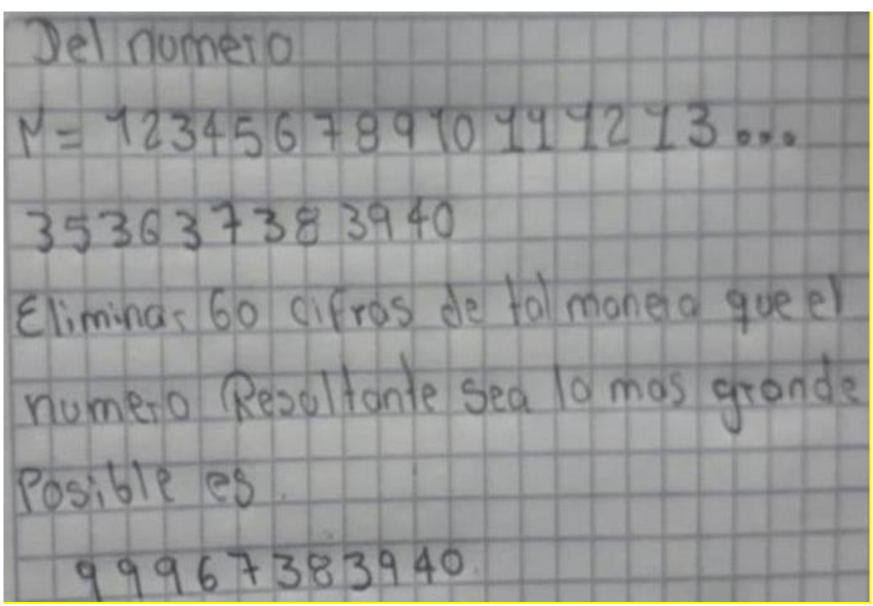
E1*: Tomamos el más grande de derecha a izquierda.*

E2*: Se toma el más grande, pero sin intercambiar el orden.*

Luego de las anteriores respuestas se preguntó la razón por la cual no debe ir el número 5 en la posición del número 2 en el problema **S2**. Como respuesta todos concuerdan que el orden se estaría alterando. Por último, se pregunta si podría ir el número 7 en la posición del 2. El estudiante **E1** dice que "*no se puede porque después del 7 no alcanzan las cifras para completar el número*". Por último, se pregunta: ¿Hay alguna condición en la respuesta para el primer número de izquierda a derecha? Uno de los estudiantes responde que "*la condición es que el número sea el más grande*". A partir de lo anterior, se aclara que dichas condiciones mencionadas son clave para solucionar el problema inicial. Luego se da un tiempo de 10 minutos para que cada uno pueda resolver el problema de la figura 15.

Figura 16

Solución del problema



Nota. Evidencia enviada por un estudiante participante de las olimpiadas Unicauca 2020

Como resultado uno de los estudiantes explica cómo se encontró la solución al problema inicial, tal como lo muestra la figura 16 enviada por el estudiante. Al terminar la sesión se dejó un problema (*ver anexo 5*) para que los estudiantes trabajaran en casa dándoles las siguientes sugerencias en las que deben utilizar casos particulares del problema y también equivalentes hasta encontrar características o patrones relevantes hasta dar con una posible solución.

Figura 17.

Problema de teoría de números - Aula virtual.

Se divide el numero $3456a7$ entre 8 y queda residuo 5
¿cuánto vale a?

Nota. Problema propuesto en las olimpiadas Unicauca-2019.

La ilustración anterior, muestra el segundo problema planteado en la actividad 2, donde inicialmente este se presenta y se da un tiempo de 5 minutos para que trabajen en la solución. Como resultado los estudiantes en su mayoría fueron capaces de resolver el problema sin dificultad, justificando verbalmente el método que usaron; para este caso fue considerar todos los posibles valores de a, dando como resultado 3. Tras observar la facilidad con la que resolvieron el problema se propone el siguiente problema modificado:

Problema modificado: Se divide el número 101112131415 ... 27282930a7 entre 8 y queda como residuo a ¿cuánto vale a?

Luego de presentar la situación anterior, como resultado los estudiantes manifiestan que utilizaron el mismo método que soluciono el problema inicial, el cual es analizar todos los posibles valores de a. En consecuencia, dividir todos esos números sería algo muy complejo. Posteriormente se pregunta si contemplan algún otro método que solucione el problema, donde no hay propuestas de otros métodos. Luego de observar las soluciones, se presenta una solución formal, donde la estrategia consiste en considerar el criterio de divisibilidad del número 8, lo cual reduce el problema a solo analizar las últimas tres cifras y de esa manera dar una solución rápida, aquí se aclara que dicha estrategia heurística que se utiliza de analizar todos los casos posibles es muy eficaz cuando se enfrenten a problemas donde las posibles soluciones son finitas.

En conclusión, los objetivos propuestos en esta actividad se cumplieron puesto que: se trabajaron 2 problemas los cuales en su solución se trabajaron estrategias de análisis tales como: Considerar problemas semejantes de menor nivel, como también estrategias de análisis por casos. En segunda instancia se planteó varias soluciones de problemas con lo cual se busca que los estudiantes consideren que un problema de olimpiadas matemáticas puede tener varias formas de solución.

4.3 Análisis Actividad 3

Con el objetivo de seguir acercando al estudiante sobre el uso de estrategias heurísticas en la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas, en esta actividad se proponen tres problemas de olimpiadas de tipo geométrico, donde se empiezan a trabajar estrategias heurísticas tales como: dibujar un gráfico siempre que sea posible y considerar problemas modificados, además de enfatizar en la fase de comprender el problema. Metodológicamente se empieza a presentar cada problema y se procede a preguntar sobre los datos y condiciones necesarias en su solución.

Figura 18.

Problema de geometría - Aula virtual

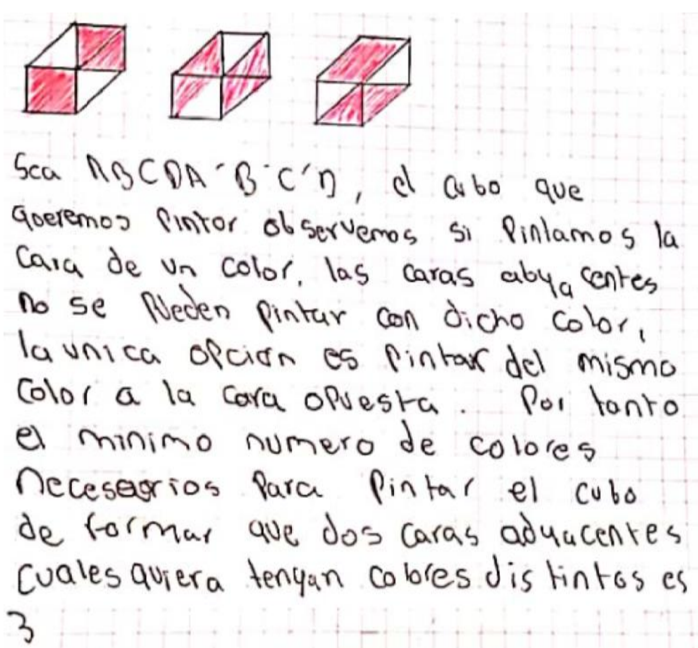
Cuál es el mínimo numero de colores necesarios para pintar un cubo de forma que dos caras adyacentes cualesquiera tengan colores distintos.

Nota: Problema propuesto en las olimpiadas Unicauca-2019

Se plantea el problema descrito en la *figura 18* y se realizan preguntas de comprensión, tales como: el significado de caras adyacentes en una figura geométrica y si reconocen y pueden dibujar un cubo. Como respuesta todos manifiestan saber que es un cubo, en cuanto al significado de caras adyacentes algunos estudiantes manifiestan "que una cara adyacente es que esta juntas unas de otras" mientras que otros manifiestan que "son caras adyacentes si comparten una arista" en adicción a las anteriores respuestas se procede a explicar sobre el concepto de qué es una cara adyacente utilizando como base de ejemplo un cubo, en consecuencia se observa que los estudiantes reconocen dicho concepto, lo cual muestra que ellos tienen las herramientas para solucionar el problema seguido se da un tiempo para que lo hagan, como resultado la mayoría de estudiantes concuerdan en que el mínimo número de colores es 3 y justifican su respuesta de manera verbal y escrita. A continuación, se presentan algunas de las soluciones enviadas por los estudiantes.

Figura 19

Solución del problema 1



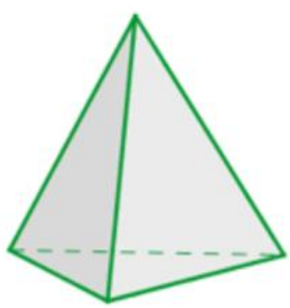
Nota. Solución enviada por estudiantes participantes de la olimpiada Unicauca 2020.

La anterior figura, muestra una de las soluciones enviadas por los estudiantes donde se observa que reconoce aspectos matemáticos como; que es un cubo y cuando dos caras de un cubo son adyacentes, describen las condiciones del problema y utiliza como estrategia dibujar una figura geométrica, donde a través del dibujo se visualiza de manera más clara los datos y así diseñar un plan de acción. Se nota como el estudiante relaciona el gráfico con las incógnitas de la pregunta, en este caso la cantidad mínima de colores posibles para pintar el cubo sin que dos caras adyacentes tengan el mismo color, a partir de ello elaboran un plan de acción, el cual es pintar las caras de un cubo y analizar la solución y también justificar de manera escrita.

Figura 20

Problema 2 de geometría. - Aula virtual

¿Cual es el mínimo número de colores necesarios para pintar un tetraedro de forma que dos caras adyacentes cualesquiera tengan colores distintos es?



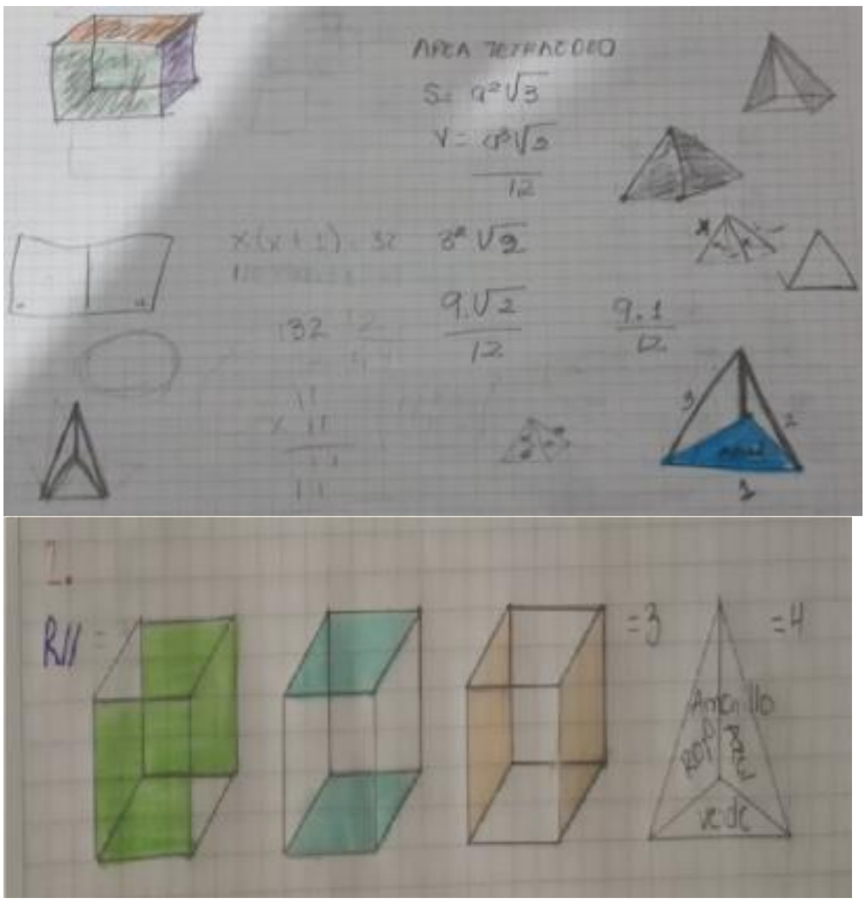
Nota. Problema modificado

Tras plantear el problema descrito en la figura anterior, los estudiantes proponen algunas respuestas rápidas donde justifican que el mínimo número de colores distintos es 2, debido a que el "*tetraedro tiene 4 caras entonces tiene menos caras que el cubo por lo tanto es 2*", otra justificación se da en base al número de caras de la figura geométrica dividido 2, puesto que el cubo cumple dicha condición.

Tras las anteriores respuestas que concuerdan la mayoría de estudiantes, se pide que dibujen el tetraedro y empiecen a colorear con colores distintos las caras adyacentes, luego de un tiempo varios envían sus soluciones donde responden que el número de colores es tres y otros justifican que el mínimo de colores es cuatro.

Figura 21.

Respuestas enviadas del problema 2 actividad 3.



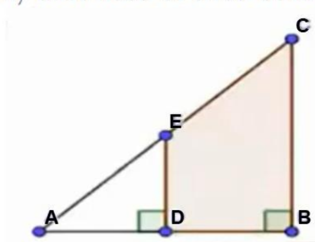
Nota. Evidencia enviada por estudiantes de las olimpiadas Unicauca 2020

La *figura 21*, muestra algunas de las soluciones enviadas, donde se nota como la estrategia heurística: realizar un gráfico siempre que sea posible ayuda a que los estudiantes analicen con mayor cuidado los detalles que tiene un problema, en efecto inicialmente establecieron que el mínimo número de colores era 2 , lo cual no es correcto , pero luego de realizar el gráfico observaron que la cantidad de caras adyacentes era cuatro, es decir todas las caras de un tetraedro son adyacentes y por lo tanto el mínimo número de colores es igual cuatro, de esa manera se sugiere que siempre que trabajen con problemas donde se pueda realizar un gráfico, en este caso problemas de geometría, es fundamental realizarlo e ir caracterizando los datos pertinentes y conceptos; de esa manera tendrán un mejor panorama del problema y de ahí poder establecer una estrategia para solucionarlo, por ejemplo para el problema anterior la técnica fue distinguir caras adyacentes y pintarlas de distintos colores.

Figura 22.

Problema 2 de geometría. - Aula virtual.

El triangulo $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son rectángulos con ángulos rectos en los vértices B y D respectivamente, $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$, $\overline{ED} = 2$. Si el área del triágulo $\triangle ADE$ es 2, entonces el área sombreada es.

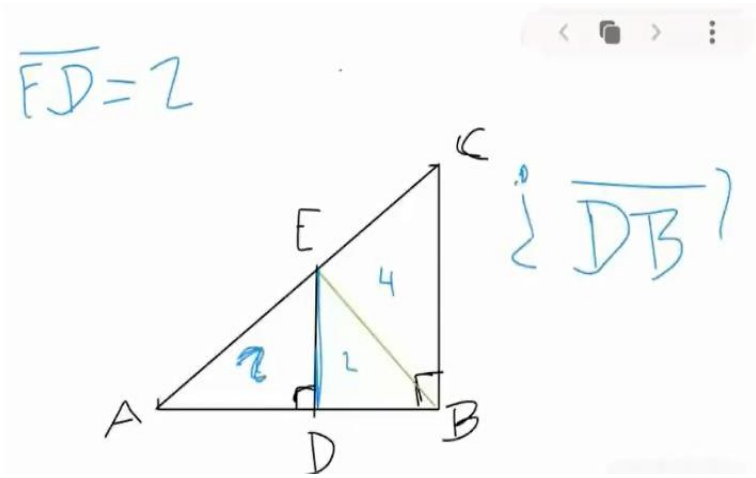


a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Nota. Problema propuesto en las olimpiadas Unicauca-2019

Para finalizar esta actividad se propone a los estudiantes trabajar sobre el problema descrito en la figura anterior, donde se recomienda que caractericen o escriban los datos correspondientes, traté de relacionarlos con el problema y realicé el dibujo correspondiente. Luego de un tiempo varios estudiantes manifiestan que la respuesta es 6, donde uno de los estudiantes explica el método que uso para resolver el problema.

Figura 23. *Solución del problema 3 de tipo geométrico*



Nota. Modelación de la solución desde la aplicación *Liveboard*

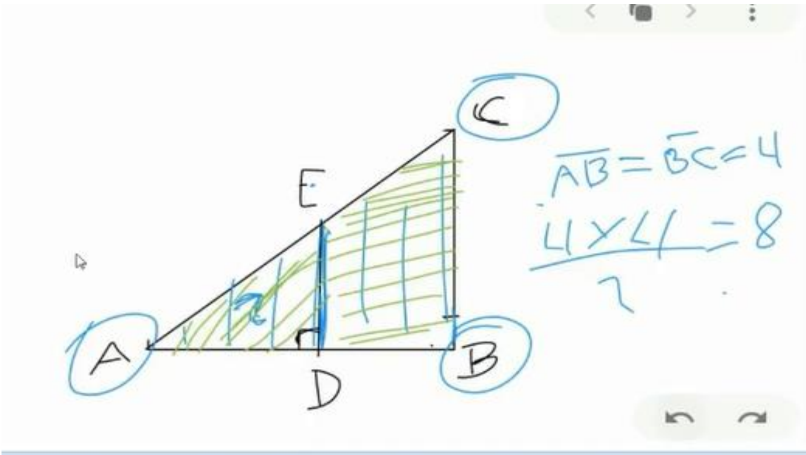
La anterior figura muestra la forma en que un estudiante soluciono el problema anterior, donde inicialmente considera que el triángulo ADB tiene área 2 y justifica lo siguiente. *El triángulo ADE parece igual al BDE entonces sería 2 y el triángulo BCE parece que es el doble que el anterior entonces sería 4 entonces 4 +2 es 6*, en esta última afirmación se pregunta, ¿cómo podría justificar que de verdad el triángulo BCE tiene como área 4, como respuesta?, *El área del triángulo BCE sería 4 porque b = 4 y h = 2 4*2=8 y 8/2 es igual a cuatro*[5] y, por lo tanto, de esa manera la respuesta del problema 3 es 6.

Finalmente se pregunta, si consideran otra forma de resolver el problema, donde la mayoría concuerdan no encontrar otro método de solución y, por lo tanto, se procede a mostrar otra forma de resolverlo.

[5]Estudiante de olimpiadas Unicauca 2020 modalidad virtual, grabación, 28 de agosto 2020

Figura 24.

Otro método de solución al problema 3.



Nota. Modelación de la solución desde la aplicación *Liveboard*

La figura anterior, muestra otra forma de resolver el problema 3 donde la estrategia es restar Áreas, dicha técnica es muy utilizada para resolver problemas de este tipo, tal y como se puede observar en la figura anterior. Al calcular el área del triángulo ABC y quitando el área del triángulo ADE; se tiene que el área sombreada es 6. Después de esta explicación, varios estudiantes manifiestan que dicha forma fue rápida y con menos cálculos respecto al primer método expuesto, por lo cual quedaron satisfechos con este método.

Finalmente, esta actividad cumplió con los objetivos planteados ya que se trabajaron problemas de olimpiadas matemáticas, donde en su solución utilizaron estrategias heurísticas como: dibujar un gráfico siempre que sea posible y trabajar en base a problemas modificados. Por otra parte, se observó que los estudiantes son menos apresurados al resolver problemas, donde tienen en cuenta aspectos importantes del problema como lo son datos, incógnitas y conceptos, puesto que manifestaban en medio de la sesión la aclaración de aspectos que no entendían.

4.4 Análisis Actividad 4

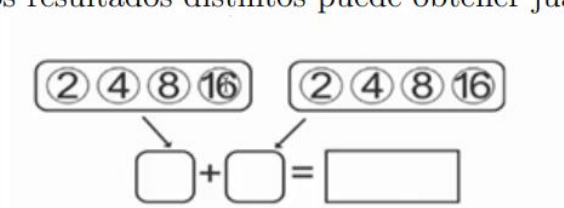
Con el objetivo de seguir acercando al estudiante sobre el uso de estrategias heurísticas en la resolución de problemas tipo olimpiadas matemáticas; esta actividad propone cinco problemas, con un nivel de dificultad mayor a los trabajados anteriormente, se inicia a trabajar estrategias heurísticas tales como: considerar problemas análogos, analizar por casos particulares y modificar un problema. Se realizaron preguntas en torno a las condiciones de cada problema, con el objetivo de enfatizar y reflexionar en la fase de comprender el problema. Metodológicamente se presenta cada problema y se procede a preguntar sobre los datos y condiciones necesarias en su solución.

La siguiente figura, muestra el primer problema de la actividad 4; tras presentar y solicitar a los estudiantes que buscaran una solución; algunos justificaron que la solución era 16, debido a que había 4 balotas en cada urna y el producto da 16, mientras que, otros argumentaron que la solución sería 10, utilizando la siguiente técnica: La fórmula de la suma de los n primeros números, en este caso para n=4 y así el problema quedó resuelto.

Figura 25.

Problema de teoría de números - Aula virtual.

En la figura se ilustran dos urnas, en cada una de ellas hay cuatro balotas marcadas con los números 2,4,8,16 respectivamente. Juan toma una balota de cada una y suma los números marcados en las balotas ¿cuántos resultados distintos puede obtener juan?.



a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 16

Nota. Problema de las olimpiadas Univalle 2019

Posteriormente se planteó un problema equivalente al anterior, con el objetivo de llevar al estudiante a nuevos escenarios, donde postulen nuevas ideas acercándose a una postura reflexiva en la resolución de problemas.

Figura 26.

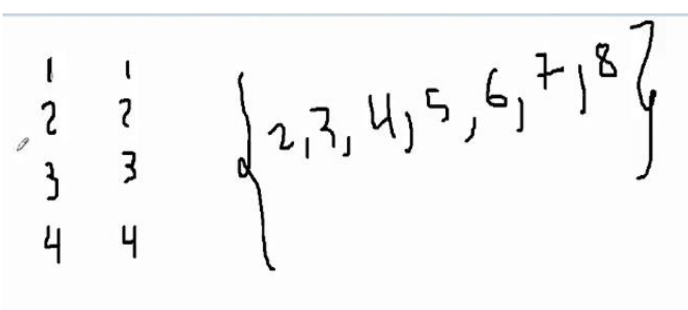
Problema modificado - Aula virtual.

Considere el problema anterior pero ahora en las urnas los números $2, 4, 8, 16$ cambian por los números $1, 2, 3, 4$ ¿cuántos números distintos pueden formar?

Tras plantear el problema modificado, se encontró que varios estudiantes manifiestan que la solución sería 10 números distintos, debido a la relación entre el problema inicial (*figura 25*) y el modificado, mientras que otros se encuentran indecisos. A partir de lo anterior se pide que caractericen nuevamente todas las condiciones del problema y los posibles casos; debido a que se trata de un problema de orden finito tal y como se trabajó con problemas anteriores, donde es posible verificar todos los posibles números. Luego de dar las anteriores sugerencias, los estudiantes reflexionan más sobre el problema y dan una solución más argumentada.

Figura 27.

Solución del problema modificado.



Nota. Modelación de la solución desde la aplicación *Jamboard*

La *figura 27* muestra como un estudiante resuelve el problema modificado, verificando todos los posibles casos, de esa forma se observa que la cantidad de números distintos fue inferior respecto al problema inicial , puesto que sólo 7 números cumplen dicha condición, de esa manera son conscientes que la fórmula de la suma de los primeros números no aplica para todos los posibles valores de las balotas de la urna, en ese sentido también se resalta la importancia de analizar con detalle las condiciones y modificaciones cuando se enfrenten a nuevos problemas.

Figura 28. *Problema de teoría de números - Aula virtual.*

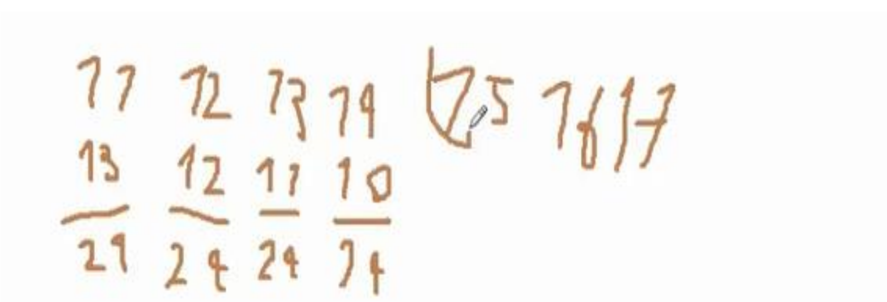
¿Cuántas parejas de números naturales hay, cuya suma es 24, de tal manera que, al realizar la suma, nunca se "lleve"?

Nota. Problema propuesto en las olimpiadas *Unicauca 2019.*

La *figura 28* muestra el problema 2, se inició esta sección presentando el problema y realizando preguntas con el objetivo de observar si los estudiantes comprenden el problema, tras hacer estas preguntas, varios estudiantes manifestaron no comprender que significaba que "*una suma lleve*", por lo cual se procede a dar algunos ejemplos. Debido a que en sesiones anteriores se trabajó con problemas donde los posibles casos son finitos y la técnica para verificar su resultado es caracterizar cada posibilidad, la mayoría de estudiantes respondió que la respuesta era 7 sumas posibles, uno de los estudiantes explica el método usado.

Figura 29.

Solución problema anterior.



Nota. Solución de un estudiante de las olimpiadas Unicauca, tomada desde el *Liveboard.*

Tal y como se observa en la ilustración anterior, inicialmente el estudiante ordena los números y luego describe las parejas donde se cumple la condición, en este caso el estudiante explicó las razones del porqué el número 15 no podría estar en una de las sumas y, el siguiente número a considerar sería del 20 hasta el 24, por lo tanto, el número de sumas que satisfacen la condición es 7. Posteriormente se presentó un nuevo problema donde se explicaría la estrategia heurística de problemas análogos.

Figura 30.

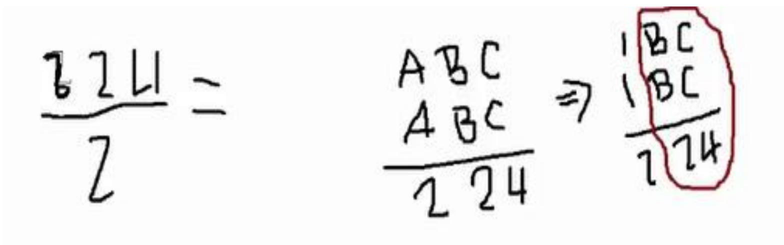
Problema de teoría de números modificado - Aula virtual.

Cuántas parejas de números naturales de tres cifras hay, cuya suma es 224, de tal manera que, al realizar la suma, ¿nunca se "lleve"?

La *figura 30,* muestra un problema de mayor nivel con respecto a problema trabajados anteriormente, tras presentar el problema se notó algo curioso, puesto que algunos estudiantes manifestaron que dicho problema estaba muy largo de resolver, ya que se debía contar todas las sumas posibles cuyo resultado es 224 y "*no lleven*". Después de esta primera reacción por parte de los alumnos, se solicita que observen con cuidado las condiciones del problema y traten de encontrar un ejemplo que cumpla con la condición y así establecer relaciones que ayuden a encontrar una solución. Posteriormente algunos dieron ejemplos que no se ajustaban a las hipótesis del problema, como considerar la suma 220 +4, mientras que otros indicaron ejemplos como; 110+114 y 120+104. Luego de estas observaciones un estudiante vinculó este problema con el expuesto en la *figura 29* encontrando que el número de posibilidades seguía siendo 7.

Figura 31.

Solución problema anterior.



Nota. Solución de un estudiante de las olimpiadas Unicauca, tomada desde el *Liveboard.*

La figura anterior muestra una de las soluciones planteadas por un estudiante, donde se observa la solución del problema en base a problemas equivalentes, en este caso tras analizar algunos ejemplos, llegan a que el problema actual se reducía al anterior, así el análisis solo se realizaría para las unidades y decenas donde las condiciones no cambiaron y por lo tanto el número de sumas sigue siendo 7. Finalmente, se enfatizó que, al enfrentar estos problemas, la estrategia es analizar por casos y detallar ejemplos que cumplen la condición y así genera un mejor panorama, donde problemas que parecen ser muy difíciles son posibles de resolver y de manera muy sencilla, como por ejemplo para el caso de este problema utilizar un problema base o análogo.

Figura 32.

Problema de teoría de números - Aula virtual.

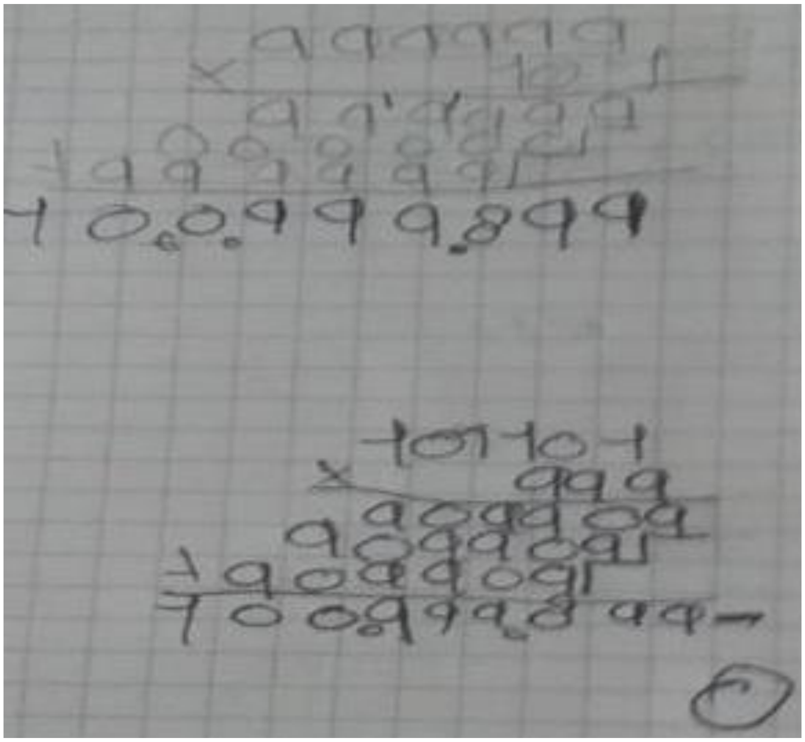
Cual es el resultado de $101101 * 999 - 101 * 999999$.

Nota. Problema propuesto en las olimpiadas *Unicauca 2019*

Para terminar esta sección se postula un último problema de nivel básico, con el fin de que los chicos se sientan cómodos y más seguros en la siguiente prueba de olimpiadas. La *figura 32* muestra el problema propuesto en esta actividad, como resultado la mayoría de estudiantes lo resolvieron de manera rápida. Donde utilizaron como método realizar el producto por separado y luego restar los resultados.

Figura 33.

*Respuesta enviada del problema anterior***.**



Nota. Solución de un estudiante de las olimpiadas Unicauca, tomada desde el *Liveboard.*

Tal y como se puede observar en la *figura 33*, el estudiante realizó el producto y luego comparó el resultado observando que estos eran iguales, por lo tanto, la respuesta es cero. Por otra parte, se expone otra manera de resolver el problema por medio de factorización. El objetivo al plantear el anterior problema, es que los partícipes se sientan más seguros de sus capacidades a la hora de presentar la siguiente ronda; puesto que estará compuesta por problemas más complejos y las preguntas no son de opción múltiple.

En conclusión, se cumplió con los objetivos propuestos, puesto que, se trabajaron alrededor de la solución de los problemas estrategias heurísticas tales como: considerar problemas análogos, analizar por casos particulares y modificar un problema, además se notó cómo a través de todos los talleres los estudiantes se sintieron con más confianza y se atrevieron a compartir su pantalla para explicar el método que usaron; en consecuencia, el miedo de enfrentarse a problemas olímpicos y el miedo a participar en la clase es menos, además se observó un mejor manejo al abordar problemas; debido a que son más críticos frente a situaciones que no comprenden y también a realizar algunas generalidades en base a resultados y estrategias que utilizan.

4.5 Actividad 5° Comparación De Las Pruebas Ronda 1 Y Ronda 2

En este capítulo, se muestran los resultados de la Ronda 1 y Ronda 2, después de implementar en el aula de clases (*aula virtual)*, la enseñanza de estrategias heurísticas. Para analizar, si dicha implementación tuvo efectos positivos en los estudiantes, se realizó un análisis descriptivo por medio del software estadístico (*Minitab 19*), los cuales fueron caracterizados a partir de las siguientes dimensiones:

- *Ronda 1 y Ronda 2*
- *Número de aciertos*
- G*rado académico (grado 8° y 9°) y género*

4.5.1 *Análisis Descriptivo De Los Resultados, de la Ronda 1 y Ronda 2*

Antes de seguir con este análisis, debemos recordar que la intervención se llevó a cabo con estudiantes que participaban en las olimpiadas Unicauca 2020 modalidad virtual. En ese sentido por las características que tiene una olimpiada matemática, en cada fase o Ronda el nivel de dificultad de los problemas va aumentando, de ahí que, la Ronda 1 está conformada por problemas de nivel básico y las preguntas son de múltiple, mientras que la Ronda 2 está conformada por problemas de nivel medio y con preguntas abiertas.

Tabla 5.

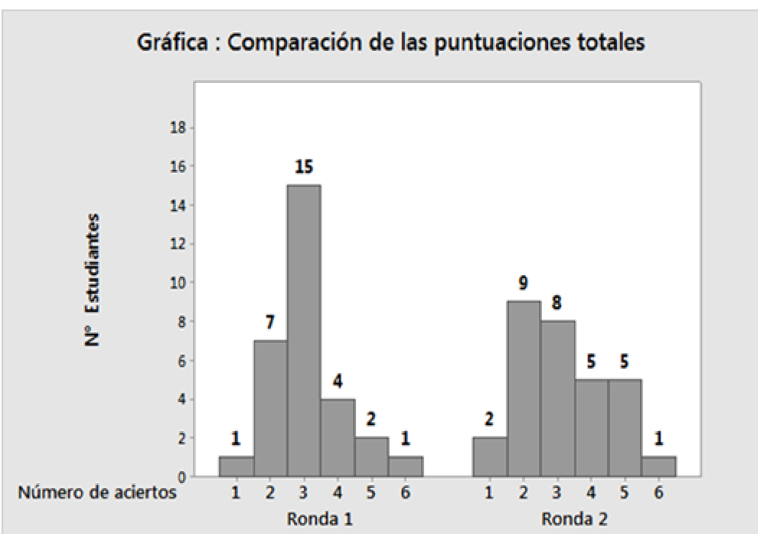
Estadísticos descriptivos: Ronda 1 y Ronda 2 (test de entrada y salida)

Test	Variable	Media	Desv.Est	Varianza	CoefVar	Mediana
Ronda 1	N° Aciertos	3,067	1,048	1,099	34,18	3
Ronda 2	N° Aciertos	3,167	1,315	1,730	41,53	3

Nota. Datos arrojados por el software estadístico *minitab 19.*

De acuerdo a la tabla anterior, se puede observar que en el test de entrada (*Ronda 1*), los estudiantes presentaron una media de 3,067 y en el test de salida (*ronda 2*) una media de 3,167, de lo anterior podemos concluir de forma general que los estudiantes obtuvieron una mayor cantidad de aciertos en la Ronda 2 con respecto a la Ronda 1. Esto nos indica que la implementación de estrategias heurísticas en estudiantes (*grado 8° y 9°*) de olimpiadas matemáticas tuvo efectos positivos debido a las condiciones de cada prueba.

Figura 34. *Número de aciertos vs tipo de Ronda.*



Nota. Datos arrojados por el software estadístico *minitab 19.*

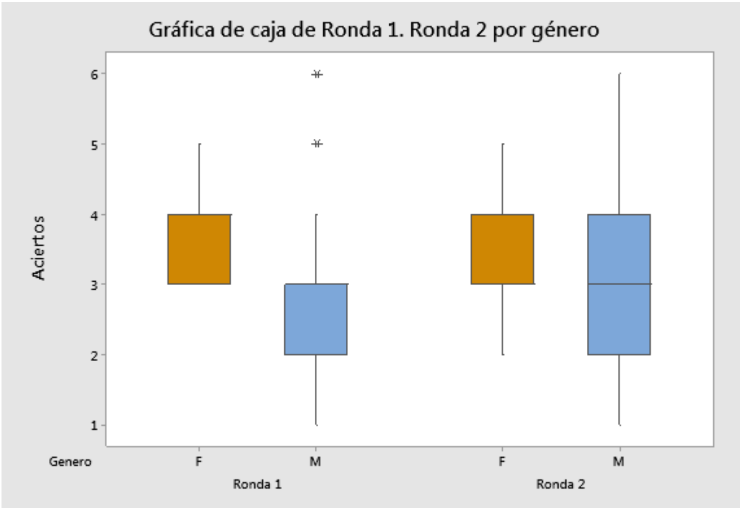
Por otra parte en el gráfico anterior, muestra de manera detallada el comportamiento de los estudiantes en las dos pruebas respecto al número de preguntas acertadas, como se puede ver en la Ronda 1 la mayoría de los estudiantes respondieron 3 preguntas y el conjunto de datos está más agrupado en este sentido, mientras que en la Ronda 2 los datos están más dispersos, esto se debe al incremento en la cantidad de estudiantes que respondieron correctamente entre 4, 5 y 6 preguntas lo cual evidencia un mejor rendimiento en estos estudiantes. En particular entre la Ronda 2 y Ronda 1 se encontró que:

- 13 estudiantes aumentaron la cantidad de problemas acertados en la ronda 2 respecto a la ronda 1.
- 6 estudiantes mantienen la cantidad de problemas acertados en las dos pruebas.
- A partir de los ítems anteriores, 16 estudiantes para un total del 64 % presentan estadísticamente un mejor rendimiento; justificado por el número de aciertos y el nivel de dificultad de cada pregunta.

Por otra parte, se encontró que en la Ronda 2 hubo un incrementó el número de aciertos en problemas de Geometría, Debido a que, en la primera ronda se presentaron 7 aciertos y en la segunda ronda aumentó considerablemente a 25. Finalmente donde presentó una mayor dificultad en cada ronda fue en los últimos problemas; lo cual era de esperarse ya que estos fueron de mayor dificultad cada ronda.

A Continuación, se presenta un diagrama de caja, el cual muestra el comportamiento entre las dos rondas de acuerdo con el grado académico y género.

Figura 35. *Ronda 1 y Ronda 2 de acuerdo al género.*



Nota. Datos arrojados por el software estadístico *minitab 19.*

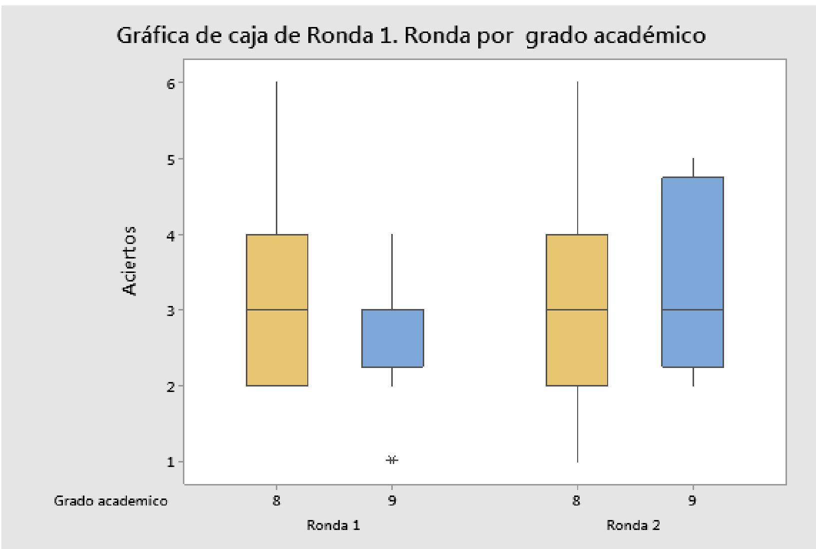
La figura anterior, muestra el comportamiento de los estudiantes entre la Ronda 1 y Ronda 2 respecto al género, se puede observar que en la primera ronda las mujeres tienen entre 3 y 5 aciertos y en la segunda ronda bajan su rendimiento, debido a que presentan entre 2 y 5 aciertos. Por otra parte, los hombres en la ronda uno tiene entre 1 y 4 aciertos, luego en la ronda dos aumentan su rendimiento puesto que presentan entre 1 y 6 preguntas acertadas. De lo anterior, se puede observar cómo los hombres presentan un buen rendimiento tras los talleres; como también se puede observar que las mujeres en la primera ronda les fue mejor que a los hombres, en ese sentido se puede decir que las mujeres llegan a la olimpiada con una buena comprensión y análisis cuando se enfrentan a problemas de olimpiadas.

Finalmente, la *figura 36* muestra el comportamiento de los estudiantes entre la Ronda 1 y Ronda 2, de acuerdo al grado académico, como resultado se puede observar que en la Ronda 1 los estudiantes de grado octavo tienen entre 2 y 6 aciertos y en la segunda ronda presentan entre 1 y

6 aciertos. Por otra parte, los estudiantes de grado noveno en la primera ronda tienen entre 2 y 4 aciertos y en la segunda ronda entre 2 y 5 preguntas acertadas.

Figura 36.

Ronda 1 y Ronda 2 de acuerdo al grado académico.



Nota. Datos arrojados por el software estadístico *minitab 19.*

Por otra parte, se observa cómo los estudiantes de grado octavo superan considerablemente en número de acierto a los de grado noveno en la primera ronda, por lo que se considera que los estudiantes de grado octavo tienen una mejor preparación previa a las olimpiadas matemáticas respecto a los de grado noveno. Mientras que en la segunda ronda los de grado noveno superan a los de grado octavo en número de preguntas acertadas.

En conclusión, tras comparar las dos Rondas, se notaron algunos aspectos importantes en los estudiantes de grado octavo y noveno en las olimpiadas matemáticas, inicialmente la Ronda 2 presentó 95 aciertos totales frente a 92 aciertos en la Ronda 1, de ahí que por el nivel de dificultad de las preguntas implica que los estudiantes presentan un progreso en la solución de problemas de olimpiadas , además cabe resaltar que en la Ronda 2 ningún estudiante respondió al menos una pregunta , lo cual es muy positivo.

Por otra parte, se observó cómo las mujeres tienen una preparación previa muy buena pero luego su rendimiento no es el esperado, a modo de propuesta se requiere saber ¿qué está pasando? ¿Cómo motivar a las mujeres? este tipo de resultados pueden ser tratados en investigaciones posteriores.

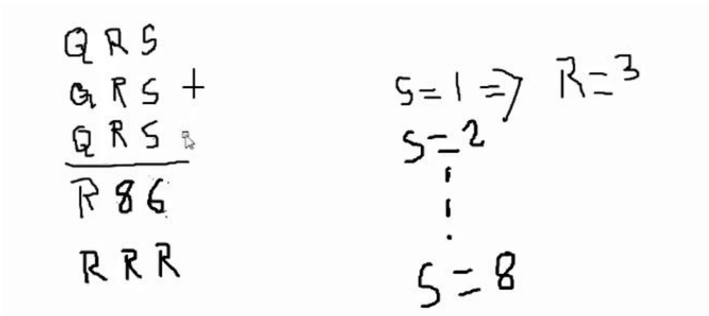
4.6 Análisis Actividad 6.

Tras la aplicación de la segunda ronda (ver anexo 2), esta actividad tiene como objetivo mostrar y trabajar en conjunto con los estudiantes, la estrategia que resuelve cada problema; como también considerar problemas modificados, donde la idea es aplicar estrategias previas que se trabajaron en los talleres y de esa manera acercar al estudiante en el uso de estas mismas. A continuación, se presenta una descripción de lo sucedido en clases.

Inicialmente se notó que, el primer problema, la mayoría de estudiantes respondió correctamente la solución; donde manifiestan buscar y caracterizar todos los posibles casos tal y como se resolvió en problemas anteriormente trabajados, en ese sentido la solución de este problema se dio en conjunto con los estudiantes casi de manera inmediata, donde justifican de manera verbal y escrita los ejemplos que cumplen la regla. Por otra parte, se encontraron algunos errores de comprensión del problema, sobre todo en determinar cuándo un número estrictamente ascendente. Finalmente, en este problema los estudiantes no tuvieron mayor inconveniente por lo cual se trabajó de manera rápida.

Figura 37.

Solución del segundo problema de la Ronda 2

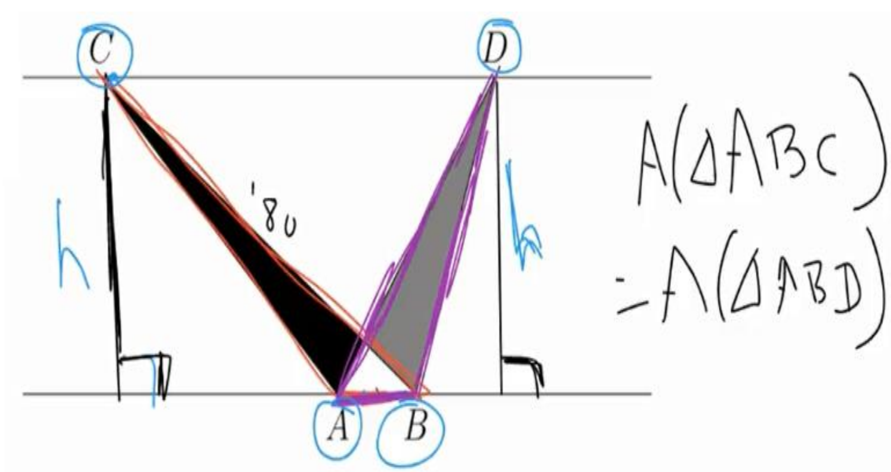


Nota. Modelación de la solución del problema desde la aplicación *Liveboard*

Para el segundo problema, se utilizó la estrategia análisis por casos; tal y como se muestra en la figura anterior, las letras representan dígitos distintos, por lo tanto, la condición inicial; es que al sumar tres veces la letra S dé como resultado R, y a partir de este hecho reemplazar en las siguientes condiciones; de esa manera se llega a que la respuesta es 186. Posteriormente uno de los estudiantes uso la estrategia por casos en base al número RRR; por lo tanto, al dividir RRR entre 3 debe dar QRS, donde el número de posibilidades es menor que el método utilizado inicialmente y por lo tanto se obtienen una solución rápida.

Figura 38.

*Solución problema 3***.**

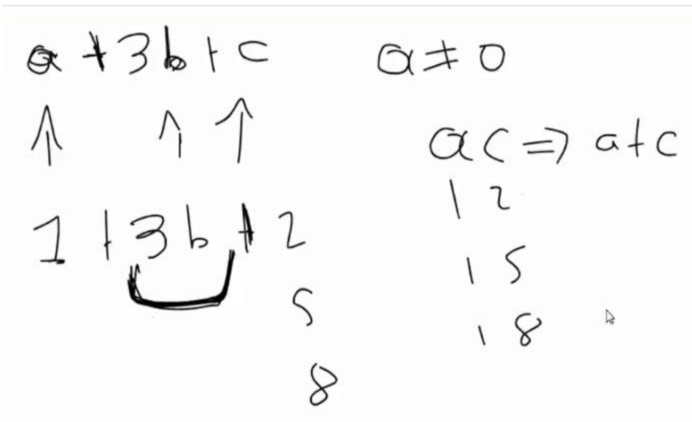


Nota. Modelación de la solución del problema desde la aplicación *Liveboard*

La figura anterior muestra la solución del tercer problema, donde el objetivo principal es determinar que los triángulos ABC y ABD son triángulos de igual base y altura, por lo cual tras las hipótesis planteadas en el problema resulta que la tercer parte del área sobrada es 60. Este problema fue el más acertado por los estudiantes con 25 aciertos de 30; donde algunas justificaciones se dan e este mismo sentido como también en la determinación de semejanza de tamaño por visualización geométrica tras utilizar la estrategia dibujar un gráfico.

Figura 39.

Solución Problema de 4



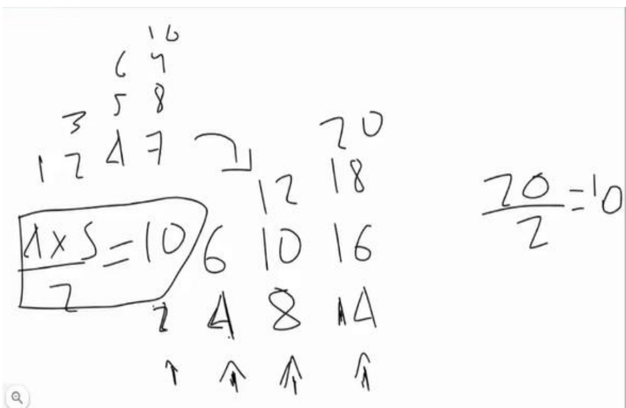
Nota. Modelación de la solución del problema desde la aplicación *Liveboard*

El cuarto problema; el cual es uno de los problemas menos acertados, puesto que solo 6 estudiantes lograron solucionarlo ; donde la figura anterior muestra la manera como uno de los estudiantes expone su solución, donde establece la siguiente relación; " *3b es múltiplo de 3 entonces a + c también debe ser múltiplo de tres, donde al contabilizar la cantidad de posibilidades es 30, luego 30 se multiplica por 10 que son los posibles valores de b, por lo tanto la respuesta seria 30*0" tras analizar esta forma de solucionar el problemas, se procede a enfatizar en la estrategia utilizada, en este caso la estrategia análisis por casos donde se postulan los posibles casos para la letras a y b y c.

En el quito problema propuesto, es uno de los problemas menos solucionados, donde solo 7 estudiantes resolvieron el problema de manera correcta, como estrategia para este problema se utilizó un análisis base tal y como se puede observar en la figura anterior, después de ellos los estudiantes relacionan estos ejemplos con la fórmula de los n primeros números y debido a que esta técnica ya la se trabajó resuelven el problema.

Figura 40.

Solución problema 5

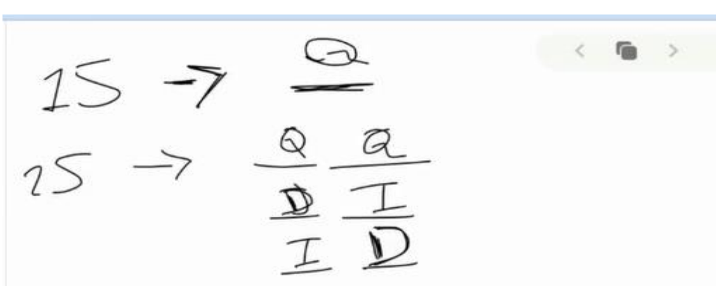


Nota. Modelación de la solución del problema desde la aplicación *Liveboard*

Finalmente, en el problema 6, se empieza implementando algunas estrategias como lo es bajar el nivel de dificultad y reformular el problema, por lo cual se toma como condición inicial el análisis solo para un segundo y dos segundos, tal y como se muestra en la siguiente figura.

Figura 41.

Ejemplo de diagrama para el problema 1

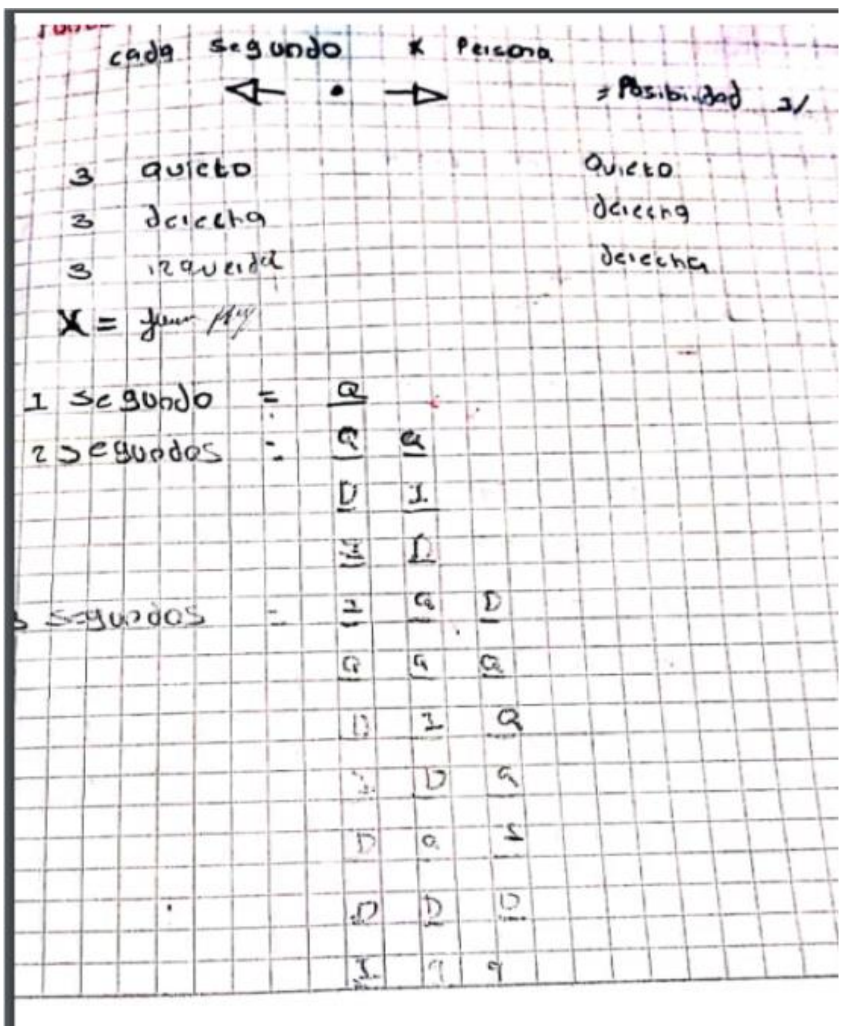


Nota. Modelación de la solución del problema desde la aplicación *Liveboard*

Como resultado, para los estudiantes fue más fácil responder dicho problema, justificando su respuesta de manera verbal. Luego se pide dar ejemplos de posibilidades del problema inicial, como resultado los estudiantes respondieron de manera correcta varios de ellos, por lo cual la estrategia utilizada fue de gran utilidad para la comprensión del problema inicial y acercar más al estudiante a una solución satisfactoria. Luego de un tiempo, los estudiantes dan solución al problema 1 utilizando la estrategia analizar por casos y utilizar un diagrama siempre que sea posible. A continuación, se caracteriza y evalúa una de las soluciones enviadas

Figura 42.

Solución enviada - problema 1.

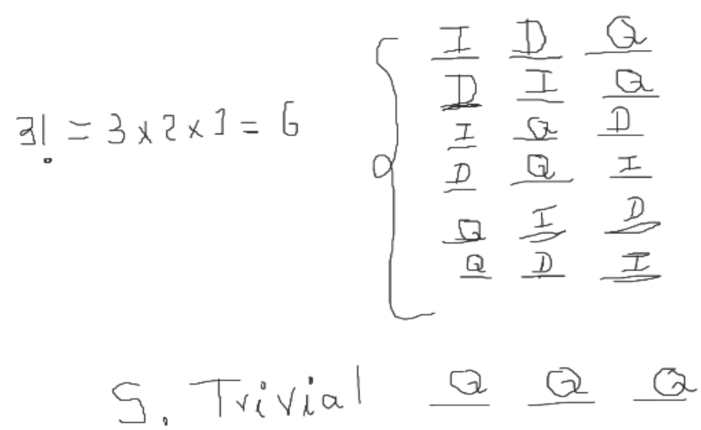


Nota. Solución de un estudiante de las olimpiadas Unicauca,

Inicialmente se nota como el estudiante reformula el problema por medio de un dibujo, el cual son dos flechas y un punto que indican las posibles acciones del niño; se evidencia una comprensión del problema, puesto que identifica las incógnitas e indica la meta a alcanzar, en este caso los distintos movimientos posibles y la cantidad de segundos. Por último, el estudiante hace uso de la estrategia heurística análisis por casos; caso para un segundo, para dos y finalmente para tres. Aquí se observan algunas propiedades de conteo trabajadas el taller organización secuencial de datos; además realiza un plan el cual es resolver el problema por medio de un esquema. Donde hay finitas posibilidades y posibles de caracterizar. Por otra parte, se pregunta a los alumnos ¿si existe otra manera de resolver el problema? De lo cual manifiestan que no.

Figura 43.

Solución número 2- problema 1.



Nota. Modelación de la solución del problema desde la aplicación *Liveboard*

La anterior figura muestra otra forma de solucionar el problema 6, en este caso se utiliza la fórmula de combinado y sumando la posibilidad trivial, la cual es que se quede quieto el niño durante los tres segundos. Por último, se plantea trabajar problemas modificados en base al problema 6; esto se realiza con el objetivo de que los chicos apliquen lo que hasta ese momento han aprendido y de esa manera crear nuevas formas de pensar, en esta ocasión se plantean preguntas tales como:

1. Considerar el número de posibilidades si se adiciona al problema 1 la condición; el niño puede dar un paso hacia adelante.
2. ¿Si el número de segundos en el problema 1 aumenta implica que el número de posibilidades aumenta?

Con respecto a la primera pregunta, todos los estudiantes responden y están de acuerdo de que el número de posibilidades sigue siendo 7, una de las justificaciones se muestra a continuación.

E1*: son los mismos 7, porque si da un paso hacia adelante no podría regresar*.

E2*: sigue siendo igual a 7 porque no hay forma que se cancelen*

Con respecto a la segunda pregunta, todos están de acuerdo con que si aumenta los segundos implica un aumento número de posibilidades en las que el niño pueda regresar a su posición inicial, esto se debe a que en la sesión se observó cómo aumento las posibilidades conforma aumentan los segundos. Al terminar la sesión, se pide que trabajen en casa los siguientes problemas.

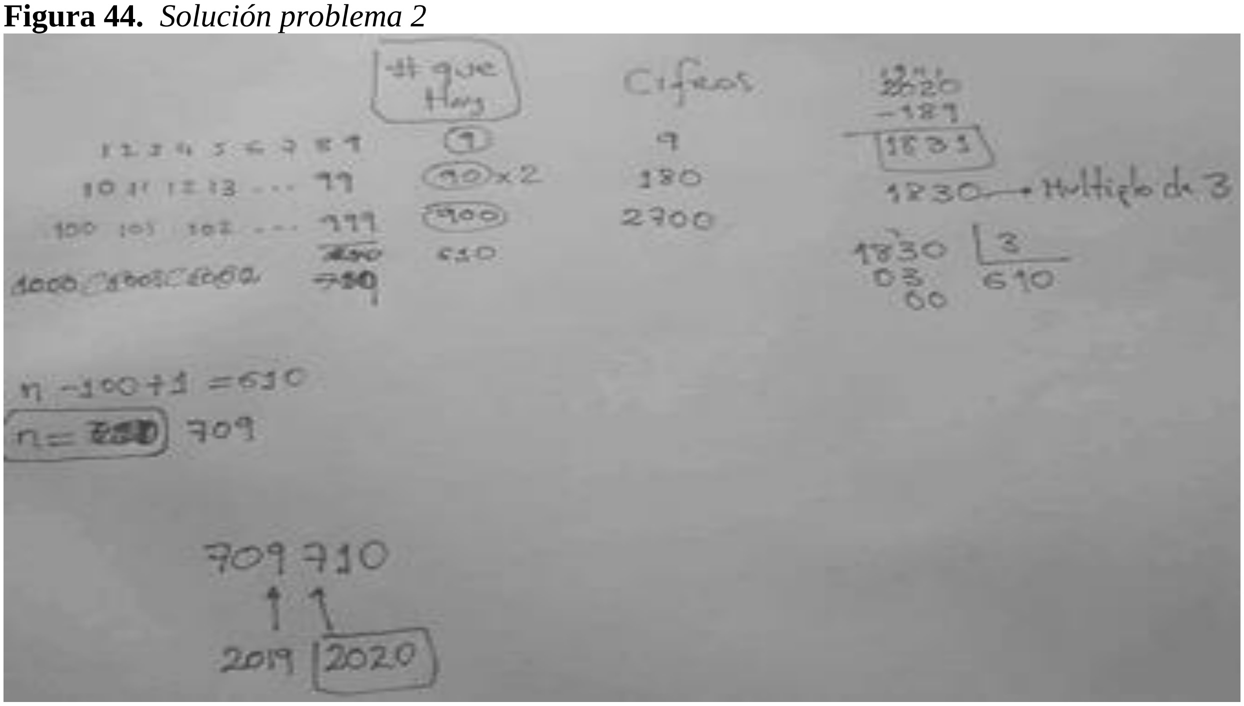
1. Encontrar el número de posibilidades del problema 1, para 4 segundo, encontrar el número de posibilidades del problema 1 , para 5 segundos y por último será posible encontrar una fórmula que cuente el número de posibilidades para n segundos , donde n es un número natural.
2. Considerar el número de posibilidades si se adiciona al problema 1 la condición; el niño puede dar un paso hacia adelante y un paso hacia atrás.

En conclusión; esta actividad cumplió con los objetivos propuestos, donde además en la solución de cada problema de la ronda 2 se evidencio el uso de estrategias trabajadas en los talleres por parte de los estudiantes tales como; análisis por casos, tomar ejemplos base y encontrar la solución; dibujar un gráfico siempre que sea posible, utilizar técnicas de conteo tales como la fórmula de los n primeros números.

4.7 Análisis Actividad 6.

Finalmente tras aplicar la tercera ronda ver anexo 3, la cual está conformada por cinco problemas de nivel superior, se encuentran resultados muy importantes tales como: el uso de estrategias previas trabajadas en los talleres, donde los estudiantes presentan una mejor comprensión del problema, utilizar estrategias por casos para resolver problemas , organizan los datos en esquemas; además el número de aciertos fue como mínimo 2 , por lo cual esto evidenció que los estudiantes al enfrentarse a problemas reto en este caso problemas de nivel superior , presentan muy buenas herramientas previas. A continuación, se presentan las estrategias que se observaron en la tercera ronda las cuales son clasificadas y caracterizadas de acuerdo a las fases de Schoenfeld.

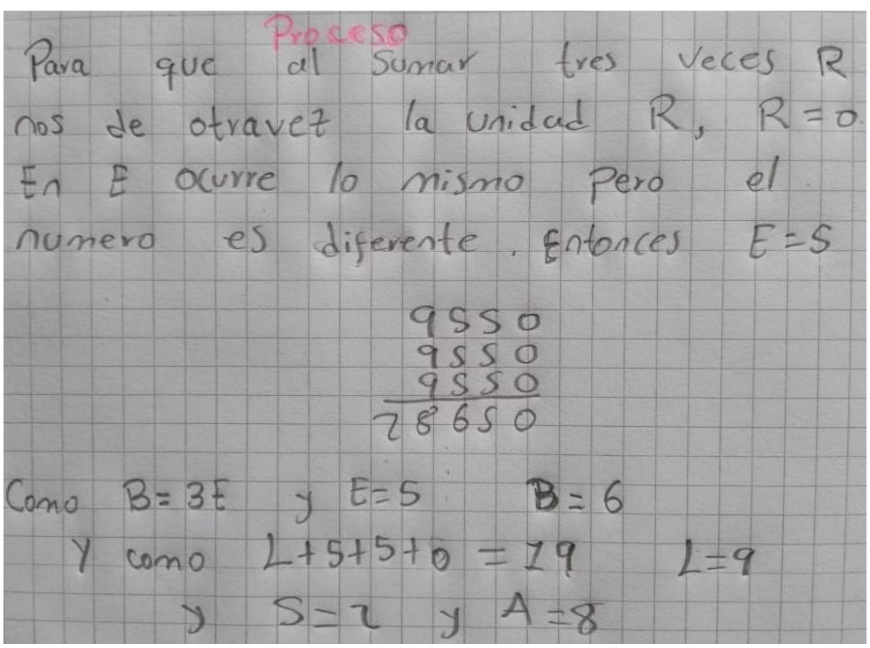
Figura 44. *Solución problema 2*



Nota. Solución de un estudiante de las olimpiadas Unicauca,

Fase de análisis : A Partir del Análisis a la solución presentada por el estudiante , evidencia una comprensión del problema, puesto que identifica los datos numéricos e incógnitas , en este caso números de una cifra , de dos y de tres cifras además se observa una organización en forma de tabla que controla las variables número, número de cifras y total de cifras utilizadas, a partir de este hecho el estudiante tiene un mejor orden de los datos y posteriormente encontrar una solución adecuada al problema. **Fase de Diseño:** Los estudiantes relacionan los datos y las variables, tipo de número y cantidad de cifras, para lo cual hacen uso de sus conocimientos previos, tales como propiedades de multiplicación y división. Realizan un plan el cual es resolver el problema por medio del uso de una ecuación y operaciones matemáticas. **Fase de ejecución:** los estudiantes ejecutan el plan de acción, donde ya plasman el sistema de ecuaciones y la solución de dicho sistema a partir de las condiciones dadas.

Figura 45. *Solución problema 3.*

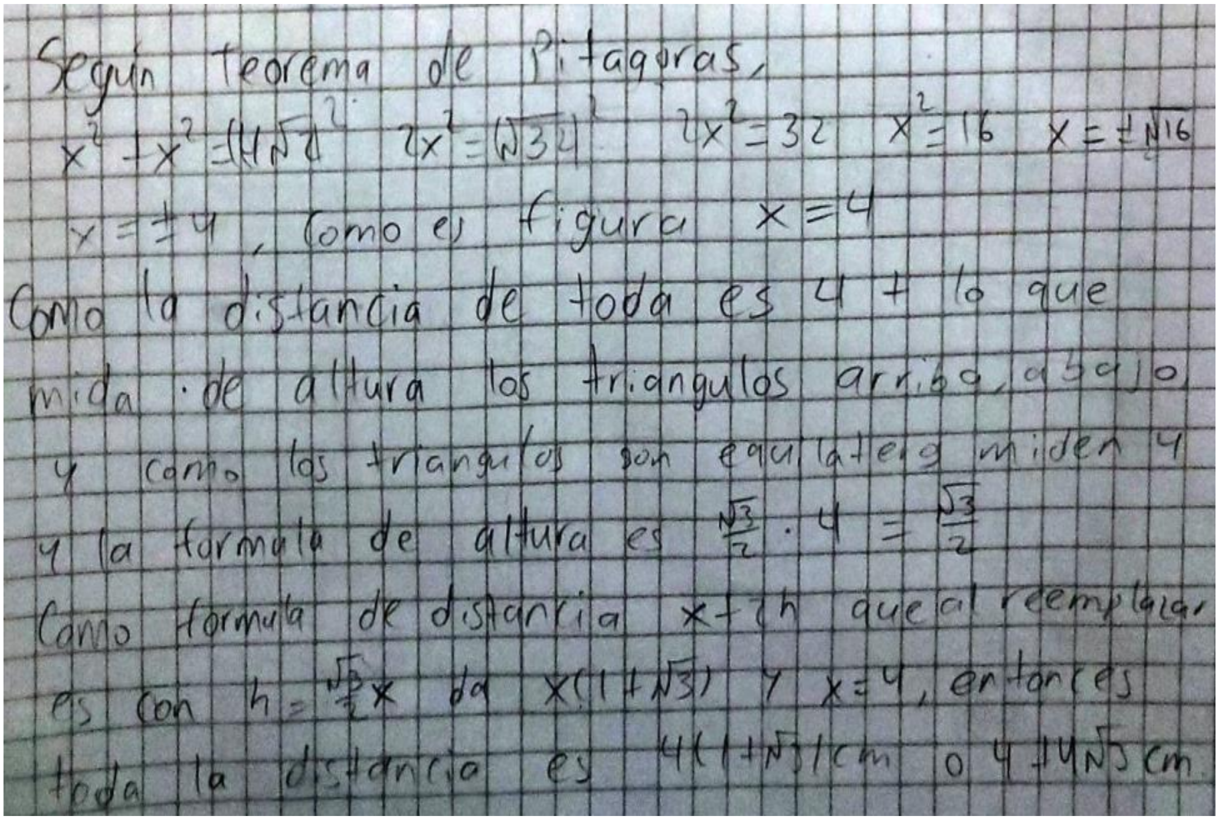


Nota. Solución de un estudiante de las olimpiadas Unicauca,

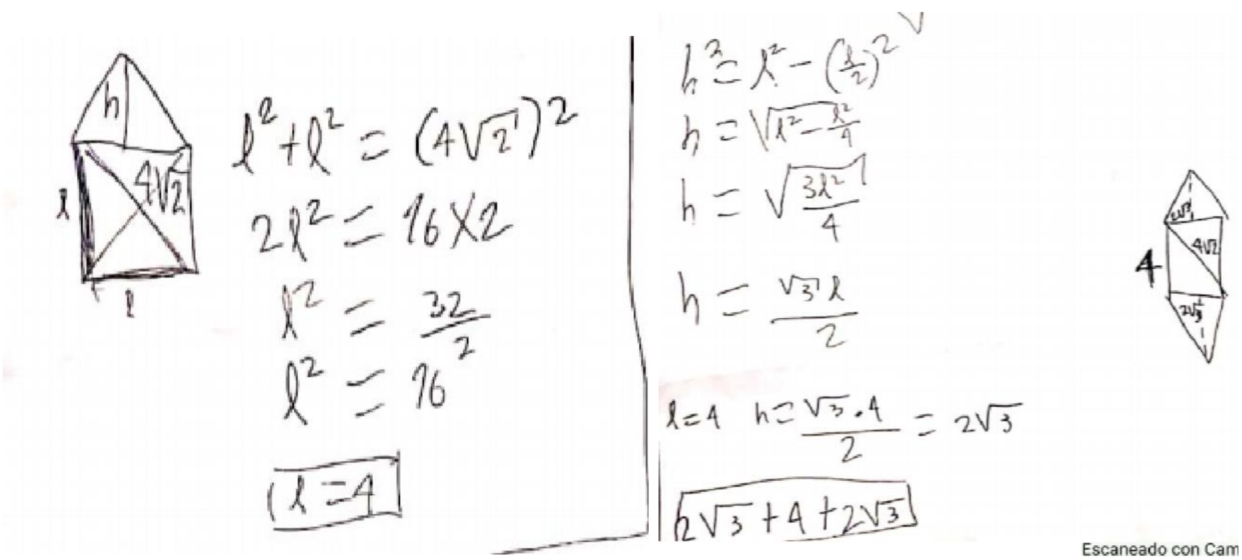
Fase de análisis: los estudiantes comprenden el problema pues identifican la estructura matemática presentada, en este caso comprender que cada letra es un dígito y que si dos letras son distintos sus dígitos también lo son, además describe las condiciones del problema lo cual implica que el estudiante haga un análisis por casos en cada condición y así generar la solución. **Fase de Diseño:** Los estudiantes relacionan los datos y las variables, relación entre los dígitos y una letra, para lo cual hacen uso de sus conocimientos previos como propiedades de multiplicación y de representación de sucesos a través de ecuaciones matemáticas y realizan un plan el cual es resolver el problema por medio de ecuaciones y operaciones matemáticas. **Fase de exploración:** en medio del análisis el estudiante encuentra una serie de condiciones, cada una de ellas es reemplazada en el problema y de esa forma va encontrando más pistas de la solución, la hipótesis de las dos únicas opciones de la letra R, lo envía hacia dos caminos donde explicita que uno de ellos debe ser el de la solución. **Fase de ejecución:** los estudiantes ejecutan el plan de acción inmerso en el proceso de Análisis el cual reemplazar condiciones les fue útil para la solución a partir de las condiciones dadas

Figura 46.

Soluciones del problema 4



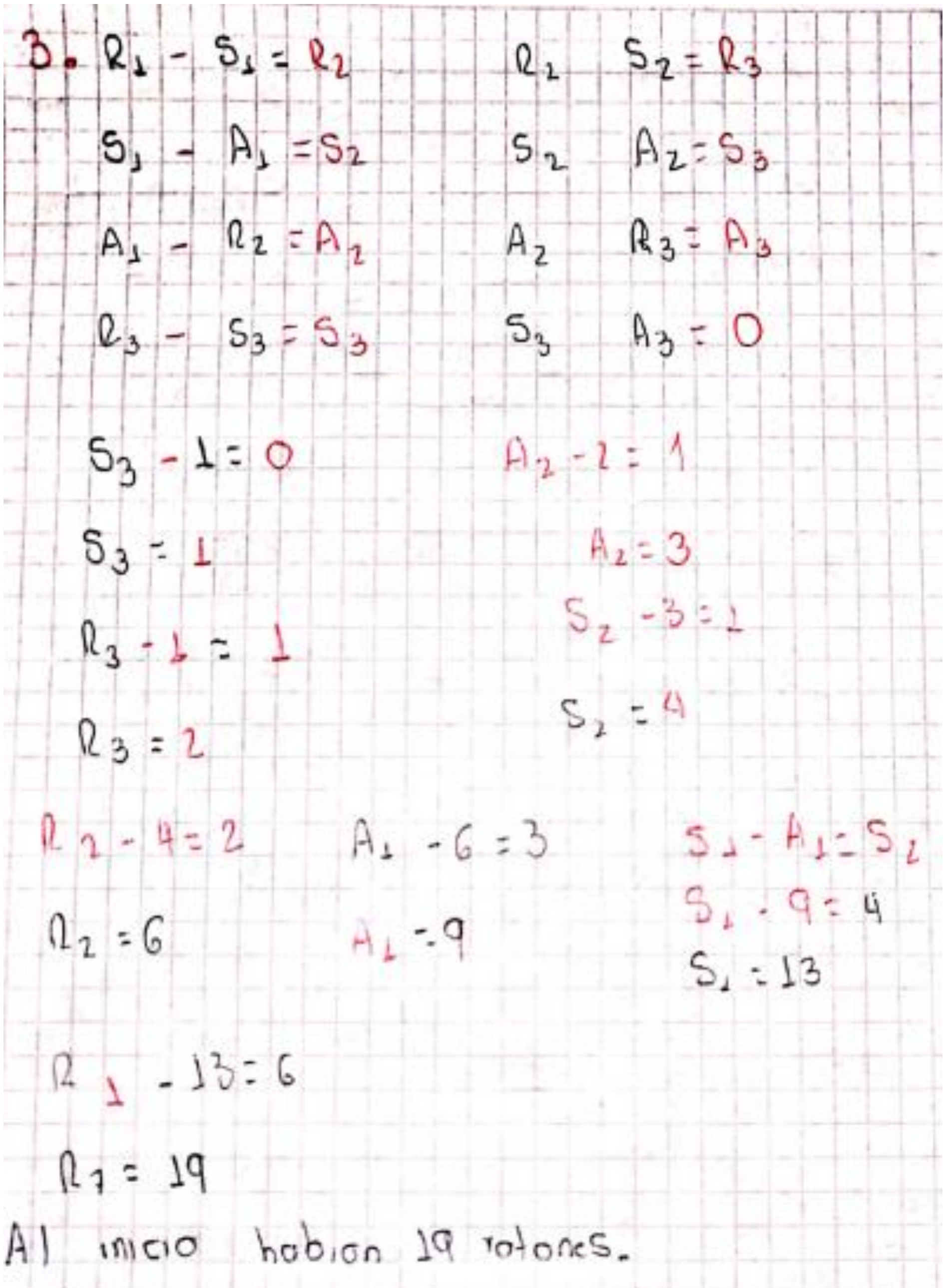
Nota. Solución 1 enviada por estudiante de las olimpiadas Unicauca,



Nota. Solución 2 enviada por estudiante de las olimpiadas Unicauca,

Fase de análisis: Desde las interpretaciones que realizan los estudiantes del problema presentado, presentan una construcción de un dibujo, en este caso una figura geométrica, a partir de ella identifica los datos numéricos e incógnitas y se relaciona las condiciones del enunciado las cuales son “triángulo equilátero” y “cuadrado” con la pregunta, a partir de esta relación considerar un plan. **Fase de Diseño:** Los estudiantes relacionan los datos y las variables, en este caso las propiedades geométricas de cada figura y la pregunta, se evidencia el uso de conocimientos previos donde utilizan el teorema de Pitágoras y operaciones elementales posterior a ello realizan un plan el cual es resolver el problema por medio de propiedades trigonométricas. **Fase de ejecución:** los estudiantes ejecutan el plan de acción, donde usan las propiedades trigonométricas y redacta la solución, verificando cada paso y justificándolo. Y la solución de dicho sistema a partir de las condiciones dadas**.**

Figura 47. *Solución problema 5*



Nota. Solución de un estudiante de las olimpiadas Unicauca,

Fase de análisis: Los estudiantes determinan los datos y las variables las cuales son los animales, la acción de cada animal y los días con las condiciones respectivas. Para la solución de este problema los estudiantes utilizan una representación bastante creativa, pues llama la atención la forma como utilizan una representación en términos generales bastante adecuada que reduce la expresión de la información e implica que sea más clara la relación entre tipo de acción y número de días, y así simplifica de manera abreviada las condiciones del problema. **Fase de diseño:** Los estudiantes relacionan los datos y las variables la cuales son los animales, la acción de cada animal y los días, para lo cual hacen uso de sus conocimientos adquiridos y realizan un plan el cual es resolver el problema medio de un sistema de ecuaciones y por secuencia hacia atrás. **Fase de exploración:** Gracias a las entrevistas en clases, el estudiante menciona que relaciona este problema con problemas donde se utiliza un sistema de ecuaciones para la solución de esto mismo, lo cual nos muestra la consideración de problemas homólogos, por otro lado, Reemplaza condiciones del problema e introducen elementos auxiliares en cuanto a una nueva notación y rectificación rápida con calculadora, usan además una técnica denominada secuencia hacia atrás. **Fase de ejecución:** los estudiantes ejecutan el plan de acción, donde ya plasman el sistema de ecuaciones y la solución de dicho sistema a partir de las condiciones dadas.

CONCLUSIONES

El objetivo inicialmente propuesto en la investigación se ha cumplido a cabalidad y se concluye que la aplicación de las estrategias heurísticas influye de manera significativa y mejora la comunicación, explicación y justificación de los resultados en los cuestionarios. Asimismo, se puede observar que los estudiantes realizan respectivas conexiones entre los datos y la incógnita del problema, logrando un manejo del lenguaje simbólico y matemático; esto se evidencia en las actividades descritas en el capítulo 4, especialmente en la caracterización de las heurísticas trabajadas por los estudiantes en cada sesión.

La aplicación del test de entrada (Ronda 1), se identificaron dificultades en los estudiantes de grado octavo y noveno, participantes de la olimpiada Unicauca, modalidad virtual 2020 tales como: La falta de interpretación de los problemas, Identificación equivocada de los datos, Identificación equivocada de variable, Error en cálculos matemáticos, Escoger un método equivocado, Relación equivocada entre los datos y variables.

Efectivamente con los estudiantes de grado octavo y noveno participantes de la olimpiada matemática, se desarrolló una serie de actividades con problemas de olimpiadas matemáticas donde se expone el uso de estrategias heurística, en particular estrategias de análisis; debido a que se notó un bajo uso de estas mismas tras la implementación de la primera ronda.

Se dio un seguimiento detallado del proceso heurístico en los estudiantes; el cual muestra que: Inicialmente los estudiantes de grado octavo y noveno manejan muy bien definiciones y conceptos matemáticos (a diferencia de conceptos geométricos) ; pero no muestran estrategias heurísticas de análisis en la resolución de problemas; luego de la intervención en el aula se notó cómo se genera una evolución heurística en cada taller, hasta que en la prueba final se observan estrategias trabajadas en clase lo cual permitió que los estudiantes solucionaran problemas de nivel superior.

Mediante las Rondas de olimpiadas matemáticas se pudo observar el rendimiento de acuerdo al número de preguntas acertadas; en ese sentido teniendo en cuenta las condiciones y el nivel de cada prueba, se notó que tras el entrenamiento en heurísticos, se muestra un desarrollo de las capacidades de los estudiantes de las olimpiadas Unicauca Puesto que en comparación entre la Ronda 1 y Ronda 2, el 64% de los estudiantes muestran que la implementación de estrategias heurísticas ayuda a que los estudiantes mejoren en la resolución de problemas tipo olimpiada matemática.

Entre la Ronda 1 y Ronda 2; se encontró que inicialmente las mujeres llegan mejor preparadas a la primera prueba respecto a los hombres; pero luego de la implementación del programa (Estrategias Heurísticas y su Incidencia en la Resolución de Problemas). Los hombres muestran una mayor motivación; lo cual se atribuye a múltiples factores tales como: El desafío que presenta un problema de olimpiadas matemáticas y la forma como las estrategias heurísticas captan su atención.

El uso de herramientas virtuales como Liveboard , Jamboard y Google Meet, además de brindar una interacción con estudiantes de diferentes sitios, ayudan a la enseñanza y aprendizaje del proceso heurístico.

Finalmente, proponer al estudiantado problemas en distintas situaciones (problemas modificados, preguntas arbitrarias y justificaciones de cada razonamiento); permite que el estudiante adquiera una mayor confianza y destreza en la resolución de problemas. Esto se pudo evidenciar en las diferentes actividades, donde los estudiantes proponen diferentes métodos de solución; como también se evidencia una mayor comprensión y reflexión.

REFERENCIAS

Castro, Enrique. (2008). *Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España.* Investigación en educación matemática XII, 2008-01-01, ISBN 978-84-934488-9-9.

Contreras Alian, E., & Mejía Usuga, E. Y. (2019). *Heurísticas de Schoenfeld en la resolución de problemas con el uso de las TIC's*: un enfoque basado en el conocimiento pedagógico del contenido-PCK.

García, T., Cueli, M., Rodríguez, C., Krawec, J., & González-Castro, P. (2015). *Conocimiento y habilidades metacognitivas en estudiantes con un enfoque profundo de aprendizaje. Evidencias en la resolución de problemas matemáticos*. *Revista de Psicodidáctica*, *20*(2), 209-226.

Heyworth, R. M. (1999). Procedural and conceptual knowledge of expert and novice students for the solving of a basic problem in chemistry. *International Journal of Science Education*, *21*(2), 195-211.

Fidias G. Arias. *El proyecto de investigación,* séptima edición,2016. ISBN: 980-07-8529-9

Fomin, A., Losada, M. E., Bernal, O., & Mesa, P. R. (2007). *Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas*. Journal of Science Education, 8(1), 58.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-6-2. [155 páginas; 2,6 MB] (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/)

Martínez, L., y Negrete, M. (2010). *Estrategias heurísticas en la solución de problemas matemáticos para el desarrollo de habilidades metacognitivas en niños* (Tesis de Maestría)

Martínez, J. M. S. (2013). *Problemas elementales de olimpiadas de matemáticas*. Universidad de Alicante.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional, lineamientos curriculares Matemáticas recuperado en https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.

Nieto, J. H. (2005). *Resolución de problemas, Matemática y Computación*. Enl@ ce: Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento, 2(2), 37-45.

Parra, B. (1990*). Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas. Educación matemática.* 02(03), 22-31. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/9500/

Pérez, Y & Ramírez, R (2011). *Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos.* Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/3761/376140388008.pdf

Polya, G., (1945). *How to solve it; a new aspect of mathematical method*, Princeton University Press, Princeton. Hay traducción: *Como plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1965.

Schoenfeld, A. H., (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando.

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving,metacognition, and sense-making in mathematics.*

Schoenfeld, A. (1983). *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Valero, P. (2012). La educación matemática como una red de prácticas sociales.

ANEXOS

Anexo 1. Cuestionario primera ronda

CUESTIONARIO PRIMERA RONDA

1. El famoso agente secreto 007 acaba de encontrar un papel con un mensaje oculto de sus enemigos. El texto es:

   56 4NSP53T92 5D872D T70B45N 3967B927. 251N49N 39N 07249 5N 56 5D4F4349 046F92D. 61325347 N9 S7B5 D56 5N87Ñ9 5ST7 N93H5 67 07T727 S1 H5207N7 61347.
   por fortuna 007 conoce la clave para descifrar el texto:

   $$\begin{pmatrix} M & U & R & C & I & E & L & A & G & O \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   y se sabe que el resto de letras se escriben tal cual. Desde el comando central le piden enviar el número que resulta de sumar los dígitos presentes en los nombres cifrados de las cuatro personas que están implicadas. ¿ cuál es el número enviado por 007?

   (a) 93 (b) 95 (c) 96 (d) 98 (e) 101

2. En Popayán, en una sala de cine hay 26 filas con 24 asientos en cada fila. El total de los asientos se numera de izquierda a derecha comenzando por la primera fila y hacia atrás. La medida de bioseguridad debida a la pandemia ocasionada por el covid-19 indica que se deben ubicar las personas dejando dos puestos libres entre ellas, ¿En qué fila se encuentra el asiento número 525 y este asiento debe estar libre?

X representa el asiento que está ocupado.

a) Fila 16 y asiento vacío

b) fila 16 y asiento ocupado

c) Fila 22 y asiento vacio

d) Fila 22 y asiento ocupado

e) no se puede determinar con esta información.

3. Jhon abre su libro de matemáticas y al multiplicar los números de las dos páginas obtiene 210.¿En qué página abrió el libro Jhon?.

(a) 209 (b) 210 (c) 105 (d) 12 (e) 14

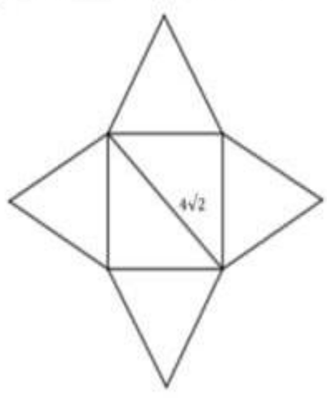
4. Si se suman el número de cinco cifras más pequeño con el número de cinco cifras más grande el resultado es:

(a) 109999 (b) 999999 (c) 19999 (d) 99991
(e) 1000000

5. En una reunión de 30 personas, hay 20 personas que todas se conocen entre sí y 10 personas que no conocen a nadie. Los que se conocen se saludan de abrazo y los que no se conocen se saludan de mano. ¿Cuántos saludos de mano ocurren?. Tener en cuenta que si la persona A saluda a la persona B entonces la persona B ya saludó a la persona A.

(a) 240 (b) 245 (c) 290 (d) 480 (e) 490

6. Sobre los lados de un cuadrado, cuya diagonal mide $4\sqrt{2}$ cm se contruyen tríangulos equiláteros, formando así una estrella ¿ cúal es el perímetro de la estrella ?



(a) $32\sqrt{2}$ cm (b) 32 cm cm (c) $16\sqrt{2}$ cm (d) 16 cm
(e) $8\sqrt{2}$ cm

Anexo 2. Cuestionario segunda ronda.

SEGUNDA RONDA GRADOS 8 Y 9 (NIVEL II)

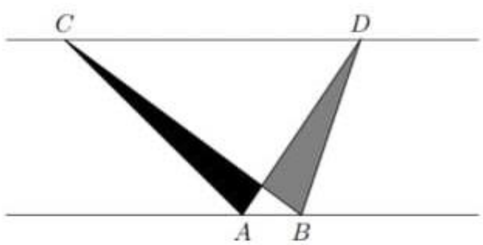
Nota: recordar que las respuestas a cada una de las siguientes preguntas está en un rango entre 1 y 300. ¡ÉXITOS!.

1. Un número se llama estrictamente ascendente si el dígito de las unidades es mayor que el de las decenas y este es mayor que el de las centenas y así susecivamente.Determine cuántos números estrictamente ascendentes hay entre 1 y 100.

2. Las letras Q, R, S representan dígitos diferentes. En la suma siguiente QRS + QRS + QRS= RRR

   ¿qué número es QRS?

3. En el dibujo CD, y AB son paralelas, si el área de la región negra es de 180 entonces ¿A cuánto equivale un tercio de la región gris?. (**Nota**: en este problema se omite las unidades de medida)



4. ¿Cuántos números de 3 dígitos abc (con $a \neq 0$) son tales que a+ 3b+c es múltiplo de 3?

5. sí colocamos los números pares de la siguiente manera:

				30	...
			20	28	...
		12	18	26	...
	6	10	16	24	...
2	4	8	14	22	...

   ¿ En qué columna esta el número 2020?

6. Cada segundo, un niño da un paso a la derecha, o da un paso a la izquierda, o se queda quieto. Después de tres segundos, ¿cuántas, de todas los posibles acciones del niño, lo dejan de vuelta en su posición inicial?

Anexo 3. Cuestionario tercera ronda

RONDA FINAL GRADOS 8 Y 9 (NIVEL II)

Nota: Las respuestas a los dos siguientes problemas son números enteros entre 0 y 50 inclusive.

1. Si se escriben los números naturales de forma consecutiva, obtenemos la siguiente secuencia de cifras:

   1234567891011121314151617...

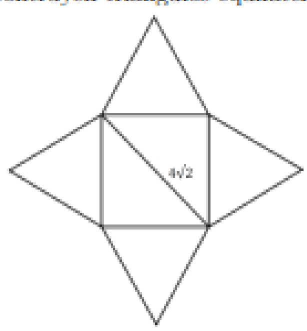
   ¿Qué cifra ocupa el lugar 2020?

2. Las letras L,E,R representan dígitos diferentes,si L+E+E+R = 19. En la suma siguiente.

   $$\begin{array}{rccccc} & & L & E & E & R \\ & & L & E & E & R \\ + & & L & E & E & R \\ \hline & S & A & B & E & R \end{array}$$

   ¿qué número es SABER?

3. Sobre los lados de un cuadrado, cuya diagonal mide $4\sqrt{2}$ cm se contruyen tríangulos equiláteros, formando así una estrella

   Determine la distancia entre dos puntas opuestas de la estrella

4. En un desierto hay serpientes, ratones y alacranes. Cada mañana, cada serpiente se come un ratón, cada mediodía, cada alacrán mata a una serpiente y cada noche, cada ratón se come a un alacrán. Si después de tres días el único animal que queda vivo es un ratón.

   ¿cuántos ratones había al inicio?

Anexo 4. Matriz de base de datos

Ronda 1								
Estudiante	**Genero**	**Grado académico**	**Problema de teoría de numero 1**	**Problema de teoría de numero 2**	**Problema de teoría de numero 4**	**Problema de teoría de numero 3**	**Problema de teoría de numero 5**	**problema de geometría**
1	M	8	1	1	0	1	0	0
2	M	8	1	0	1	1	0	0
3	F	8	1	0	1	1	0	0
4	F	8	1	0	1	0	1	0
5	M	9	0	0	0	1	1	1
6	M	9	1	1	1	1	0	0
7	M	9	1	0	1	1	0	0
8	M	9	0	0	0	1	1	1
9	F	8	1	1	1	1	0	0
10	M	8	1	1	0	0	0	0
11	M	9	1	1	0	1	0	0
12	F	8	0	1	1	1	0	1
13	M	8	0	0	1	1	0	0
14	M	8	1	0	1	1	0	0
15	M	9	0	0	1	0	0	0
16	M	8	1	0	1	1	0	0
17	M	8	1	1	1	0	0	0
18	F	8	1	0	1	0	0	1
19	F	9	1	1	1	1	0	0
20	M	9	1	1	0	0	0	1
21	M	8	1	1	1	1	1	0
22	M	8	1	0	1	0	0	0
23	M	9	1	0	0	1	0	0
24	M	8	0	0	1	1	0	0
25	M	9	0	0	1	1	0	0
26	M	8	0	0	1	1	0	0
27	M	9	1	0	1	1	0	0

28	F	8	1	1	1	1	0	1
29	M	8	1	1	1	1	1	1
30	M	9	1	0	1	1	0	0
TOTAL			**22**	**12**	**23**	**23**	**5**	**7**
Ronda 2								
Estudiante	**genero**	**grado académico**	**Problema de teoría de numero 1**	**Problema de teoría de numero 2**	**Problema de teoría de numero 4**	**Problema de teoría de numero 3**	**Problema de teoría de numero 5**	**problema de geometría**
1	M	8	0	0	1	0	0	1
2	M	8	0	1	1	1	0	1
3	F	8	0	1	1	1	0	1
4	F	8	1	0	1	0	0	1
5	M	9	0	1	1	0	1	1
6	M	9	1	1	1	0	1	1
7	M	9	1	1	1	0	1	1
8	M	9	1	1	1	0	1	1
9	F	8	1	1	1	0	1	1
10	M	8	1	0	0	1	0	1
11	M	9	0	0	1	0	0	1
12	F	8	1	0	1	0	0	1
13	M	8	0	1	1	0	0	0
14	M	8	0	1	1	0	0	0
15	M	9	1	0	1	0	0	1
16	M	8	0	0	0	0	0	1
17	M	8	1	0	0	1	0	0
18	F	8	1	1	1	0	0	1
19	F	9	1	0	1	0	0	1
20	M	9	0	0	1	0	0	1
21	M	8	1	0	1	0	0	1
22	M	8	0	1	0	0	0	0
23	M	9	1	1	0	0	0	1
24	M	8	1	1	1	1	0	1
25	M	9	1	1	0	0	0	0
26	M	8	0	1	0	0	0	1
27	M	9	0	0	1	0	1	1

28	F	8	0	0	1	0	0	1
29	M	8	1	1	1	1	1	1
30	M	9	1	1	1	0	0	1
TOTAL			17	17	23	6	7	25

Anexo 5. Problema reto actividad 2