

UNA PRUEBA DEL CARÁCTER INTRÍNSECO DE LA CURVATURA TOTAL
USANDO TÉCNICAS DE ANÁLISIS GEOMÉTRICO



SANDRA PATRICIA PILLIMUE PILLIMUE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2023

UNA PRUEBA DEL CARÁCTER INTRÍNSECO DE LA CURVATURA TOTAL
USANDO TÉCNICAS DE ANÁLISIS GEOMÉTRICO



TRABAJO DE GRADO

En la modalidad de investigación, presentado como requisito parcial para optar al
título de Matemático.

SANDRA PATRICIA PILLIMUE PILLIMUE

DIRECTOR: DR. ELKIN DARÍO CÁRDENAS DÍAZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2023

Nota de aceptación

Dr. Elkin Darío Cárdenas D.
Director

Dr.
Jurado

Dr.
Jurado

Popayán, 16 de marzo del 2023.

Dedicado a mi papá y mamá.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios. Quiero manifestar mi infinito agradecimiento a mi papá y mamá, gracias a ellos y su esfuerzo todo esto es posible, también agradezco a mis hermanos y mi novio por apoyarme. Por último agradezco a los profesores quienes me guiaron durante el trascurso de mi pregrado.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	7
1. Preliminares	9
1.1. Superficies regulares	9
1.2. La diferencial	14
1.3. Primera forma fundamental	17
1.4. Campos normales	23
1.5. Curvatura de Gauss	29
1.6. Integración en superficies	32
2. Geometría intrínseca de superficies	34
2.1. Isometrías	34
2.2. Campos vectoriales	39
2.3. Tensor de curvatura de Riemann y Teorema Egregium	57
2.4. Métricas Riemannianas	63
2.5. Geodésicas	65
3. Análisis y geometría	75
3.1. El teorema de la divergencia	75
3.2. Variación de la métrica	90
BIBLIOGRAFÍA	98

INTRODUCCIÓN

Aunque históricamente el primer acercamiento aceptado a la noción de curvatura fue en el siglo XIV en los trabajos del matemático Nicolás Oresme con afirmaciones tales como que la curvatura del círculo era el inverso de su radio, mucho antes hubo ideas de esta noción de forma implícita en los Elementos de Euclides. Más adelante, a finales del siglo XVII, Newton y Leibniz la consideraron en sus estudios, pero fue Leonhard Euler quien definió la curvatura como velocidad de cambio del ángulo que forman las tangentes con una dirección dada. Además, Euler es quien dio inicio a la llamada geometría intrínseca al estudiar formalmente la geometría de curvas planas introduciendo en 1736 sus coordenadas intrínsecas: longitud de arco y radio de curvatura. De igual forma la teoría de curvas cerradas con anchura constante se debe a él. También hizo aportes a la teoría de superficies, mas concretamente, fue el primero en caracterizar las geodésicas como soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales.

En lo que se refiere a la teoría de superficies, el alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado uno de los matemáticos más prolijos de la historia, realizó numerosas contribuciones. Su principal trabajo en este campo fue “Disquisitiones generales circa superficies curvas”, publicado en 1828. En dicho trabajo expone ideas geométricas importantes como la curvatura gaussiana y presenta el célebre Teorema Egregium, el cual afirma que la curvatura gaussiana de una superficie es una cantidad intrínseca, es decir, que depende únicamente de la geometría interna de la superficie. Por lo que conocemos hasta hoy, no existe una prueba geométrica simple del Teorema Egregium.

Como una aplicación del Teorema Egregium de Gauss se obtiene el “teorema de Gauss-Bonnet para superficies”. De acuerdo a Martínez [10, pág 34], éste establece una de las fórmulas más profundas y difíciles de la Geometría Diferencial y la Topología Algebraica. Dicho teorema fue probado por Gauss para el caso de po-

lígono geodésico y Bonnet lo demuestra para polígonos con lados de curvatura geodésica no nula. No existe una demostración sencilla del mismo. Para el caso de superficies regulares conexas compactas, el Teorema de Gauss-Bonnet afirma que

$$\int \int_S K dA = 2\pi\chi(S),$$

donde $\chi(S)$ denota la característica de Euler de S y K es la curvatura gaussiana. De la ecuación anterior se desprende que la curvatura total $\int \int_S K dA$ es independiente de la métrica.

En este documento se presentan tres capítulos que apuntan a construir el concepto de curvatura para superficies regulares y demostrar su carácter intrínseco. En el primer capítulo se expone la teoría básica de superficies regulares, dotándolas con una forma de medir, asignando una dirección mediante un campo normal y presentando las múltiples nociones de curvatura. En el segundo capítulo se estudia la geometría intrínseca de las superficies regulares, introduciendo el concepto de isometría, los campos vectoriales, el Teorema Egregium, las métricas Riemannianas y geodésicas. Finalmente, en el tercer capítulo se presenta la relación entre la geometría y el análisis mediante el teorema de la divergencia y las variaciones de la métrica, para posteriormente exponer la demostración que corresponde al objetivo principal de este documento.

1. Preliminares

Este capítulo introduce la teoría básica de superficies planteada en el libro Elementary differential geometry [2]. Inicialmente, presenta la definición de superficie regular, luego, puntualiza la noción de suavidad para funciones definidas entre superficies, después plantea la primera forma fundamental con el fin de realizar mediciones sobre superficies. Finalmente, se exponen las múltiples definiciones de curvatura, haciendo énfasis en la relevancia de esta idea para la geometría diferencial.

1.1. Superficies regulares

Al considerar el plano- xy como un subconjunto de \mathbb{R}^3 , se obtiene una superficie dos dimensional, se entiende por superficies regulares, aquellas que se pueden describir mediante dos parámetros, es decir, un conjunto que localmente se ve como una porción del plano.

Definición 1. Se denomina a $S \subset \mathbb{R}^3$ **superficie regular**, si existen para cada $p \in S$ una vecindad abierta V de p en \mathbb{R}^3 , un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^2 y $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función suave tal que:

- (i) $F(U) = S \cap V$ y $F : U \rightarrow S \cap V$ es un homeomorfismo.
- (ii) La matriz jacobiana $D_u F$ tiene rango maximal para cada punto $u \in U$.

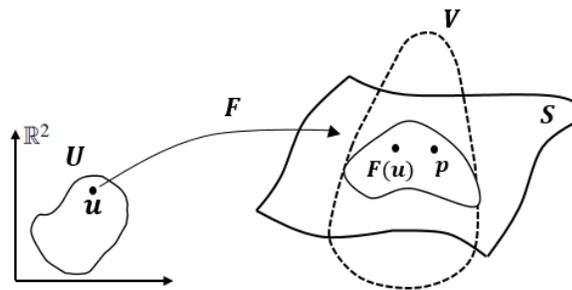


Figura 1: Superficie regular

La terna (U, F, V) es llamada parametrización local de S en p , el conjunto $S \cap V$ se denomina vecindad coordenada de p y las componentes de $u = (u^1, u^2)$ son las coordenadas del punto $F(u) \in S$.

Ejemplo 1. El plano- xy , descrito por $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ es una superficie regular.

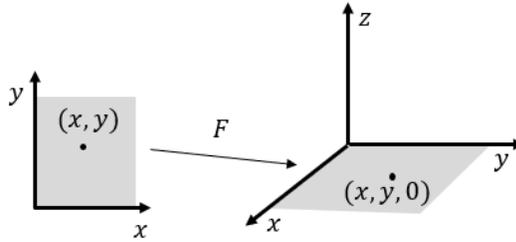


Figura 2: Plano- xy

Tomando $p \in S$, $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^3$ y $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y) = (x, y, 0),$$

se sigue que (U, F, V) es una parametrización local de S en p .

Ejemplo 2. La esfera unitaria $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie regular.

Utilizando la proyección estereográfica, con $V_1 := \mathbb{R}^3 - \{0, 0, 1\}$, $U_1 = \mathbb{R}^2$ y la función

$$F_1(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} (2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)$$

se cubren todos los puntos de S^2 excepto el punto $(0, 0, 1)$. Para este punto, se elige $U_2 = \mathbb{R}^2$, $V_2 = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, -1)\}$ y

$$F_2(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} (2u, 2v, 1 - u^2 - v^2).$$

Ejemplo 3. Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. El gráfico de f

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\},$$

es una superficie regular.

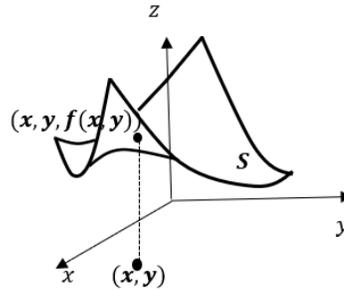


Figura 3: Gráfica de f .

Con $V := \mathbb{R}^3$ y $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y) := (x, y, f(x, y))$, es claro que (U, F, V) es una parametrización local de S en cualquier punto p .

Ejemplo 4. Sean $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos abiertos, con $0 \in J$, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función suave. Suponga además que $v(t)$ y $\dot{c}(t)$ son linealmente independientes para todo $t \in I$ y $F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función dada por

$$F(t, s) = c(t) + s v(t). \quad (1)$$

Entonces, existe una vecindad abierta U de $(t, 0)$ en $I \times J$ tal que (U, F, S) es una parametrización de la superficie regular $S = F(U)$.

Definición 2. Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ que puede ser cubierta por parametrizaciones de la forma (1), es llamada una **superficie reglada**.

Ejemplo 5. Sea $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva que no se interseca a sí misma, $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)$ y $v(t) = (0, 0, 1)$, entonces la correspondiente superficie reglada, dada por

$$F(t, s) = (c_1(t), c_2(t), s),$$

es el cilindro sobre c .

La siguiente proposición presenta un criterio suficiente para la construcción de superficies regulares.

Proposición 1. Sean $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, $f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $S := \{(x, y, z) \in V_0 \mid f(x, y, z) = 0\}$. Si

$$\text{grad } f(p) \neq (0, 0, 0),$$

para todo $p \in S$, entonces S es una superficie regular.

Ejemplo 6. El hiperboloide de dos hojas S , dado por la ecuación $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$, es una superficie regular.

En efecto, considerando la función

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1,$$

entonces $S = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\}$ y además $\nabla f(x, y, z) = 2(-x, -y, z)$.

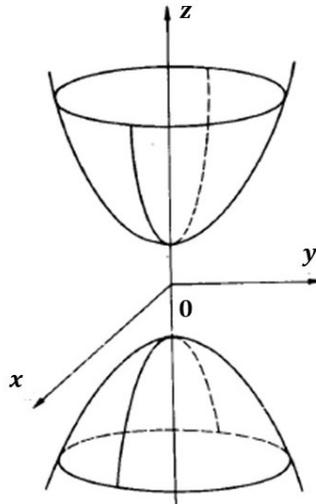


Figura 4: Hiperboloide de dos hojas.

A continuación se presenta la noción de plano tangente, concepto que es fundamental en el desarrollo de la teoría de superficies.

Definición 3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Dado $p \in S$, el conjunto

$$T_p S = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \text{existe un } \varepsilon > 0 \text{ y una curva suave parametrizada } c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \\ \text{con } c(0) = p \text{ y } \dot{c}(0) = X\},$$

es llamado el **plano tangente** de S en p y sus elementos son llamados vectores tangentes.

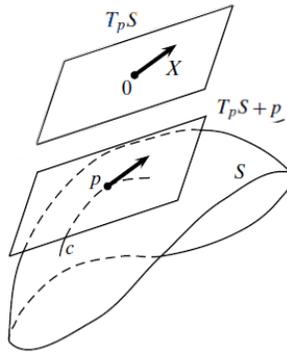


Figura 5: Plano tangente.

Dicho plano es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 de dimensión dos, ver en [6, pág 95].

Ejemplo 7. Sea S el plano- xy , $p \in S$ y $c : \mathbb{R} \rightarrow S$ la curva suave parametrizada, dada por

$$c(t) = p + tX,$$

donde $X = (x, y, 0) \in S$ está fijo. Como $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = X$, entonces $X \in T_p S$, así $S \subset T_p S$. Por otra parte, si $X \in T_p S$, existe una curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, con $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = X$, donde $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)$ y $X = \dot{c}(0) = (\dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0), 0)$ de este modo $X \in S$, así $T_p S \subset S$. Por lo tanto $S = T_p S$.

Proposición 2. Sean $V \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $S = f^{-1}(0)$. Si $\text{grad } f(p) \neq 0$ para todo $p \in S$, entonces el gradiente de f es perpendicular al plano tangente, es decir:

$$T_p S = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle X, \text{grad } f(p) \rangle = 0\} = \{\text{grad } f(p)\}^\perp.$$

Ejemplo 8. Se puede describir la esfera unitaria por $S^2 = f^{-1}(0)$, donde f es la función dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Como $\text{grad } f(p) = 2p \neq 0$ para todo $p \in S$, entonces

$$T_p S^2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle X, p \rangle = 0\} = \{p\}^\perp,$$

es decir, $T_p S^2$ está conformado por todos los vectores de \mathbb{R}^3 ortogonales al punto p .

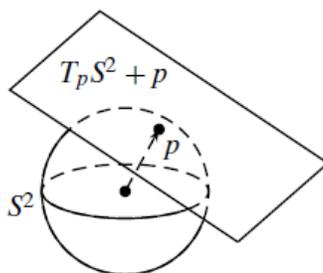


Figura 6: Plano tangente de S^2 en p .

1.2. La diferencial

Se desea extender elementos del cálculo diferencial a las superficies regulares, con este propósito se presenta la noción de suavidad para aquellas funciones que su dominio o imagen es una superficie regular.

Sea S una superficie regular y (U, F, V) una parametrización local de S en p , existen tres casos para definir el concepto de suavidad.

En primer lugar, una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave en $p \in S$, si $f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave en $F^{-1}(p)$.

En segundo lugar, una función $\varphi : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow S$ es suave, si y sólo si, $i \circ \varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ es suave, donde i es la inclusión de S en \mathbb{R}^3 , es decir, φ es suave si vista como función de W en \mathbb{R}^3 es suave. Lo anterior es equivalente a que para toda parametrización (U, F, V) de S , la función $F^{-1} \circ \varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ es suave. El último caso es descrito en la siguiente definición.

Definición 4. Sean S_1, S_2 superficies regulares, $p \in S_1$ y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una función continua. Se dice que f es suave en p , si existen (U_1, F_1, V_1) una parametrización local de S_1 en p y (U, F_2, V_2) una parametrización local de S_2 en $f(p)$, de tal manera que $F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : F_1^{-1}(f^{-1}(V_2 \cap V_1)) \rightarrow U_2$ es suave en p .

El concepto de suavidad descrito anteriormente es para un punto p , ahora bien, se dice que f es suave, si lo es en cada $p \in S_1$.

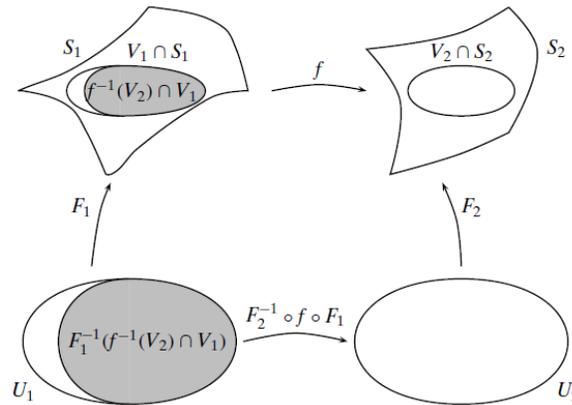


Figura 7: Función suave

Una idea relevante de cualquier campo de estudio en matemáticas, es la de preservar estructuras. En particular, en geometría diferencial la idea de preservar estructuras se entiende como deformar una superficie en otra sin cambiar las propiedades de diferenciabilidad, en la siguiente definición precisamos dicha noción.

Definición 5. Sean S_1, S_2 superficies regulares. Una función $f : S_1 \rightarrow S_2$ es llamado un difeomorfismo, si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son suaves. Si existe tal difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$, se dice que las superficies S_1 y S_2 son difeomorfas.

Ejemplo 9. Sea S^2 la esfera y el elipsoide $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$. La función $f : S^2 \rightarrow S$ dada por

$$f(x, y, z) = (ax, by, cz),$$

donde $a, b, c > 0$, es un difeomorfismo.

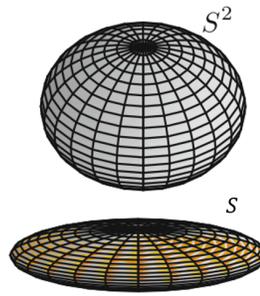


Figura 8: Superficies difeomorfas.

La siguiente proposición establece la suavidad de los cambios de parámetros.

Proposición 3. Sea S una superficie regular con (U_1, F_1, V_1) y (U_2, F_2, V_2) parametrizaciones locales. Entonces

$$F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(U_1 \cap V_2) \longrightarrow F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

es suave.

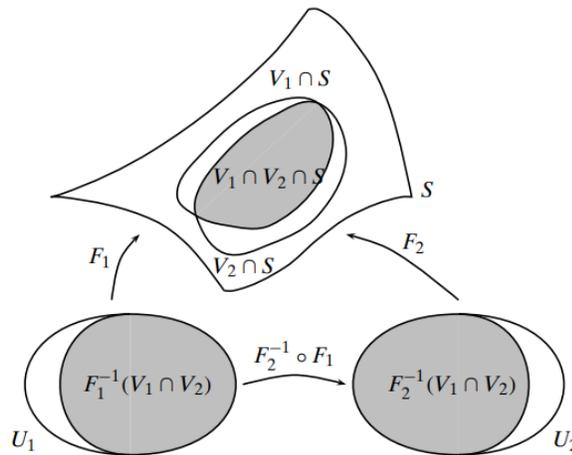


Figura 9: Las transformaciones de parámetros son difeomorfismos.

Definición 6. Sean S_1, S_2 superficies regulares, $p \in S_1$ y $f : S_1 \longrightarrow S_2$ una función suave. **La diferencial** de f en p , es la función $d_p f : T_p S_1 \longrightarrow T_{f(p)} S_2$, definida de la siguiente forma: para $X \in T_p S$ se elige una curva parametrizada $c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow S_1$

con $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = X$, entonces

$$d_p f(X) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ c) \right|_{t=0} \in T_{f(p)} S_2.$$

La diferencial $d_p f$ es lineal e independiente de la curva c escogida, es decir, solo depende de X .

Análogamente, se define para la función $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, la diferencial $d_p f : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^n$, como:

$$d_p f(X) := \left. \frac{d}{dt}(f \circ c) \right|_{t=0}.$$

Por último, para la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow S$, la diferencial $d_p f : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} S$, está dada por

$$d_p f(X) := D_p f(X),$$

donde $D_p f$ es la matriz jacobiana de f en p .

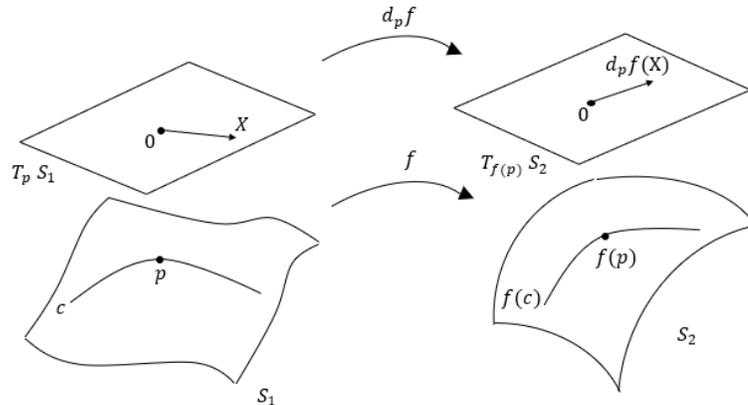


Figura 10: La diferencial.

1.3. Primera forma fundamental

En esta sección introducimos un concepto que permite medir sobre superficies regulares cantidades como: longitud de arco de una curva, áreas, ángulos, entre otros.

La ventaja con la siguiente definición, es la posibilidad de hacer mediciones sin tener que referirse al espacio ambiente donde se halla la superficie.

Como para cada $p \in S$, el plano tangente T_pS es un subespacio 2-dimensional de \mathbb{R}^3 , se puede restringir el producto interno euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbb{R}^3 a T_pS y así obtener un producto interno sobre T_pS . Se denota esta restricción por g_p , es decir:

$$g_p := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_pS \times T_pS}.$$

Definición 7. La función que asigna a cada $p \in S$ el producto interno g_p , es llamada **la primera forma fundamental** de S . Dados $X, Y \in T_pS$, se define como

$$I_p(X, Y) := g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

Observación 1. Del álgebra lineal, ver en [6, pág 479], el producto interno g_p en T_pS puede ser representado por una matriz simétrica definida positiva, respecto a una base elegida de T_pS . En particular, dada una parametrización local (U, F, V) de S en p y los vectores e_1, e_2 de la base estándar de \mathbb{R}^2 , entonces $D_uF(e_1) = \frac{\partial F}{\partial u^1}(u)$ y $D_uF(e_2) = \frac{\partial F}{\partial u^2}(u)$, donde $u = F^{-1}(p)$, forman una base de T_pS , de este modo, la matriz de tamaño 2×2 $(g_{ij}(u))_{ij=1,2}$ que representa el producto interno g_p , en la base $\{\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}\}$, está dada por:

$$g_{ij}(u) := g_p(D_uF(e_i), D_uF(e_j)) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Ejemplo 10. Sea S el plano- xy y $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización dada por $F(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0)$. Luego

$$\frac{\partial F}{\partial u^1}(u) = D_uF(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) = D_uF(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así, las componentes g_{ij} de la matriz de representación son:

$$g_{ij}(u) = g_p \left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

En consecuencia, la matriz que representa al producto interno g_p , con $p = F(u)$, es

$$(g_{ij}(u))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 11. Sea $F : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización de S^2 , dada por:

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \operatorname{sen} v \\ \cos u \cos v \\ \operatorname{sen} u \end{pmatrix}.$$

Las componentes de la matriz de representación $g_{ij}(u)$ son:

$$\begin{aligned} g_{11}(u, v) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}(u, v), \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ -\operatorname{sen} u \cos v \\ \cos u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ -\operatorname{sen} u \cos v \\ \cos u \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \\ &= \operatorname{sen}^2 u (\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v) + \cos^2 u \\ &= \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12}(u, v) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}(u, v), \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ -\operatorname{sen} u \cos v \\ \cos u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ -\cos u \operatorname{sen} v \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \cos v \cos u \operatorname{sen} v \\ &= 0 = g_{21}(u, v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{22}(u, v) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ -\cos u \operatorname{sen} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ -\cos u \operatorname{sen} v \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \operatorname{sen}^2 v \\
&= \cos^2 u (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) \\
&= \cos^2 u,
\end{aligned}$$

por lo cual, la matriz de representación de g_p , con $p = F(u, v)$, está dada por:

$$(g_{ij}(u, v))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 12. Sean $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ la superficie cilíndrica y $F : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización de S , dada por:

$$F(\varphi, h) = (\cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi, h).$$

Entonces, las componentes de la matriz de representación de g_p , con $p = F(u)$, son:

$$\begin{aligned}
g_{11}(\varphi, h) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, h), \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, h) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1,
\end{aligned}$$

$$g_{12}(\varphi, h) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, h), \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi, h) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 = g_{21}(\varphi, h),$$

$$g_{22}(\varphi, h) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi, h), \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi, h) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1.$$

Así, la matriz de representación, está dada por:

$$(g_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 13. Sea S la superficie de revolución generada al rotar la catenaria $y = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right)$, alrededor del eje z . Tal superficie es llamada Catenoide.

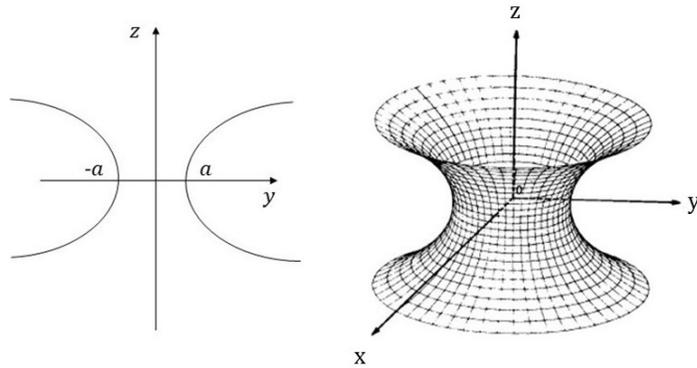


Figura 11: Catenaria y Catenoide.

Considerando la parametrización $F : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S dada por:

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} a \cosh v \cos u \\ a \cosh v \sin u \\ a v \end{pmatrix},$$

se tiene que:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} -a \cosh v \sin u \\ a \cosh v \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} a \sinh v \cos u \\ a \sinh v \sin u \\ a \end{pmatrix}.$$

Así, las componentes de la matriz de representación g_{ij} son:

$$g_{11} = a^2 \cosh^2 v, \quad g_{22} = a^2 \cosh^2 v, \quad g_{12} = g_{21} = 0. \quad (2)$$

En conclusión, g está dada por:

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} a^2 \cosh^2 v & 0 \\ 0 & a^2 \cosh^2 v \end{pmatrix}.$$

El primer comentario de esta sección hizo referencia a la relevancia que tiene conocer la primera forma fundamental de una superficie. A continuación, se presentan algunas fórmulas que evidencian esta afirmación:

Sea (U, F, V) una parametrización local de S , I un intervalo cerrado y $c : I \rightarrow S$ una curva, tal que $c(I) \subset S \cap V$. Entonces **la longitud de arco de c** , está definida como

$$L(c) = \int_I \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt.$$

Ahora, sea $\alpha : I \rightarrow S$ otra curva, tal que $\alpha(I) \subset S \cap V$. Si c y α se cortan en un punto $p = c(t_0) = \alpha(t_0)$. Entonces **el ángulo θ** entre c y α en p se define como el menor ángulo $\theta \geq 0$ que satisface

$$\cos(\theta) = \frac{g_{c(t_0)}(\dot{c}(t_0), \dot{\alpha}(t_0))}{\sqrt{g_{c(t_0)}(\dot{c}(t_0), \dot{c}(t_0))} \sqrt{g_{c(t_0)}(\dot{\alpha}(t_0), \dot{\alpha}(t_0))}}.$$

Observación 2. Si c y α son las curvas coordenadas de una parametrización F de S , entonces el ángulo θ entre c y α en el punto $F(u) = p$ está dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) \right\rangle} \sqrt{\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^2}(u), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) \right\rangle}} = \frac{g_{12}(u)}{\sqrt{g_{11}(u)g_{22}(u)}}.$$

1.4. Campos normales

Definición 8. Sea S una superficie regular. Un **campo normal** sobre S es una función $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $N(p) \perp T_p S$, para todo $p \in S$. Un campo normal en S se dice que es un campo normal unitario si $\|N(p)\| = 1$, para todo $p \in S$.

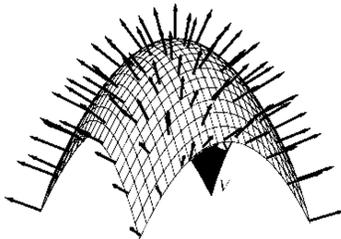


Figura 12: Campo normal.

Ejemplo 14. Sea S el plano- xy . Entonces $N(x, y, 0) = (0, 0, 1)$, es un campo normal unitario constante sobre S .

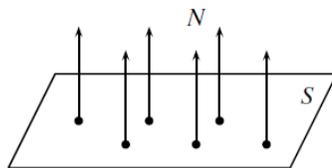


Figura 13: Campo normal.

Ejemplo 15. Sea $N : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dado por $N(p) = p \in S^2$. Como $T_p S^2 = \{p\}^\perp$ y $\|N(p)\| = \|p\| = 1$, entonces N es un campo normal unitario sobre S^2 .

Observación 3. Siempre se puede construir localmente un campo normal unitario suave sobre una superficie regular S , para ello, se considera (U, F, V) una parametrización local de S en p , entonces mediante el producto vectorial se obtiene

$$\tilde{N}(p) = D_{F^{-1}(p)}F(e_1) \times D_{F^{-1}(p)}F(e_2),$$

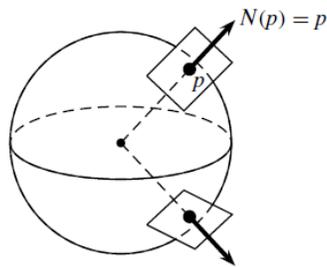


Figura 14: Campo normal sobre S^2 .

donde $\tilde{N} : S \cap V \rightarrow \mathbb{R}^3$, es un campo normal sobre $S \cap V$. Para terminar la construcción de tal campo, se considera $N : S \cap V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $N(p) := \frac{\tilde{N}(p)}{\|\tilde{N}(p)\|}$, así $\|N(p)\| = 1$.

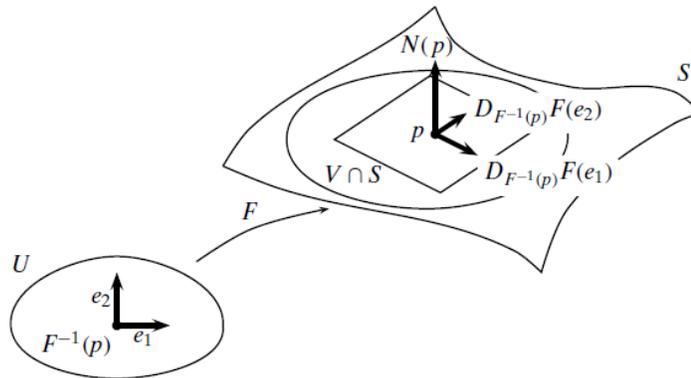


Figura 15: Campo normal unitario sobre S .

Definición 9. Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es **orientable** si existe un campo normal unitario suave sobre S .

Ejemplo 16. Consideremos la superficie cilíndrica $S = S^1 \times \mathbb{R}$, donde

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Entonces, $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ es un campo normal unitario suave sobre S . Por lo tanto S es una superficie orientable.

Por el contrario, la banda de Möbius (ver Figura 21) es una superficie no orientable. Geométricamente se observa que no es posible definir un campo normal continuo

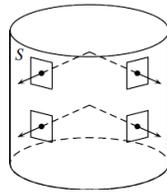


Figura 16: Superficie cilíndrica

sobre toda la banda, pues al “recorrerla” los vectores normales cambia de sentido, ver en [3, pág 115]. De manera intuitiva se puede decir que la banda de Möbius no tiene un “adentro” o un “afuera”.

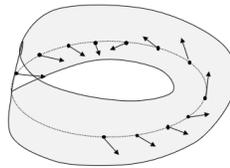


Figura 17: Banda de Möbius.

Dado que N es un campo normal unitario sobre S , es decir, N toma un punto de la superficie y le asigna un vector en \mathbb{R}^3 de longitud 1, se puede considerar N como una función de S en S^2 .

Definición 10. Sea S una superficie regular orientable y N un campo normal unitario suave sobre S . La función $N : S \rightarrow S^2$ es llamada **función de Gauss**.

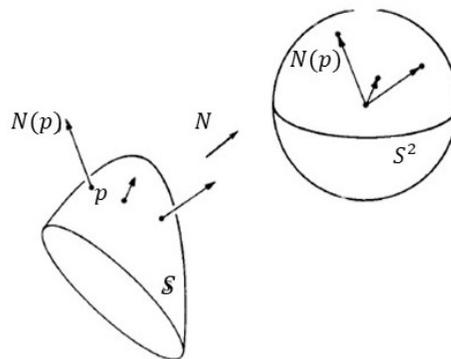


Figura 18: La función de Gauss.

Geoméricamente la función de Gauss, dibuja el vector normal $N(p)$ que sale de la superficie S , como un vector con pie en el origen, de manera tal que su punta se visualiza como un punto de la esfera S^2 (ver Figura 18). Además, como $T_{N(p)}S^2 = N(p)^\perp = T_pS$, la diferencial, $d_pN : T_pS \rightarrow T_pS (T_{N(p)}S^2)$ es un endomorfismo sobre T_pS .

Definición 11. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientable y N un campo normal unitario sobre S . El endomorfismo $W_p : T_pS \rightarrow T_pS$ definido por

$$W_p(X) = -d_pN(X),$$

es llamado la **función de Weingarten**.

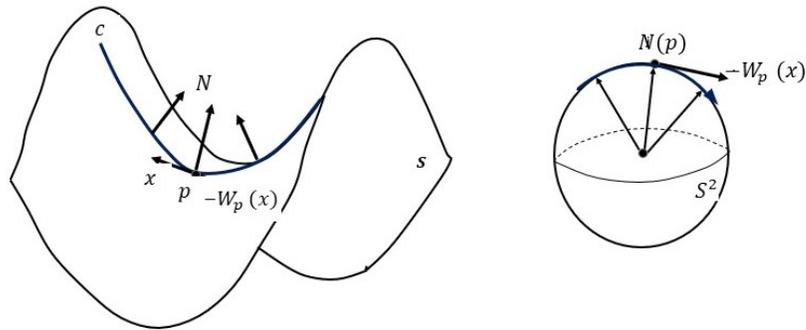


Figura 19: Función de Weingarten.

Proposición 4. La función de Weingarten W_p , es auto-adjunta con respecto a la primera forma fundamental.

Demostración: Sean (U, F, V) una parametrización local de S en p , N el campo normal de S que induce la función de Weingarten $W_p = -d_pN$ y $\{X_1, X_2\}$ la base de T_pS dada por

$$X_1 := D_uF(e_1) = \frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \quad X_2 := D_uF(e_2) = \frac{\partial F}{\partial u^2}(u).$$

Como N es perpendicular a S , se sigue que

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), N(F(u + te_j)) \right\rangle = 0. \quad (3)$$

Diferenciando la ecuación (3) con respecto a t ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), N(F(u + te_j)) \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j) \Big|_{t=0}, N(F(u)) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{d}{dt} N(F(u + te_j)) \Big|_{t=0} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p) \right\rangle + \langle X_i, d_p N \circ D_u F(e_j) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p) \right\rangle + \langle X_i, -W_p(X_j) \rangle. \end{aligned}$$

De este modo

$$I_p(X_i, W_p(X_j)) = \langle X_i, W_p(X_j) \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p) \right\rangle. \quad (4)$$

Del teorema de Schwarz, ver en [7, pág 18], se tiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u),$$

luego,

$$\begin{aligned} I_p(X_i, W_p(X_j)) &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u), N(p) \right\rangle = I_p(X_j, W_p(X_i)), \end{aligned}$$

por lo tanto, para los vectores X_i y X_j de $T_p S$, se tiene

$$I_p(X_i, W_p(X_j)) = I_p(X_j, W_p(X_i)) = I_p(W_p(X_i), X_j).$$

Ahora, si $X, Y \in T_p S$ entonces pueden ser escritos en términos de X_1 y X_2 , así, por la bilinealidad de I_p y la linealidad de W_p , se tiene que

$$I_p(X, W_p(Y)) = I_p(W_p(X), Y),$$

es decir W_p es auto-adjunta con respecto a I .

Ejemplo 17. Sea S el plano- xy y $N(x, y, z) = (0, 0, 1)$, entonces $W_p = 0$, para todo $p \in S$.

Ejemplo 18. Sea $N : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo normal unitario, dado por $N(p) = p$. Entonces, la función de Weingarten está dada por:

$$W_p = -Id.$$

Observación 4. Como la diferencial $d_p N : T_p S \rightarrow T_p S$ es una función lineal auto-adjunta, se asocia a $d_p N$ una forma bilineal simétrica sobre $T_p S$.

Definición 12. La forma bilineal que corresponde a la función de Weingarten W_p , es llamada la **segunda forma fundamental** de la superficie S en el punto p , esto es

$$II_p(X, Y) = I_p(W_p(X), Y), \quad X, Y \in T_p S.$$

Con el fin de encontrar las entradas h_{ij} de la matriz que representa a II_p , se considera una parametrización local (U, F, V) de S en p , N un campo normal unitario sobre S y $u := F^{-1}(p)$. De la ecuación (4), se tiene que

$$\begin{aligned} h_{ij}(u) &:= II_p(D_u F(e_i), D_u F(e_j)), \quad i, j = 1, 2 \\ &= I_p(W_p(D_u F(e_i)), D_u F(e_j)) \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p) \right\rangle. \end{aligned}$$

Bajo las mismas hipótesis, las entradas de la matriz que representa W_p , denotadas por w_i^j , se definen por

$$W_p(D_u F(e_i)) := \sum_{j=1}^2 w_i^j D_u F(e_j).$$

Además, se pueden determinar las matrices $h_{ij}(u)$ y $w_i^j(u)$, una en términos de la otra, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_{ij}(u) &= I \left(\sum_{k=1}^2 w_i^k(u) D_u F(e_k), D_u F(e_j) \right) \\ &= \sum_k^2 w_i^k(u) I(D_u F(e_k), D_u F(e_j)) \\ &= \sum_{k=1}^2 w_i^k(u) g_{kj}(u). \end{aligned}$$

1.5. Curvatura de Gauss

En esta sección estudiamos la noción de curvatura planteada por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Es necesario destacar la relevancia de este concepto para la geometría diferencial, según Berger: La curvatura es el invariante más importante en la Geometría de Riemann y además el más natural, ver en [10, pág 31]. Antes de enunciar la definición de la curvatura Gaussiana, se presenta la curvatura normal y las curvaturas principales.

Sean S una superficie regular con orientación N , $p \in S$, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva parametrizada por longitud de arco, con $c(0) = p$ y n un vector normal a c . Se define la **curvatura normal** de S en p , en la dirección $\dot{c}(0)$, denotada por κ_{nor} , como:

$$\kappa_{nor} = \langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle = \begin{cases} \kappa(0) \langle n(0), N(p) \rangle, & \text{si } \kappa(0) \neq 0 \\ 0, & \text{si } \kappa(0) = 0 \end{cases}$$

donde $\kappa(0)$ es la curvatura de c en $t = 0$, como curva en \mathbb{R}^3 .

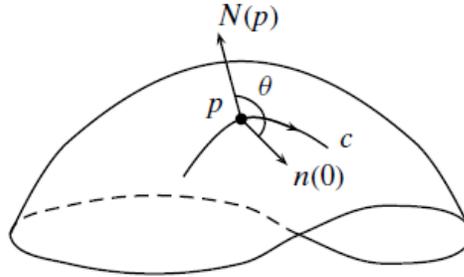


Figura 20: Curvatura normal.

Teorema 1. Sea S una superficie regular con orientación N , $p \in S$ y $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ una curva parametrizada por longitud de arco, con $c(0) = p$. Entonces

$$\kappa_{nor} = II_p(\dot{c}(0), \dot{c}(0)).$$

Este teorema nos permite interpretar geoméricamente el valor de II_p evaluada en $X \in T_p S$, como la curvatura normal de la curva c calculada en 0.

Observación 5. Dado que W_p es una función lineal auto adjunta, para cada $p \in S$ existe una base ortonormal X_1, X_2 de $T_p S$ tal que:

$$W_p(X_i) = \kappa_i X_i, \quad i = 1, 2,$$

donde κ_1, κ_2 son autovalores. Además, κ_1, κ_2 son el máximo y mínimo respectivamente de la segunda forma fundamental II_p restringida al círculo unidad de $T_p S$, es decir, son los valores extremos de la curvatura normal en p , ver en [3, pág 151].

Definición 13. Los autovalores κ_1 y κ_2 son llamados las **curvaturas principales** de S en el punto p . Los correspondientes autovectores $\pm X_1$ y $\pm X_2$ se denominan **direcciones principales de curvatura**.

Ejemplo 19. Dado que para el plano- xy la función de Weingarten $W = 0$, entonces $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. De manera similar, para S^2 , la función de Weingarten es $W = Id$,

entonces $k_1 = k_2 = 1$. Por lo tanto, para el plano y la esfera, las direcciones en todos los puntos son direcciones principales.

Definición 14. Sean S una superficie orientable, $p \in S$, k_1 y k_2 las curvaturas principales de S en p . Entonces

$$K(p) := k_1 k_2 = \det(W_p),$$

es la **curvatura de Gauss** de S en p . Además

$$H(p) := \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \text{traza}(W_p),$$

es llamado la **curvatura media** de S en p .

Intuitivamente la curvatura de Gauss mide que tanto se aleja una superficie del plano tangente, en una vecindad coordenada del punto de la superficie, donde se calcula la curvatura.

Ejemplo 20. Sea S el plano xy , dado que $W_p = 0$ para todo $p \in S$, entonces $K(p) = 0$ y $H(p) = 0$.

Ejemplo 21. Dado que $W_p = Id$, para todo $p \in S^2$ entonces $K \equiv 1$ y $H \equiv 1$ sobre S^2 .

Ejemplo 22. Se considera el toro como una superficie tubular, ver en [2, pág 145], alrededor de la línea c , dada por

$$c(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad 2r < 2.$$

Entonces, $k(t) \equiv 1$ y por lo tanto

$$K(t, \varphi) = -\frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{1 - \cos \varphi}, \quad H(t, \varphi) = \frac{\cos \varphi - \frac{r}{2}}{1 - r \cos(\varphi)}.$$

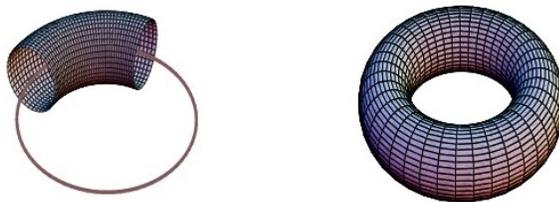


Figura 21: El toro.

1.6. Integración en superficies

Para terminar este capítulo estudiamos la integración de funciones sobre superficies.

Definición 15. Sea S una superficie regular y (U, F, V) una parametrización local de S . Una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, con $f|_{S-V} \equiv 0$ es llamada (Lebesgue-) **integrable** si la función

$$(u^1, u^2)^T \rightarrow f(F(u^1, u^2))\sqrt{\det(\dot{g}_{ij}(u^1, u^2))}, \quad (u^1, u^2) \in U,$$

es (Lebesgue)-integrable. El valor de la integral es

$$\int_S f dA := \int_U f(F(u^1, u^2))\sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))} du^1 du^2$$

Además, el **elemento de superficie** está definido por :

$$dA = \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 du^2.$$

Lema 1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, (U, F, V) y $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ parametrizaciones locales de S y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface $f|_{S-(V \cap \tilde{V})} \equiv 0$

$$(f \circ F)\sqrt{\det(g_{ij})} : U \rightarrow \mathbb{R},$$

es integrable si y solo si

$$(f \circ \tilde{F})\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R},$$

es integrable y en este caso

$$\int_U (f \circ F) \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 du^2 = \int_{\tilde{U}} (f \circ \tilde{F}) \sqrt{\det(g)_{ij}} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2.$$

Demostración: ver en [2, pág 127].

Ejemplo 23. Sean S el plano- xy , $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^3$ y $F(x, y) = (x, y, 0)$, entonces

$$(g_{ij}(x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así $dA = dx dy$. Obteniendo la integral sobre \mathbb{R}^2

$$\int_S f dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy.$$

Si tomamos otra parametrización $\tilde{F} : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\tilde{F}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0),$$

entonces

$$(g_{ij}(r, \varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

así $dA = r dr d\varphi$ y por lo tanto

$$\int_S f dA = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\tilde{F}(r, \varphi)) r d\varphi dr.$$

2. Geometría intrínseca de superficies

El capítulo anterior incorporo la primera forma fundamental para medir sobre superficies regulares. El presente capítulo desarrolla la pregunta, ¿qué cantidades se pueden escribir solamente en términos de la primera forma fundamental?. Una manera de entender la cuestión aquí planteada es imaginar pequeños habitantes que no pueden percatarse del espacio ambiente ni de la forma de la superficie donde viven, sin embargo, ellos son capaces de medir longitudes y áreas sin utilizar información externa a la superficie, dichas ideas conducen a lo que mas adelante se estudia en detalle como geometría intrínseca de superficies.

Continuando con el propósito de ampliar algunas teorías del cálculo diferencial, se plantea el concepto de derivada covariante para campos vectoriales sobre superficies. Además, se estudia la noción de métricas Riemannianas que a rasgos generales extiende la noción de la primera forma fundamental, es decir, dota a las superficies regulares de diferentes maneras de medir, conservando las propiedades del producto interno.

2.1. Isometrías

Definición 16. Sean S_1, S_2 superficies regulares. Una función suave $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una **isometría local**, si para cada $p \in S_1$, la diferencial $d_p f : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ satisface:

$$\langle d_p f(X), d_p f(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle,$$

para todo $X, Y \in T_p S_1$.

Ejemplo 24. Sean S_1 el plano- xy y $S_2 = S^1 \times \mathbb{R}$ la superficie cilíndrica. La función $f : S_1 \rightarrow S_2$ dada por:

$$f(x, y, 0) = (\cos x, \operatorname{sen} x, y)$$

es una isometría local. En efecto, dado $p = (x, y, 0) \in S_1$, se puede ver que

$$d_p f(X) = (-a \operatorname{sen} x, a \operatorname{cos} x, b), \quad X = (a, b, 0) \in T_p S.$$

Por tanto para cualesquiera $X, Y \in T_p S_1$, con $X = ae_1 + be_2 = (a, b, 0)$, $Y = ce_1 + de_2 = (c, d, 0)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle d_p f(X), d_p f(Y) \rangle &= \langle (-a \operatorname{sen} x, a \operatorname{cos} x, b), (-c \operatorname{sen} x, c \operatorname{cos} x, d) \rangle \\ &= ac(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x) + bd \\ &= ac + bd = \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Anteriormente se mencionó que es suficiente conocer la primera forma fundamental para calcular algunas cantidades métricas (longitud de curva, ángulo, área). En este sentido se precisa lo que se entiende por geometría intrínseca, una cantidad se denomina intrínseca si se puede escribir únicamente en términos de la primera forma fundamental. Otra forma de definir “intrínseco” es como aquellas medidas sobre superficies que se preservan mediante isometrías, ver en [12, 167], dado que las isometrías conservan el producto interno.

Definición 17. Una isometría local $f : S_1 \rightarrow S_2$ que es biyectiva, se llama **Isometría**. Si existe tal isometría f , entonces las superficies S_1 y S_2 se dicen isométricas.

Definición 18. Las superficies S_1 y S_2 son llamadas **localmente isométricas**, si para cada $p \in S_1$, existen, una vecindad abierta $U_1 \subset S_1$ de p , un conjunto abierto $U_2 \subset S_2$ y una isometría $f : U_1 \rightarrow U_2$, del mismo modo, para cada $q \in S_2$, existen, una vecindad abierta $U_2 \subset S_2$ de q , un conjunto abierto $U_1 \subset S_1$ y una isometría $f : U_2 \rightarrow U_1$.

En general, que dos superficies sean localmente isométricas no implica que sean isométricas, por ejemplo, el plano y el cilindro son localmente isométricas, sin embargo, no son isométricas, tal como menciona Do Carmo:

La isometría no puede extenderse a totalidad del cilindro porque el cilindro ni siquiera es homeomorfo a un plano, pues cualquier curva cerrada simple del plano puede deformarse continuamente hasta un punto sin abandonar el plano. Tal propiedad se preservaría con toda seguridad bajo un homeomorfismo, pero un paralelo del cilindro no tendrá esta propiedad, lo que contradice la existencia de un homeomorfismo entre el plano y el cilindro, ver en [3, pág 223-224].

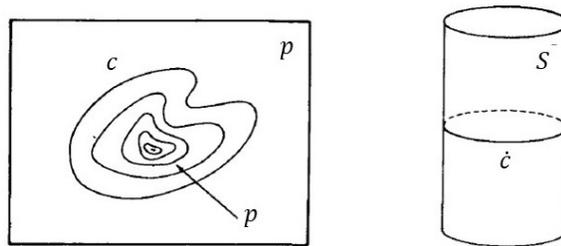


Figura 22: El plano y el cilindro.

Se mencionó anteriormente que el concepto de difeomorfismo preserva las propiedades de diferenciabilidad entre superficies, por su parte, la noción de isometría desempeña la función de preservar las propiedades métricas de las superficies regulares.

Proposición 5. Sean $F : U \rightarrow S$, $\tilde{F} : U \rightarrow \tilde{S}$ parametrizaciones locales de S y \tilde{S} respectivamente, tales que $g_{11} = \tilde{g}_{11}$, $g_{12} = \tilde{g}_{12}$, $g_{22} = \tilde{g}_{22}$, en U . Entonces la función $\varphi = \tilde{F} \circ F^{-1} : F(U) \rightarrow \tilde{S}$, es una isometría local.

Demostración: Ver en [3, pág 224].

Ejemplo 25. Sea S la superficie helicoidal generada de la siguiente forma: se considera la hélice dada por $(\cos u, \sin u, au)$ y en cada punto de la hélice se traza una recta paralela al plano xy que corte al eje z .

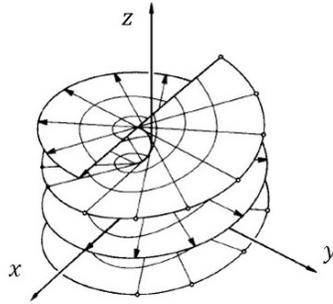


Figura 23: Helicoide.

La función $F : (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \rightarrow S$ dada por

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} a \operatorname{senh} v \cos u \\ a \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u \\ au \end{pmatrix},$$

define una parametrización local de S . En esta parametrización las entradas de la matriz $g_{i,j}$, están dados por:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle = a^2 \operatorname{cosh}^2 v; \\ g_{12} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v} \right\rangle = 0 = g_{21}; \\ g_{22} &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial v} \right\rangle = a^2 \operatorname{cosh}^2 v. \end{aligned} \tag{6}$$

De (2) y (6) se tiene que las primeras formas fundamentales del helicoides y la catenoides son iguales y usando la Proposición 5, se concluye que dichas superficies son localmente isométricas

Proposición 6. Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una isometría local y (U, F, V) una parametrización local de S_1 en p . Sin pérdida de generalidad se asume que $V \cap S_1 \subset S_1$, es tal que $f|_{V \cap S_1} : V \cap S_1 \rightarrow f(V \cap S_1)$ es un difeomorfismo. Entonces $f \circ F$ es una parametrización local de S_2 . Además, las funciones coeficientes de la matriz de representaciones $g_{i,j} : U \rightarrow \mathbb{R}$ de S_1 con respecto a F y $\tilde{g}_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ de S_2 con

respecto a $f \circ F$ coinciden.

Demostración: Se calculan las funciones coeficientes g_{ij} y \tilde{g}_{ij}

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij}(u) &= \left\langle \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u^i}(u), \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u^j}(u) \right\rangle \\ &= \langle D_u(f \circ F)(e_i), D_u(f \circ F)(e_j) \rangle \\ &= \langle df_p(D_u F(e_i)), df_p(D_u F(e_j)) \rangle \\ &= \langle D_u F(e_i), D_u F(e_j) \rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle = g_{ij}(u).\end{aligned}$$

De este modo, los coeficientes de la matriz de representación de la primera forma fundamental son una cantidad intrínseca, dado que se preservan bajo isometrías.

Ejemplo 26. Sean

$$S_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < y < \pi\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

superficies regulares.

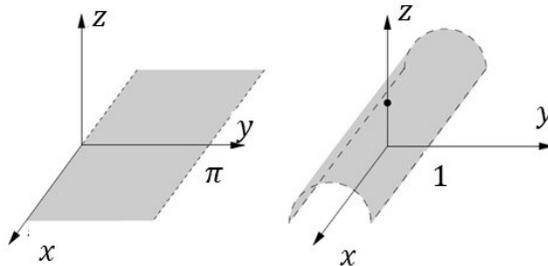


Figura 24: S_1, S_2 .

Las curvaturas principales de S_1 y S_2 son $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = 1$ respectivamente. Es claro que dichas curvaturas principales no son iguales, sin embargo la función $f : S_1 \rightarrow S_2$, dada por

$$f(x, y, 0) = (x, \cos y, \sin y),$$

es una isometría entre S_1 y S_2 . Esto muestra que las curvaturas principales no son preservadas bajo isometrías y en consecuencia no son cantidades intrínsecas.

Por otra parte, se observa que S_1 tiene curvatura media constante cero, mientras que S_2 tiene curvatura media constante $\frac{1}{2}$, lo que demuestra que la curvatura media tampoco se preserva bajo isometrías, de ahí que la curvatura media no sea una cantidad intrínseca. Este último hecho era de esperarse, puesto que la curvatura media se calcula en términos de las curvaturas principales. No obstante, como se prueba más adelante, la curvatura de Gauss si es una cantidad intrínseca, aunque esta también depende de las curvaturas principales.

Proposición 7. Si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una isometría, entonces $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ también es una isometría.

2.2. Campos vectoriales

Definición 19. Sea S una superficie regular. Un **campo vectorial** en S es una función $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $v(p) \in T_p S$ para todo $p \in S$.

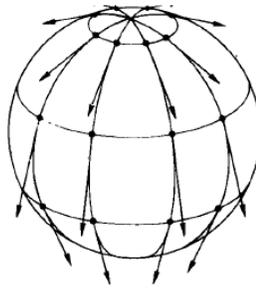


Figura 25: Campo vectorial.

Observación 6. Sea S una superficie regular y (U, F, V) una parametrización local de S en p . Debido a que la primera forma fundamental es no degenerada, para toda función suave $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, existe un único vector $v(p) \in T_p S$ con la propiedad

$$d_p f(X) = I(v(p), X) = \langle v(p), X \rangle, \quad (7)$$

para todo $X \in T_p S$.

Definición 20. Bajo las hipótesis de la Observación 6, se define el **campo vectorial gradiente** $v := \text{grad } f$, como el campo definido por (7). Además, para todo $p \in S \cap V$, el campo vectorial v sobre S , puede ser representado por

$$\text{grad } f(p) = v(p) = \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p)), \quad (8)$$

donde ξ^j , con $j = 1, 2$, es una función de $S \cap V$ en \mathbb{R} .

Proposición 8. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Entonces el campo vectorial gradiente de f es suave.

Demostración: Se observa en la ecuación (8) que para demostrar la suavidad del $\text{grad } f$ basta probar que las funciones coeficientes ξ^j son suaves. En efecto, se considera (U, F, V) una parametrización de S en $p \in S \cap V$. Luego $\tilde{f} := f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, además;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) &= d_p f \left(\frac{\partial F}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \right) \\ &= I \left(\text{grad } f(p), \frac{\partial F}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \right) \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p)), \frac{\partial F}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p)), \frac{\partial F}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) g_{jk}(F^{-1}(p)). \end{aligned} \quad (9)$$

Multiplicando a (9) por g^{ik} y sumando sobre k se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 g^{ik}(F^{-1}(p)) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) &= \sum_{k=1}^2 \xi^j(p) g^{ik}(F^{-1}(p)) g_{kj}(F^{-1}(p)) \\ &= \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \delta_j^i, \quad \delta_j^i = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq i \\ 1, & \text{si } j = i. \end{cases} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \xi^j(p) &= \sum_{k=1}^2 g^{jk}(F^{-1}(p)) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \\ &= \left\{ \left(\sum_{k=1}^2 g^{jk} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k} \right) \circ F^{-1} \right\} (p). \end{aligned} \quad (10)$$

De (10) se concluye que las funciones ξ^j son suaves, ya que son sumas de productos de las funciones $g^{jk} \circ F^{-1}$ y $\tilde{f} \circ F^{-1}$ que son funciones suaves.

Definición 21. Sean S una superficie regular, $p \in S$, $X_p \in T_p S$ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Entonces el número

$$\partial_{X_p} f := d_p f(X_p) = I(\text{grad } f(p), X_p),$$

es llamado **la derivada direccional** de f en la dirección X_p . Si X es un campo vectorial en S , entonces la función $\partial_X f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\partial_X f(p) := \partial_{X(p)} f,$$

es denominada la **derivada direccional** de f en la dirección del campo vectorial X .

Ejemplo 27. Sean S la superficie cilíndrica, X, Y los campos vectoriales dados por $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$ y $Y(x, y, z) = (0, 0, 1)$, $f_1, f_2, f_3 : S \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas como

$$f_1(x, y, z) = x, \quad f_2(x, y, z) = y, \quad f_3(x, y, z) = z,$$

y $c_1, c_2 : (-\xi, \xi) \rightarrow S$ las curvas dadas por

$$c_1(t) = (\cos(t + t_0), \operatorname{sen}(t + t_0), z) \text{ y } c_2(t) = (x, y, z + t),$$

donde t_0 se elige de manera tal que $c_1(0) = p = c_2(0)$, $\dot{c}_1(0) = X(p)$ y $Y(p) = \dot{c}_2(0)$.

Se calcula la derivada direccional de f_1 en la dirección X , lo cual da

$$\begin{aligned} \partial_X f_1(p) &= d_p f_1(X(p)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} f_1(\cos(t + t_0), \operatorname{sen}(t + t_0), z) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \cos(t + t_0) \right|_{t=0} = -\operatorname{sen}(t_0) = -y. \end{aligned}$$

Análogamente, se tiene

$$\partial_X f_2(p) = x \text{ y } \partial_X f_3(p) = 0.$$

Se calcula la derivada direccional de f_1 en la dirección de Y

$$\partial_Y f_1(p) = d_p f_1(Y(p)) = \left. \frac{d}{dt} f_1(x, y, z + t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} z \right|_{t=0} = 0.$$

De igual forma, se tiene

$$\partial_Y f_2(p) = 0 \text{ y } \partial_Y f_3(p) = 1.$$

Proposición 9. Sea S una superficie regular y X, Y campos vectoriales suaves en S . Entonces, para toda función suave $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, existe un único campo vectorial suave Z en S que satisface

$$\partial_X(\partial_Y f) - \partial_Y(\partial_X f) = \partial_Z f. \quad (11)$$

Además, con respecto a la parametrización local (U, F, V) de S , si los campos X, Y

son dados por

$$X = \sum_{i=1}^2 \xi_i \frac{\partial F}{\partial u^i}, \quad Y = \sum_{j=1}^2 \eta_j \frac{\partial F}{\partial u^j},$$

entonces

$$Z = \sum_{i,j=1}^2 \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial u^i} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} \right) \frac{\partial F}{\partial u^j}. \quad (12)$$

Demostración: ver en [4, pág 9].

Definición 22. El campo vectorial de la Proposición 9, es denotado por

$$Z := [X, Y]$$

y llamado el **corchete de Lie** de X y Y . De la proposición anterior se tiene

$$\partial_X(\partial_Y f) - \partial_Y(\partial_X f) = \partial_{[X,Y]} f$$

para todo $f \in C^\infty(S)$.

Observación 7. El corchete de Lie $[X, Y]$ se puede interpretar como una derivación de Y a lo largo de las trayectorias de X .

Ejemplo 28. Sea S una superficie regular y (U, F, V) una parametrización local de S en p . Se consideran los campos coordenados $\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}$, entonces por el teorema de Schwarz, ver en [7, pág 18], se tiene que

$$[X, Y] = \left[\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2} \right] = 0.$$

Definición 23. Sea S una superficie regular y $c : I \rightarrow S$ una curva parametrizada. Un **campo vectorial en S a lo largo de c** , es una función $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $v(t) \in T_{c(t)}S$ para todo $t \in I$.

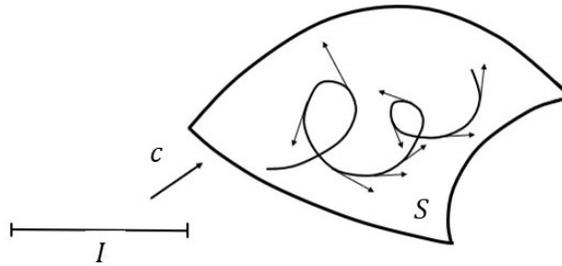


Figura 26: Campo vectorial a lo largo de c .

Ejemplo 29. Sea S la superficie reglada dada por $F(t, s) = c(t) + sv(t)$. Entonces v es un campo vectorial en S a lo largo de la curva c , donde $v(t) = \frac{\partial F}{\partial s}(t, 0) \in T_{c(t)}S$.

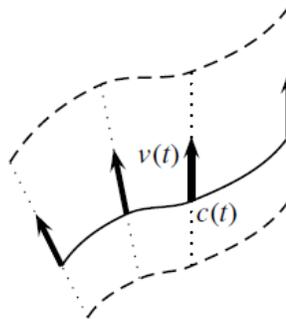


Figura 27: Campo vectorial a lo largo de c .

Ejemplo 30. Sean $S = S^1 \times \{0\}$ la superficie cilíndrica y $c : I \rightarrow S$ la curva dada por

$$c(t) = (\cos t, \sin t, t). \quad (13)$$

Entonces, $v(t) = \dot{c}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ es un campo vectorial a lo largo de la curva c . En general, el campo velocidad $v(t) = \dot{c}(t)$, es un campo vectorial a lo largo de c .

Ejemplo 31. Sean S^2 la esfera y $c : I \rightarrow S^2$ la curva parametrizada, dada por

$$c(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad (14)$$

y $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial a lo largo de c , definido como $v(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$.

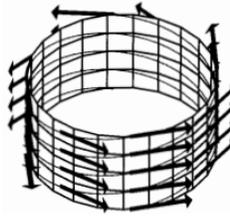


Figura 28: Campo vectorial a lo largo del cilindro.

Entonces, la deriva de v es

$$\dot{v}(t) = -c(t) = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Note que $\langle \dot{v}(t), c(t) \rangle = -1$, por lo cual $\dot{v}(t) \notin T_{c(t)}S^2$.

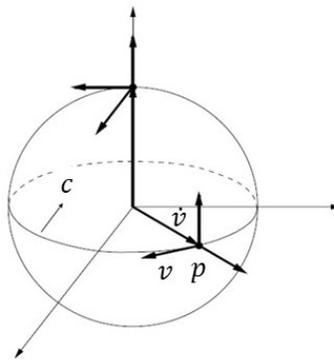


Figura 29: Derivada de v .

Al estudiar la variación de un campo vectorial a lo largo de una curva, se observa que la derivada usual de un campo vectorial no siempre pertenece al plano tangente (ver Ejemplo 31). Para solucionar esta situación, se proyecta la derivada usual del campo vectorial sobre el plano tangente, es decir, se omite la parte normal de la derivada. La siguiente definición formaliza tal idea.

Definición 24. Sean S una superficie regular, $c : I \rightarrow S$ una curva parametrizada y $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable en S a lo largo de c . Para cada punto

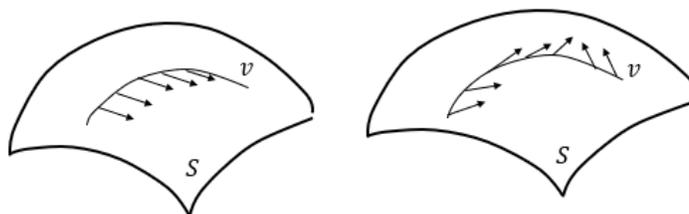


Figura 30: Variaciones de un campo vectorial

$p \in S$, sea $\Pi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p S$ la proyección ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre el $T_p S$, es decir

$$\Pi_p(X) = X - \langle X, N(p) \rangle N(p),$$

donde $N(p)$ es uno de los dos vectores normales unitarios en S en el punto p . Entonces se define la **derivada covariante** de v , en $t \in I$, como;

$$\frac{\nabla}{dt} v(t) := \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t)) = \dot{v}(t) - \langle \dot{v}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t)).$$

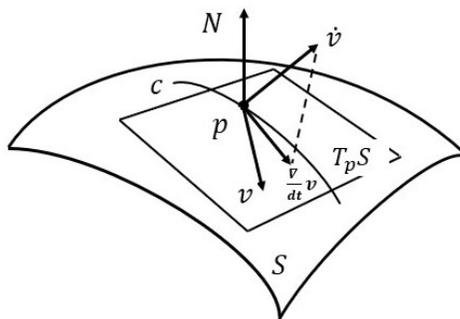


Figura 31: Derivada covariante.

Por definición, $\frac{\nabla}{dt} v(t)$ es un campo vectorial en S a lo largo de c .

Sean (U, F, V) una parametrización local de S en p , $c : I \rightarrow S$ una curva parametrizada tal que $c(I) \subset V \cap S$, $\tilde{c} = F^{-1} \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $N(F(\tilde{c}(t)))$ el vector normal a S en $c(t)$ y $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial en S a lo largo de c . Como $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u^1}(\tilde{c}(t)), \frac{\partial F}{\partial u^2}(\tilde{c}(t)) \right\}$

forman una base para $T_{c(t)}S$, se puede expresar $v(t)$ en términos de esta base,

$$v(t) = \xi^1(t) \frac{\partial F}{\partial u^1}(\tilde{c}(t)) + \xi^2(t) \frac{\partial F}{\partial u^2}(\tilde{c}(t)). \quad (15)$$

Por otra parte, como $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u^1}(\tilde{c}(t)), \frac{\partial F}{\partial u^2}(\tilde{c}(t)), N(F(\tilde{c}(t))) \right\}$ forman una base de \mathbb{R}^3 , se puede expresar $\frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}$ en términos de esta base,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(\tilde{c}(t)) = \Gamma_{ij}^1(\tilde{c}(t)) \frac{\partial F}{\partial u^1}(\tilde{c}(t)) + \Gamma_{ij}^2(\tilde{c}(t)) \frac{\partial F}{\partial u^2}(\tilde{c}(t)) + h_{ij}(\tilde{c}(t)) N(F(\tilde{c}(t))). \quad (16)$$

Definición 25. Las funciones coeficientes mencionadas en (16),

$$\Gamma_{ij}^k : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j, k \leq 2,$$

son llamados los **símbolos de Christoffel**.

Dado que $\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}$, se tiene que los símbolos de Christoffel son simétricos en los índices inferiores. Es decir

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad i, j = 1, 2.$$

A continuación se procede a calcular la derivada covariante en términos de una parametrización local. Derivando la ecuación (15), se tiene que

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^2 \left(\dot{\xi}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \xi^i(t) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(\tilde{c}(t)) \dot{\tilde{c}}^j(t) \right). \quad (17)$$

Así, usando (16) se reescribe la expresión (17) como

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^2 \underbrace{\dot{\xi}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t))}_{\in T_p S} + \sum_{i,j,k=1}^2 \xi^i(t) \left(\underbrace{\Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t)) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t))}_{\in T_p S} + \underbrace{h_{ij}(\tilde{c}(t)) N(F(\tilde{c}(t)))}_{Normal} \right) \dot{\tilde{c}}^j(t).$$

Entonces al calcular la derivada covariante, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}v(t) &= \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t)) \\
&= \Pi_{c(t)}\left(\sum_{i=1}^2 \xi^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \sum_{j,i=1}^2 \xi^i(t) \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(\tilde{c}(t)) \dot{c}^j(t)\right) \\
&= \sum_{i=1}^2 \xi^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t)) \xi^i(t) \dot{c}^j(t) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)) \\
&= \sum_{k=1}^2 \left(\xi^k(t) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t)) \xi^i(t) \dot{c}^j(t) \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)). \tag{18}
\end{aligned}$$

La siguiente función expresa las funciones componentes de la derivada covariante, en la base $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u^1}(\tilde{c}(t)), \frac{\partial F}{\partial u^2}(\tilde{c}(t)), N(F(\tilde{c}(t))) \right\}$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\xi}^1 + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(\tilde{c}) \xi^i(t) \dot{c}^j \\ \dot{\xi}^2 + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(\tilde{c}) \xi^i(t) \dot{c}^j \end{pmatrix}.$$

De este modo, los símbolos de Christoffel determinan la diferencia entre la derivada usual y la derivada covariante de las funciones componentes. Además, de la expresión (18) se concluye que la derivada covariante es una cantidad intrínseca, debido a que solo depende de los símbolos de Christoffel y a su vez estos solo están determinados por la primera forma fundamental, ver en [12, pág 291].

Ejemplo 32. Sean S el plano- xy , $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)$ una curva parametrizada en S y v un campo vectorial en S a lo largo de c , dado por $v(t) = (v^1(t), v^2(t), 0)$. Entonces, la derivada covariante de v es:

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) = \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t)) = \Pi_{c(t)}(\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), 0) = (\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), 0) = \dot{v}(t).$$

Este ejemplo indica que sobre el plano la derivada covariante coincide con la derivada usual.

Ejemplo 33. Sea $t \in \mathbb{R}$, y $c : \mathbb{R} \rightarrow S^2$, la curva dada por

$$c(t) = (\cos t \cos \theta, \operatorname{sen} t \cos \theta, \operatorname{sen} \theta),$$

donde $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es fijo.

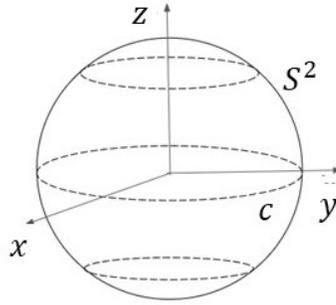


Figura 32: La curva c describe los círculos de latitud.

Como $N(c(t)) = -c(t) = -(\cos t \cos \theta, \operatorname{sen} t \cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ es perpendicular a $T_{c(t)}S^2$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) &= \ddot{c}(t) - \langle \ddot{c}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t)) \\ &= \begin{pmatrix} -\cos t \cos \theta \\ -\operatorname{sen} t \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -\cos t \cos \theta \\ -\operatorname{sen} t \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos t \cos \theta \\ -\operatorname{sen} t \cos \theta \\ -\operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\cos t \cos \theta \\ -\operatorname{sen} t \cos \theta \\ -\operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos t \cos \theta \\ -\operatorname{sen} t \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} - \cos^2 \theta \begin{pmatrix} -\cos t \cos \theta \\ -\operatorname{sen} t \cos \theta \\ -\operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \cos \theta (\cos^2 \theta - 1) \\ \operatorname{sen} t \cos \theta (\cos^2 \theta - 1) \\ \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta \\ -\operatorname{sen} t \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lema 2. Sean S una superficie regular, $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ una curva parametrizada, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, $\varphi : j \rightarrow I$ un cambio de parámetro de c

y v, w campos vectoriales a lo largo de c . Entonces $v + w$ y fv son campos vectoriales diferenciales en S a lo largo de c , que satisfacen las siguientes propiedades.

(a) Aditividad:

$$\frac{\nabla}{dt}(v + w)(t) = \frac{\nabla}{dt}v(t) + \frac{\nabla}{dt}w(t).$$

(b) Regla del producto I

$$\frac{\nabla}{dt}(fv)(t) = \dot{f}(t)v(t) + f(t)\frac{\nabla}{dt}v(t).$$

(c) Regla del producto II

$$\frac{d}{dt}I(v(t), w(t)) = I\left(\frac{\nabla}{dt}v(t), w(t)\right) + I\left(v(t), \frac{\nabla}{dt}w(t)\right).$$

(d) Cambio de parámetro

$$\frac{\nabla}{dt}(v \circ \varphi) = \dot{\varphi} \left(\left(\frac{\nabla}{dt}v \right) \circ \varphi \right).$$

Demostración: Para las siguientes pruebas se utilizan propiedades de la derivada usual

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\nabla}{dt}(v + w)(t) &= \Pi_{c(t)}(\overbrace{\dot{v} + \dot{w}})(t) \\ &= \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t) + \dot{w}(t)) \\ &= \dot{v}(t) + \dot{w}(t) - \langle \dot{v}(t) + \dot{w}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t)) \\ &= \dot{v}(t) - \langle \dot{v}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t)) + \dot{w}(t) - \langle \dot{w}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t)) \\ &= \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t)) + \Pi_{c(t)}(\dot{w}(t)) = \frac{\nabla}{dt}v(t) + \frac{\nabla}{dt}w(t). \end{aligned}$$

(b) Para la prueba de esta propiedad, se utiliza que $\langle v(t), N(c(t)) \rangle = 0, t \in I$.

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}(fv)(t) &= \Pi_{c(t)}(\overbrace{fv})'(t) \\
&= \Pi_{c(t)}(\dot{f}(t)v(t) + f(t)\dot{v}(t)) \\
&= \{\dot{f}(t)v(t) + f(t)\dot{v}(t)\} - \langle \dot{f}(t)v(t) + f(t)\dot{v}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t)) \\
&= \dot{f}(t)v(t) + f(t)\dot{v}(t) - \dot{f}(t)\langle v(t), N(c(t)) \rangle N(c(t)) \\
&\quad - f(t)\langle \dot{v}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t)) \\
&= \dot{f}(t)v(t) + f(t)\{\dot{v}(t) - \langle \dot{v}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t))\} \\
&= \dot{f}(t)v(t) + f(t)\frac{\nabla}{dt}v(t).
\end{aligned}$$

(c) Teniendo presente que $\langle w(t), N(c(t)) \rangle = 0$ y $\langle v(t), N(c(t)) \rangle = 0$, $t \in I$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\nabla}{dt}v(t), w(t) \right\rangle + \left\langle v(t), \frac{\nabla}{dt}w(t) \right\rangle &= \langle \dot{v}(t) - \langle \dot{v}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t)), w(t) \rangle \\
&\quad + \langle v(t), \dot{w}(t) - \langle \dot{w}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t)) \rangle. \\
&= \langle \dot{v}(t), w(t) \rangle + \langle v(t), \dot{w}(t) \rangle \\
&= \frac{d}{dt} \langle v(t), w(t) \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(d)} \quad \frac{\nabla}{dt}(v \circ \varphi)(t) &= \Pi_{c(\varphi(t))}(\overbrace{v(\varphi(t))})' \\
&= \Pi_{c(\varphi(t))}(\dot{v}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)) \\
&= \dot{v}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) - \langle \dot{v}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t), N \circ c(\varphi(t)) \rangle N \circ c(\varphi(t)) \\
&= \dot{v}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(t)\langle \dot{v}(\varphi(t)), N \circ c(\varphi(t)) \rangle N \circ c(\varphi(t)) \\
&= \dot{\varphi}(t) \{(\dot{v} \circ \varphi)(t) - \langle (\dot{v} \circ \varphi)(t), (N \circ c) \circ \varphi(t) \rangle (N \circ c)\varphi(t)\} \\
&= \dot{\varphi}(t) \{(\dot{v} - \langle \dot{v}, N \circ c \rangle N \circ c) \circ \varphi(t)\} = \dot{\varphi} \left(\frac{\nabla}{dt}v \circ \varphi(t) \right).
\end{aligned}$$

Lema 3. Sea (U, F, V) una parametrización local de S en p . Los símbolos de Chris-

toffel respecto a dicha parametrización satisfacen:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g^{mk}.$$

Demostración: Teniendo en cuenta la ecuación (16) y $\langle h_{ij}N \circ F, \frac{\partial F}{\partial u^k} \rangle = 0$, se tiene para $1 \leq i, j \leq 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^m} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} + h_{ij}N \circ F, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \sum_{k=1}^2 \Gamma_{im}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} + h_{im}N \circ F \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial u^k}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \sum_{k=1}^2 \Gamma_{im}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} \right\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^k}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle + \sum_{k=1}^2 \Gamma_{im}^k \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^k} \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{ij}^k g_{km} + \Gamma_{im}^k g_{kj}). \end{aligned} \quad (20)$$

Análogamente,

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} = \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{ji}^k g_{km} + \Gamma_{jm}^k g_{ki}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^j} = \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{mi}^k g_{kj} + \Gamma_{mj}^k g_{ki}). \quad (21)$$

Luego, de las ecuaciones (20) y (21), se tiene que

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = 2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k g_{km}. \quad (22)$$

Multiplicando (22) por g^{rm} y sumando sobre m , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 g^{rm} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) &= \sum_{m=1}^2 g^{mr} \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k g_{km} \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{m=1}^2 g^{rm} g_{mr} \right) \Gamma_{ij}^k \\ &= \sum_{k=1}^2 \delta_k^r \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^r, \end{aligned}$$

para $r = 1, 2$.

Hasta el momento la derivada covariante se ha presentado solo para campos vectoriales a lo largo de una curva, la siguiente definición generaliza este concepto para cualquier campo vectorial.

Definición 26. Sean S una superficie regular, v un campo vectorial diferenciable en S , $p \in S$ y $w_p \in T_p S$. Entonces la **derivada covariante** $\nabla_{w_p} v \in T_p S$ de v en la dirección w_p es definida de la siguiente forma: se elije $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva parametrizada, con $\dot{c}(0) = w_p$ y se define

$$\nabla_{w_p} v := \frac{D}{dt}(v \circ c)(0).$$

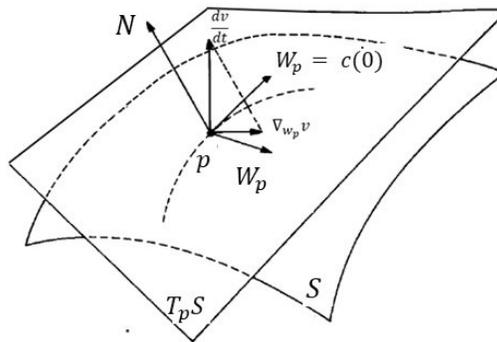


Figura 33: Derivada covariante.

Observación 8. La definición de derivada covariante no depende de la elección de la curva, ver en [2, pág 159].

Definición 27. Sean S una superficie regular, $p \in S$ y v, w campos vectoriales en S . Se define la derivada covariante de v en la dirección w como el campo vectorial $\nabla_w v$, dado por

$$(\nabla_w v)(p) = \nabla_{w(p)} v.$$

Lema 4. Sean S una superficie regular, v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 campos vectoriales diferenciables en S , $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Entonces

(a) \mathbb{R} - (linealidad en el campo vectorial que se diferencia).

$$\nabla_w(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \nabla_w v_1 + c_2 \nabla_w v_2.$$

(b) Regla del producto I:

$$\nabla_w(fv) = df(w)v + f\nabla_w v.$$

(c) Regla del producto II

$$\partial_w(I(v_1, v_2)) = I(\nabla_w v_1, v_2) + I(v_1, \nabla_w v_2).$$

(d) c^∞ - Linealidad en el campo vectorial con respecto al cual se diferencia.

$$\nabla_{c_1 w_1 + c_2 w_2} v = c_1 \nabla_{w_1} v + c_2 \nabla_{w_2} v$$

(e) Linealidad con respecto a las funciones en el campo vectorial con respecto al cual se diferencia.

$$\nabla_{fw} v = f\nabla_w v.$$

Definición 28. Sean v, w, z campos vectoriales sobre S . La segunda derivada cova-

riante de z con respecto a v y w se define como

$$\nabla_{v,w}^2 z := \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_{\nabla_v w} z.$$

Lema 5. Sean S una superficie regular y (U, F, V) una parametrización local de S en p . Se expresan los campos vectoriales v, w, z en S , en términos de dicha parametrización por $v = \sum_i^2 v^i (\frac{\partial F}{\partial u^i})$, $w = \sum_j^2 w^j (\frac{\partial F}{\partial u^j})$ y $z = \sum_k^2 (\frac{\partial F}{\partial u^k})$. Entonces, respecto a la base $\frac{\partial F}{\partial u^m}$ los coeficientes de $\nabla_{v,w}^2 z$ están dados por

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 z^m}{\partial u^i \partial u^j} v^i w^j + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^m \frac{\partial z^i}{\partial u^k} (v^j w^k + v^k w^j) - \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial z^m}{\partial u^k} v^i w^j \right. \\ & \left. + \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^i} + \sum_l (\Gamma_{li}^m \Gamma_{kj}^l - \Gamma_{kl}^m \Gamma_{ij}^l) v^i w^j z^k \right) \right)_{m=1,2} \end{aligned} \quad (23)$$

Demostración: El campo vectorial $\nabla_w z$ tiene las componentes

$$\left(\sum_l \frac{\partial z^k}{\partial u^l} w^l + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k z^i w^j \right)_{k=1,2} =: (\xi^k)_{k=1,2}$$

Para $\nabla_v(\nabla_w z)$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_m \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^m} v^m + \sum_{\beta\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \xi^\beta v^\gamma \right)_{\alpha=1,2} = \left(\sum_{ml} \left(\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial u^l \partial u^m} w^j v^m + \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^l} \frac{\partial w^l}{\partial u^m} v^m \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{ijm} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial u^m} z^i w^l v^m + \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial z^i}{\partial u^m} w^j v^m + \Gamma_{ij}^\alpha z^i \frac{\partial w^j}{\partial u^m} v^m \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l\beta\gamma} \frac{\partial z^\beta}{\partial u^l} w^l \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma + \sum_{ij\beta\gamma} \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha z^i w^j v^\gamma \right)_{\alpha=1,2} \end{aligned} \quad (24)$$

Para $\nabla_v w$ se escribe

$$\left(\sum_l \frac{\partial w^k}{\partial u^l} v^l + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k v^i w^j \right)_{k=1,2} =: (\mu^k)_{k=1,2}$$

y para $\nabla_{\nabla_v w} z$ se tiene que

$$\left(\sum_m \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \mu^m + \sum_{\beta\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha z^\beta \mu^\gamma \right)_{\alpha=1,2} = \left(\sum_{ml} \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \frac{\partial w^m}{\partial u^l} v^l + \sum_{mij} \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \Gamma_{ij}^m v^i w^j \right. \\ \left. + \sum_{l\beta\gamma} \frac{\partial w^\gamma}{\partial u^l} v^l \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha z^\beta + \sum_{ij\beta\gamma} \Gamma_{ij}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^i w^j z^\beta \right)_{\alpha=1,2} \quad (25)$$

Ahora, cambiando los índices $l = m, \beta = i, \gamma = j$ y restando (25) a (24) se obtiene

$$\left(\sum_{ml} \left(\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial u^l \partial u^m} w^l v^m + \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^l} \frac{\partial w^l}{\partial u^m} v^m \right) + \sum_{ijm} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial m} z^i w^j v^m + \Gamma_{ij}^j \frac{\partial z^i}{\partial u^m} w^j v^m \right. \right. \\ \left. \left. + \Gamma_{ij}^\alpha z^i \frac{\partial w^j}{\partial u^m} v^m \right) + \sum_{l\beta\gamma} \frac{\partial z^\beta}{\partial u^l} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^j w^m + \sum_{ij\beta\gamma} \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha z^i w^j v^\gamma \right)_{\gamma=1,2} \\ - \left(\sum_{ml} \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^l} \frac{\partial w^l}{\partial u^m} v^m + \sum_{mij} \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \Gamma_{ij}^m v^i w^j + \sum_{ijm} \frac{\partial w^j}{\partial u^m} \Gamma_{ij}^\alpha v^m w^j z^i \right. \\ \left. + \sum_{ij\beta\gamma} \Gamma_{ij}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^i w^j z^\beta \right)_{\alpha=1,2} \\ = \left(\sum_{ml} \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial u^l \partial u^m} w^l v^m + \sum_{ijm} \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial z^i}{\partial u^m} (w^j v^m + v^j w^m) \right. \\ \left. - \sum_{mij} \Gamma_{ij} \frac{\partial z^\beta}{\partial u^l} w^j v^i + \sum_{ij\beta\gamma} (\Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\beta \Gamma_{ij}^\alpha) v^\gamma w^j z^i \right. \\ \left. + \sum_{ij\gamma} \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial u^\gamma} z^i w^j v^\gamma \right)_{\alpha=1,2}. \quad (26)$$

Reorganizando la expresión (26) se termina la demostración.

Observación 9. El valor de $\nabla_{\nabla_v w}^2 z$ en $p \in S$ depende solamente de $v(p), w(p)$ y de las derivadas de Z en p hasta el orden 2. Además, importa el orden en que se diferencia, es decir, el teorema de Schwarz sobre la intercambiabilidad de las derivadas direccionales no es válida para la derivada covariante.

2.3. Tensor de curvatura de Riemann y Teorema Egregium

Definición 29. Sean S una superficie regular, $p \in S$, $v_p, w_p \in T_p S$ y z un campo vectorial en S . Entonces el **tensor de curvatura de Riemann** R en p , es definido por:

$$R(v_p, w_p)z := \nabla_{v_p, w_p}^2 z - \nabla_{w_p, v_p}^2 z.$$

El tensor de curvatura de Riemann mide exactamente el error que surge al intercambiar las derivadas covariantes.

Lema 6. Sea (U, F, V) una parametrización local de S en $p \in S \cap V$, respecto a dicha parametrización el tensor está dado por

$$R(v_p, w_p)z = \sum_{ijkl=1}^2 R_{ijk}^l(u_0) v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0).$$

Donde

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial u^j} + \sum_m (\Gamma_{mi}^l \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ki}^m).$$

Demostración: Se expresa v_p, w_p y z en términos de (U, F, V) una parametrización local:

$$v_p = \sum_i v^i \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0), \quad w_p = \sum_j w^j \frac{\partial F}{\partial u^j}(u_0), \quad z = \sum_k z^k \frac{\partial F}{\partial u^k}.$$

De (23), se tiene que

$$\begin{aligned} R(v_p, w_p)z &= \nabla_{v_p, w_p}^2 z - \nabla_{w_p, v_p}^2 z = \sum_m \left(\sum_{ij} \frac{\partial^2 z^m}{\partial u^i \partial u^j} v^i w^j + \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^m \frac{\partial^2 z^m}{\partial u^k} (v^j w^k + v^k w^j) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial z^i}{\partial u^k} v^i w^j + \sum_{ijk} \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial u^i} + \sum_l (\Gamma_{li}^m \Gamma_{kj}^l - \Gamma_{kl}^m \Gamma_{ij}^l) v^i w^j z^k \right) \right) \\ &\quad - \sum_m \left(\sum_{ij} \frac{\partial^2 z^m}{\partial u^i} w^j v^i + \sum_{ijk} \Gamma_{ji}^m \frac{\partial z^j}{\partial u^k} (w^i v^k + w^k v^j) - \sum_{ijk} \Gamma_{ji}^k \frac{\partial z^m}{\partial u^k} w^j v^i \right. \\ &\quad \left. + \sum_{jik} \left(\frac{\partial \Gamma_{ki}^m}{\partial u^j} + \sum_l (\Gamma_{lj}^m \Gamma_{ki}^l - \Gamma_{kl}^m \Gamma_{ji}^l) w^j v^i z^k \right) \right), \end{aligned}$$

como $\frac{\partial^2 z^m}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 z^m}{\partial u^j \partial u^i}$ y $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, se sigue que

$$R(v_p, w_p z) = \sum_m \left(\sum_{ijk} \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^m}{\partial u^j} \right) + \sum_{ijkl} (\Gamma_{li}^m \Gamma_{kj}^l - \Gamma_{lj}^m \Gamma_{ki}^l) v^i w^j z^k \right). \quad (27)$$

Finalmente se hace un cambio de índices en (27), obteniendo la expresión deseada.

Teorema 2 (Ecuación de Gauss). Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada y (U, F, V) una parametrización local de S en p . Entonces, para cualesquiera $v, w, z \in T_p S$, se satisface

$$R(v, w)z = II(w, z)W(v) - II(v, z)W(w), \quad (28)$$

donde W es la función de Weingarten. Con respecto a dicha parametrización, la ecuación (28) es dada por

$$R_{ijk}^l = h_{jk} w_i^l - h_{ik} w_j^l.$$

Demostración: En primer lugar, se deriva la ecuación (16) con respecto a u^l

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 F}{\partial u^l \partial u^k} \right) + \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^l} (N \circ F) + h_{ij} \frac{\partial (N \circ F)}{\partial u^l} \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \left(\sum_m \Gamma_{lk}^m \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Comp. Normal} \right) + \text{Comp. Normal} \right. \\ &\quad \left. + h_{ij} \cdot dN \left(\frac{\partial F}{\partial u^l} \right) \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \left(\sum_m \Gamma_{lk}^m \frac{\partial F}{\partial u^m} \right) + \text{Comp. Normal} - h_{ij} \cdot \left(W \left(\frac{\partial F}{\partial u^l} \right) \right) \right) \\ &= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - h_{ij} w_l^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Comp. Normal}. \end{aligned}$$

Por otra parte, del teorema de Schwarz se obtiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^l \partial u^j} \\
&= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - h_{lj} W_l^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Comp. Normal} \\
&\quad - \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^i} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - h_{ij} W_i^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Comp. Normal} \\
&= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^i} + \sum_k (\Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^m) + h_{lj} w_l^m - h_{ij} w_i^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Comp. Normal} \\
&= \sum_m (R_{lij}^m - h_{ij} w_m^l + h_{lj} w_m^i) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Comp. Normal}
\end{aligned}$$

Luego $R_{lij}^m = h_{jk} w_i^l - h_{ik} w_j^l$.

En la ecuación de Gauss el lado izquierdo es el tensor de curvatura y tal cantidad pertenece a la geometría intrínseca, mientras el lado derecho está expresado en términos de la segunda forma fundamental y la función de Weingarten que no son cantidades intrínsecas.

El siguiente teorema, llamado Teorema Egregium de Gauss afirma que la curvatura de Gauss es un invariante isométrico, ya que puede ser escrito en mediante el tensor de curvatura.

Teorema 3 (Teorema Egregium). La curvatura de Gauss puede ser calculada mediante el tensor de curvatura de la siguiente forma: Dado $p \in S$, se elige v, w una base ortonormal de $T_p S$. Entonces

$$K(p) = I(R_p(v, w)w, v).$$

Demostración: La matriz de representación de W respecto a la base v, w de $T_p S$, es

dada por

$$A = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, de la ecuación de Gauss

$$\begin{aligned} I(R(v, w)w, v) &= \langle II(w, w)W(v) - II(v, w)W(w), v \rangle \\ &= II(w, w) \langle W(v), v \rangle - II(v, w) \langle W(w), v \rangle \\ &= \langle W(w), w \rangle \langle W(v), v \rangle - \langle W(v), w \rangle \langle W(w), v \rangle \\ &= \langle w_{12}w + w_{22}v, w \rangle \langle w_{11}w + w_{21}v, v \rangle \\ &\quad - \langle w_{11}w + w_{21}v, v \rangle \langle w_{12}w + w_{22}v, w \rangle \\ &= (w_{12}\langle w, w \rangle + w_{22}\langle v, w \rangle)(w_{11}\langle w, v \rangle + w_{21}w\langle v, v \rangle) - (w_{11}\langle w, v \rangle + \\ &\quad w_{21}\langle v, v \rangle)(w_{12}\langle w, w \rangle + w_{22}\langle v, w \rangle) \\ &= w_{22}w_{11} - w_{12}w_{21} = \mathbf{det}(A) = K. \end{aligned}$$

De este modo el Teorema Egregium indica que si dos superficies tienen curvatura diferente entonces no pueden ser isométricas, pues la curvatura se preserva bajo isometrías.

Ejemplo 34. Sean

$$S_1 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 < 1\} \quad \mathbf{y} \quad S_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 1, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

superficies regulares y $f : S_1 \rightarrow S_2$ isometría, dada por $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. Como $K_{S_1} = 0$ y $K_{S_2} = 1$, entonces no puede existir una isometría entre estas dos superficies.

Lema 7. Sean S una superficie regular, $p \in S$, $v, w, x, y \in T_p S$. El tensor de curvatura

tiene las siguientes simetrías:

- (a) $R(v, w)x = -R(w, v)x$
- (b) $I(R(v, w)x, y) = -I(R(v, w)y, x)$
- (c) $I(R(v, w)x, y) = I(R(x, y)v, w)$
- (d) $R(v, w)x + R(w, x)v + R(x, v)w = 0$ (Identidad de Bianchi).

Lema 8. Sea V un espacio vectorial 2-dimensional. El espacio vectorial de todas las funciones multilineales $\mathfrak{R} : V \times V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen las simetrías

$$\mathfrak{R}(v, w, x, y) = -\mathfrak{R}(w, v, x, y), \text{ y } \mathfrak{R}(v, w, x, y) = -\mathfrak{R}(v, w, y, x),$$

es 1-dimensional.

Demostración: Sea e_1, e_2 una base de V dados $v, w, x, y \in V$, se pueden escribir

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2, \quad w = w^1 e_1 + w^2 e_2, \quad x = x^1 e_1 + x^2 e_2, \quad y = y^1 e_1 + y^2 e_2$$

Entonces por la linealidad de \mathfrak{R} , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(v, w, x, y) &= \mathfrak{R}(v^1 e_1 + v^2 e_2, w^1 e_1 + w^2 e_2, x, y) \\ &= v^1 w^2 \mathfrak{R}(e_1, e_2, x, y) + v^2 w^1 \mathfrak{R}(e_2, e_1, x, y) \\ &= (v^1 w^2 - v^2 w^1) \mathfrak{R}(e_1, e_2, x, y) \\ &= (v^1 w^2 - v^2 w^1) \mathfrak{R}(e_1, e_2, x^1 e_1 + x^2 e_2, y^1 e_1 + y^2 e_2) \\ &= (v^1 w^2 - v^2 w^1)(x^1 y^2 - x^2 y^1) \mathfrak{R}(e_1, e_2, e_1, e_2), \end{aligned}$$

así \mathfrak{R} es determinado por el coeficiente $\mathfrak{R}(e_1, e_2, e_1, e_2)$.

Lema 9. Sean S una superficie regular y $p \in S$. Para todo $v, w, x \in T_p S$, se tiene

$$R(v, w)x = K(p)(I(w, x)v - I(v, x)w).$$

En coordenadas locales

$$R_{ijk}^l = K \cdot (g_{jk} \delta_i^l - g_{ik} \delta_j^l).$$

Demostración: Se definen la funciones

$$\mathfrak{R}_1(v, w, x, y) := I(R(v, w)x, y),$$

$$\mathfrak{R}_2(v, w, x, y) := K(p) (I(w, x)I(v, y) - I(v, x)I(w, y)),$$

$v, w, x, y \in T_p S$, del lema anterior se tiene que

$$\mathfrak{R}_1(v, w, x, y) = I(R(v, w)x, y) = I(-R(w, v)x, y) = -I(R(w, v)x, y) = -\mathfrak{R}_1(w, v, x, y).$$

$$\mathfrak{R}_1(v, w, x, y) = I(R(v, w)x, y) = -I(R(v, w)y, x) = I = -\mathfrak{R}_1(v, w, y, x).$$

$$\mathfrak{R}_2(v, w, x, y) = -K(p) (I(v, x)I(w, y) - I(w, x)I(v, y)) = -\mathfrak{R}_2(w, v, x, y).$$

$$\mathfrak{R}_2(v, w, x, y) = -K(p) (I(w, y)I(v, x) - I(v, y)I(w, x)) = -\mathfrak{R}_2(v, w, y, x).$$

Esto implica que $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ pertenecen al espacio vectorial de funciones multilineales mencionadas en la Proposición 8 y por lo tanto son linealmente dependientes.

Entonces si e_1, e_2 es una base ortonormal de $T_p S$, se tiene que

$$\mathfrak{R}_1(e_1, e_2, e_1, e_2) = I(R(e_1, e_2)e_1, e_2) = -I(R(e_1, e_2)e_2, e_1).$$

Ahora, por el teorema Egregium de Gauss

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1(e_1, e_2, e_1, e_2) &= I(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = K(p) (I(e_1, e_2)I(e_1, e_2) - I(e_1, e_1)I(e_2, e_2)) \\ &= \mathfrak{R}_2(e_1, e_2, e_1, e_2), \end{aligned}$$

como \mathfrak{R}_1 y \mathfrak{R}_2 son iguales, entonces:

$$R(v, w)x = K(p) \cdot (I(w, x)v - I(v, x)w).$$

2.4. Métricas Riemannianas

Se definió una cantidad intrínseca, como aquella que se puede expresar solamente en términos de la primera forma fundamental. Esta sección generaliza el concepto de primera forma fundamental, es decir, dota a cada espacio tangente con un producto interno, de esa manera se generan nuevas formas de medir en la superficie.

Definición 30. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Una **métrica Riemanniana** g en S asigna a cada $p \in S$ un producto escalar Euclidean g_p en el plano tangente $T_p S$, tal que para cada parametrización local (U, F, V) de S , las funciones $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g_{ij}(u) := g_{F(u)} \left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right)$$

son siempre suaves.

La primera forma fundamental es una métrica Riemanniana, pero no es la única, el siguiente ejemplo muestra una de tales métricas.

Ejemplo 35. Sea $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ el plano xy , como para cada $p = (u_1, u_2) \in S$ el $T_p S = S$, se define $g_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$g_p(v, w) = (1 + u_1^2)v_1w_1 + (1 + u_2^2)v_2w_2,$$

donde $v, w \in T_p S$ son dados por $v = (v_1, v_2, 0)$, $w = (w_1, w_2, 0)$. No es difícil ver que g_p define un producto escalar sobre el $T_p S$. Considerando la parametrización local $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0),$$

entonces

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}(u_1, u_2) = (1, 0, 0) \text{ y } \frac{\partial F}{\partial u_2}(u_1, u_2) = (0, 1, 0),$$

Así

$$g_{ij}(u_1, u_2) = \delta_{ij}(1 + u_i u_j),$$

Para esta parametrización es claro que las funciones componentes g_{ij} son suaves. Es posible mostrar que esto es cierto para cada parametrización local, por tanto g define un producto interno sobre S .

En secciones anteriores se definieron cantidades intrínsecas como los símbolos de Christoffel, la derivada covariante, el tensor de curvatura de Riemann, la curvatura de Gauss, entre otras. Todas estas cantidades se definen de forma análoga sobre una superficie con una métrica Riemanniana.

Una forma de construir una métrica Riemanniana en una superficie S_1 , es mediante la métrica de una superficie S_2 que es difeomorfa a S_1 , se trata de una operación llamada pull back.

Definición 31. Sean S_1, S_2 superficies regulares, $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo y g una métrica Riemanniana en S_2 . Se define el **pull back** de g sobre S_1 , denotado por ϕ^*g , como

$$(\phi^*g)_p(X, Y) := g_{\phi(p)}(d_p\phi(X), d_p\phi(Y))$$

para todo $p \in S_1, X, Y \in T_pS_1$.

Observación 10. La métrica Riemanniana ϕ^*g en S_1 es la única métrica para la cual $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ es una isometría. Además, si (U, F, V) es una parametrización local de S_1 , entonces $\phi \circ F$ es una parametrización local de S_2 . De este modo, se satisface que

$$(\phi^*g)_{ij} = g_{ij}.$$

Mas aún, todas las cantidades intrínsecas son "iguales". Por ejemplo $K_{\phi^*g} = K_g \circ \phi$.

Ejemplo 36. Sea S^2 la esfera unitaria y S el elipsoide del ejemplo (9). Se considera la primera forma fundamental como métrica Riemanniana en S . Como la función $\phi : S^2 \rightarrow S$ dada por

$$\phi(x, y, z) = (ax, by, cz),$$

donde $a, b, c > 0$, es un difeomorfismo, entonces se puede obtener una nueva métrica Riemanniana sobre S^2 por medio del pull back de la primera forma fundamental sobre el elipsoide. Además, como la curvatura de Gauss de S no es constante para el elipsoide, entonces por la Observación 10 la curvatura de Gauss con la métrica del pull back tampoco será constante.

2.5. Geodésicas

Para empezar esta sección, supongamos el siguiente escenario, en un salón de clase, el profesor pide a sus alumnos dibujar dos puntos en una hoja y unirlos mediante dos curvas diferentes, siendo una de ellas un segmento de línea recta. Después se indica a los estudiantes escoger la curva más corta que los une, llegando a la conclusión de que línea recta es la curva que cumple tal condición. Ahora, si en vez de realizar este ejercicio en el plano, se propone realizarlo en la esfera, surgen preguntas tales como: ¿qué propiedades (especiales) posee la línea recta?, ¿existe una curva que cumpla tales indicaciones en la esfera?, ¿tiene sentido hablar de línea recta en el espacio?, ¿qué forma geométrica tiene la curva que satisface tal condición?, etc. La siguiente definición presenta una posible respuesta a tales inquietudes para el caso de superficies regulares.

Definición 32. Sea S una superficie regular con métrica Riemanniana g . Una curva parametrizada $c : I \rightarrow S$ es una **geodésica** si

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0,$$

para todo $t \in I$.

En este sentido, las geodésicas son aquellas curvas para las cuales su campo tangente tiene derivada covariante nula.

Ejemplo 37. Sea S el plano- xy con la primera forma fundamental como métrica Riemanianna y $c : I \rightarrow S$ la curva definida por $c(t) = p + tv$. Entonces la derivada covariante de \dot{c} es

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = \ddot{c}(t) = 0,$$

para todo $t \in I$.

Ejemplo 38. Sea $c : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ la curva parametrizada, dada por

$$c(t) = (\cos t \cos \theta, \sin t \cos \theta, \sin \theta),$$

donde $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Del Ejemplo 33, se tiene que la derivada covariante $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)$ está dada por

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \cos \theta \sin^2 \theta \\ -\sin t \cos \theta \sin^2 \theta \\ \sin \theta \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (29)$$

En consecuencia, solo para $\theta = 0$ se satisface la ecuación de la geodésica. Mas aún, puede ser probado que las geodésicas en la esfera son los círculos máximos.

Proposición 10. Sean S una superficie regular, $c : I \rightarrow S$ una geodésica y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces la curva $\tilde{c}(t) = c(\alpha t + \beta)$ es una geodésica. En efecto la derivada de $\tilde{c}(t)$ es $\dot{\tilde{c}}(t) = \alpha \dot{c}(\alpha t + \beta)$ y como $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0$, se tiene que

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\tilde{c}}(t) = \frac{\nabla}{dt}\alpha \dot{c}(\alpha t + \beta) = \alpha \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(\alpha t + \beta) = \alpha^2 \left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c} \right) (\alpha t + \beta) = 0.$$

Observación 11. Se considera (U, F, V) una parametrización local de S y $c : I \rightarrow S$ una curva parametrizada. Si $u := F^{-1} \circ c$, la derivada de c está dada por

$$\dot{c}(t) = D_{u(t)}F(u^1(t), u^2(t))\dot{u}(t) = \sum_i \frac{\partial F}{\partial u^i}(u(t))\dot{u}^i(t)$$

y además

$$\ddot{c}(t) = \sum_i \left(\ddot{u}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(u(t)) + \sum_{ij} \dot{u}^j(t) \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u(t)) \right).$$

Así, la derivada covariante está dada por

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) = \sum_k \left(\ddot{u}^k(t) + \sum_{ij=1} \Gamma_{ij}^k(u(t)) \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t) \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}(u(t)).$$

Ahora, para verificar que c es una geodésica, cada componente de la ecuación anterior debe ser cero. Es decir

$$\ddot{u}^k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(u(t)) \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t) = 0, \text{ con } k = 1, 2.$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, la solución de tal sistema está garantizada por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema 4 (Existencia y unicidad de geodésicas). Sean S una superficie regular con métrica Riemanniana g , $p \in S$, $v \in T_p S$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Existe un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con $t_0 \in I$ y una geodésica $c : I \rightarrow S$ que satisface

$$c(t_0) = p, \quad \dot{c}(t_0) = v.$$

Además, c está determinada de manera única por $c(t_0) \in S$ y $\dot{c}(t_0) \in T_p S$.

Definición 33. Sean S una superficie regular con métrica Riemanniana g , $c : I \rightarrow S$ una curva parametrizada por longitud de arco, $n : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo normal unitario a lo largo de c , de tal manera que para cada $t \in I$ las parejas $\{\dot{c}(t), n(t)\}$ forman una base ortonormal orientada positivamente de $T_p S$. Se define la función $K_g : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la ecuación

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) = K_g(t) n(t).$$

La función K_g es llamada la **curvatura geodésica** de c en S .

De modo que, c es una geodésica si y solo si la curvatura $K_g = 0$. Además, si las geodésicas son una generalización del concepto de línea recta, tiene sentido pensar que la curvatura geodésica extiende la noción de curvatura de una curva plana.

Observación 12. Bajo las mismas condiciones de la Definición 33, excepto que c puede o no estar parametrizada por longitud de arco, se expresa la curvatura geodésica de la siguiente forma:

$$k_g = \frac{g(\nabla_{\dot{c}} \dot{c}, n)}{g(\dot{c}, \dot{c})}.$$

Proposición 11. Sean S_1, S_2 superficies regulares y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una isometría local. Si $c : I \rightarrow S_1$ es una geodésica, entonces $f \circ c : I \rightarrow S_2$ también es una geodésica.

Demostración: Sea (U, F, V) una parametrización local de S_1 . Por la Proposición 6, se tiene que $f \circ F : U \rightarrow S_2$ es una parametrización local de S_2 y las funciones componentes g_{ij} y \tilde{g}_{ij} coinciden, por lo tanto los símbolos de Christoffel también coinciden (Lema 3). En consecuencia la derivada covariante de $\overbrace{f \circ c}$ es igual a cero, es decir, $\overbrace{f \circ c}$ es una geodésica.

Esta proposición expresa que las geodésicas son invariantes bajo isometrías.

Definición 34. Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular con métrica Riemanniana g , $p \in S$, $v \in T_p S$, $\delta \in \mathbb{R}$ y $c_v : I \rightarrow S$ la geodésica con condiciones iniciales $c_v(0) = p$ y $\dot{c}_v(0) = v$. Entonces

$$c_{\delta v}(t) := c_v(\delta t),$$

es la geodésica con condiciones iniciales $c_{\delta v}(0) = p$ y $\dot{c}_{\delta v}(0) = \delta v$. En efecto, con $\beta = 0$, por la Proposición 10, se tiene que $c_{\delta v}(t) = c_v(\delta t)$ es una geodésica.

Para concluir esta sección, se introduce una forma de emplear las geodésicas para

inducir parametrizaciones locales del plano tangente a la superficie, mediante una función llamada exponencial. Esta función transforma una vecindad del $0 \in T_p S$ en una vecindad de p en S .

Observación 13. Sea S una superficie regular con métrica Riemanniana g , $p \in S$ y $v \in T_p S$. Existe $c : I \rightarrow S$ la única geodésica, con $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = v$, donde I es el intervalo de dominio máximo. Si $1 \in I$, se define

$$\exp_p(v) := c(1).$$

Para $\delta \in \mathbb{R}$, existe una geodésica $c_{\delta v} : \tilde{I} \rightarrow S$ dada por $c_{\delta v}(t) = c_v(\delta t)$ con $c_{\delta v}(0) = p$ y $\dot{c}_{\delta v}(0) = \delta v$. Dado que el $0, 1 \in I$, entonces $[0, 1] \subset I$ y por lo tanto para $t = 1$, la expresión

$$\exp_p(\delta v) = c_{\delta v}(1) = c_v(\delta),$$

tiene sentido, pues $\delta \in [0, 1] \subset I$, es decir $\delta \in I$. Por lo tanto $c_v(\delta)$ está bien definida. Así, para $t = \delta$,

$$c_v(t) = \exp_p(tv).$$

El dominio de \exp_p , está dado por:

$$\mathcal{D}_p = \{v \in T_p S \mid \exists c_v : I \rightarrow S, \text{ donde } [0, 1] \subset I\}.$$

Definición 35. La función $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow S$ es llamada la función exponencial.

Proposición 12. El conjunto \mathcal{D}_p tiene forma de estrella¹ con respecto a $0 \in T_p S$.

Demostración: Se considera la geodésica constante $c : \mathbb{R} \rightarrow S$, dada por $c(t) = p$, entonces para $t = 1$, $\exp_p = c(1) = p$. Por lo tanto $0 \in \mathcal{D}_p$. Además, si $v \in \mathcal{D}_p$,

¹Un subconjunto A de un espacio vectorial tiene forma de estrella con respecto a $X \in A$, si siempre que $Y \in A$, el segmento de línea de X a Y está contenido en A .

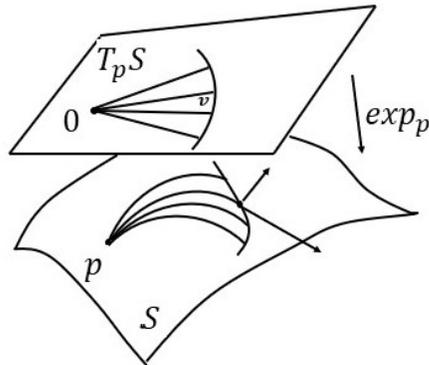


Figura 34: Función exponencial.

entonces c_v es definido para $[0, 1]$. Así, para $0 \leq t \leq 1$, se tiene que

$$\exp_p(tv) = c_v(t),$$

dicho de otra manera, el segmento de línea que une a 0 y v pertenece a \mathcal{D}_p .

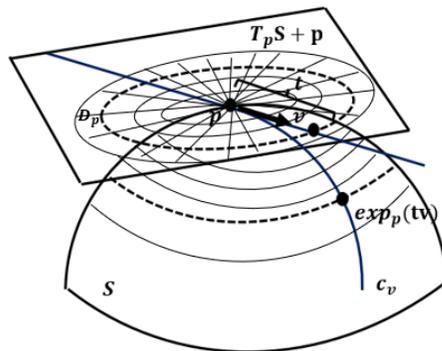


Figura 35: \exp_p - Asigna líneas radiales a geodésicas.

Mas aún, por la dependencia continua de las soluciones de una EDO con valores iniciales, ver en [8, pág 80], la función exponencial es suave y el \mathcal{D}_p es un subconjunto abierto de $T_p S$.

Ejemplo 39. Sean S el plano- xy con la primera forma fundamental como métrica Riemanniana, $p \in S$ y $v \in T_p S$. Considere la geodésica c en S dada por $c(t) = p + tv$. Se tiene que $\mathcal{D}_p = T_p S$ y la función exponencial es $\exp_p v = c(1) = p + v$.

Ejemplo 40. Sean $S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ con la primera forma fundamental, $p \in S$ y $v \in T_p S$. Entonces, $\exp_p(v) = p + v$ y $\mathcal{D}_p = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid p + v \in S\} = S - p$, donde $S - p = \{w - p \mid w \in S\}$.

Ejemplo 41. Sean S^2 con la primera forma fundamental, $p \in S^2$, $v, w \in T_p S$, donde $v = \delta w$, $\|w\| = 1$ y $\delta = \|v\|$. Se considera la geodésica c en S^2 con $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = v$, dada por

$$c(t) = \cos(\delta t)p + \sin(\delta t)w.$$

Luego $c(1) = \exp_p(v) = \cos(\delta)p + \sin(\delta)w = \cos(\|v\|)p + \sin(\|v\|)\frac{v}{\|v\|}$. Por lo tanto la función exponencial está dada por

$$\exp_p(v) = \begin{cases} \cos(\delta)p + \sin(\delta)w = \cos(\|v\|)p + \sin(\|v\|)\frac{v}{\|v\|}, & v \neq 0 \\ p, & v = 0. \end{cases}$$

Se aprecia que para v, w , con $w = -v$, se tiene que, $\exp_p(v) = \exp_p(w)$, pues $\|v\| = \|-v\| = \|w\|$.

Este ejemplo exhibe que \exp_p no es una función biyectiva, lo que resulta ser un inconveniente, si se pretende utilizar la función exponencial para construir una parametrización local en la superficie. Para solucionar este se restringe el dominio de la \exp_p a una vecindad del $0 \in \mathcal{D}_p$ que permite utilizar el teorema de la función inversa para tal propósito.

Lema 10. Sean S una superficie regular y $v \in T_p S$. Entonces, la diferencial de la función exponencial en $0 \in \mathcal{D}_p$, denotada por $d_0 \exp_p : T_p S \rightarrow T_p S$, está dada por

$$d_0 \exp_p(v) = Id(v) = v.$$

Demostración: ver en [2, pág 185].

De este modo utilizando el teorema de la función inversa existe una vecindad W de

$0 \in \mathcal{D}_p$ tal que $\exp_p|_W : W \rightarrow \exp_p(W) \subset S$ es un difeomorfismo.

Proposición 13. Sean S una superficie, $p \in S$, $V_2 \subset \mathbb{R}^3$ un abierto con $0 \in V_2$ y $W = T_p \cap V_2$ tal que $\exp_p : W \rightarrow \exp_p(W)$ es un difeomorfismo. Dada una parametrización local (U_1, F_1, V_1) de $T_p S$ alrededor de $0 \in T_p S$, se tiene que (U, F, V) donde $U = F_1^{-1}(W \cap V_1)$ y

$$F = \exp \circ F_1|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

es una parametrización local de S .

Demostración: Como F_1 es un homeomorfismo entonces $U := F_1^{-1}(W)$ es un conjunto abierto y $F(U) = \exp \circ F_1|_U = \exp(W) = V \cap S$. Además, por el teorema de la función inversa existe una función continua $F^{-1} : V \cap S \rightarrow U$, por lo cual F es un homeomorfismo.

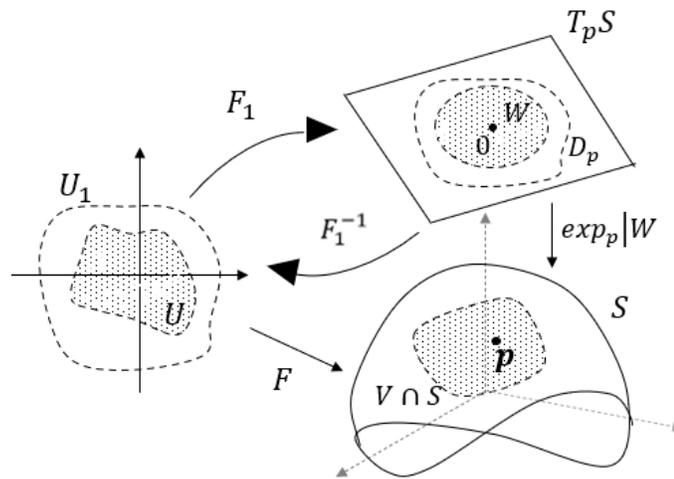


Figura 36: Función exponencial.

Ejemplo 42. Sean S una superficie regular con una métrica Riemanniana, $p \in S$ y $\{X_1, X_2\}$ una base ortonormal de $T_p S$. Tomando la parametrización en coordenadas cartesianas para $T_p S$, es decir $U_1 = \mathbb{R}^2$ y $F_1(u^1, u^2) = \sum_i u^i X_i$, la correspondiente

parametrización local de S es:

$$F(u^1, u^2) = \exp_p \left(\sum_i u^i X_i \right),$$

la cual es llamada la parametrización en **coordenadas normales de Riemann**.

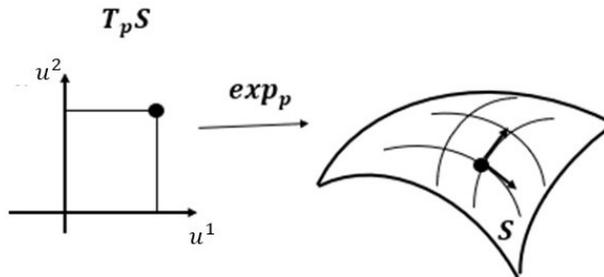


Figura 37: Coordenadas normales.

Lema 11. Sean S una superficie regular con métrica Riemanniana g , $c : I \rightarrow S$ una curva parametrizada por longitud de arco, $n : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial en S a lo largo de c que tiene longitud constante 1, tal que $\langle \dot{c}, n \rangle \equiv 0$. Entonces, para $t_0 \in I$ existe un $\varepsilon > 0$, tal que la función $F : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, dada por

$$F(t, s) := \exp_{c(t)}(sn(t))$$

es una parametrización local de S . A lo largo de c , la métrica Riemanniana, con respecto a esta parametrización, tiene la forma

$$(g_{ij}(t, 0))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración: Sea γ la geodésica que pasa por $c(t)$ en dirección $n(t)$, es decir $\gamma(0) = c(t)$ y $\dot{\gamma}(0) = n(t)$. Así, $\gamma(s) = \exp_{c(t)}(sn(t)) := F(t, s)$. Calculando las deriva-

das parciales de F en el punto $(t, 0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(t, 0) &= \frac{d}{dt} \exp_{c(t)}(0) = \frac{d}{dt} c(t) = \dot{c}(t) \\ \frac{\partial F}{\partial s}(t, 0) &= \frac{d}{ds} \gamma(s)|_{s=0} = \dot{\gamma}(0) = n(t).\end{aligned}$$

Luego

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial F}{\partial s}(t, 0) \right\rangle = \langle \dot{c}(t), \dot{n}(t) \rangle = 0,$$

además

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial t}(t, 0) \right\| = 1 = \left\| \frac{\partial F}{\partial s}(t, 0) \right\|,$$

así $\frac{\partial F}{\partial t}(t, 0)$ y $\frac{\partial F}{\partial s}(t, 0)$ son L.I. Esto es $\left\{ \frac{\partial F}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial F}{\partial s}(t, 0) \right\}$ forman una base ortonormal para $T_{c(t)}S$. Luego, por el teorema de la función inversa, se obtiene un abierto U tal que $(t, 0) \in U$ y $F|_U$ es una parametrización local de S alrededor de $c(t)$.

Además, la matriz de representación de está dada por

$$(g_{ij}(t, 0))_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 36. Las correspondientes coordenadas de la parametrización local presentada en el Lema 11 son llamadas **coordenadas de Fermi**.

3. Análisis y geometría

En esta sección iniciamos presentando la noción de superficie con frontera y como integrar una función sobre curvas que parametrizan dicha frontera, después, introducimos el concepto de divergencia para un campo vectorial, así como el teorema de la divergencia, resultado que generaliza el teorema fundamental del cálculo. Luego, se definen los $(2,0)$ campos tensoriales simétricos en una superficie. Por último, se estudian las familias uni-paramétricas de métricas Riemannianas, así como la variación de la métrica.

3.1. El teorema de la divergencia

Definición 37. Una **superficie con frontera** S es un subconjunto cerrado de una superficie regular $S_{Reg} \subset \mathbb{R}^3$, tal que para cada punto $p \in S$ existe una parametrización local $F : U \rightarrow S_{Reg}$, con $p \in F(U)$, satisface

- (i) $F(U) \subset S$, o bien
- (ii) $F^{-1}(p) = (x, 0)^T$ para un $x \in \mathbb{R}$ y $F^{-1}(S) = \{(x, y)^T \in U \mid y \geq 0\}$.

Los puntos de S que satisfacen la condición (i) son llamados puntos interiores de S , mientras los que satisfacen (ii) son llamados puntos frontera. El conjunto de todos los puntos interiores de S es el **interior** de S , y el conjunto de todos los puntos frontera es la **frontera** de S .

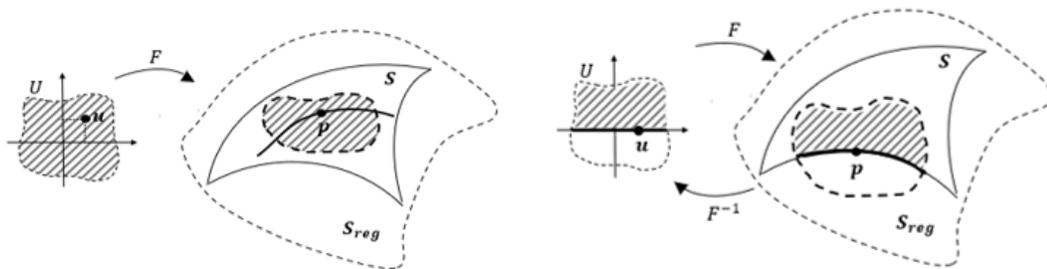


Figura 38: Superficie con frontera

Ejemplo 43. El disco circular $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ es una superficie con frontera.

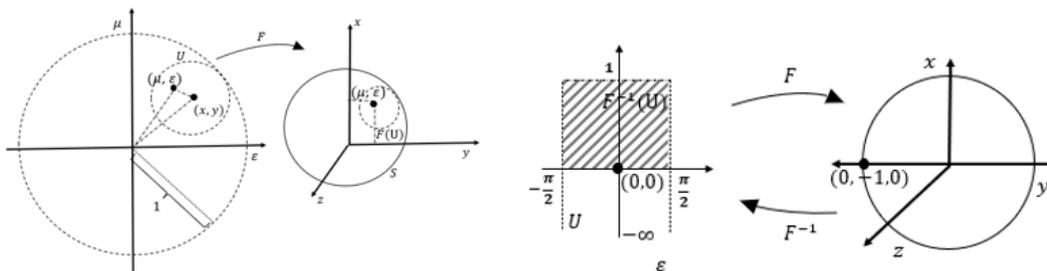


Figura 39: Interior y frontera de S

Ejemplo 44. El hemisferio superior $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ es una superficie con frontera.

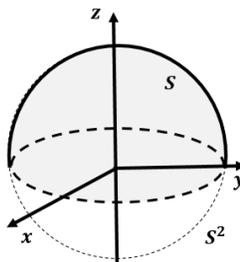


Figura 40: Hemisferio superior de la S^2 .

Ejemplo 45. Una superficie regular S es una superficie con frontera. A decir verdad, $\partial S = \emptyset$.

Sea S una superficie con frontera. Para cada $p \in \partial S$, existe una parametrización F que satisface $F^{-1}(p) = (x, 0)$ y $F^{-1}(S) = \{(x, y) \in U | y \geq 0\}$, entonces, los puntos de la frontera que pertenecen a la vecindad coordenada $F(U)$ pueden ser parametrizados por la curva regular $c : I \rightarrow S_{reg}$, dada por

$$c(t) := F(t, 0).$$

Para $t_0 \in I$ tal que $c(t_0) = F(t_0, 0) = p$ se tiene que $\dot{c}(t_0) \in T_p S$. Existen exactamente dos vectores normales unitarios $\pm v(p) \in T_p S$ que son perpendiculares a $\dot{c}(t_0)$. Es decir

$$\langle \dot{c}(t_0), \pm v(p) \rangle = 0.$$

Los vectores $\pm v(p)$ son llamados **vectores normales unitarios a la frontera** de S en p .

Para $u = F^{-1}(p)$, se tiene que $\dot{c}(t_0) = d_u F(1, 0)$, luego $(d_u F)^{-1}(\dot{c}(t_0)) = (1, 0)$. Sea $(d_p F)^{-1}(v(p)) = (x, y)$, entonces, el producto interno

$$\langle (d_p F)^{-1}(v(p)), (0, 1) \rangle = \langle (x, y), (0, 1) \rangle = y \neq 0.$$

Se denomina **vector normal unitario exterior a la frontera** en el punto p , al vector $v(p)$, que satisface;

$$y = \langle (d_p F)^{-1}(v(p)), (0, 1) \rangle < 0,$$

mientras $-v(p)$ es el **vector normal unitario interior**.

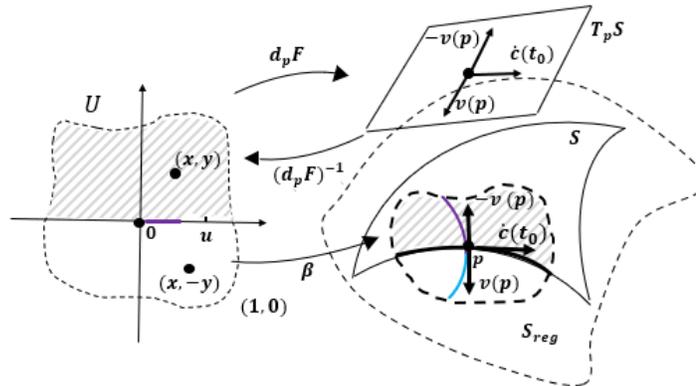


Figura 41: Vectores normales unitarios a la frontera de S .

Proposición 14. Sea S una superficie con frontera y $p \in \partial S$. Existe una curva regular $\beta : [0, \xi) \rightarrow S$, con $\dot{\beta}(0) = -v(p)$, donde $-v(p)$ es el vector normal unitario interno.

Demostración: Dado $p \in \partial S$, existe una parametrización (U, F, V) tal que $F^{-1}(p) = (u^1, 0)$ y $F^{-1}(S) = \{(a, b) \in U \mid b \geq 0\}$. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de manera tal que

$$d_u F(x, y) = -v(p),$$

por la definición de $-v(p)$, se tiene que $y > 0$. Considerando la curva $\beta : [0, \xi) \rightarrow S_{reg}$ dada por

$$\beta(t) := F((u^1, 0) + t(x, y)) = F(u^1 + tx, ty).$$

Entonces $\beta(0) = p$ y $\dot{\beta}(0) = D_u F(x, y) = -v(p)$. Ya que $y > 0$ y $t \in [0, \xi)$, se concluye que $\beta(t) \in S$, es decir $ty \geq 0$.

Observación 14. Para el vector normal unitario exterior $v(p)$ no existe una curva análoga a la mencionada en la Proposición 14, de lo contrario existiría una curva $\beta : [0, \xi) \rightarrow S$, dada por

$$\beta(t) = F(x(t), y(t))$$

donde $\beta(0) = F(x(0), y(0)) = p$ y $\dot{\beta}(0) = v(p)$. Como $y(0) = 0$ y $y(t) \geq 0$, entonces $\dot{y}(0) \geq 0$, lo cual es una contradicción ya que $\dot{y}(0) < 0$ para el vector $v(p)$ (ver Figura 41).

Observación 15. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida sobre una superficie regular orientada S . El **soporte de f** es el conjunto

$$\text{supp } f = \overline{\{p \in S \mid f(p) \neq 0\}}.$$

A continuación se define como integrar funciones sobre la frontera de una superficie.

Definición 38. Sea S una superficie con frontera y $f : \partial S \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave con soporte compacto. Se escribe $\partial S \cap \text{supp } f = C_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} C_n$ como una unión disjunta, donde cada C_j es una parte de la frontera que puede ser parametrizada por

una curva regular. Eligiendo parametrizaciones por longitud de arco $c_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $c_j(I_j) = C_j$, se define la **integral de línea** como

$$\int_{\partial S} f ds := \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f \circ c_j(t) dt.$$

Proposición 15. Si $c_j : I_j \rightarrow C_j$ son parametrizaciones regulares de C_j (no necesariamente por longitud de arco), entonces

$$\int_{\partial S} f ds = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(c_j(t)) \|\dot{c}_j(t)\| dt.$$

Demostración: Si la curva c_j es parametrizada por longitud de arco, la afirmación se cumple, pues $\|c_j(t)\| = 1$. Si $\|c_j(t)\| \neq 1$, existe un cambio de parámetro $\varphi_j(s)$ que conserva la orientación, ver en [2, pág 27]. Luego, $\tilde{c}_j = c_j \circ \varphi_j$ es una reparametrización por longitud de arco de c_j , es decir $\|\tilde{c}_j(s)\| = \|c_j \circ \varphi_j(s)\| = 1$ y

$$\dot{\varphi}_j(s) = \frac{1}{\|\dot{c}_j(\varphi_j(s))\|} = \frac{1}{\|\dot{c}_j(t)\|}, \quad \text{donde } t = \varphi_j(s). \quad (30)$$

De la definición de integral de línea y la ecuación (30), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} f ds &= \sum_{j=1}^n \int_{\tilde{I}_j} f \circ \tilde{c}_j(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f \circ c_j(\varphi(s)) ds \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f \circ c_j(t) \frac{dt}{\dot{\varphi}(s)} \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f \circ c_j(t) \frac{dt}{\frac{1}{\|\dot{c}_j(t)\|}} \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f \circ c_j(t) \|\dot{c}_j(t)\| dt. \end{aligned}$$

Observación 16. Sea S una superficie regular con métrica Riemanniana g y $f : \mathbb{R} \rightarrow S$ una función suave, al igual que en la Observación 6, existe un campo vectorial suave, denominado $\text{grad } f$, que satisface

$$d_p f(X) = g(\text{grad } f(p), X),$$

para todo $X \in T_p S$. Si (U, F, V) es una parametrización de S entorno de p , entonces sobre $S \cap V$ se tiene que

$$\text{grad } f = \sum g^{ij} \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u^i} \frac{\partial F}{\partial u^j}.$$

La ecuación anterior muestra que $\text{grad } f$ depende de la métrica g , no obstante $d_p f$ es independiente de g .

La Observación 16 permite asociar un campo vectorial a una función suave. Ahora, se define una operación que realice lo contrario, dado un campo vectorial se quiere asociar una función. Para ello, se inicia recordando que la **traza** de una matriz A $n \times n$, está definida como:

$$\text{Traza} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Se puede definir la traza de una aplicación líneal $f : V \rightarrow V$, para ello se elige una base B del espacio vectorial V , si B_f es la matriz de representación de f respecto a la base B , entonces la traza de f , está dada por

$$\text{Traza } f = \text{Traza } B_f.$$

Se puede probar que la definición anterior es independiente de la base, esto es, si

M_f es la matriz de representación de f respecto a otra base de V , entonces

$$\text{Traza } B_f = \text{Traza } M_f = \text{Traza } f$$

En particular, si V es un espacio vectorial de dimensión finita dotado con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V , entonces la traza de f está dada por

$$\text{Traza } f = \sum_k^n \langle f(v_k), v_k \rangle.$$

Definición 39. Sea $t \rightarrow g(t)$ una curva diferenciable de matrices reales $n \times n$ invertibles. Si denotamos por

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & \dots & g_{1n}(t) \\ g_{n1}(t) & \dots & g_{nn}(t) \end{pmatrix} = (g_{ij}(t)),$$

diremos que g es suave si las funciones g_{ij} son suaves, es decir

$$\frac{dg}{dt} = \left(\frac{d}{dt} g_{ij}(t) \right).$$

Lema 12 (Derivada de un determinante). Sea $t \rightarrow g(t)$ una curva diferenciable de matrices reales $n \times n$ invertibles. Con $g = g(t)$, se tiene que

$$\frac{d}{dt} \ln \det g = \text{traza} \left(g^{-1} \frac{d}{dt} g \right).$$

Demostración: En primer lugar considerando el caso $t = t_0$ tal que $g(t_0) = Id$. El determinante de g está dado por:

$$\det g = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) g_{1\sigma(1)} \dots g_{n\sigma(n)},$$

donde se suma sobre todas las permutaciones $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, se sigue

que

$$\frac{d}{dt} \det g(t_0) = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \left(\frac{dg_{1\sigma(1)}}{dt}(t_0) \dots g_{n\sigma(n)}(t_0) + \dots + g_{1\sigma(1)}(t_0) \dots \frac{dg_{n\sigma(n)}}{dt}(t_0) \right).$$

Como $g_{ij}(t_0) = 0$ para $i \neq j$, la única permutación que aporta un sumando no nulo es la permutación $\sigma = Id$; luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det g(t_0) &= \frac{dg_{11}}{dt}(t_0) \dots g_{nn}(t_0) + \dots + g_{11}(t_0) \dots \frac{dg_{nn}}{dt}(t_0) \\ &= \frac{dg_{11}}{dt}(t_0) + \dots + \frac{dg_{nn}}{dt}(t_0) \\ &= \text{Traza} \left(\frac{dg}{dt}(t_0) \right). \end{aligned}$$

Ahora, para $g(t_0) \neq Id$, sea $h(t) := g(t_0)^{-1}g(t)$, así $h(t_0) = Id$. Utilizando el resultado anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det h(t)) \Big|_{t=t_0} &= \text{traza} \left\{ \frac{d}{dt} h(t) \Big|_{t=t_0} \right\} \\ &= \text{Traza} \left\{ \frac{d}{dt} \left(g^{-1}(t_0) g(t) \right) \Big|_{t=t_0} \right\} \\ &= \text{Traza} \left\{ \frac{d}{dt} g^{-1}(t_0) \frac{dg}{dt}(t_0) \right\}. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det h(t)) \Big|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt} \left(\det g^{-1}(t_0) g(t) \right) \Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\det g^{-1}(t_0) \det g(t) \right) \Big|_{t=t_0} \\ &= \det g^{-1}(t_0) \frac{d}{dt} \left(\det g(t) \right) \Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{1}{\det g(t_0)} \frac{d}{dt} \left(\det g(t) \right) \Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\ln \det g(t) \right) \Big|_{t=t_0}. \end{aligned}$$

Así

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \det g(t) \right) \Big|_{t=t_0} = \text{Traza} \left(g^{-1}(t_0) \frac{d}{dt} g(t_0) \right).$$

Definición 40. Sean S una superficie regular, $p \in S$ y X un campo vectorial diferenciable en S . La traza del endomorfismo $\nabla X : T_p S \rightarrow T_p S$, dado por $Y_p \rightarrow \nabla_{Y_p} X$, es llamado la **divergencia** de X en el punto p y es denotada por $\text{div } X(p)$. Así,

$$\text{div } X(p) := \text{Traza} (Y_p \rightarrow \nabla_{Y_p} X).$$

Lema 13. Si se escribe el campo vectorial X con respecto a la parametrización local F , como $X = \sum_{i=1}^2 \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$, entonces la divergencia es denotada por $\text{div } X(p)$, Así,

$$\text{div } X = \sum_j \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} + \sum_i \Gamma_{ij}^j \xi^i \right) = \frac{1}{\sqrt{\det (g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\sqrt{\det (g_{kl})} \xi^j \right). \quad (31)$$

Demostración: Hallemos la matriz de representación de $Y_p \rightarrow \nabla_{Y_p} X$, con respecto a la base $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2} \right\}$ de $T_p S$. Como

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial F}{\partial u^j}} X &= \nabla_{\frac{\partial F}{\partial u^j}} \left(\sum_i \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} \frac{\partial F}{\partial u^i} + \xi^i \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} \right) = \sum_k \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} + \sum_i \xi^i \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}, \end{aligned}$$

las componentes de la matriz de representación del endomorfismo son

$$\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} + \sum_i \xi^i \Gamma_{ij}^k \right)_{jk},$$

por ende la traza de la matriz, está dada por

$$\text{div } X = \sum_j \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} + \sum_i \Gamma_{ij}^j \xi^i \right),$$

lo cual prueba la primera parte de la ecuación (31). Ahora,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\det (g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\sqrt{\det (g_{kl})} \xi^j \right) &= \frac{1}{\sqrt{\det (g_{kl})}} \sum_j \left(\frac{\partial \sqrt{\det (g_{kl})}}{\partial u^j} \xi^j + \frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} \sqrt{\det (g_{kl})} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det (g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial \sqrt{\det (g_{kl})}}{\partial u^j} \xi^j + \sum_j \frac{\sqrt{\det (g_{kl})}}{\sqrt{\det (g_{kl})}} \frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det (g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial \sqrt{\det (g_{kl})}}{\partial u^j} \xi^j + \sum_j \frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\ln \left(\sqrt{\det (g_{kl})} \right) \right) \xi^j + \sum_j \frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} \\
&= \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} (\ln (\det (g_{kl}))) \xi^j + \sum_j \frac{\partial \xi^j}{\partial u^j},
\end{aligned}$$

luego resta verificar la siguiente expresión para obtener la segunda igualdad de la ecuación (31):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^j} (\ln (\det (g_{kl}))) = \sum_i \Gamma_{ji}^i. \quad (32)$$

Con $(g_{ij})_{ij} = g$ y el Lema 3 se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_i \Gamma_{ji}^i &= \frac{1}{2} \sum_{ik} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} \right) g^{ik} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{ik} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \right) g^{ik} = \frac{1}{2} \text{Traza} \left(g^{-1} \frac{\partial g}{\partial u^j} \right)
\end{aligned} \quad (33)$$

y por el Lema 12 se tiene que

$$\sum_i \Gamma_{ji}^i = \frac{1}{2} \text{Traza} \left(g^{-1} \frac{\partial g}{\partial u^j} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^j} \ln (\det g). \quad (34)$$

Proposición 16 (Linealidad de la divergencia). Sean X, X_1, X_2 campos vectoriales sobre S . Si $X = X_1 + X_2$, entonces

$$\text{div } X = \text{div } X_1 + \text{div } X_2.$$

Demostración: Sea (U, F, V) una parametrización local de S en p . Se escriben los campos X, X_1 y X_2 con respecto a la parametrización mencionada, como:

$$X = \sum_i \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i}, \quad X_1 = \sum_j \beta^j \frac{\partial F}{\partial u^j}, \quad X_2 = \sum_j \gamma^j \frac{\partial F}{\partial u^j}.$$

Entonces

$$X = \sum_i (\beta^i + \gamma^i) \frac{\partial F}{\partial u^i}.$$

Luego, por el Lema 13

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_j \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} + \sum_i \Gamma_{ij}^j \xi^i \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial (\beta^j + \gamma^j)}{\partial u^j} + \sum_i \Gamma_{ij}^j (\beta^i + \gamma^i) \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial \beta^j}{\partial u^j} + \sum_i \Gamma_{ij}^j \beta^i \right) + \sum_j \left(\frac{\partial \gamma^j}{\partial u^j} + \sum_i \Gamma_{ij}^j \gamma^i \right) = \operatorname{div} X_1 + \operatorname{div} X_2. \end{aligned}$$

Este resultado se puede extender para un número n de campos vectoriales.

El teorema presentado a continuación es una generalización del teorema fundamental del cálculo.

Teorema 5 (Divergencia de Gauss). Sean S_{reg} una superficie regular con g una métrica Riemanniana, $S \subset S_{reg}$ una superficie con frontera, X un campo vectorial continuamente diferenciable con soporte compacto en S_{reg} y v el campo normal unitario exterior de S . Entonces

$$\int_S \operatorname{div} X \, dA = \int_{\partial S} g(X, v) \, ds. \quad (35)$$

Demostración: Para cada $p \in \operatorname{supp} X \cap S$ existe una parametrización local (U, F, V) de S_{reg} como en la Definición 37. Dado que $\operatorname{supp} X \cap S$ es compacto, se puede cubrir con un número finito de vecindades $F_j(U_j)$. Se definen $\rho_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones

suaves con soporte compacto en U_j , tal que $0 \leq \rho_j \leq 1$ y $\sum_j \rho_j \equiv 1$. Se escribe $X_j := \rho_j X$ entonces $\sum_j X_j = \sum_j \rho_j X = X$ en S y cada campo X_j tiene su soporte contenido en $F_j(U_j)$. Por la linealidad de la integral y la divergencia, es suficiente probar la ecuación (35) para X_j . Así, sin pérdida de generalidad se puede asumir que $\text{supp } X \cap S$ está contenido en una vecindad $F(U)$.

En primer lugar se considera el caso en que la vecindad se intersecta con la frontera de S , es decir, es del segundo tipo de la Definición 37. Por lo tanto la parametrización local $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que $F^{-1}(S) = \{(u^1, u^2)^T \in U \mid u^2 \geq 0\}$ y $\text{supp } X \cap S \subset F(U)$. Sin pérdida de generalidad se asume que

$$F : U = (-a, a) \times (-a, a) \rightarrow S,$$

son coordenadas de Fermi a lo largo de c (Lema 11), donde c es una parametrización por longitud de arco de $\partial S \cap F(U)$. A lo largo de la frontera de S se tiene que

$$(g_{ij}(u^1, 0))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

y

$$v(F(u^1, 0)) = -\frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1, 0). \quad (37)$$

En particular $\sqrt{\det(g_{kl}(u^1, 0))} = 1$. Escribiendo el campo X con respecto a F como $X = \sum_j \xi^j \frac{\partial F}{\partial u^j}$ y usando el Lema 13, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_S \text{div } X dA &= \int_0^a \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^j \right) \sqrt{\det(g_{kl})} du^1 du^2 \\ &= \sum_j \int_0^a \int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^j \right) du^1 du^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Con $j = 1$, se integra primero respecto a u^1 para obtener

$$\int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial u^1} (\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^1) du^1 = \sqrt{\det(g_{kl})(a, u^2)} \xi_1(a, u^2) - \sqrt{\det(g_{kl})(-a, u^2)} \xi_1(-a, u^2) = 0$$

dado que $\xi^1(-a, u^2) = \xi^1(a, u^2) = 0$ por lo supuesto sobre el soporte de X . Con $j = 2$, se integra respecto a u^2 y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\partial}{\partial u^2} (\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^2) du^2 &= (\sqrt{\det(g_{kl})(u^1, a)} \xi^2(u^1, a)) - (\sqrt{\det(g_{kl})(u^1, 0)} \xi^2(u^1, 0)) \\ &= -\xi^2(u^1, 0). \end{aligned} \quad (39)$$

Entonces la ecuación (38) se simplifica a

$$\int_S \operatorname{div} X dA = - \int_{-a}^a \xi^2(u^1, 0) du^1. \quad (40)$$

Por otra parte, evaluando la integral de línea se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} g(X, v) ds &= \int_{\partial S} g \left(\sum_j \xi^j(u^1, 0) \frac{\partial F}{\partial u^j}(u^1, 0), -\frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1, 0) \right) ds \\ &= \int_{\partial S} \sum_j \xi^j(u^1, 0) g \left(\frac{\partial F}{\partial u^j}(u^1, 0), -\frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1, 0) \right) ds \\ &= \int_{\partial S} \xi^2(u^1, 0) g \left(\frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1, 0), -\frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1, 0) \right) ds \\ &= \int_{-a}^a -\xi^2(u^1, 0) du^1, \end{aligned} \quad (41)$$

por las ecuaciones (40) y (41) se sigue que

$$\int_S \operatorname{div} X dA = \int_S g(X, v) ds.$$

Si la vecindad no se intersecta con la frontera, entonces los argumentos anteriores muestran que $F(U) \subset S$ y como $\operatorname{supp} X \cap S \subset F(U) \subset S$, entonces en la ecuación

(39) es igual a cero, así

$$\int_S \operatorname{div} X dA = 0,$$

terminando la demostración.

Definición 41. Sean S una superficie regular con métrica Riemanniana g y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Se define la función $\Delta f : S \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Se denomina a Δ el **operador de Laplace**. Además, una función que satisface

$$\Delta f \equiv 0$$

es llamada **armónica**.

El siguiente corolario es el resultado de aplicar el teorema de la divergencia cuando $\partial S = \emptyset$.

Corolario 1. Sea S una superficie regular compacta con métrica Riemanniana g . Entonces para todo X , campo vectorial diferenciable y para toda f , función dos veces diferenciable en S , se satisface

$$\int_S \operatorname{div} X dA = 0 = \int_S \Delta f dA.$$

Proposición 17. Para toda función diferenciable f y campo vectorial X , se satisface

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + g(\operatorname{grad} f, X).$$

Demostración: Sea v_1, v_2 una base ortonormal de $T_p S$. Por el Lema 4 se tiene que

$$\nabla_Y f X = df(Y)X + f \nabla_Y X. \quad (42)$$

Calculando la traza del endomorfismo $Y \rightarrow \nabla_Y fX$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \text{Traza } (Y \rightarrow \nabla_Y fX) &= g \left(\sum_k \nabla_{v_k} fX, v_k \right) \\
 &= \sum_k g(df(v_k)X + f\nabla_{v_k} X, v_k) \\
 &= \sum_k g(df(v_k)X, v_k) + g(f\nabla_{v_k} X, v_k) \\
 &= \sum_k df(v_k)g(X, v_k) + fg(\nabla_{v_k} X, v_k) \\
 &= \sum_k g(\text{grad } f, v_k)g(X, v_k) + fg(\nabla_{v_k} X, v_k) \\
 &= g(\text{grad } f, X) + f\nabla_Y X.
 \end{aligned}$$

Observación 17. Sea S una superficie compacta con frontera y $f_1, f_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Entonces, se cumple la **formula de Green**, ver en [2, pág 232]

(a)

$$\int_S f_2 \Delta f_1 dA = - \int_S g(\text{grad } f_1, \text{grad } f_2) dA + \int_{\partial S} f_2 \partial_\nu f_1 ds.$$

(b) Si $\partial S = \emptyset$

$$\int_S f_2 \Delta f_1 dA = \int_S \Delta f_2 f_1 dA.$$

Definición 42. Sea S una superficie regular. Un **(2,0) campo tensorial simétrico** en S es una función que asigna a cada punto $p \in S$ una forma bilineal simétrica b_p en $T_p S$, de manera tal que respecto a la parametrización local $F : U \rightarrow S$ las funciones $b_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$b_{ij}(u) := b_{F(u)} \left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right),$$

son suaves.

Definición 43. Sea S una superficie regular con métrica Riemanniana g y b un (2,0)

campo tensorial simétrico. La **traza** de b es la función $\text{Traza } b : S \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual respecto a una parametrización local F , está dada por

$$(\text{Traza } b) \circ F = \sum_{ij} g^{ij} b_{ij}.$$

La **divergencia** de b es el campo vectorial $\text{div } b$ en S , el cual respecto a una parametrización está dado por

$$(\text{div } b)^l = \sum_{ijk} g^{kl} g^{ij} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^i} - \sum_{\alpha} (\Gamma_{ij}^{\alpha} b_{\alpha k} + \Gamma_{ik}^{\alpha} b_{\alpha j}) \right).$$

Observación 18. Fijando $p \in S$, para cada forma bilineal simétrica b sobre $T_p S$, existe un único endomorfismo $B_p : T_p S \longrightarrow T_p S$, adjunto respecto a g_p tal que:

$$b(X, Y) = g_p(B_p(X), Y), \quad X, Y \in T_p S.$$

Dada una parametrización local (U, F, V) de S al rededor de p , denotando $U = F^{-1}(p)$, la matriz (B_j^i) que representa a B_p respecto a la base $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) \right\}$ de $T_p S$, es dada por

$$B_j^i = \sum_k g^{ik} b_{kj},$$

donde

$$b_{kj} = b \left(\frac{\partial F}{\partial u^k}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right).$$

Así

$$(\text{Traza } b)(p) = \text{Traza } (B_p).$$

3.2. Variación de la métrica

Definición 44. Sean S una superficie regular y $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una **familia uniparamétrica de métricas Riemannianas** en S es una función que asigna para

cada $t \in I$ y cada $p \in S$ un producto escalar $g_{t,p}$ en $T_p S$, tal que para cada (U, F, V) parametrización local de S en p , las funciones $I \times U \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por

$$(t, u^1, u^2) \longrightarrow g_{ij}(t, u^1, u^2) := g_{t,F(u)} \left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right), \quad i, j = 1, 2,$$

son suaves.

Ejemplo 46. Si existen dos métricas g_0 y g_1 definida en una superficie regular S , entonces

$$g_{t,p} := (1 - t)g_{0,p} + tg_{1,p}, \quad t \in [0, 1],$$

define una familia de un parámetro de métricas Riemannianas, que representa una transición de g_0 a g_1 .

Ejemplo 47. si g es una métrica Riemanniana en S , entonces

$$g_{t,p} := tg_p, \quad t \in (0, \infty),$$

define una familia uniparamétrica de métricas Riemannianas.

En adelante se utilizará la notación de la suma de Einstein y la abreviatura $\partial_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$.

Observación 19. Sea $g_{t,p}$ una familia uniparamétrica de métricas Riemannianas. Con $t_0 \in I$ se escribe su expansión de Taylor con respecto a t en $t = t_0$ como

$$g_{ij}(t, u^1, u^2) = g_{ij}(u^1, u^2) + (t - t_0)\dot{g}_{ij}(u^1, u^2) + O((t - t_0)^2).$$

Análogamente se puede definir $\dot{g}^{ij}, \dot{\Gamma}_{ij}^k, \dot{R}_{ijk}^l, \dot{K}, \dot{d}A$. Esta definición determina un $(2, 0)$ campo tensorial \dot{g} , la derivada de esta familia uniparamétrica de métricas Riemannianas con respecto a t en $t = t_0$.

Lema 14. Las definiciones anteriores implican:

$$(a) \dot{g}^{jk} = - \sum_{il} g^{ij} \dot{g}_{il} g^{lk}$$

$$(b) \dot{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} g^{k\alpha} \left(\frac{\partial \dot{g}_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial \dot{g}_{i\alpha}}{\partial u^j} - \frac{\partial \dot{g}_{ij}}{\partial u^{\alpha}} \right) - \sum_{\beta, l} \Gamma_{ij}^{\beta} g^{lk} \dot{g}_{\beta l}$$

Demostración: Para el ítem (a) se diferencia el símbolo de Kronecker respecto a t y se obtiene

$$\dot{\delta}_i^k = \overbrace{(\dot{g}_{li} g^{lk})} = \dot{g}_{li} g^{lk} + g_{li} \dot{g}^{lk} = 0$$

Luego

$$\dot{g}_{li} g^{lk} = -g_{li} \dot{g}^{lk}. \quad (43)$$

Entonces, multiplicando la ecuación 43 por g^{ji} ,

$$g^{ji} \dot{g}_{li} g^{lk} = -g^{ji} \dot{g}_{li} g^{lk},$$

y como $g^{ji} g_{li} = \delta_i^j$, obtenemos

$$\dot{g}^{jk} = -g^{ji} \dot{g}_{li} g^{lk}.$$

Para el ítem (b) se diferencia los símbolos de Christoffel respecto a t

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \dot{g}^{k\alpha} (\partial_i g_{j\alpha} + \partial_j g_{j\alpha} - \partial_{\alpha} g_{ij}) + \frac{1}{2} g^{k\alpha} (\partial_i \dot{g}_{j\alpha} + \partial_j \dot{g}_{i\alpha} - \partial_{\alpha} \dot{g}_{ij}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \dot{g}_{\beta l} g^{lk} (\partial_i g_{j\alpha} + \partial_j g_{j\alpha} - \partial_{\alpha} g_{ij}) + \frac{1}{2} g^{k\alpha} (\partial_i \dot{g}_{j\alpha} + \partial_j \dot{g}_{i\alpha} - \partial_{\alpha} \dot{g}_{ij}) \\ &= -\Gamma_{ij}^{\beta} g^{lk} \dot{g}_{\beta l} + \frac{1}{2} g^{k\alpha} (\partial_i \dot{g}_{j\alpha} + \partial_j \dot{g}_{i\alpha} - \partial_{\alpha} \dot{g}_{ij}). \end{aligned}$$

Lema 15. La variación del elemento de área de superficie está dado por

$$\dot{dA} = \frac{1}{2} \text{Traza} (\dot{g}) dA$$

Demostración: Por el Lema (12) se tiene que

$$\frac{d}{dt} \ln \det (g_{ij}) = \frac{1}{\det (g_{ij})} \frac{d}{dt} \det (g_{ij}) = \text{Traza} \left(g^{ij} \frac{d}{dt} g_{ij} \right).$$

Luego, derivando el elemento de área de superficie respecto a t

$$\begin{aligned} \dot{dA} &= \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} du^1 du^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\det (g_{ij})} \right) du^1 du^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\det (g_{ij})}} \frac{d}{dt} \det (g_{ij}) \right\} du^1 du^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\det (g_{ij})} \frac{1}{\det (g_{ij})} \frac{d}{dt} \det (g_{ij}) \right\} du^1 du^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\det (g_{ij})} \frac{d}{dt} \ln \det (g_{ij}) \right\} du^1 du^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\ln \det (g_{ij}) \right) \sqrt{\det (g_{ij})} du^1 du^2 \\ &= \frac{1}{2} \text{traza}(g^{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \text{traza} \left(g^{ij} \frac{dg_{ij}}{dt} \right) dA \\ &= \frac{1}{2} \text{traza}(\dot{g}) dA. \end{aligned}$$

Lema 16. La variación de la curvatura de Gauss está dada por

$$2\dot{K} = \text{div}(\text{div}(\dot{g})) - \Delta(\text{Traza}(\dot{g})) - K \cdot \text{Traza}(\dot{g}).$$

Demostración: Dado $p \in S$, se eligen las coordenadas normales de Riemann (respecto a g_{t_0}) en p . Entonces las primeras derivadas de los coeficientes métricos y los símbolos de Christoffel son igual a cero en p . Derivando el tensor de curvatura

respecto a t y usando el Lema 6 y 14 se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{R}_{ijk}^l &= \partial_i \dot{\Gamma}_{kj}^l - \partial_j \dot{\Gamma}_{ki}^l + \dot{\Gamma}_{\alpha i}^l \Gamma_{kj}^\alpha + \Gamma_{\alpha i}^l \dot{\Gamma}_{kj}^\alpha - \dot{\Gamma}_{\alpha j}^l \Gamma_{ki}^\alpha - \Gamma_{\alpha j}^l \dot{\Gamma}_{ki}^\alpha \\
&= \partial_i \dot{\Gamma}_{kj}^l - \partial_j \dot{\Gamma}_{ki}^l \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha l} \partial_i (\partial_k \dot{g}_{j\alpha} + \partial_j \dot{g}_{k\alpha} - \partial_\alpha \dot{g}_{kj}) - \partial_i \Gamma_{kj}^\beta g^{\alpha l} \dot{g}_{\alpha\beta} \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{\alpha l} \partial_j (\partial_k \dot{g}_{i\alpha} + \partial_i \dot{g}_{k\alpha} - \partial_\alpha \dot{g}_{ki}) + \partial_j \Gamma_{ki}^\beta g^{\alpha l} \dot{g}_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha l} (\partial_i \partial_k \dot{g}_{j\alpha} - \partial_i \partial_\alpha \dot{g}_{kj} - \partial_j \partial_k \dot{g}_{i\alpha} + \partial_j \partial_\alpha \dot{g}_{ki}) - R_{ijk}^\beta g^{\alpha l} \dot{g}_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Luego, usando el Lema 9 y derivando la expresión $k = \frac{1}{2} g^{jk} R_{ijk}^i$, se tiene

$$\begin{aligned}
2\dot{K} &= g^{jk} R_{ijk}^i \\
&= \dot{g}^{jk} R_{ijk}^i + g^{jk} \dot{R}_{ijk}^i \\
&= -g^{\alpha j} \dot{g}_{\alpha l} g^{l\alpha} R_{ijk}^i + \frac{1}{2} g^{jk} g^{\alpha i} (\partial_i \partial_k \dot{g}_{j\alpha} - \partial_i \partial_\alpha \dot{g}_{kj} - \partial_j \partial_k \dot{g}_{i\alpha} + \partial_j \partial_\alpha \dot{g}_{ki}) - g^{jk} R_{ijk}^\beta g^{\alpha i} \dot{g}_{\alpha\beta} \\
&= g^{jk} g^{\alpha i} (\partial_i \partial_k \dot{g}_{j\alpha} - \partial_i \partial_\alpha \dot{g}_{kj}) - K (g^{jk} g_{jk} \delta_i^\beta - g^{jk} g_{ik} \delta_j^\beta) g^{\alpha i} \dot{g}_{\alpha\beta} \\
&\quad - g^{\alpha j} \dot{g}_{\alpha l} K (g^{lk} g_{jk} \delta_i^i - g^{lk} g_{ik} \delta_j^i) \\
&= g^{jk} g^{\alpha i} (\partial_i \partial_k \dot{g}_{j\alpha} - \partial_i \partial_\alpha \dot{g}_{kj}) - K (2\delta_i^\beta - \delta_i^j \delta_j^\beta) g^{\alpha i} \dot{g}_{\alpha\beta} - g^{\alpha j} \dot{g}_{\alpha l} K (2\delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^i) \\
&= g^{jk} g^{\alpha i} (\partial_i \partial_k \dot{g}_{j\alpha} - \partial_i \partial_\alpha \dot{g}_{kj}) - K (2\delta_i^\beta - \delta_i^\beta) g^{\alpha i} \dot{g}_{\alpha\beta} - g^{\alpha l} \dot{g}_{\alpha j} K (2\delta_j^l - \delta_j^l) \\
&= g^{jk} g^{\alpha i} (\partial_i \partial_k \dot{g}_{j\alpha} - \partial_i \partial_\alpha \dot{g}_{kj}) K (\delta_i^\beta) g^{\alpha i} \dot{g}_{\alpha\beta} - g^{\alpha j} \dot{g}_{\alpha l} K (\delta_j^l) \\
&= -2K \text{Traza}(\dot{g}) + g^{jk} g^{\alpha i} (\partial_i \partial_k \dot{g}_{j\alpha} - \partial_i \partial_\alpha \dot{g}_{kj}),
\end{aligned}$$

donde se renombró los índices $j = i$, $l = \beta$ y se utilizó $\delta_i^i = 2 = \delta_{jk}^{jk}$. Por otra parte, se calcula la divergencia del $(2, 0)$ campo vectorial $\text{div}(\dot{g})$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{div}(\dot{g})) &= \partial_l(\operatorname{div}(\dot{g}))^l \\
&= \partial_l(g^{kl}g^{ij}(\partial_i\dot{g}_{jk} - \Gamma^\alpha\dot{g}_{k\alpha} - \Gamma_{ik}^\alpha\dot{g}_{j\alpha})) \\
&= g^{kl}g^{ij}(\partial_l\partial_i\dot{g}_{jk} - \partial_l\Gamma^\alpha\dot{g}_{k\alpha} - \partial_l\Gamma_{ik}^\alpha\dot{g}_{j\alpha}).
\end{aligned} \tag{44}$$

Además

$$g^{ij}\partial_i\partial_jg^{kl} = -g^{ij}g^{k\alpha}\partial_i\Gamma_{\alpha j}^l - g^{ij}g^{l\alpha}\partial_i\Gamma_{\alpha j}^k.$$

De otra parte,

$$\begin{aligned}
\Delta(\operatorname{Traza}(\dot{g})) &= g^{ij}(\partial_i\partial_j(g^{kl}\dot{g}_{kl})) \\
&= g^{ij}(\partial_i\partial_jg^{kl})\dot{g}_{kl} + g^{ij}g^{kl}\partial_i\partial_j\dot{g}_{kl} \\
&= (-g^{ij}g^{k\alpha}\partial_i\Gamma_{\alpha j}^l + \partial_i g^{l\alpha}\partial_i\Gamma_{\alpha j}^k)\dot{g}_{kl} + g^{ij}g^{kl}\partial_i\partial_j\dot{g}_{kl},
\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{div}(g)) - \Delta(\operatorname{Traza}(\dot{g})) &= g^{kl}g^{ij}(\partial_l\partial_i\dot{g}_{jk} - \partial_i\partial_j\dot{g}_{kl} - \partial_l\Gamma_{ij}^\alpha\dot{g}_{\alpha k} - \partial_l\Gamma_{ik}^\alpha\dot{g}_{\alpha j} \\
&\quad + \partial_l\Gamma_{lj}^\alpha\dot{g}_{\alpha k} + \partial_i\Gamma_{kj}^\alpha\dot{g}_{\alpha k}) \\
&= g^{kl}g^{ij}(\partial_l\partial_i\dot{g}_{jk} - \partial_i\partial_j\dot{g}_{kl} - \partial_l\Gamma_{ij}^\alpha\dot{g}_{\alpha k} + \partial_i\Gamma_{kj}^\alpha\dot{g}_{\alpha k}) \\
&= g^{kl}g^{ij}(\partial_l\partial_i\dot{g}_{jk} - \partial_i\partial_j\dot{g}_{kl} + R_{lj}^\alpha\dot{g}_{k\alpha}) \\
&= g^{kl}g^{ij}(\partial_l\partial_i\dot{g}_{jk} - \partial_i\partial_j\dot{g}_{kl}) - K \operatorname{Traza}(\dot{g}).
\end{aligned}$$

Teorema 6. Sea S una superficie regular compacta. Entonces el número

$$\int_s K dA,$$

es independiente de la métrica Riemanniana.

Demostración: De los Lemas 16 y 15, cada g_t familia uniparamétrica de métricas Riemannianas con K_t curvatura de Gauss y dA_t elemento de superficie, satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_S K_t dA_t &= \int_S (\dot{K}_t dA_t + K_t \dot{dA}_t) \\ &= \int_S \frac{1}{2} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\dot{g})) dA_t - \int_S \frac{1}{2} \Delta(\operatorname{Traza}(\dot{g})) dA_t \\ &\quad - \int_S \frac{1}{2} k_t \operatorname{Traza}(\dot{g}) dA_t + \int_S k_t \left(\frac{1}{2} \operatorname{Traza}(\dot{g})\right) dA_t \\ &= \frac{1}{2} \int_S (\operatorname{div}(\operatorname{div}(\dot{g})) - \Delta(\operatorname{Traza}(\dot{g}))) dA_t = 0, \end{aligned}$$

por el Corolario 1. Ahora, considerando la familia uniparamétrica definida en el Ejemplo 46, $g_t := (1-t)g_0 + tg_1$ entonces

$$\int_S K_1 dA_1 - \int_S K_0 dA_0 = \int_0^1 \frac{d}{dt} \int_S K_t dA_t dt = 0.$$

Corolario 2. Sean S_1 y S_2 superficies regulares compactas con métricas Riemannianas. Si S_1 y S_2 son difeomorfas, entonces

$$\int_{S_1} K dA = \int_{S_2} K dA.$$

Demostración: Sea g la métrica Riemanniana en S_2 y $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo entre S_1 y S_2 . Si la métrica en S_1 es ϕ^*g (el pullback de g), entonces la curvatura de Gauss satisface

$$k_{\phi^*g} = K_g \circ \phi$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{S_1} K_{\phi^*g} dA &= \int_{S_1} K_g \circ \phi dA \\ &= \int_{S_2} K_g dA. \end{aligned} \tag{45}$$

Si S_1 tiene cualquier métrica Riemanniana g_1 , entonces por el Teorema 6, se tiene

$$\int_{S_1} K_{\phi^*g} dA = \int_{S_1} K_{g_1} dA.$$

Luego, por la fórmula (45) se tiene

$$\int_{S_1} K_{\phi^*g} dA = \int_{S_2} K_g dA.$$

Entonces

$$\int_{S_1} K_{g_1} dA = \int_{S_2} K_g dA.$$

El número $\int_S K dA$ nos permite distinguir cuando dos superficies que no son difeomorfos, por ejemplo la esfera y el toro, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 48. La esfera y el toro no pueden ser difeomorfos, dado que $\int_{\text{toro}} K dA = 0$ mientras $\int_{S^2} K dA = 4\pi$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ACOSTA, Antonio F, GAMBOA, J M.PORTO, Ana M. *Notas de geometría diferencial de curvas y superficies*. 3 ed. Madrid: Sanz y Torres, 2005.
- [2] BÄR, Christian. *Elementary differential geometry*. Cambridge: University Press, 2010.
- [3] DO CARMO, Manfredo P. y SABINA DE LIS, José C. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. 2 ed. Madrid : Alianza Editorial, S. A. 1995.
- [4] DO CARMO, Manfredo P. y FLAHERTY Francis. *Riemannian Geometry*. 2 ed. Boston : Birkhäuser, 1992.
- [5] GARCÍA R, Eduardo. *Una introducción a la curvatura*. Universidad de Santiago de Compostela: 2002.
- [6] GROSSMAN, STANLEY I. *Álgebra lineal*. 6 ed. Mexico: MCGRAW-HILL INTER-AMERICANA, 2008.
- [7] LANG, S *Undergraduate Analysis*. 2 ed, New York, NY: Springer-Verlag, 1997.
- [8] LAWRENCE, Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3 ed. New York: Springer, 2013.
- [9] LEE, John. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*. New York: Springer, 1997.
- [10] MARTINEZ, Antonio. *La curvatura de Riemann a través de la historia*. España, 2007.
- [11] RYNNE, Bryan y YOUNGSON, Martin A. *Linear Functional Analysis*. 2 ed. London: Springer, 2007.

[12] TAPP, Kristopher. *Diferential Geometry of Curves and Surfaces*. USA: Springer International Publishing, 2016.