RELACIÓN ENTRE LAS FASES DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA Y LOS PROCEDIMIENTOS ELABORADOS EN CADA JUEGO DE ESTRATEGIA POR ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT

AIDA YENI HERNANDEZ RENGIFO

LAURA DAYANA NAVIA TRUJILLO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2023

RELACIÓN ENTRE LAS FASES DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA Y LOS PROCEDIMIENTOS ELABORADOS EN CADA JUEGO DE ESTRATEGIA POR ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT

Requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

AIDA YENI HERNANDEZ RENGIFO

LAURA DAYANA NAVIA TRUJILLO

Directora de Práctica Pedagógica:

Dra. Samin Ingrith Cerón Bravo

UNIVERSIDAD DEL CAUCA.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN.

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2023

Nota de Aceptación

____

____

____

____

Directora: ____

Dra. Samin Ingrith Cerón Bravo

Jurado: ____

Mg. Jhon Jair Jiménez Gutiérrez

____

Coordinador del programa de Licenciatura en Matemáticas

Dr. Aldo Iván Parra Sánchez

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 03 de Febrero de 2023

Dedicatoria

Dedicamos este trabajo
a nuestros padres y hermanos,
quienes han sido nuestro pilar fundamental
y apoyo en nuestra formación académica.

Agradecimientos

A Dios, agradecemos por habernos dado la vida y salud, así como la oportunidad de disfrutar y compartir con familiares y amigos en cada una de las etapas más felices de nuestra vida, y porque nunca nos dejaste flaquear ni perder la fe en los momentos más difíciles.

A nuestros padres, les dedicamos estas palabras como un pequeño reconocimiento al esfuerzo y apoyo incondicional que nos han brindado en el transcurso de nuestra vida y estudios. A ustedes, por haber fomentado el deseo de superación y anhelo de triunfo en nuestra vida, por compartir nuestras pequeñas victorias y fracasos, siempre recibiendo de ustedes una palabra de aliento que nos dio fuerza para seguir luchando. A ustedes debo este logro, y con ustedes lo comparto con todo cariño.

A nuestros hermanos, que con sus consejos, cariño y apoyo incondicional nos han ayudado a afrontar los retos que se nos han presentado a lo largo de nuestra vida. Gracias por compartir tantos momentos de alegría, por escuchar nuestras ilusiones y sueños, pero sobre todo por empujarnos a hacerlas realidad.

A nuestra directora de práctica Samin Ingrith Cerón Bravo, sin usted y sus virtudes, su paciencia y constancia este trabajo no lo hubiésemos logrado. Sus consejos fueron siempre útiles cuando no salían de nuestros pensamientos las ideas para escribir lo que hoy hemos logrado. Usted formó parte importante de esta historia con sus aportes profesionales que la caracterizan. Muchas gracias por sus múltiples palabras de aliento, cuando más la necesitamos; por estar allí cuando las horas de trabajo se hacían confusas. Gracias por sus orientaciones.

A la universidad del Cauca, en particular los profesores del Departamento de Matemáticas por brindarnos las enseñanzas durante este largo camino.

A mis compañeros de carrera, gracias por las horas compartidas, los trabajos realizados en conjunto y las historias vividas.

Resumen

El presente trabajo corresponde a una investigación de carácter fenomenológico con un enfoque cualitativo sobre la intervención en el aula, que se enmarca en el desarrollo de la práctica pedagógica con estudiantes del grado octavo de la institución educativa Liceo Alejandro de Humboldt de la ciudad de Popayán, cuyo objetivo general fue identificar la relación entre las fases de resolución de un problema propuestas por George Pólya y los procedimientos elaborados en cada juego de estrategia por los estudiantes del grado octavo 8-1 y 8-2. Para ello, se describe el contexto educativo, la problemática identificada en el espacio de inmersión, resultados de investigaciones relacionadas con los tópicos abordados que dan soporte a la propuesta investigativa, el marco conceptual que contiene conceptos claves y teorías que fundamentan la propuesta de la práctica pedagógica, el diseño metodológico que contiene el enfoque, el diseño y la muestra en el que se contó con una población de 48 estudiantes y una muestra de 38 que fue tomada a conveniencia según los registros de asistencia de los estudiantes de los dos grupos de octavo, las técnicas y herramientas utilizadas para la recolección de información fueron: observación participante y directa, entrevista basada en tareas, cuaderno de notas, diario de campo, contenido audiovisual y cuestionarios, en la propuesta didáctica se estructuró y organizó los elementos de las actividades que fueron desarrolladas en el aula de clase. Finalmente se describen y analizan las actividades, en especial las relacionadas con los juegos de estrategia y resolución de problemas, en el que se identificó que el desarrollo de estas presenta las mismas fases y la forma de desarrollarse cada una, posee similitudes.

Palabras clave: Juego, juegos de estrategia, problema, resolución de problemas y el método de George Pólya.

Abstract

This work corresponds to a phenomenological research with a qualitative approach on classroom intervention, which is framed in the development of pedagogical practice with students of the eighth grade of the educational institution Liceo Alejandro de Humboldt of the city of Popayan; whose general objective was to identify the relationship between the phases of problem resolution proposed by George Pólya and the procedures elaborated in each strategy game by students of the eighth grade 8-1 and 8-2. To this end, the educational context is described, the problems identified in the immersion space, the results of research related to the topics addressed that support the research proposal, the conceptual framework that contains key concepts and theories that support the proposal of pedagogical practice, the methodological design that contains the approach, the design and the sample, in which a population of 48 students was counted, and a sample of 38 that was taken at convenience, according to the attendance records of the students of the eighth century, the techniques and tools used for the collection of information were: participant and direct observation, task-based interview, notebook, field diary, audiovisual content and questionnaires; the didactic proposal structured and organized the elements of the activities that were developed in the classroom. Finally, activities are described and analyzed, especially those related to strategy and problem solving games, in which it was identified that the development of these has the same phases and the way of developing each one, has similarities.

Keywords: Game, strategy games, problem, problem solving and the method of George Pólya.

Tabla de Contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Índice de anexos.

1 Contexto

Este trabajo de práctica fue llevado a cabo en la Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt, ubicada en el departamento del Cauca, al nororiente del Municipio de Popayán con dirección; carrera 2 #15N-404 en el Barrio Pomona. La institución cuenta con una sede principal y cuatro sedes: Yanaconas, Pueblillo, Pisoje Bajo y Sendero. Se resalta que es una institución de carácter mixto que brinda educación a estudiantes de diferentes niveles de pre-escolar, primaria, básica secundaria y media académica, quienes están en las edades que oscilan entre los cinco y veinte años.

La investigación se realizó en la sede central, en la jornada de la mañana, la cual cuenta con una población total de 1177 estudiantes, la gran mayoría de ellos provienen de familias en estratos uno, dos y una minoría en el estrato tres. Estas familias son de escasos recursos, no tienen un sustento económico fijo y la mayoría vive de la economía informal.

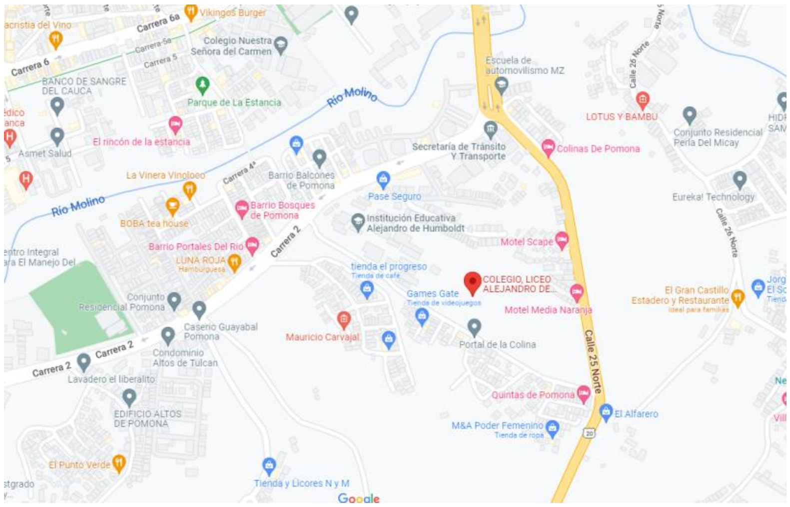
Para llevar a cabo la práctica pedagógica en esta institución, se debió realizar una observación no participante, cabe destacar que este ejercicio educativo se desarrolló durante una etapa de crisis sanitaria (COVID 19), lo anterior ocasionó la no asistencia de los estudiantes en los diferentes grados. Por ende, la población que se eligió para llevar a cabo esta inmersión, fueron estudiantes del grado séptimo 1 y 2. Estos grupos se encontraban en una presencialidad con alternancia, y tenían un mayor número de asistencia al finalizar el año escolar.

También es importante mencionar que, la observación se realizó durante las clases de geometría y matemáticas, guiadas por la docente encargada, en la Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt. Durante la inmersión se tuvieron en cuenta en primer lugar, aspectos como: disciplina, participación, comunicación y trabajo en clase de los estudiantes. En segundo lugar, se realizó una entrevista a la docente titular para ampliar la información recolectada en el área de matemáticas, abarcando otras situaciones como: el rendimiento académico por grupo, identificando en él dificultades, obstáculos y fortalezas que se presentaron durante el año escolar, además, también se tuvo en cuenta como fue el desarrollo de las actividades académicas en tiempos de pandemia, en cuanto a: materiales que se les suministraba a los estudiantes, comunicación, y técnicas de evaluación docente, entre otros.

Lo anterior permitió elegir una problemática investigativa, la cual se desarrolló con los estudiantes observados que fueron promovidos al grado octavo 1 y 2.

Figura 1

Ubicación Liceo Alejandro de Humboldt en Popayán.



Fuente: Google Maps (2022).

La Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt de Popayán, inicialmente llamada Liceo Nacional Alejandro de Humboldt, tiene su origen con el nacimiento de la Universidad del Cauca que fue fundada el 6 de abril de 1844, esta institución educativa maneja una modalidad mixta de carácter público y calendario A. Por otro lado, es importante mencionar que la población estudiantil cuenta con un nivel cultural variado, que depende del lugar de procedencia y el contexto en el cual interactúan. Cabe mencionar que los estudiantes generalmente provienen de asentamientos, del sector rural, de barrios urbanos y marginales.

La propuesta investigativa se centró en la resolución de problemas y juegos de estrategia aplicados en potenciación, radicación y primeras concepciones del álgebra en estudiantes de octavo grado en el área de matemáticas. Lo anterior aportó a nivel institucional, en cuanto a la misión y visión de la institución: enseñanzas y experiencias en la construcción de una cultura de bienestar escolar, inculcando en los estudiantes autonomía, honestidad, puntualidad, comunicación, el respeto por el otro y la igualdad.

1.1 Inmersión en la Institución Educativa

El presente proyecto de intervención pedagógica se enmarca en el desarrollo de la práctica pedagógica en la Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt, en el municipio de Popayán, para ello se realizó una observación no participativa dentro del aula de clase con los estudiantes del grado séptimo, que se encontraban finalizando las actividades académicas del año electivo 2021. Además, se realizó una entrevista con la docente titular y el rector John Sandoval Rincón. De la cual se obtuvieron los siguientes datos:

1.1.1 Información General Sobre la Escuela.

En la entrevista realizada con el rector John Sandoval Rincón, se recolectaron los siguientes datos: La Institución cuenta con una población de 1177 estudiantes, de la cual su mayor porcentaje en cuanto al sexo equivale a 51.8% de hombres y 48.2% de mujeres; a su vez, la institución dispone de 52 profesores, de los cuales 32 pertenecen a la sede principal y 20 pertenecientes a las sedes rurales. Por otro lado, en la sede central, se cuenta con cinco docentes en el área de matemáticas, de los cuales tres son licenciados en matemáticas, uno es ingeniero de sistemas y uno ingeniero eléctrico, todos con especialización en educación.

En cuanto a la distribución de los grupos en la sede principal, se tienen tres cursos de estudiantes por cada grado, y los aspectos que se toman en cuenta para decidir a qué grupo pertenece cada estudiante son: diferencia por edades y procedencia (los que vienen de la sede central y de las rurales).

1.1.2 Recursos Institucionales

La Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt tiene una agradable y cómoda planta física que incluye espacios para la educación, donde se encuentran: aulas virtuales, sala de proyecciones, laboratorios, ludoteca y una biblioteca con poco material para el área de matemáticas. A su vez, dispone de espacios administrativos, de recreación, de esparcimiento y terrenos para realizar prácticas agrícolas.

Por otra parte, su planta física está dividida en 6 bloques-A, B, C, D, E, F. En esta planta educativa se cuenta con 18 salones adecuados para recibir clase, cada uno de ellos puede albergar en promedio 32 estudiantes, para un total aproximado de 512 estudiantes en la sede principal.

Figura 2

Instalaciones de la Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt.

Fuente: Autoría propia.

1.2 Observación y Registro

La observación no participativa se realizó en el transcurso de la clase de matemáticas en el grado séptimo 1 y 2 de la institución educativa. Durante el proceso de inmersión se realizó un acercamiento con los estudiantes y la docente titular. En un principio, se toma el registro de asistencia en el aula y se da la presentación de las practicantes, compartiendo información personal y el objetivo de la observación.

Posteriormente, se da inicio a la clase enfocándose en un problema matemático de las guías entregadas en tiempos de crisis sanitaria, cabe mencionar, que la forma de evaluación del curso, se compone de tres guías como material de estudio en cada periodo y su entrega se realizaba por diferentes plataformas como: Whatsapp, correo y Classroom. De lo anterior, se evidenció poca participación y motivación de la mayoría de los estudiantes que aún no habían resuelto dicha actividad, además se observaron dificultades al momento de realizar una representación gráfica del problema, como también la selección de datos y ubicación en un contexto aritmético.

Por ende, en el comportamiento de los estudiantes, se identificó bajo interés en la realización de las actividades propuestas por la docente, por esta razón se evidencia: el uso de celulares, diálogo entre compañeros, además de la manipulación de otros distractores.

Por otro lado, la docente menciona, respecto al material entregado para la evaluación en tiempos de pandemia, que se realizaban sugerencias, observaciones y retroalimentación en donde se presentaban fallas. Se puede señalar que el único método de evaluación era la entrega de guías y la nota de cada periodo académico dependía de este promedio, manejando la siguiente escala de evaluación: superior, alto, básico y bajo. Así mismo, la docente comentó que no se tenían en cuenta: la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación, dado que la mayor parte del tiempo se presentaron dificultades en la interacción con los estudiantes por la modalidad virtual.

1.2.1 Caracterización de los Estudiantes.

Conforme a la información suministrada por la docente y el proceso de inmersión que se realizó de manera presencial se logró caracterizar los grupos de la siguiente manera:

Grupo 7-1: el curso estaba conformado por 25 estudiantes, 18 hombres y 7 mujeres, en un rango de edad que oscila entre los 12 a los 14 años, de los cuales el 73% asistieron de forma presencial. Una particularidad de esta población, durante la inmersión, fueron los problemas de disciplina e hiperactividad presentes en el tiempo de clase; sin embargo, se mostraron participativos y colaborativos entre ellos.

Grupo 7-2: el curso estaba conformado por 30 estudiantes, 15 hombres y 15 mujeres, en un rango de edad que oscila entre los 12 a los 14 años, de los cuales el 70% asistieron de manera presencial al aula de clase. Cabe destacar que en esta población se identificó poca motivación, baja atención y desinterés en las actividades a realizar; aun así, se evidenció una sana convivencia y un nivel bajo de ruido en clase.

1.3 Reflexiones de la Inmersión

Acerca de la experiencia que se tuvo en el momento de la inmersión en el aula, se puede destacar como una actividad enriquecedora que permitió un acercamiento a la institución, y con ello conocer a profundidad la realidad que se iba a enfrentar en la docencia directa. Dicho acercamiento, permitió identificar algunos aspectos claves para la planeación y estructuración de las actividades que se desarrollarían durante la intervención pedagógica. Entre ellos se encuentran:

- Realizar actividades dinámicas como: salidas al tablero, preguntas o cuestionamientos en clase, con el fin de motivar la participación de los estudiantes.
- Diseñar diferentes rúbricas guiadas a los estudiantes para valorar su desempeño en la realización de actividades propuestas.
- Llevar a cabo actividades que permitan afianzar conceptos anteriormente aprendidos de forma superficial, en el marco de la pandemia, antes de presentar un nuevo objeto matemático, para lograr de esta manera una mejor comprensión del tema.
- Aplicar el método de resolución de problemas de George Pólya, con el fin de mejorar en los estudiantes las dificultades que presentan al momento de analizar y razonar un problema matemático.

Todo lo planteado hasta ahora, permitió estructurar diferentes tipos de actividades centradas en las temáticas de: potenciación, radicación y primeras nociones del álgebra, estimando su tiempo de desarrollo, además de posibilitar un acercamiento detallado al aula de clase. Cabe mencionar que, para la implementación de dichas actividades, se llegaron a acuerdos con la docente titular del siguiente año, teniendo en cuenta dos tópicos fundamentales: la resolución de problemas y juegos.

2 Problemática

La propuesta de intervención pedagógica está enfocada hacia la resolución de problemas y el uso de juegos en las temáticas de potenciación, radicación y primeras nociones del álgebra, en el grado octavo de la Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt.

Por medio de la observación no participante realizada en el espacio de inmersión, se identificó que los estudiantes presentaban dificultades para resolver problemas de índole matemático. En tal sentido, esta propuesta busca que la población de estudio logre identificar la relación entre la construcción de una estrategia para ganar un juego y la resolución de un problema, teniendo en cuenta las fases propuestas por George Pólya.

2.1 Descripción del Problema

Durante la observación no participativa en el aula, se manifiestan dificultades en la resolución de un problema en específico, evidenciando dificultades: en la lectura y la representación; al elegir un procedimiento apropiado para llegar a una solución; en la selección de datos en un contexto aritmético y realización de operaciones correspondientes. Lo anterior, refleja poca claridad y conocimiento por parte de los estudiantes en los conceptos abordados previamente, por ende, se planteó una propuesta de intervención pedagógica que se enfocó en reforzar aspectos de la resolución de problemas teniendo en cuenta juegos de estrategia.

En primer lugar, para entender el concepto de resolución de problemas es necesario definir qué es un problema. Para Charnay (1994, citado en Carvajal y Barrantes, 2008) “un problema puede verse como una terna situación-alumno-entorno; el problema se da solo si el alumno percibe una dificultad, en ese sentido lo que es un problema para un estudiante no necesariamente lo es para otro” (p. 86).

De acuerdo con esta definición podemos afirmar que un problema es una situación que requiere de una determinada solución, la cual no es accesible inmediatamente al estudiante, debido a que se debe apelar a múltiples conocimientos, y no siempre matemáticos; hay que relacionar saberes procedentes de campos diversos y de este modo podemos decir que la actividad que para algunos alumnos se puede considerar un problema, para otros no.

En este sentido, Orton (1998) plantea que "La resolución de problemas se concibe ahora como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a una situación nueva" (p. 51). Al respecto conviene decir que para resolver un problema se necesitan de una serie de pasos o procedimientos heurísticos que el estudiante debe tener en cuenta para llegar a una solución. Por lo anterior, para la realización de este estudio se utilizó como referencia el método de cuatro pasos para resolver problemas, formulados por George Pólya que se describirán en detalle en el marco conceptual.

Cabe mencionar que la resolución de problemas matemáticos debe aprovecharse para desarrollar en los estudiantes diferentes destrezas como la comprensión, el análisis, la creatividad, entre otras habilidades. De esta manera, se pretende dotar a los estudiantes de una serie de herramientas que les permitan resolver problemas y proponer soluciones estratégicas ante problemáticas relacionadas con su entorno social. Reafirmando lo anterior Chamorro (2004) expresa que “la importancia por la resolución de problemas se debe a que estos ofrecen la posibilidad de construir conocimientos matemáticos y modelizar situaciones, lo que ayuda a comprender y a dominar el entorno que nos rodea” (p.177).

En segundo lugar, con respecto a la metodología implementada durante la intervención pedagógica en el aula, se hace uso del método de cuatro pasos para la resolución de problemas de George Pólya. En tal sentido y en aras de hacer esta actividad agradable, divertida y de mayor motivación para los estudiantes, se incorporaron juegos como una herramienta que no solo cumple con la función de entretener, sino que, a su vez potencian la parte formativa y educativa del estudiante, con la implementación de lo anterior, se puede generar en los estudiantes aprendizajes significativos en el área de matemáticas ,estos son según el teórico estadounidense David Ausubel, un tipo de aprendizaje en que un estudiante asocia la información nueva con la que ya posee; reajustando y reconstruyendo ambas informaciones este proceso ocurre cuando la información nueva se conecta con un concepto relevante ya existente en la estructura cognitiva. Además, un juego puede generar en los estudiantes placer, diversión, atracción, motivación, concentración e interés, permitiendo desarrollar satisfactoriamente actividades académicas, por ende, el juego es una de las herramientas más adecuadas para que se produzcan diferentes aprendizajes (Cabello, 2014).

Con la intención de abordar la problemática anteriormente descrita, se incorporaron juegos de estrategia para cada concepto propuesto en clase, para ello Gómez (1990) afirma que “los juegos pueden ser usados no solo para enseñar contenidos matemáticos sino también y muy especialmente para favorecer las estructuras de resolución de problemas como es el caso de los juegos de estrategia” (p. 323). Para efectos de este estudio, dichos juegos se llevaron a cabo en un nivel de complejidad moderado, incorporando las temáticas expuestas en las clases de manera implícita o explícita según sea el caso, haciendo los ajustes necesarios a los juegos para que se acoplen a los objetivos planteados en cada sesión.

2.2 Formulación del problema

¿Cómo se relacionan las fases de resolución de un problema propuestas por George Pólya y los procedimientos elaborados en cada juego de estrategia por los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt?

2.3 Justificación

A pesar de los avances en la investigación educativa y los programas de formación de profesores en el área de matemáticas, se ha evidenciado que la enseñanza se convierte en una actividad fría, improvisada y mecánica que a menudo se presenta a los estudiantes como un área abstracta y confusa, lo cual genera en los estudiantes rechazo y poca motivación, viendo esta asignatura como una de las más difíciles al momento de abordar cualquier temática. Con respecto a lo anterior, es importante considerar que en algunos casos el poco uso de material didáctico, por parte de los docentes en las sesiones de clase, impide un aprendizaje más activo y entretenido.

Puede agregarse que la complejidad de las matemáticas y el rechazo hacia esta, se da de manera significativa en la iniciación del álgebra, como también en la resolución de problemas. Lo anterior sugiere la necesidad de una educación más dinámica y basada en juegos, que genere la motivación de los estudiantes por aprender y apropiarse de los conceptos presentados en el aula de clase.

Es importante mencionar que en un inicio se había optado por trabajar en la temática de expresiones algebraicas, lo cual no fue posible ya que la institución en su cronograma de actividades tenía estipulado el primer y segundo periodo trabajar un repaso de las temáticas vistas en grados anteriores, por lo tanto nos acogimos a las indicaciones de la institución y desarrollamos las clases con las temáticas de potenciación y radicación, para lo cual se implementaron los juegos de estrategia y el método de George Pólya, buscando de esta manera, orientar a los estudiantes a crear una relación entre las fases de resolución de problemas y los procedimientos de cada juego, logrando así identificar una estrategia ganadora en la ejecución de actividades planteadas.

De lo anterior Edo et al. (2008) mencionan que “la relación entre los juegos de estrategia y la resolución de problemas radica en el hecho que, potencialmente, ambos comparten el mismo proceso heurístico, es decir, que las fases de resolución de uno y otro coinciden y que el tipo de acciones a realizar tienen una gran coincidencia” (p.63). Es por ello que la implementación de esta dinámica a nivel educativo, sirve como una herramienta no solo para el beneficio del estudiante, sino también para el docente e institucional.

3 Objetivos

3.1 Objetivo General

Identificar la relación entre las fases de resolución de un problema propuestas por George Pólya y los procedimientos elaborados en cada juego de estrategia por los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt.

3.2 Objetivos Específicos

- Verificar dificultades en la competencia de resolución de problemas a partir de las observaciones en el espacio de inmersión.
- Diseñar actividades con juegos y problemas que requieran la construcción de estrategias propias de los estudiantes para solucionarlos.
- Orientar las actividades diseñadas de tal manera que los estudiantes comuniquen y argumenten sus estrategias para ganar los juegos y resolver problemas propuestos.
- Determinar a partir de los resultados de las actividades propuestas, si los estudiantes crearon vínculos entre las estrategias de juego y fases de resolución de problemas.

4 Marco Referencial

4.1 Marco de Antecedentes

A continuación, se presentan algunas investigaciones que soportan este proyecto de intervención en el aula y desarrollo de la práctica pedagógica. Entre ellos:

Edo et al. (2008) en su artículo titulado “Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema” realizado en Barcelona, España, identifican la importancia de vincular los juegos en la enseñanza de las matemáticas para hacer de esta un área atractiva para los estudiantes. En este trabajo se plasma un acercamiento a la investigación del uso de juegos de estrategia como herramienta metodológica para la enseñanza-aprendizaje, en relación con la resolución de problemas que propone Pólya. El juego de estrategia seleccionado para desarrollar el trabajo de innovación e investigación, es el juego “cerrar quince”, el cual, fue seleccionado porque tiene amplias posibilidades para explorar y es adecuado para generar un ambiente de resolución de problemas, lo anterior fue implementado a estudiantes en un rango de edad de 10 a 11 años y analizado a partir del modelo utilizado por Schoenfeld (1999) denominado “Models of the Teaching Process”, mostrando el potencial que ellos tienen para encontrar una estrategia ganadora en el juego. Finalmente, se llega a la conclusión que el juego de estrategia “cerrar quince” es apropiado para generar un entorno de resolución de problemas, dado que en su ejecución aparecen las fases de George Pólya.

Así mismo, González et al. (2017) en su artículo “Identificación de estrategias en un juego bipersonal entre estudiantes universitarios” en Barcelona, España, se centra en conocer las potencialidades del uso de juegos de estrategia como herramienta para promover habilidades útiles en la de resolución de problemas, además si la práctica de juegos de estrategia favorece los procesos de pensamiento útiles en la resolución de problemas. En lo anterior, se aplica un análisis cualitativo a cuatro estudiantes universitarios que van razonando estrategias para ganar el juego “círculo de monedas” que, con el apoyo de videograbaciones, reconstruyen las partidas con el fin de visualizar los movimientos de los jugadores, observar patrones y la evolución de las jugadas. De lo anterior, evidenciaron algunas estrategias como: pensar hacia atrás, pensar hacia delante, prueba y error, simplificación de tareas y búsqueda de patrones. Los autores concluyen que la práctica de juegos de estrategia favorece los procesos de pensamiento útiles en la resolución de problemas.

En otro sentido, Olfos y Villagrán (2001) en el artículo titulado “Actividades lúdicas y juegos en la iniciación del álgebra” realizado en Chile, plantean algunos temas a tener en cuenta en las actividades lúdicas, como lo son: los juegos en relación con las matemáticas, dado que son similares en cuanto al diseño y práctica, involucrando creatividad y parte de conocimientos previos; la clasificación de juegos, donde lo anterior se describe en diferentes tipos que tienen un propósito y utilidad en la enseñanza, en el cual se menciona el de estrategia, como un juego que permite poner en marcha diferentes procedimientos para la resolución de problemas de alto nivel; los juegos y la resolución de problemas, que favorecen la motivación, el hábito y el aprendizaje de las ideas matemáticas; además las técnicas para resolver problemas y ganar juegos de estrategia, que se componen por diferentes fases para la realización y finalización de las actividades. Para terminar los autores proponen diferentes juegos a aplicar en la iniciación del álgebra.

De igual forma Gonzáles (2016) en su tesis titulada "Influencia de los juegos recreativos en la resolución de problemas matemáticos de los estudiantes de educación secundaria de la Institución Educativa Carlos Matta Rivera, 2016" realizada en Chiclayo, Perú, se plantea elaborar y aplicar el programa "Jugando aprenden a resolver problemas matemáticos en los estudiantes del 4º grado". La presente tesis parte de un diagnóstico inicial, en el cual se evidenció en los estudiantes múltiples dificultades y poco interés en la resolución de problemas, por lo tanto, el autor procede aplicar el programa de juegos recreativos utilizando una metodología activa, con ello pretende corregir las limitaciones de aprendizaje halladas en los estudiantes, siendo estos los protagonistas de su propio aprendizaje. Como resultado, se alcanzó de un nivel bajo, a un nivel medio alto en la resolución de problemas matemáticos; concluyendo que la implementación de las actividades programadas a través de los juegos recreativos influyó significativamente en la mejora del planteamiento y resolución de problemas.

Del mismo modo Núñez (2017) en su tesis titulada, "Programa de juegos educativos para mejorar la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de primer grado de educación primaria de la Institución Educativa Nº 10329, 2016" realizada en Cutervo, Perú, tiene como propósito determinar que la aplicación de un programa de juegos educativos como estrategia didáctica, mejora la resolución de problemas matemáticos. Al respecto conviene decir que, para dar cumplimiento a dicho objetivo, se emplearon las cuatro fases del método de George Pólya, implementando un proceso de observación y aplicación a los estudiantes, dando como resultado que al ejecutar el programa "Jugando aprendemos matemáticas" el 50% de los estudiantes, mejoró a logro previsto, en resolución de problemas matemáticos, lo anterior fue analizado y representado por el software SPSS-22 basándose en la estadística descriptiva e inferencial.

Finalmente se logró concluir que la aplicación de un programa de juegos educativos como estrategia didáctica, permitió mejorar la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes.

En particular el estudio realizado por López y Almendra (2022) en Cauca, Colombia, titulado "Refuerzo de los conceptos de perímetro, área y volumen por medio de la resolución de problemas y matemáticas recreativas" se plantean como objetivo, introducir algunos elementos de la geometría, basados en la resolución de problemas y matemáticas recreativas, implementado como metodología estos dos enfoques principales, mediante la aplicación de cuatro talleres; como un resultado a destacar, se evidenció que la resolución de problemas fue fundamental para la apropiación de los conocimientos geométricos estudiados en diferentes contextos; y la matemática recreativa permitió potenciar el razonamiento lógico de los estudiantes, además de poner en práctica lo aprendido. Finalmente, logrando motivar a los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas; mostrándoles que a pesar de que aparentan ser difíciles, solo se requiere de atención y dedicación para comprenderlas.

Al analizar los diferentes trabajos relacionados con la búsqueda de mejorar en los estudiantes la resolución de problemas implementando juegos, en particular, con los juegos de estrategia, se pudo vislumbrar que es una herramienta que promueve el desarrollo de habilidades y técnicas para resolver exitosamente un problema matemático. Por consiguiente, la propuesta se desarrolló implementando esta metodología, con el fin de ampliar resultados y motivar al estudiante en el estudio de esta área.

4.2 Marco Conceptual

Para efectos de la realización del presente documento se tienen en cuenta los siguientes conceptos: juego, juego de estrategia, resolución de problemas, concepto de número racional, potenciación, radicación y expresión algebraica; y se describen algunas relaciones entre ellos.

4.2.1 Juego

En la actualidad muchos teóricos no dudan en afirmar la importancia de usar juegos y actividades lúdicas en el aula para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es tanto así que los juegos se pueden considerar como una herramienta de motivación, que permite facilitar una mejor enseñanza y conlleva a un aprendizaje significativo.

Diversos autores, como los que se mencionan a continuación emiten sus criterios acerca del juego:

Para Bautista y López (2002):

> El juego es autoexpresión, descubrimiento del mundo exterior y de sí mismo. En el juego el niño expresa su personalidad integral, pero no sólo es una oportunidad de autoexpresión para él, también es una actividad significativa de las posibilidades de descubrimiento, de exploración y experimentación con las sensaciones, con las relaciones, a través de las cuales el niño descubre y se descubre a sí mismo. Es, además, un proceso de descubrimiento de la realidad exterior, a través del cual va formando y reestructurando progresivamente sus conceptos sobre el mundo. (p. 136)

En el mismo sentido citamos a Piaget (1997, citado en Gonzáles, 2016) quien expresa que a través del juego se puede adquirir habilidades cognitivas y sociales, experimentar, explorar, descubrir su entorno, dar sentido a los objetos, personas y situaciones, desarrollar capacidades mentales complejas.

En concordancia a lo anterior, podemos decir que el juego es una actividad primordial en la vida del niño; a través del juego desarrolla sus habilidades motrices, sensoriales, cognitivas, sociales, afectivas y emocionales. Además, todo lo que se aprende mediante el juego se asimila de una manera más rápida y eficaz. Por este motivo, se acentúa la importancia de estos en el entorno escolar.

Por otro lado, Huizinga (1972) plantea que, un juego es “una acción u ocupación voluntaria, que se desarrolla dentro de límites temporales y espaciales determinados, según reglas absolutamente obligatorias, aunque libremente aceptadas; acción que tiene un fin en sí mismo y está acompañada de un sentimiento de tensión y alegría" (p.45). Así mismo, Lalande (1972, citado en González et al., 2014) determina “juego como la organización de una actividad dentro de un sistema de reglas que definen un éxito y un fracaso” (p. 113). Cabe destacar que ambas posturas se centran en diversos aspectos a tener en cuenta durante las actividades de juego, entre las cuales podemos encontrar: que es una actividad regida por un conjunto de reglas; la necesidad de un carácter lúdico; y la aceptación de una victoria o una derrota que se genera en el juego.

4.2.2 El Juego y su Relación con las Matemáticas

A lo largo de la historia, contrario a lo que el común de las personas ha pensado, el desarrollo de las matemáticas ha estado plenamente relacionada con el juego; realmente quienes han realizado aportes significativos en esta ciencia han pasado tiempo creando y pensando en los juegos que esta área del saber ha ido generando, se pueden incluir aquí: acertijos, problemas ingeniosos, rompecabezas geométricos, cuadrados mágicos, entre otros. Estos son solo una pequeña muestra de que las matemáticas se han desarrollado paralelamente a los juegos.

De acuerdo con lo anterior Torres (2012) afirma que:

> Las matemáticas siempre han tenido un sentido lúdico. Muchas de las profundas reflexiones alrededor de los problemas matemáticos han estado teñidas de una motivación y un reto apasionante que produce placer y sensación de búsqueda y logro. Para Arquímedes, Euclides, Leibniz o Einstein las matemáticas tuvieron los trazos de una apasionante aventura del espíritu.

Otro aspecto a tener en cuenta, es el planteado por Gairín (1990) quien expresa que:

> Analizar un juego y encontrarle una solución es una actividad muy similar a la forma en que trabajan los matemáticos. Además, mucha gente piensa que la matemática es una asignatura que requiere mucha seriedad, pero la mayoría de los matemáticos cree que la matemática, entre otras cosas, es un juego divertido, con muchas ramificaciones y desafíos, que tiene muchas aplicaciones con otras disciplinas y son fáciles de manejar. (p.111)

Al respecto conviene decir que “el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele presentarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático” (Guzmán, 1986, p. 25). Así mismo menciona que:

> Generalmente las reglas del juego no requieren introducciones largas ni tediosas. En el juego se busca la diversión y sobre todo la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos permiten también una introducción sencilla y una

> posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración. (Guzmán, 1986, p. 32)

Lo anterior permite identificar diferentes aspectos a tener en cuenta para la planificación de actividades en las que se involucren juegos con sentido matemático como: el juego debe ser llamativo y su complejidad debe acoplarse a la edad de los participantes; conocer el juego, sus implicaciones matemáticas y cómo abordarlas para generar motivación en la búsqueda de una solución. Además de argumentar utilizando un vocabulario pertinente en el área.

Esto nos lleva a mencionar que, "el uso de juegos en el marco escolar puede tomar como finalidad la comprensión de conceptos o la mejora de técnicas –juegos de conocimiento–, o bien la adquisición de métodos de resolución de problemas –juegos de estrategia" (Corbalán y Deulofeu, 1996, citado en Edo y Deulofeu, 2006, p.258). Para el desarrollo de la propuesta de intervención se tendrá en cuenta los juegos de estrategia que se enuncian a continuación.

4.2.3 Juegos de Estrategia

Los juegos de estrategia para Corbalán y Deulofeu (1996, citado en Edo et al., 2008) son aquellos en los que no hay intervención del azar y se utilizan procedimientos para ganar siempre, o para no perder, llamados estrategias, entendidas como formas de jugar. Considerándolos como un recurso pedagógico que permite iniciar a los estudiantes en la resolución de problemas a partir de actividades dinámicas y prácticas. Además, en estos juegos, generalmente para los jugadores, las decisiones están en sus manos, y se trata de que estos lleguen a descubrir la existencia de una estrategia ganadora, es decir, una forma de jugar que le permita obtener la victoria cada vez que juegue o para no perder (Badillo et al., 2007).

De este modo los juegos de estrategia son aquellos en los cuales el sujeto desarrolla diferentes habilidades para la resolución de problemas; así mismo, estos proporcionan una perspectiva diferente hacia las matemáticas; favoreciendo un aprendizaje placentero y menos traumático para los estudiantes.

En ese sentido Corbalán (1996) expresa que:

> La utilidad de los juegos de estrategia dentro de la formación matemática es potencialmente muy grande, puesto que se trata de iniciar o desarrollar, a partir de la

realización de ejemplos prácticos (no de la repetición de procedimientos hechos por otros) y atractivos las destrezas específicas para la resolución de problemas y los modos típicos de pensar matemáticamente. (P. 21)

Por otro lado, Gómez (1990) define que: no todos los juegos que se encuentran en las publicaciones de matemática recreativa son de estrategia; para que un juego sea calificado como uno de estrategia tiene que responder a los siguientes criterios:

1. El juego será para uno o más jugadores; sin embargo, se recomienda evitar los juegos en solitario, ya que no incentivan el uso de la verbalización de las estrategias.
2. El juego ha de tener un conjunto de reglas fijas que los jugadores deben seguir, debido a que proporcionan una "guía" en el desarrollo de estrategias, y ayudan a asimilar procedimientos que pueden ser usados en situaciones parecidas.
3. Las reglas establecerán objetivos (metas) para el conjunto de jugadores y objetivos individuales para bloquear al oponente.
4. Los jugadores deberán ser capaces de elegir sus propios caminos o acciones en un intento de lograr sus objetivos individuales.
5. Las reglas deben ponerse de manifiesto cuando uno de los jugadores ha ganado el juego.

Todo lo planteado hasta ahora, permite concluir que los juegos de estrategias, tienen numerosas posibilidades para ser empleadas a favor del desarrollo de contenidos matemáticos; en un juego se pueden utilizar una o más de estas estrategias, todo va a depender, entre otras cosas, de cómo el docente organice elija y planifique la actividad, del juego que escoja de acuerdo al proceso pedagógico llevado a cabo en ese momento y al nivel de sus estudiantes.

4.2.4 Problema

El primer aspecto a tener en cuenta es la definición de un problema, el cual se aborda como una situación que se debe reflexionar, buscar e investigar para responder o dar solución. Pólya (1965), afirma que: "un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable en forma inmediata" (p.2).

En relación con lo anterior, Escudero (1999) establece que ante la "solución de problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios; y desde luego no está codificado y enseñado previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y no siempre de matemáticas; hay que relacionar saberes procedentes de campos diferentes, hay que poner a punto relaciones nuevas" (p. 9). Además, plantea que cuando un alumno o un grupo se implican en esta actividad, se desarrolla creatividad y entusiasmo, llegando a manifestar cierto nivel de satisfacción al descubrir el camino que le conduce al resultado final como fruto de la investigación llevada a cabo.

Con respecto a lo anterior, se puede considerar un problema como una situación que el estudiante o grupo necesita resolver, teniendo a disposición diferentes caminos en su solución. Lo mencionado se encuentra en estrecha relación al nivel de formación de la persona, ya que, si la dificultad es muy elevada en comparación con su formación matemática, desistirá rápidamente por la frustración que la actividad le produce. Por el contrario, si es demasiado fácil y su resolución no presenta especial dificultad, esta actividad no sería un problema para ellos sino un ejercicio. De este modo se puede concluir que la actividad que para algunos alumnos de ciertas edades puede concebirse como un problema, para otros no pasa de ser un simple ejercicio.

4.2.5 Modelo de Resolución de Problemas según George Pólya

La resolución de problemas ha sido reconocida como un componente de gran relevancia en el estudio de las matemáticas. Al respecto, Pólya (1965) sostiene que resolver problemas es hacer matemática, y plantea la resolución de problemas como una serie de procedimientos que, en realidad, se utilizan y se aplican en cualquier campo de la vida cotidiana.

Para los propósitos de este estudio se tomará como referencia el modelo de Pólya (1965) en el cual, se distinguen cuatro fases que el autor considera convenientes para favorecer la enseñanza en la resolución de problemas, las cuales consisten en:

> Primero, comprender el problema, es decir, ver claramente lo que se pide; segundo, captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga a la incógnita con los datos, a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan;

tercero, poner en ejecución el plan; y cuarto, volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla. (p. 28)

Al mismo tiempo, el autor sugiere una serie de preguntas y recomendaciones que acompañan el desarrollo de cada una de estas etapas, ya que amplían el modelo de resolución de problemas, que se enuncia a continuación.

Comprender el problema (etapa 1): para poder comprender un problema se debe iniciar con la lectura, análisis y la recaudación de datos que están dados. No puede solucionarse un problema si no se comprende lo que piden resolver, no importa la cantidad de veces que se necesite leer el problema para lograr entenderlo y así responder las siguientes preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?, ¿Es posible cumplir con las condiciones?, ¿Son suficientes las condiciones para hallar la incógnita?, al finalizar con las preguntas se podrá dar lugar a la siguiente fase.

Concebir un Plan (etapa 2): para Pólya en esta etapa se debe indicar la estrategia a utilizar para solucionar el problema, se pueden incluir aquí:

1. Ensayo y Error: consiste en tener dos opciones, se debe probar la primera opción observar y si funciona esta será la indicada para solucionar el problema. Si no funciona la primera opción sería un error entonces se debe intentar con la segunda opción.
2. Resolver un problema más sencillo: consiste en guiarse con un ejemplo de menor dificultad que se relacione al problema que debe resolverse, los datos deben ser parecidos para poder tomar una idea y así poder aplicar los conocimientos alcanzados con anterioridad al problema complejo para su solución.
3. Buscar un patrón: consiste en identificar cuál es el patrón numérico o algebraico que se repite, cuando se observa la repetición del patrón se obtiene la solución del problema.
4. Hacer una lista: se debe elaborar un listado con los posibles resultados que tengan relación al problema planteado, el que cumpla con las exigencias se considera el indicado para solucionar el problema.
5. Razonamiento indirecto: se basa en el razonamiento lógico de la deducción.

Algunas interrogantes útiles en esta etapa son: ¿Conoce un problema relacionado?, ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Una vez que se concibe el plan naturalmente viene:

La ejecución del plan (etapa 3): En este paso el estudiante debe implementar la o las estrategias que escogió para solucionar completamente el problema. El autor sugiere que se debe conceder un tiempo razonable para ejecutar el plan; si no se alcanza el éxito, se debe dejar el problema a un lado y continuar con otro para retomarlo más adelante. El profesor puede orientar el proceso con las preguntas: ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes demostrarlo?

Comprobar resultados (etapa 4): también denominada la etapa de la visión retrospectiva, en esta fase del proceso es importante detenerse a verificar el resultado y el razonamiento que se aplicó en las anteriores etapas. Planteándose las siguientes preguntas ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema? Entre otras.

De lo anterior se deduce que, al resolver problemas matemáticos con este método, el estudiante debe comprender, reflexionar, ejecutar pasos originales y comprobar su respuesta. Al respecto conviene decir que la aplicación del método de Pólya en la resolución de problemas matemáticos permitirá que los estudiantes trabajen analíticamente de forma racional, compartan ideas, criterios e intereses fomentando la unidad y el trabajo en equipo. Al mismo tiempo el alumno descubre en las matemáticas un instrumento para resolver problemas con mayor eficacia, posibilitando la solución a sus preguntas, accediendo al conocimiento científico, interpretando y transformando el espacio que lo rodea.

4.2.6 Relación entre Juego de Estrategia y Resolución de Problemas

El siguiente punto a tratar es la relación que existe entre el juego de estrategia y la resolución de problemas, para ello Edo et al. (2008) afirman que la relación entre los juegos de estrategia y la resolución de problemas comparten el mismo proceso heurístico, dado que, las fases de resolución y el tipo de acciones a realizar coinciden. Así mismo Gómez (1990) expresa que:

> La heurística de los juegos de estrategia requiere el mismo cuidado y análisis que para la resolución de problemas. La semejanza de esta estructura, permite comenzar a ejercitar en unos y otros las mismas herramientas, los mismos procesos de pensamientos qué son útiles en los desarrollos. (p. 325)

Otro rasgo que se destaca en el texto de este autor, es la semejanza de las actitudes en la resolución de un juego y un problema matemático, las cuales se evidencian en la siguiente tabla:

Tabla 1

Semejanza entre las fases de un problema y un juego de estrategia.

	HEURÍSTICA	
De la Resolución de problemas		**De los juegos de estrategia**
Comprender: qué piden qué quiero encontrar qué datos tengo	**Leer el problema o las reglas del juego**	Comprender: los requisitos los movimientos cómo se gana
- ¿Existe un problema análogo cuya solución conozco? **-**Formular todas las conjeturas. -Seleccionar algunas estrategias.	**Explorar**	- ¿He jugado algún juego similar? - Seleccionar posibles estrategias.
Examinar la validez de cada conjetura	**Llevar a cabo la estrategia**	¿Qué movimientos de ataque u oposición hacen que el juego progrese?
-Si has resuelto el problema, ¿Por qué se trata de una estrategia general? - ¿Puede usar esta estrategia en otros problemas?	**Comprobar los resultados.**	-Si la estrategia seleccionada es siempre ganadora, ¿es una estrategia general? - ¿Funciona esta estrategia con otros juegos y otros oponentes?

Nota. En las fases de resolución de un problema la autora toma como referencia el método de George Pólya. Fuente: Gómez (1990).

Por otro lado, Gairín (1990) establece una relación entre los juegos de estrategia y las matemáticas, al mencionar que “un juego de estrategia requiere poner en práctica habilidades, razonamientos o destrezas directamente relacionadas con el modo en el que habitualmente proceden las matemáticas" (p. 110). Se puede destacar la relación de estos dos componentes, centrándose en la resolución de problemas, ya que Olfos y Villagrán (2001) proponen cuatro fases para enfrentarse a un juego de estrategia y son similares a las fases que plantea George Pólya para resolver un problema. Entre ellas se encuentran:

- Comprensión del juego o familiarización.
- Elaboración de un plan para ganar.
- Poner a prueba las estrategias.
- Comprobar si la estrategia es general.

Cabe mencionar que para resolver un problema y un juego se tienen en cuenta una serie de estrategias, en este sentido Guzmán (2021) y Baeza (2015) coinciden en que las estrategias utilizadas para un juego pertenecen al desarrollo de la resolución de un problema, estas se pueden agrupar de la siguiente manera:

1. Buscar semejanza con otros juegos y problemas.
2. Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil.
3. Experimentar, buscar regularidades y pautas.
4. Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico y numérico.
5. Manipular y experimentar manualmente.
6. Escoger una buena notación.
7. Aplicar la simetría.
8. Conjeturar.
9. Suponer el problema resuelto.
10. Pensar en técnicas generales.

De lo anterior, se concluye que los juegos de estrategia son una herramienta didáctica que tiene diversas posibilidades para ser utilizadas en la enseñanza de las matemáticas, en particular en la resolución de problemas, posibilitando en los estudiantes el desarrollo de heurísticas propias de esta competencia, logrando motivar, estimular, afianzar y adquirir de una manera más lúdica los conceptos rompiendo la rutina de los ejercicios mecánicos de papel y lápiz.

En el siguiente apartado se presentan algunas definiciones sobre las temáticas que se abordaron durante la intervención pedagógica. Para las definiciones en lo aritmético se tiene a Pestana et al. (2000) que define:

Los números racionales son los que habitualmente se denominan fracciones o quebrados, es decir, son cocientes de dos números enteros. El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$$

El número que aparece en la parte de arriba de la fracción se llama numerador, y el de abajo, denominador. (p.2)

La potencia es elevar un número $a \in \mathbb{R}$ a la potencia $n \in \mathbb{N}$ es lo mismo que multiplicar el número a por si mismo tantas veces como indique n. En la expresión a^n, a se llama base y n se denomina exponente. Podemos generalizar esta noción a exponentes enteros: si $n \in \mathbb{N}$, la expresión a^{-n} significa "el inverso de a^n", o sea, (pp. 11-12)

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

La extracción de raíces es una de las dos operaciones opuestas a la potenciación, todo sobre potencias se puede aplicar a raíces (ya que, en realidad, las raíces son potencias de exponente fraccionario). La raíz $n - ésima$ del número real a se define mediante

$$b = \sqrt[n]{a} \leftrightarrow a = b^n$$

El número natural $\boldsymbol{n}$ se llama índice de la raíz y $\boldsymbol{a}$, el radicando. (p.12)

Por otro lado, para las definiciones en la rama del álgebra se tiene a Allendoerfer y Oakley (1990) que expone:

El álgebra es la parte de las matemáticas que trata de las cantidades representadas por medio de símbolos. Comprende básicamente tres partes: polinomios, expresiones algebraicas y ecuaciones. Los orígenes del álgebra se remontan a Euclides con el álgebra geométrica. (p. 64)

$$4x^2 + 2x = 8$$

La expresión algebraica es una combinación de números, variables y signos de operación. En una expresión algebraica cada una de las partes separadas por un “signo más” o por un “signo menos” se denomina términos de la expresión algebraica. (p. 64)

$$4x + 7$$

Es importante mencionar que los conceptos anteriormente definidos se encuentran en las guías que se presentan en los anexos con más detalle.

5 Diseño Metodológico

5.1 Enfoque de Investigación

Teniendo en cuenta el propósito de esta práctica pedagógica investigativa, se optó por un enfoque cualitativo, ya que según Salgado (2007) este resulta conveniente para obtener una comprensión profunda de los significados y definiciones de las situaciones tal y como las presentan los participantes. Además, Hernández, et al. (2014) agrega que este enfoque permite realizar preguntas más abiertas, obteniendo datos expresados a través de diferentes tipos de lenguaje, los cuales se describen, analizan y convierten en temas que vinculan y reconocen tendencias propias del investigador, fundamentándose en métodos no estandarizados y por consiguiente el análisis no es estadístico.

5.2 Diseño de Investigación

La metodología que se utilizó en la sistematización de la intervención pedagógica se sustenta en, el diseño fenomenológico, el cual, según Camargo (2021) refiere que:

> El diseño fenomenológico es un conjunto de supuestos, visiones y prácticas de acercamiento a la investigación que, desde una aproximación antropológica, hermenéutica, o colaborativa social, asumen quienes consideran que los fenómenos de indagación sistemática pueden ser descritos, interpretados, explicados (a fin de construir significados sobre las acciones y discursos humanos) y cuestionados (a fin de buscar alternativas para su transformación). (p. 16)

Además, la investigación en educación matemática favorece actualmente el diseño fenomenológico al tener una visión según la cual no basta con identificar los problemas, analizarlos y construir modelos sobre deficiencias o dificultades. La investigación debe ir más allá para explorar oportunidades para el progreso y buscar soluciones que sean útiles a estudiantes, profesores y agentes educativos, en diferentes entornos culturales, porque responden a la complejidad de las circunstancias particulares (Moschkovich y Brenner, 2000).

En particular este diseño fenomenológico posibilitó la descripción, interpretación y análisis de los procedimientos desarrollados por los estudiantes al momento de abordar los diferentes juegos de estrategia, permitiendo realizar un comparativo con las fases que propone George Pólya, y de esta manera facilitar la adquisición de habilidades, fortaleciendo estructuras cognitivas en la resolución de problemas matemáticos.

5.3 Población y Muestra

Durante la inmersión realizada en el año 2021, a finales del periodo escolar, en los grados séptimos 1 y 2 se observó una población de 55 estudiantes. Cabe resaltar que para la implementación de esta propuesta pedagógica se contó con la participación de 38 estudiantes que fueron promovidos a grado octavo, vale la pena aclarar que en 8-1 se contó con 18 estudiantes y 8-2 con 20 estudiantes.

Al respecto conviene decir que para el desarrollo de este proyecto se tuvieron en cuenta los siguientes criterios de inclusión y exclusión en los participantes.

Criterios de inclusión

- Estudiantes que se encontraran cursando el grado octavo y que pertenecieran a los grupos 8-1 y 8-2.
- Estudiantes que asistieron a la mayoría de las actividades.

Criterios de exclusión.

- Interrupción de las actividades académicas por motivo de traslado.

Teniendo en cuenta los criterios anteriormente mencionados para el análisis de la información, se asignó a cada estudiante un código conformado con la siguiente estructura: E (estudiante) y se enumeran del 1 hasta el 38, así los códigos van desde E1 hasta E38.

5.4 Fases de la Investigación

Una vez definido el enfoque y diseño metodológico de la investigación se organizó un plan de actividades con cuatro fases, las cuales permitieron recopilar información suficiente y necesaria para el desarrollo de la propuesta investigativa, usando como herramienta orientadora el cumplimiento de los objetivos propuestos previamente:

Fase 1: inmersión en la Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt.

- En primer lugar, se seleccionó la institución en la que se realizaría la intervención en el aula (grado, tema y acuerdos con la institución).
- En segundo lugar, se realizó un reconocimiento del entorno de la institución; que comprende la ubicación geográfica, estructura física y espacios de aprendizaje, además de un acercamiento con cierto personal administrativo.
- En tercer lugar, se realizó una observación no participativa de los estudiantes del grado 7-1 y 7-2, lo anterior permitió realizar una inmersión a la población sujeto de estudio. La información recopilada fue registrada en un diario de campo.
- En cuarto lugar, se realizó una entrevista al rector y a las docentes encargadas del séptimo grado para ampliar la información del entorno y los estudiantes.
- Finalmente, se identificó la problemática a partir de las observaciones en el espacio de inmersión y la información apoyada por las docentes.

Fase 2: diseño de actividades acorde con los objetivos planteados.

- Revisión bibliográfica en el contexto local, nacional e internacional con el objetivo de recopilar documentos sobre el juego y resolución de problemas matemáticos.
- Exploración web de páginas académicas para la búsqueda de juegos de estrategia y problemas matemáticos.
- Revisión de guías de aprendizaje proporcionadas por las docentes.
- Selección de problemas y juegos de estrategia que se ajusten a las temáticas.

- Modificación y complementación de las guías con juegos de estrategia y problemas.
- Validación de las guías por la directora.
- Organización de recursos y materiales necesarios para el desarrollo de las actividades.
- Elección de las técnicas para la recolección de la información.

Fase 3: implementación de actividades y recopilación de datos.

- Prueba diagnóstica.
- Desarrollo de temáticas propuestas dirigidas a los estudiantes de los grupos 8-1 y 8-2.
- Implementación de actividades de juegos de estrategia y problemas en forma paralela.
- Recolección y organización de datos obtenidos durante el desarrollo de las actividades en el aula, utilizando instrumentos como: diario de campo, registro fotográfico, grabaciones y cuestionarios.
- Análisis reflexivo de los datos recopilados en cada actividad que son descritos en el diario de campo.
- Informe del proceso realizado por los estudiantes a las docentes titulares de cada grupo.

Fase 4: discusión y análisis de resultados.

- Descripción de actividades realizadas durante la intervención pedagógica.
- Análisis a profundidad de las actividades relacionadas con juegos de estrategia y problemas.
- Identificación de las diferentes estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de problemas y en los juegos de estrategia.
- Comparación entre el análisis de juegos de estrategia y el análisis de problemas.
- Conclusiones a partir de los resultados obtenidos.

6 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

Las técnicas que se utilizaron para la recolección de datos de acuerdo con el diseño seleccionado son: la observación directa y participante, la entrevista basada en tareas.

6.1 Observación Participante y Directa

La observación directa y participante según Yuni y Urbano (2006) es considerada una técnica mediante la cual el investigador recoge los datos directamente del grupo que conforma la unidad de observación. Para ello, se tuvo en cuenta una población de 48 estudiantes de los cursos 8-1 y 8-2, en el cual las practicantes del estudio participaron activamente del desarrollo de las actividades en el aula, de modo que lograron observar detalladamente sus dinámicas y tomar notas de lo que se consideró importante para ser analizado. Por ello, este tipo de observación es valiosa en el desarrollo de este proyecto de investigación, puesto que la forma de recolectar los datos implica que el equipo investigador se involucre con los estudiantes.

Los datos obtenidos mediante esta técnica de observación fueron recopilados a través del instrumento denominado diario de campo y cuaderno de notas, los cuales son caracterizados por Mejía (2012) de la siguiente manera:

> El diario de campo es central en cualquier proceso sistematizador, ya que en él se hace la primera selección y organización de la información, y es como el primer filtro que sufre el cuaderno de notas. Es allí donde se reconstruyen los hechos, eventos, pero con una primera interpretación de ellos. Mientras en el cuaderno de notas se registra lo que vemos, el diario de campo hace el ejercicio de observar y realizar los primeros análisis. (p. 46)

Además, se utilizaron instrumentos de recolección de datos multimedia como: cámara de video y grabadora de audio, para descripciones detalladas de lo realizado por los estudiantes en algunas sesiones de clase.

6.2 Entrevista Basada en Tareas

Otra técnica para la recolección de datos fue la entrevista basada en tareas, que según Goldin (2000) consiste en una indagación sistemática o progreso sobre una actividad que realizan un grupo de personas relacionándose entre sí, mientras resuelven preguntas o tareas que se les proponen y que han sido organizadas de acuerdo con los propósitos investigativos. Así pues, esta técnica permitió interactuar con los estudiantes durante el desarrollo de las actividades, puesto que en las tareas planteadas se orientaban mediante preguntas, con el fin de evitar frustración, además permitiendo al estudiante comunicar claramente los procesos que ejecutaban. Al respecto conviene decir que, si las preguntas o pistas son significativas y pertinentes, se tendrán mejores registros de información para el análisis.

Es de resaltar que en la investigación en educación matemática esta técnica es conveniente, ya que busca indagar los procesos de pensamientos inherentes a las actividades matemáticas de los estudiantes y sus explicaciones, además de documentar formas de resolver tareas matemáticas, rastreando mecanismos de exploración y el progreso de la construcción conceptual, mientras se resuelve la tarea. Finalmente, evalúa el avance en un estado de conocimiento y valida las conjeturas sobre los aprendizajes (Camargo, 2021).

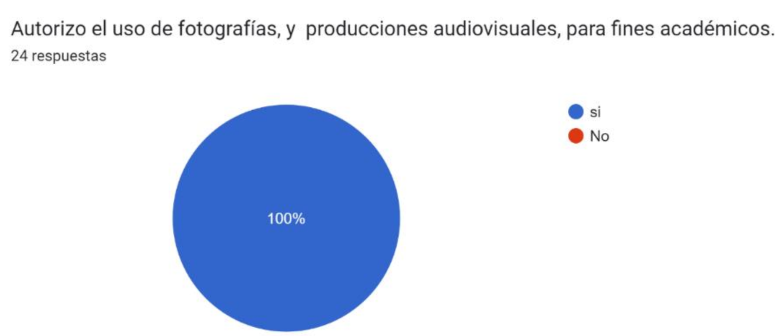
En cuanto al instrumento para la recolección de datos, se utilizó el cuestionario, ya que según Grande y Abascal (2009) lo definen como "un conjunto articulado y coherente de preguntas para obtener la información necesaria para poder realizar la investigación que la requiere" (p. 189). Al mismo tiempo parte de la información obtenida se respaldó con contenido audiovisual (videos y fotografías).

6.3 Aspectos Éticos Legales

Se ha establecido un formulario de Google como modelo de carta de consentimiento informado parental, para hacer uso del material audiovisual recopilado durante la intervención pedagógica, debido a que los estudiantes son menores de edad.

Figura 3

Consentimiento para el uso de producciones audiovisuales.



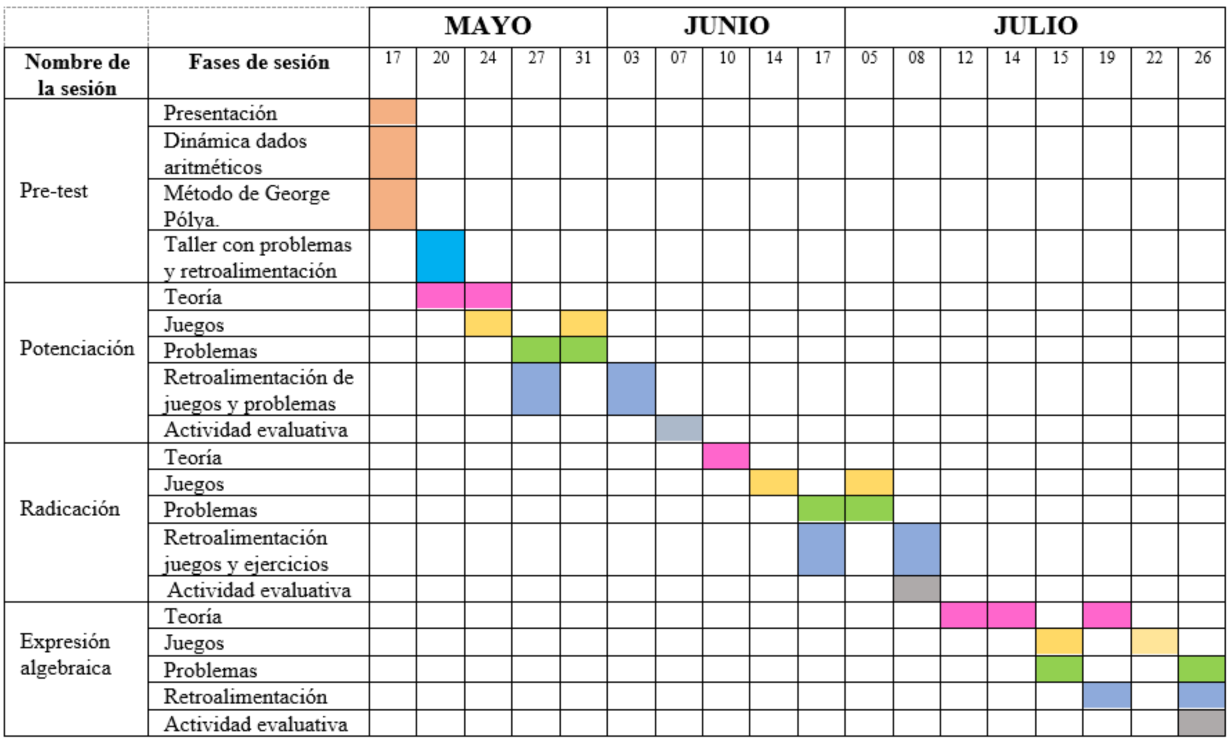
Nota. Captura de los resultados del consentimiento tomada del formulario de Google. Fuente: Autoría propia.

7 Cronograma de Actividades

A continuación, se presenta el cronograma de actividades que se efectuó para dar cumplimiento a los objetivos planteados, cabe mencionar que para su realización se tuvo en cuenta el horario facilitado por la coordinadora de la institución educativa, en el cual se observó que la asignatura de matemáticas tiene una intensidad de 4 horas semanales, distribuidas en 2 horas por día (martes y viernes).

Figura 4

Cronograma de actividades.



Nota. La figura muestra las actividades realizadas durante la intervención pedagógica. Fuente: Elaboración propia.

Es importante aclarar que en cada sesión se realizaban diferentes actividades propuestas en el tiempo determinado. Por ejemplo, el 19 de julio se realizó una exposición de la teoría y retroalimentación de lo visto la anterior clase.

8 Propuesta Didáctica

8.1 Presentación

Este proyecto de intervención pedagógica implementado en los grupos 8-1 y 8-2, de la institución educativa Liceo Alejandro de Humboldt, persigue el desarrollo (en el estudiante) de la competencia matemática en resolución de problemas a través de los juegos de estrategia. En particular, en dichos juegos siempre existirá un contexto donde el jugador tiene que intervenir solucionando un problema para alcanzar la victoria, además de estar relacionados con la resolución de problemas, se ven regidos por los contenidos curriculares, es decir, que los conceptos previos dentro de la malla curricular serán herramientas necesarias para elaborar una estrategia ganadora.

En tal sentido, se implementaron 4 guías de aprendizaje distribuidas en 18 sesiones; con un tiempo determinado de 120 minutos, en las cuales se estudiaron las temáticas de potenciación, radicación y primeras nociones del álgebra, para cada guía se desarrollaron dos juegos acordes con las temáticas propuestas y su estructura fue pensada de tal manera que tenga como eje central la competencia en resolución de problemas, usando los juegos como herramienta didáctica para potenciar la creación de un esquema de estrategias que le permitan al estudiante mejorar sus habilidades en razonamiento, interpretación, análisis, entre otras.

La implementación de la propuesta didáctica alrededor de cada guía se rige por la siguiente secuencia: En primer lugar, se hace la presentación de la temática (2 sesiones), en segundo lugar, se exponen las dinámicas del juego y se permite a los estudiantes desarrollarlo (1 o 2 sesiones), en tercer lugar, se entregan los problemas a los estudiantes para que se propongan soluciones (1 sesión) y por último, se realiza una retroalimentación entre los estudiantes y practicantes sobre los juegos y los problemas realizados, para dar la guía por finalizada (1 sesión).

8.2 Marco Legislativo y Contexto

Con el fin de tener una base sólida sobre la importancia y pertinencia de la resolución de problemas y los juegos, se toma como referencia los lineamientos curriculares en matemáticas MEN (1998), estándares básicos de competencia MEN (2006), derechos básicos de aprendizaje

MEN (2016) y el plan de área de matemáticas de la institución educativa. Con el propósito de definir estrategias y herramientas para lograr los objetivos planteados en cada guía propuesta.

Lineamientos Curriculares en Matemáticas

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) los lineamientos curriculares en matemáticas (LCM) establecen un conjunto de políticas claras para la enseñanza de las matemáticas en los niveles de educación básica y media en todo el territorio colombiano que deben ser implementados por las instituciones educativas, docentes y alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Puede agregarse que, dentro de los lineamientos de matemáticas se plantean los siguientes procesos generales: modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos; formular y resolver problemas, considerándose este último como eje principal y parte integral de las matemáticas. Al respecto conviene decir que, estos se integran con los conocimientos básicos y los contextos.

En consecuencia, la actividad de resolver problemas es un proceso habitual en las matemáticas y es considerado como eje central que permea el currículo y que contribuye a la adquisición de competencias y habilidades de pensamiento que conllevan a un verdadero aprendizaje significativo. En efecto, el implementar problemas matemáticos en el aula de clase permite familiarizar al estudiante con el uso y aplicación de conceptos matemáticos; además, desarrollan su pensamiento y la capacidad de interpretar y comunicarse matemáticamente.

En vista de que, los lineamientos en matemáticas promueven el proceso educativo para la enseñanza- aprendizaje, se ha decidido incorporar estos en la propuesta investigativa con el fin de fomentar la resolución de problemas en los estudiantes, para desarrollar habilidades como: razonar, interpretar, analizar, cuestionar, modificar condiciones, originar nuevos problemas, encontrar posibles estrategias de solución y desarrollar problemas a partir del método propuesto por George Pólya.

Estándares Básicos de Competencia en las Matemáticas

Conforme al MEN (2006) los Estándares Básicos de Competencia (EBC) en matemáticas posibilitan el desarrollo de competencias dentro de los cinco pensamientos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, que se encuentran relacionados y permiten potenciar los diferentes procesos generales de la actividad matemática. Puede agregarse que, las competencias en matemáticas necesitan de un ambiente para aprender que sea enriquecido por situaciones problema que sean significativas y que permitan alcanzar competencias y conocimientos más complejos (p.49). Lo cual significa, que para el desarrollo de las competencias es necesario recurrir a diferentes contextos e implementar estrategias y metodologías para poder alcanzarlas. Por ejemplo, el resolver problemas es una de las metodologías adecuadas que permite al estudiante desarrollar habilidades de razonamiento, interpretación, comunicación, entre otros.

Por lo anterior, los EBC en las matemáticas fueron un elemento clave para la planeación de las actividades que se implementaron para el desarrollo de la propuesta investigativa en el grado octavo, identificando algunos de los aprendizajes que debían de adquirir para ese entonces teniendo en cuenta la resolución de problemas.

Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas

Desde la propuesta investigativa se incorporó una mirada general e importancia de la resolución de problemas en los estudiantes, apoyada en los derechos básicos de aprendizaje (DBA) que el Ministerio de Educación propone, con el fin de mejorar la calidad educativa y fortalecer las prácticas escolares. Hay que mencionar que los DBA se diseñan en coherencia con los EBC y los LC y su importancia radica en que propone que deben saber los estudiantes, según determinado grado (MEN, 2016).

Dada la naturaleza del proyecto de investigación se seleccionó los DBA Versión2 (2016) del grado octavo, los cuales permitieron el desarrollo de las competencias de los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas y los juegos de estrategia teniendo en cuenta tópicos como potenciación, radicación y primeras nociones de las expresiones algebraicas.

Plan de Asignatura de Matemáticas.

El plan de estudio es un esquema estructurado para cada una de las áreas que hacen parte del currículo de las instituciones educativas. Se debe agregar que, para la organización de dicho documento se tienen en cuenta los LC, EBC y DBA que el ministerio de educación propone para brindar una educación de calidad. Además, el plan de área se diseña por asignaturas y grado, donde se incluyen temáticas, objetivos, criterios de evaluación, metodologías, competencias, etc. De manera que, permiten llevar un orden de las actividades a desarrollar para que cada estudiante adquiera los conocimientos necesarios al finalizar cada uno de los periodos del año escolar.

Por consiguiente, el plan de área de la Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt permitió diseñar e implementar un plan de aula para las sesiones de clases en el grado octavo en las temáticas de potenciación, radicación y primeras nociones del álgebra, es de resaltar que se tuvieron en cuenta los planes de área de grado séptimo y octavo, esto debido a que la institución tomó la decisión de realizar un repaso de los contenidos en los que no tuvieron una buena apropiación en los cursos anteriores, por motivo de la crisis sanitaria.

8.3 Objetivos

A través de la siguiente propuesta de intervención en el aula basada en la resolución de problemas y juegos de estrategia, se pretende:

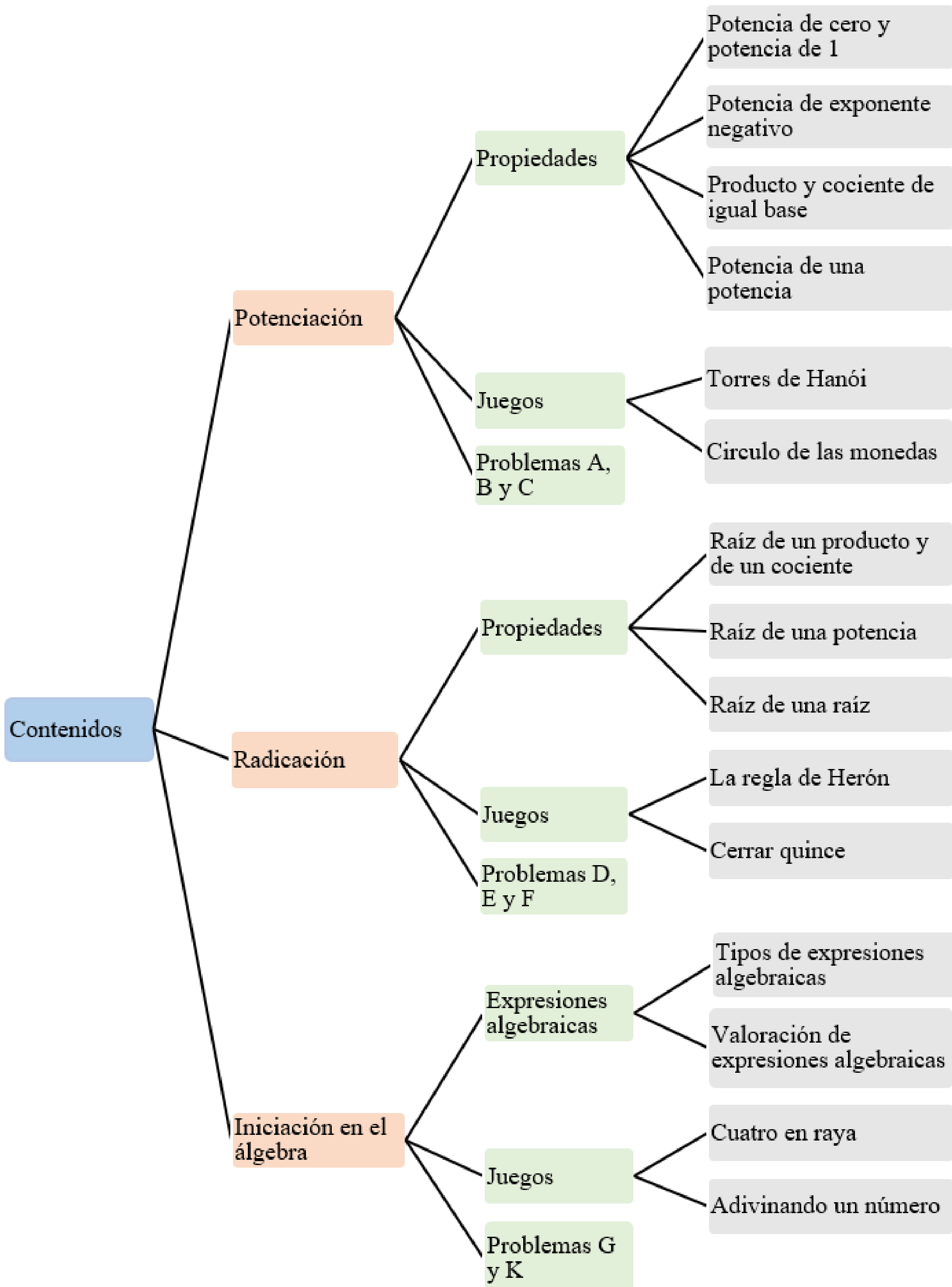
- Guiar el proceso de enseñanza- aprendizaje del estudiante implementando herramientas didácticas.
- Despertar el interés de los estudiantes en la competencia de resolución de problemas mediante juegos de estrategia.
- Interiorizar la relación entre juegos de estrategia y resolución de problemas.
- Mejorar los procesos de resolución de problemas matemáticos mediante los juegos de estrategia.
- Indagar diferentes métodos para encontrar estrategias de solución para los problemas y juegos.
- Resolver problemas en los que intervengan la potenciación, la radicación y expresiones algebraicas.

8.4 Contenido

En el siguiente esquema se muestran los contenidos teóricos abordados en las sesiones de clase, además los juegos y problemas que se incorporaron durante el desarrollo de cada temática.

Figura 5

Contenidos desarrollados durante la intervención pedagógica.



Nota. El esquema muestra las temáticas, problemas y juegos trabajados durante la intervención pedagógica. Fuente: Elaboración propia.

8.5 Metodología

Para el desarrollo de esta propuesta didáctica se usó la metodología activa, ya que esta incorpora (por definición) los tópicos principales a tener en cuenta en este estudio. Hernández (2014) la define como una alternativa pedagógica centrada en promover la participación de los estudiantes, además de ser un proceso didáctico y dinámico que realiza diferentes técnicas con el uso de material didáctico, juegos educativos y trabajos grupales.

Además, Aiche (2011, citado en Jaramillo y Puga, 2015) considera que “para la metodología activa los métodos que se ajustan bien a esta realidad son el aprendizaje mediante resolución de problemas, y el aprendizaje cooperativo” (p. 297).

En consecuencia, los objetivos de esta propuesta están guiados a realizar actividades que involucren juegos de estrategia y problemas de forma tanto atractiva como dinámica para los estudiantes, con el fin de construir conocimientos propios. Para lo anterior se plantea la metodología activa participativa que encaja con los objetivos propuestos, teniendo en cuenta los siguientes procedimientos:

Figura 6

Esquema del desarrollo de las clases.

Nota: Etapas del desarrollo de cada guía. Fuente: Elaboración propia.

8.6 Temporalización

En la siguiente tabla se mostrará la temporalización de cada guía por sesiones de clase.

Tabla 2

Temporalización por guías

Sesión	Contenido	Tiempo (sesiones)	Fases de sesión	Tiempo (min.)
Pre-test	Potenciación Radicación Operaciones aritméticas Problemas aditivos y multiplicativos	3	Presentación Juego Método de George Pólya Taller con problemas y retroalimentación	10 50 60 60
Potenciación	Propiedades Juegos Problemas	11	Teoría Juegos Problemas Retroalimentación y ejercicios Actividad evaluativa	120 120 120 150 120
Radicación	Propiedades Juegos Problemas	10	Teoría Juegos Problemas Retroalimentación y ejercicios Actividad evaluativa	120 180 120 105 60
Expresiones algebraicas	Expresión algebraica. Valor numérico de una expresión algebraica. Lenguaje algebraico. Juegos Problemas.	13	Teoría Juegos Problemas Retroalimentación Actividad evaluativa	330 140 180 60 60

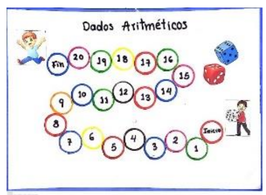
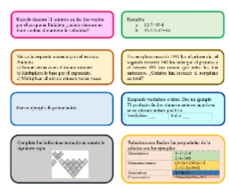
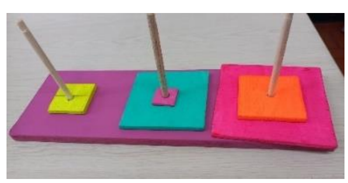
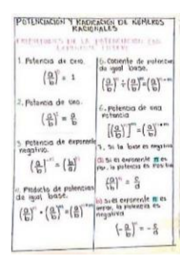
Nota: La tabla muestra el tiempo empleado de las actividades durante el desarrollo de cada guía. Fuente: Elaboración propia.

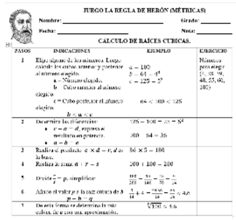
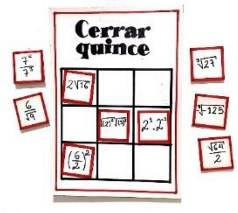
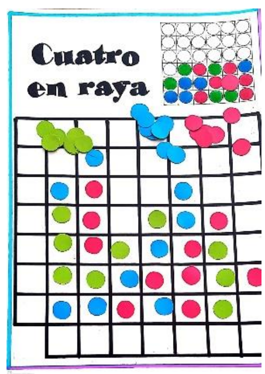
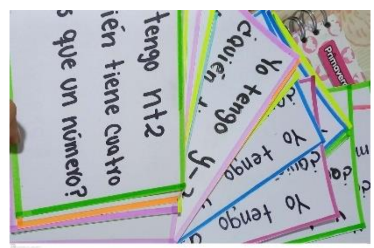
8.7 Recursos

En este apartado se describirán los recursos implementados para el desarrollo de cada una de las sesiones. En general se contó con el recurso humano (docente, practicante y estudiantes) y elementos como: marcadores, borrador, pizarra y cuaderno de notas en todas las sesiones. A continuación, se presentará una tabla con los materiales específicos que fueron facilitados por las practicantes para el desarrollo de juegos, exposición de temática y problemas en cada una de las guías.

Tabla 3

Recursos usados en las clases

Sesión	Recursos	Imagen
Pre-test	Dinámica la telaraña (Tubo de lana) Juego: dados aritméticos (cartulina, tarjetas, dados, hoja de respuestas) video beam,	    
Potenciación	Cartelera, fotocopias (taller y evaluación), hoja de respuestas, tareas en casa, video beam, juego las torres de Hanói (soporte, discos, varillas), juego de las monedas (círculos de cartón paja).	    

Radicación	Cartelera, fotocopia (taller evaluativo), juego cerrar quince (cartón paja, fichas e incentivos), la regla de Herón (fotocopia y calculadora), compas, colores, cartulina y regla.	 	 
Expresiones algebraicas	Dinámica quien tiene yo tengo (tarjetas, cinta y dulces), juego cuatro en raya (cartón paja, bolitas de colores, hoja de respuestas, incentivo), adivina un número (fotocopia con indicaciones, cuaderno, incentivo).		

Fuente: Elaboración propia.

8.8 Actividades

La estructura de cada una de las actividades se compone por el nombre de la sesión, las fases de las sesiones, las actividades y los objetivos de aprendizaje que se desarrollaron en el horario de clases de los estudiantes. Para atender la problemática identificada durante la inmersión en el aula, se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos: en la exposición de temáticas, se implementaron materiales didácticos; en el desarrollo de los juegos se optó por organizar equipos de trabajo con un número específico de participantes, lo cual dependía del juego, material y de los objetivos planteados; para la actividad relacionada con problemas, se realizaba de forma individual o en parejas para poner a discusión posibles soluciones; la retroalimentación se desarrolló mediante diálogos o discusiones de cada uno de los juegos y en ocasiones de los problemas, en el cual se compartían experiencias y aprendizajes adquiridos. Finalmente, en la actividad evaluativa se proponían ejercicios para la casa, en clase y algunas veces prueba escrita.

Es importante mencionar que en los anexos se presenta con más detalle cada una de las actividades expuestas a continuación:

Tabla 4

Estructura para la sesión de pre-test

SESIÓN 1- PRE-TEST				
Presentación	**Dinámica**	**Método de**	**Retroalimentación**	**Actividad**
La telaraña	Dados aritméticos	Exposición del método de Pólya	Mesa redonda	Taller con problemas

Objetivos de aprendizaje:

- Identificar dificultades y errores que enfrentan los estudiantes para resolver los problemas planteados.
- Conocer el nivel de desempeño de los niños en la capacidad de resolución de problemas matemáticos.
- Identificar los conocimientos previos.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5

Estructura para la sesión de potenciación

SESIÓN 2- POTENCIACIÓN				
Teoría	**Juegos**	**Problemas**	**Retroalimentación**	**Actividad**
Exposición: -Definición de potenciación con racionales -Propiedades	-Torres de Hanói -Círculo de las monedas	-Problema A -Problema B -Problema C	-Diálogo con los estudiantes de los juegos -Socialización del taller propuesto para la casa	-Tareas en clase -Prueba escrita

Objetivos de aprendizaje:

- Identificar características y relaciones de los números racionales y aplicación de las propiedades de la potenciación.
- Resolver problemas cuya solución requiera de la potenciación.
- Motivar al estudiante en la competencia de resolución de problemas mediante juegos de estrategia.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 6

Estructura para la sesión de radicación

SESIÓN 3- RADICACIÓN				
Teoría	**Juegos**	**Problemas**	**Retroalimentación**	**Actividad**
Exposición: -Definición de radicación con racionales -Propiedades	-La regla de Herón -Cerrar quince	-Problema D -Problema E -Problema F	-Reflexiones de los juegos	-Ejercicios en clase -Taller evaluativo

Objetivos de aprendizaje:

- Identificar características y relaciones de los números racionales y aplicación de las propiedades de la potenciación.
- Resolver problemas cuya solución requiera de la potenciación.
- Interiorizar la relación entre juegos de estrategia y resolución de problemas.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7

Estructura para la sesión de expresiones algebraicas

SESIÓN 4- EXPRESIONES ALGEBRAICAS				
Teoría	**Juegos**	**Problemas**	**Retroalimentación**	**Actividad**
-Exposición de definiciones -Dinámica tu tienes yo tengo	-Adivina un número -Cuatro en raya	-Problema G -Problema H -Problema I	-Debate grupal -Reflexiones de los juegos	-Taller en clase -Participación

Objetivos de aprendizaje:

- Identificar las partes de los términos algebraicos.
- Definir una expresión algebraica.
- Clasificar los tipos de expresiones algebraicas.
- Representar expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa.
- Identificar estrategias del juego cuatro en raya del valor numérico.

Fuente: Elaboración propia.

8.9 Evaluación y Seguimiento

La evaluación tiene como finalidad contribuir en el proceso de enseñanza-aprendizaje y observar los resultados alcanzados por los estudiantes durante el desarrollo de cada una de las actividades, en tal sentido, se plantea tres rúbricas; para juegos, problemas y temáticas. Los descriptores para la primera rúbrica fueron: Participación, responsabilidad, actitud, trabajo colaborativo y aspectos cognitivos relacionados, en el caso de la rúbrica para resolución de problemas los descriptores a tener en cuenta fueron la aplicación de cada una de las fases de resolución de problemas del método de Pólya, mientras que la rúbrica de las temáticas se enfatizó en descriptores con aspectos prácticos y cognitivos que los estudiantes tenían respecto a los conceptos matemáticos propuestos. Estas se muestran con mayor detalle en el anexo E.

Tabla 8

Rúbrica para evaluar la solución de problemas

DIMENSIÓN	DESCRIPTORES			
	Superior (S)	**Alto (A)**	**Básico (B)**	**Bajo (J)**
Comprensión del problema.	Comprende el problema en su totalidad e indica todos y cada uno de los datos que este aporta.	Conoce e interpreta parcialmente los datos planteados en el problema. Demuestra Considerable comprensión del problema.	Identifica algunos datos planteados en el problema. Comprende algunos aspectos que ayudan a resolver el problema.	No identifica ni interpreta los datos planteados en el problema. Demuestra poca comprensión del problema.
Esquematización	Esquematiza claramente el enunciado indicando correctamente los datos del problema. Los dibujos son claros y ayudan mucho para que el estudiante comprenda lo que está haciendo.	Esquematiza parcialmente el enunciado indicando algunos de los datos del problema. Los dibujos son claros y fáciles de entender.	Realiza esquemas que no corresponden a lo que plantea el enunciado del problema.	No puede esquematizar correctamente el enunciado. Los dibujos y diagramas no están muy claros.
Estrategia de solución (plan).	De acuerdo con la teoría identifica la fórmula aplicable y muestra total entendimiento de los conceptos involucrados. Siempre usa estrategias efectivas y eficientes para resolver los problemas.	Identifica parcialmente las fórmulas para aplicar de acuerdo con la teoría y conceptos involucrados en la solución del problema. Usualmente, usa estrategias efectivas y eficientes para resolver los problemas.	Busca fórmulas para aplicar en la resolución del problema, pero las utiliza de manera inadecuada.	Muestra poca comprensión de las fórmulas para aplicar y los conceptos involucrados. A veces usa estrategias efectivas y eficientes para resolver los problemas.
Herramientas fórmulas y operaciones (Ejecución).	Aplica algoritmos correctamente. Incluye todos los elementos pedidos en la solución del problema.	Aplica algoritmos correctamente, pero comete algunos errores aritméticos y algebraicos. Incluye la mayar parte de los elementos pedidos en la solución del problema.	Aplica algoritmos incorrectamente y no incluye todos los elementos pedidos para la solución del problema.	Aplica algoritmos de manera incorrecta, comete errores aritméticos y algebraicos. Sin responder a lo que se pide en la solución del problema.
Validación generalización.	Valida y/o generaliza sus procesos de solución.	Valida y/o generaliza sus procesos de solución de manera coherente.	Valida y/o generaliza sus procesos de solución de manera elemental.	Carece de validación y/o generalización de sus procesos de solución.

Nota. En la rúbrica se busca evaluar la apropiación del método de George Pólya.

9 Resultados y Discusión

En este apartado se presentan los datos obtenidos en las seis actividades planteadas a los estudiantes durante el proceso de intervención en el aula. Inicialmente se realiza la descripción de cada una de ellas, teniendo en cuenta que los resultados obtenidos se enfocaron en el análisis de las actividades basadas en juegos y resolución de problemas. Posteriormente, para dar cuenta del objetivo general propuesto, el cual se centra en identificar la relación entre las fases de resolución de problemas propuestas por George Pólya y los procedimientos elaborados de cada juego de estrategia, se realiza una comparación entre el análisis de juegos y el análisis de problemas.

Cabe mencionar que los datos fueron sometidos a un análisis cualitativo, en el cual fue necesario organizar la información obtenida en los cuestionarios, hojas de respuesta, diario de campo y cuaderno de notas, además del contenido audiovisual recolectado.

9.1 Estructura de Análisis para los Juegos de Estrategia y Problemas Matemáticos

Con base a la teoría expuesta en el marco teórico sobre juegos de estrategia y resolución de problemas, se estructuró un esquema para el procesamiento de los resultados, teniendo en cuenta las fases para resolver un problema de George Pólya (1995) y las fases de un juego de estrategia propuestas por Olfos y Villagrán (2001). El cual, es pertinente tanto para el análisis de problemas como de los juegos de estrategia. En este sentido, el esquema se compone por cuatro fases los cuales se enuncian y caracterizan a continuación:

Fase 1. Comprensión: esta fase se caracteriza por presentarse generalmente al principio de cada actividad con la lectura del enunciado, lectura de las indicaciones o reglas, familiarización y exploración, cabe mencionar que esta fase puede presentarse durante el desarrollo de la actividad. Por esta razón, el propósito es la asimilación de las condiciones de cada una de las actividades propuestas.

Fase 2. Planeación: esta fase, inicia cuando el estudiante realiza sus primeras acciones en el intento de comprender la actividad, de manera que, incorpora estrategias de simplificación; busca de semejanzas con otros juegos y problemas; pruebas de ensayo y error; búsqueda de patrones; ilustración de diagramas; cuestionamientos y opiniones. Añádase a esta una característica como la verbalización de las ideas o acciones, que tienen lugar para llegar a una solución.

Fase 3. Llevar a cabo la estrategia: esta fase, comienza cuando el estudiante ejecuta un plan de ideas, estrategias y procesos que con antelación fueron organizadas para finalmente dar solución a la actividad.

Fase 4. Comprobar la estrategia: en esta fase, los estudiantes hacen una revisión retrospectiva individualmente para luego compartir reflexiones y comprobaciones de sus descubrimientos, llegando a un consenso entre los participantes y las practicantes.

9.2 Descripción y Análisis de Actividades

9.2.1 Actividad 1. Dinámica la Telaraña

Esta actividad se implementó con el fin de interactuar con los estudiantes, conocer las diferentes concepciones y actitudes que tienen con relación a las matemáticas. Lo anterior fue de gran importancia puesto que permitió mantener una comunicación activa con los estudiantes y de esta manera establecer una buena relación didáctica antes de iniciar con los temas propios de nuestro proyecto de aula. Por consiguiente, algunas de las preguntas propuestas fueron: ¿Qué son las matemáticas para usted?, ¿Es divertido para usted aprender matemáticas? ¿Por qué?, ¿Para qué son útiles las matemáticas? y ¿Dónde pueden encontrar las matemáticas en la sociedad? Teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes se realizó un diagrama, en cual se visualizan las actitudes y concepciones hacia las matemáticas.

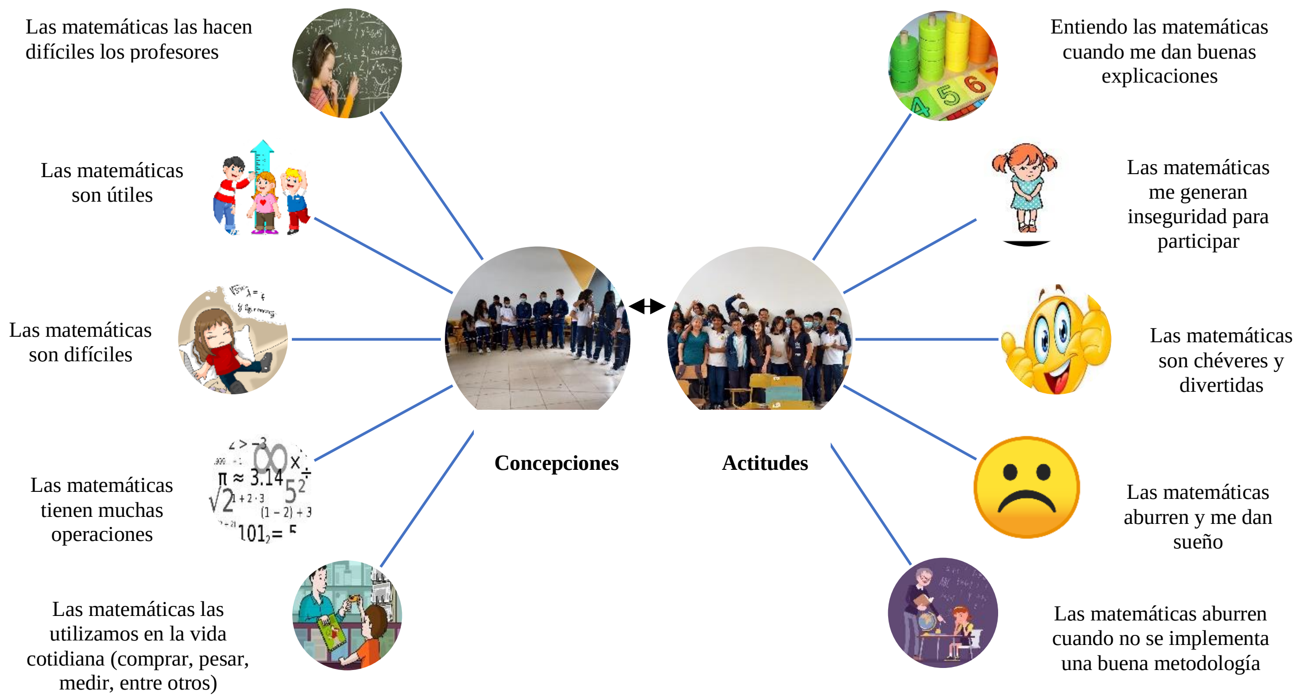
Figura 7

Estudiantes en el aula.

Nota. Estudiantes del grado 8 desarrollando la dinámica telaraña. Fuente: Autoría propia.

Figura 8

Respuestas de los estudiantes.



Fuente: Elaboración propia.

En la figura anterior se muestra una síntesis de las respuestas de algunos de los estudiantes, donde se evidencia que las matemáticas es una de las áreas con mayor rechazo y que genera aburrimiento y desmotivación, debido a su complejidad, por el método de enseñanza o porque no se logran comprender; sin embargo, algunos estudiantes expresaron que las matemáticas son divertidas, ya que encuentran en ellas un reto y un objetivo a alcanzar. En vista de que las matemáticas sean divertidas o no, la idea de que las matemáticas son difíciles está profundamente arraigada en la sociedad e incluso es dogmática, por lo que el deber como educadores es cambiar esta forma de pensar en los estudiantes para que se sientan cómodos con las matemáticas.

9.2.2 Actividad 2. Jugando con los Dados Aritméticos

Esta actividad es de elaboración propia y tiene como objetivo identificar los conocimientos previos de los estudiantes, en cuanto a la competencia de resolución de problemas y algunos conceptos matemáticos como: suma, resta, multiplicación, división y potenciación, para el desarrollo de esta actividad se tuvieron en cuenta tres momentos, en primer lugar se solicitó a los estudiantes organizar equipos de trabajo, en segundo lugar se procedió a explicar la dinámica con su propósito y sus respectivas reglas. Finalmente se entregó el respectivo material a los estudiantes para iniciar la actividad. Como se muestra en la siguiente figura.

Figura 9

Estudiantes jugando.

Nota. Estudiantes desarrollando el juego dados aritméticos. Fuente: Autoría propia.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos del pre-test de los problemas 1, 4, 9 y 12 de la guía 4 los cuales se encuentran en el anexo D. Para analizar los resultados obtenidos por los estudiantes e identificar las estrategias de éstos para resolver problemas básicos, se tuvieron en cuenta los siguientes ítems:

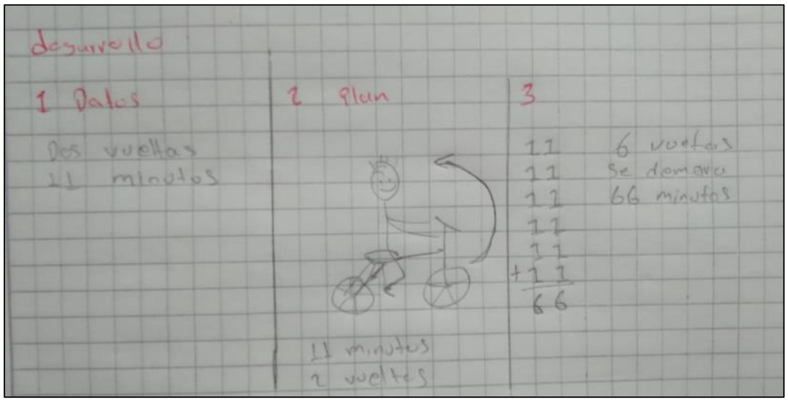
- Identifica y selecciona datos correctamente.
- Identifica la operación y realiza su procedimiento.

En cuanto al primer ítem, los resultados arrojados por el pre-test, se evidencia que los estudiantes del grado octavo en su minoría alcanzan a reconocer los datos que son necesarios para resolver el problema; pero no saben utilizarlos en el procedimiento y por lo tanto en varios puntos no realizaron la operación pertinente. Por ejemplo, en la figura 10 se puede observar que el estudiante E3 identifica correctamente los datos, pero no hace un uso adecuado de ellos, por consiguiente, no logró realizar la operación que demanda el enunciado; mientras que en la figura

11 se muestra que el estudiante E7 no logró identificar los datos, por ende, no presentó ningún resultado.

Figura 10

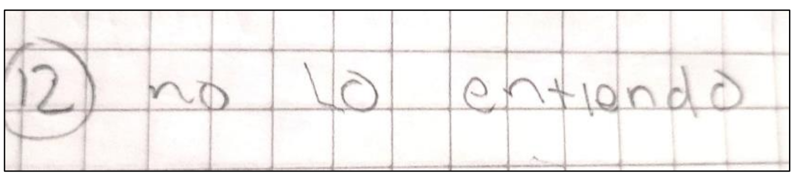
Solución del estudiante E3 al problema 1.



Fuente: Autoría propia.

Figura 11

Respuesta del estudiante E7 al problema 9.



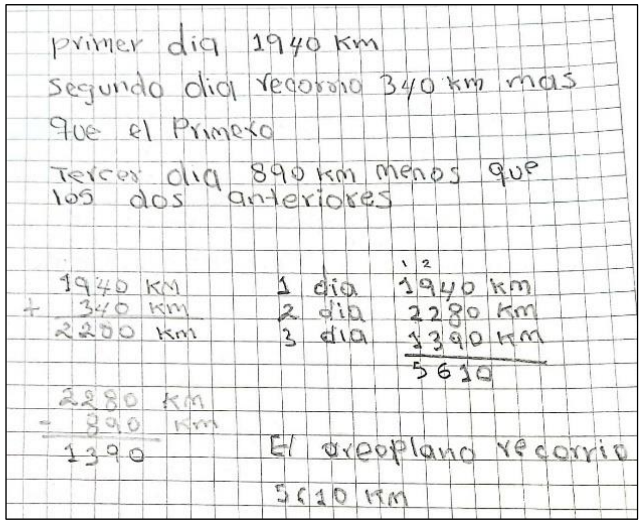
Fuente: Autoría Propia.

En cuanto al segundo ítem, se pudo observar que de los pocos estudiantes que identificaron bien los datos también reconocieron la operación correspondiente, pero la interpretación del enunciado no fue la apropiada, como se puede identificar en los procedimientos presentados de las figuras 12 y 13.

En la figura 12 el estudiante E5 selecciona adecuadamente los datos e identifica las operaciones correspondientes y presenta procedimientos correctos; aunque no corresponden a la solución, dado que no comprende las condiciones que se enuncian en el problema para llegar a una solución adecuada.

Figura 12

Solución del estudiante E5 al problema 4.

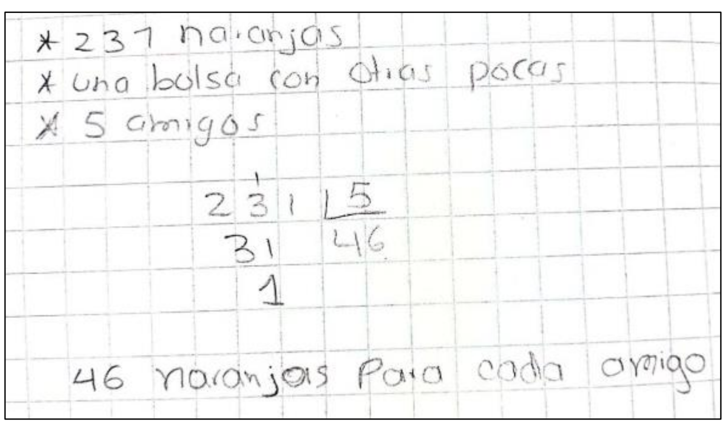


Fuente: Autoría propia.

Por otra parte, en la figura 13 se puede observar que el estudiante E29, elige de manera adecuada los datos y realiza la operación correspondiente; sin embargo, la solución presentada no tiene relación con la incógnita del problema, puesto que solo tuvo en cuenta una condición del planteamiento, lo cual genera dificultad al momento de resolver lo que demanda el problema.

Figura 13

Solución del estudiante E29 al problema 12.



Fuente: Autoría propia.

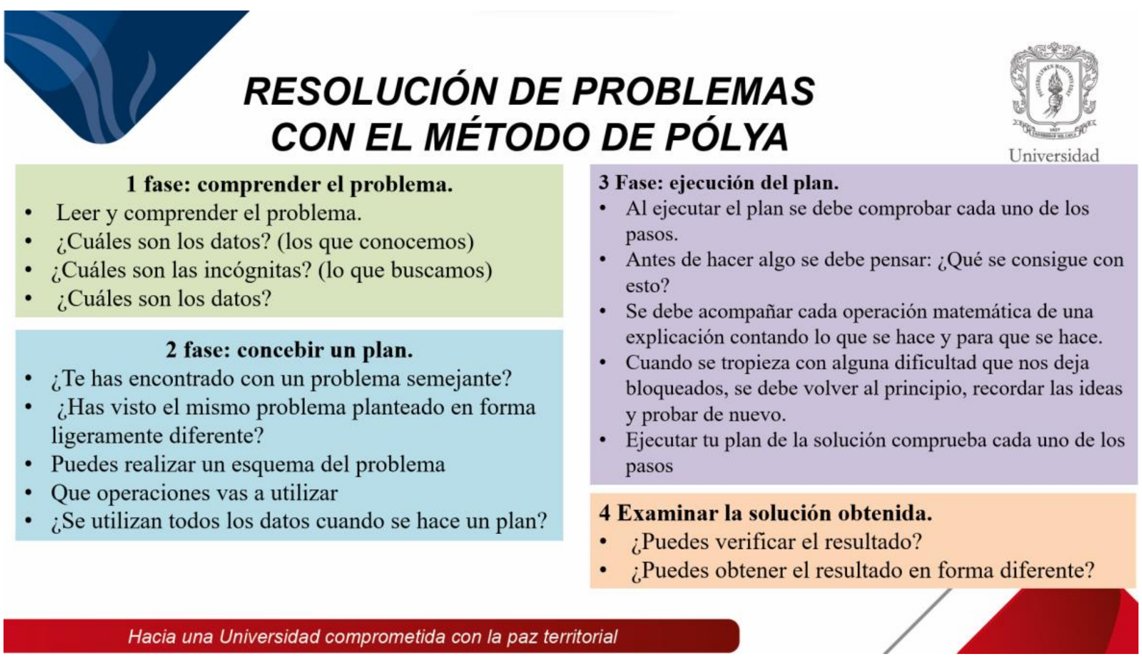
En conclusión, basándonos en las evidencias arrojadas por el pre-test se puede afirmar que las dificultades que presentan los estudiantes para resolver los problemas aditivos y multiplicativos se deben principalmente a que la mayoría no comprenden de forma adecuada el enunciado del problema y por lo tanto no identifican las variables entre los datos y la pregunta.

9.2.3 Actividad 3. Explicación del Método de George Pólya

Esta actividad es de elaboración propia y se implementó con el fin de mostrar en qué objeto de conocimiento matemático se presentó mayor dificultad al realizar la dinámica "Dados Aritméticos", además de realizar la explicación del método de George Pólya. Para el desarrollo de esta actividad se realizó una presentación de power point la cual se expuso en tres momentos. En un primer momento se presentaron fotografías de algunos procedimientos realizados por los estudiantes, donde se evidenciaron errores en la aplicación de algunas propiedades y en la resolución de problemas. En un segundo momento se explicó el método George Pólya con cada una de las fases y finalmente se presentó un problema de la guía del pre-test siguiendo el método expuesto, el cual se tuvo en cuenta para resolver problemas en las sesiones subsiguientes

Figura 14

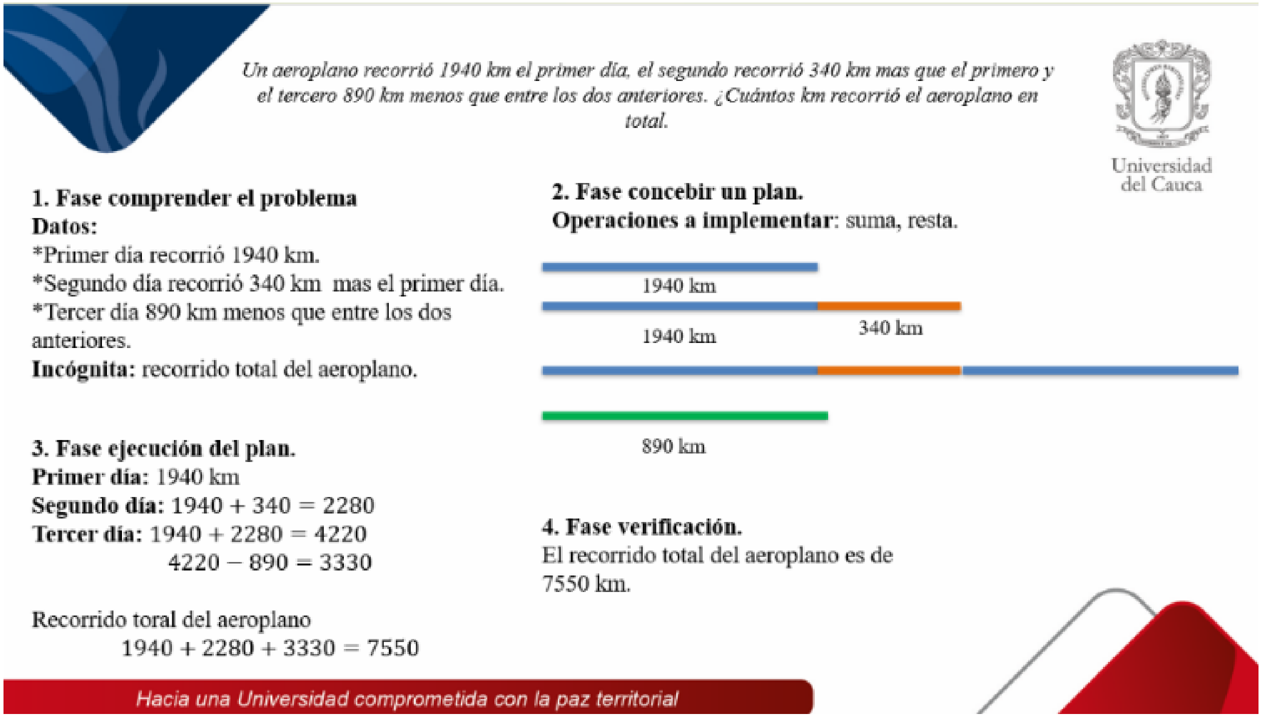
Fases del método de George Pólya.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 15

Ejemplificación del método de George Pólya.



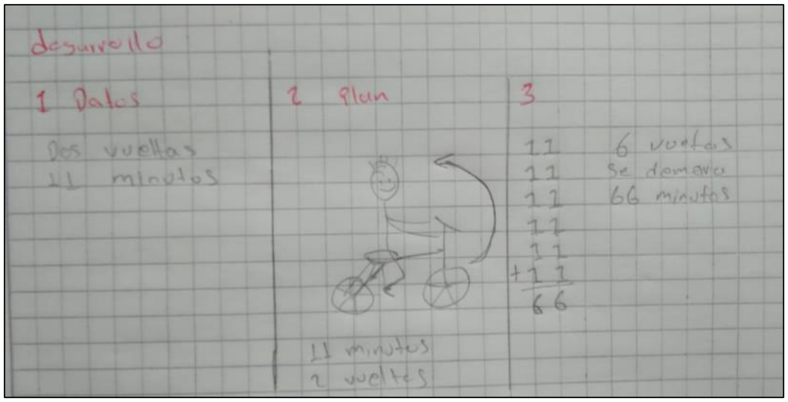
Nota. Solución del problema 4 presentado por las practicantes Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, para la exposición del método de George Pólya, se tuvo en cuenta uno de los problemas presentados en el pre-test que presentó mayor dificultad para resolverlo, que se muestra en la figura anterior, cabe señalar que para su solución se tuvieron en cuenta las fases expuestas y una serie de preguntas que ayudaron a orientar el proceso. Por ejemplo, para la explicación del problema 4 de la guía del pre-test se optó por realizar una ilustración que permite encontrar la o las operaciones necesarias para dar solución a la incógnita, seguidamente se procede a ejecutar el plan a dar respuesta y a realizar la verificación.

Terminada la exposición se propuso uno de los problemas de la guía del pre-test para los cuales se debía de utilizar el método presentado. Con base a los resultados se visualizó que algunos estudiantes no interpretaron adecuadamente la estrategia de realizar un diagrama, ya que elaboraban ilustraciones que no aportan al proceso de resolución de problemas ni permiten estructurar una solución, lo cual se puede observar en la figura 16.

Figura 16

Solución del estudiante E35 al problema 1.



Fuente: Autoría propia.

Después de visualizar tal error en los estudiantes, se procedió a ampliar y explicar con mayor detalle la primera y segunda fase. Inicialmente se indicó a los estudiantes que el comprender e identificar los datos es fundamental para continuar con la etapa posterior, en la cual debían de utilizar sus conocimientos previos, imaginación y creatividad para elaborar una estrategia que le permitiera encontrar las operaciones necesarias para resolver el problema, además se les expresó que se podían orientar con las siguientes preguntas ¿Te has encontrado con un problema semejante? ¿O has visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conoces algún problema relacionado con este? ¿Puedes decir el problema de otra forma? ¿Puedes expresarlo con tus propias palabras? Las cuales conllevan a que el estudiante aplique algunas estrategias como ensayo y error, resolver un problema similar más simple, hacer un diagrama y comparación con otros problemas.

9.2.4 Actividad 4. Desarrollo de Temáticas

Esta actividad se ha diseñado tomando como base material suministrado por las docentes titulares de la institución el cual fue modificado en algunos contenidos, así mismo se adicionaron problemas matemáticos, juegos de estrategia y además se estructuró el material de las primeras nociones de expresiones algebraicas por las practicantes que se puede encontrar en el anexo C. Cabe señalar que para las primeras temáticas se realizó un repaso, ya que eran contenidos que habían sido abordados durante la crisis sanitaria. Así pues, para el desarrollo de estas temáticas se organizaron sesiones de clase participativas utilizando diversos recursos didácticos, con el fin de generar clases más dinámicas y atractivas para los estudiantes, además se plantearon tareas para resolver durante la clase y en casa, las cuales eran socializadas por los estudiantes en un espacio de retroalimentación en la clase siguiente. Es importante mencionar que, con la implementación de los juegos, los estudiantes se mantuvieron más atentos y participativos en clase.

Figura 17

Actividades desarrolladas en las sesiones de clase

Nota. Uso de recursos didácticos y audiovisuales en las clases. Fuente: Autoría propia.

9.2.5 Actividad 5. Explorando y Descubriendo Estrategias para Ganar un Juego

El material de esta actividad fue elaborado con recursos manipulables, los cuales están descritos en diferentes buscadores académicos. El propósito de estas actividades es motivar y mejorar la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas e incrementar el trabajo cooperativo y la participación en clase, además de promover el desarrollo de estrategias de resolución de problemas como: proponer y probar hipótesis, ensayo y error, búsqueda de patrones, representaciones pictóricas y utilización de problemas similares. Lo cual permite a los estudiantes adquirir habilidades aritméticas y argumentativas en discusiones matemáticas. A continuación, se presentarán los juegos utilizados durante las sesiones de clase, en los cuales se realiza una breve descripción de cada una y posteriormente se presentan los resultados y análisis.

9.2.5.1 Las Torres de Hanói.

Este juego ha sido elegido y elaborado a partir de la descripción realizada por Latasa (2011) en el artículo de revista denominado "Juegos Matemáticos: La Torre de Hanói y los Qn Grafos". Este juego se desarrolló teniendo en cuenta tres fases. Para la primera fase se hizo una revisión histórica, entrega del material por parejas (un soporte de la torre, tres varillas, cinco discos de diferente dimensión y una hoja de respuestas), también se abordaron una serie de reglas para el desarrollo del juego las cuales se describen a continuación.

- Las piezas se trasladan de una en una.
- Sólo puedes trasladar el disco que esté arriba.
- No se puede colocar una pieza mayor sobre una menor.

Figura 18

Torres de Hanói.

Fuente: Elaboración propia.

En la segunda fase los estudiantes realizaron una exploración y comprensión del juego para su posterior desarrollo, con el fin de encontrar una estrategia ganadora, se realizaron una serie de pasos, en los cuales se le propone al estudiante jugar con uno, dos, tres, cuatro y cinco discos y realizar la respectiva gráfica de cada movimiento.

En la tercera fase se realizó una retroalimentación llevando a discusión, el cómo saber el número de movimientos mínimos para pasar cada disco de la varilla origen a la varilla destino y cuál fue la estrategia implementada. De acuerdo con lo anterior se construyó la fórmula $2^n - 1$ para determinar el número mínimo de movimientos a partir de una serie de pasos y por último se dio a conocer la estrategia ganadora, lo cual se puede encontrar con mayor detalle en la actividad 2 anexo A.

Figura 19

Estudiantes jugando en las torres de Hanói.

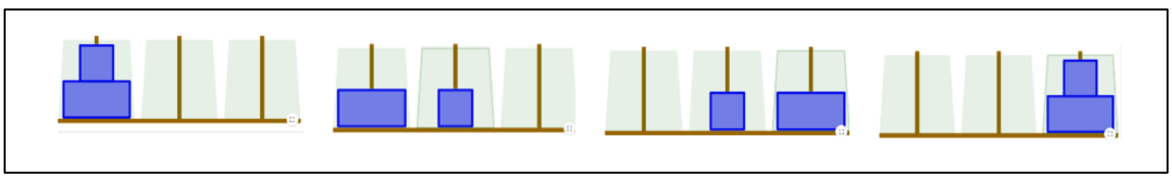
Fuente: Autoría propia.

Estrategia Ganadora: Torres de Hanói

Valderas (2018) describe que la estrategia ganadora para obtener el número mínimo de movimientos se reduce a decidir en cada paso impar a cuál de las dos pilas posibles se desplazará el disco pequeño dependiendo del número de discos. Si inicialmente se tiene un número impar de discos, el primer movimiento debe ser colocar el disco más pequeño en la pila destino, y en cada paso impar se le mueve a la siguiente pila a su izquierda (o a la pila destino, si está en la pila origen). En caso contrario, el primer movimiento debe ser colocar el disco más pequeño en la pila auxiliar, y en cada paso impar se le mueve a la siguiente pila a su derecha (o a la pila origen, si está en la pila destino).

Figura 20

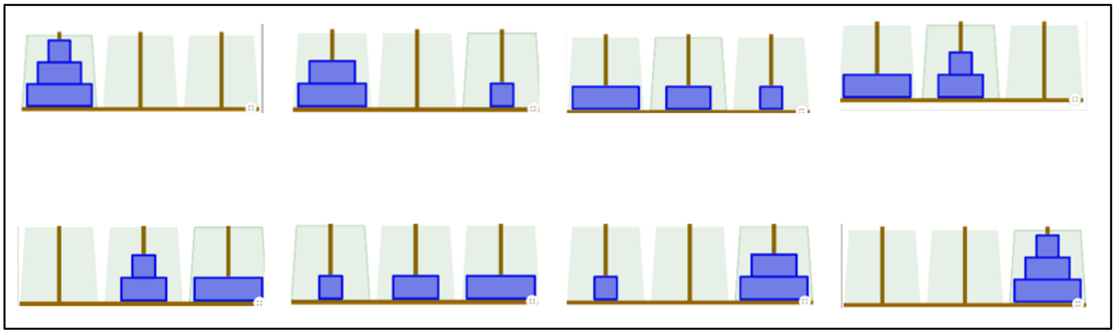
Representación de la estrategia ganadora para un número par de discos.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 21

Representación de la estrategia ganadora para un número impar de discos.



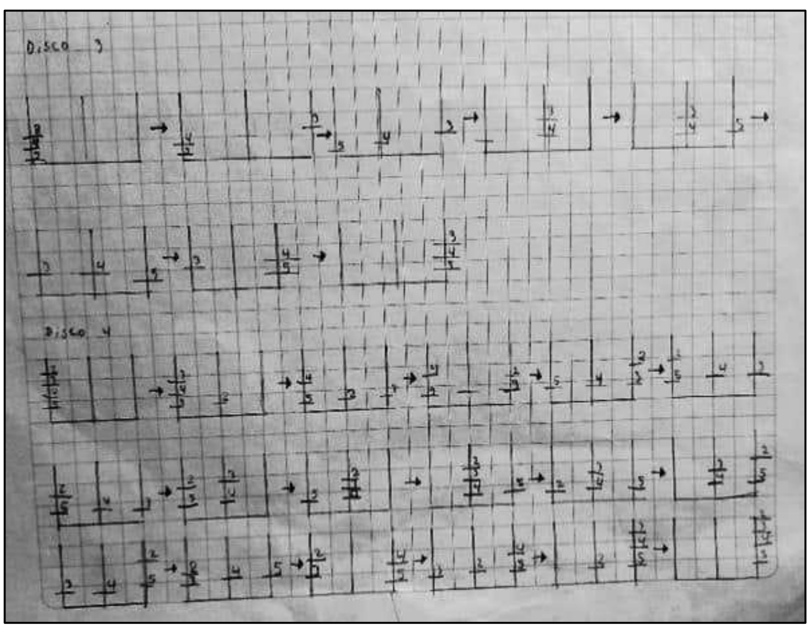
Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presentan algunos resultados relevantes propuestos por los estudiantes en el juego las torres de Hanói.

En cuanto a la comprensión se pudo observar que los estudiantes no presentaron mayor dificultad en su exploración inicial, puesto que al preguntar si alguien lo había jugado, la mayoría contestaron que sí. Por lo cual se acoplaron rápidamente a las reglas, esto se puede notar en la figura 22 que muestra la realización de uno de los gráficos que los estudiantes presentaron.

Figura 22

Gráfico presentado por los estudiantes E29 y E37.



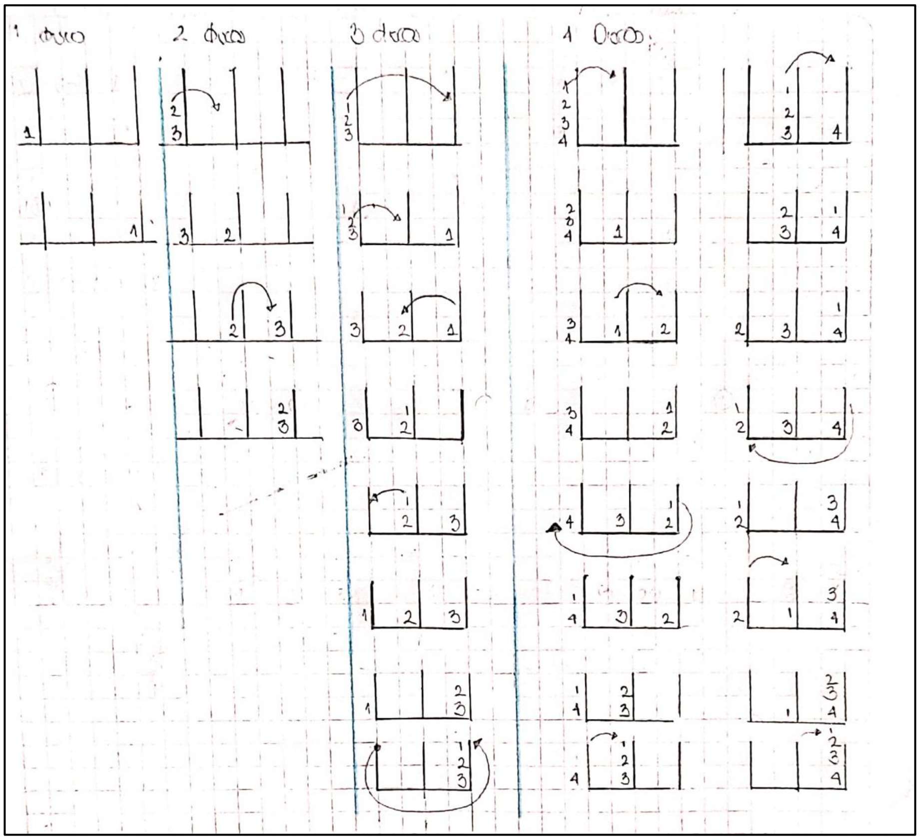
Nota. Representación de movimientos las torres de Hanói. Fuente: Autoría propia.

En la figura anterior se puede observar que los estudiantes les asignan números a los discos de mayor a menor para realizar cada gráfica, teniendo en cuenta cada una de las reglas descritas anteriormente.

De modo similar ocurrió en otros de los gráficos presentados por los estudiantes; pero en estos casos los esquemas les sirvieron para descubrir una estrategia ganadora, que permitió obtener el número mínimo de movimientos, como los que se presentan a continuación.

Figura 23

Procedimiento presentado por los estudiantes E3 y E30.

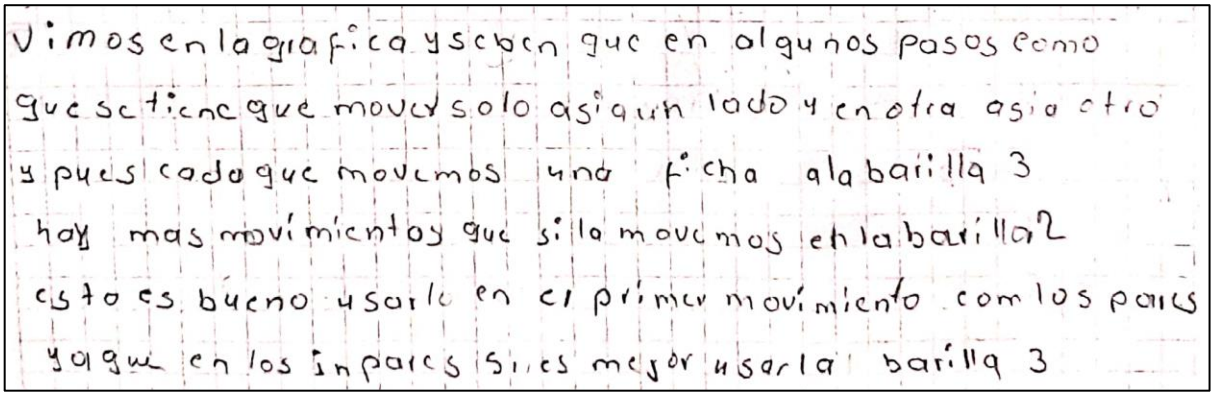


Nota. Ilustración de movimientos en la torre de Hanói. Fuente: Autoría propia.

En la figura 23 los estudiantes no realizaron una comparación como tal, puesto que ambos manejaban muy bien el juego, ya que siempre acertaban con el mínimo de movimientos. Así pues, se puede observar que los estudiantes en la gráfica optaron por observar patrones que se daban en las ilustraciones. Dando como respuesta la siguiente estrategia ganadora.

Figura 24

Estrategia presentada por los estudiantes E3 y E30.


Vimos en la grafica y seben que en algunos pasos como
que se tiene que mover solo asia un lado y en otra asia otro
y pues cada que movemos una ficha a la barilla 3
hay mas movimientos que si la movemos en la barilla 2
esto es bueno usarle en el primer movimiento con los pares
ya que en los impares si es mejor usar la barilla 3

Fuente: Autoría propia.

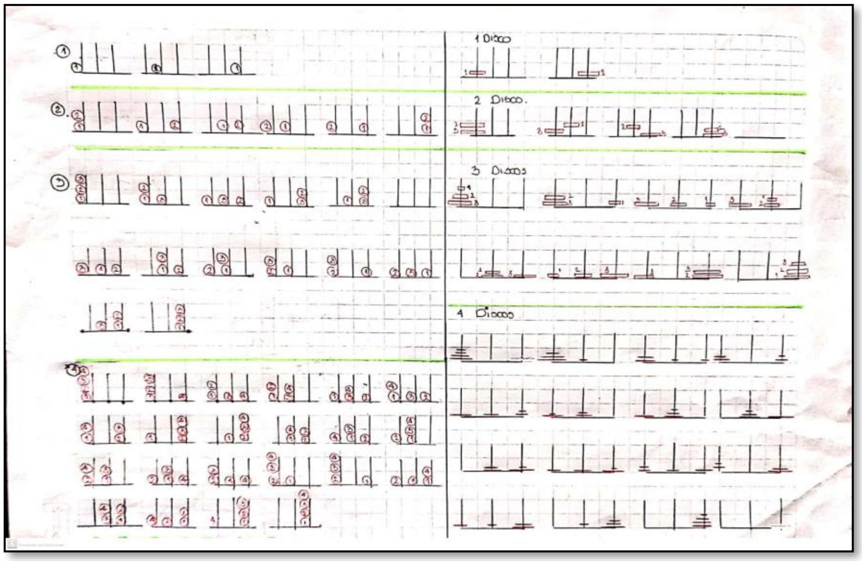
Así pues, en la estrategia ganadora que describen los estudiantes se puede observar que acertaron con parte de la estrategia ganadora que propone Valderas (2018) para lograr un mínimo de movimientos, puesto que los estudiantes E3 y E30 en la solución presentada identifican que el primer disco en los números pares debe ir en la varilla 2; mientras que en los impares el primer movimiento debe ir en la varilla 3. Además, identificaron patrones al expresar que “con algunos pasos se tiene que mover solo hacia un solo lado y en otros hacia otros” esto se pudo visualizar en el gráfico que presentaron en el que realizan flechas solo con el primer movimiento.

Cabe resaltar que en la retroalimentación los estudiantes E3 y E30, expresaron que las flechas solo representaban los movimientos del primer disco y que en el primer movimiento estaba la clave del juego, además identificaron que si se tenía una cantidad par de discos en las varillas estos se debían mover hacia la derecha; mientras que con los impares se debían mover al lado izquierdo. Por lo expuesto anteriormente se pudo observar que a los estudiantes se les dificulta plasmar mediante un escrito de manera coherente lo que expresan verbalmente, ya que en su estrategia presentada no especificaban los movimientos hacia qué dirección están (izquierda o derecha) y la cantidad de números de discos (par o impar); mientras que en la retroalimentación del juego sí lo mencionaron.

De la misma manera los estudiantes E23 y E34 realizaron las siguientes gráficas.

Figura 25

Procedimiento presentado por los estudiantes E23 y E34.

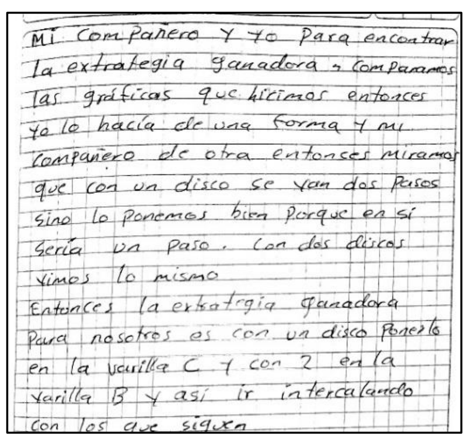


Fuente: Autoría propia.

En la figura 25 se puede visualizar dos representaciones gráficas elaboradas por los estudiantes, en el que se observa que realizaron comparaciones en sus procedimientos y propusieron una estrategia ganadora conforme a lo que lograron identificar.

Figura 26

Estrategia presentada por los estudiantes E23 y E34.



Mi Compañero y yo para encontrar
la extrategia ganadora, comparamos
las gráficas que hicimos entonces
yo lo hacía de una forma y mi
compañero de otra entonces miramos
que con un disco se van dos pasos
sino lo ponemos bien porque en sí
sería un paso. Con dos discos
vimos lo mismo
Entonces la extratgia ganadora
para nosotros es con un disco ponerlo
en la varilla C y con 2 en la
varilla B y así ir intercalando
con los que siguen

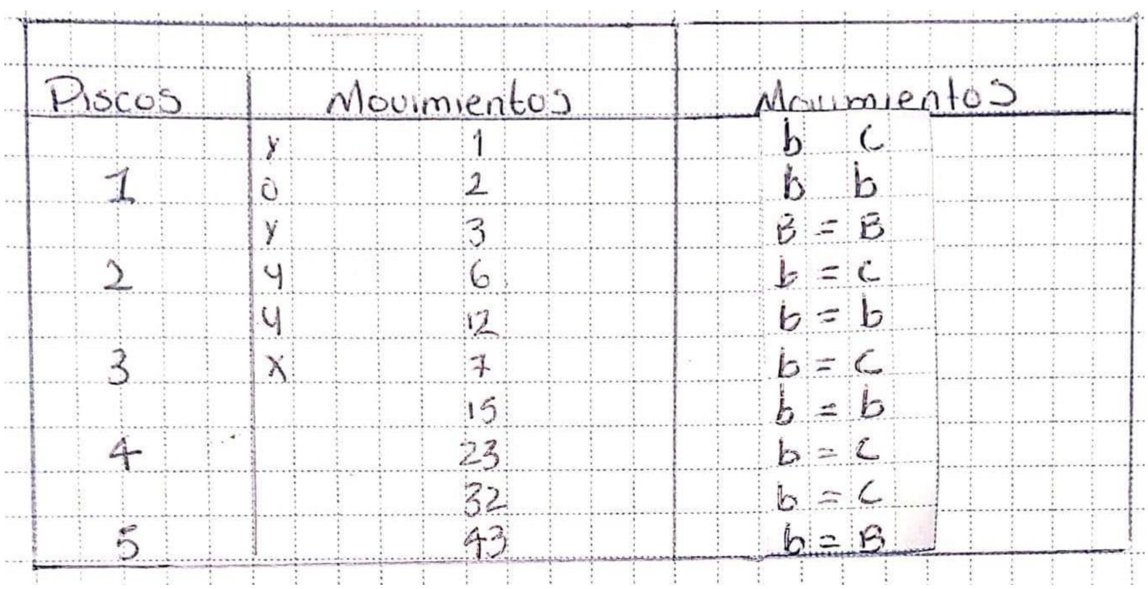
Fuente: Autoría propia.

En la figura anterior se puede observar que los estudiantes hacen explícito que las gráficas realizadas le sirvieron para realizar una comparación, lo cual les permitió determinar que el movimiento del primer disco es importante para obtener menos movimientos, evidenciando esto cuando jugaron con un disco y a partir de ello empezaron a realizar comparaciones con diferentes discos, concluyendo que cuando se tiene un disco este tendría que pasarse a la varilla C; mientras que con 2 el primer disco pasaría a la varilla B y así conjeturan que la estrategia ganadora sería ir intercalando los que siguen, por ejemplo con 3 discos el primer movimiento iría en la varilla C y con cuatro discos el primer movimiento iría en la varilla B.

Durante la retroalimentación los estudiantes E23 y E34, se dieron cuenta que lo que habían propuesto era correcto, pero que les faltaba mirar que se cumpliera para ganar siempre, ya que al salir a explicar la estrategia que proponían y ponerla a prueba se dieron cuenta que el primer movimiento si es necesario, pero aun poniendo la primera ficha bien, se podía cometer errores en los procedimientos siguientes. En el mismo sentido tenemos la propuesta de los estudiantes E5 y E11 los cuales realizaron el siguiente procedimiento.

Figura 27

Respuesta de estudiantes E5 y E11.



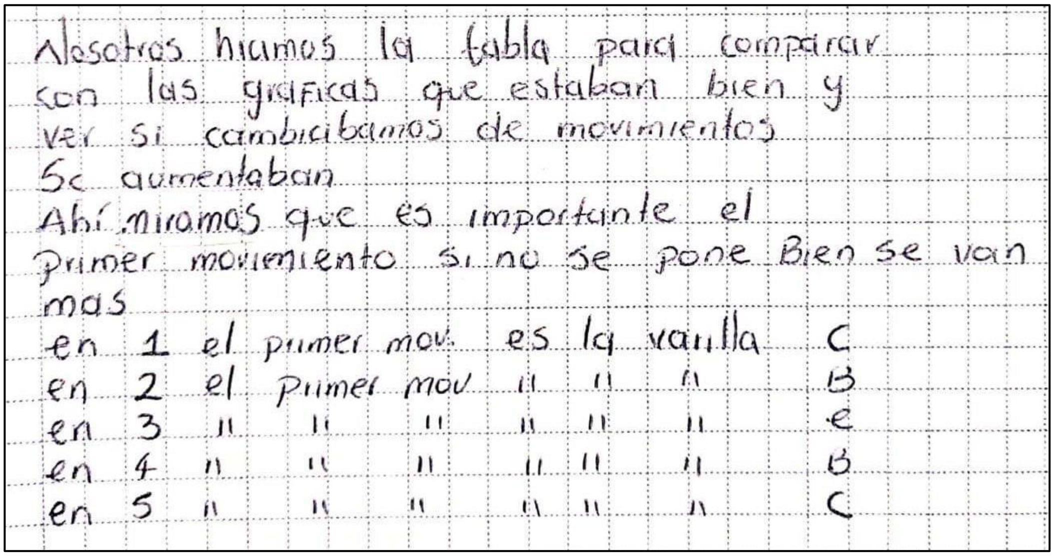
Discos	Movimientos		Movimientos
	y	1	b c
1	o	2	b b
	y	3	B = B
2	4	6	b = c
	4	12	b = b
3	x	7	b = c
		15	b = b
4		23	b = c
		32	b = c
5		43	b = B

Fuente: Autoría propia.

La figura 27 muestra que los estudiantes realizaron una tabulación, en el cual observaron patrones y efectuaron comparaciones entre las gráficas que durante el juego pudieron identificar, lo cual les permitió proponer una estrategia ganadora y además dedujeron que el primer movimiento es muy importante.

Figura 28

Estrategia presentada por los estudiantes E5 y E11.



Nosotros hicimos la tabla para comparar
con las graficas que estaban bien y
ver si cambiabamos de movimientos
se aumentaban
Ahí miramos que es importante el
primer movimiento si no se pone Bien se van
mas
en 1 el primer mov. es la varilla C
en 2 el primer mov " " " B
en 3 " " " " " " C
en 4 " " " " " " B
en 5 " " " " " " C

Fuente: Autoría propia.

De la figura 28 se puede mencionar que al momento que el estudiante decidió realizar comparaciones entre las gráficas y el registro en tablas, lo conllevo a determinar una estrategia para el primer movimiento, dependiendo el número de discos. Al respecto conviene decir que el implementar herramientas de recolección de la información es muy importante para luego hacer aportes significativos al tema que se encuentra en discusión.

El grupo de estudiantes durante la explicación de su estrategia ganadora expresaron que así se podía seguir con el número de discos que quisieran intercalando las varillas B y C. A lo que algunos de sus compañeros expresaron que lo que habían propuesto se podía escribir de la siguiente manera, si el número de discos es impar el primer movimiento iría a la C; mientras que, para una cantidad par, el primer movimiento iría a la B, por ejemplo 1,3 y 5 son impares, por ende, el primer disco iba a la C según la tabla y como 2 y 4 son pares su primer movimiento lo ubicarían en la B. A lo que otro estudiante respondió que no era con el número de discos que se quisiera porque con 64 discos no lo habían podido resolver aun, lo que permitió evidenciar que los estudiantes estuvieron atentos al momento de la lectura sobre la historia de las torres de Hanói.

Después de exponer los resultados más relevantes, los estudiantes tenían la curiosidad de saber cómo se sabía cuál era el mínimo de movimientos dependiendo el número de discos, por lo que se prosiguió con la explicación y construcción de la fórmula $2^n - 1$. Para ello se realizó lo propuesto en la actividad 2 del anexo B.

Finalmente se prosiguió a darle valores a n (donde n es el número de discos) para que los estudiantes practicarán potenciación y tuvieran una idea de lo que se iban a enfrentar más adelante con lo de valor numérico de una expresión algebraica. De ello se pudo visualizar que al desarrollar los ejercicios utilizando la fórmula $2^n - 1$, los estudiantes tendieron a confundirse en lo siguiente, por ejemplo:

Si se tiene para $n = 3$ ellos hacían lo siguiente.
$2^3 - 1 = 2 - 1$ = 1*1*1 =1

Otro error que se visualizó fue el siguiente.
$2^4 - 1 = 8 - 1 = 7$

Estos errores en las potencias pudieron ser falta de apropiación de las propiedades y la jerarquía de las operaciones, por ello en las siguientes sesiones se trabajaron con algunos ejercicios relacionados con las propiedades de la potenciación en combinación con otras operaciones.

9.2.5.2 Círculo de las Monedas.

Este juego ha sido elegido y elaborado a partir de la descripción realizada por Gardner (2008) en su libro titulado “Matemáticas para Divertirse” El juego se abordó teniendo en cuenta tres momentos. El primer momento se denominó exploremos el juego, para el cual se entregó material en grupos de cuatro estudiantes (10 círculos numerados y una plantilla de registro) posteriormente, se dieron a conocer las reglas e instrucciones para su desarrollo, que se describen a continuación:

- Cada jugador o pareja puede retirar, en su turno, 1 o 2 fichas, pero si se sacan dos estas deben estar una junto a la otra, sin que haya entre ellas ninguna otra ficha o espacio vacío según quiera.
- Gana el jugador que retira la última ficha.

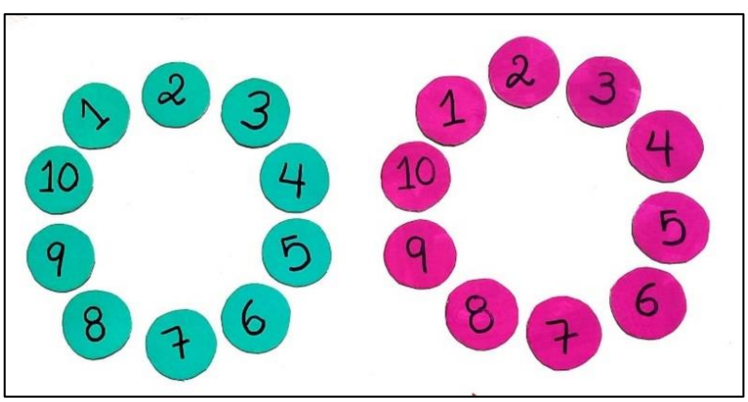
También, se indicó que se llevarían a cabo 4 partidas y en el inicio de cada una de ellas debían alternarse entre ambos jugadores. Para registrar las observaciones y estrategias (ganar o empate) se les otorgó una plantilla y dos colores para llevar un control detallado de las jugadas, para un análisis posterior.

Además, para tener una mejor comprensión en los escritos propuestos por los estudiantes, se procedió a explicar que para especificar el número de cadenas en el círculo y cuántas monedas hay en cada una de ellas se hablará de configuraciones. En la notación se utilizarán guiones para separar la cantidad de monedas en cada cadena. Así por ejemplo las configuraciones 2-2-1 significa que tienes tres cadenas, dos de dos monedas y una sola de una moneda.

El segundo momento se denominó juguemos y respondamos, en el cual se desarrolló el juego y se propuso una serie de preguntas orientadoras entre las cuales están: ¿Quién gana el juego, la pareja que comienza o la que juega en segundo lugar? ¿Por qué?, ¿Cómo habría que jugar para ganar? Las cuales permiten al estudiante construir posibles estrategias. Para finalizar se propuso a los estudiantes un espacio de reflexión y construcción de una estrategia ganadora. Este juego se encuentra con más detalle en la actividad 4 del anexo B.

Figura 29

Material del juego círculo de las monedas.



Fuente: Elaboración propia.

Estrategia Ganadora:

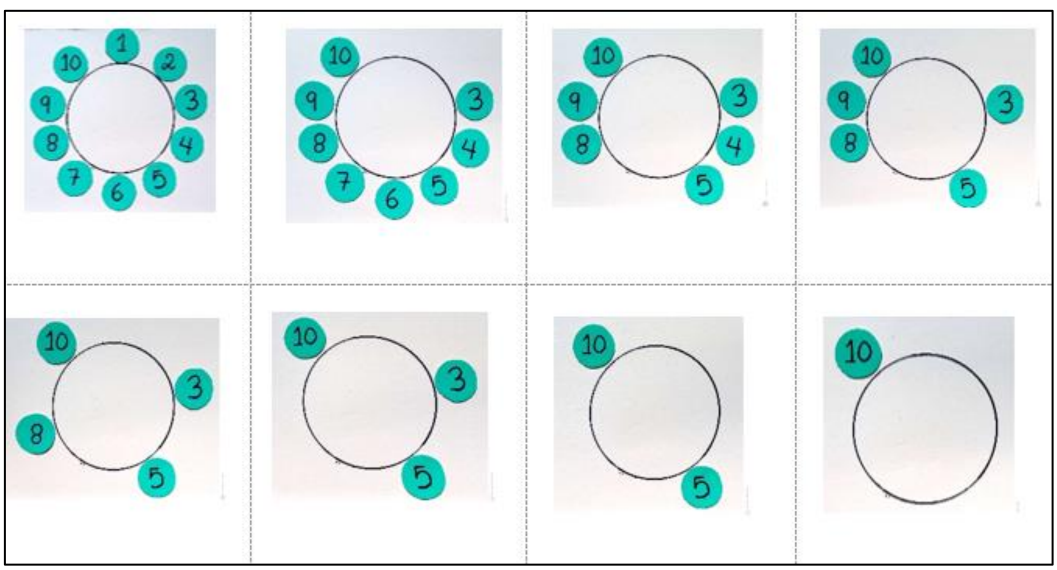
Gardner (2008) describe la siguiente estrategia ganadora.

> Después de que el jugador que hace el primer movimiento haya retirado una o dos monedas, las monedas restantes forman una cadena curva con dos extremos. Si esta cadena contiene un número impar de monedas, el jugador que hace el segundo movimiento toma la moneda del centro. Si contiene un número par, toma las dos monedas del centro. En ambos casos deja dos cadenas separadas de igual longitud. A partir de este momento, cualquier cosa que su oponente tome de una cadena, duplica el movimiento tomando una o dos monedas de la otra cadena. (p. 212)

De acuerdo con la estrategia descrita anteriormente se deduce que quien toma el segundo turno ganará la partida del juego siempre y cuando no cometa ningún error en el momento de realizar cada jugada.

Figura 30

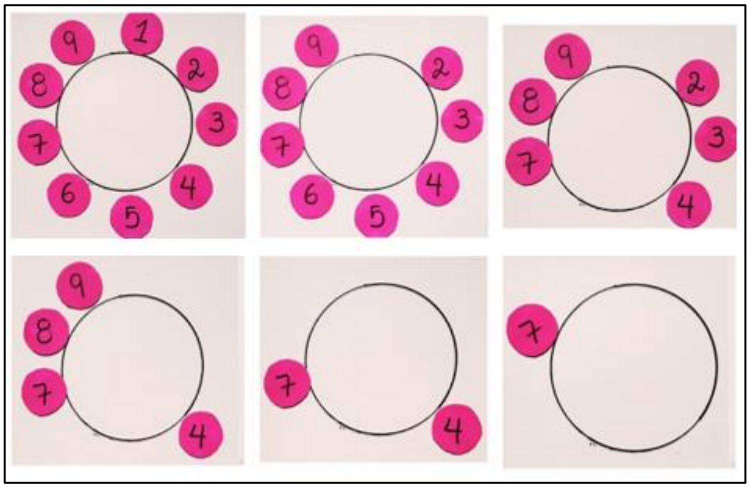
Estrategia ganadora círculo de las monedas.



Nota. La figura muestra la representación de la estrategia ganadora cuando se tiene un número par de monedas. Fuente: Elaboración propia.

Figura 31

Estrategia ganadora círculo de monedas.



Nota. La figura muestra la representación de la estrategia ganadora cuando se tiene un número impar de monedas. Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presentarán los resultados más sobresalientes realizados por los estudiantes durante el desarrollo de toda la actividad.

Pero antes de presentar los resultados se comentará en un pequeño párrafo, parte del preámbulo del juego círculo de las monedas, el cual se inició con la pregunta ¿Has escuchado acerca del juego círculo de las monedas? A lo que respondieron de manera corta que no, en vista de que los estudiantes no tenían conocimiento del juego las docentes en formación prosiguieron a comentar de qué se trataba el juego, cuáles eran las reglas, como se llenaría la plantilla de registro, además de explicar el término de cadenas y configuraciones, lo anterior se explicó con un ejemplo de una partida del juego. Aquí vale la pena resaltar que tanto la plantilla como las monedas tenían un número con el fin de facilitar el registro y mejor estructuración de la estrategia ganadora.

Posteriormente los estudiantes dieron inicio al juego siguiendo las reglas antes mencionadas, como se puede observar en la figura 32.

Figura 32

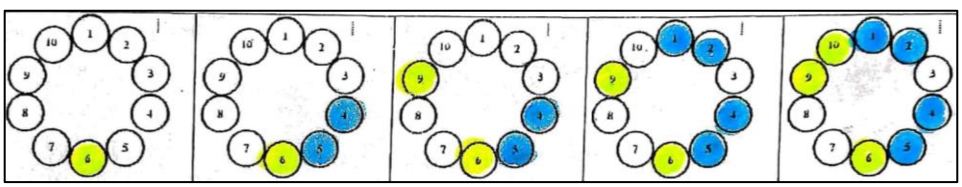
Estudiantes jugando al círculo de las monedas.

Fuente: Autoría propia.

Después de varias partidas se propuso buscar una estrategia ganadora orientándose con preguntas. Así pues, en la siguiente figura se puede observar una partida del juego de los estudiantes E5, E8, E15 y E17 con cada uno de los movimientos realizados, iniciando la pareja E5 y E15.

Figura 33

Registro círculo de las monedas de los estudiantes E5, E8, E15 y E17.

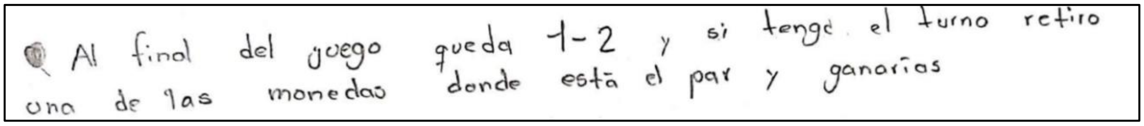


Fuente: Autoría propia.

Con respecto a la figura 33 se puede notar que los estudiantes E5 y E15 iniciaron el juego retirando una sola moneda (6), luego sus oponentes tomaron dos monedas (5 y 4), nuevamente E5 y E15 sacaron una sola moneda (9), pero en este caso dejando el juego en dos cadenas, una de dos monedas y la otra de cuatro monedas (2- 4) y así sucesivamente los estudiantes continuaron el juego, hasta llegar a una configuración de dos cadenas (1 - 2), para el cual los estudiantes E8 y E17 determinaron una estrategia como se presenta en la siguiente figura.

Figura 34

Estrategia de los estudiantes E8 y E17.

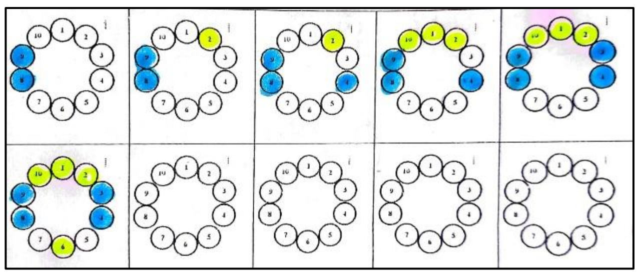

Al final del juego queda 1-2 y si tengo el turno retiro
una de las monedas donde está el par y ganarías

Fuente: Autoría propia.

Seguidamente los estudiantes realizaron otra partida, pero en este caso iniciando los estudiantes E8 y E17, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 35

Registro círculo de las monedas de los estudiantes E5, E8, E15 y E17.

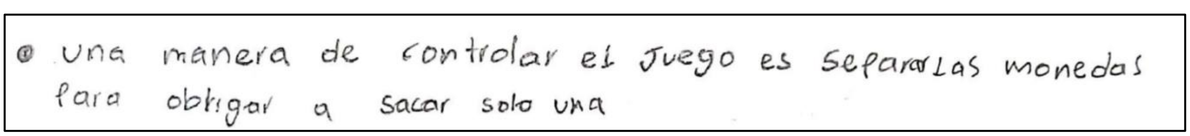


Fuente: Autoría propia.

En cuanto a este juego presentado los estudiantes E5 y E15 determinaron una manera de ganar el juego, mencionando que “una manera de controlar el juego es separar las monedas para obligar a sacar solo una” en efecto, en el juego se puede visualizar que, al quedar una cadena con tres monedas, la pareja que tiene el turno sacaría la moneda del medio y de esta manera garantizando que ganará.

Figura 36

Estrategia de los estudiantes E5 y E15.

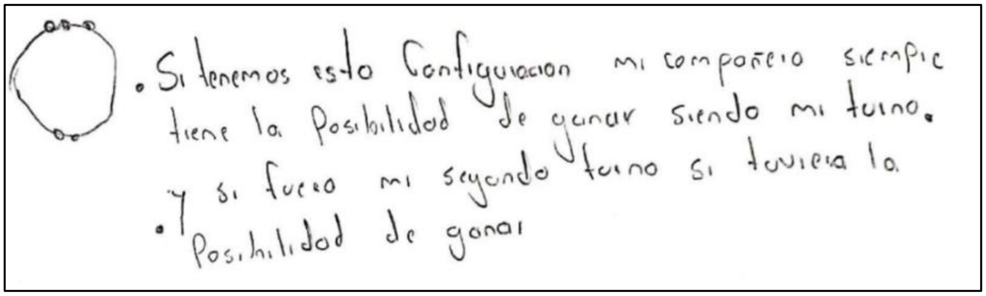

una manera de controlar el Juego es separarLas monedas
para obligar a sacar solo una

Fuente: Autoría propia.

Por otra parte, en la figura 37 se puede observar una estrategia presentada por los estudiantes E1 y E9 para la configuración (3 – 2). Dando por finalizado el juego ya que identificaron quien podría ganar si se juega bien.

Figura 37

Estrategia de los estudiantes E1 y E9.



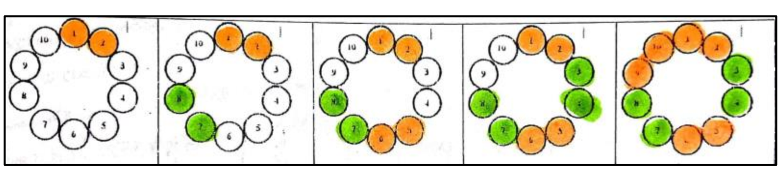
Nota. Fuente: Autoría propia.

De lo anterior puede deducirse que el llevar el juego a un número menor de monedas es fácil determinar quién va a ganar, siempre y cuando se realicen las jugadas correspondientes, es así como los estudiantes analizaron el juego de atrás hacia adelante, permitiéndoles determinar cuáles jugadas pueden hacerse para ganar según sea el turno.

A medida que iba avanzando el juego los estudiantes, trataban de buscar algunas regularidades y pautas para poder ganar siempre. En ese sentido, el estudiante E3 mencionó que tenía una estrategia para el juego con diez monedas y que funcionaria siempre y cuando su oponente jugará de la misma manera, es decir jugando simétricamente. Por ejemplo, si el que inicia saca una moneda su oponente debería de sacar una también hasta terminar el juego, ganando el que juega de segundo, porque el número de movimientos es par. Por otra parte, si el juego se da sacando dos monedas ganaría quien inicia, porque el número de movimientos es impar. Cabe resaltar que en la estrategia propuesta por el estudiante se estaría jugando simétricamente, como la propone Gardner (2008) en su estrategia ganadora que se trata de imitar las jugadas del otro jugador. Lo anterior se puede visualizar en las siguientes figuras.

Figura 38

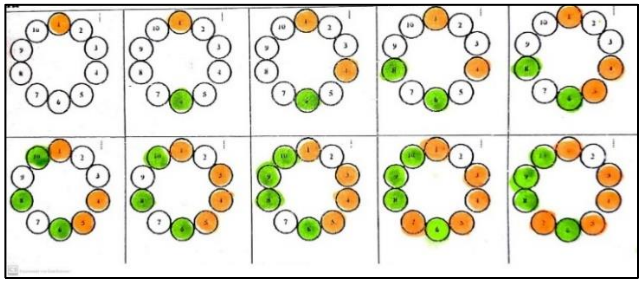
Estrategia del estudiante E3.



Fuente: Autoría propia.

Figura 39

Estrategia del estudiante E3.

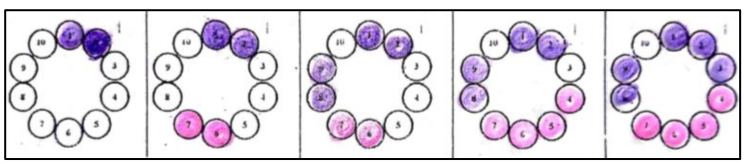


Fuente: Autoría propia.

Por otro lado, los estudiantes E6, E11, E33 y E37 presentaron una estrategia para una configuración en particular que identificaron en una de las partidas que realizaron como la que se muestra en la figura 40.

Figura 40

Registro círculo de las monedas de los estudiantes E6, E11, E33 y E37.

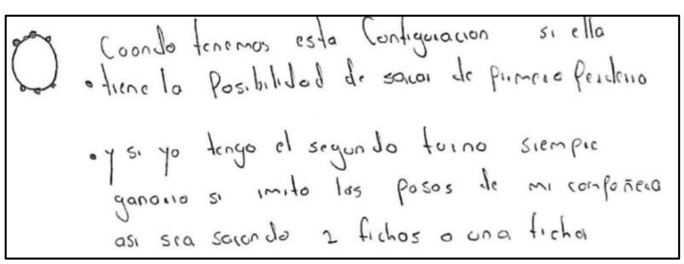


Fuente: Autoría propia.

De acuerdo con la imagen, se puede observar que los estudiantes procedieron a jugar simétricamente, en el cual el segundo jugador llevaba el juego a dos cadenas con la misma cantidad de monedas. A partir de este juego los participantes dedujeron dos estrategias para cuando se tiene la configuración (3 – 3).

Figura 41

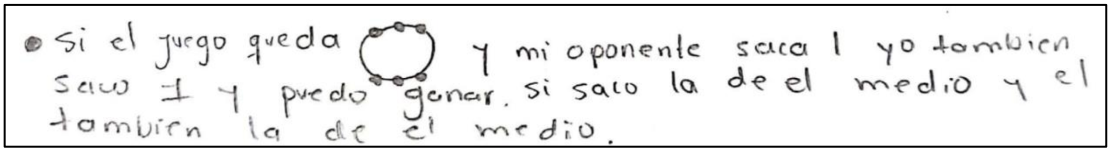
Estrategia de los estudiantes E6 y E11.



Fuente: Autoría propia.

Figura 42

Estrategia de los estudiantes E33 y E37.



Fuente: Autoría propia.

Después de haber realizado varias partidas se dio por terminada la actividad y se abrió un espacio de diálogo, en el cual los estudiantes expusieron sus estrategias que habían identificado, además dieron respuesta a la pregunta que se les realizó durante el juego ¿Quién gana el juego, la pareja que comienza o la que juega en segundo lugar? A lo que respondieron que el que juega de segundo siempre gana si hace los movimientos pertinentes, ya que en varias ocasiones del juego terminaba ganando quien jugaba de segundo. Por último, las practicantes complementaron el diálogo con la estrategia que propone Gardner (2008), aunque ya había sido identificada por algunos de los estudiantes.

Finalmente, se pudo evidenciar que los estudiantes acogieron el juego y disfrutaron de él, además de que interactuaron con sus compañeros y contrincantes buscando una estrategia que les permitiera ganar. Así pues, se puede resaltar la importancia de incluir los juegos en el aula para generar un ambiente dinámico y permitiendo que sea el estudiante el autor de su propio conocimiento.

9.2.5.3 La Regla de Herón (Métricas).

A partir de la descripción realizada por Recalde (2018) en su libro titulado lecturas de historia de las matemáticas en el capítulo las raíces del álgebra: Diofanto y Al-Khowarizmi, específicamente en las contribuciones matemáticas de Herón de Alejandría, se optó por estructurar un juego el cual consta de una serie de pasos que el participante debe seguir para encontrar una aproximación de una raíz cúbica de un número. El juego se realizó en tres momentos: en un primer momento, se hizo una revisión histórica sobre las contribuciones de Herón para el cálculo de raíces cúbicas, luego se realizó un ejemplo para explicar cada uno de los pasos establecidos en el juego y posteriormente se entregó el material a cada estudiante (una hoja impresa, calculadora), en un segundo momento los estudiantes prosiguieron a desarrollar el juego individualmente, siguiendo las pautas establecidas y para terminar se realizó una socialización donde los estudiantes expresaban las dificultades presentadas en el desarrollo de la actividad.

Estrategia Ganadora

Recalde (2018) describe en su libro una serie de pasos para realizar una aproximación de una raíz cúbica con la regla de Herón y estas considerándose como la estrategia. Así pues, los estudiantes seguirán estos pasos u orientaciones y llegarán a la construcción requerida, lo cual serán verificados calculando la raíz cúbica del número que eligieron con la fórmula habitual $\sqrt[3]{a}$ y serán comparados con los resultados obtenidos al aplicar dicha estrategia, ganando el estudiante que realice más rápido las cuentas y que estén correctamente.

Tabla 9

Cálculo de raíces cúbicas

Pasos	**Indicaciones**	**Ejemplo**	**Números a elegir** $\boldsymbol{4, 18, 39, 48, 55, 60, 180.}$
1	Elige uno de los números. Luego calcula los cubos anterior y posterior al número elegido. $\boldsymbol{a}$ = Número elegido. $\boldsymbol{b}$ = Cubo anterior al número elegido. $\boldsymbol{c}$ = Cubo posterior al número elegido. $\boldsymbol{b < a < c}$	$\boldsymbol{a = 100}$ $\boldsymbol{b = 64 = 4^3}$ $\boldsymbol{c = 125 = 5^3}$ $\boldsymbol{64 < 100 < 125}$	
2	Determina las diferencias: $\boldsymbol{c - a = d}$, expresa el resultado en potencia. $\boldsymbol{a - b = 2}$	$\boldsymbol{125 - 100 = 25 = 5^2}$ $\boldsymbol{100 - 64 = 36}$	
3	Realiza el producto $\boldsymbol{e \times d = r, d}$ es la base.	$\boldsymbol{35 \times 5 = 180}$	
4	Realiza la suma $\boldsymbol{a + r = s}$	$\boldsymbol{100 + 180 = 280}$	
5	Divide $\boldsymbol{\frac{r}{s} = p}$, simplificar.	$\boldsymbol{\frac{180}{280} = \frac{90}{140} = \frac{45}{70} = \frac{9}{14}}$	
6	Añade el valor $\boldsymbol{p}$ a la raíz cúbica de $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{p + b = q}$	$\boldsymbol{\frac{9}{14} + 4 = \frac{9 + 56}{14} = \frac{65}{14} \approx 4.6}$	
7	De esta forma se determina la raíz cúbica de $\boldsymbol{a}$ con una aproximación.	$\boldsymbol{\sqrt[3]{100} = 4.6}$	

Fuente: Elaboración propia.

Figura 43

Estudiantes resolviendo la plantilla del juego la regla de Herón.

Fuente: Autoría propia.

Antes de presentar los resultados, es importante resaltar que este juego u método para calcular la aproximación de una raíz cúbica se diseñó con el fin de dar a conocer a los estudiantes, el cómo se procedía a realizar los cálculos en años anteriores para obtener una aproximación de una raíz mediante operaciones aritméticas, además de potenciar algunos conceptos matemáticos.

Ahora bien, para el desarrollo de la actividad fue importante comentar sobre algunas contribuciones matemáticas en especial las realizadas por Herón y el impacto que han tenido en nuestra sociedad, siendo útiles en diversos campos y en las actividades cotidianas.

Seguidamente se presentó un ejemplo con el método de Herón en el cual los estudiantes participaron activamente y se familiarizaron con la actividad, además se les indicó que este método solo funcionaba con algunos números, lo cual no era un método generalizado. Por otra parte, hay que resaltar que durante esta presentación se evidencio que algunos de los estudiantes se les dificulta realizar operaciones con fraccionarios, por lo que se procedió a realizar algunos ejemplos para contextualizarlos, dado que en la actividad propuesta se encuentran este tipo de operaciones. Terminada la intervención se hizo entrega del respectivo material y los estudiantes comenzaron a trabajar sobre el formato entregado, pasado un tiempo algunos estudiantes expresaron que se les dificulta realizar el primer paso, puesto que no identifican cuál era el cubo anterior y posterior del número elegido, a lo que se procedió a compartir una lista de algunos cubos para poder continuar con la actividad.

Así pues, en la figura 44 se muestra que en el estudiante E7 sigue todos los pasos que se requieren para llegar a la aproximación de la raíz cúbica del número seleccionada y de esta manera alcanzando el objetivo de la actividad.

Figura 44

Solución presentada por el estudiante E7.

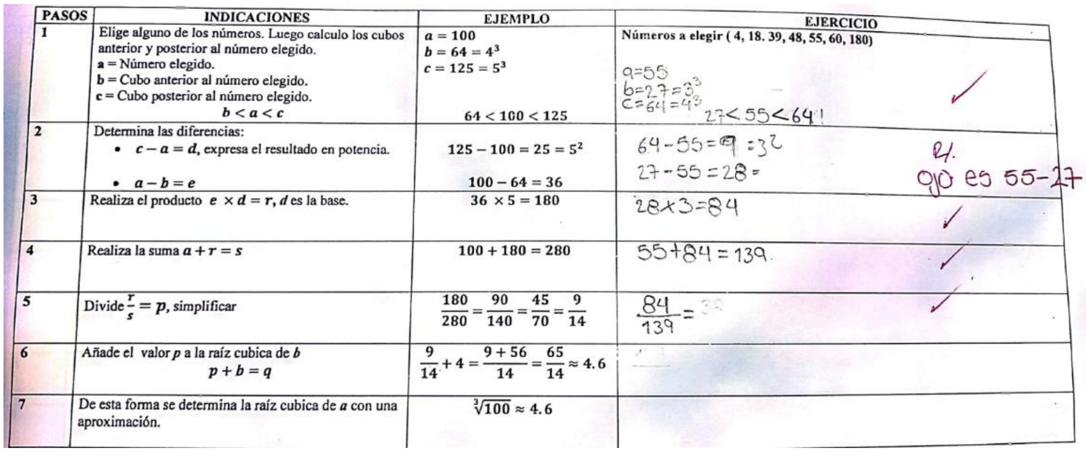
Elige alguno de los números. Luego calculo los cubos anterior y posterior al número elegido. a = Número elegido. b = Cubo anterior al número elegido. c = Cubo posterior al número elegido. $b < a < c$	$a = 100$ $b = 64 = 4^3$ $c = 125 = 5^3$ $64 < 100 < 125$	Números a elegir (4, 18, 39, 48, 55, 60, 180) $a = 18$ $b = 8 = 2^3$ $8 < 18 < 27$ $c = 27 = 3^3$
Determina las diferencias: • $c - a = d$, expresa el resultado en potencia. • $a - b = e$	$125 - 100 = 25 = 5^2$ $100 - 64 = 36$	$27 - 18 = 09 = 3^2$ $18 - 8 = 10$
Realiza el producto $e \times d = r$, d es la base.	$36 \times 5 = 180$	$10 \times 3 = 30$
Realiza la suma $a + r = s$	$100 + 180 = 280$	$18 + 30 = 48$
Divide $\frac{r}{s} = p$, simplificar	$\frac{180}{280} = \frac{90}{140} = \frac{45}{70} = \frac{9}{14}$	$\frac{30}{48} = \frac{15}{24}$
Añade el valor p a la raíz cubica de b $p + b = q$	$\frac{9}{14} + 4 = \frac{9+56}{14} = \frac{65}{14} \approx 4.6$	$\frac{15}{24} + 2 = \frac{15+48}{24} = \frac{63}{24} = 2{,}6$
De esta forma se determina la raíz cubica de a con una aproximación.	$\sqrt[3]{100} \approx 4.6$	$\sqrt[3]{18} = 2{,}6$

Fuente: Autoría propia.

Por otra parte, en la figura 45 se tiene el resultado presentado por el estudiante E17, en el cual se observa que no realizó el ejercicio completamente, para el cual justificó que no lo había terminado porque no comprendió la última parte y que además se le dificulta realizar operaciones con fracciones. Otro aspecto que se puede señalar es cómo está efectuando la resta, en el cual se puede evidenciar que no tiene claridad en cuanto al término de minuendo y sustraendo.

Figura 45

Solución presentada por el estudiante E17.



PASOS	INDICACIONES	EJEMPLO	EJERCICIO
1	Elige alguno de los números. Luego calculo los cubos anterior y posterior al número elegido. **a** = Número elegido. **b** = Cubo anterior al número elegido. **c** = Cubo posterior al número elegido. $b < a < c$	$a = 100$ $b = 64 = 4^3$ $c = 125 = 5^3$ $64 < 100 < 125$	Números a elegir (4, 18. 39, 48, 55, 60, 180) $a=55$ $b=27=3^3$ $c=64=4^3$ $27<55<64$ ✓
2	Determina las diferencias: • $c - a = d$, expresa el resultado en potencia. • $a - b = e$	$125 - 100 = 25 = 5^2$ $100 - 64 = 36$	$64-55=9=3^2$ $27-55=28=$ R/. ojo es 55-27.
3	Realiza el producto $e \times d = r$, d es la base.	$36 \times 5 = 180$	$28 \times 3 = 84$ ✓
4	Realiza la suma $a + r = s$	$100 + 180 = 280$	$55+84=139$ ✓
5	Divide $\frac{r}{s} = p$, simplificar	$\frac{180}{280} = \frac{90}{140} = \frac{45}{70} = \frac{9}{14}$	$\frac{84}{139} =$ ✓
6	Añade el valor p a la raíz cubica de b $p + b = q$	$\frac{9}{14} + 4 = \frac{9+56}{14} = \frac{65}{14} \approx 4.6$	
7	De esta forma se determina la raíz cubica de a con una aproximación.	$\sqrt[3]{100} \approx 4.6$	

Fuente: Autoría propia.

Para terminar la actividad se propuso a los estudiantes realizar un diálogo para que comentaran en cuál de los pasos habían presentado mayor dificultad, a lo que respondieron que habían tenido problema en elegir los cubos y algunos estudiantes en realizar las operaciones con fracciones; por otra parte, se preguntó qué aprendizajes les deja la dinámica, a lo que contestaron que era sorprendente de cómo habían sido las matemáticas en la antigüedad y como se podía calcular raíces siguiendo unos pasos aritméticos.

Aquí vale la pena mencionar que la estrategia de este juego está encaminada a que el estudiante siga cada uno de los pasos para llegar a un resultado, puesto que si omite alguno la aproximación de la raíz no se dará, de ahí la importancia de seguir instrucciones. Finalmente, esta actividad de una u otra manera fue acogida por los estudiantes, permitiéndoles conocer métodos de calcular raíces y, además de compartir aprendizajes con los compañeros.

9.2.5.4 Cerrar Quince

Esta actividad fue elaborada teniendo en cuenta la descripción presentada por Edo et al. (2008) en su artículo de revista titulado: Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. Para el desarrollo del juego se consideraron tres momentos: En un primer momento se realizó la presentación y exploración mediante algunas preguntas al grupo en general para saber si tenían conocimiento del juego. En un segundo momento se expuso a los estudiantes el orden del juego y las reglas, para ello se organizan en parejas, posteriormente se hizo entrega del material que constaba de un tablero con cuadrícula 3*3 y 9 fichas que contenían operaciones de potenciación y radicación, las cuales los estudiantes debían resolver para obtener números del 1 al 9 y así poder dar inicio al juego teniendo en cuenta las siguientes reglas:

- Por turnos cada jugador o equipo elige uno de los números del 1 al 9 que será ubicado en la cuadrícula.
- Cada número puede elegirse sólo una vez.
- Gana el primer jugador en elegir 3 números que sumen 15.
- Acaba en empate si se han elegido todos los números y nadie puede sumar 15.

En un tercer momento se entregó una copia con una serie de preguntas que los guían a la construcción de una estrategia ganadora. A continuación, se describen algunas: ¿Es una ventaja empezar de primero o segundo?, escribe todas las combinaciones distintas de 3 números que sumen 15, ¿qué números aparecen en las combinaciones? ¿conoces algún juego parecido a este? Posterior a ello se realiza la retroalimentación teniendo en cuenta las preguntas antes mencionadas. El juego se encuentra con mayor detalle en la actividad 4 del anexo B.

Figura 46

Explicación y desarrollo del juego cerrar quince.

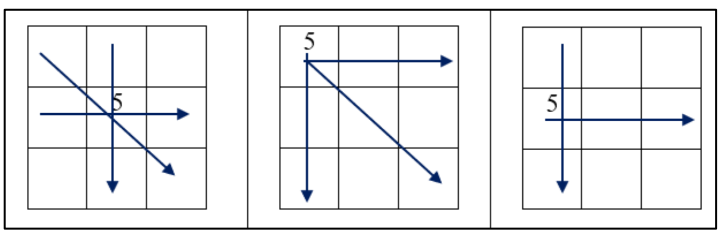
Nota. La imagen A muestra la practicante explicando el juego cerrar quince y la imagen B muestra los estudiantes jugando. Fuente: Autoría propia.

Estrategia ganadora

Edo et al. (2008) describen la siguiente estrategia ganadora. El juego presentado, un juego sin intervención del azar, debe ser analizado para descubrir una estrategia ganadora, si el primer jugador coloca el 5 en cualquiera posición del tablero puede hallar una estrategia para ganar. Si el jugador coloca el 5 en la casilla central del tablero puede ganar a la siguiente jugada, ya que el cinco en esta posición ocupa todas las direcciones del tablero para realizar sus jugadas (horizontal, vertical y dos diagonales) y además permite que todas las fichas restantes (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9) formen parejas que suman 10. Otra estrategia para que el primer jugador halle una solución favorable al juego consiste en colocar el 5 en uno de los vértices, posición que ocupa tres direcciones y que le permitiría ganar a la tercera jugada; otra es situar el 5 en el centro de un lado del tablero, lo que le permitiría ganar a la cuarta jugada.

Figura 47

Estrategia ganadora cerrar quince.



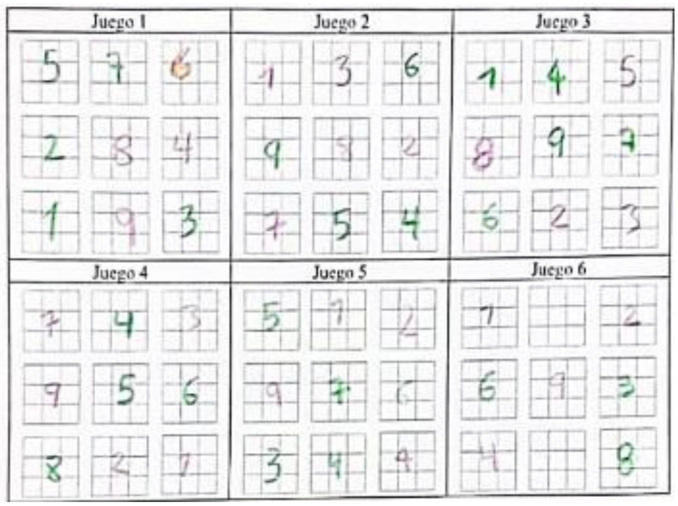
Nota. Estrategias ganadoras en el juego cerrar quince. Fuente: Edo et al. (2008).

A continuación, se presentan algunos resultados relevantes que se obtuvieron durante el desarrollo de esta actividad.

Esta actividad se dio apertura con las siguientes preguntas ¿Han escuchado hablar del juego cerrar quince? y ¿lo has jugado? A la cual los estudiantes respondieron de manera corta que no tenían conocimiento del juego y por lo tanto no lo habían jugado, luego de las intervenciones se explicaron cada una de las reglas del juego, a lo que los estudiantes expresaron que si las habían entendido satisfactoriamente. Seguidamente se hizo entrega del respectivo material y los estudiantes comenzaron a explorarlo, pasado un tiempo algunos estudiantes manifestaron que no habían entendido cómo se llevaría a cabo la actividad y el registro de las jugadas, lo que conllevo, a que las practicantes pasaran por cada grupo explicando detalladamente en qué consistía el juego, una vez lo comprendieron empezaron a jugar. Lo anterior se visualiza en la figura 48.

Figura 48

Registro del juego cerrar quince por los estudiantes E5, E7, E12 y E15.



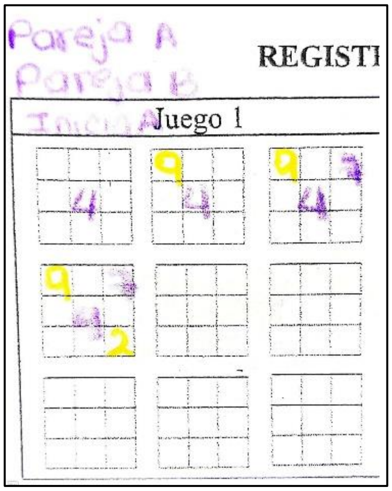
Fuente: Autoría propia.

Después de las aclaraciones respecto al juego, los estudiantes designaron a un integrante del grupo para tomar los registros en la plantilla y posteriormente dan inicio al juego.

En la figura 49 se puede observar que los estudiantes designaron con letras a cada pareja para determinar quién inicia, tal como se muestra en la imagen, además se visualiza que el primer número utilizado fue el 4 ubicado en el centro, posteriormente la segunda jugada la realizó la pareja B ubicando el número 9 en la parte superior del lado izquierdo, seguidamente la pareja A ubica el 7 en el lado derecho de la parte superior y finalmente la pareja B ubica el 2 en la parte inferior del lado derecho, obteniendo de esta manera los tres números que suman quince. Teniendo en cuenta las jugadas realizadas, se puede notar que los estudiantes que iniciaron el juego no prestaron atención, dado que en la segunda jugada que ellos realizaron habían tenido la oportunidad de ganar efectuando la jugada que hizo la pareja B. Lo anterior pudo haber ocurrido, porque los estudiantes se estaban familiarizando con el juego y ensayando posibles jugadas.

Figura 49

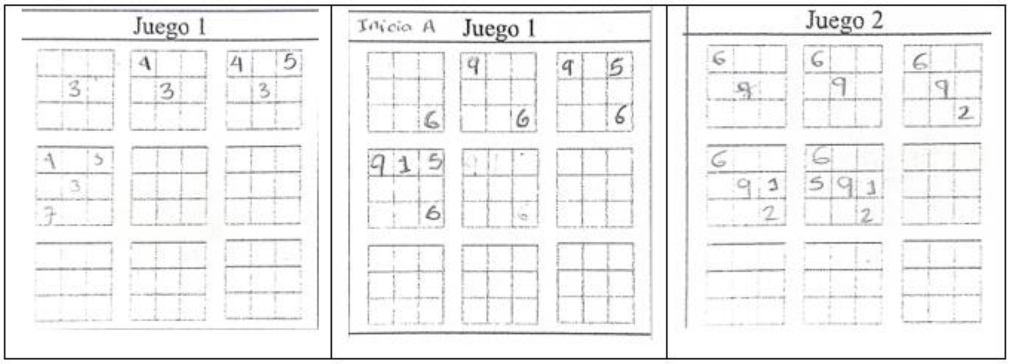
Registro de los estudiantes E27, E33, E35 y E38 en el juego cerrar quince.



Fuente: Autoría propia.

De modo similar ocurrió en otros grupos de trabajo como se muestran en la figura 50.

Figura 50

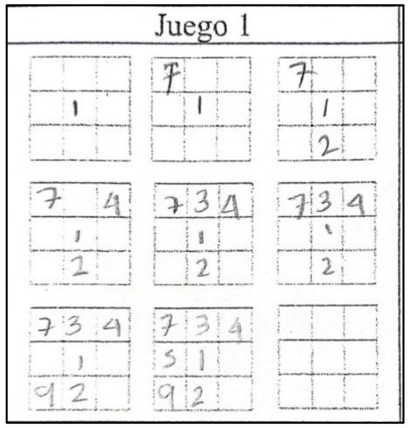


Fuente: Autoría propia.

Con respecto a la figura 51, se puede observar que ningún integrante de este equipo ganó el juego consiguiendo un empate, además se puede visualizar que la pareja que inició jugó con los números pequeños, con el 1, 2 y 3, y su oponente jugó cerrando los caminos para que ninguno pudiera ganar.

Figura 51

Registro de los estudiantes E1, E3, E8, E9.



Fuente: Autoría propia.

Puede agregarse que, mientras los estudiantes estuvieron haciendo la exploración del juego el estudiante E9 expresó “este juego es parecido al de la vieja”, a la cual la docente en formación se dirigió al estudiante y le preguntó, ¿Cuál es el juego de la vieja? A lo que el estudiante le respondió el famoso “triqui”. En este sentido el estudiante estaba haciendo comparaciones con otro juego, que tal vez lo podría orientar con el juego que estaba realizando, y así poder organizar un plan de acción.

Al transcurrir el tiempo los estudiantes lograron familiarizarse con el juego y empezaron a jugar con detenimiento y analizando cada jugada, permitiéndoles organizar estrategias, como las que se muestran a continuación.

En la figura 52 se muestra que los estudiantes E5 y E15 inician el juego estratégicamente, puesto que al ubicar el 4 en el centro tiene varias posibilidades de hacer el cerrar quince, como lo expresa uno de los estudiantes “colocando el número 4 en el centro y si el otro jugador por error coloca otro número que no sea el 7 o el 1 en la siguiente jugada puedo ganar”. En efecto, esto se puede dar porque quedan emparejadas las fichas: 9-2, 8-3 y 6-5 que suman 11 y como ya se tiene el 4, por consiguiente, la suma total de los tres números daría 15, por ejemplo, como se vio en la estrategia de Olfos y Villagrán (2001).

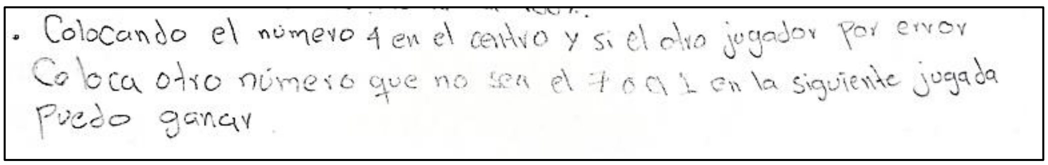
Figura 52

Registro de los estudiantes E5-E7-E12 y E15 en el juego cerrar quince.

Fuente: Autoría propia.

Figura 53

Estrategia de los estudiantes E5 y E15.

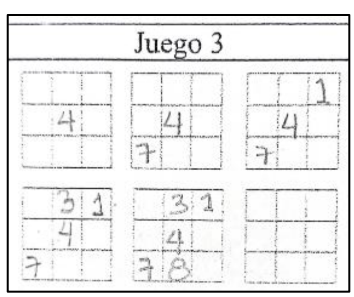

• Colocando el número 4 en el centro y si el otro jugador por error Coloca otro número que no sea el 7 o a 1 en la siguiente jugada Puedo ganar

Nota. Estrategia para el número 4. Fuente: Autoría propia.

Ahora bien, en la figura 54 también se muestra que los estudiantes E5 y E15 inician ubicando el 4 en el centro, pero en este caso sus oponentes ya comprenden la estrategia y ubican uno de los números que no pueden ser emparejados, en este caso el 7 que lo sitúan en el lado inferior izquierdo, a lo que los estudiantes E5 y E15 ponen el 1 en el lado superior derecho, de esta manera garantizando que ganaran en la siguiente jugada. Así logrando identificar la efectividad de la estrategia.

Figura 54

Registro de los estudiantes E5-E7-E12 y E15 en el juego cerrar quince.

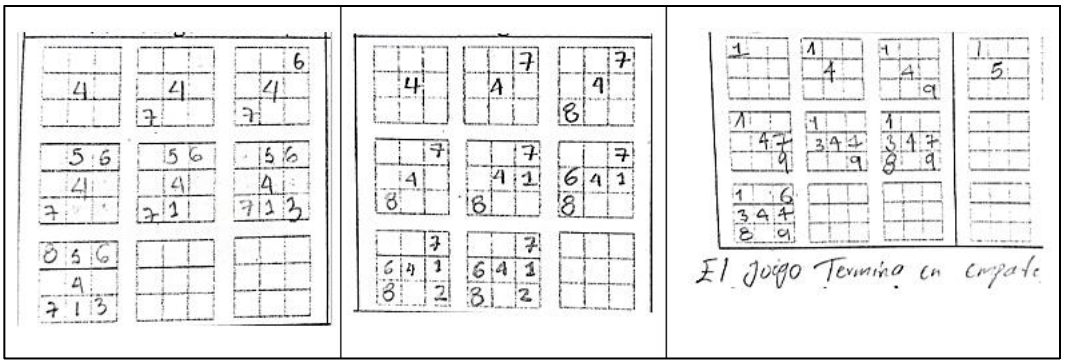


Fuente: Autoría propia.

Por otra parte, un grupo de estudiantes también iniciaron el juego ubicando el número 4 en el centro; pero estos no identificaron ninguna estrategia, puesto que procedieron a jugar dañando el camino de sus oponentes llevándolos a obtener un empate, como se puede observar en la siguiente figura.

Figura 55

Registros del juego cerrar quince.

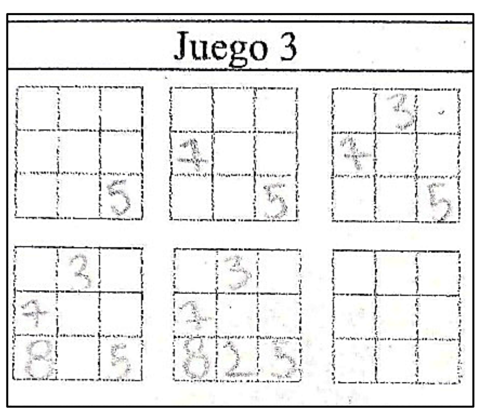


Fuente: Autoría Propia.

Por otro lado, se tiene la estrategia empleada por los estudiantes E33 y E27, que se puede apreciar en la figura 56, para la cual los estudiantes iniciaron la partida situando el 5 en una de las esquinas, seguidamente sus oponentes ubicaron el 7 en la casilla central de la columna 1 y así la pareja inicial situó en la casilla central de la fila 1 el número 3, quedando una de las parejas que suman 10, así pues, asegurando su triunfo.

Figura 56

Registro de los estudiantes E27, E33, E35 y E38 en el juego cerrar quince.

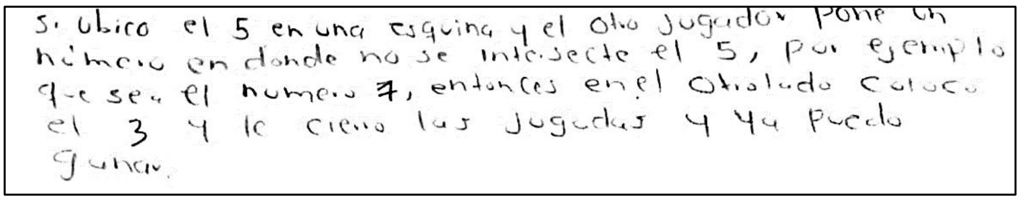


Fuente: Autoría propia.

Con respecto a lo anterior los estudiantes *E27 y E33* presentaron la siguiente estrategia “si ubico el 5 en una esquina y el otro jugador pone un número en donde no se intercepta el 5 por ejemplo que sea el número 7 entonces en el otro lado colocó el 3 y le cierro las jugadas y ya puedo ganar”. En efecto, esta estrategia ocurre siempre y cuando se utilicen las parejas que sumen 10.

Figura 57

Estrategia de los estudiantes E27 y E33.



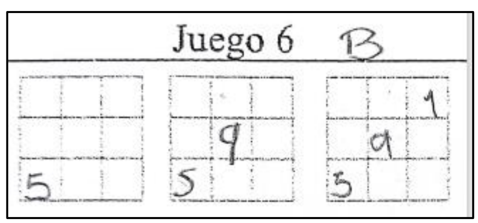
Si ubico el 5 en una esquina y el Otro jugador pone un número en donde no se intersecte el 5, por ejemplo que sea el numero 7, entonces en el Otro lado coloco el 3 y le cierro las jugadas y ya puedo ganar.

Fuente: Autoría propia.

Así mismo, los estudiantes E27 y E33 presentaron otra estrategia, en donde ubicaron el 5 en una de las esquinas y su oponente colocando uno de los números en las intersecciones, como se puede observar en la figura 58.

Figura 58

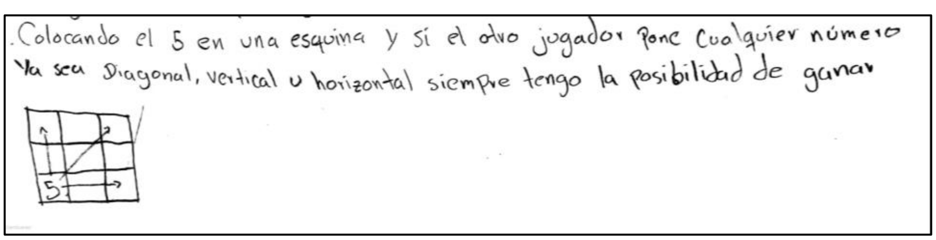
Registro de los estudiantes E27, E33, E35 y E38 en el juego cerrar quince.



Fuente: Autoría propia.

Figura 59

Estrategia de los estudiantes E27 y E33.



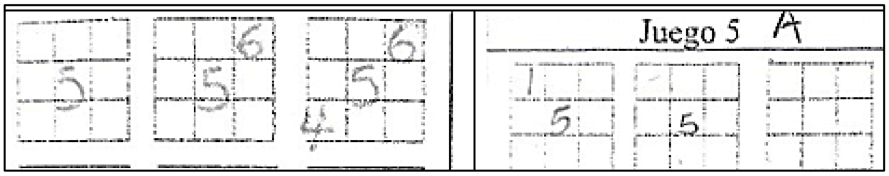
Colocando el 5 en una esquina y si el otro jugador pone cualquier número ya sea Diagonal, vertical u horizontal siempre tengo la posibilidad de ganar

Fuente: Autoría propia.

Por último, se presenta una de las estrategias que tiene mayor efectividad, y que fue identificada por algunos estudiantes, como se muestra en la figura 60.

Figura 60

Registro de los estudiantes E22, E23, E24 y E29 en el juego cerrar quince.

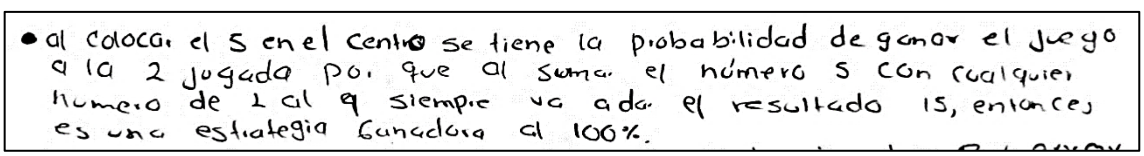


Fuente: Autoría propia.

Teniendo en cuenta la figura 60 se puede observar que los estudiantes E22 y E29 procedieron a jugar estratégicamente, dado que al ubicar el 5 en la casilla central ya estaban garantizando su triunfo en su segunda jugada, puesto que los números restantes permiten hacer parejas que suman 10, por ejemplo 9-1, 8-2, 7-3 y 6-4, de esta manera logrando hacer cerrar quince en cualquiera de las direcciones. En ese sentido los estudiantes E22, E23, E24 y E29 escribieron las siguientes estrategias, cabe aclarar que a los estudiantes se les dificultaba escribir de manera adecuada la estrategia.

Figura 61

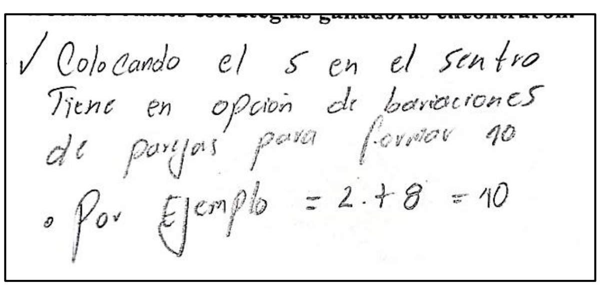
Estrategia de los estudiantes E22 y E29.


• al coloca el 5 en el centro se tiene la probabilidad de ganar el juego a la 2 jugada por que al suma el número 5 con cualquier numero de 1 al 9 siempre va a da el resultado 15, entonces es una estrategia ganadora al 100%.

Fuente: Autoría propia.

Figura 62

Estrategia de los estudiantes E23 y E24.


✓ Colocando el 5 en el sentro Tiene en opción de bariaciones de parejas para formar 10
• Por Ejemplo = 2 + 8 = 10

Fuente. Autoría propia.

Terminado el juego se procedió a realizar un diálogo con los estudiantes, en el cual compartieron su experiencia y las estrategias que habían identificado, complementándose con las que presenta Olfos y Villagrán (2001), además de indicar que en este juego inconscientemente hicieron uso de las fases que propone George Pólya para resolver problemas.

Finalmente, esta actividad fue exitosa y acogedora por los estudiantes, en la cual se divirtieron buscando estrategias para poder ganar siempre el juego cerrar quince, además aprendieron y compitieron con sus compañeros. Cabe resaltar que no todos lograron identificar estrategias, por lo cual las practicantes procedieron a apoyarlos orientándose con preguntas y pistas.

9.2.5.5 Cuatro en Raya.

Esta actividad fue elaborada teniendo en cuenta la descripción presentada por Fernández (2021) en su trabajo de grado titulado Implementación en Matlab del algoritmo Minimax en un juego simple mediante interfaces gráficas de usuario. La actividad se organizó en tres fases: en la primera fase se hizo una exploración sobre el juego a desarrollar, para ello se organizó una mesa redonda donde se discutió algunas preguntas como: ¿Has tenido algún acercamiento con este juego?, ¿has escuchado acerca del juego cuatro en raya? y ¿conoces algún juego que sea similar? Culminada la socialización se dio inicio a la segunda fase donde se expuso a los estudiantes el orden del juego, las reglas y su objetivo, para ello se organizan en grupos de trabajo y posteriormente se hizo entrega del material de un tablero que está compuesto por columnas horizontales y verticales, en el que la columna inferior del tablero contenía expresiones algebraicas y la primera columna del lado izquierdo contenía diferentes valores numéricos, una fotocopia por participante para registrar las jugadas realizadas y 48 círculos de cuatro colores diferentes, posteriormente se dieron a conocer las siguientes reglas.

- Decidir quién inicia la partida, lanzando un dado.
- El jugador con mayor puntaje será quien coloque la primera ficha en el tablero.
- Quien coloque 4 fichas en línea vertical, horizontal o diagonalmente gana.
- Cada jugador según su orden elige una casilla del tablero, para ocupar debe hallar el valor numérico de la expresión algebraica.

- Los jugadores implicados deciden si el valor hallado por cada estudiante es correcto o no.
- Si la respuesta es correcta, el jugador ocupa la casilla, si no lo es, el jugador pierde su turno.
- Gana el que consigue hacer cuatro en raya y que la suma de las cuatro casillas elegidas sea de mayor puntaje que las de sus oponentes, en caso contrario se continuará con las jugadas.

En un tercer momento se realizó un conversatorio para conocer diferentes puntos de vista sobre el juego, dificultades presentadas durante su desarrollo y que estrategia ganadora identificaron.

Estrategia Ganadora:

Como se mencionó inicialmente el objetivo del juego es conseguir que cuatro fichas formen una línea ya sea horizontal, vertical o diagonal, a primera vista el juego parece muy simple; pero se necesita de estrategias para tener éxito y aprender diferentes trucos para ayudarte a ganar partidas con más frecuencia. En ese sentido, wikiHow (s.f.) propone estrategias básicas para el desarrollo del juego, tales como: control del centro, planear por adelantado movimientos, respuestas de bloqueo y valerse de los errores de tu oponente. Con todo y lo anterior la estrategia básica que más prevalece en este juego es tener fichas en el medio del tablero, ya que esto te da más oportunidades para hacer conexiones.

Aquí vale la pena mencionar que el juego fue adaptado a la temática de valor numérico en expresiones algebraicas, para el cual se estableció una estrategia a parte de las que menciona wikiHow (s.f.), así pues, la estrategia estaba en que el estudiante analizará cada una de las expresiones algebraicas y los valores a evaluar, de tal manera que pudiera conseguir que la suma de los cuatro resultados sea mayor que la de sus oponentes.

Figura 63

Estudiantes jugando.

Fuente: Autoría propia.

Posteriormente se darán a conocer acontecimientos y resultados que surgieron durante la aplicación del juego cuatro en raya.

Así pues, el juego se desarrolló en un tiempo determinado y divido en algunos momentos como se mencionó inicialmente, en ese sentido se propuso a los estudiantes las preguntas, para el cual se obtuvieron variedad de respuestas, entre las cuales mencionaron que como tal el juego cuatro en raya nunca lo habían escuchado y jugado; pero si el tres en raya que es más conocido como el famoso triqui preguntando a las practicantes que si tenía relación con el juego que se estaba presentando, por consiguiente las docentes en formación dieron respuesta al interrogante mencionando que el juego si era similar y que en este caso se utilizaría un tablero más amplio; sin embargo en el juego se tenía una regla adicional para su desarrollo que consistía en implementar la temática del valor numérico. Para terminar, se explicó cada una de las reglas del juego con su objetivo y estás siendo aceptadas por los estudiantes.

Después de haber jugado un tiempo, los estudiantes sugirieron a las docentes que si podían cambiar la dinámica del juego, ya que era muy tedioso ir realizando las operaciones de cada casilla y esperar que el jugador en turno terminara para poder continuar, escuchadas las sugerencias se optó por cambiar la actividad, para lo que se propuso a los estudiantes que jugarán a hacer el cuatro en raya y el primer estudiante que lo lograra debía de calcular las expresiones que se encontraban alineadas y sus oponentes en conjunto con el docente en formación verificarían sus resultados, para determinar si era ganador o no, dado el caso que los resultados fueran erróneos se continuaba con la partida. Además, mientras jugaban corroboraron de que este juego si era parecido al famoso “triqui” por lo que en cada jugada trataban de dañar el camino de sus oponentes.

En la figura 64 se puede observar que los estudiantes dieron inicio al juego con las nuevas reglas propuestas.

Figura 64

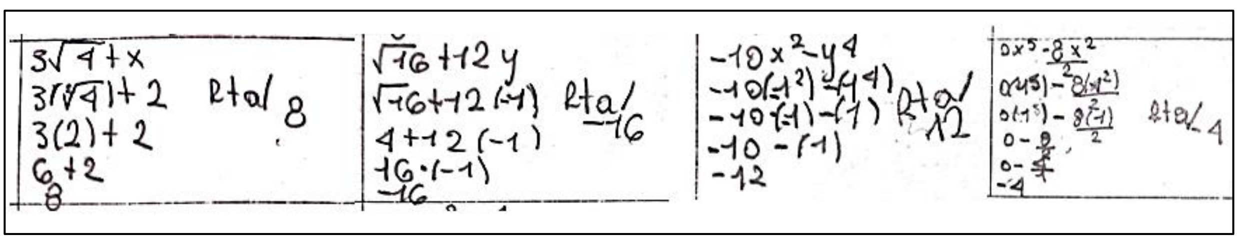
Estudiantes jugando.

Fuente: Autoría propia.

Con respecto al registro del juego se obtuvieron los siguientes resultados.

Figura 65

Resultado presentado por el estudiante E9.



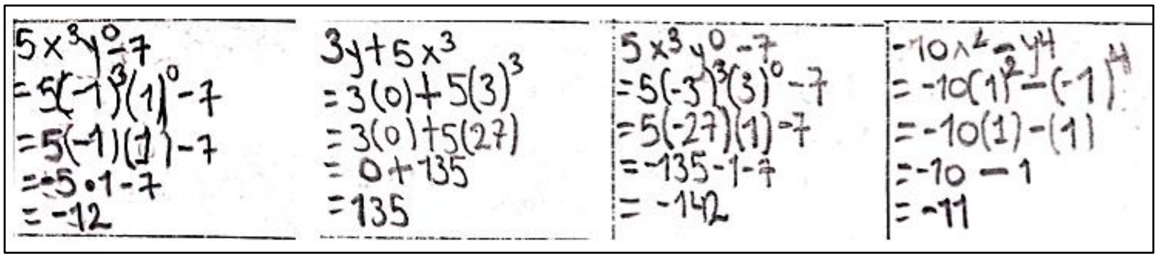
Fuente: Autoría propia.

En la figura 65 se puede observar que el estudiante no tiene claridad en cuanto a la jerarquía de las operaciones, puesto que en la segunda expresión se puede notar que él efectúa una operación indebidamente y en la tercera expresión no hace una buena aplicación de las propiedades de la potenciación, por consiguiente, no gano esta partida porque obtuvo dos ejercicios buenos y dos malos y la regla es que tenían que estar bien todos.

Por otra parte, se tiene el resultado presentado por el estudiante E33, en el cual se puede visualizar que realiza de forma apropiada el valor numérico de todas las expresiones algebraicas, haciendo un buen uso de la jerarquía de las operaciones y las propiedades de la potenciación. Por tanto, el estudiante adquiere el éxito de esta partida.

Figura 66

Resultado presentado por el estudiante E33.

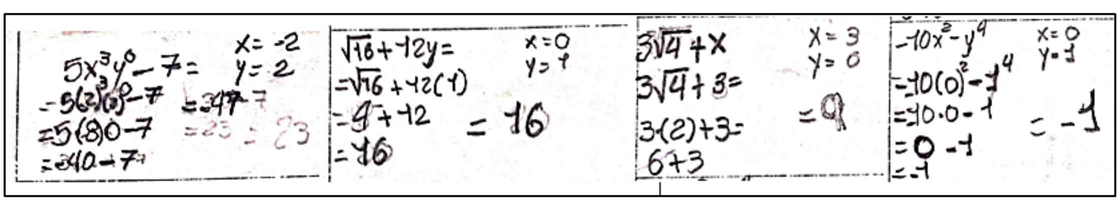


Fuente: Autoría propia.

De igual manera al estudiante E5 sus oponentes lo catalogaron como ganador de la partida, puesto que indicaron que había hallado de manera correcta el valor numérico de todas las expresiones, no cabe duda de que las respuestas si estaban bien, por lo que se puede inferir que los oponentes resolvieron las expresiones utilizando alguna herramienta tecnológica, dado que no visualizaron que el estudiante había cometido un error al evaluar la primera expresión, lo cual se puede observar que no aplica de manera adecuada la propiedad de la potencia de cero y otro error que se puede notar es cuando efectúa el producto por 0. Lo anterior se puede visualizar en la siguiente imagen.

Figura 67

Resultado presentado por el estudiante E5.



Fuente: Autoría propia.

Aquí vale la pena mencionar que para hacer el cuatro en raya los estudiantes no presentaron ninguna dificultad; pero si presentaron inconvenientes para hallar el valor numérico de las expresiones algebraicas, ya que era una temática nueva para ellos; aunque algunos sí lograron entenderla con facilidad.

Finalizado el juego se abrió un espacio para que los estudiantes compartieran estrategias empleadas, experiencias y si había sido de su agrado el juego. En cuanto a las estrategias los estudiantes no dieron mayor respuesta; aunque indicaron que una estrategia que habían utilizado era bloquear el camino de su oponente tal como lo establece wikiHow (s.f.). Por otra parte, indicaron que el juego en un inicio no había sido nada agradable, puesto que demandaba hacer muchas cosas y que eso causaba aburrimiento; pero cuando se hicieron cambios a las reglas si ya empezó agradar más, al igual que se divirtieron jugando con sus compañeros.

A pesar del percance, esta actividad fue exitosa porque se logró que los estudiantes se divirtieran haciendo el cuatro en raya, calculando el valor numérico de las casillas correspondientes y además compitieron con sus compañeros hasta que hubo un ganador. Cabe señalar que no todos los que lograban hacer el cuatro en raya eran ganadores, puesto que al efectuar la regla de evaluar las expresiones en los valores dados presentaban dificultad, dada esta situación en algunos casos las practicantes apoyaron el proceso para que encontraran la respuesta correcta y pudieran ganar.

9.2.5.6 Adivinando un Número.

Esta actividad se seleccionó y elaboró teniendo en cuenta la descripción presentada por García (s.f.) en su libro pasatiempos y juegos en la clase de matemáticas. Para el desarrollo de la actividad se tuvieron en cuenta tres fases. La primera fase se le denominó preguntas y respuestas, para el cual se formularon unas preguntas teniendo en cuenta el juego propuesto, tales como: ¿Alguna vez te han adivinado algún dato, fecha de cumpleaños, calzado, entre otros?, ¿consideras que con la matemática se puede hacer magia? y ¿conoces algún juego parecido?, terminada la dinámica se continuó con la entrega del material (una hoja en blanco) y se socializó el orden del juego con sus respectivas reglas, que se describen a continuación.

- Se elige un mago.
- El mago dará diferentes indicaciones a los participantes.
- Los estudiantes desarrollarán cada indicación dada por el mago.

- El mago adivinará el número a algunos participantes.

La segunda fase denominada juguemos, los estudiantes se pusieron en disposición a escuchar y resolver cada una de las instrucciones dadas por el mago. Todas las indicaciones en lenguaje natural.

Primer Juego:

- Piensa un número.
- Súmale 3.
- Multiplícalo por 2 el resultado.
- A lo que le quedó súmale 4.
- El resultado divídelo entre 2.
- El mago preguntará a un participante su resultado y le adivinara el número que pensó inicialmente.

Segundo Juego:

- Piensa tres números cualesquiera menores que 9.
- Dobla el primero y súmale 1.
- Multiplica este resultado por 5.
- Suma al resultado el segundo número.
- Dobla el resultado y súmale 1.
- Multiplica este resultado por 5.
- Suma al resultado tu tercer número.

La tercera y última fase se denominó compartamos experiencias, de manera que los estudiantes expresaran sus inquietudes y comprendieran la razón, el por qué el mago siempre adivina el número a uno de los participantes y finalmente realizarán una generalización del juego, que sería expuesta por algunos de ellos.

Figura 68

Generalización del juego adivina un número.

Nota. La imagen muestra la participación de los estudiantes en busca de generalizaciones al juego propuesto. Fuente: Autoría propia.

Estrategia Ganadora.

A continuación, se describe una estrategia ganadora para el primer juego.

Tabla 10

Generalización de adivinar un número

Piensa un número	A
Súmale 3	A+3
Multiplícalo por 2 el resultado	2(A+3)
A lo que le quedó súmale 4	2(A+3) + 4
El resultado divídelo entre 2	[2(A+3) + 4]/2

Nota. La tabla representa la generalización de adivinar un número. Fuente: Autoría Propia.

El mago (profesor) debe restar 5 al resultado, y de esta manera se obtiene el número que pensó el participante.

Ahora, para el segundo juego García (s.f.) describe la siguiente estrategia ganadora que es una generalización de las indicaciones dadas por el mago.

Sean A, B y C los tres números que has escogido.

Tabla 11

Generalización del juego adivina un número

Piensa tres números cualesquiera menores que 9	A, B y C
Dobla el primero y súmale 1	2A + 1
Multiplica este resultado por 5	10A+ 5
Suma al resultado el segundo número	10A+ 5 + B
Dobla el resultado y súmale 1	20A + 11 + 2B
Multiplica este resultado por 5	100A + 10 B + 55
Suma al resultado tu tercer número	100A+ 10 B + 55 + C

Nota. La tabla representa la generalización de adivinar los números pensados por los participantes. Fuente: García (s.f.).

El mago (profesor) debe restar 55 al resultado, el primer número será las cifras de las centenas, el segundo el de las decenas y el tercero las unidades.

Conforme a la actividad realizada, cabe mencionar que en el primer juego se obtuvieron suficientes resultados, puesto que las indicaciones que se encontraban en el acertijo eran fáciles de comprender, por ende, se les facilitó escribir de forma algebraica el acertijo, por el contrario, en la segunda actividad no se pudieron obtener muchos resultados, debido a que las indicaciones eran un poco más extensas y complejas.

Ahora bien, para el desarrollo de esta actividad se dio inicio con algunas preguntas dirigidas a los estudiantes obteniéndose respuestas cortas, así pues; para la primera pregunta que está descrita en las actividades, algunos estudiantes expresaron que si les habían adivinado uno de los datos, como los años y un número; para la segunda pregunta los estudiantes expresaron que con las matemáticas se podían hacer muchas cosas incluida la magia y para la última pregunta los estudiantes respondieron que no conocían juegos similares. Terminada la dinámica de preguntas y respuestas, se dio inicio al juego.

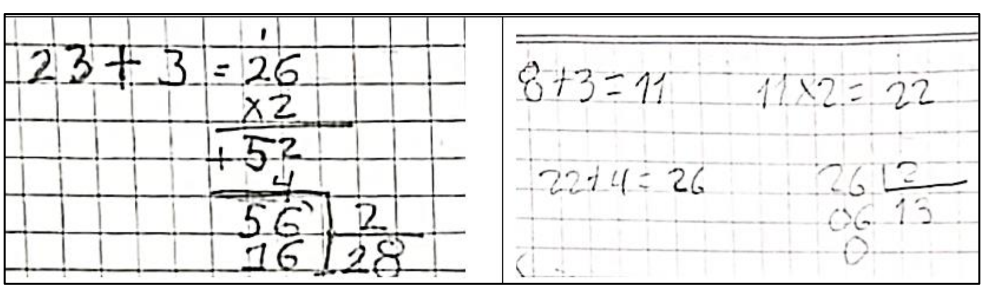
Así pues, la docente en formación explicó detalladamente cada una de las reglas del juego y además indicó que ella haría el papel del mago, por lo que los estudiantes estuvieron de acuerdo y dieron por aceptadas las reglas. Así pues, el mago comenzó a dar cada una de las indicaciones del acertijo para que los participantes las resolvieran, luego de haber pasado un tiempo se les preguntó que si ya habían terminado de hacer las operaciones que se indican en el juego, para lo cual respondieron que sí, seguidamente el mago preguntó a los participantes que quien quería que le adivinaran el número que había pensado inicialmente, a lo que la mayoría de los estudiantes reaccionaron inmediatamente, así pues el mago le adivino el número a algunos de los participantes y estos se refirieron al mago diciéndole que era un brujo.

Por lo anterior, se pudo evidenciar que esta actividad tuvo un efecto de inmediato en los estudiantes, puesto que, ellos querían conocer rápidamente cuál era el truco, conforme a esto se les propuso a los estudiantes que realizaran una revisión de cada una de las indicaciones propuestas por el mago y que trataran de deducir cuál era el truco, dándoles algunas instrucciones.

En la figura 69 se muestran algunos procedimientos realizados por los estudiantes del acertijo, en lo aritmético.

Figura 69

Respuestas de los estudiantes E7 y E28.



Fuente: Autoría propia.

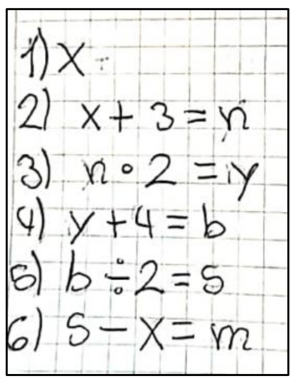
Cabe mencionar que en esta actividad la mayoría de los estudiantes no presentaron dificultades al realizar las operaciones.

Al cabo de un tiempo el estudiante E7, hizo un comentario acerca de cuál era el truco del acertijo, "ya sé porque la profe nos adivina el número, la profe hizo todas las operaciones que nos iba indicando y cuando nos pregunta qué resultado nos dio ella le resta el total que le dio al hacer las operaciones y así ya nos adivina el número a nosotros", teniendo en cuenta el comentario del estudiante se pudo notar que realizó un análisis detallado y así logró determinar una solución para el acertijo. Además, se les indicó que el secreto estaba en el uso del álgebra, en donde las operaciones matemáticas se generalizan empleando números, letras y símbolos.

Por consiguiente, se solicitó a los estudiantes escribir en el lenguaje algebraico el acertijo, como se muestra en la figura 70.

Figura 70

Generalización del acertijo realizado por el estudiante E15.

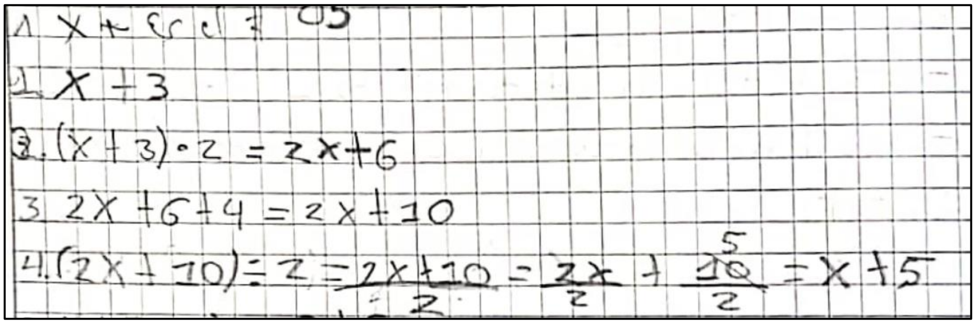


Fuente: Autoría propia.

Teniendo en cuenta la figura 70, se puede observar que el estudiante E15 realiza un uso adecuado del lenguaje algebraico, para el cual designa con diferentes variables cada resultado, del mismo modo en la figura 71 se puede observar que el estudiante E31 hace un buen uso del lenguaje algebraico, pero adicionalmente resuelve cada una de las expresiones, hay que resaltar que esta respuesta la logró con la orientación de la docente titular, con respecto al estudiante E31 hay que mencionar que mejoró en su participación, puesto que en un principio no participaba y no colabora como se debía en todas las actividades propuestas; pero de un momento a otro se sintió motivado y participó activamente en esta actividad, que hasta la docente titular se quedó sorprendida por el cambio del estudiante.

Figura 71

Generalización del acertijo realizado por el estudiante E31.

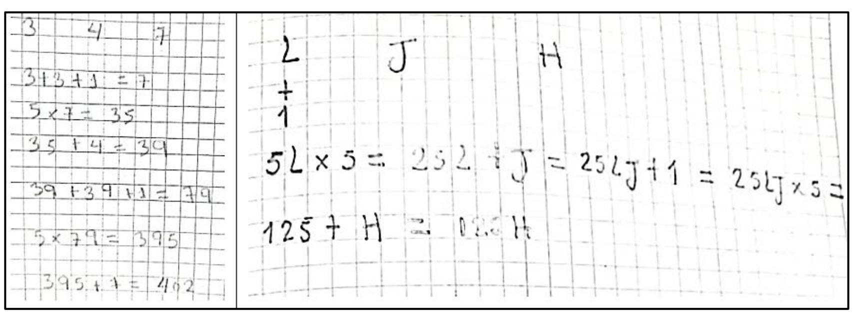


Fuente: Autoría propia.

De modo similar se desarrolló el segundo juego, pero como se mencionó inicialmente en este juego no se lograron buenos resultados, puesto que las indicaciones eran un poco más complejas y pues los estudiantes aún no estaban bien familiarizados con la temática. Sin embargo, hubo algunos estudiantes que sí pudieron desarrollar el ejercicio en lo aritmético y en la parte algebraica se les dificulto. Lo anterior se puede visualizar en la figura 72.

Figura 72

Respuestas de los estudiantes E5 y E38.



Fuente: Autoría propia.

Finalmente, con esta actividad se logró evidenciar que los estudiantes han ganado habilidades al descubrir estrategias para los juegos, además de que se divirtieron y disfrutaron creando sus aprendizajes. Por otra parte, este tipo de actividades son un recurso educativo que apoyan y mejoran la simbolización en el álgebra.

9.2.6 *Actividad 6: Resuelvo Problemas con el Método de George Pólya*

En esta actividad se presentaron algunos problemas relacionados con la geometría, potenciación y radicación, los cuales se encuentran en diferentes páginas web y buscadores académicos. El propósito de incorporar estos problemas matemáticos en las sesiones de clase es potenciar habilidades y capacidades, para construir soluciones de manera flexible y creativa con el método de George Pólya. Es importante mencionar que los problemas H e I no se alcanzaron a abordar, puesto que en algunos problemas se designó más tiempo de lo previsto. A continuación, se presentarán los problemas relacionados con las temáticas abordadas durante las sesiones de clase.

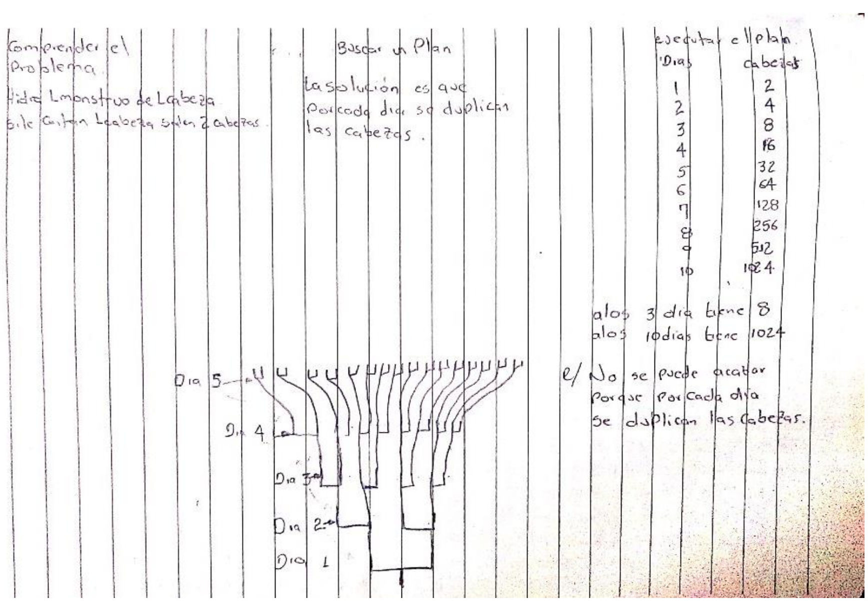
Problema A.

Problema tomado de Blanco (2022): La Hidra de Lerna es un personaje mitológico que aparece en algunas historias, como la de las 12 pruebas de Hércules. La Hidra era un monstruo con 1 cabeza, pero si se le cortaba, le nacían 2 cabezas en su lugar. Si un héroe intentaba vencerla cortándole todas sus cabezas cada día, ¿cuántas cabezas tendría la Hidra el tercer día? ¿Y al cabo de 10 días intentando vencerla? ¿Se puede vencer la hidra?

Para el problema A se obtuvieron las siguientes soluciones

Figura 73

Resultado presentado por el estudiante E27.

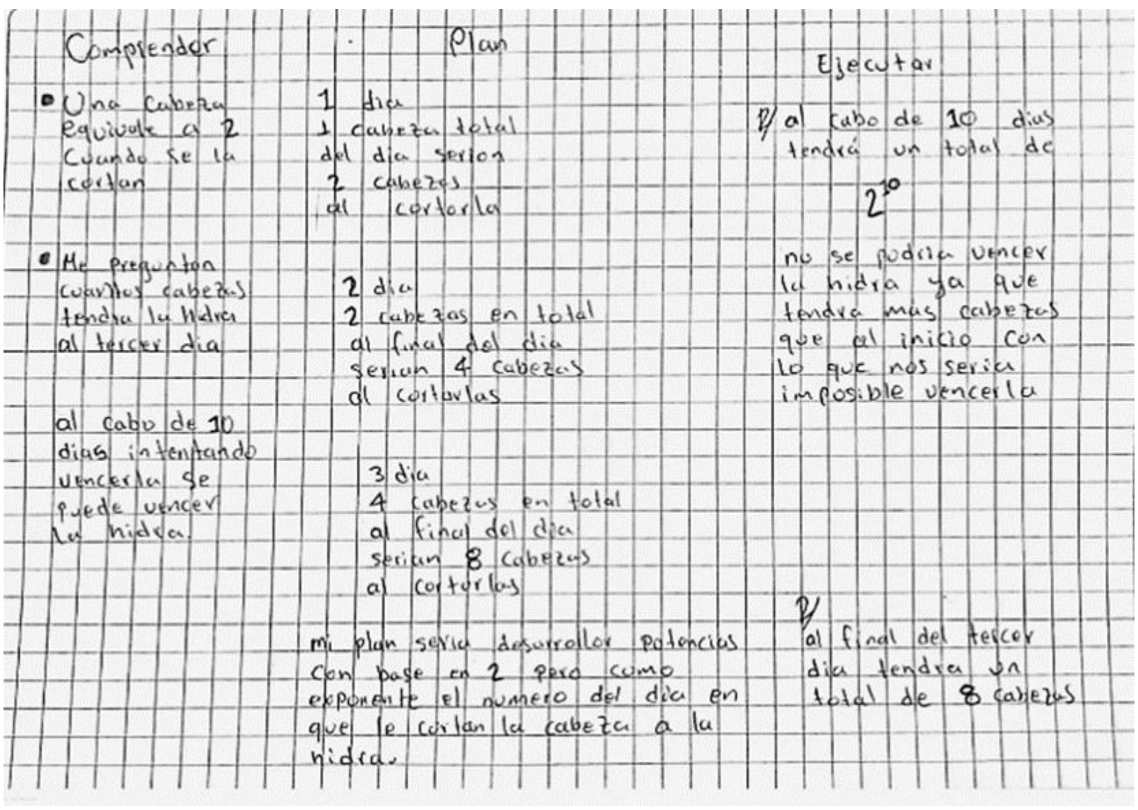


Fuente: Autoría propia.

La figura 73 muestra cómo el estudiante E27 sigue las etapas propuestas por Pólya, en las cuales, la primera está guiada a la comprensión, identificación y exposición de los datos del problema correctamente; la segunda hace parte de la planeación, donde el estudiante hace uso de un diagrama, del cual extrae la información necesaria para resolver el problema, de lo anterior se evidencia que parte de los resultados obtenidos se organizan en una tabla, que le permite identificar el patrón de la secuencia del problema, para posteriormente dar una solución. Puede concluirse que la estrategia utilizada fue pertinente, ya que permitió conocer la operación que se debía aplicar para llegar a una solución adecuada. En ese mismo sentido se presenta el siguiente resultado.

Figura 74

Resultado presentado por el estudiante E7.



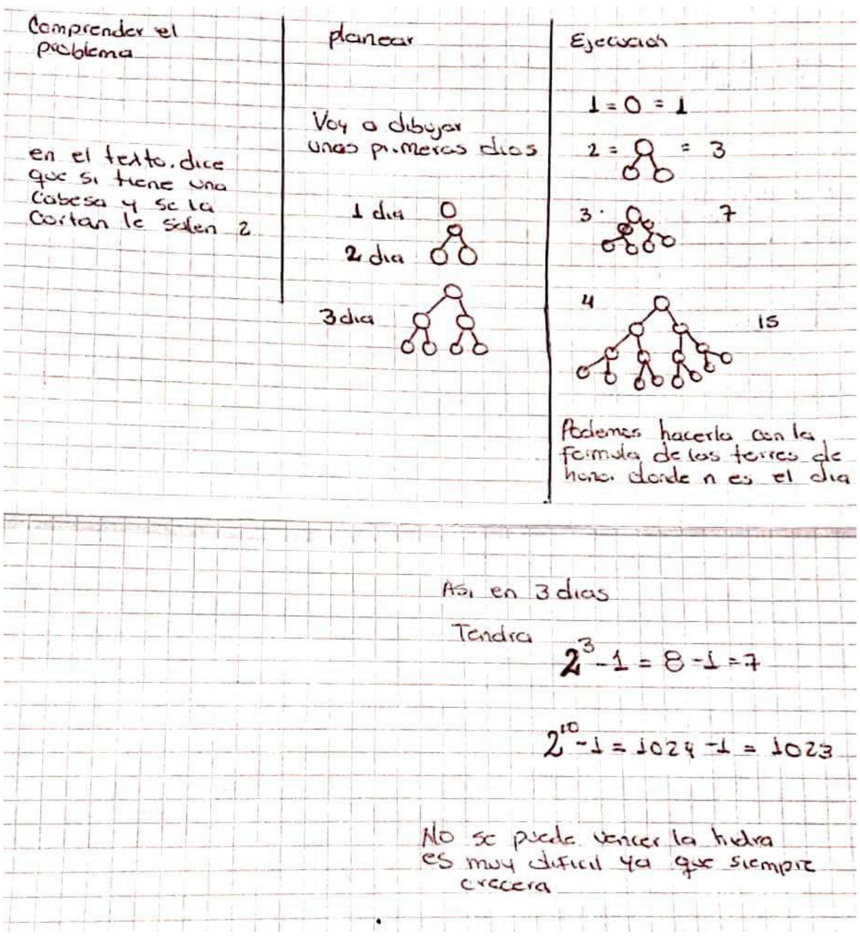
Fuente: Autoría propia.

En la figura 74 el estudiante E7 en la primera fase, selecciona, identifica y explica los datos relevantes del problema correctamente; durante la segunda fase de planeación se evidencia la realización de operaciones con los tres primeros datos y con los resultados obtenidos procede a conjeturar que se debe utilizar una operación de potenciación para dar una solución al problema de forma coherente.

A continuación, se muestra el procedimiento de uno de los estudiantes, en el cual se evidencia la interpretación incorrecta del enunciado; sin embargo, en la fase de planificación se observó una comparación interesante entre el problema planteado y el juego Torres de Hanói, realizado en sesiones anteriores, mostrándose a continuación.

Figura 75

Resultado presentado por el estudiante E34.



Fuente: Autoría propia.

En la figura 75 se muestra que el estudiante E34 especifica bien los datos del problema; sin embargo, no lo logra comprender a totalidad, ya que en la realización del gráfico se ilustra mal el enunciado, por consecuencia de lo anterior lo lleva a realizar comparaciones y generalizaciones erróneas.

Es importante mencionar que, durante la retroalimentación, se generalizó la fórmula del crecimiento de la hidra como 2^n, ya que el estudiante que presentó la solución de la figura 74 la escribió en un lenguaje natural, pero no la generalizó en símbolos. Por otro lado, se hizo énfasis en la pregunta ¿Se puede vencer a la hidra? cuyo propósito era la relación de la pregunta con las propiedades de potenciación, en donde la mayoría de los estudiantes habían proporcionado una respuesta correcta, pero con pocos argumentos.

Respecto a los resultados anteriormente enunciados, se puede decir que los estudiantes tienen buen manejo del método, proponen estrategias interesantes y otro aspecto positivo es que no se observan errores al momento de aplicar la fórmula de las Torres de Hanói.

Problema B.

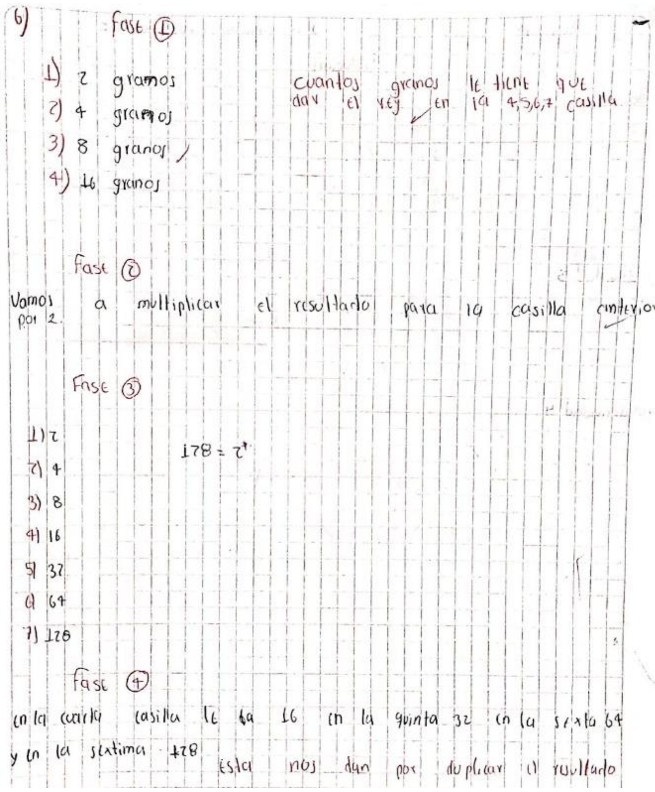
Problema es tomado de mechON (2015): Hace muchos siglos, en un país de oriente vivía un rey que había perdido a su hijo en una batalla. A causa de esta tragedia había decidido encerrarse en su castillo y no hablaba con nadie. Uno de sus ministros llamó a todos los científicos y filósofos del reino para que buscaran una posible solución a la tristeza del rey. Uno de ellos inventó un juego de estrategias, el ajedrez. El rey no sólo volvió a sonreír, sino que se volvió un gran maestro de este juego. Quedó tan feliz con el invento que decidió recompensar al inventor con lo que él pidiera. El joven que había creado el ajedrez pidió lo siguiente: un grano de trigo en la primera casilla del tablero, dos granos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta, dieciséis en la quinta y así sucesivamente hasta completar las sesenta y cuatro casillas del tablero de ajedrez. El rey muy tranquilo, pidió a los matemáticos del reino que calcularan el número de granos de trigo que debían pagarse al muchacho; al cabo de un rato, los científicos regresaron con una gran sorpresa¡:no alcanzaba todo el trigo del mundo para pagar el juego de ajedrez.

Teniendo en cuenta la lectura anterior se realizan las siguientes preguntas: Determinar cuántos granos de trigo pagaría el rey en la quinta casilla de ajedrez, cuántos en la 6 sexta y finalmente ¿se podría decir cuántos granos en la casilla 64?

Algunos resultados relevantes al realizar este problema son los siguientes.

Figura 76

Resultado presentado por el estudiante E8.



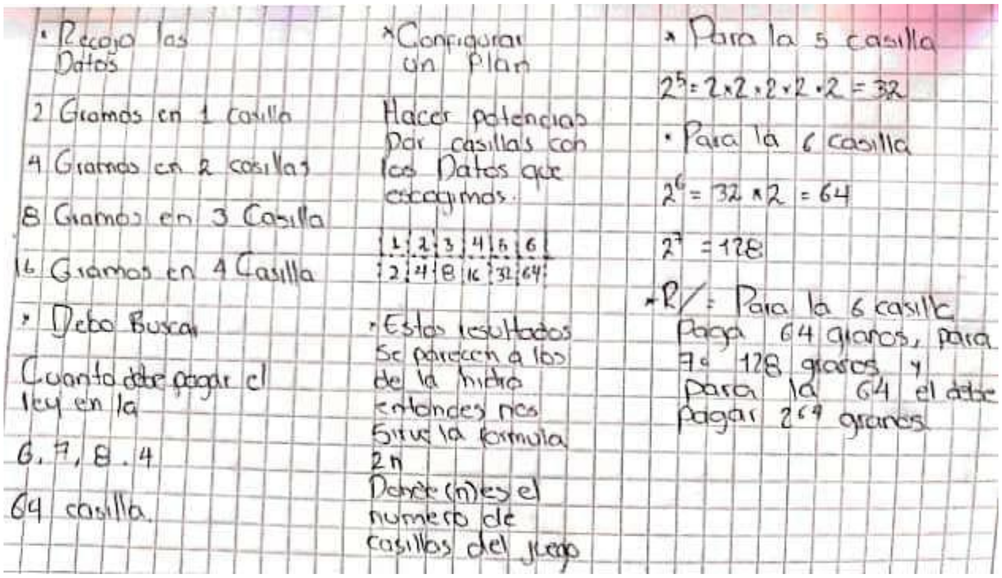
Fuente: Autoría propia.

La figura 76 muestra que el estudiante E8, identifica y expone los datos del problema correctamente, además de determinar la incógnita, así mismo para concebir un plan primero describe correctamente qué procedimientos realizar y procede a ejecutarlos con ayuda de los datos del enunciado, en donde expresa que se debe multiplicar cada resultado anterior por 2 para obtener el siguiente, a su vez se observa que identifica una relación con la potenciación, por lo que para dar respuesta a cada una de las preguntas toma los datos de las operaciones realizadas en la fase de ejecución.

Durante la retroalimentación, el estudiante E8 presentó la solución de la figura 76, donde parte de los estudiantes compartían semejanzas en su desarrollo, mientras que los demás argumentaban que, al seguir esa solución, era un procedimiento muy extenso para dar respuesta a todas las preguntas, en particular a la pregunta ¿cuántos granos debe pagar el rey en la casilla 64? Por lo que se propuso la siguiente solución.

Figura 77

Resultado presentado por el estudiante E5.



Fuente: Autoría propia.

Es importante mencionar que los estudiantes que propusieron la solución de la figura 77, se mostraron atentos a preguntar cualquier inquietud, en consecuencia, se resolvieron preguntas guiadas al procedimiento adecuado a seguir y su generalización, donde se evidencio la similitud de los problemas y su posible solución. Ahora bien, cuando el estudiante E5 expuso la solución del problema, surgieron ciertas dudas por parte de los compañeros, ya que se había utilizado una fórmula de un problema anterior, por lo que la practicante expresó que lo expuesto por el compañero era correcto, puesto que una estrategia útil era relacionar el problema planteado con problemas semejantes, y con resultados útiles, que permitan estructurar una solución.

Cabe destacar que en el problema B, las practicantes reflexionaron sobre la importancia de la retroalimentación, ya que la práctica retrospectiva le permite al estudiante consolidar sus conocimientos e inclusive mejorar su comprensión de la solución a la cual llegó. En esta fase las practicantes coinciden en que este paso es importante para que el estudiante constate la relación de la situación resuelta con otras que pudieran requerir un razonamiento más o menos similar, con el fin de facilitarle la transferencia a otras situaciones que se le presenten. Aquí vale la pena mencionar a Pólya (1986) quien expresa que las preguntas que se plantean en la fase retrospectiva dan una retroalimentación muy interesante para resolver otros problemas futuros y plantea que cuando se resuelve un problema también, se están creando habilidades posteriores para resolver cualquier tipo de problema. En otras palabras, cuando se hace la visión retrospectiva del problema que se resuelve, se puede utilizar tanto la solución que se encuentra como el método de solución; este último podrá convertirse en una nueva herramienta a la hora de enfrentar otro problema cualquiera. lo cual se evidencio en que realizaron algunos estudiantes en las respuestas anteriores.

Problema C.

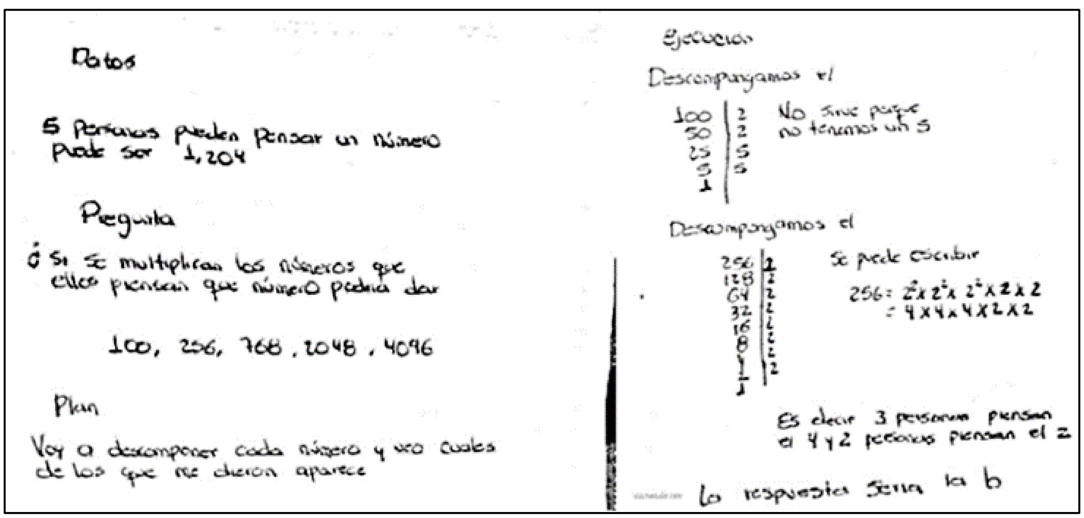
Problema tomado de Berganza (s.f.): Juan, Pablo, Emi, Dora y Flora piensan cada uno un número que puede ser 1, 2 o 4. Si se multiplican los números que ellos piensan, ¿cuál de los posibles valores puede ser el resultado?

A) 100 B) 256 C) 768 D) 2048 E) 4096

Algunos resultados relevantes presentados por los estudiantes son los siguientes.

Figura 78

Resultado presentado por el estudiante E15.



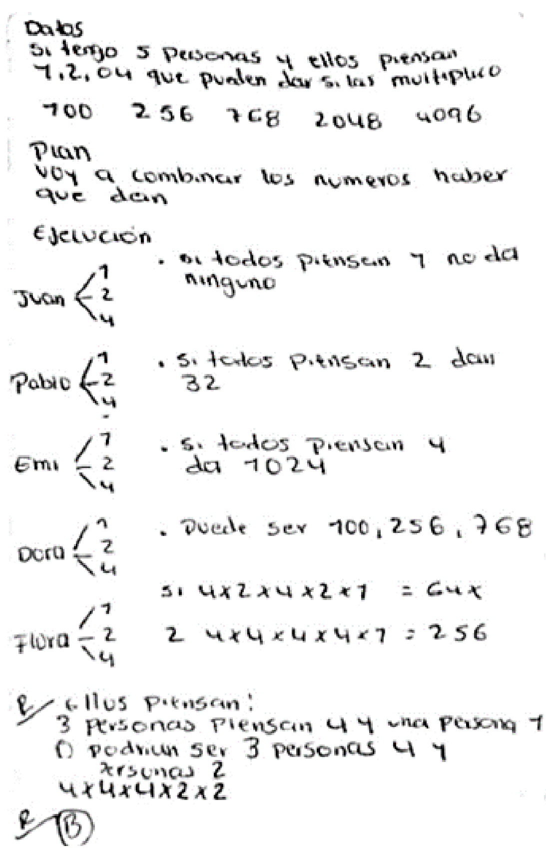
Fuente: Autoría propia.

De la figura 78 se puede observar que el estudiante E15 determina las condiciones dadas en el enunciado y su incógnita correctamente, lo que le permite tener una buena comprensión del problema, así mismo en la planeación se evidencia que optó por la estrategia *empezar por lo* *fácil hace fácil lo difícil* ya que propone descomponer cada uno de los números en las opciones de respuesta mientras que en la ejecución del plan utiliza la estrategia *de ensayo y error*, puesto que toma todas las opciones posibles y procede a descomponer cada número en factores primos para poder observar cuál de estos cumplía con lo requerido en el enunciado, lo anterior lo llevó a redactar la solución del problema de forma correcta y además se puede observar que el estudiante comprueba cada uno de los valores obtenidos en el proceso de resolución.

Cabe mencionar que al terminar de exponer la solución de la figura 78, algunos estudiantes en la retroalimentación expresaron que el proceso presentado era más fácil de realizarlo, puesto que ellos habían procedido de una forma diferente, a continuación, se muestra la solución presentada por el estudiante E11.

Figura 79

Resultado presentado por el estudiante E11.



Fuente: Autoría propia.

En la figura 79 se puede observar que el estudiante E11 identifica los datos y la incógnita enunciada en el problema correctamente, además en la planeación enuncia que el plan será combinar los números, lo cual lo lleva a proceder por ensayo y error debido a que se tenía varias alternativas para verificar si cumplían con lo requerido, al ejecutar el plan en primer lugar identifica cual es el menor número y el mayor número que se puede obtener con las condiciones del problema, lo cual permite descartar respuestas, posteriormente prosigue ensayando y realizando combinaciones entre los números dados hasta obtener una que satisfaga las condiciones del problema, se puede evidenciar también que el estudiante expresa la solución de dos formas que conllevan a una misma respuesta.

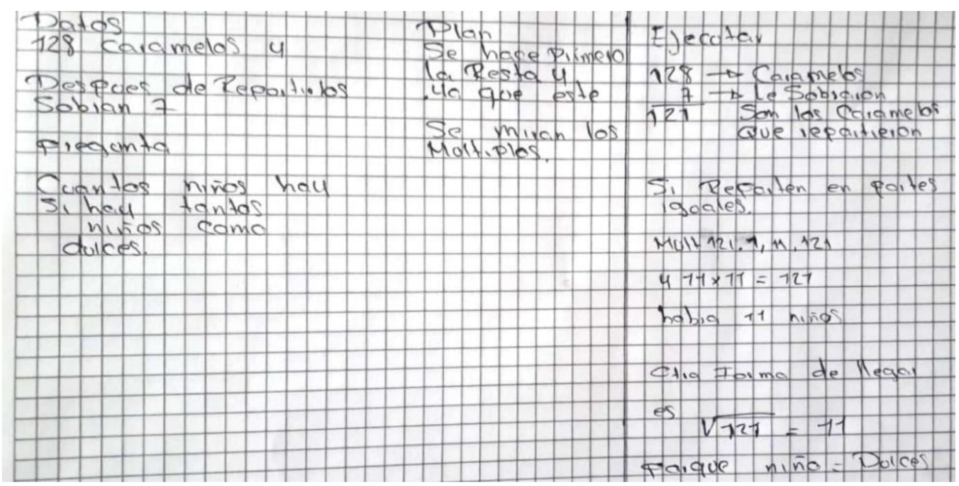
Durante la retroalimentación se expusieron las justificaciones del problema correctamente. Lo cual permitió evidenciar en los estudiantes un buen análisis, apropiación del problema y buen uso de estrategias para resolverlo, esto fue muy gratificante para las practicantes ya que más que dar una respuesta estaban verificando si era posible y si habría otra solución más fácil que los condujera a la misma respuesta.

Problema D.

Problema tomado de Perez (s.f.): En una fiesta de cumpleaños de mi hermano pequeño había 128 caramelos, para repartir después del reparto cada niño tenía tantos caramelos como niños había, si sobraron 7 caramelos ¿Cuántos niños había?

Figura 80

Resultado presentado por el estudiante E6.



Fuente: Autoría propia.

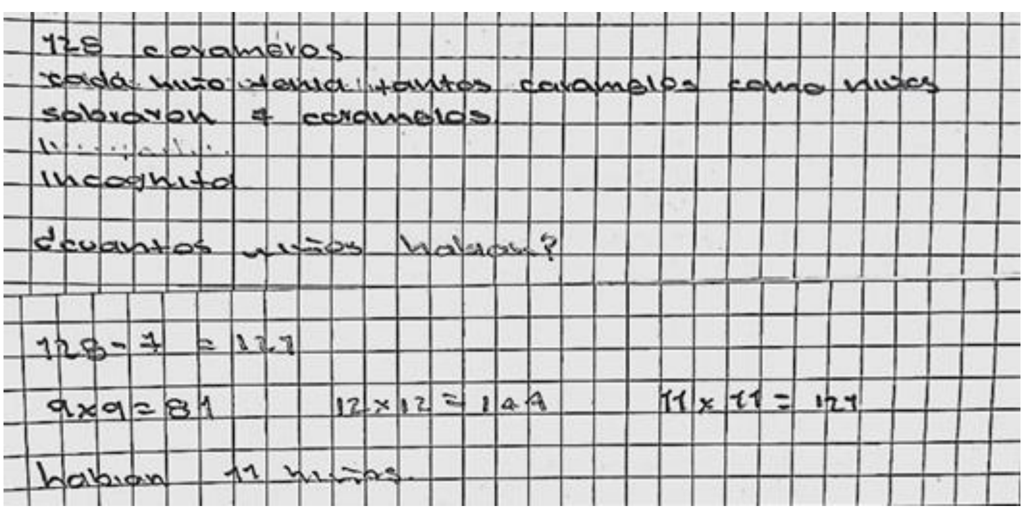
En la figura 80 se puede visualizar que el estudiante E6, distingue los datos e identifican la pregunta, en la siguiente fase del problema, el estudiante reconoce las operaciones y el orden el que se deben realizar estas y para dar inicio a la ejecución el estudiante realiza en primer lugar una resta, lo que le permite identificar cuántos caramelos repartieron, para posteriormente buscar dos números cuyo producto sea 121, para lo cual utiliza sus conocimientos previos y busca los múltiplos de 121, lo que le permite encontrar el número 11, que satisface las condiciones del problema y además permite dar una respuesta coherente a la pregunta planteada, cabe destacar que el estudiante E6 plantea una solución alternativa usando radicación, lo cual le permite al estudiante verificar que su resultado es correcto

Es importante mencionar que, durante la exposición de la solución, el estudiante explicó cada paso realizado de manera detallada lo cual permitió tener mejor comprensión por parte de sus compañeros. Ahora bien, para la explicación de la segunda solución que propone el estudiante E6, se pidió al estudiante E7 que saliera al frente, ya que había propuesto una solución similar, durante la exposición se pudo evidenciar que los estudiantes manejan bien el concepto de radicación y hacen uso de algunos ejercicios propuestos en el taller evaluativo.

Después de presentar las anteriores soluciones, un estudiante E21 propuso una manera diferente de dar una solución, la cual se presenta a continuación.

Figura 81

Resultado presentado por el estudiante E21.



Fuente: Autoría propia.

En la figura 81 se puede apreciar que el estudiante E21 efectúa correctamente la elección de los datos y aunque no realiza un plan previo se puede evidenciar que hace uso de la estrategia ensayo y error, ya que realiza diferentes pruebas aproximándose al resultado, lo cual permite generar una respuesta correcta.

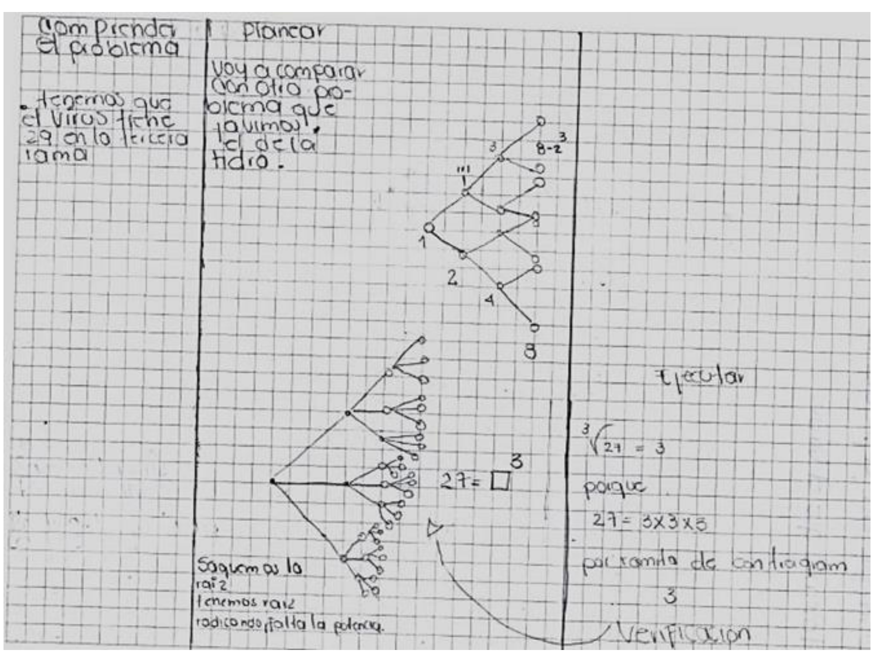
Cabe mencionar que durante la exposición en la retroalimentación el estudiante E21 sí menciona que su plan será multiplicar 2 números iguales hasta que el producto sea 121 y que debía proceder de manera análoga al problema C. Lo que permite identificar que el estudiante no opta por enunciar el plan ya que se hace evidente en la solución. Puede agregarse que el estudiante E21 expresó que el método más factible era el de usar radicación, ya que la solución mostrada en la figura 81, se complicaba cuando fueran números más grandes.

Problema E.

Problema tomado de Duarte (2016) Como hemos visto los virus se propagan de forma exponencial o en potencia. Si el virus x tiene un crecimiento similar por rama al problema presentado en la actividad 5 de la guía 2, y se sabe que en la tercera rama se tiene 27 personas contagiadas, ¿cuántas personas se contagian por rama?

Figura 82

Solución presentada por estudiante E12.

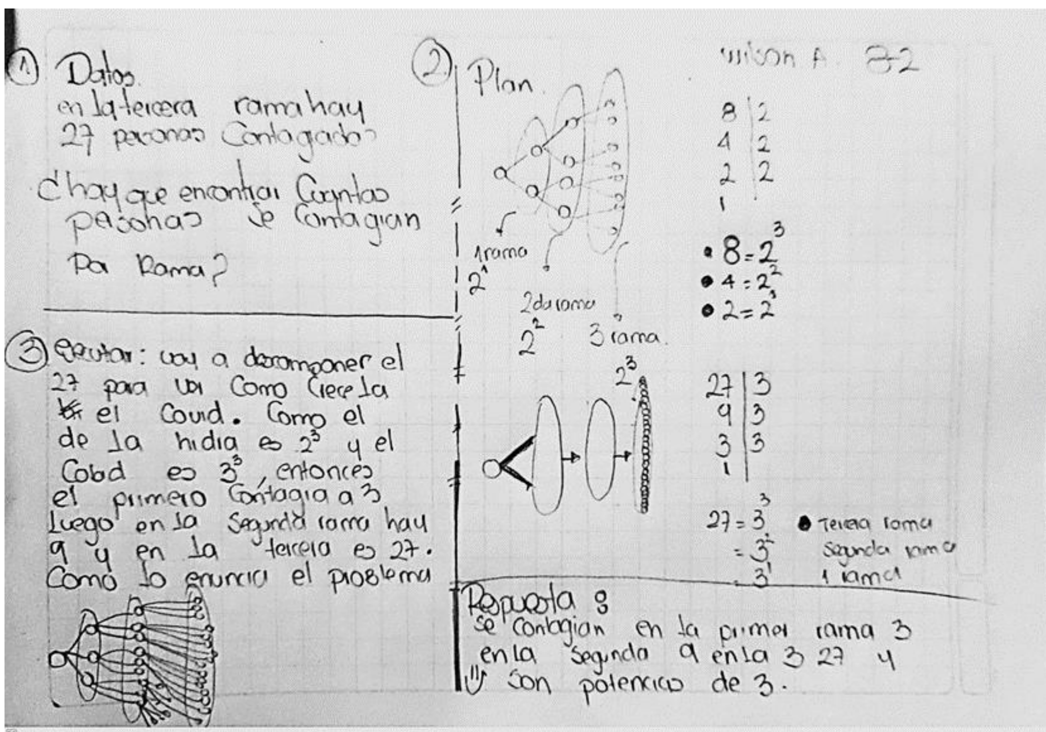


Fuente: Autoría propia.

Evidentemente en la figura 82 se puede observar que el estudiante E12 identifica la información que ofrece el problema y no especifica cuál es la incógnita que debe resolver, sin embargo en la planeación se puede evidenciar que el estudiante, relaciona el problema propuesto con un problema semejante realizado en sesiones anteriores , esto se puede notar en la comparación que realiza con el problema de la hidra, en el cual concretamente compara diagramas, que le permiten concluir cuál es la operación a realizar con el número 27 (radicación), lo anterior le posibilita estructurar una respuesta, sin embargo el estudiante no interpreta bien la pregunta y propone una respuesta incorrecta. Cabe resaltar que durante la socialización de la respuesta del estudiante E12, se realiza la respectiva corrección, enunciando una pregunta con la cual la respuesta tendría sentido. A continuación, se muestra una solución presentada por el estudiante E9

Figura 83

Solución presentada por estudiante E9.



Fuente: Autoría propia.

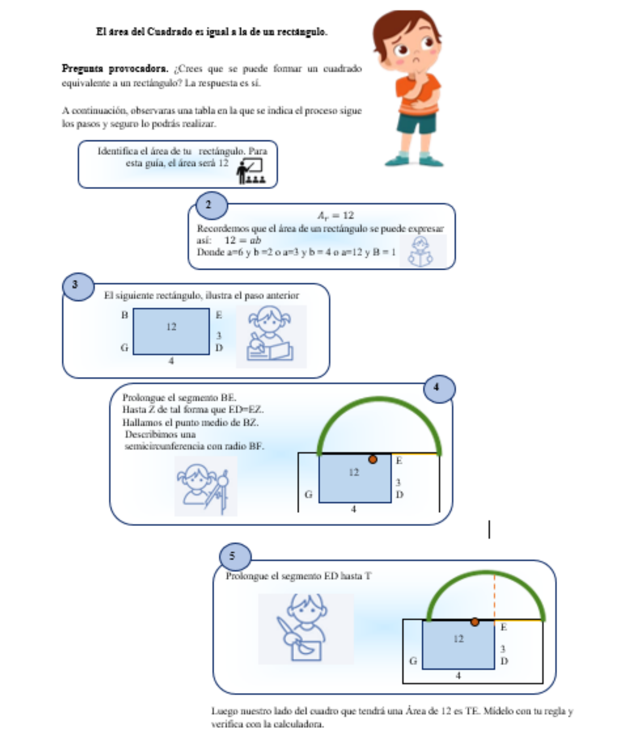
En la solución presentada por el estudiante E9, se puede evidenciar que reconoce los datos y el objetivo del problema correctamente. Además, en la etapa de planeación se muestra una relación con el problema de la hidra, en el cual identifica características y patrones que luego refleja en el problema planteado. Lo anterior permite que, durante la ejecución del plan, se complete el diagrama propuesto en un inicio y se verifiquen los resultados obtenidos en la anterior etapa. Lo cual le permite redactar una respuesta coherente en la que se observa buen análisis, conviene señalar que el estudiante E9 realiza una solución al problema, pero en lenguaje natural, y durante la retroalimentación se hace énfasis en la generalización, pero con un lenguaje algebraico.

Problema F.

Problema tomado de Recalde (2018)**:** El área del Cuadrado es igual a la de un rectángulo**.**

Figura 84

Procedimiento del problema F



Nota. La anterior imagen muestra el procedimiento que los estudiantes llevan a cabo para construir un rectángulo equivalente a un cuadrado. Fuente: Recalde (2018).

En esta actividad se presentaron algunas dificultades, esto se dio a causa, de que la practicante asume que los estudiantes tenían apropiado el concepto de áreas y algunas fórmulas para su cálculo, lo cual no era así, esto evidencia que los aprendizajes durante la pandemia no tuvieron buena apropiación por parte de los estudiantes, y a consecuencia de ello fue necesario explicar particularmente para la figura del rectángulo, otro inconveniente durante esta actividad es que los estudiantes no tenían buen manejo de regla y compás y no hacían buen uso de la guía que tenían que seguir, además manifestaban constantes preguntas hacia la practicante, lo que conllevo a que no se culmina la sesión con éxito y se tuviera que repetir.

Figura 85

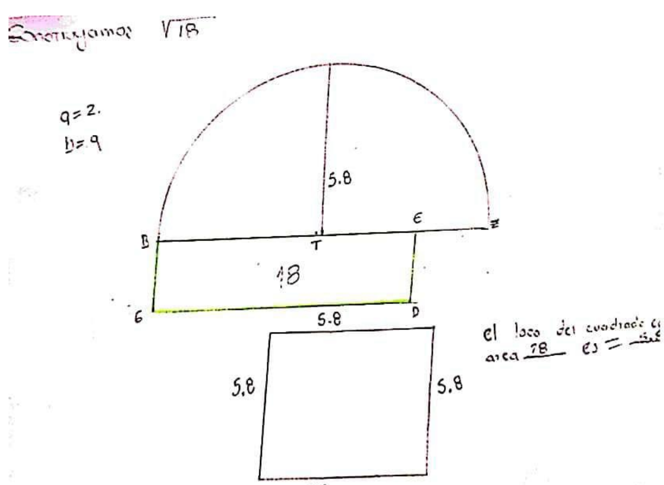
Estudiantes realizando el problema rectángulo equivalente a un cuadrado.

Fuente: Autoría propia.

Durante la sesión siguiente, los estudiantes se notaron más centrados y se obtuvieron los siguientes resultados.

Figura 86

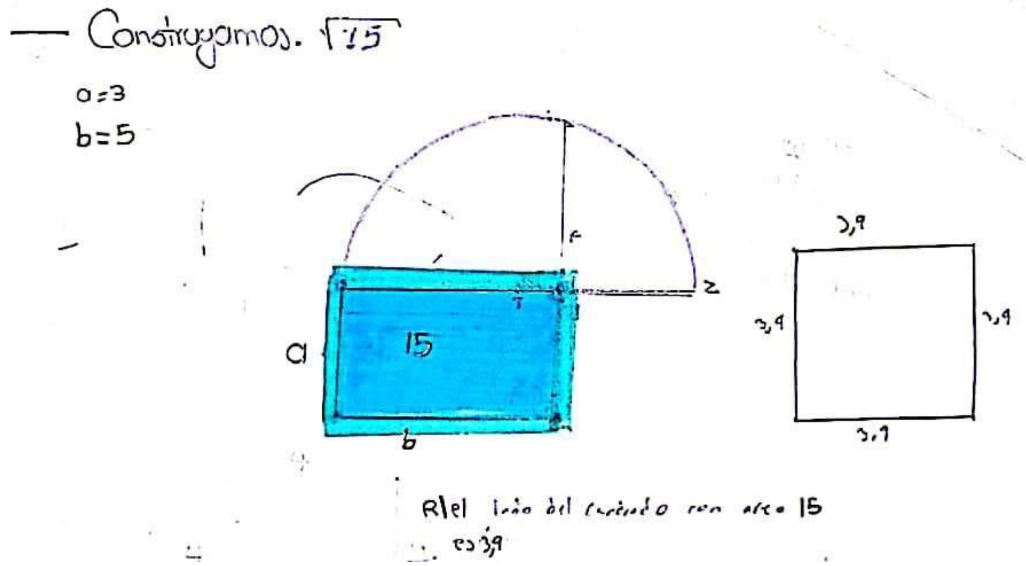
Solución presentada por el estudiante E19.



Fuente: Autoría propia.

Figura 87

Solución presentada por el estudiante E14.



Fuente: Autoría propia.

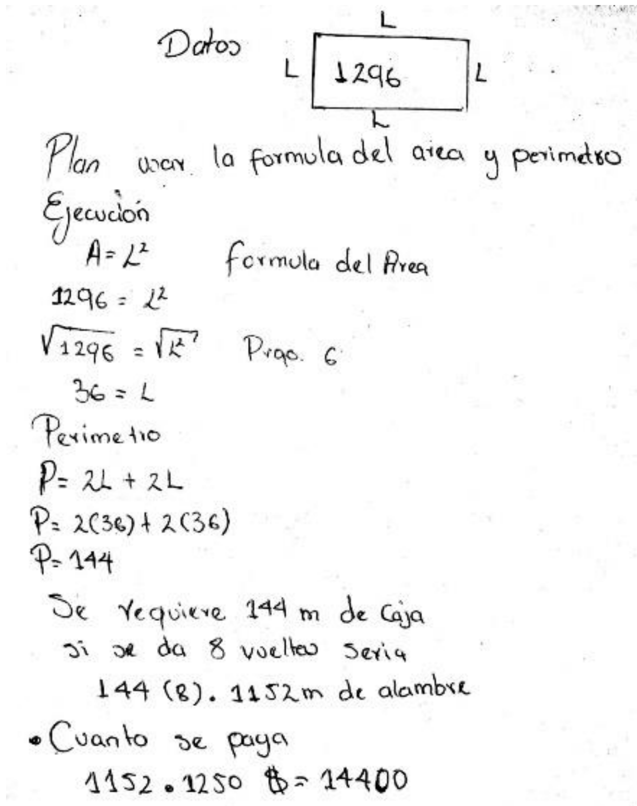
En la figura 86 y 87, se evidencia que los estudiantes realizaron construcciones de manera muy organizada y ejecuta cada uno de los pasos propuestos para este problema (ver anexo B), a consecuencia de ello el estudiante responde de una manera coherente y concreta a la pregunta planteada. Cabe mencionar que esta sesión se movilizó el concepto de raíz cuadrada de una forma diferente, ya que muchas veces los estudiantes calculan todo mecánicamente y no se cuestionan acerca de cómo surgió esto, además fue muy agradable observar como en la exposición del refuerzo de área los estudiantes, participan y toman las cosas con buena actitud, además fue agradable también cuando los estudiantes verificaban sus respuestas y ver su rostro de asombro al ver lo parecido de sus respuestas.

Problema G.

Problema tomado de Mancera (2022): Un terreno cuadrado tiene una superficie de 1296 m^2 y se quiere rodear completamente con una valla. ¿Cuántos metros de valla se necesitan para rodear el terreno?, si se quiere cercar con un alambre con 8 vueltas. ¿Qué cantidad de alambre se necesita? Cuánto se pagó, si cada m cuesta 12.50 dólares.

Figura 88

Solución presentada por estudiante E28

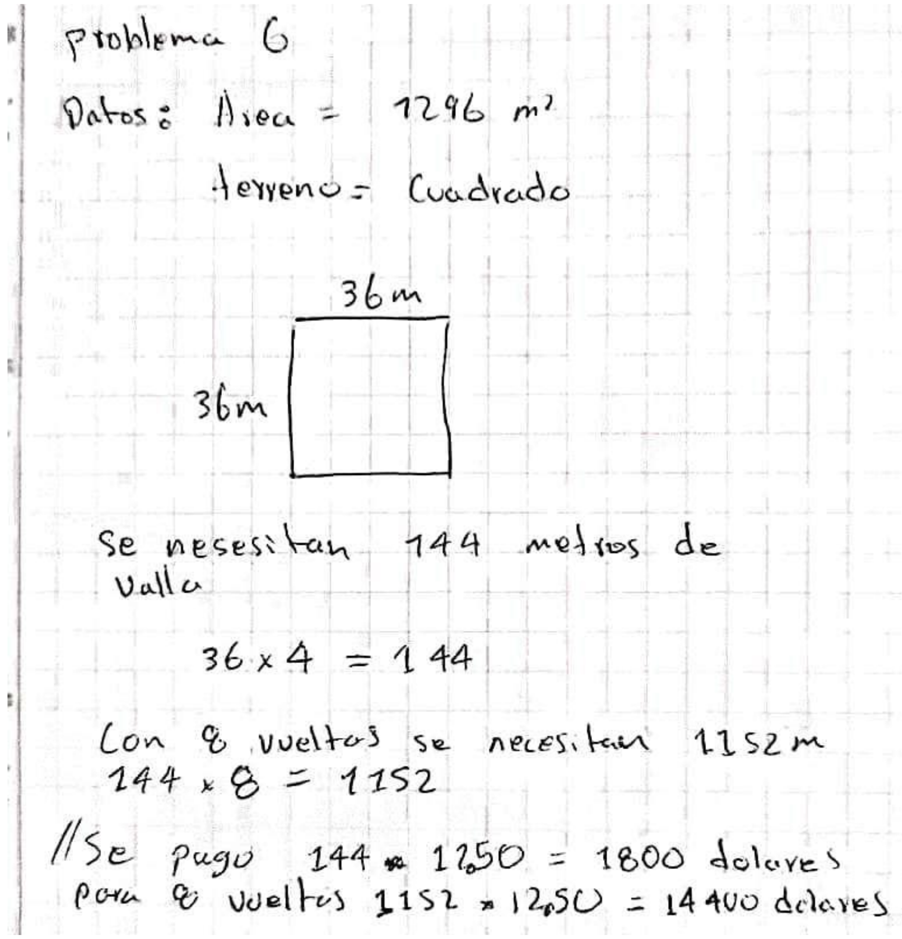


Fuente: Autoría propia.

La figura 88 evidencia que el estudiante E28, identifica el área como la medida de un espacio delimitado por un contorno al que se denomina perímetro, así mismo durante la etapa de planeación se puede observar que, plantea las fórmulas que debe implementar para dar solución al problema, y durante su aplicación se puede apreciar que en primer lugar a las fórmulas planteadas les asigna variables, en segundo lugar, se evidencia que reemplaza términos conocidos y utilizando propiedades despeja su primer incógnita, para finalmente utilizar la fórmula del perímetro en donde, también designa con letras el lado del cuadrado para luego reemplazarlas con el valor que obtuvo anteriormente, lo cual le permite redactar las respuestas correctamente.

Figura 89

Solución presentada por el estudiante E27.



Fuente: Autoría propia.

La figura 89 muestra, que el estudiante E27 realizó el mismo procedimiento que se muestra en la figura 88, realizando operaciones directamente, y para dar respuesta a la pregunta de cuánto se pagaba, es notable que el estudiante no sabía si preguntaba por cuánto pagaba por cercar el terreno con una vuelta o cuánto pagaba por cercarlo con 8 vueltas, lo que lo conllevo a dar respuesta a ambas preguntas, mientras que en la figura 88 se evidencia que se comprende mejor la pregunta realizada.

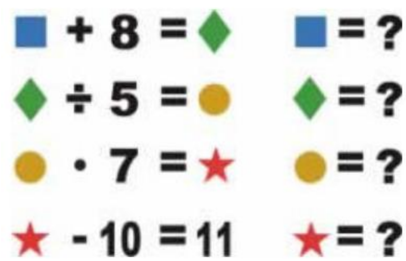
Se puede concluir que hay un buen análisis al resolver este problema ya que este incluía varias preguntas que se deberían solucionar en secuencia para obtener con éxito los resultados.

Problema H.

Hallar el valor numérico de cada uno de los símbolos.

Figura 90

Ecuaciones con símbolos.



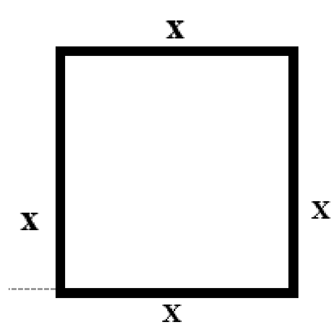
Nota. La imagen muestra ecuaciones algebraicas, donde las incógnitas son figuras geométricas. Fuente: Rai (2007)

Problema I.

Un cuadrado cuyos lados miden x tiene un perímetro de 76 cm cuánto mide cada lado.

Figura 91

Problema de expresiones algebraicas.



Fuente: Autoría propia.

9.3 Comparación entre el Análisis de Juegos y el Análisis de Problemas.

Del análisis de las actividades 5 y 6 realizadas en el aula, y descritas anteriormente, se puede establecer un símil entre las fases de resolución de un problema propuestas por George Pólya y las fases para enfrentarse en un juego de estrategia, a continuación, se indicarán las relaciones encontradas entre dichas fases.

De acuerdo con el análisis previo, se puede apreciar que la fase de comprensión de un juego es una condición necesaria para que en el juego sea entendido y surjan diferentes estrategias. Ya que si un jugador ignora cuál es el propósito de la actividad, qué situaciones le permiten obtener una victoria, qué acciones son permitidas y cuáles no, difícilmente el estudiante podrá elaborar un plan para construir una estrategia ganadora e incluso perder el interés por el juego. De modo similar ocurre en la fase de comprensión de un problema, ya que en esta etapa el estudiante debe entender e identificar los requerimientos y condiciones del enunciado del problema, puesto que no se puede contestar una pregunta que no se comprende ni es posible trabajar para un fin que no se conoce. Lo anterior permite vislumbrar un proceso análogo dentro de la fase de comprensión entre juegos y problemas, ya que se constituye como un ejercicio elemental de reconocimiento para el desarrollo exitoso de ambos procesos.

Durante la planificación se debe concebir una estrategia de juego, para ello se pueden idear retos más sencillos, relacionar dónde quieres llegar con la situación de la que partes, buscar resultados inmediatos o accesibles, o identificar las consecuencias que en tu juego o en el de tus oponentes podrían dejar tus actuaciones, es importante mencionar que al intentar ganar un juego, los estudiantes utilizan las siguientes estrategias: pensar hacia atrás, prueba y error, simplificación de tareas, búsqueda de patrones, y simetría. Las cuales guardan una gran similitud con las heurísticas que han sido identificadas como habilidades fundamentales para resolver exitosamente problemas matemáticos.

Por ejemplo, en el juego las torres de Hanói a partir de diagramas o ilustraciones, se visualiza dos estrategias fundamentales la primera ensayo y error, y la segunda identificación de patrones lo que le permitió configurar una estrategia ganadora. Algo similar ocurre en el problema A en el cual los estudiantes a partir de diagramas, identifican patrones que les permiten deducir que operación realizar para dar respuesta a las preguntas planteadas.

Durante la fase de poner a prueba las estrategias del juego, se puede concebir como algo más técnico puesto que se concreta lo planificado anteriormente, donde los estudiantes llevan a la práctica las estrategias y a medida que se avanza realizan revisiones para mejorar la estrategia o cambiarla si encuentran fallas en ellas. De igual forma sucede en la fase de ejecución del plan para resolver un problema, ya que en este el estudiante identifica y explica cada paso realizado durante el procedimiento para llegar a una respuesta.

Finalmente, se evidenció que los estudiantes exploraron si la estrategia desarrollada era ganadora, o al menos, asegura no perder y también si se puede mejorar o favorecer de algún modo, esto efectivamente lo realizaba el estudiante, cuando jugaba con otro oponente ya que esto le permitía validar en el caso de haber ganado y reevaluar sus movimientos en caso de haber perdido. Del mismo modo sucede en la resolución de problemas ya que en esta fase cuando el estudiante está revisando su solución, procede a indagar si la misma respuesta se puede obtener de manera diferente.

Todo lo planteado hasta ahora permite ratificar que los juegos de estrategia presentan características relacionadas a la resolución de problemas, ya que poseen una estructura muy similar a la secuencia para resolver problemas que propone George Pólya: comprender un problema, concebir un plan, ejecutar un plan y examinar la solución obtenida.

10 Conclusiones

- En cuanto al primer objetivo específico, se puede resaltar que las guías tipo pre-test permiten a las practicantes verificar la información obtenida en los espacios de inmersión en el aula, para posteriormente diseñar actividades que atiendan las problemáticas identificadas en la población.
- En cuanto al segundo objetivo específico, podemos concluir que la secuencia que se implementó para el desarrollo de las guías (temática, juego, problema y evaluación) permite a las practicantes orientar sesiones de clase dinámicas y significativas a los estudiantes, teniendo los juegos como una herramienta motivadora y generadora potencial de estrategias para la resolución de problemas. Además, cabe mencionar que tanto los juegos como los problemas se deben ajustar cuidadosamente al nivel educativo de los estudiantes.
- En cuanto al tercer objetivo específico, las practicantes encontraron propicia la disposición secuencial de juegos y problemas, ya que esto permitió en los estudiantes comunicar y argumentar las estrategias empleadas tanto en los juegos como en la resolución de problemas.
- En cuanto al cuarto objetivo específico, en la comparación realizada entre el análisis de juegos y problemas se pudo determinar que los estudiantes empleaban las estrategias

utilizadas en el desarrollo de los juegos para resolver problemas, así mismo integraban estrategias de resolución de problemas en diversos juegos.

- La retroalimentación fue una actividad significativa durante la práctica pedagógica ya que permitió que el estudiante comunicará y reflexionará sobre los resultados, generando discusiones y consensos tanto para los juegos como para los problemas.
- Teniendo en cuenta el cumplimiento de cada uno de los objetivos específicos, se puede concluir el alcance del objetivo general, ya que a lo largo de este estudio se pudo apreciar claramente la existencia de una relación directa entre los juegos de estrategia y la resolución de problemas, tal y como se pueden evidenciar en los resultados obtenidos.
- El uso de los juegos de estrategia influyó de forma positiva en el aprendizaje de la resolución de problemas en potenciación y radicación en los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Liceo Alejandro de Humboldt, ya que se pudo observar que a medida que las sesiones avanzaban, los estudiantes iban asimilando la dinámica de trabajo y requerían cada vez menos de la ayuda del practicante, al mismo tiempo que el trabajo se tornaba cada vez más colaborativo entre ellos. En donde compartían inquietudes y estrategias que identificaban tanto de los juegos como de los problemas, y se esforzaban por comunicar y argumentar sus ideas para que los demás pudieran comprender lo que pensaban, siendo ellos los protagonistas y los verdaderos resolutores de las actividades.
- Si bien el aspecto motivacional provocado por las actividades propuestas no forma parte de nuestro estudio, se debe mencionar que durante las actividades los estudiantes se mostraban interesados e involucrados en resolver los desafíos planteados, puesto que estos se presentaron de manera lúdica y con igual importancia, tanto en el caso de los juegos como de los problemas.
- En definitiva este tipo de actividades generaron un atractivo en las docentes titulares del grado 8-1 y 8-2, ya que se mostraron interesadas por la forma como se habían desarrollado las actividades, puesto que notaron una mayor participación de los estudiantes por el nuevo ambiente que se había generado en el aula; a diferencia de las clases convencionales que tenían un enfoque tradicional, por lo cual solicitaron información a las practicantes referente a estas herramientas que se emplearon en el transcurso de las sesiones e incluso las docentes adoptaron material y juegos presentados

por las practicantes en otros grados, y reconocieron el alto potencial didáctico de los juegos; puesto que por desconocimiento de juegos que se adapten a las temáticas no habían sido implementados en las aulas de clases.

11 Sugerencias

- Se recomienda a los sujetos interesados en implementar esta herramienta didáctica, acompañar y supervisar la aplicación de los juegos de estrategia dentro del aula de clases u otro espacio educativo, para evitar que los aprendices se desenvuelvan de forma errónea durante el juego, y a causa de esto no se logre alcanzar los objetivos esperados.
- Se recomienda a los docentes, que es necesario considerar el nivel académico que presentan los estudiantes, ya que, si estos cuentan con un bajo nivel, es necesario realizar una clase de nivelación para que los alumnos estén listos para desarrollar y emplear los juegos y se puedan alcanzar los objetivos.
- Se recomienda a los docentes, que los juegos de estrategia presentados en la actividad seis del proyecto, pueden ser adecuados de acuerdo con las necesidades de los estudiantes donde han de ser implementados.
- Los juegos de estrategia empleados en el proyecto demostraron ser un material didáctico eficiente para desarrollar en los estudiantes habilidades en la competencia de resolución de problemas, además se recomienda implementar otros juegos de estrategia que se adapten a las temáticas que se van desarrollando dentro del aula de clases.
- En cuanto a la elaboración de los juegos, se recomienda a los docentes que el material debe ser llamativo, seguro, resistente, atractivo, y además debe ir acorde a la edad y el contexto en el que se desee implementar.

12 Referencias

Allendoerfer, C. y Oakley, C. (1990). *Matemáticas universitarias.* McGRAUW -HILL LATINOAMERICANA, S.A.

Badillo, E., Deulofeu, J. y Edo, M. (2007). Juego y matemáticas: Un taller para el desarrollo de. En M. B. (Eds.), *Actas XIII JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas.* (págs. 2-3). https://gent.uab.cat/mequeedo/es/content/matem%C3%A1ticas-en-educaci%C3%B3n-primaria-6-12-a%C3%B1os

Baeza, M. (2015). *Estudio comparativo de procesos de resolución de problemas y de juegos de estrategia en educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona] Tesis Doctorales en Xarxa. https://www.tesisenred.net/bitstream/handle/10803/402489/mlbt1de1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Bautista, J. y López, N. (2002). El juego didáctico como estrategia de atención a la diversidad. *Revista Ágora digital, 4*(1), 134-141. https://www.researchgate.net/publication/28073772_El_juego_didactico_como_estrategia_de_atencion_a_la_diversidad

Berganza, R. (s.f.). *Problemas 8 manual para docentes, enunciados y soluciones.* https://www.omapa.org/document/problemas-8-manual-para-docentes/

Blanco, I. D. (2 de febrero de 2022). *Problemas con potencias*. Smartick https://www.smartick.es/blog/matematicas/algebra/problemas-con-potencias/

Cabello, G. (2014). Matemática recreativa y resolución de problemas en la educación primaria. *Revista investigación educativa, 7*(10), 66-73. https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/8153

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática.* Universidad de Antioquia.

Carvajal, C. A. y Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? percepciones en la enseñanza media costarricense. *Portal de Revistas Académicas Universidad de Costa Rica*, 85-87. Obtenido de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6902/6588

Corbalán, F. (1996). Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos. *Revista Suma,* (23), 21-22. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/23/021-032.pdf

Chamorro, M. d. (2004). Leer, comprender, resolver un problema matemático escolar. En J. M. Gómez (Ed.), *Los lenguajes de las ciencias* (pp.175-203). Ministerio de Educación

Duarte, D. M. (2016). *Resolución de problemas: Una mirada desde Goldin* [Trabajo de grado, Universidad Externado de Colombia]. Repositorio Institucional Biblioteca Digital Externadista. https://bdigital.uexternado.edu.co/server/api/core/bitstreams/a521c4fc-88cd-4b39-8b4f-dc5a6276028b/content

Edo, M. y Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Revistes Digitals de la Universitat Autònoma de Barcelona, 24*(2), 257-268. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3804

Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J. y Badillo, E. (2008). Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución del problema. *Revista iberoamericana de educación matemática, 4*(14), 61-76. https://union.fespm.es/index.php/UNION/issue/view/21/18

Escudero, J. (1999). *Resolución de problemas matemáticos.* Independently Published. http://platea.pntic.mec.es/jescuder/BLOG1/Resolucion%20de%20problemas%20matematicos.pdf

Fernández, A. (2021). *Implementación en Matlab del algoritmo Minimax en un juego simple mediante interfaces gráficas de usuario* [Trabajo de grado, Universidad de Sevilla]. Depósito de Investigación Universidad de Sevilla. https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/126329/TFG-3564 FERNANDEZ%20DELGADO.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Gairín, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Revistas Catalanas con Acceso Abierto,* (17), 105-118. https://raco.cat/index.php/Educar/article/view/42235/90184

García, A. (s.f.). *Juego piensa un número: La magia del álgebra*. Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas https://anagarciaazcarate.wordpress.com/piensa-un-numero-la-magia-del-algebra/

Gardner, M. (2008). *Matemática para divertirse.* RIL.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Revista Sigma,* (19), 51-63. Obtenido de https://sferrerobravo.files.wordpress.com/2007/10/7_tendencias_actuales.pdf

Goldin, A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. E. Kelly & R. Lesh, *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517- 547).Lawrence Erlbaum Associates.

Gómez, I. (1990). Los juegos de estrategias en el currículum de matemáticas. En R. Porlán & P. Cañal, *Cambio educativo y desarrollo profesional: actas VII Jornadas de Estudio sobre la Investigación en la Escuela, año 1990* (pp. 323-330). Sevilla. https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/50630/CEDP_36.pdf?sequence=1&isAllowed=y

González, A., Molina, J. y Sánchez, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego. *Educación Matemática*, *26* (3), 109-133. https://www.redalyc.org/pdf/405/40540689005.pdf

Gonzáles, F. (2016). *Influencia de los juegos recreativos en la resolución de problemas matemáticos de los estudiantes de educación secundaria de la institución educativa Carlos Matta Rivera* [Tesis, Universidad César Vallejo]. Repositorio digital institucional Universidad César Vallejo https://repositorio.ucv.edu.pe/handle/20.500.12692/21303

González, A., Molina, J. y Sánchez, M. (2017). Identificación de estrategias en un juego bipersonal entre estudiantes universitarios. *Educación matemática*, *29*(2), 187-208. https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v29n2/1665-5826-ed-29-02-00187.pdf

Grande, I., & Abascal, E. (2009). *Fundamentos y técnicas de investigación.* Esic.

Guzmán, M. d. (1986). Juegos matemáticos en la enseñanza. *Revista Boletín de la Sociedad Puig Adam de profesores de matemáticas*, (10), 25-44. Obtenido de https://documat.unirioja.es/servlet/revista?codigo=3289

Guzmán, M. d. (2021). *Aventuras matemáticas.* Difusora Larousse.

Hernández, M. A. (2014). *Metodología activa como herramienta de aprendizaje de las operaciones básicas matemáticas maya* [Tesis de grado, Universidad Rafael] Biblioteca Landivariana. http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesiseortiz/2014/05/86/Hernandez-Miguel.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* McGraw - Hill Education. https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.

Huizinga, J. (1972). *Homo Ludens (E. Imaz, Trad.).* Alianza. (Trabajo original publicado en el año 1938). Obtenido de https://eva.isef.udelar.edu.uy/pluginfile.php/2157/mod_resource/content/3/Huizinga%20-%20Homo%20Ludens%20%281%29.pdf

Jaramillo, L. M. y Puga, L. A. (2015). Metodología activa en la construcción del conocimiento matemático. *Sophia*, (19), 291 - 314. https://doi.org/10.17163/soph.n19

Latasa, M. (2011). Juegos matemáticos la torre de Hanói y los Qn grafos. *Pensamiento Matemático*, (1), 1-9. https://revista.giepm.com/wp-content/uploads/revista_impresa/numero_1/la_torre_de_hanoi

López, I. y Almendra, M. (2022). *Refuerzo de los conceptos de perímetro, área y volumen por medio de la resolución de problemas y las matemáticas recreativas.* [Trabajo de grado, Universidad del Cauca].

Mancera, A. (2022, 11 de mayo). *Problemas de Potenciación y Radiación.* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=3908Vx9OQXk mechON. (2015, 5 de junio). *El Origen de las Potencias - Historia del tablero de Ajedrez*. [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/channel/UCDkUvVlTOJ1RjeGvYxytAzQ

Mejía, M. R. (2012). *sistematización una forma de investigar las prácticas.* Ministerio de educación.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.*

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.*

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje.*

Moschkovich, J. N., & Brenner, M. E. (2000). Integrating a Naturalistic Paradigm Into Researche on Mathematics and Sciencie Cognition and Learning. En A. E. Kelly, R. A. Lesh, & (Eds), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 457-487).

Núñez, C. (2017). *Programa de juegos educativos para mejorar la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de primer grado de educación primaria de la institución educativa nº 10329- Delicias- Querocotillo- Cutervo, 2016.* [Trabajo de maestría, Universidad Cesar Vallejo]. Repositorio institucional UCV. https://repositorio.ucv.edu.pe/handle/20.500.12692/16809

Olfos, R. y Villagrán, E. (2001). Actividades lúdicas y juegos en la iniciación al álgebra. *Revista integra, 5*, 39-50. https://scholar.google.com/citations?user=5dJaYflLtqwC&hl=th

Orton, A. (1998). *Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica en el aula* (4ª ed.). Morata. https://acortar.link/hhQYJV

Perez, C. (s.f.). *Potenciación y radicación con -z-*. Live worksheets https://es.liveworksheets.com/rg1678670aa

Pestana, D., Rodríguez, J., Romera, E., Touris, EÁlvarez, V. y Portilla, A. (2000). *Curso práctico de cálculo y precálculo.* Ariel. https://books.google.com.co/books?id=kSTpG2fzwMcC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas.

Rai. (23 de Agosto de 2007). *criptograma.* matesymas. https://www.matesymas.es/criptograma/

Recalde, L. C. (2018). *Lecturas de historia de las matemáticas.* Universidad del Valle https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=lecturas+de+hIstoria+de+las+matematicas++univalle&btnG=

Salgado, A. C. (2007). Investigación cualitativa: diseños, evaluación del rigor metodológico y retos. *Liberabit*, *13*(13), 71-78. http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1729-48272007000100009

Torres, L. A. (30 de abril de 2012). *Mate juegos*. Obtenido de https://actiweb.one/lasmatematicas/espacio.html

Valderas, P. (25 de febrero de 2018). *Cómo resolver las Torres de Hanói*. Obtenido de El Matenavegante: http://elmatenavegante.blogspot.com/2018/02/algunos-secretos-de-las-torres-de-hanoi.html

Yuni, J. Y Urbano, C. A. (2006). *Técnicas para investigar: recursos metodológicos para la preparación de proyectos de investigación.* Brujas.

13 Anexos

ANEXO A

Guía de potenciación

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT GUÍA DE APRENDIZAJE **Escucho y olvido, veo y recuerdo, hago y comprendo. Prov. Chino**	**Grado Octavo** **Asignatura Matemáticas** **Guía No.2**

Periodo: I	**Fecha: Del 20 de mayo al 7 de junio.**	**PRACTICANTES:** **Laura Dayana Navia Trujillo (8-1)** **Aida Yeni Hernandez Rengifo (8-2)**

Nombre de la actividad: Disfrutando de las matemáticas con la implementación de juegos y problemas.

Tema: Potenciación de números racionales y sus propiedades.	**Temporalización: 11 horas**
Aprendizaje: Conocerán acerca de la identificación de características y relaciones de los números racionales y aplicación de propiedades.	**Evidencia de Aprendizaje:** Comprenderán cómo elevar una fracción a una potencia y aplicar las propiedades de la potencia, al igual que la radicación que es la operación inversa.

Motivación.

La frase nos invita a no rendirnos con el primer intento, el hecho de recaer o equivocarnos no quiere decir que no se va a lograr la meta propuesta. Al contrario, cuando se comete un error y se intenta superarlo, nos hace crecer como seres intelectuales, fortaleciendo en cada intento cada vez más nuestros conocimientos.

POTENCIACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

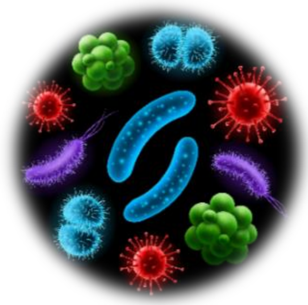
Querido estudiante te invito que explores tus conocimientos acerca del tema.

¿Habías oído hablar de las potencias?

¿Sabes qué son las potencias y para qué se utilizan?

¿Cuál es la utilidad de la potenciación en situaciones cotidianas?

USO EN LA VIDA DIARIA.



1. cálculo de propagación de bacterias se usa un sistema de potencias
2. Para calcular intereses simples y compuestos los bancos y contadores deben aplicar fórmulas de potencia.
3. Modelos de progresiones aritméticas que nos permitan conocer sumas de comportamientos sucesivos, utilizados en muchas empresas.

POTENCIACIÓN

La potenciación es un producto abreviado de factores iguales. Dados a, b y n ∈ ℤ, se define la potenciación como:

$$a^n = b \rightarrow a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n-veces} = b$$

ELEMENTOS DE LA POTENCIACIÓN

$\boldsymbol{a}$ es la base: Factor que se repite.

$\boldsymbol{n}$ es el exponente: indica el número de veces que se repite la base.

$\boldsymbol{b}$ es la potencia: resultado de multiplicar la base tantas veces como lo indica el exponente.

Exponente

Base $3^4 = 81 \ \ porque \ \ 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

Potencia

POTENCIACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

La potencia de un número racional es una fracción elevado a un exponente, donde éste se distribuye como exponente tanto del numerador como del denominador. Donde a, b y n ∈ ℤ, se define la potenciación de racionales como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b}}_{n-veces}$$

Ejemplos

$a)\ \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{2\times2\times2}{4\times4\times4} = \frac{8}{64}$ $\qquad b)\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$c)\ \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1\times1}{6\times6} = \frac{1}{36}$ $\qquad d)\ \left(\frac{12}{5}\right)^1 = \frac{12}{5}$

PROPIEDADES DE LA POTENCIA CON EXPONENTE ENTERO

En la potenciación de números racionales se aplican las siguientes propiedades:

1. **POTENCIA DE CERO:** todo número racional diferente de 0 elevado a la 0 es igual a 1.

$$(a)^0 = 1$$

Ejemplos

$a)\ \left(\frac{2}{4}\right)^0 = 1$ $\qquad b)\ \left(\frac{83}{33}\right)^0 = 1$

$c)\ \left(-\frac{5}{8}\right)^0 = 1$ $\qquad d)\ \left(-\frac{23}{53}\right)^0 =1$

2. **POTENCIA DE UNO:** todo número racional elevado a la 1 es igual a sí mismo.

$$(a)^1 = a$$

Ejemplos

$a)\ \left(\frac{3}{7}\right)^1 = \frac{3}{7}$ $\qquad b)\ \left(-\frac{3}{9}\right)^1 = -\frac{3}{9}$

$c)\ \left(\frac{7}{9}\right)^1 = \frac{7}{9}$ $\qquad d)\ \left(-\frac{13}{29}\right)^1 = -\frac{13}{29}$

3. **POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO:** Si el exponente de una potencia es negativo, su valor será igual al inverso multiplicativo de su base con el exponente como número positivo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplos

$a)\ (2)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ $\qquad b)\ \left(\frac{2}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3 = 27$

$c)\ \left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^1 = \frac{7}{4}$ $\qquad d)\ \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$

Actividad 1

RETO

Hallar cuales son los años, entre el año 1000 y 2000 en que se cumplen:

a) La suma de los cuatro dígitos del año es 21.

b) El producto de los cuatro dígitos es 162.

PREGUNTAS PROVOCADORAS:

- ✓ ¿Entiendes todo lo que dice el problema?
- ✓ ¿Distingues cuáles son los datos?
- ✓ ¿Sabes a qué quieres llegar?
- ✓ ¿Qué estrategias implementarías para encontrar una solución?

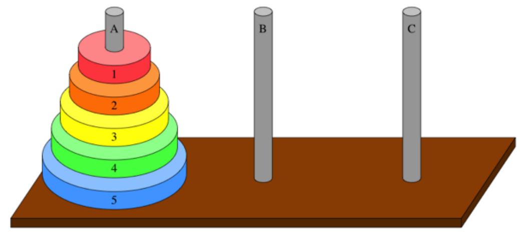
De acuerdo a lo discutido plantea una solución.

¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

Actividad 2.

“Jugar no es un descanso del aprendizaje, es un aprendizaje interminable, encantador, profundo, atractivo y practico. Es la puerta al corazón”.

Juguemos las torres de Hanói



Juguemos con las Torres de Hanói.

LEYENDA DE LAS TORRES DE HANÓI.

Dice la leyenda que, al crear el mundo, Dios situó sobre la tierra tres varillas de diamante y sesenta y cuatro discos de oro. Los discos son todos de diferente tamaño e inicialmente fueron colocados en orden decreciente de diámetros sobre la primera de las varillas. También creó Dios un monasterio cuyos monjes tienen la tarea de trasladar todos los discos desde la primera varilla a la tercera. La única operación permitida es mover un disco de una varilla a otra cualquiera, pero con la condición de que no se puede situar encima de un disco otro de diámetro mayor. La leyenda dice también que cuando los monjes terminen su tarea, el mundo se acabará.

Las Torres de Hanói es un rompecabezas o juego matemático inventado en 1883 por el matemático francés Édouard Lucas. Este juego de mesa individual consiste en un número de discos perforados de radio creciente que se apilan insertándose en uno de los tres postes fijados a un tablero.

PRIMERA FASE: EXPLOREMOS EL JUEGO.

Las torres de Hanói es un juego de estrategia, que sirve para evaluar las habilidades humanas y medir el funcionamiento ejecutivo y la capacidad planificadora.

Recursos: 12 Torre de Hanói, 60 discos de diferentes dimensiones y color, fotocopia, lápiz, borrador y colores.

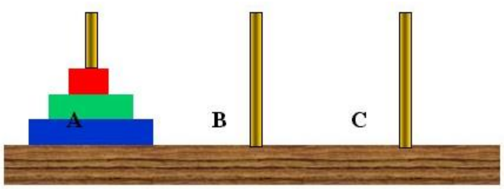
1. Inicialmente en parejas se entregará el respectivo material.

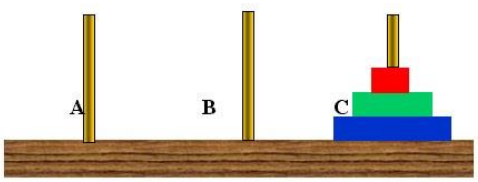
2. Seguidamente se dan a conocer las respectivas reglas e instrucciones del juego, para que los estudiantes los exploren.

Reglas del Juego:

El juego consiste en trasladar una torre de discos a lo largo de tres varillas. Teniendo en cuenta una serie de reglas

- ✓ Las piezas se trasladan de una en una.
- ✓ Sólo puedes trasladar el disco que esté arriba.
- ✓ No se puede colocar una pieza mayor sobre una menor.
- ✓ Los discos siempre estarán en uno de los tres ejes, pero nunca en la mano o sobre la mesa.
- ✓ Hay un número mínimo de movimientos para realizar el puzzle. Nuestro objetivo siempre será este número mínimo.
- ✓ Un estudiante realizará los movimientos en la torre y el otro llevará una hoja de registro.
- ✓ Los estudiantes elaborarán una tabla en donde registren el mínimo de movimientos realizados con un disco, dos discos, tres discos, etc.





SEGUNDA FASE: JUGUEMOS

- ✓ Los estudiantes realizarán una comprensión y exploración del juego.
- ✓ Competirán con sus compañeros el equipo que pase la torre con una determinada cantidad de discos a otra con un mínimo de movimientos. Será el ganador
- ✓ Durante el juego los estudiantes identificarán una estrategia.

Orden del juego:

- ✓ Los estudiantes jugarán con un solo disco, en el cual realizaran el respectivo gráfico del movimiento.
- ✓ Los estudiantes jugaran con dos discos, realizando el respectivo gráfico de cada movimiento realizado.

- ✓ Los estudiantes jugaran con tres discos, realizando el respectivo gráfico de cada movimiento realizado
- ✓ Los estudiantes jugarán con cuatro y cinco discos, para esta fase los estudiantes determinarán cuántos movimientos realizaron, no deben de presentar gráficos

TERCERA FASE: DIALOGUEMOS

Reflexionemos de nuestra experiencia:

1. ¿Qué les pareció el juego?
2. ¿Qué dificultades presentaron en el juego?

Compartamos nuestra experiencia:

- ✓ Cada equipo mencionara cuantos movimientos mínimos realizó con un disco, dos discos, tres discos, etc.
- ✓ Cuál fue el plan o estrategia que tuvo en cuenta para obtener ese mínimo de movimientos.
- ✓ De los equipos que obtuvieron menor número de movimientos socializarán cual fue su estrategia y presentar hoja de registro.
- ✓ Culminada la participación de los estudiantes se resaltará la importancia de identificar una estrategia en los juegos, en este caso de las torres de Hanói como obtener el mínimo de movimientos para pasar una torre a otro lado.

Reflexionemos cómo llegar a este número:

Datos experimentales:

M: movimientos mínimos

N: número de discos

N	M	M+1	Potencia	2^n-1=…
1	1		2^1	
2	3		2^2	
3	7		2^3	
4	15		2^4	
5	31		2^5	
:	:		:	

- ✓ Se pedirá al estudiante que analice los números de los movimientos mínimos.
- ✓ ¿Qué tipo de números está representando los movimientos?
- ✓ ¿Crees que todos los números impares están incluidos en los movimientos de las torres de Hanói?
- ✓ Identifiquemos una fórmula para calcular el número mínimo de movimientos.
- ✓ Si le sumamos una unidad a los movimientos mínimos, ¿Qué tipo de números nos quedaría?
- ✓ Las sumas que obtuvimos en el paso anterior las representamos como potencias en base 2.
- ✓ Cómo podemos calcular el mínimo de movimientos para n discos, como quedaría la fórmula.

Finalmente se presentará a los estudiantes una estrategia de cómo obtener la cantidad mínima de movimientos y se mostrará el juego con cuatro discos.

Actividad 3

Inicialmente se abordará una lectura de forma grupal y posteriormente se organizarán en parejas para solucionar el problema propuesto.

UN POCO DE HISTORIA: Sobre este juego existen muchas leyendas, pero sin duda una de las más famosas es la siguiente: Hace muchos siglos, en un país de oriente vivía un rey que había perdido a su hijo en una batalla. A causa de esta tragedia había decidido encerrarse en su castillo y no hablaba con nadie. Uno de sus ministros llamó a todos los científicos y filósofos del reino para que buscaran una posible solución a la tristeza del rey. Uno de ellos inventó un juego de estrategias, el ajedrez. El rey no sólo volvió a sonreír, sino que se volvió un gran maestro de este juego. Quedó tan feliz con el invento que decidió recompensar al inventor con lo que él pidiera. El joven que había creado el ajedrez pidió lo siguiente: un grano de trigo en la primera casilla del tablero, dos granos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta, dieciséis en la quinta y así sucesivamente hasta completar las sesenta y cuatro casillas del tablero de ajedrez. El rey muy tranquilo, pidió a los matemáticos del reino que calcularan el número de granos de trigo que debían pagarse al muchacho; al cabo de un rato, los científicos regresaron con una gran sorpresa¡:no alcanzaba todo el trigo del mundo para pagar el juego de ajedrez.

Reto

Teniendo en cuenta la lectura anterior realiza lo siguiente: Determina cuántos granos de trigo pagaría el rey en la quinta casilla de ajedrez, cuantos en la 6 sexta. ¿Podrías decir cuántos granos en la casilla 64?

Dialoguemos

- ✓ Los estudiantes se organizarán en grupos de cinco, para discutir sus soluciones en cuanto al problema planteado anteriormente.

- ✓ Posteriormente se presentará un video alusivo al problema, donde visualizaran cuantos granos de trigo debe dar el rey por cada casilla: https://etudes.ru/etudes/geometric-progression-chess/

4. **PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE:** El producto de potencias de la misma base es igual a otra potencia con la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes parciales.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

Ejemplo

- ✓ $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2+4} = \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times3}{6\times6\times6\times6\times6\times6} = \frac{729}{15625}$
- ✓ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{128}$

5. **COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE:** El cociente de potencias de la misma base es igual a otra potencia con la misma base, cuyo exponente es la resta de los exponentes parciales.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

Ejemplo

- ✓ $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \div \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{4-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3\times3}{5\times5} = \frac{9}{25}$

- ✓ $\left(\frac{5}{9}\right)^7 \div \left(\frac{5}{9}\right)^6 = \left(\frac{5}{9}\right)^{7-6} = \left(\frac{5}{9}\right)^1 = \frac{5}{9}$

6. **POTENCIA DE UNA POTENCIA:** La potencia de otra potencia es igual a otra potencia con la misma base, cuyo exponente es el producto de los exponentes parciales.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n\times m}$$

Ejemplo

- ✓ $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2\times 2} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{81}{256}$
- ✓ $\left[\left(\frac{7}{8}\right)^2\right]^1 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2\times 1} = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{7\times 7}{8\times 8} = \frac{49}{64}$

7. **POTENCIA DE UNA BASE NEGATIVA:**

- El resultado es positivo si el exponente es par.
- El resultado es negativo si el exponente es impar.

Lo anterior puede resumirse de la siguiente manera.

$$si\ \frac{a}{b} > o, \qquad b \neq 0$$

$$\downarrow$$

$$\left(-\frac{a}{b}\right)^n = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^n, si\ n\ es\ par \\ -\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right), si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

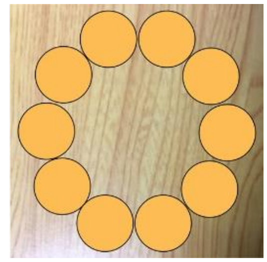
Ejemplo

- ✓ $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right) = -\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$
- ✓ $\left(-\frac{7}{3}\right)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7}{3}\times\frac{7}{3} = \frac{49}{9}$

ACTIVIDAD 4

JUGUEMOS EL CÍRCULO DE LAS MONEDAS

PRIMERA FASE: EXPLOREMOS EL JUEGO



Para jugar a este juego, toma cualquier número de fichas (pueden ser monedas, tapas de plástico, botones o piedras) y disponlos en un círculo. La ilustración muestra el principio de un juego con diez monedas.

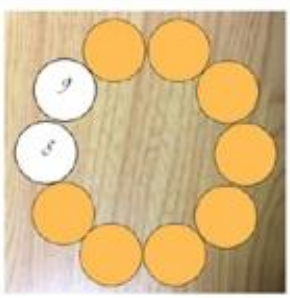
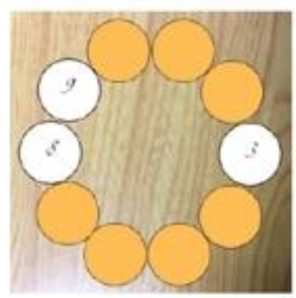
Recursos

Tapas de plástico, lápiz, borrador y hoja en blanco.

1. Inicialmente en grupos de cuatro estudiantes se entregará el respectivo material.
2. Seguidamente se da a conocer las respectivas reglas e instrucciones del juego, para que los estudiantes lo exploren.

Reglas del Juego.

- ✓ Cada jugador o pareja puede retirar, en su turno, 1 o 2 fichas, pero si se sacan dos estas deben estar una junto a la otra, sin que haya entre ellas ninguna otra ficha o espacio vacío según quiera.
- ✓ Gana el jugador que recoge la última ficha.

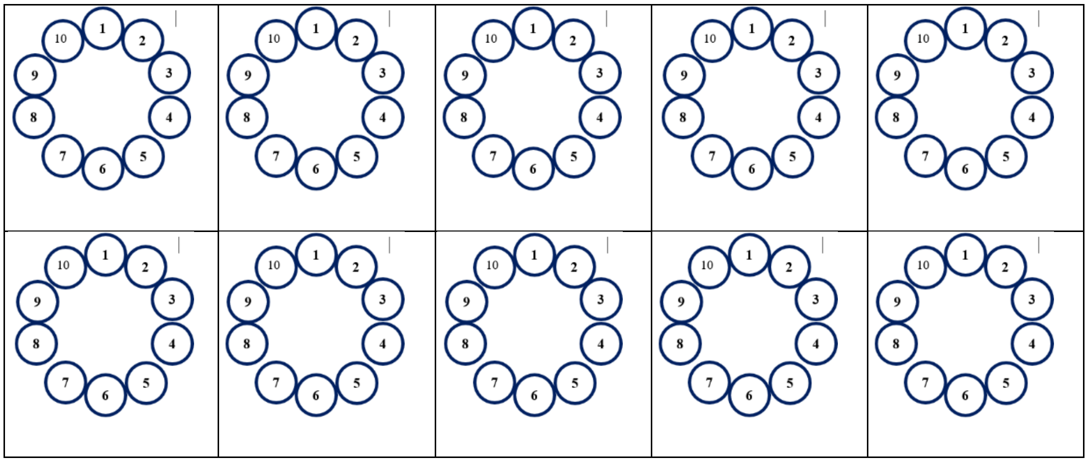
	

Ejemplificación de 2 movimientos

Plantilla de registro del juego círculo de las monedas.

Jugador 1: ______________________________________ 

Jugador 2: ______________________________________ 



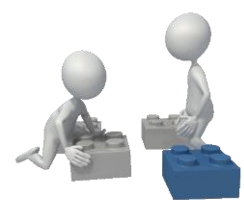
Juguemos y Respondamos

1. Jugar varias partidas intentando ganar todas las veces que sea posible.

2. Busca en pareja una forma de ganar siempre.

3. ¿Quién gana el juego, la pareja que comienza o la que juega en segundo lugar?

¿Por qué?



4. Explicar una estrategia que permita ganar siempre.

5. Si en vez de 10 fichas tenemos 14 ¿Cómo habría que jugar para ganar? ¿Y si el número de fichas fuera 12?

Reflexionemos

1. ¿Qué les pareció el juego?
2. ¿Qué dificultades presentaron en el juego?
3. Se encontró una estrategia ganadora
4. Construyamos entre todos la o las estrategias

Actividad 5

Resuelve y socializa el siguiente problema.

La Hidra de Lerna es un personaje mitológico que aparece en algunas historias, como la de las 12 pruebas de Hércules. La Hidra era un monstruo con 1 cabeza, pero si se le cortaba, le nacían 2 cabezas en su lugar. Si un héroe intentaba vencerla cortándole todas sus cabezas cada día, ¿cuántas cabezas tendría la Hidra el tercer día? ¿Y al cabo de 10 días intentando vencerla? ¿Se puede vencer la hidra?

1. ¿Cuáles son los datos?
2. ¿concibe un plan?
3. Ejecuta tu plan
4. Examina tu respuesta.

- ✓ Finalizada la actividad, los estudiantes se organizarán en mesa redonda y presentará ante sus compañeros el plan que siguieron para dar respuesta al problema.
- ✓ Seguidamente en una presentación de power point se mostrará algunos resultados de los estudiantes y se dará una retroalimentación sobre los problemas trabajados.
  https://docs.google.com/presentation/d/1wUBxZB689VW8TDk49HABS1e0HweHjh-T/edit?usp=share_link&ouid=103632844648121250785&rtpof=true&sd=true

Ejercitemos lo Aprendido en casa.

Realiza las siguientes actividades.

1. Resuelve las siguientes potencias.

$a)\ \left(-\frac{3}{5}\right)^3$ $\qquad b)\ \left[\left(\frac{7}{12}\right)^2\right]^3$

$c)\ \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ $\qquad d)\ \left(\frac{4}{9}\right)^0$

2. Efectúa las siguientes operaciones.

$a)\ (-8)^{-2}(-8)^{-3}\left(-\frac{1}{8}\right)^{-7}$

$b)\ \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{5}\right]^{-2}$

$c)\ (-6)^{2} \div \left(-\frac{1}{6}\right)^{-8}$

$d)\ \left(-\frac{7}{5}\right)^{9}\left(-\frac{7}{5}\right)^{-15} \div \left[\left(-\frac{7}{5}\right)^{2}\right]^{13}$

3. Resuelve el siguiente problema, implementando el método de Pólya.

a) Sean m y n números enteros, positivos, ninguno de ellos múltiplo de 10. Si el producto (m*n) es 100.000, ¿Cuál es el valor de la suma (m+n)?

b) En un pequeño pueblo del Cauca hay cuatro familias dedicadas a criar caballos. Cada familia tiene cuatro caballos ¿Cuántas herraduras de caballo hay que comprar para herrar a todos los caballos del pueblo?

4. Completa la siguiente tabla.

Potencia	Se lee	Significa	Es igual a
		$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$	
$\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}$			
$\left(\frac{17}{58}\right)^{0}$			
	Un medio a la quinta		

ACTIVIDAD EVALUATIVA

Nombre: ____ Grado: __________

Fecha: __________________________

1. Desarrolle los ejercicios, simplificando hasta su mínima expresión, aplique las propiedades de la potenciación y relacione colocando dentro del paréntesis, la letra que le corresponde.

Resuelve los ejercicios en el recuadro.	A partir del resultado obtenido. Escribe dentro del paréntesis la letra según corresponda.
$a)\ \left(\frac{3}{7}\right)^{0} =$	( ) $\frac{2}{9}$

$b)\ \left(\frac{2}{9}\right)^{1} =$	( ) $\left(\frac{3}{2}\right)^{5}$
$c)\ 5^{-2} =$	( ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$
$d)\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{3} =$	( ) 1
$e)\ \left(\frac{7}{5}\right)^{6} \div \left(\frac{7}{5}\right)^{4} =$	( ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2}$
$f)\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{2} =$	( ) $\left(\frac{7}{5}\right)^{2}$

2. Reduce las potencias.

$\boldsymbol{a})\ \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} * \left(\frac{2}{3}\right)^{4}\right]^{2}$

$\boldsymbol{b})\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{3} * \left(-\frac{1}{2}\right) * \left(-\frac{1}{2}\right)^{2}$

3. Realice las siguientes operaciones.

$\boldsymbol{a})\ \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{4} \div \left(\frac{1}{3}\right)^{3}\right]^{-1} =$

$\boldsymbol{b})\ \left(\frac{2}{6}\right)^{4} \div \left(\frac{2}{6}\right)^{6}$

4. Resuelve el siguiente problema.

En una fiesta de cumpleaños de mi hermano pequeño había 128 caramelos, para repartir después del reparto cada niño tenía tantos caramelos como niños había, si sobraron 7 caramelos ¿Cuántos niños había?

5. De acuerdo con las Torres de Hanói.

La siguiente fórmula $2^{n} - 1$ se usa para calcular el menor número de movimientos para n discos, si tengo 7 discos cuál sería el mínimo de movimientos que debo realizar.

6. Observa y responde.

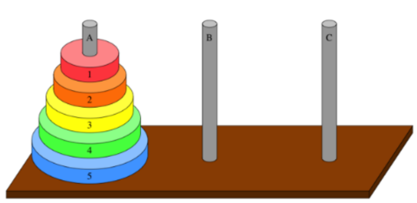


Figura 1

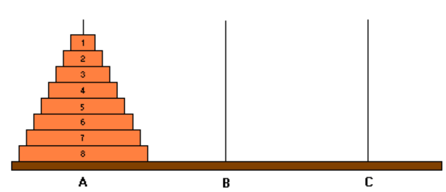


Figura 2

De acuerdo con las figuras anteriores, cuál de estas tiene un menor número de movimientos. Justifica tu respuesta.

ANEXO B

Guía de radicación

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT **GUÍA DE APRENDIZAJE** **Escucho y olvido, veo y recuerdo, hago y comprendo. Prov. Chino**	**Grado Octavo** **Asignatura Matemáticas** **Guía No.3**

Periodo: I	**Fecha: Del 10 de junio al 8 de julio.**	**PRACTICANTES:** **Laura Dayana Navia Trujillo (8-1)** **Aida Yeni Hernandez Rengifo (8-2)**

Nombre de la actividad:	
Tema: Radicación de números racionales y sus propiedades.	**Temporalización: 10 horas**
Aprendizaje: Conocerán acerca de la identificación de características y relaciones de los números racionales y aplicación de propiedades	**Evidencia de Aprendizaje:** • Identificar características y relaciones de los números racionales y aplicación de las propiedades de la potenciación. • Resolver problemas cuya solución requiera de la potenciación. • Interiorizar la relación entre juegos de estrategia y resolución de problemas.

Motivación.

Esta frase nos intenta mostrar que, si bien podemos esforzarnos por conseguir lo que deseamos y no ver resultados al instante, a largo plazo siempre el esfuerzo será premiado y conseguirás alcanzar tus logros.

RADICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Querido estudiante te invito que explores tus conocimientos acerca del tema.

¿Crees que la potenciación y la radicación tienen alguna relación?

¿Dónde crees que se utiliza la radiación?

RADICACIÓN

- ✓ En la potenciación se conoce la base y el exponente y tiene por objeto hallar un tercer término llamado potencia.
- ✓ La Radicación es la operación inversa o recíproca de la potenciación.
- ✓ La Radicación es la operación que tiene por objeto hallar la base (raíz) cuando se conoce el exponente y la potencia.

PARA RECORDAR:

Para comprender mejor este tema es necesario recordar cómo se calculan las raíces por descomposición de factores primos. Así:

¿CUÁNDO UN NÚMERO ES PRIMO?

Un número es primo cuando el número únicamente se divide entre sí mismo y por la unidad. Los números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... etc.

Ahora para calcular la raíz de un número cualquiera por descomposición de factores primos se aplica el siguiente procedimiento:

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

Todo número compuesto puede descomponerse como el producto de dos o más factores primos.

Ejemplo

Descomponemos el número 100 como el producto de factores primos.

- ✓ Se escribe el número 100 a la izquierda de una raya vertical y a su derecha se escribe el menor número primo (2, 5) por el cual dicho número sea divisible.
- ✓ El cociente obtenido se coloca debajo del número propuesto.
- ✓ Se procede como en el paso anterior con el cociente obtenido, y así sucesivamente hasta llegar a un cociente igual a 1.

ILUSTRACIÓN DEL PROCEDIMIENTO ANTERIOR

Ejemplo 1

100	**2**
50	**2**
25	**5**
5	**5**
1	

Entonces ¿cómo se expresa el número 100 como producto de factores primos.?

$$100 = \ 2 * 2 * 5 * 5 = 2^2 * 5^2$$

Ejemplo 2

60	**2**
30	**2**
15	**3**
5	**5**
1	

Entonces ¿cómo se expresa el número 60 como producto de factores primos.?

$$60 = \ 2 * 2 * 3 * 5 = 2^2 * 3 * 5$$

Elementos de la radicación

Dados a, b y $n \in \ \mathbb{Z}$, en la radicación intervienen los siguientes elementos:

$\boldsymbol{a}$ Es el Radicando: Es el número que se descompone en factores iguales.

$\boldsymbol{n}$ Es el índice: indica el número de veces de factores iguales que se descompone la cantidad sub radical.

$\boldsymbol{b}$ Es la raíz: es el resultado de descomponer la cantidad sub radical tantas veces como lo indica el índice.

$$\text{índice} \longleftarrow \sqrt[n]{a} = b \longrightarrow \text{Raíz}$$

$$\downarrow$$

Radicando

Cálculo de la raíz de un número radical.

Para calcular el radical de un número racional se procede de la siguiente forma:

1. El numerador y denominador de la fracción se descomponen en factores primos
2. Se agrupan los factores por potencias de tal forma que los exponentes sean iguales al índice del radical
3. Se extrae cada factor común cuyo exponente sea igual al índice

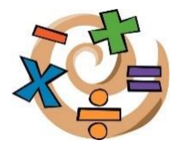
Ejemplos Calcular la siguiente raíz $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

Paso 1				**Paso 2**	**Paso 3**
8	**2**	**27**	**3**	$8 = 2 * 2 * 2 = 2^3$	$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{9^3}} = \frac{2}{9}$
4	**2**	**9**	**3**	$27 = 3 * 3 * 3 = 3^3$	
2	**2**	**3**	**3**		
1		**1**			

Calcular la siguiente raíz $\sqrt{\frac{16}{169}}$

Paso 1				Paso 2	Paso 3
16	**2**	**169**	**13**	$16 = 2^2 * 2^2 = 4 * 4 = 4^2$	$\sqrt{\frac{16}{169}} = \sqrt{\frac{4^2}{13^2}} = \frac{4}{13}$
8	**2**	**13**	**13**	$169 = 13 * 13 = 13^2$	
4	**2**	**1**			
2	**2**				
1					

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN



En la radicación de números racionales se aplican las siguientes propiedades:

1. **SI LA CANTIDAD SUBRADICAL O RADICANDO ES POSITIVA:** la raíz es positiva sin importar, si el índice es par o impar. Por ejemplo

Índice par $\sqrt{\frac{81}{49}} = \sqrt{\frac{9^2}{7^2}} = \frac{9}{7}$

Radicando positivo

Raíz

Índice impar $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{5^3}} = \frac{3}{5}$

Radicando positivo

Raíz

2. **SI LA CANTIDAD SUBRADICAL O RADICANDO ES NEGATIVA**, se presentan dos casos:

a. Si el índice n es par, la raíz no existe. Por ejemplo

Índice par $\sqrt{-\frac{16}{49}} =$ No tiene solución en el conjunto de los números

Radicando negativo

b. Si el índice n es impar, la raíz es negativa. Por ejemplo:

Índice impar $\sqrt[3]{-\frac{8}{216}} = \sqrt[3]{-\frac{2^3}{6^3}} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

Radicando negativo

Raíz

3. **CUANDO EL ÍNDICE DE LA RAÍZ Y EL EXPONENTE DEL RADICANDO TIENEN EL MISMO VALOR:** el índice de la raíz y el exponente del radicando se cancelan y la raíz es igual a la fracción del radicando sin la potencia.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$$

Ejemplos

$\boldsymbol{a})\ \sqrt[3]{\left(\frac{\mathbf{7^3}}{\mathbf{11^3}}\right)} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{11}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{b})\ \sqrt[4]{\left(\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{12}}\right)^{\mathbf{4}}} = \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{12}}$

JUGANDO APRENDO MATEMÁTICAS

JUEGO LA REGLA DE HERÓN (MÉTRICAS)

Nombre: ____________________________________ **Grado:** __________

Fecha: _________________________ **Nota:** ____________

CÁLCULO DE RAÍCES CÚBICAS.

PASOS	INDICACIONES	EJEMPLO	EJERCICIO
1	Elige alguno de los números. Luego calculo los cubos anterior y posterior al número elegido. **a** = Número elegido. **b** = Cubo anterior al número elegido. **c** = Cubo posterior al número elegido. $\boldsymbol{b < a < c}$	$a = 100$ $b = 64 = 4^3$ $c = 125 = 5^3$ $64 < 100 < 125$	Números para elegir (4, 18. 39, 48, 55, 60, 180)
2	Determina las diferencias: • $\boldsymbol{c - a = d}$, expresa el resultado en potencia. • $\boldsymbol{a - b = e}$	$125 - 100 = 25 = 5^2$ $100 - 64 = 36$	
3	Realiza el producto $\boldsymbol{e \times d = r, d}$ es la base.	$36 \times 5 = 180$	
4	Realiza la suma $\boldsymbol{a + r = s}$	$100 + 180 = 280$	
5	Divide $\boldsymbol{\frac{r}{s} = p}$, simplificar	$\frac{180}{280} = \frac{90}{140} = \frac{45}{70} = \frac{9}{14}$	
6	Añade el valor $\boldsymbol{p}$ a la raíz cúbica de $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{p + b = q}$	$\frac{9}{14} + 4 = \frac{9+56}{14} = \frac{65}{14} \approx 4.6$	
7	De esta forma se determina la raíz cúbica de $\boldsymbol{a}$ con una aproximación.	$\sqrt[3]{100} \approx 4.6$	

PROBLEMA

Como hemos visto los virus se propagan de forma exponencial o en potencia. Si el virus x tiene un crecimiento similar por rama al problema presentado en la actividad 5 de la guía 2, y se sabe que en la cuarta rama se tiene 27 personas contagiadas, ‘¿cuántas personas se contagian por rama?

4. **RAÍZ DE UN COCIENTE:** La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplos

$\boldsymbol{a})\ \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\boldsymbol{b})\ \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10}$

5. **RAÍZ DE UN PRODUCTO:** La raíz de un producto es igual al producto de las raíces.

Ejemplos

$$a)\ \sqrt[3]{\frac{-27}{8} * \frac{64}{125}} = \sqrt[3]{\frac{-27}{8}} * \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{8}} * \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = -\frac{3}{2} * \frac{4}{5} = -\frac{6}{5}$$

$$b)\ \sqrt{\frac{4}{36} * \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{4}{36}} * \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}} * \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{2}{6} * \frac{3}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{6}$$

6. **RAÍZ DE UNA POTENCIA:** La raíz de una potencia es igual a otra potencia, cuyo exponente es un fraccionario, donde el exponente de la potencia del radicando es el numerador y el índice de la raíz es el denominador.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos

$a)\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$ $\qquad$ $b)\ \sqrt[4]{\left(\frac{2}{5}\right)^{12}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{12/4} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

7. **RAÍZ DE OTRA RAÍZ:** La raíz de otra raíz es igual a otra raíz, cuyo índice es el producto de los índices parciales.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[m*n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos

$\boldsymbol{a})\ \sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{729}{64}}} = \sqrt[3*2]{\frac{729}{64}} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{b})\ \sqrt{\sqrt{\frac{81}{625}}} = \sqrt[2*2]{\frac{81}{625}} = \frac{3}{5}$

JUGANDO APRENDO MATEMÁTICAS

Actividad: El área del Cuadrado es igual a la de un rectángulo.

Pregunta provocadora. ¿Crees que se puede formar un cuadrado equivalente a un rectángulo? La respuesta es sí.
A continuación, observaras una tabla en la que se indica el proceso sigue los pasos y seguro lo podrás realizar.

Identifica el área de tu rectángulo. Para esta guía, el área será 12

2

$A_r = 12$

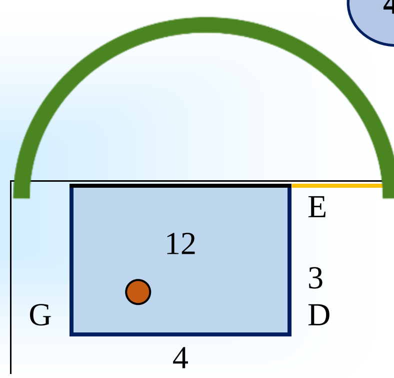
Recordemos que el área de un rectángulo se puede expresar así:
$12 = ab$

3

El siguiente rectángulo, ilustra el paso anterior

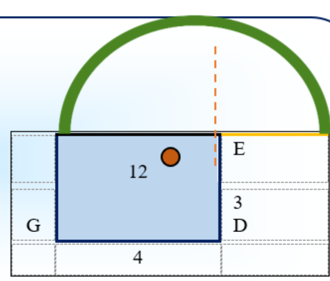
4

Prolongue el segmento BE.
Hasta Z de tal forma que ED=EZ.
Hallamos el punto medio de BZ.
Describimos una semicircunferencia con radio BF.



5

Prolongue el segmento ED hasta T

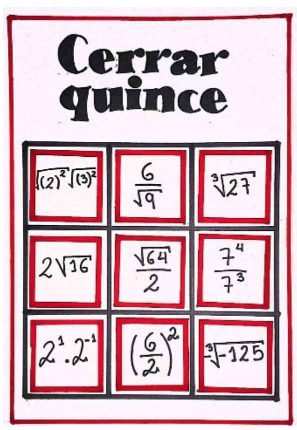


Luego nuestro lado del cuadro que tendrá una Área de 12 es TE. Mídelo con tu regla y verifica con la calculadora.

CERRAR QUINCE

Dialoguemos sobre qué y cómo vamos a aprender matemáticas con el juego cerrar quince.

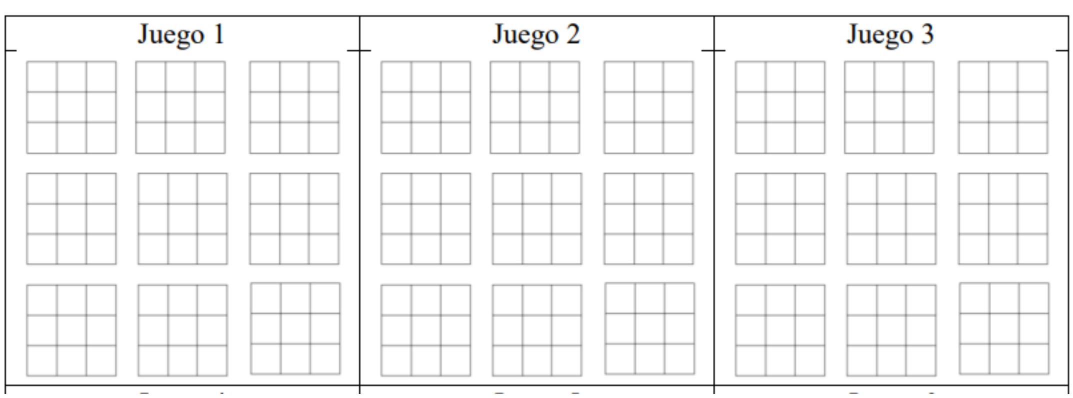
- ✓ Has escuchado acerca del juego cerrar quince.
- ✓ Durante tu formación académica te han presentado este juego.
- ✓ Conoces algún juego que sea similar al presentado.
- ✓ Teniendo en cuenta el nombre del juego puedes deducir en que consiste.



ORDEN DEL JUEGO Y REGLAS

- ✓ Se eligen los participantes.
- ✓ Se organizan los participantes en parejas (o un grupo dividido en dos equipos).
- ✓ Posteriormente se hace entrega del material, que consta de un soporte con diseño de cuadrícula de 3*3 y 9 fichas que contienen operaciones de potenciación y radicación.
- ✓ Seguidamente resolverán los ejercicios planteados en el reverso de una de las fichas obteniendo como resultados del 1 al 9.
- ✓ Luego por turnos cada jugador o equipo elige uno de los números del 1 al 9 que será ubicado en la cuadrícula.
- ✓ Cada número puede elegirse sólo una vez.
- ✓ Gana el primer jugador en elegir 3 números que sumen 15.
- ✓ Acaba en empate si se han elegido todos los números y nadie puede sumar 15.

Plantilla de registro para el juego cerrar quince.



Escribe cuáles estrategias ganadoras encontraron.

REFLEXIONEMOS

- ✓ ¿Es una ventaja empezar el primero (o el segundo)?
- ✓ Escribe todas las combinaciones distintas de 3 números que sumen 15.
- ✓ ¿Qué números aparecen en las combinaciones?
- ✓ ¿Habías visto algo parecido antes?
- ✓ ¿Conoces algún juego parecido a este?
- ✓ ¿Puedes averiguar cómo jugar a este juego para ganar siempre?
- ✓ ¿Has encontrado una estrategia ganadora?
- ✓ ¿Es posible evitar perder en estos juegos?

El juego cerrar quince permite que los estudiantes intercambien y compartan ideas sobre métodos y soluciones. Porque puede que los estudiantes crean haber encontrado varias soluciones diferentes.

QUÉ HABILIDADES APORTA

- ✓ El juego facilita a los estudiantes la práctica en los vínculos numéricos y desarrolla el sentido numérico.
- ✓ En algunas ocasiones el estimular a los estudiantes ayuda que tengan mayor concentración, participación, busquen soluciones o estrategias para poder ganar en este caso el juego.
- ✓ pensar varios pasos por anticipado: «¿Y si...?», «¿Y luego qué…?

Al realizar esta actividad, los estudiantes tendrán la oportunidad de:

- ✓ Practicar la suma, potencia y radicación.
- ✓ Pensar estratégicamente.
- ✓ Hacer conexiones entre diferentes ideas matemáticas

TALLER EVALUATIVO

Pon a prueba tus conocimientos.

1. Escribe el número correspondiente sobre el cuadro para que se cumpla la igualdad.

$a)\ \sqrt{\frac{}{25}} = \frac{4}{5}$ $\qquad b)\ \sqrt[3]{\frac{}{}} = \frac{5}{2}$

$c)\ \sqrt{\frac{1}{}} = \frac{1}{8}$ $\qquad d)\ \sqrt[3]{\frac{}{}} = \frac{3}{7}$

2. Resuelve las siguientes raíces.

$a)\ \sqrt{\frac{4}{9}} =$ $\qquad b)\ \sqrt[3]{\frac{216}{343}} =$

$\boldsymbol{c})\ \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{64}}} =$ $\qquad \boldsymbol{d})\ \sqrt[3]{\frac{8}{512} \times \frac{27}{64}} =$

$\boldsymbol{e})\ \sqrt[5]{\left(\frac{8}{9}\right)^{15}} =$ $\qquad \boldsymbol{f})\ \sqrt{\left(-\frac{16}{25}\right)} =$

$\boldsymbol{g})\ \sqrt[3]{\left(-\frac{125}{216}\right)} =$ $\qquad \boldsymbol{h})\ \sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{16}{9}}} =$

3. Entre los siguientes números hay exactamente uno que no es cuadrado. ¿Cuál es?

528, 323, 287, 676, 482.

4. Completa la siguiente información.

a) Al hallar una raíz cúbica el índice es: ______

b) Al hallar una raíz cuadrad el índice es: ______

5. Resuelve los siguientes problemas teniendo en cuenta el método de George Pólya.

a) Un gusano se encuentra en el fondo de un pozo. Durante el día sube 2m y durante la noche baja 1m ¿Qué altura ha subido, después de tres días y dos noches?

b) Juan ahorró 12 $euros$ el lunes; el martes ahorró la mitad de lo ahorrado el lunes y el miércoles ahorro la tercera parte de lo que ahorró el martes. ¿A cuánto asciende los ahorros de Juan?

ANEXO C

Guía de expresiones algebraicas

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT **GUÍA DE APRENDIZAJE** **Escucho y olvido, veo y recuerdo, hago y comprendo. Prov. Chino**	**Grado Octavo** **Asignatura Matemáticas** **Guía No.4**

Periodo: II	**Fecha: Del 12 de julio al 26 de julio**	**PRACTICANTES:** **Laura Dayana Navia Trujillo (8-1)** **Aida Yeni Hernandez Rengifo (8-2)**
Nombre de la guía: Iniciando el camino del álgebra**.**		
Tema: Primeras nociones al álgebra.	**Temporalización: 13 horas**	

Propósitos:

- Identificar las partes de los términos algebraicos.
- Definir una expresión algebraica.
- Clasificar los tipos de expresiones algebraicas.
- Representar expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa.
- Implementar el juego cuatro en raya del valor numérico y las tarjetas para reforzar los conocimientos adquiridos.

Para el desarrollo esta sesión se tendrá en cuenta la relación que hay entre el objeto de aprendizaje, los estándares básicos de competencia (EBC), los derechos básicos de aprendizaje (DBA), los aprendizajes y las evidencias de aprendizaje, lo anterior se presentará

en una tabla, es importante mencionar que las siguientes siglas EBC* y los DBA* implican que algunos han sido modificados en el tipo de conjunto numérico a tratar y en sus actividades, con el fin de ser adecuados a la actividad que se va a realizar.

Objeto de Aprendizaje • Término algebraico • Expresión algebraica • El valor numérico			
EBC*	**DBA***	**Aprendizaje**	**Evidencia de Aprendizaje**
6. Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las	**9.** Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos**.**	Identificar Expresiones numéricas y algebraicas equivalentes y reconocer el lenguaje algebraico como forma de	*Reconoce expresiones algebraicas diferenciando sus coeficientes y su parte literal.

ecuaciones algebraicas. **7. Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.**	**3**. Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas.	representar procesos inductivos.	*Determina el valor numérico de una expresión algebraica para ciertos valores de la incógnita o de las incógnitas. *Interpreta, plantea y resuelve situaciones problema relacionadas con expresiones algebraicas.

Saludo e introducción de actividades.

Motivación para iniciar la clase de álgebra

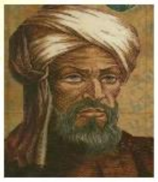
Culminado el repaso de la aritmética, donde se estudiaron los números naturales, enteros, racionales (decimales y fracciones, transformaciones entre ellos, ubicación en la recta numérica, entre otras) junto con sus operaciones y aplicación, además donde se estudió la definición de potencia, cálculo, propiedades y aplicación del concepto en la resolución de situaciones en variados contextos. En esta oportunidad corresponde dar inicio al eje de álgebra, para ello comenzaremos a estudiar las nociones básicas de este concepto.

INICIOS AL ÁLGEBRA.

DIALOGUEMOS

¿Has escuchado hablar de esta palabra álgebra?
¿Dónde has escuchado mencionar esta palabra?
¿A quién?
¿sabes en lo que se enfatiza esta rama de las matemáticas?

ÁLGEBRA: Es una rama de las matemáticas y se utiliza para traducir el lenguaje cotidiano al lenguaje matemático (letras) y de esta manera, resolver fácilmente diferentes problemas que se nos pueden plantear. Además, su objetivo es simplificar y generalizar las cuestiones relativas a los números. A diferencia de la aritmética, en donde sólo se usan los números y sus operaciones, en álgebra los números son representados por símbolos (usualmente a, b, x, y).



Historia de la matemática

Históricamente, el álgebra, como rama de las matemáticas, con sus problemas y métodos, se desarrolló de manera lenta a lo largo de varios siglos y gracias al aporte de muchos matemáticos pertenecientes a distintas épocas y diversas culturas. Principalmente se reconocen filiaciones griegas, árabes, hindúes e italianas.

La palabra "álgebra" no tiene una etimología específica como la palabra "aritmé-tica", proveniente del griego arithmos, que traduce número. El término "álgebra" deriva del nombre de una obra escrita hacia el año 830 por el matemático árabe Mohammed ibn Musa Al-Khowarizmi, titulada Al-jabr wa'l muqābalah y aportes por Diofanto.

LAS FASES DEL ÁLGEBRA

Álgebra Retorica

- Primera fase en el desarrollo histórico del álgebra, debido a que los problemas y sus soluciones se describían mediante lenguaje natural, sin incluir ningún símbolo, ni siquiera de las operaciones. Es el álgebra de la edad clásica.

Álgebra Sincopada

- Es la segunda fase en el desarrollo histórico del álgebra, caracterizada por el uso de abreviaciones para las incógnitas, aunque los cálculos se describían totalmente en lenguaje natural

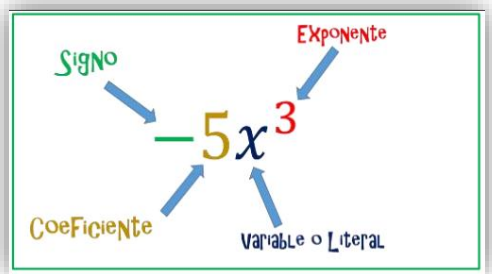
Álgebra simbolica

- Es la fase moderna del desarrollo del álgebra, en la cual se usan letras para todas las cantidades, signos para representar las operaciones, se utiliza el lenguaje simbólico no solo para resolver ecuaciones sino también para demostrar reglas generales

TÉRMINOS ALGEBRAICOS

Los términos algebraicos son el producto de una o más variables y una constante literal o numérica en donde no involucran sumas y restas.

Ejemplos.



- $3x^{\frac{1}{2}}$
- $-45m^2$
- z^4
- $5x^2y^3$
- $12ab^8$

En todo término algebraico podemos distinguir: Signo, coeficiente numérico, variable o parte literal y exponente.

SIGNO

Es el símbolo que indica si el término es positivo o negativo. Los términos que van precedidos del signo (**+**) se llaman términos positivos, en tanto los términos que van precedidos del signo (–) se llaman términos negativos. Pero, el signo (**+**) se acostumbra a omitir delante de los términos positivos; así pues, cuando un término no va precedido de ningún signo significa que es positivo.

Ejemplos:

- $\boldsymbol{-13xy}$ es negativo porque está precedido por el símbolo (-).
- $+\frac{5}{4}\boldsymbol{p^3}\mathbf{q}$ es positivo porque está precedido por el símbolo (+).
- $\boldsymbol{8y^4}$ se interpreta que es positivo, aunque está sin el símbolo.

COEFICIENTE NUMÉRICO

Es el número real que aparece en cada término que multiplica y/o acompaña la parte literal. En caso de que no exista un número como coeficiente, en álgebra el número será el 1 solo que este es de manera imaginaria es decir no se escribe, pero se sabe que vale 1.

Ejemplos:

- $\boldsymbol{a^2}$ el coeficiente en este caso es el número 1, es decir existe una sola "a" elevada al cuadrado.
- $\boldsymbol{\sqrt{2}xy}$ el coeficiente es $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

- $-\frac{1}{2}x^3z$ el coeficiente es $-\frac{1}{2}$

VARIABLE O PARTE LITERAL

Es el producto de las variables de un término con sus respectivos exponentes que acompañan siempre el coeficiente.

Ejemplos:

- $-2xzy^2$ parte literal xzy^2
- $\sqrt{9}s^2t$ parte literal $\sqrt{9}s^2ts^2t$
- $98x^4z$ parte literal x^4z

EXPONENTE

Es el número que indica la cantidad de veces que se multiplica una variable.

- $5t^2$ el exponente es 2 e indica que t se multiplica 2 veces por sí misma, es decir $t^2 = t \times t$
- $\frac{1}{4}xm^p$; con $p \geq 0,$ el exponente de m es p e indica que m se multiplica p veces por sí misma, es decir $m^p = \underbrace{m \times m \times m \times \ldots \times m}_{p-veces}$ y el exponente de x es 1.

TAREA EN CLASE

Se pide al estudiante que complete la siguiente tabla. De acuerdo con la teoría presentada en la clase. Posteriormente con ayuda de una ruleta se solicitará a los estudiantes salir al tablero.

Recursos o Materiales: Ruleta, fotocopia, marcadores, tablero y borrador**.**

Término algebraico	Signo	Coeficiente	Variable	Exponente
$4x^5$	+	4	x	5
$\frac{xy}{2}$				
$-x$				
$\frac{3}{2}x^2yz$				
$\sqrt{3}x$				
a^3xy^2				
$\frac{2}{5}(ab)^3$				
x^4y				

RESOLVIENDO PROBLEMAS.

Números consecutivos

El número 21 puede expresarse como: 6+7+8. ¿Cuáles son los números que se pueden expresar como suma de tres números consecutivos? Explica por qué son estos números.

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

En la antigüedad, los matemáticos expresaban sus ideas oralmente; sin embargo, algunos estudiosos que querían profundizar más en los contenidos y que, por ejemplo, deseaban generalizar expresiones que sirvieran para todo un conjunto de números, se vieron en la necesidad de crear un lenguaje que les permitiera expresar todas las ideas de manera simplificada y de fácil acceso para otras personas que estuvieran interesadas en conocerlas. Es así como surgieron las **expresiones algebraicas**, por medio de las cuales se pueden representar situaciones de la vida real.

Una expresión algebraica es un conjunto de letras (variables) y números (constantes) que se encuentran relacionados por las operaciones de suma, resta, multiplicación o división.

Ejemplos de expresiones algebraicas:

$a)\ \ 2x + 3$ $b)\ \ 4 - 8x$

$c)\ \ 2x^2 + x + 1$ $d)\ \ 3(y + x)$

1. **Representemos en una expresión algebraica el siguiente enunciado escrito en lenguaje natural:**

“En la librería venden los cuadernos a $ 8.500. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el precio total de n cuadernos?

Para conocer el precio basta con multiplicar el número de cuadernos por el valor, entonces, 8.500n es la expresión algebraica buscada.

2. **Escribamos en lenguaje natural un enunciado para la expresión 2X + 3.**

El doble de un número, aumentado en 3.

VALORACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Valorar una expresión algebraica significa asignar un valor numérico a cada variable de los términos y resolver las operaciones indicadas en la expresión para determinar su valor final.

1. Reemplazar cada variable por el valor asignado.
2. Calcular las potencias indicadas.
3. Efectuar las multiplicaciones y divisiones.
4. Realizar las adiciones y sustracciones.

Ejemplos

Valoremos la expresión: $x^2y - 8xy^2 - 2y^3$ considerando x = 2; y = –1

Solución:

$$\begin{aligned} x^2y - 8xy^2 - 2y^3 &= (2)^2(-1) - 8(2)(-1)^2 - 2(-1)^3 \\ &= (4)(-1) - 8(2)(1) - 2(-3) \\ &= (-4) - 16 - (-6) \\ &= -20 + 6 \\ &= -14 \end{aligned}$$

- Valoremos la expresión: $z^2 - 3xz^3 - 2y$ considerando z = 2, x = 0; y = 5

Solución:

$$\begin{aligned} z^2 - 3xz^3 - 2y &= (2)^2 - 3(0)(2)^3 - 2(5) \\ &= (4) - 3(0)(8) - 2(5) \\ &= 4 - 0 - 10 \\ &= 4 - 10 \\ &= -6 \end{aligned}$$

- Valoremos la expresión: $2s + 3p^4$ considerando **s = 7 y** p =3

Solución:

$$
\begin{aligned}
2s + 3p^4 &= 2(7) + 3(3)^4 \\
&= 2(7) + 3(81) \\
&= 14 + 243 \\
&= 257
\end{aligned}
$$

- Valoremos la expresión: $2\sqrt{m} + 3\left(\frac{m}{n}\right)^4$ considerando m = 9 y n =3

Solución:

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{m} + 3\left(\frac{m}{n}\right)^4 &= 2\sqrt{9} + 3\left(\frac{9}{3}\right)^4 \\
&= 2(3) + 3(81) \\
&= 6 + 243 \\
&= 249
\end{aligned}
$$

Calcular el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas.

- $11x - 9y \quad cuando\ \ x = 1,\ y = 2$
- $25xy + 2x^3 - 5y^2 + 7 \quad cuando\ x = 2, y = -3$

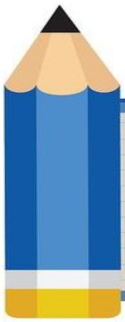
ACTIVIDAD 2: JUEGO CUATRO EN RAYA DEL VALOR NUMÉRICO

RECURSOS: 16 botones por jugador, un tablero de 7 x 7, un dado para decidir quién empieza la partida.

REGLAS DEL JUEGO

- El juego consta de 2 jugadores.
- Se decide quién va a empezar la partida, tirando un dado.
- Este jugador será quien coloque la primera ficha en el tablero. Luego se tomarán turnos.

- Cada jugador debe elegir 4 casillas y resolver la expresión con el valor indicado al lado izquierdo o en la primera columna.
- Quien consiga en la primera ronda el mayor puntaje al sumar los valores de las cuatro casillas elegidas, y en la segunda ronda el menor puntaje será el ganador.



NOTA

Cada participante deberá hacer una entrega de los procedimientos de cada expresión algebraica que eligió durante el juego.

TABLERO

CUATRO EN RAYA DEL VALOR NUMÉRICO

$x=-1$ $y=1$							
$x=-2$ $y=2$							
$x=-3$ $y=3$							
$x=0$ $y=1$							
$x=3$ $y=0$							
$x=2$ $y=2$							
$x=1$ $y=-1$							
	$5x^3y^0-7$	$0x^5-\frac{8x^2}{2}$	$\sqrt{16}+12y$	$3\sqrt{4}+x$	$3y+5x^3$	$3x^2y-8xy^2$	$-10x^2-y^4$

RESPUESTAS: CUATRO EN RAYA DEL VALOR NUMÉRICO

$x=-1$ $y=1$	-12	-4	16	5	-2	11	-11
$x=-2$ $y=2$	-47	-16	28	4	-34	88	-56
$x=-3$ $y=3$	-142	-36	40	3	-126	297	-71
$x=0$ $y=1$	-7	0	16	6	3	0	-1
$x=3$ $y=0$	128	-36	4	9	135	0	-90
$x=2$ $y=2$	33	-16	28	8	46	-40	-56
$x=1$ $y=-1$	-2	-4	-8	7	2	-11	-11
	$5x^3y^0-7$	$0x^5-\frac{8x^2}{2}$	$\sqrt{16}+12y$	$3\sqrt{4}+x$	$3y+5x^3$	$3x^2y-8xy^2$	$-10x^2-y^4$

DIALOGUEMOS

Que les pareció el juego.

Conocen un juego similar a este.

Identificaron una estrategia ganadora.

Que aprendizajes adquirieron con este juego.

SIGNIFICADO Y USO DE LAS LETRAS EN EL LENGUAJE ALGEBRAICO.

El lenguaje que usamos en operación aritmética en las que sólo intervienen números se llama lenguaje numérico.

El lenguaje que utiliza letras en combinación con números y signos, además, las trata como números en operaciones y propiedades, se llama lenguaje algebraico.

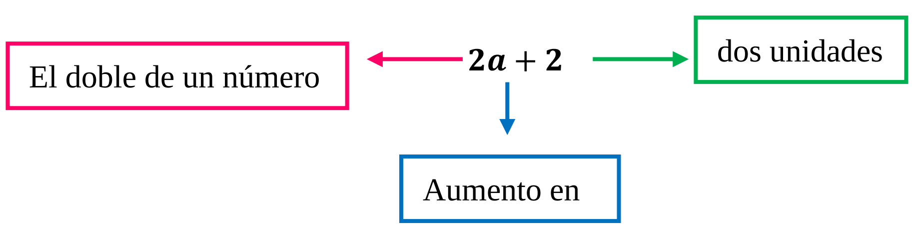
En ocasiones empleamos letras para representar cualquier número desconocido, realizamos operaciones aritméticas con ellas e, incluso las incluimos en expresiones matemáticas para poder calcular su valor numérico.

Para representar información escrita en lenguaje natural con lenguaje algebraico puedes relacionar palabras de uso común con operaciones matemáticas. Como, por ejemplo:

- "mas" y "aumentado" se relacionan con la adición **(+).**
- "diferencia" y "disminuido" se asocian con la sustracción **(–).**
- Podemos utilizar cualquier letra para indicar las incógnitas **(x, y, z, etc.).**
- El doble de un número: **2x, 2y, …**
- La mitad de un número: $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \ldots$
- El siguiente número: **x+1**
- El anterior número: **x-1**
- Un número al cuadrado: $\boldsymbol{x^2}$
- Un número al cubo: $\boldsymbol{x^2}$
- Un número par: $\boldsymbol{2x}$
- Un número impar: $\boldsymbol{2x+1}$
- Dos números consecutivos: $\boldsymbol{x, x+1}$

EJEMPLOS

La expresión "el doble de un número aumentado en dos unidades", está dada en lenguaje común su representación en el lenguaje algebraico sería:



Representa con lenguaje algebraico cada enunciado.

La mitad de un número más once.

$\frac{x}{2} \quad + \quad 11$

La diferencia entre el triple de un número y nueve equivale a tres.

$3x - 9 \quad = \quad 3$

El doble del cuadrado de un número aumentado en cinco.

$2x^2 \quad + \quad 5$

Escribe en lenguaje natural las siguientes expresiones.

Lenguaje Algebraico	Lenguaje Natural
$2y - 15$	La diferencia entre el doble de un número y quince
$\frac{y+1}{4} = y - 8$	La cuarta parte de la suma entre un número y uno equivalente a la diferencia entre el número y ocho.
$\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}$	Las tres quintas partes de un número aumentado en un cuarto.
$2x + 3(2x + 2)$	La suma entre un número par y el triple del siguiente par.

ACTIVIDAD 3

RECURSOS: 60 tarjetas.

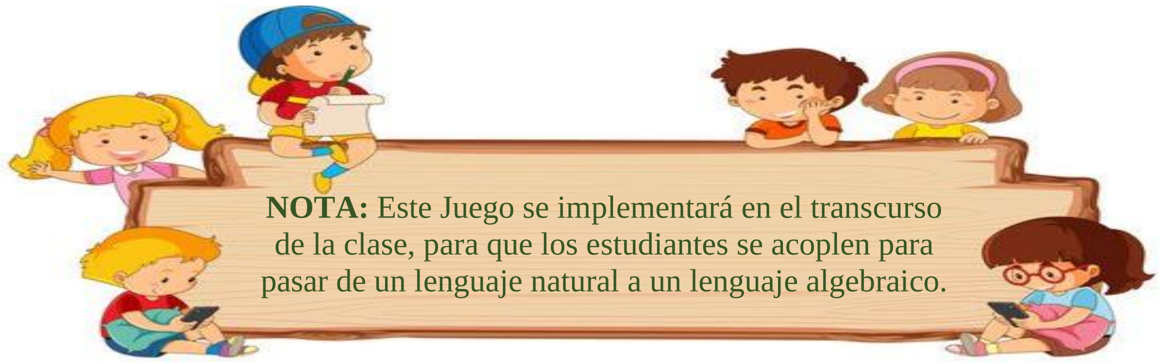
QUIEN TIENE, YO TENGO

REGLAS DEL JUEGO:

- Se reparten tres tarjetas por estudiante.
- Empieza cualquier estudiante leyendo su tarjeta. Los demás deben estar atentos a la pregunta que menciona.
- Los estudiantes deben de armar la secuencia de las tarjetas.

TARJETAS

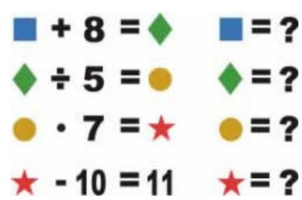
Yo tengo 4t ¿Quién tiene seis más que un número?	Yo tengo k+6 ¿Quién tiene cinco más que un número?	Yo tengo x+5 ¿Quién tiene dos menos que un número?
Yo tengo c-2 ¿Quién tiene siete menos que un número?	Yo tengo y-7 ¿Quién tiene ocho veces un número?	Yo tengo 8k ¿Quién tiene nueve menos que un número?
Yo tengo t-9 ¿Quién tiene uno menos que un número?	Yo tengo n-1 ¿Quién tiene cuatro menos que un número?	Yo tengo y-4 ¿Quién tiene siete más que un número?
Yo tengo g+7 ¿Quién tiene el doble de un número?	Yo tengo 2k. ¿Quién tiene seis veces un número?	Yo tengo 6y ¿Quién tiene cinco veces un número?
Yo tengo 5x ¿Quién tiene ocho más que un número?	Yo tengo t+8 ¿Quién tiene diez menos que un número?	Yo tengo y-10. ¿Quién tiene doce veces un número?
Yo tengo 12t. ¿Quién tiene veinte menos que un número?	Yo tengo x-20. ¿Quién tiene doce más que un número?	Yo tengo k+12 ¿Quién tiene veinte mas que un número?
Yo tengo n+20 ¿Quién tiene nueve veces un número?	Yo tengo 9y ¿Quién tiene dos más que un número?	Yo tengo n+2 ¿Quién tiene cuatro más que un número?
Yo tengo x+4 ¿Quién tiene el triple de un número?	Yo tengo 3n. ¿Quién tiene siete veces un número?	Yo tengo 7x. ¿Quién tiene cinco menos que un número?
Yo tengo y-5. ¿Quién tiene uno más que un número?	Yo tengo n+1 ¿Quién tiene diez veces un número?	Yo tengo 10y ¿Quién tiene seis menos que un número?
Yo tengo n-6 ¿Quién tiene diez mas que un número?	Yo tengo x+10 ¿Quién tiene nueve más que un número?	Yo tengo n+9 ¿Quién tiene cuatro veces un número?



RESUELVO PROBLEMAS.

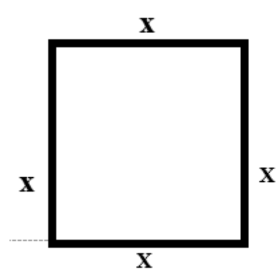
Problema 1.

Ecuaciones con símbolos.



Problema 2.

Un cuadrado cuyos lados miden x tiene un perímetro de 76 cm cuánto mide cada lado.



ACTIVIDAD EN CASA

Relacionar las siguientes frases según corresponda.

Expresión en el lenguaje cotidiano	Lenguaje algebraico
Un número más veinte es igual a cuarenta	$2 + 3x = 23$
Un número menos doce es igual a cinco	$x + (x + 1) = 7$
El doble de un número más cuatro es igual a catorce	$2x + 4 = 14$

El doble de un número más el mismo número es igual a nueve	$3x - 8 = 10$
Dos más el triple de un número es igual a veintitrés	$\frac{x}{2} + 10 = 20$
Un número entre dos más diez es igual a veinte	$2x = 98$
Un número entre tres menos uno es igual a cinco	$x + 20 = 40$
La suma de dos números consecutivos es igual a siete	$2x + x = 9$
El triple de un número menos ocho es igual a diez	$\frac{x}{3} - 1 = 5$
El doble de un número es igual a noventa y ocho	$x - 12 = 20$

ANEXO D

Guía de pre-test

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT **GUÍA DE APRENDIZAJE** **Escucho y olvido, veo y recuerdo, hago y comprendo. Prov. Chino**	**Grado Octavo** **Asignatura Matemáticas** **Guía No.1**

Periodo: I	**Fecha: 17 de mayo al 20 de mayo.**	**PRACTICANTES:** **Laura Dayana Navia Trujillo (8-1)** **Aida Yeni Hernández Rengifo (8-2)**
Nombre de la actividad: Jugando con los dados aritméticos.		
Tema: Repaso de suma, resta, multiplicación, división y potenciación.	**Temporalización: 4 horas**	
Propósitos: ✓ identificar las dificultades, obstáculos y errores que enfrentan los estudiantes para resolver los problemas planteados. ✓ conocer el nivel de desempeño de los niños en la capacidad de resolución de problemas matemáticos. ✓ identificar los conocimientos previos.		

Para el desarrollo de la primera sesión se tendrá en cuenta la relación que hay entre el objeto de aprendizaje, los estándares básicos de competencia (EBC), los derechos básicos de aprendizaje (DBA), los aprendizajes y las evidencias de aprendizaje, lo anterior se presentará en una tabla, es importante mencionar que las siguientes siglas EBC* y los DBA* implican que algunos han sido modificados en el tipo de conjunto numérico a tratar y en sus actividades, con el fin de ser adecuados a la actividad que se va a realizar.

Objeto de Aprendizaje ● **Adición** ● **Sustracción** ● **Multiplicación** ● **División** ● **Potenciación en los números enteros** ● **Propiedades**			
EBC*	**DBA***	**Aprendizaje**	**Evidencia de Aprendizaje**
5. Resuelvo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.	**1.** Comprende y resuelve problemas, que involucran los números enteros con las operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación) en contextos escolares y extraescolares.	Utiliza las operaciones básicas con los números enteros y sus propiedades para proponer estrategias y procedimientos en la solución de problemas, y ejercicios aritméticos.	El estudiante aplica las operaciones y propiedades de los números enteros, en la solución de los problemas planteados en el juego. **E**l estudiante establece e identifica los pasos del

6. Justifico procedimientos aritméticos utilizando las propiedades de las operaciones. **7. Resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.** **17. Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.**	**2.** Utiliza las propiedades de los números enteros y las propiedades de sus operaciones para proponer estrategias y procedimientos de cálculo en la solución de problemas.		proceso de resolución de problemas. Resuelve problemas mediante ecuaciones y operaciones básicas. Propone y utiliza diferentes procedimientos para realizar operaciones con números enteros. El estudiante tiene claro algunos conceptos matemáticos propuestos en la actividad.

Actividades para desarrollar: presentación mediante la dinámica la tela de araña, desarrollo de un pre-test mediante un juego y socialización del pre-test.

Medios y Materiales: un cono de lana, marcadores, borrador, tablero, cartulina con la ilustración para cada estudiante, fichas (ejercicios aritméticos, preguntas sobre conceptos matemáticos y problemas), 3 dados, una hoja en blanco para cada estudiante, formulario con las respuestas, computador, video beam.

Descripción detallada de la actividad.

Motivación:

Saludo

Posteriormente se realiza la presentación de practicantes y estudiantes mediante una dinámica de integración la tela de araña, esta dinámica consiste en que los estudiantes se organicen en un círculo y uno de los participantes inicia la dinámica en el cual toma la lana e indica su nombre, lugar de procedencia, hobby, anécdota y que profesión le gustaría estudiar, luego debe lanzar el cono de lana a un compañero y este debe sujetar la lana en un lado, esta dinámica se sigue hasta el último estudiante, por último deben desenredar la tela de araña, para ello van a mencionar algo que les llame la atención de las matemáticas y en qué momento las utilizamos, quien inicia es la persona que queda con el cono de lana hasta llegar con quien inició la actividad.

Diálogo: estudiante-docente-practicante sobre el trabajo a desarrollar.

Estamos pendiente a todas las preguntas que requieran los estudiantes en el desarrollo del juego.

Finalizada la actividad de integración estudiante-practicante se procederá al desarrollo del juego dados aritméticos.

Desarrollo:

<table>
<tr>
<td rowspan="4">
</td>
<td>En un primer momento se organizan en grupos, de tal manera que cada grupo este conformado por 4 integrantes, un integrante se designara como moderador y los tres restantes serán los jugadores.</td>
</tr>
<tr>
<td>En un segundo momento se hará entrega del material que consta de unos dados, una fotocopia con una ilustración que contiene unos números, cada número corresponde a una ficha con un ejercicio propuesto.</td>
</tr>
<tr>
<td>Para la iniciación del juego los participantes lanzarán el dado al mismo tiempo.
1. si los participantes obtienen el mismo resultado deberán resolver el mismo ejercicio por separado que indica el número, quien logre resolverlo en el menor tiempo posible y correctamente, avanzará a la casilla.
2. si los participantes obtienen resultados diferentes, deberán de resolver el ejercicio que indica esa casilla.
3. si uno de los participantes alcanza a uno de sus contrincantes y logra resolver el ejercicio correctamente, el participante de esa posición deberá regresarse 5 casillas.
4. el moderador será el encargado de verificar cada una de las respuestas de los participantes, además indicará si avanza o se queda en la posición inicial.</td>
</tr>
<tr>
<td>El participante que logre llegar al final, se le hará entrega de un incentivo.</td>
</tr>
</table>

Cierre: Para esta parte se realizará una presentación de power point con las respuestas obtenidas del juego dados aritméticos, para el orden de esta presentación se tendrá en cuenta el objeto matemático presentado, es decir, primero se presentará las respuestas de los ejercicios que tienen que ver con adición y sustracción, seguidamente los ejercicios en el cual se involucra la multiplicación, luego los de división y por último se tiene los de potenciación. Esta presentación se diseña de esta manera con el fin de mostrar en que objeto matemático se presentan problemas y en el cual se tiene que profundizar.

En el objeto matemático donde no se observa problemas o errores en la solución de los ejercicios se hará una presentación breve y no se hará observación a la respuesta del ejercicio, si pasa lo contrario nos centraremos en aquellos errores que se logren identificar y para ello se realizará lo siguiente:

- ✓ Se presentará en el video beam los ejercicios desarrollados por el estudiante.
- ✓ Los estudiantes observarán detenidamente la respuesta del ejercicio propuesto e identificarán en donde se presenta el error.
- ✓ Pasados 10 minutos de observación se preguntará a los estudiantes donde identificaron el error. La participación de los estudiantes dependerá de una ruleta.
- ✓ Luego se pregunta si alguno de los participantes tiene una propuesta de solución al ejercicio para pasar al tablero.
- ✓ Escuchadas las opiniones y propuestas de los estudiantes, se procederá a estructurar nuevamente la respuesta corrigiendo el error.
- ✓ Finalizada la presentación, se retomará uno de los problemas y se presentará una solución implementando el método de Pólya, el cual utilizarán para resolver problemas posteriores.

Por último, se propone a los estudiantes organizar una mesa redonda, para socializar que les pareció la actividad y que aprendieron de ello.

Clasificación de ejercicios y problemas matemáticos planteados en las fichas.

Objeto Matemático / Fichas	Adicción	Sustracción	Multiplicación	División	Potenciación
1	X		x	x	
2	X	x			
3					X
4	X	x			
5					X
6			x		
7	X				
8	X		x		

9				x	
10	X		x		
11	X	x			
12	X			x	
13	X	x	x		
14	X				X
15			x		
16					X
17				x	
18	X	x	x		
19	X	x	x		
20					X

TARJETAS

Ricardo demora 11 minutos en dar dos vueltas por el parque en bicicleta; ¿cuánto demora en dar 6 vueltas si mantiene la velocidad?
1

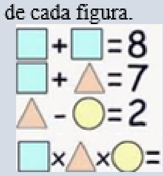
Resuelve
a. 12-7+35-8
b. 35-7-5-17+14
2

Marca la respuesta correcta para el termino Potencia
a) Sumar varias veces el mismo número.
b) Multiplicar la base por el exponente.
c) Multiplicar el mismo número varias veces
3

Un aeroplano recorrió 1940 km el primer día, el segundo recorrió 340 km más que el primero y el tercero 890 km menos que entre los dos anteriores. ¿Cuántos km recorrió el aeroplano en total?
4

En la estantería del salón de mi casa hay 120 libros en total colocados en 6 estantes. Sabiendo que cada estante tiene el mismo número de libros, calcula cuántos libros hay en
17

Resuelve
(6-4) (5 +8) = _______
(25-13) (7-2) = _______
18

Descubre el valor de cada figura.


19

Escribe los siguientes números como potencias de base 2:
4 = _____
16 = _____
32 = _____
64 = _____
20

Retroalimentación de problemas
Ejemplo con el método de Georg Pólya

https://docs.google.com/presentation/d/1wUBxZB689VW8TDk49HABS1e0HweHjh-T/edit?usp=share_link&ouid=103632844648121250785&rtpof=true&sd=true

ANEXO E

Rúbricas de evaluación

- **Rúbrica para evaluar los juegos.**

DIMENSIÓN	DESCRIPTORES			
	Superior (S)	Alto (A)	Básico (B)	Bajo (J)
Aplica con claridad las reglas del juego.	Demuestra total entendimiento del juego.	Demuestra algún entendimiento del juego.	Demuestra dificultad en entender algunos aspectos del juego.	No demuestra entendimiento del juego.
Mantiene una actitud positiva durante el juego.	Su actitud es excelente durante el juego.	Muestra una buena actitud durante el juego.	En ocasiones muestra buena actitud durante el juego.	No muestra una buena actitud durante el juego.
Muestra un dinamismo y buena organización en el juego.	Es dinámico y organizado durante el juego.	Es un tanto organizado y dinámico durante el juego.	En algunos casos es organizado durante el juego.	No muestra dinamismo ni organización durante el juego.
Trabajo colaborativo en búsqueda de estrategias.	Colabora en el desarrollo de estrategias con sus compañeros.	En ocasiones colabora con sus compañeros en desarrollar estrategias.	Muy poco colabora con sus compañeros en desarrollar estrategias.	No colabora con sus compañeros en desarrollar estrategias.

- **Rúbrica para evaluar los problemas.**

DIMENSIÓN	DESCRIPTORES			
	Superior (S)	Alto (A)	Básico (B)	Bajo (J)
Comprensión del problema.	Comprende el problema en su totalidad e indica todos y cada uno de los datos que este aporta.	Conoce e interpreta parcialmente los datos planteados en el problema. Demuestra Considerable comprensión del problema.	Identifica algunos datos planteados en el problema. Comprende algunos aspectos que ayudan a resolver el problema.	No identifica ni interpreta los datos planteados en el problema. Demuestra poca comprensión del problema.
Esquematización	Esquematiza claramente el enunciado indicando correctamente los datos del problema. Los dibujos son claros y ayudan mucho para que el estudiante comprenda lo que está haciendo.	Esquematiza parcialmente el enunciado indicando algunos de los datos del problema. Los dibujos son claros y fáciles de entender.	Realiza esquemas que no corresponden a lo que plantea el enunciado del problema.	No puede esquematizar correctamente el enunciado. Los dibujos y diagramas no están muy claros.
Estrategia de solución (plan).	De acuerdo con la teoría identifica la fórmula aplicable y muestra total, entendimiento de los conceptos involucrados. Siempre usa estrategias efectivas y eficientes para resolver los problemas.	Identifica parcialmente las fórmulas para aplicar de acuerdo con la teoría y conceptos involucrados en la solución del problema. Usualmente, usa estrategias efectivas y	Busca fórmulas para aplicar en la resolución del problema, pero las utiliza de manera inadecuada.	Muestra poca comprensión de las fórmulas para aplicar y los conceptos involucrados. A veces usa estrategias efectivas y eficientes

		eficientes para resolver los problemas.		para resolver los problemas.
Herramientas fórmulas y operaciones (Ejecución).	Aplica algoritmos correctamente. Incluye todos los elementos pedidos en la solución del problema.	Aplica algoritmos correctamente, pero comete algunos errores aritméticos y algebraicos. Incluye la mayar parte de los elementos pedidos en la solución del problema.	Aplica algoritmos incorrectamente y no incluye todos los elementos pedidos para la solución del problema.	Aplica algoritmos de manera incorrecta, comete errores aritméticos y algebraicos. Sin responder a lo que se pide en la solución del problema.
Validación generalización.	valida y/o generaliza sus procesos de solución.	valida y/o generaliza sus procesos de solución de manera coherente.	valida y/o generaliza sus procesos de solución de manera elemental.	carece de, validación y/o generalización de sus procesos de solución.

- **Rúbrica para evaluar potenciación y radicación**

DIMENSIÓN	DESCRIPTORES			
	Superior (S)	**Alto (A)**	**Básico (B)**	**Bajo (J)**
Conceptos matemáticos (35%)	Se aprecia que el alumno comprendió los conceptos de potenciación y radicación (propiedades, operaciones básicas, leyes de signos, etc.) revisados en clase, y los aplica para resolver correctamente todos los ejercicios.	El alumno comprendió los conceptos de potenciación, radicación y propiedades, lo que le permite resolver correctamente la mayoría de los ejercicios.	Se aprecia que el alumno comprendió los conceptos de potenciación, radicación y algunas propiedades, y las aplica para para resolver correctamente la mitad de los ejercicios.	Se aprecia que el alumno no comprendió en su totalidad los conceptos de potenciación, radicación y sus propiedades por lo que no pudo aplicarlos para resolver correctamente los ejercicios.
Proceso de resolución (35%)	Utiliza el método más apropiado y sigue todos los pasos de forma secuencial y lógica, además ejecuta correctamente las operaciones matemáticas y logra resolver correctamente todos los ejercicios.	Reflejan un razonamiento ordenado para aplicar adecuadamente los pasos y operaciones y llegar al resultado correcto de los ejercicios. La mayoría de los ejercicios fueron resueltos correctamente.	Refleja un razonamiento ordenado y emplea adecuadamente los pasos y operaciones para llegar al resultado correcto, pero presenta algunas inconsistencias. Por ende, la mayoría de los ejercicios no fueron resueltos correctamente.	Utiliza una serie de pasos para resolver el problema, pero presenta inconsistencias para resolver las operaciones matemáticas o solamente resuelve operaciones de manera mecánica. Pocos ejercicios fueron resueltos correctamente.
Legibilidad de los ejercicios (10%)	Todos los ejercicios se presentan de manera ordenada y limpia, además es posible leer sin problema el proceso de resolución.	La mayoría de los ejercicios se presentan de manera ordenada, permitiendo leer fácilmente el proceso de resolución.	Los ejercicios presentan algunas deficiencias en su organización, dificultando leer fácilmente el proceso de resolución.	Los ejercicios presentan constantes fallas en la organización.
Participación y desempeño en clase (20%)	El alumno participó altivamente durante la clase, haciendo	El alumno participó oportunamente durante la clase dejando ver el	El alumno participó moderadamente durante la clase, pero fue	El alumno no participó

	comentarios o dudas respecto de los ejercicios que se explicaron.	interés que tiene por el tema.	suficiente para apreciar su interés y dudas sobre el tema.	activamente durante la clase.

- **Rúbrica para evaluar expresiones algebraicas.**

DIMENSIÓN	DESCRIPTORES			
	Superior (S)	**Alto (A)**	**Básico (B)**	**Bajo (J)**
El estudiante es capaz de identificar las partes de los términos algebraicos en los ejercicios planteados y propone ejemplos.	El estudiante es capaz de identificar todas las partes de los términos algebraicos y propone ejemplos con éxito.	El estudiante identifica las partes de las expresiones algebraicas y presenta dificultad en la elaboración de los ejemplos.	El estudiante identifica algunas partes de los términos algebraicos y no presenta ejemplos.	El estudiante no identifica las partes de los términos algebraicos y no da ejemplos.
El estudiante determina el valor numérico de una expresión algebraica para ciertos valores de la incógnita.	El estudiante determina con éxito el valor numérico de una expresión algebraica para ciertos valores de la incógnita.	El estudiante determina el valor numérico de una expresión algebraica para ciertos valores de la incógnita.	El estudiante consigue determinar el valor numérico de algunas expresiones algebraicas.	El estudiante no logra determinar el valor numérico de una expresión algebraica, presentando dificultad en el desarrollo de las operaciones.
El estudiante representa expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa.	El estudiante representa con éxito expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa.	El estudiante representa expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico, y presenta algunos errores al realizar el paso del lenguaje algebraico al lenguaje natural.	El estudiante representa expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico.	El estudiante presenta errores al representar expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa.
El estudiante participa activamente y cumple su rol durante toda la sesión.	El estudiante participa activamente y cumple el rol designado en las actividades planteadas durante la sesión de clase.	El estudiante participa regularmente en las actividades planteadas durante la sesión de clase.	El estudiante tiene una partición mínima en las actividades planteadas durante la sesión de clase y no cumple con el rol designado.	El estudiante no participa y no cumple con el rol designado en las actividades planteadas durante la sesión de clase.

- **Rúbrica para evaluar conocimientos previos a través del juego dados aritméticos.**

DIMENSIÓN	DESCRIPTORES			
	Superior (S)	**Alto (A)**	**Básico (B)**	**Bajo (J)**
Participa activamente durante el desarrollo del juego y la socialización.	Participa activamente en ambas actividades.	Participa activamente en el juego y en parte de la socialización.	Participa en la actividad, pero no en la socialización.	Muestra desinterés en el desarrollo del juego y no participa en la socialización.
Emplea adecuadamente la adición y la sustracción de números enteros para resolver problemas cotidianos.	Comprende los problemas y los resuelve correctamente.	comprende y resuelve correctamente casi todos los problemas.	Comete fallos en casi todos los problemas.	No comprende ni resuelve correctamente los problemas.
Resuelve los ejercicios planteados en el juego de adición, sustracción multiplicación y potenciación de números enteros.	Resuelve correctamente todas las operaciones.	Resuelve correctamente casi todas las operaciones.	Resuelve las operaciones, pero tiene fallos en varias de ellas.	No resuelve las operaciones.