TRASLACIÓN Y PARALELISMO EN EL PLANO EUCLIDIANO

FABIÁN ENRIQUE MARTÍNEZ VALENCIA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2004

TRASLACIÓN Y PARALELISMO EN EL PLANO EUCLIDIANO

(Enmarcado en el proyecto "Incorporación de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Geometría")

FABIÁN ENRIQUE MARTÍNEZ VALENCIA

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad de Seminario presentado como requisito parcial para optar al titulo de Licenciado en Educación con Especialidad en Matemáticas

DIRECTORA
ESPC. ALBA LORENA SILVA SILVA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2004

I. Nota de aceptación

Directora **Especialista** Alba Lorena Silva Silva

Comité evaluador

Doctor Carlos A. Trujillo Solarte

Magister Angel Hernán Zúñiga

Especialista Elkin Cárdenas Díaz

Fecha de Sustentación: Popayán, Febrero de 2004

A mis padres:

Por su amor, ejemplo y ayuda incondicional

en mi vida.

A mis hermanos:

Por sus consejos y colaboración en todo momento.

A mi novia:

Por su cariño y comprensión.

A mis amigos:

Por su colaboración y apoyo.

A mis profesores:

Los conocimientos.

A mi universidad:

La gratitud.

A todos ellos ... Y sobre todo a DIOS

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de todo corazón a:

Especialista Alba Lorena Silva Silva, profesora del Departamento de Matemáticas y directora del Seminario de grado por su valiosa colaboración y orientación.

Especialista Yeny L. Rosero R. Secretaria Académica de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación y directora del seminario de grado, por sus valiosos aportes a la construcción de este trabajo.

Doctor Carlos Alberto Trujillo Solarte, profesor de Matemáticas y miembro del comité evaluador por sus valiosas sugerencias.

Magíster Ángel Hernán Zúñiga, profesor del departamento de Matemáticas y miembro del comité evaluador por sus valiosas sugerencias.

Especialista Elkin Cárdenas Díaz, profesor del departamento de Matemáticas y miembro del comité evaluador por sus valiosas sugerencias.

Especialista Yilton Riascos, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca, por su interés y oportunos concejos en el transcurso de mi carrera universitaria.

Edwin Rengifo, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca, por su constante apoyo y motivación.

Eduar Lasso Gómez, Jimmy Oswaldo Muñoz, Luz Edith Muñoz, Mirtha Dorelli Muñoz, Walter Muñoz Gómez, compañeros de este Seminario por su gran colaboración y apoyo para el desarrollo de este trabajo.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

En los años noventa han proliferado en el ámbito mundial las reformas curriculares y en todas ellas se evidencia un renovado interés por la geometría, su enseñanza y el rol de ésta en la enseñanza de las matemáticas. En los cursos superiores y en particular en la universidad , la geometría es generalmente enseñada con un enfoque axiomático y en forma excesivamente formal en cuanto a los requerimientos solicitados a los alumnos y los objetivos propuestos. Estos programas tienden a lograr que los estudiantes realicen demostraciones formales y que adquieran un pensamiento deductivo, dejando de lado actividades de diseño, exploración, modelación, conjeturación, definición y argumentación, acciones importantísimas para la inducción de descubrimientos.

Con este enfoque, los estudiantes tienen dificultades para aprender geometría, y esas dificultades pueden deberse a que los alumnos no tienen la madurez matemática para realizar las tareas y demostraciones que este tipo de trabajo requiere.

Numerosas investigaciones han explorado temáticas similares a las que se abordaran en este trabajo, entre las que destacamos las realizadas por Da Purificacao I. y Carneiro Soares (1999).

El presente trabajo ha sido desarrollado en el curso de geometría euclidiana del programa de Geotecnia de la Universidad del Cauca con los estudiantes matriculados para el segundo período académico de 2003.

El trabajo busca adecuar ambientes de aprendizaje que permitan contribuir con el desarrollo del pensamiento geométrico, especialmente en la temática de “traslación y paralelismo en el plano”. Esto, mediante la elaboración de actividades de aprendizaje (pruebas, notas de clase, talleres, exploración del software) a la luz de los planteamientos considerados en el modelo de Van Hiele. Estas actividades están orientadas a que el estudiante alcance un nivel de pensamiento geométrico mas elevado, a medida que se desarrolla la temática propuesta.

Al introducir los estudiantes en practicas pedagógicas innovadoras se forma al estudiante no sólo en su futura práctica profesional sino también en sus capacidades cognitivas.

1. JUSTIFICACIÓN

Es preciso plantear que, en el proceso de enseñanza de las matemáticas se debe tener en cuenta los aspectos formales, prácticos y experimentales de acuerdo con el contexto, de manera que, en algunos casos se inicie un proceso que fortalezca el desarrollo de la intuición en los estudiantes en la búsqueda del desarrollo del razonamiento lógico del conocimiento matemático. El conocimiento matemático construido por el estudiante está determinado por las condiciones individuales y culturales. La teoría y la actividad matemática son necesarias pero no suficientes para la apropiación de los conceptos matemáticos. Cada uno cobra importancia en algún momento, lo importante es identificarlo.

De la misma manera, es pertinente que los docentes en el área de matemáticas establezcan tiempos y espacios para reflexionar sobre su que hacer, sobre sus concepciones del proceso pedagógico, sobre las concepciones que tienen de las matemáticas, de su enseñanza y del aprendizaje; reconociendo en el estudiante un ser humano que tiene y puede desarrollar un sin número de competencias, para evitar en cuanto sea posible, la enseñanza de esta disciplina como la sola transmisión de conocimiento.

Dado que la geometría es un componente importante de la disciplina matemática, parece oportuno y necesario presentarla de manera que, efectivamente, contribuya al desarrollo del pensamiento matemático, utilizando para ello, un lenguaje matemático adecuado y un desarrollo lógico, apoyados por la intuición y el sentido común, sin dejar de ver la necesidad de alguna dosis de rigor, inherente a la ciencia.

Hoy en día, a pesar de la evolución de la Física y la matemática, sigue siendo importante el conocimiento de la geometría euclidiana, la que se enseña tradicionalmente en los niveles básicos. Ésta es intuitiva y a la vez abstracta. Cuando al geometría es considerada como una herramienta para el razonamiento, describiendo e interactuando con el espacio en el que vivimos, se transforma en la más intuitiva, concreta y real de las partes de la matemática. Así, se considera que su enseñanza debería iniciar en edades tempranas y evolucionar en forma permanente a lo largo de todo el currículo escolar.

La iniciativa de este trabajo, surge a partir del estudio del curso de Computación Educativa, de la vinculación al proyecto "Incorporación de tecnologías computacionales en el currículo de la geometría" formulado por las especialistas de la Universidad del Cauca Alba Lorena Silva y Yeny Leonor Rosero; y de la participación en el grupo estudio en geometría euclidiana conformado por docentes de Educación Media y Superior y estudiantes de la licenciatura en matemáticas asesoradas por el doctor Martín Acosta Gempler; espacios académicos donde fue posible reconocer, además de la importancia que tiene la Geometría como componente fundamental en los programas académicos de niveles de educación básica y media de Colombia, la necesidad de hacer énfasis en el estudio de procesos de enseñanza y aprendizaje de esta área, con el propósito de contribuir al mejoramiento de los mismos y cualificarme como futuro Licenciado en el área de matemáticas.

2. OBJETIVOS

2.1 Evidenciar los niveles del Modelo de Van Hiele en el proceso de aprendizaje del movimiento de traslación y el paralelismo**.**

2.2 Desarrollar en el estudiante la capacidad de crear conocimiento nuevo a partir de la visualización y razonamiento de elementos que le permitan inferir, analizar, interpretar**,** distinguir, reflexionar, hacer conjeturas, y sacar conclusiones.

2.3 Mejorar los niveles de argumentación de los estudiantes.

3. MARCO TEÓRICO

La incorporación de las herramientas computacionales en la enseñanza de las matemáticas no trae de manera automática cambios curriculares. Estos se producen después de haber realizado un proceso de concientización de la necesidad de cambio en tales estructuras y establecer la pertinencia del mismo. Este proceso es lento ya que cualquier necesidad de cambio produce tensiones. Esto quizá indique que un cambio central dentro de la educación consistirá en abandonar el objetivo tradicional de la fluidez algorítmica, y sustituirlo por el objetivo de la fluidez representacional. Esto es, que el estudiante pueda representar un problema en diversos sistemas de representación y sea capaz de interpretar los resultados del tratamiento que se dé a tales sistemas mediante el instrumento ejecutor que disponga y que el estudiante no se centre tan solo en encontrar la solución de un problema de un modo puramente mecánico y en un numero finito de pasos. Este instrumento ejecutor, influirá en la actividad cognitiva del estudiante entendido como mediador instrumental, debido a la presencia del instrumento se hace evidente un principio de mediación general, sistematizado en el trabajo de Wertsch (1993): "Toda acción cognitiva es un acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos".

Una de las herramientas computacionales es el software Cabri Géomètre, el cual es un programa que permite diagnosticar las habilidades iniciales, planificar un aprendizaje paso a paso, evaluar los procesos y tomar decisiones que reorienten la enseñanza de muchos temas geométricos y al contar con un “sub-menú histórico” , las acciones realizadas en las fases de construcciones geométricas pueden ser retomadas por los estudiantes, siendo posible así analizar el desarrollo de los procesos mentales. El análisis de situaciones métricas con Cabri permite llevar a cabo el siguiente proceso:

Diseñar $\rightarrow$ *Explorar* $\rightarrow$ *Modelizar* $\rightarrow$ *Conjeturar* $\rightarrow$ *Definir* $\rightarrow$ *Argumentar* $\rightarrow$ *Demostrar,* para inducir descubrimientos.

Por otra parte, Cabri es una herramienta matemática que está muy difundida en instituciones de educación Media en muchos países tales como: Francia, España , Estados Unidos, Brasil y Argentina, entre otros.

En la necesidad de mejorar los resultados del aprendizaje en los estudiantes, hemos optado por desarrollar situaciones didácticas mediante el modelo de Van Hiele, por cuanto éste presenta la característica de explicar al mismo tiempo cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo es posible potenciar la calidad de éste.

Pierre M. y Dina Van Hiele exponen por primera vez, en sus tesis doctórales leídas en 1957, un modelo que explica al mismo tiempo cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo es posible ayudar a los estudiantes a mejorar su razonamiento. Este modelo estratifica el conocimiento en cinco niveles y dentro de cada nivel en una serie de fases que permiten analizar el aprendizaje de la geometría.

3.1 NIVELES DE ENTENDIMIENTO

A los cinco niveles de entendimiento se les denomina de la siguiente manera: “visualización”, “análisis”, “deducción informal”, “deducción formal” y “rigor”, que describen características del proceso de pensamiento. Auxiliado por experiencias instruccionales adecuadas, en él se afirma que el aprendiz se mueve secuencialmente desde el nivel inicial o básico (visualización), donde la actividad es simplemente observar las propiedades de las figuras que no son reconocidas explícitamente a través de la secuencia anteriormente planeada; hasta llegar al más alto (rigor), el cual se relaciona con los aspectos abstractos formales de la deducción. Algunos estudiantes son expuestos al último nivel o tienden a él. . A continuación se presenta una sinopsis de los niveles.

3.1.1 Nivel 0 (nivel básico): Visualización o reconocimiento. En esta primera etapa, los estudiantes están conscientes del espacio sólo como algo que existe alrededor de ellos. Los conceptos geométricos se ven como entidades totales como algo provisto de componentes o atributos. Las figuras geométricas, son reconocidas por su forma como un todo, esto es, por su apariencia física y no por sus partes o propiedades. Una persona que funciona a este nivel puede aprender un vocabulario geométrico, identificar formas especificadas y, dada una figura, reproducirla.

En este nivel el estudiante:

- Percibe los objetos en su totalidad y como unidades

- Describe los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica con base en semejanzas y diferencias físicas globales entre ellos.
- No reconoce explícitamente las componentes y propiedades de los objetos.

3.1.2 Nivel 1: Análisis. En nivel 1 comienza un análisis de los conceptos geométricos. Por ejemplo, a través de la observación y la experimentación los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras. Estas propiedades que surgen se usan para conceptualizar clases de formas. Es notorio que las figuras tienen partes y son reconocidas mediante ellas. Las relaciones entre propiedades, aún no pueden ser explicadas por los estudiantes en este nivel, en el cual todavía no se ven las interrelaciones entre las figuras, ni se entienden las definiciones.

En este nivel el estudiante:

- Percibe los objetos como formados por partes dotadas de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas.
- Puede describir los objetos de manera informal, mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas.
- Deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.

3.1.3 Nivel 2: Clasificación / deducción informal. Aquí, los estudiantes pueden establecer las interrelaciones en las figuras (por ejemplo: en un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos sean iguales) y entre figuras (un cuadrado es un rectángulo por que tienen todas sus propiedades).

Así, se pueden deducir propiedades de una figura y reconocer clases de figuras. Se entiende la inclusión de clases. Las definiciones adquieren significado. Sin embargo, el estudiante en este nivel, no comprende el significado de la deducción como un todo, ni el rol de los axiomas. Algunos resultados obtenidos de manera empírica se usan a menudo conjuntamente con técnicas de deducción. Se pueden seguir pruebas formales; pero los estudiantes no ven como el orden lógico podía ser alterado ni perciben tampoco cómo articular una demostración a partir de premisas diferentes o no familiares.

En este nivel el estudiante:

- Realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades con base en propiedades o relaciones ya conocidas y por medio del razonamiento informal.
- Describe las figuras de manera formal, es decir que comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
- Comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no comprende el encadenamiento de esos pasos ni la estructura de una demostración.
- No es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por este motivo, tampoco comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.

3.1.4 Nivel 3: Deducción formal. En este nivel se entiende el significado de la deducción como una manera de establecer una teoría geométrica con un sistema axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones. Una persona puede construir, y no sólo memorizar demostraciones, percibir la posibilidad del desarrollo de una prueba de varias maneras, entender la interacción de condiciones necesarias y suficientes y distingue entre una afirmación y su recíproca. En este nivel el estudiante:

- Es capaz de realizar razonamientos lógicos formales.
- Comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.
- Acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etc.).

3.1.5 Nivel 4: Rigor. En esta etapa el aprendiz puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos. Pueden estudiarse geometrías no euclidianas y compararse diferentes sistemas. La geometría se capta en forma abstracta.

Este es el nivel final que se desarrolla en los trabajos originales y ha recibido poca atención por parte de los investigadores. Como la mayoría de los cursos de geometría del nivel medio son planeados en el tercero, no es sorprendente que la mayoría de los investigadores estén también concentrados en los niveles inferiores. Quizás, como el modelo Van Hiele se ha extendido a otras áreas (esta siendo aplicado a la economía y la química en Holanda), el último nivel adquirirá posteriormente mayor notoriedad.

En este nivel el estudiante:

- Es capaz de analizar con alto grado de rigor los sistemas deductivos y utilizar los diferentes sistemas axiomáticos.
- Puede manejar, analizar y comparar diferentes Geometrías.

3.2 PROPIEDADES DEL MODELO

La descripción anterior de los niveles de razonamiento pone de manifiesto las propiedades del Modelo, cuya importancia radica en que muestra las líneas básicas a seguir si se quiere aplicar este modelo en la enseñanza de la Geometría.

Una breve descripción de estas propiedades.

3.2.1 Recursividad*:* Los elementos implícitos en el razonamiento del Nivel N se hacen explícitos en el razonamiento del nivel N+1.

3.2.2 Secuencialidad: No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles, es decir que no se puede alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado, de forma ordenada, todos los niveles inferiores. Pasar o no de un nivel a otro depende mas del contenido y los métodos de instrucción recibidos que de la edad. Ningún método lleva a un estudiante a brincar un nivel, algunos incrementan los progresos, mientras que otros los retardan o incluso previenen un movimiento entre niveles.

3.2.3 Especificidad del lenguaje: Cada nivel lleva asociado sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones para comunicarse y un significado específico del lenguaje matemático, de forma que dos personas que utilicen lenguajes de diferentes niveles no podrán entenderse. Así una relación que es “correcta” en un nivel puede ser modificada en otro.

3.2.4 Continuidad: La experiencia de quienes han utilizado este modelo muestra que el tránsito entre los niveles de Van Hiele se produce de forma continua y pausada, con una duración variable que puede llevar años en el caso de los niveles 3 y 4.

3.2.5 Falta de concordancia*:* Si un estudiante está en un nivel y la instrucción que recibe en otro, el aprendizaje y el progreso deseado puede o no ocurrir.

3.2.6 Localidad: Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la Geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento.

Mientras que los niveles de razonamiento nos orientan acerca de cómo secuenciar y organizar el currículo geométrico de una forma global, el objetivo de las fases de aprendizaje es favorecer el desplazamiento del estudiante de un nivel al inmediatamente superior mediante la organización de las actividades de enseñanza y aprendizaje, lo que ha permitido que el modelo tuviera una influencia real en la elaboración de currículos de geometría en distintos países como es el caso de la Unión Soviética, E.E.U.U., Países Bajos, etc.

3.3 FASES APRENDIZAJE

Las actividades de enseñanza, se organizarán a través de una secuencia cíclica de cinco *fases de aprendizaje*, se hará seguimiento a los estudiantes con el fin de progresar desde un nivel de pensamiento al siguiente. Aunque las fases son las mismas para todos los niveles, los contenidos, el lenguaje empleado y la forma de resolver los problemas son diferentes para cada nivel; la metodología de trabajo se mantiene, pero cambia su contenido concreto.

A continuación exponemos las *fases de aprendizaje*, propuestas por el Modelo de Van Hiele:

3.3.1 Información. Al empezar a desarrollar un nuevo tema, el docente informará a los estudiantes acerca del campo en que se va trabajar y cuáles son los problemas que se van a tratar de resolver. Esta fase permite que el profesor se entere de los conocimientos previos que poseen, sus estudiantes, sobre el tema y en caso que tengan algunos conocimientos organizados, cuál es su calidad y en qué nivel de razonamiento son capaces de desenvolverse. La información obtenida sirve al profesor de punto de partida para afianzar conceptos y empezar a modificar los errores detectados y a los estudiantes en que dirección dará el estudio posterior del mismo.

3.3.2 Orientación dirigida. En esta fase los estudiantes exploran el campo temático por medio de las actividades suministradas por su profesor. Estas actividades van dirigidas al descubrimiento y aprendizaje de los conceptos y propiedades fundamentales del tema que se está estudiando, tienen objetivos y directrices claras y se presentan al estudiante de forma progresiva. Esas actividades podrían revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel.

3.3.3 Explicitación. Esta fase es fundamentalmente de diálogo entre los estudiantes, con intervenciones del profesor cuando sea necesario. En esta fase se busca que los estudiantes reflexionen "en voz alta" sobre le trabajo que están haciendo, sus soluciones, dificultades , métodos, etc. Este debate entre compañeros enriquece el conocimiento de cada estudiante, pues les obliga a organizar sus ideas y a expresarlas con claridad , además pone de manifiesto los métodos y resultados incorrectos, permitiendo al docente la oportuna corrección.

Un objetivo muy importante de esta fase es lograr que las experiencias adquiridas, por los estudiantes, se unan a los símbolos lingüísticos para que aprendan a expresarse con precisión (dentro de las características del nivel de razonamiento en que están) en el transcurso de las discusiones que tienen lugar en el aula.

Así en esta tercera fase se forma parcialmente la nueva red de relaciones entre los conceptos propios del área de estudio.

3.3.4 Orientación libre. El profesor asignara a sus estudiantes tareas, que puedan desarrollarse de diversas formas o que conduzcan a diferentes soluciones, donde el estudiante pueda aplicar los conocimientos adquiridos, afianzar los que aún no estén firmes y completar sus propios conocimientos.

Las actividades y problemas propuestas a los estudiantes serán menos dirigidas que las planteadas en la segunda fase, pues en ese momento se buscaba el aprendizaje de unos conocimientos concretos, mientras que en la fase de orientación libre se persigue que el estudiante profundice en dichos conocimientos, que relacione unos con otros y que descubran y aprendan algunas propiedades que por su complejidad no pueden ser estudiadas antes.

3.3.5 Integración. Con el trabajo realizado en las fases anteriores el estudiante ha adquirido nuevos conocimientos y habilidades de razonamiento, pero todavía le falta adquirir una visión general de los métodos que tiene a su disposición. Por ello en esta fase, el profesor trata de resumir en un todo, el campo que ha explorado con sus estudiantes para que ellos integren lo que acaban de aprender en una red de conocimientos relacionados con el campo de estudio anterior. El docente puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas compresiones no le aporten ninguna novedad al estudiante. Solamente deben ser una acumulación de las cosas que ya conoce.

Las fases de aprendizaje tienen, por los objetivos de cada una, una secuencia lógica que no se puede alterar. La única excepción es la tercera fase, de explicitación; ésta no tiene un período de tiempo entre las fases segunda y cuarta, sino que hay que entenderla como una dinámica continúa, presente en todas las clases, de dialogo y de reflexión común después de cualquier tipo de actividad, sea de la fase que sea. De esta manera, la fase de explicitación estaría “sobrevolando” las otras fases y entremezclada con cada una de ellas.

Las fases no tienen una duración determinada, puede que una fase de un determinado nivel no requiera actividades específicas, pues el profesor ya sabe qué conocimientos y nivel de razonamiento tienen sus estudiantes y puede ser suficiente hacer algunos comentarios o preguntas para re-tomar el tema y comenzar con las actividades de la siguiente fase.

Al finalizar la quinta fase, los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de pensamiento que reemplazará al viejo y estarán listos para repetir las fases de aprendizaje en el siguiente nivel[1].

3.4 CAPACIDAD DE CREAR CONOCIMIENTO NUEVO

En el desarrollo de este trabajo se entenderá la capacidad de crear conocimiento nuevo como la disposición de los estudiantes para comprender bien los elementos que se le quieren enseñarr, para que a partir de la visualización y el razonamiento de los mismos éste pueda inferir, analizar, interpretar, distinguir, reflexionar, hacer conjeturas y sacar conclusiones. Es importante aclarar que cuando se hacer referencia al conocimiento nuevo adquirido por el estudiante, se habla de nuevo, pero para él.

3.5 MEJORAMIENTO DE LOS NIVELES DE ARGUMENTACIÓN

Se entiende por un mejoramiento en los niveles de argumentación de los estudiantes como la evolución en cuanto al uso y el tratamiento dado por los mismos, al lenguaje matemático. El estudiante, a medida que lleva a cabo el proceso, cambia su manera de

[1] ROSERO, R. Yeny. SILVA S. Alba L. Proyecto de Investigación Incorporación de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Geometría. VRI 1131. Universidad del Cauca.

justificar las respuestas en cada una de las actividades propuestas y maneja elementos que permiten discernir la utilización de un lenguaje matemático cada vez mas elaborado.

4. METODOLOGÍA

El desarrollo de la propuesta de seminario de grado se llevó a cabo con el grupo de estudiantes pertenecientes al programa académico de Geotecnia inscritos para el segundo semestre de 2003, en la asignatura de geometría euclidiana.

En el diseño y realización de cada una de las actividades de enseñanza y aprendizaje propuestas a los estudiantes para ser desarrolladas en el aula de clase, se tuvieron en cuenta las propiedades y las fases de aprendizaje formuladas por el modelo de Van Hiele, de tal manera que a través de ellas, éstos se hagan conscientes del uso de los elementos implícitos en su razonamiento geométrico; para que puedan utilizarlo de manera correcta, garantizando así su acceso a un nivel de razonamiento superior al que se encuentra. Todas las actividades tratan de evitar un aprendizaje mecánico de los contenidos y se presentan con un lenguaje “adecuado” al nivel en que se encuentran los estudiantes para que puedan comprenderlas.

Se espera que los estudiantes, a medida que se lleva a cabo el proceso, mejoren no solo su capacidad argumentativa sino su capacidad de razonamiento geométrico en el tema de traslación y paralelismo en el plano euclidiano. De igual manera las actividades de aprendizaje elaboradas y la corta exploración del software, están encaminadas a desarrollar en el estudiante la capacidad de crear conocimiento nuevo a partir de la visualización y razonamiento de elementos.

La muestra analizada consta de nueve (9) estudiantes, escogidos al azar; de los demás se tuvo en cuenta los elementos mas representativos en el desarrollo de cada una de las actividades propuestas.

Para alcanzar los objetivos planteados en este seminario de grado, el trabajo se desarrolló en cuatro etapas:

4.1 ETAPA DIAGNÓSTICA

En esta etapa se diseñó y aplicó una prueba diagnóstica sobre variados temas de geometría euclidiana, que se presupone hacen parte del currículo de Educación Básica, cuyo objetivo fue establecer un nivel de conocimiento alcanzado por los estudiantes en el área de geometría en su formación básica y media y de esta manera definir criterios para el estudio de la geometría a partir de los resultados obtenidos. Los resultados de la prueba diagnóstica permitieron hacer un análisis sobre las nociones geométricas que los estudiantes conocían antes de iniciar el curso. Esta prueba se aplicó una sola vez y contenía algunas situaciones que se relacionaban con el tema de traslación y paralelismo. (Ver Anexo B).

4.2 ETAPA DE PREPARACIÓN

(Diseño y aplicación de situaciones de aprendizaje)

En este período se diseñaron y aplicaron siguiendo los planteamientos del modelo de Van Hiele : Notas de clase y Pruebas consideradas de nivel 0, 1 y 2 a la luz del modelo de Van Hiele.

4.2.1 Notas de clase. Estas contienen el desarrollo del tema de “traslación y paralelismo en el plano”, además de una serie de demostraciones, axiomas, ejercicios propuestos, observaciones, lecturas recomendadas, talleres entre otros, con el fin de que el estudiante mejore su aprendizaje mediante el estudio de las mismas. (Ver Anexo A).

4.2.2 Prueba considerada de nivel 0. Con la ayuda de una sopa de letras y la construcción de un barco en papel silueta se pretendía indagar a los estudiantes sobre los conceptos de dirección y sentido y la relación de paralelismo. Esto debido a la importancia que tienen para el estudio del movimiento de traslación. (Ver Anexo C).

4.2.3 Prueba considerada de nivel 1. Su objetivo era determinar si los estudiantes recurren a las herramientas conceptuales estudiadas en clase para resolver las situaciones planteadas. En esta prueba se exploran situaciones tales como: señalar segmentos paralelos de dos figuras dadas; utilizar un movimiento que permita cambiar una figura de posición; trasladar una figura dado un vector; trazar una recta paralela a una dada por un punto exterior a la misma; establecer relaciones de paralelismo y congruencia. (Ver Anexo D).

4.2.4 Prueba considerada de nivel 2. Esta prueba se hizo a modo de evaluación y tenia como objetivo determinar el nivel de pensamiento geométrico alcanzado por el estudiante al haber finalizado el estudio del tema de traslación y paralelismo en el plano. Algunas de las situaciones propuestas en la prueba son: utilización de la propiedad de paralela media; construcción de un paralelogramo, un rombo y un cuadrilátero utilizando correctamente el movimiento de traslación; justificación de proposiciones dadas según su valor de verdad; demostrar una igualdad utilizando propiedades de los cuadriláteros. (Ver Anexo E).

El desarrollo de las pruebas y la presentación del material escrito pretenden contribuir en el proceso de aprendizaje del estudiante.

4.3 ETAPA DE ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Se analizaron los registros obtenidos en el proceso de acompañamiento y seguimiento a los estudiantes para determinar que nivel de razonamiento geométrico han alcanzado, según el Modelo de Van Hiele. Para este análisis, no sólo se trabajo sobre el desarrollo de cada prueba, sino también sobre los registros tomados en clase. Para la prueba diagnóstica se realizó un análisis general de cada una de las situaciones planteadas teniendo especial atención por las preguntas 2,3 y 6 que se refieren al tema de "Traslación y paralelismo en el plano". Para el análisis de cada una de las pruebas de nivel 0, 1 y 2 se establecieron sus respectivas categorías.

4.3.1 Categorías de análisis prueba de nivel O. *Reconocimiento, percepciones, representaciones.*

- *Reconocimiento* : Recepción e interpretación de la información por parte de los estudiantes sobre cada pregunta de la prueba.
- *Percepciones*: Conocimientos o ideas presentadas por los estudiantes cuando se les aborda sobre los conceptos de dirección y sentido en el desarrollo de la prueba.
- *Representaciones*: Elementos de representación a los que recurre el estudiante para expresar sus ideas.

4.3.2 Categorías de análisis prueba de nivel 1. *Relaciones geométricas, Manejo y significado de definiciones, Herramientas.*

- *Relaciones geométricas:* Capacidad de identificar en las actividades propuestas las relaciones de congruencia y paralelismo.
- *Manejo y significado de definiciones*: Capacidad del estudiante para justificar una determinada solución, ya sea mediante demostraciones gráficas o la utilización de definiciones.
- *Herramientas*: Elementos que utiliza el estudiante para trabajar la prueba.

4.3.3 Categorías de análisis prueba de nivel 2: *Interpretación, Argumentación.*

- *Interpretación*: Elementos teóricos utilizados por los estudiantes para dar solución a las preguntas formuladas en esta guía.
- *Argumentación*: Comprensión y explicación por parte del estudiante de un determinado tema que se le ha dado a conocer.

4.3.4 Capacidad de crear conocimiento nuevo. Durante el proceso de seguimiento a los estudiantes , específicamente en el análisis de los resultados de cada una de las actividades de aprendizaje aplicadas se determinarán ciertos elementos que dan cuenta de cómo se está desarrollando la capacidad de crear conocimiento nuevo a partir de la visualización y el razonamiento de elementos.

El contenido de las notas de clase y de cada una de las pruebas, permiten crear espacios con condiciones mínimas y necesarias para que el estudiante a partir de herramientas conceptuales dadas en el aula de clase y, sobretodo de su trabajo individual, pueda desarrollar la capacidad de crear conocimiento nuevo.

4.3.5 Mejoramiento de los niveles de argumentación. Con la ayuda de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, se puede determinar que los estudiantes tienen serias deficiencias para justificar correcta y coherentemente sus respuestas, a las diferentes situaciones planteadas en la prueba. Por tal motivo, se pretende que el estudiante mejore sus niveles de argumentación mediante actividades tales como: el desarrollo de los ejercicios propuestos en las notas de clase, el uso y tratamiento adecuado del lenguaje matemático en el aula de clase y la solución de ejercicios que permitan al estudiante establecer argumentos en un lenguaje adecuado.

En el análisis de cada una de las actividades de aprendizaje propuestas, se establecerá como han mejorado los niveles de argumentación de los estudiantes basados en la comparación de cada una de las pruebas. Es decir, conocidos los resultados obtenidos en las diferentes pruebas, se inferirá el mejoramiento de los niveles de argumentación, teniendo en cuenta la comparación entre la prueba diagnóstica y la prueba de nivel 0, la prueba de nivel 0 y la prueba de nivel 1 y la prueba de nivel 1 y la de nivel 2.

4.4 ELABORACIÓN DEL INFORME FINAL

El documento escrito que se va a presentar contiene:

- El desarrollo del diagnóstico realizado.

- La presentación de las diferentes pruebas diseñadas.
- La aplicación y el análisis de cada una de las pruebas.
- Evaluación del proceso a la luz del modelo de Van Hiele.
- El análisis del proceso de seguimiento realizado a los estudiantes.
- Los elementos mas importantes que se presentaron como obstáculos a lo largo del proceso.
- Posibles errores que se cometieron durante el proceso.

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS EN LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

5.1 DISEÑO Y APLICACIÓN DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

La presente prueba ha sido diseñada sobre aspectos generales de geometría, con ellos se busca hacer un diagnóstico sobre los conocimientos que los estudiantes han alcanzado en su formación básica y media en esta área. Los resultados son la pauta para el desarrollo del curso de geometría de este programa.

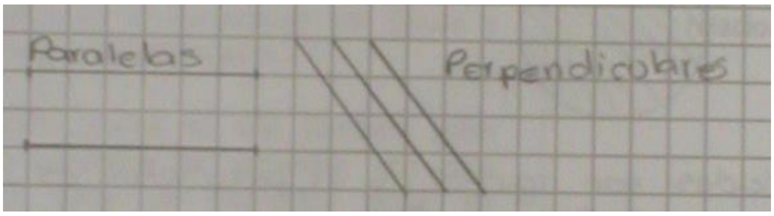
Está prueba se aplicó únicamente, antes de iniciar el contenido del curso de geometría euclidiana. Fue desarrollada por todos los estudiantes y se caracterizó por el mal manejo de la notación matemática.

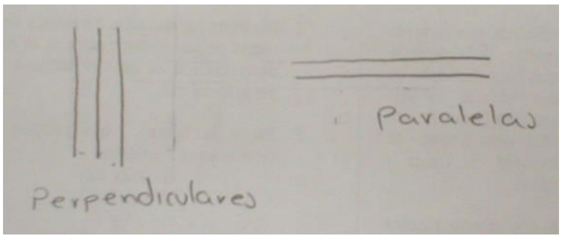
5.2 RESULTADOS OBTENIDOS

Los estudiantes en su gran mayoría al desarrollar la prueba, han tenido dificultades en cuanto al manejo de los conceptos, la argumentación de los procesos a seguir y la utilización de diversas representaciones. Sin embargo se harán explícitos aquellos resultados que hacen referencia al tema de traslación y paralelismo en el plano. Es decir, se darán a conocer los resultados obtenidos en las preguntas 2,3 y 6 (Ver Anexo B).

➢ En cuanto a la pregunta número dos (2) (Ver Anexo B)., diremos que la mayoría de los estudiantes tuvo dificultad para representar rectas paralelas y rectas perpendiculares y asocian los conceptos de horizontalidad y verticalidad, con las relaciones de paralelismo y perpendicularidad respectivamente. Esto se puede ver en las siguientes gráficas:

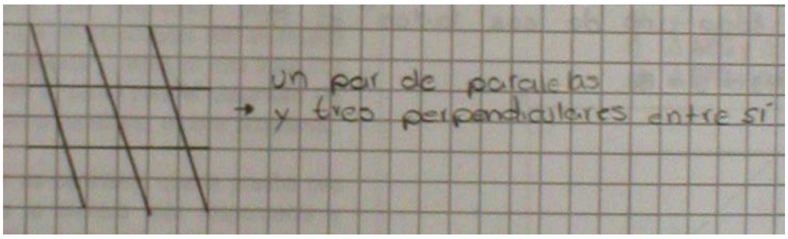
Figura 1. Evidencias del punto 2 sobre rectas paralelas y perpendiculares.

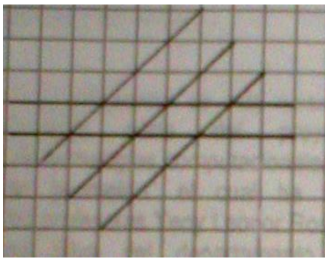




Algunos estudiantes entienden la pregunta de otra manera y simultáneamente hacen la representación de un par de rectas paralelas y tres perpendiculares, en un mismo dibujo, lo cual implica que pueden haber pasado por alto la exclusión de la conjunción “y”. Observemos como lo hicieron:

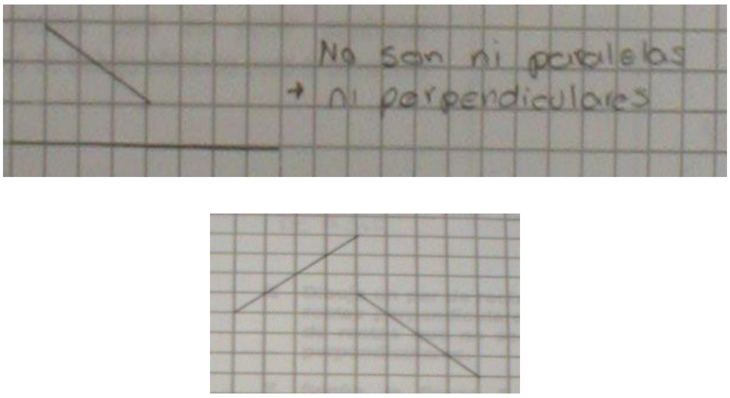
Figura 2. Evidencias del punto 2 sobre dos rectas paralelas y tres perpendiculares.





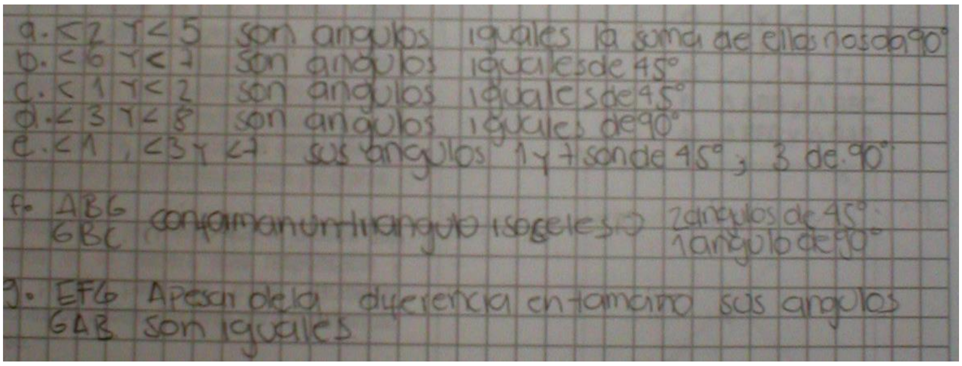
Cuando se pide la representación de dos rectas que no sean ni paralelas ni perpendiculares, el estudiante lo hace correctamente, a pesar de que no tiene claras estas relaciones. Esto se puede ver en las siguientes gráficas:

Figura 3. Evidencias del punto 2 sobre rectas que no son paralelas ni perpendiculares.

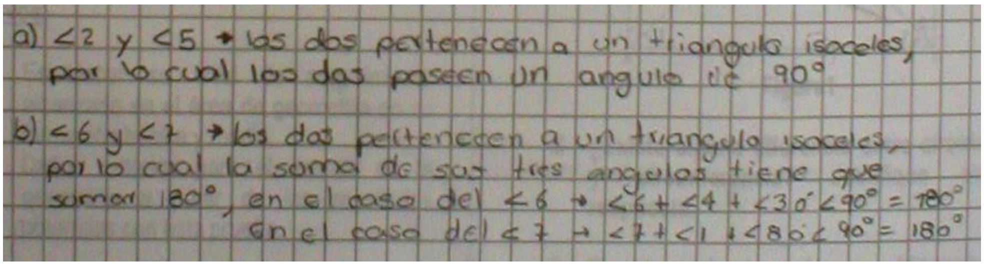


➢ En cuanto a la pregunta número tres (3) (Ver Anexo B), la mayoría de los estudiantes establecieron la relación de congruencia entre ángulos y triángulos a partir de ciertos valores numéricos. Dichos valores han sido dados por el estudiante sin fundamento, ya que la situación planteada en la prueba no establece ningún tipo de condiciones iniciales para abordar el problema. Se pueden observar asignaciones de valores como 45 y 90 grados para algunos ángulos de la figura. Veamos como lo hicieron:

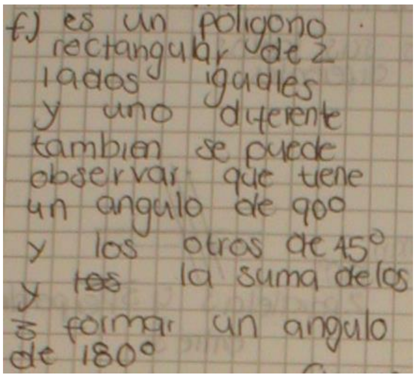
Figura 4. Evidencias del punto 3 sobre la relación entre ángulos y figuras.



a. <2 y <5 son angulos iguales la suma de ellos nos da 90°
b. <6 y <7 son angulos iguales de 45°
c. <1 y <2 son angulos iguales de 45°
d. <3 y <8 son angulos iguales de 90°
e. <1 , <3 y <7 sus angulos 1 y 7 son de 45° ; 3 de 90°
f. ABG GBC conforman un triangulo isogeles ⇒ 2 angulos de 45° 1 angulo de 90°
g. EFG GAB Apesar de la diferencia en tamaño sus angulos son iguales



a) <2 y <5 → los dos pertenecen a un triangulo isoceles, por lo cual los dos poseen un angulo de 90°
b) <6 y <7 → los dos pertenecen a un triangulo isoceles, por lo cual la suma de sus tres angulos tiene que sumar 180°, en el caso del <6 → <6 + <4 + <3 o <90° = 180°
en el caso del <7 → <7 + <1 + <8 o <90° = 180°

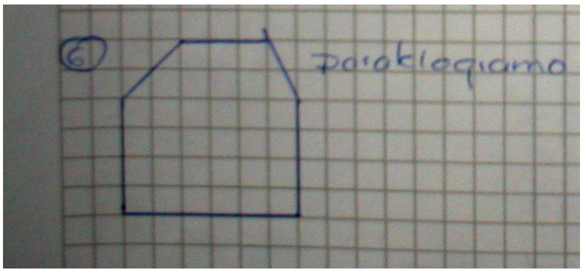


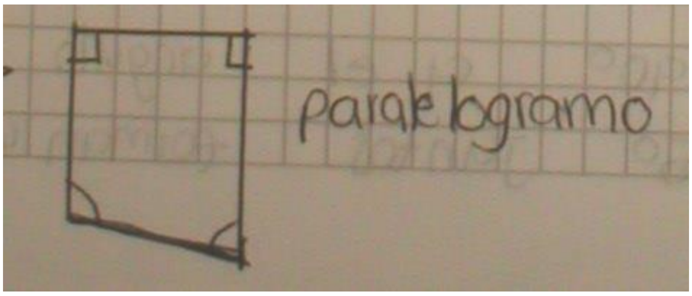
f) es un poligono rectangular de 2 lados iguales y uno diferente tambien se puede observar que tiene un angulo de 90° y los otros de 45° y ~~tes~~ la suma de los y = forman un angulo de 180°

También recurren a la propiedad de los ángulos entre paralelas para establecer la congruencia de ángulos, procedimiento llevado a cabo mediante el uso de los valores establecidos por ellos mismos para dar solución a la situación.

➢ En cuanto a la pregunta número seis (6) (Ver Anexo B).,, la mayoría de los estudiantes no realizaron la representación del paralelogramo. Incluso algunos no dibujaron un paralelogramo sino un polígono o un cuadrilátero y le llamaron paralelogramo. Algunos representaciones son:

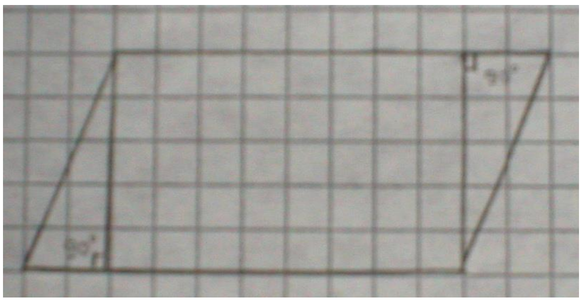
Figura 5. Evidencias del punto 6 sobre la representación de un paralelogramo.





La representación mas común de un paralelogramo, dada por los estudiantes, es la del romboide. Pero este objeto geométrico no cumple con las características pedidas. Aunque el rectángulo formado por las prolongaciones si cumple con las especificaciones, el estudiante no hace explicito si señala el romboide o el rectángulo como la posible solución. Ver figura 12.

Figura 6. Evidencias del punto 6 sobre la representación de un paralelogramo.



5.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Es notoria la dificultad que tienen los estudiantes para expresar sus ideas y planteamientos. No utilizan argumentos teóricos válidos para dar solución a situaciones propuestas en la prueba. No diferencian entre igualdad y congruencia, dos relaciones completamente diferentes. No existe coherencia entre la representación y el objeto geométrico.

De acuerdo a los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba, se pueden determinar ciertos factores que han influido, para que su desempeño en la prueba no haya sido el mejor. Algunos de ellos, dados por los mismos estudiantes, son:

- No les gusta la geometría.
- A lo largo de la secundaría, la asignatura de geometría fue a la que menos importancia se le presto.
- El modelo tradicional y la orientación recibida en esta asignatura no motivaron ni despertaron interés alguno por la materia.
- Esta asignatura no hacia parte del currículo académico de la institución.
- No le dieron la importancia necesaria a la materia.
- No recuerdan los elementos mas representativos que hacen parte de la materia, puesto que cuando vieron la asignatura, no la estudiaron como debía ser.

Sin embargo, es importante recordar que no se pretendía identificar estos factores, sino apoyarse en los resultados obtenidos en la prueba, para implementar un método de enseñanza acompañado de actividades de aprendizaje que permitan que el estudiante alcance niveles de razonamiento geométrico superiores al que posee.

Inmediatamente finalizada la aplicación de la prueba, se desarrollan las actividades correspondientes para los temas relacionados con la parte axiomática y el movimiento de simetría central y axial. Posteriormente, se desarrolla la primera actividad correspondiente al tema de "traslación y paralelismo en el plano", de acuerdo a las fases planteadas por el modelo de Van Hiele.

6. PRIMERA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

"PRUEBA DE NIVEL 0"

6.1 FASES DE APRENDIZAJE

6.1.1 Fase 1. Información. En esta parte, retomando los temas de simetría central y axial se presentan generalidades sobre el movimiento de traslación en el plano; en él se deben tener en cuenta los objetos geométricos que hasta este momento los estudiantes han familiarizado (punto, segmento, recta, etc) junto con sus relaciones, en especial la de paralelismo. Además aparecen nuevos objetos geométricos y relaciones que se pueden establecer entre estos; es el caso del vector, un objeto geométrico en el cual es pertinente diferenciar la dirección y el sentido, términos que en el lenguaje común son considerados sinónimos.

6.1.2 Fase 2. Orientación dirigida. Se presenta al estudiante la prueba considerada de nivel O según el modelo de Van Hiele. El estudiante al leer la prueba, se encuentra frente a una situación de aprendizaje lúdica, con un lenguaje sencillo y un objetivo claro. La aplicación de esta prueba permitió que el estudiante expusiera abiertamente sus ideas y entrará en conflicto con los conceptos que él tenía, explorara el nuevo campo temático a tratar y que además pueda ir afianzando sus conceptos. (ver anexo C).

6.1.3 Fase 3. Explicitación. En el desarrollo de la prueba, luego de un trabajo individual, los estudiantes comienzan a intercambiar sus puntos de vista bajo el interrogante ¿Qué es dirección y qué es sentido?. Dicha discusión., únicamente entre los estudiantes, genera que unos afiancen sus ideas y otros cambien las suyas. Es importante resaltar que los estudiantes confrontan sus opiniones en busca de aclarar sus conocimientos. Infortunadamente no logran organizar sus ideas y se genera confusión al momento de dar una definición sobre dichos términos.

6.1.4 Fase 4. Orientación Libre. El estudiante debe acudir a los elementos que se le han dado a conocer en temas anteriores para tratar de resolver adecuadamente los interrogantes planteados en la prueba. Adicionalmente debe expresar los conceptos según la percepción que tenga de estos en la realidad.

6.1.5 Fase 5. Integración. Finalizado el desarrollo de la prueba por parte de los estudiantes, y teniendo en cuenta las observaciones y los registros tomados en clase, se notó que no hay una claridad conceptual en cuanto a los términos dirección y sentido. Se realizó entonces, la construcción de los conceptos de dirección y sentido a partir de las definiciones e ideas intuitivas presentadas por los estudiantes. Además se aprovechó la oportunidad para precisar algunos elementos importantes del concepto de vector.

6.2 RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PRUEBA DE NIVEL 0

De acuerdo a las categorías planteadas para el análisis de está prueba, los resultados son:

6.2.1 Reconocimiento. Todos los estudiantes desarrollaron la sopa de letras correctamente; realizaron la clasificación de las palabras según lo planteado. En los diferentes grupos en los que asociaron las palabras, no existe claridad en cuanto al criterio de organización; pues no hacen explicito si esto lo hicieron teniendo en cuenta la dirección o el sentido. (ver anexo C).

Figura 7. Evidencias del punto I sobre el desarrollo de la sopa de letras.

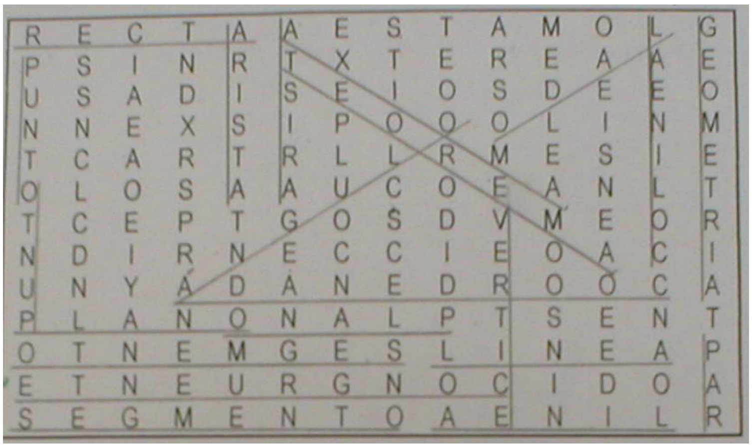
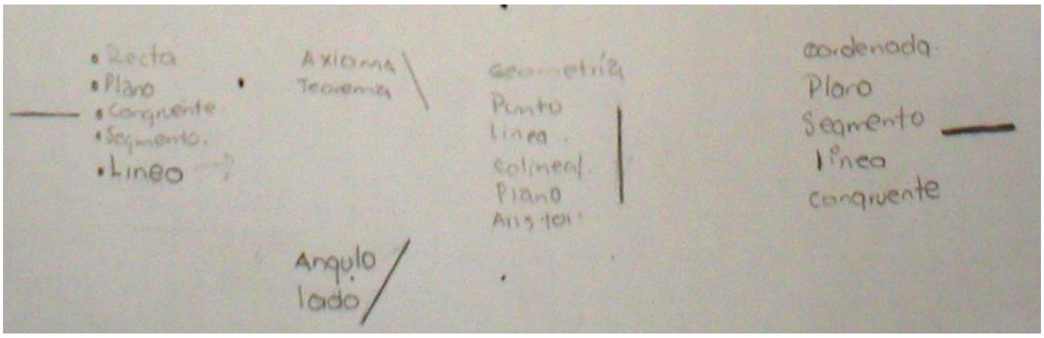
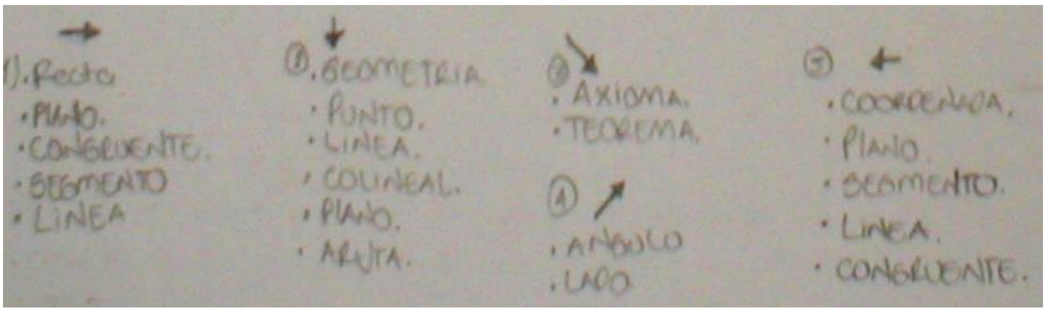


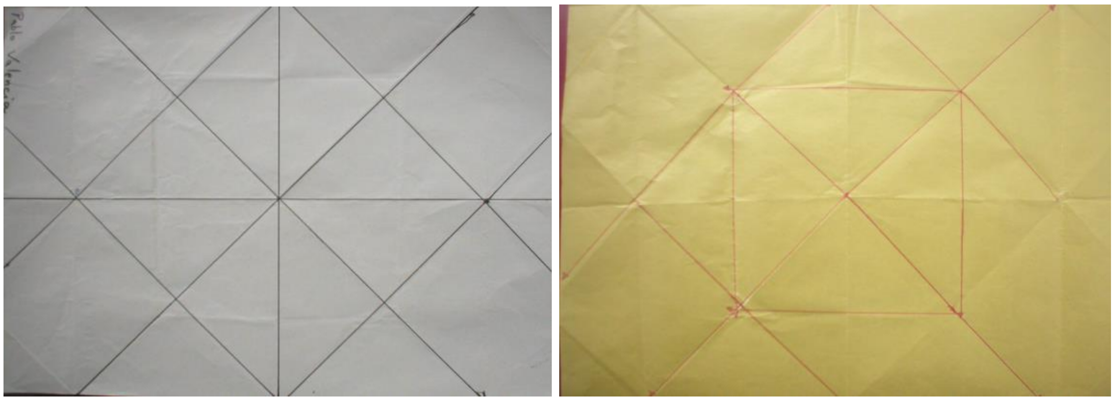
Figura 8. Evidencias del punto I.1 sobre dirección y sentido.





En cuanto a la identificación, sobre el plegado del papel, de las semirrectas paralelas; la mayoría de los estudiantes las señalaron, aunque en algunos casos dibujaron rectas o segmentos en lugar de semirrectas. (ver anexo C). Por ejemplo,

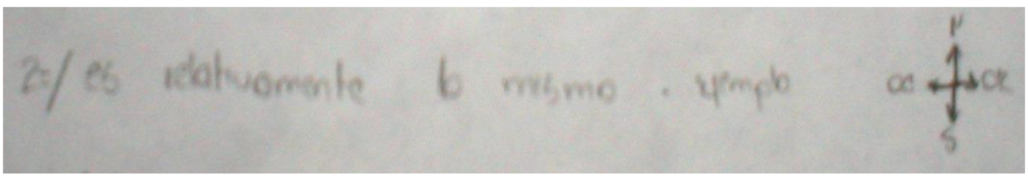
Figura 9. Evidencias del punto II sobre identificación de semirrectas paralelas.



6.2.2 Percepciones. La prueba mostró dos tendencias en la pregunta número 2 (ver anexo C):

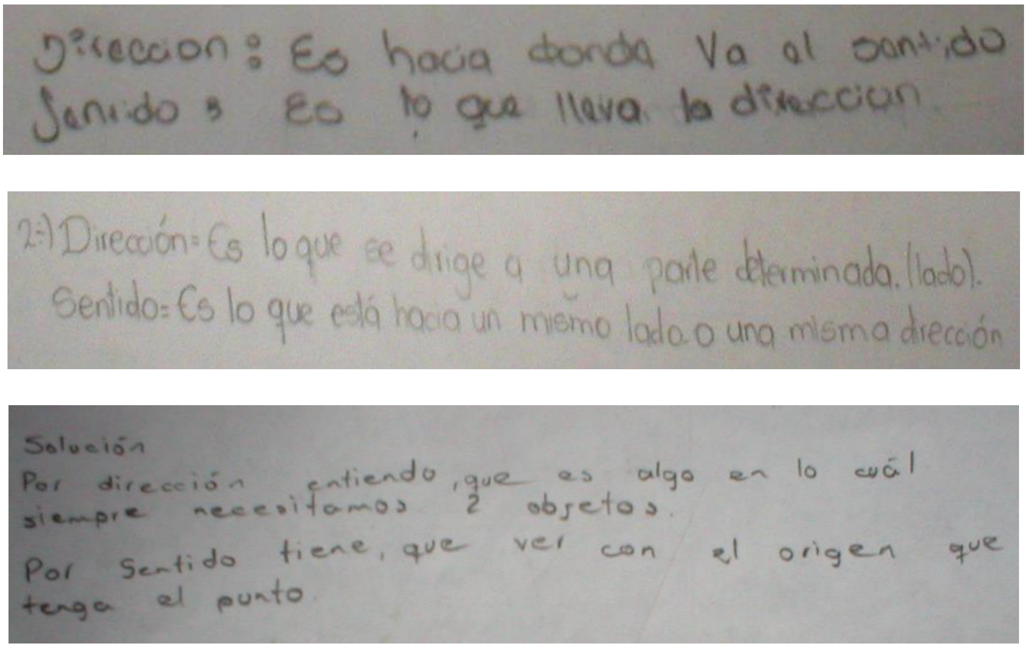
a. Para algunos estudiantes, sentido y dirección son términos que tienen el mismo significado. Por ejemplo,

Figura 10. Evidencias sobre el punto I.2 sobre los conceptos de dirección y sentido



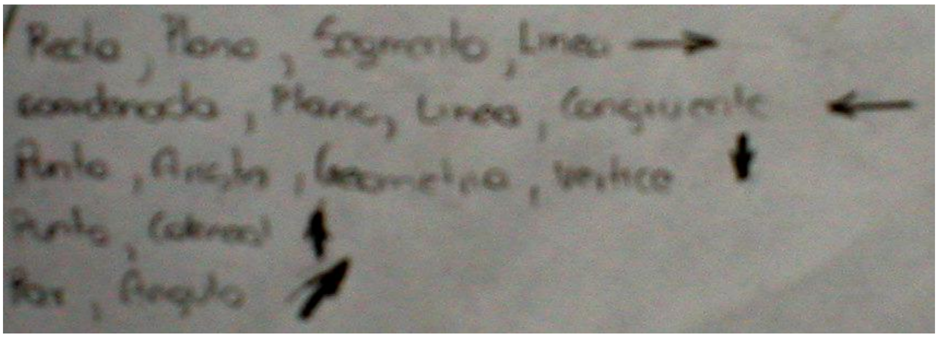
b. Para otros, son términos distintos, aunque no logran establecer un argumento que permita aclarar la diferencia entre ellos. El interés por proporcionar una explicación a esta postura hace que lo que escriben contradiga lo que piensan. Así respondieron,

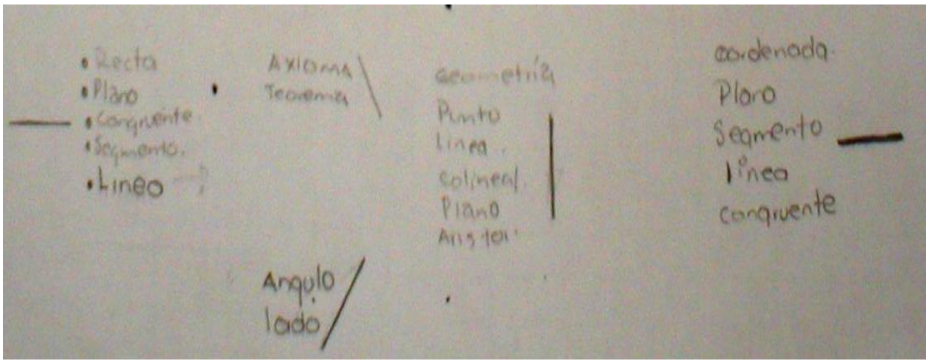
Figura 11. Evidencias sobre el punto I. 2 sobre los conceptos de dirección y sentido



La mayoría de los estudiantes organizaron las palabras teniendo en cuenta la posición de las mismas dentro de la sopa de letras, pero no se percataron por ejemplo, del por qué la palabra punto, arista, segmento, línea, plano se repiten y están en grupos diferentes. Algunas clasificaciones fueron:

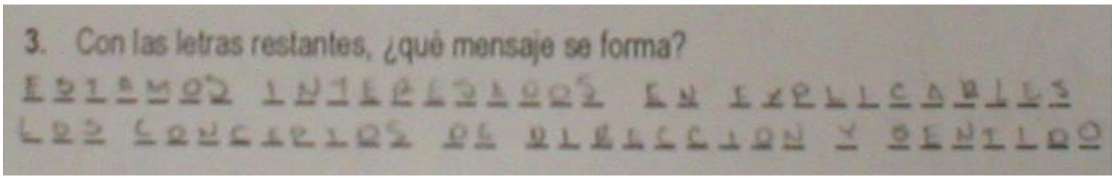
Figura 12. Evidencias del punto I.1 sobre clasificación de palabras según la dirección o el sentido.





Es curioso que los estudiantes desarrollaron la pregunta número 3 y luego la 2 (ver anexo C)., esto, debido a la tendencia que se tiene a completar los espacios que encontramos. Todos los estudiantes encontraron el mensaje correcto. Se puede constatar en la siguiente fotografía,

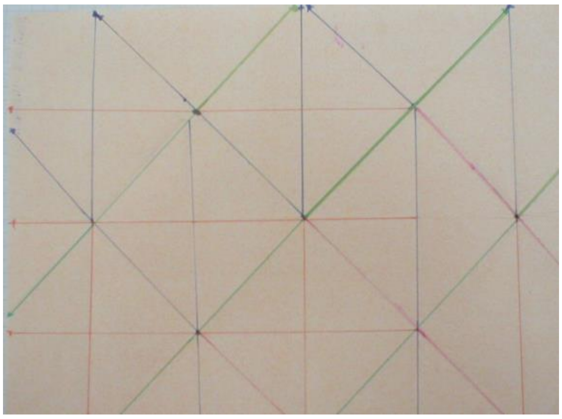
Figura 13. Evidencias del punto I.3 sobre el mensaje formado en la sopa de letras.



6.2.3 Representaciones. Para dar respuesta a cada una de las situaciones planteadas en la prueba (ver anexo C)., los estudiantes recurren a diferentes elementos de representación, los cuales permiten comunicar sus ideas. Destacamos las siguientes:

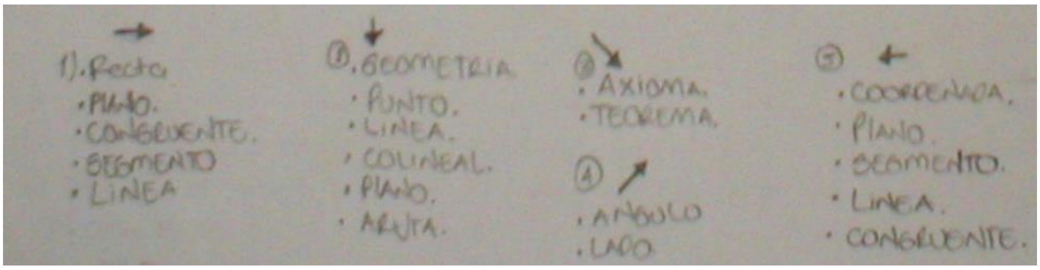
a. *Color*. Marca con el mismo color, únicamente las semirrectas que el estudiante considera paralelas. Por ejemplo,

Figura 14. Evidencias del punto II.



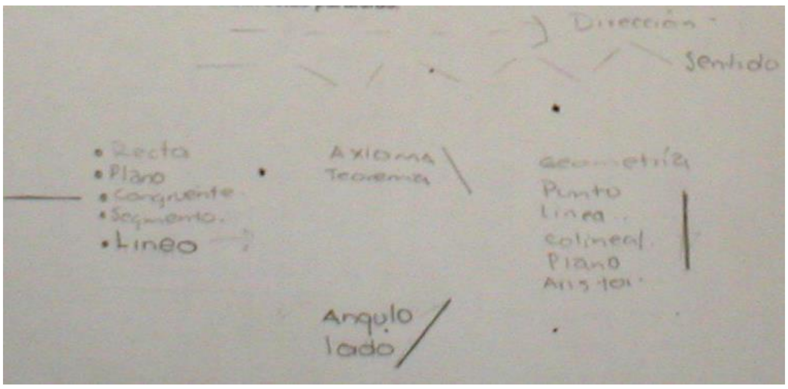
b. *Flecha*. Utilizan los siguientes códigos ←↑→↓%& para señalar el *inicio* y *terminación* de la palabra. Por ejemplo,

Figura 15. Evidencias del punto I.1.



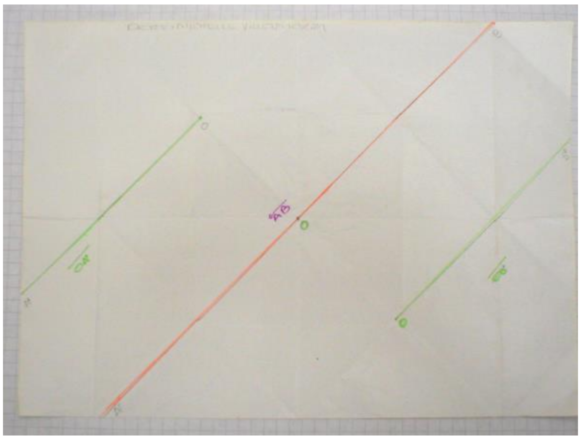
c. *Segmento.* Emplean segmentos para señalar las palabras según su ubicación en la sopa de letras (horizontal, vertical u oblicua). Por ejemplo,

Figura 16. Evidencias del punto I.1.



d. *Notación*. Son escasos los registros donde los estudiantes denotan las semirrectas o rectas para indicar la relación de paralelismo; en su gran mayoría no utilizan la notación apropiada para diferenciar a estos objetos geométricos ; se limitan a dibujarlos. Por ejemplo,

Figura 17. Evidencias del punto II.



6.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS LA PRUEBA DE NIVEL 0

A partir de los resultados obtenidos en la prueba teniendo en cuenta cada una de las categorías, podemos señalar algunos aspectos de gran importancia en el desarrollo de esta actividad de aprendizaje:

6.3.1 Los estudiantes tuvieron dificultad para establecer el criterio que les permita realizar la agrupación de las palabras de la sopa de letras, según la dirección o el sentido que estas poseen; lo anterior, debido a que estos términos no solo se usan indistintamente en la vida cotidiana, sino que también se les define de manera inadecuada.

6.3.2 La actividad II (ver anexo C). en la que se pretende que el estudiante realice la construcción de un barco en papel silueta, causó en los estudiantes una gran expectativa, por cuanto algunos de ellos nunca habían elaborado uno. La tarea se convirtió en un verdadero reto. Sobre los dobleces dejados por el barco los estudiantes en su gran mayoría visualizaron e identificaron correctamente no solo semirrectas, sino rectas y segmentos paralelos. Lo anterior indica que los estudiantes aun no tienen claridad en cuanto a las diferencias entre éstos objetos geométricos. Sin embargo, a pesar que fallan en cuanto al objeto geométrico utilizado, se puede evidenciar, que utilizan adecuadamente la relación de paralelismo.

6.3.3 En la socialización de la prueba, se puede destacar que los estudiantes poseen conocimientos previos que se acercan a las definiciones de los términos dirección y sentido, pero infortunadamente se les dificulta plasmarlo sobre el papel. Algunos estudiantes que participaron activamente de la socialización de la prueba, verbalmente expusieron sus ideas y planteamientos válidos, pero en el papel no supieron darse a entender. Se dificulta un poco el tratamiento de la información mediante el lenguaje escrito. Aun no han alcanzado un nivel de argumentación significativo en comparación al presentado en la prueba diagnóstica, por cuanto aún utilizan frases que carecen de sentido y se muestran incoherentes.

6.3.4 El estudiante ha alcanzado un nivel de pensamiento geométrico mas avanzado en comparación con la prueba diagnóstica. Lo anterior indica que los estudiantes han cumplido con las características propuestas por el modelo de Van Hiele en cuanto al nivel cero.

6.3.5 Una vez finalizada la aplicación de la prueba de nivel cero, inicia el estudio del movimiento de traslación en el plano. En este proceso se hace énfasis en la caracterización del movimiento, sus propiedades, la notación; y se muestra el procedimiento adecuado para la traslación de un punto o un segmento, dado un vector cualesquiera, utilizando regla y compás.

Las propiedades del movimiento de traslación muestran la importancia de la relación de paralelismo entre rectas, semirrectas o segmentos. Por ello se hace analiza con detenimiento el llamado quinto postulado de Euclides y varios resultados mas que involucran la relación.

Las notas de clase además de registrar cada uno de estos aspectos, genera espacios que permitan al estudiante interactuar con lo aprendido y desarrollar desde su trabajo individual, capacidad de crear conocimiento nuevo a partir de la visualización y el razonamiento lógico de ciertos planteamientos.

Culminada esta parte teórica, que se llevó a cabo en tres sesiones de trabajo, los estudiantes desarrollaron la prueba de nivel 1 a la luz del modelo de Van Hiele. En esta prueba, se pretende mirar el avance de los estudiantes frente a la temática planteada.

7. SEGUNDA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

"PRUEBA DE NIVEL 1"

Las siguientes fases de aprendizaje dan cuenta del proceso secuencial realizado en el desarrollo de la prueba.

7.1 FASES DE APRENDIZAJE

7.1.1 Fase 1. Información. Se anuncia a los estudiantes que al haber presentado el movimiento de traslación y habiendo precisado los conceptos de dirección, sentido y vector; se estudiaran algunos teoremas y propiedades de cuadriláteros, lo cual requiere de una claridad en los conceptos ya mencionados. La prueba (ver anexo D). permite indagar por el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes en cuanto al tema de traslación y paralelismo se refiere.

7.1.2 Fase 2. Orientación Dirigida. Los estudiantes utilizan en el desarrollo de cada una de las actividades propuestas en la prueba, elementos teóricos no sólo del movimiento de traslación, sino también del de simetría; esto debido a que lo dominan mas por haber sido abordado en su totalidad. Es importante decir que los estudiantes, aunque no lo hacen adecuadamente, intentan trabajar con los elementos de traslación que ya conocen para resolver las situaciones planteadas.

7.1.3 Fase 3. Explicitación. La discusión de los estudiantes se centra en cual movimiento utilizar para cada una de las situaciones planteadas. La mayoría se inclina por el movimiento de simetría axial, aunque cometen errores en la ubicación del eje. Parece ser que no hay claridad en cómo realizar una traslación y esto ha generado cierto grado de confusión entre los estudiantes, siendo necesaria la intervención del docente para orientarles.

7.1.4 Fase 4. Orientación Libre. Se presentan al estudiante varias situaciones para desarrollar bajo la aplicación de un movimiento en el plano. Sin embargo, el estudiante recurre a elementos de los cuales tiene conocimiento, para enfrentarse a las situaciones. Es así como recurre al movimiento de simetría axial y traslación.

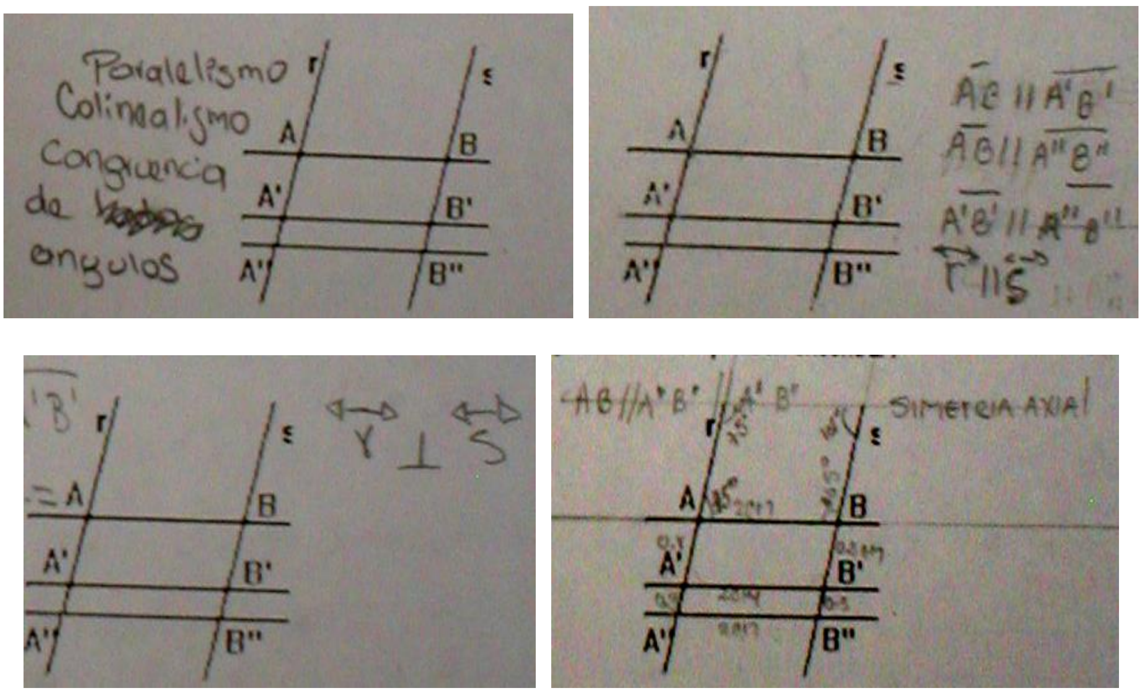
7.1.5 Fase 5. Integración. Finalizado el desarrollo de la prueba, por falta de tiempo, no se realizo la socialización de resultados con el grupo; sin embargo en la siguiente clase, y teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la prueba, se precisaron nuevamente los conceptos vistos acerca del movimiento de traslación y paralelismo para reforzar el conocimiento de los estudiantes en el tema.

7.2 RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PRUEBA DE NIVEL 1

Notemos los resultados obtenidos de acuerdo a cada una de las categorías de análisis:

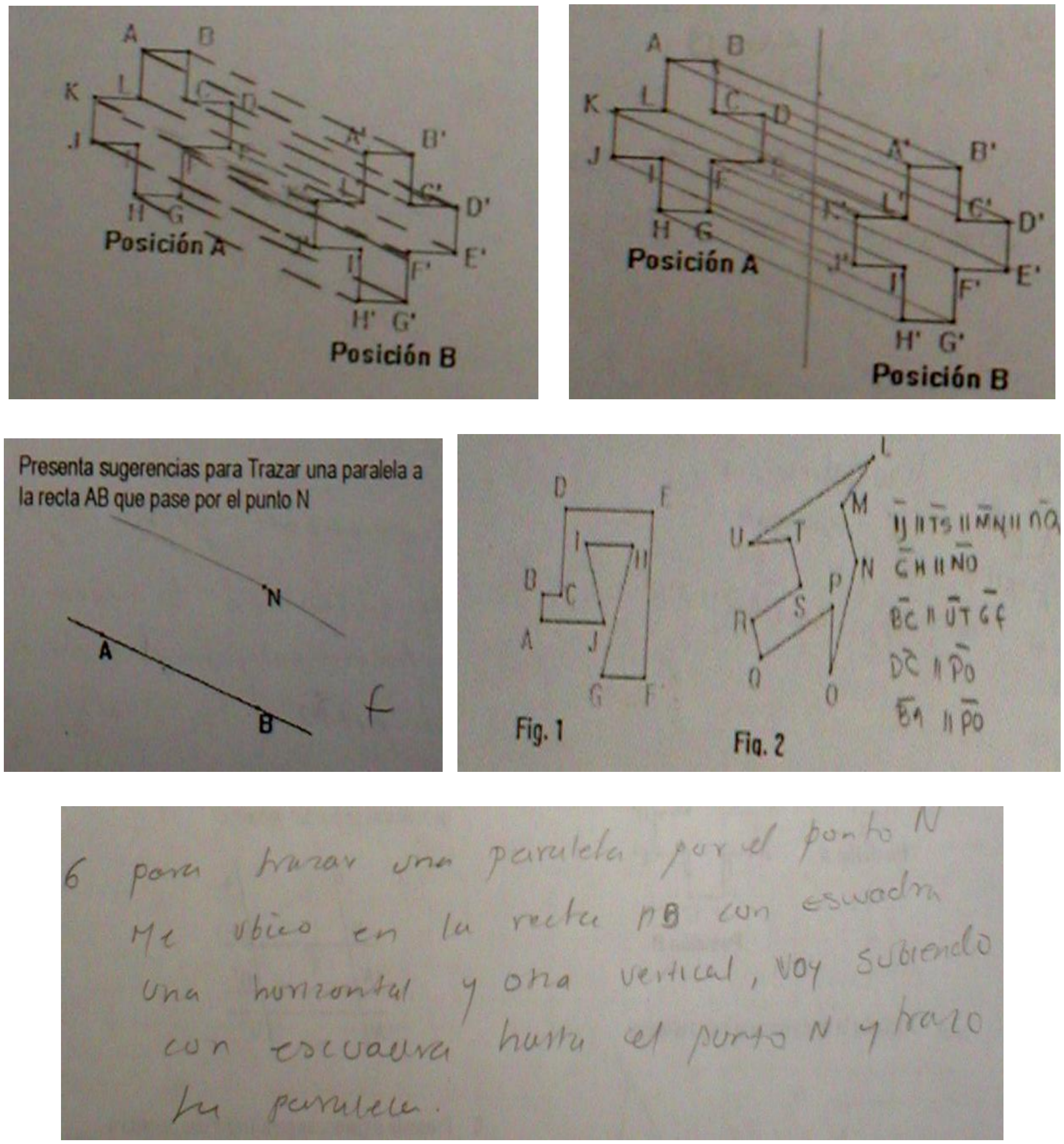
7.2.1 Relaciones geométricas. La identificación de rectas y segmentos paralelos no reviste dificultad para el grupo; incluso, utilizan adecuadamente el lenguaje matemático para representar esta relación. Pocas veces resaltan la congruencia entre segmentos. Tal y como se observa en los registros tomados.

Figura 18. Evidencias del punto 5 sobre características geométricas



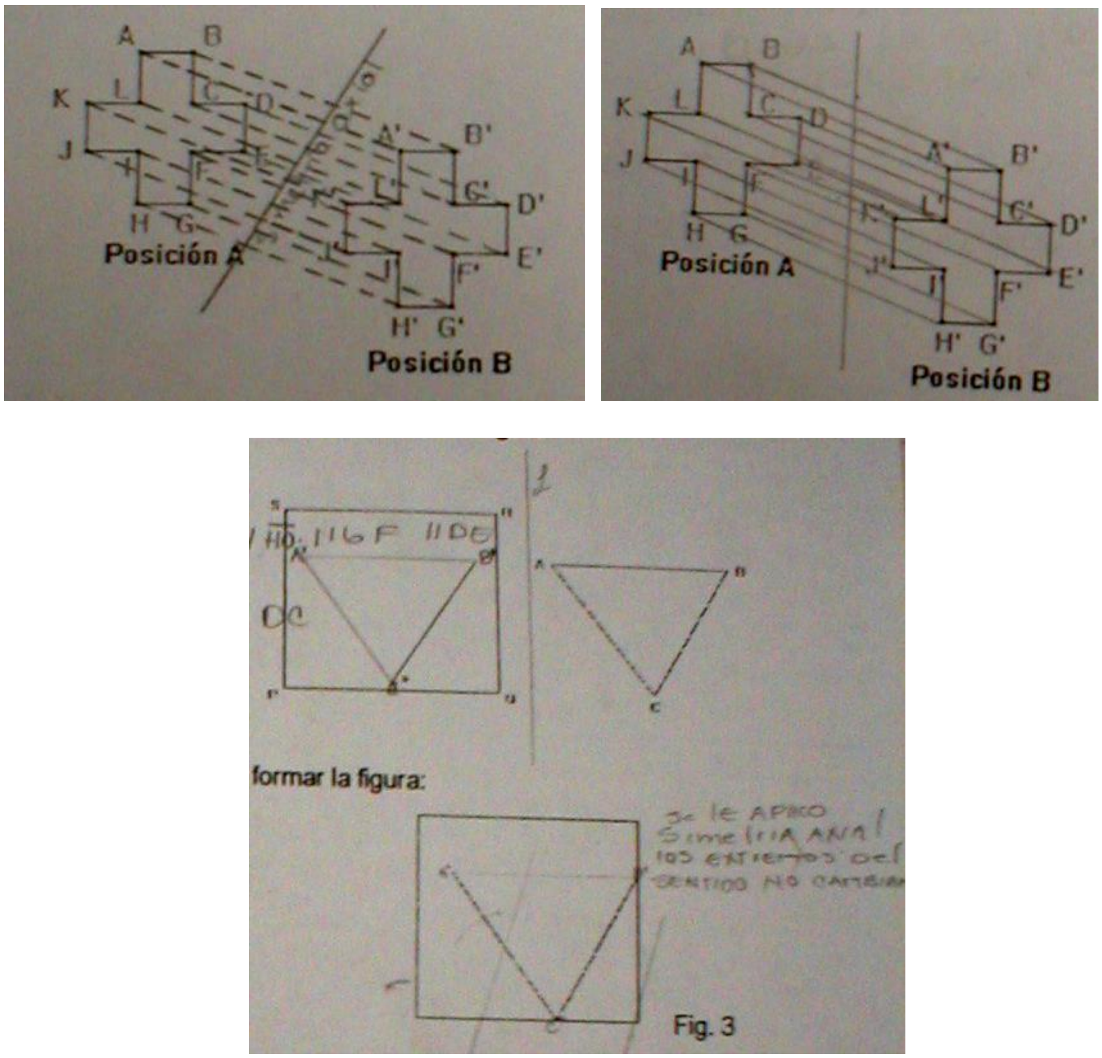
7.2.2 Manejo y significado de definiciones. En esta prueba los estudiantes dan respuesta a cada pregunta del taller, basados en soluciones gráficas. Cuando se les indaga sobre el "por qué" de sus respuestas, estos no aportan una explicación clara del método empleado o las razones que lo llevaron a esa solución. Se les dificulta el manejo de los conceptos, lo cual implicó reforzar ciertos temas y aclarar dudas. Algunos ejemplos son,

Figura 19. Evidencias sobre demostraciones gráficas.



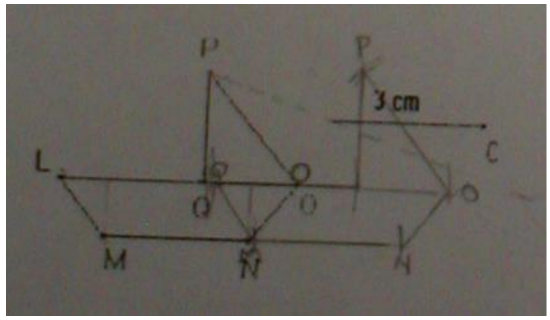
7.2.3 Herramientas. La prueba aplicada a los estudiantes requería el uso del movimiento de traslación o de cualquier otro, en dos situaciones, puntos 2 y 4 (Ver anexo D); sin embargo en las soluciones dadas a éstas involucraban el movimiento de simetría axial. Por ejemplo,

Figura 20. Evidencias de los puntos 2 y 4.



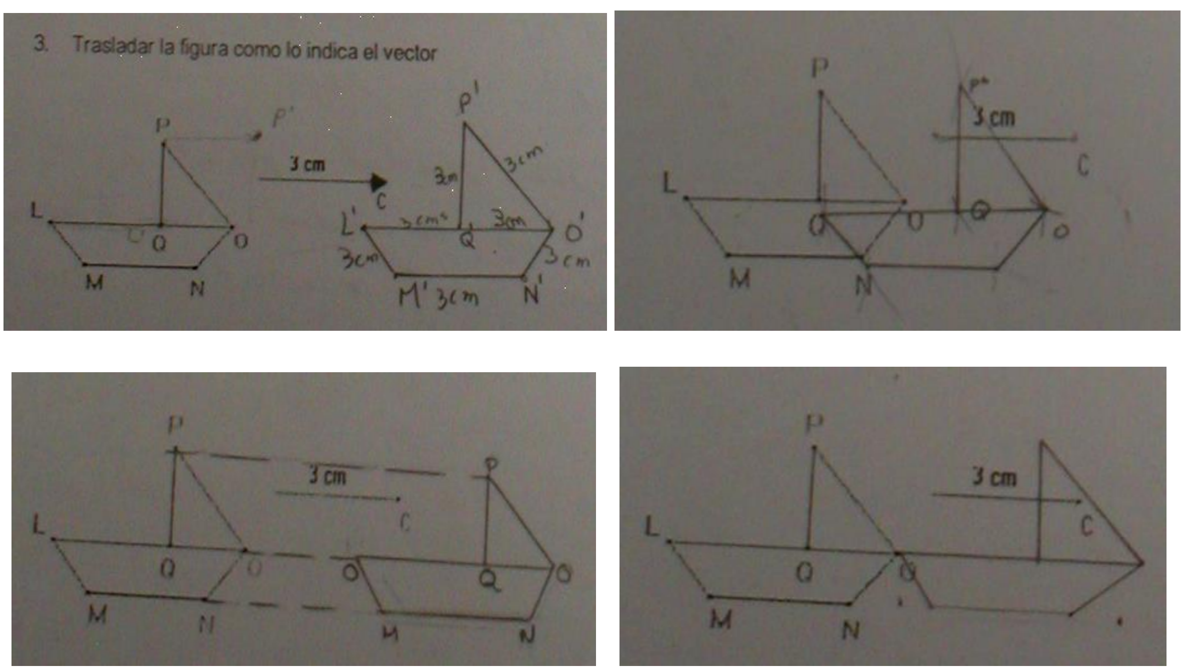
Para desarrollar el punto 3 (ver anexo D) y trasladar el barco; pocos estudiantes recurrieron al movimiento de traslación para realizar el movimiento de cada punto notable de esta figura, según el vector indicado. Por ejemplo,

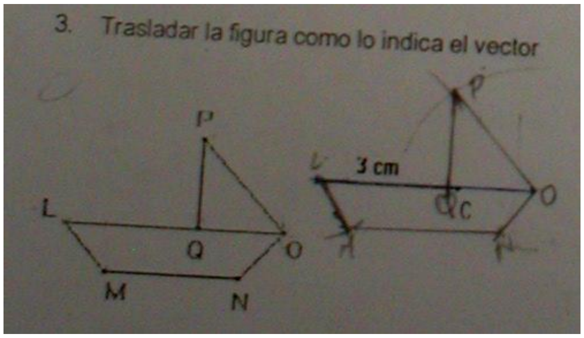
Figura 21. Evidencias del punto 3.

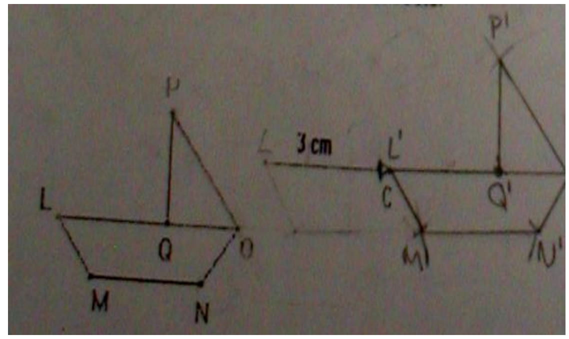


En otras situaciones, los estudiantes recurren al dibujo técnico para ejecutar esta traslación, pero no explican el procedimiento empleado para trazar arcos de circunferencia y rectas paralelas . La mayoría de los estudiantes únicamente tuvieron en cuenta la medida y la orientación del vector y a partir de ello realizaron procedimientos equivocados tales como:

Fig.22. Evidencias del punto 3 sobre la traslación del barco dado un vector.







7.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA DE NIVEL 1

7.3.1 Con base en los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba, se pude determinar que la mayoría de ellos entienden la importancia del vector dentro de la caracterización del movimiento de traslación; pero aún no han detectado algunas de las propiedades importantes de éste movimiento. Es así como el estudiante comprende y entiende que debe hacer una traslación utilizando un vector, pero se le dificulta llevar a cabo este procedimiento por cuanto no tiene muy claras las propiedades que deben tenerse en cuenta para realizarlo correctamente.

7.3.2 Para desarrollar las situaciones planteadas en la prueba, los estudiantes no sólo tenían elementos teóricos referentes al tema de traslación, sino también de los temas vistos con anterioridad y dentro de los cuales se destaca el movimiento de simetría axial. Es así, como algunos estudiantes al tener mayor claridad en los conceptos de simetría axial, dado que ya se había abordado el tema en su totalidad, recurre a éste movimiento para dar solución a las preguntas número dos y cuatro. La situación anterior indica que el estudiante observa, analiza con detenimiento una situación problema, explora varios caminos y se dispone a dar una respuesta satisfactoria, esto, a pesar de que no puede relacionar ambos movimientos.

7.3.3 Al momento de la aplicación de la prueba, se puede percibir que los estudiantes no han utilizado el material de apoyo (las notas de clase) como se esperaba. Algunos de ellos no han accedido a él y quienes lo tienen no lo aprovechan y simplemente esperan pasivamente a que e llegué el momento de una evaluación del tema para estudiarlo con detenimiento. No existe entonces una actitud positiva que permita que el estudiante a partir de su trabajo individual, apoyado en las herramientas conceptuales aprendidas en el aula, crezca en la construcción de su conocimiento.

7.3.4 A este nivel, aún se les dificulta dar argumentos para resolver las situaciones planteadas. Sin embargo, es notorio, que han mejorado considerablemente en comparación a la prueba anterior (prueba de nivel cero). Las demostraciones por medio de las representaciones gráficas, son constantes en el desarrollo de la prueba. Al no poder establecer con claridad argumentos teóricos, explican los procedimiento mediante gráficos.
Como característica importante se destaca el uso de la notación adecuada aunque prefieren evitarla al máximo.

Un elemento fundamental y de gran influencia e impacto en los estudiantes, fue la presentación del software de geometría dinámica Cabri Géomètre. Esta herramienta computacional, permitió que el estudiante: manipulara por si mismo algunos objetos geométricos vistos a lo largo del curso de geometría euclidiana, estableciera la diferencia entre un dibujo y una construcción, realizará por sus propios medios la construcción de un cuadrado utilizando las herramientas dadas por el software, reconociera algunas propiedades de los cuadriláteros, hiciera una deducción de otras propiedades de los cuadriláteros y comprendiera el procedimiento para realizar una traslación. El software ocasionó gran impacto en los estudiantes e incluso deseaban desarrollar todo el curso con su ayuda, sin embargo, solo fue posible trabajar con el software durante tres sesiones.

7.3.5 Los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de conocimiento con las características que establece el modelo de Van Hiele en un nivel 1 de aprendizaje y están listos para enfrentarse a un nuevo nivel. Es así como terminado este proceso, se dan a conocer una nueva parte teórica para desarrollar una nueva prueba de un nivel mas avanzado.

8. TERCERA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

“PRUEBA DE NIVEL 2”

Esta prueba fue aplicada a los estudiantes al finalizar la presentación del tema de traslación y paralelismo con el fin de determinar el nivel de conocimiento adquirido en el tema. La siguientes fases de aprendizaje permiten vislumbrar como se llevó a cabo el proceso:

8.1 FASES DE APRENDIZAJE

8.1.1 Fase 1. Información. Al concluir el tema de traslación y paralelismo se determinó el día en el cual se aplicaría la prueba. Los estudiantes deberían prepararse concientemente para esta actividad ya que la prueba constaba de situaciones que tenían que ver con todo el tema. Se elabora un taller para que lo trabajen en casa y adicionalmente se resuelven en clase situaciones problema que permiten que el estudiante se haga una idea de cómo se deben utilizar los conceptos teóricos en una determinada situación.

8.1.2 Fase 2. Orientación dirigida. Los estudiantes desarrollan en grupos de dos personas las cuatro actividades propuestas en cada una de las pruebas (4 modelos) (ver anexo E). Con la colaboración del docente, el estudiante puede hacer claridad de lo que se pide en cada situación para no equivocarse en la interpretación. Se elaboraron cuatro modelos para la prueba de nivel dos, pero las situaciones eran similares.

8.1.3 Fase 3. Explicitación. Cada grupo de estudiantes discute acerca de cómo se resuelve cada una de las situaciones, pero causa curiosidad como se les dificulta el realizar una construcción geométrica teniendo todos los elementos teóricos para realizarla. Ninguno se atreve a hacer la demostración y muchos no utilizan las propiedades de los cuadriláteros. Aunque conocen y saben la teoría no pueden utilizarla en una situación planteada.

8.1.4 Fase 4. Orientación Libre. Se pide al grupo estudiar nuevamente todo lo referente al tema de traslación y paralelismo para que se analice donde se cometieron errores durante el desarrollo de la prueba.

8.1.4 Fase 5. Integración. Dado que la prueba fue desarrollada por grupos de dos, entonces se pidió a los estudiantes que fueran a revisarla según como habían conformado los grupos. Lo anterior permitió no sólo que cada una de las parejas expresara al docente como había abordado cada una de las situaciones sino también que el docente hiciera las respectivas aclaraciones y correcciones sobre las fallas cometidas durante el desarrollo de la actividad, afianzando así los conceptos de los estudiantes.

8.2 RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PRUEBA DE NIVEL 2

Observemos los resultados obtenidos en esta prueba, de acuerdo a las categorías de análisis establecidas:

8.2.1 Interpretación. Los estudiantes entienden y comprenden teóricamente el movimiento de traslación y las propiedades de los cuadriláteros pero no utilizan estas herramientas conceptuales para dar solución a una determinada situación problema (ver anexo E. Modelo 1). Por ejemplo,

Figura 23. Evidencias del punto 2 del modelo 1.

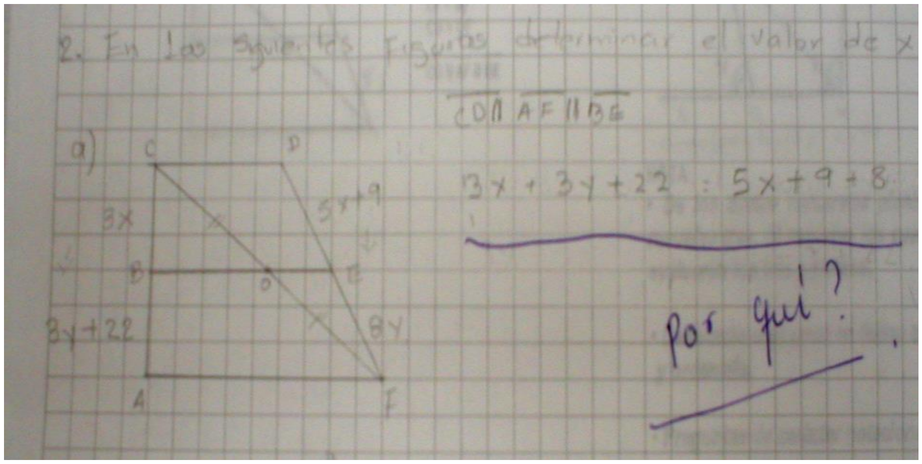
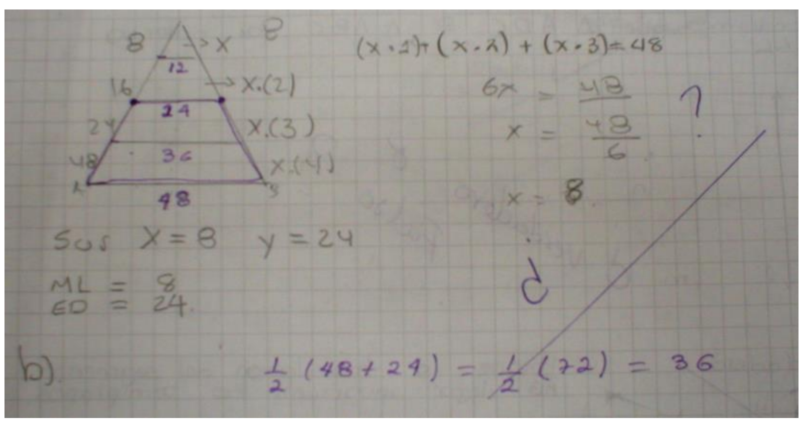
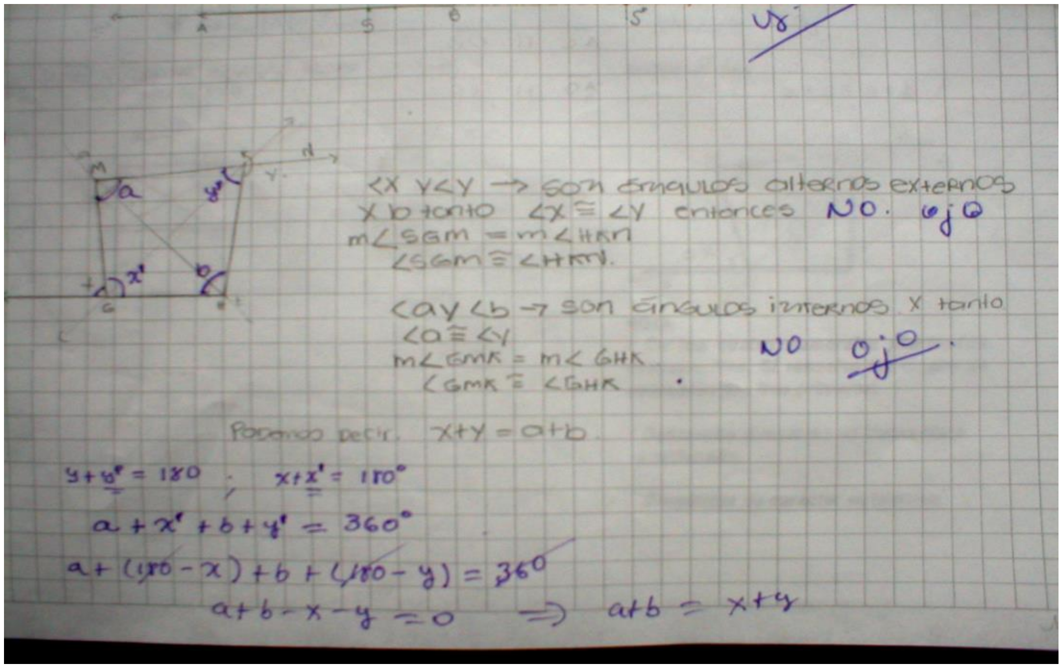


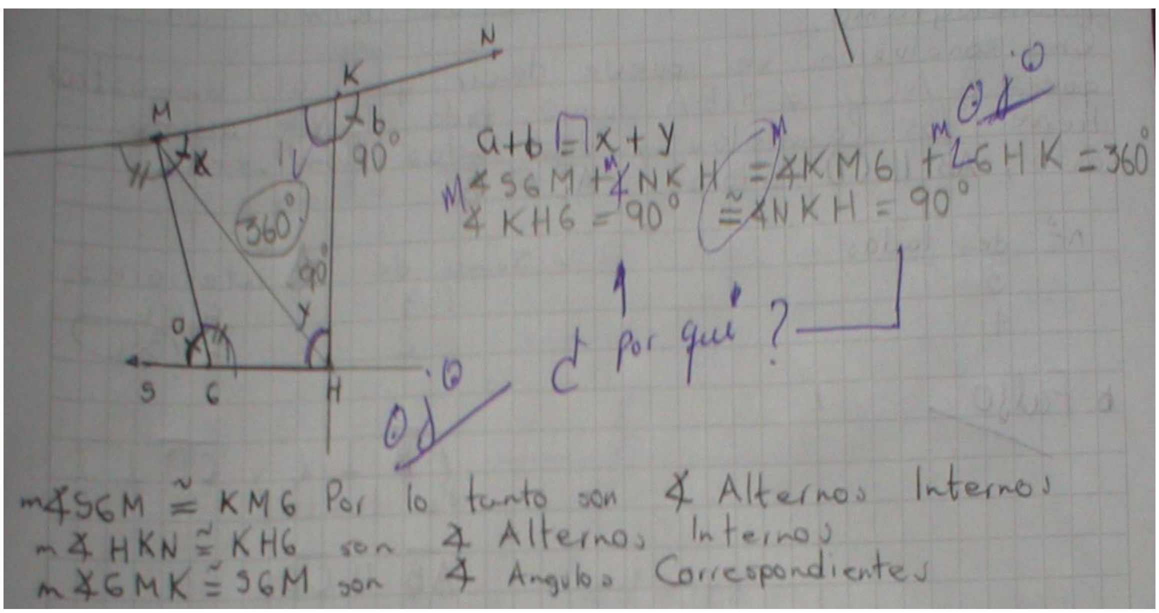
Figura 24. Evidencias del punto 3.a. del modelo 2.



Tuvieron dificultades para realizar la demostración (ver anexo E) por cuanto no están acostumbrados a ellas y piensan que son tediosas. Crearon condiciones no dadas para encontrar la solución al problema. Además tienen problemas de lectura reflejados en que no hacen lo que se pide.

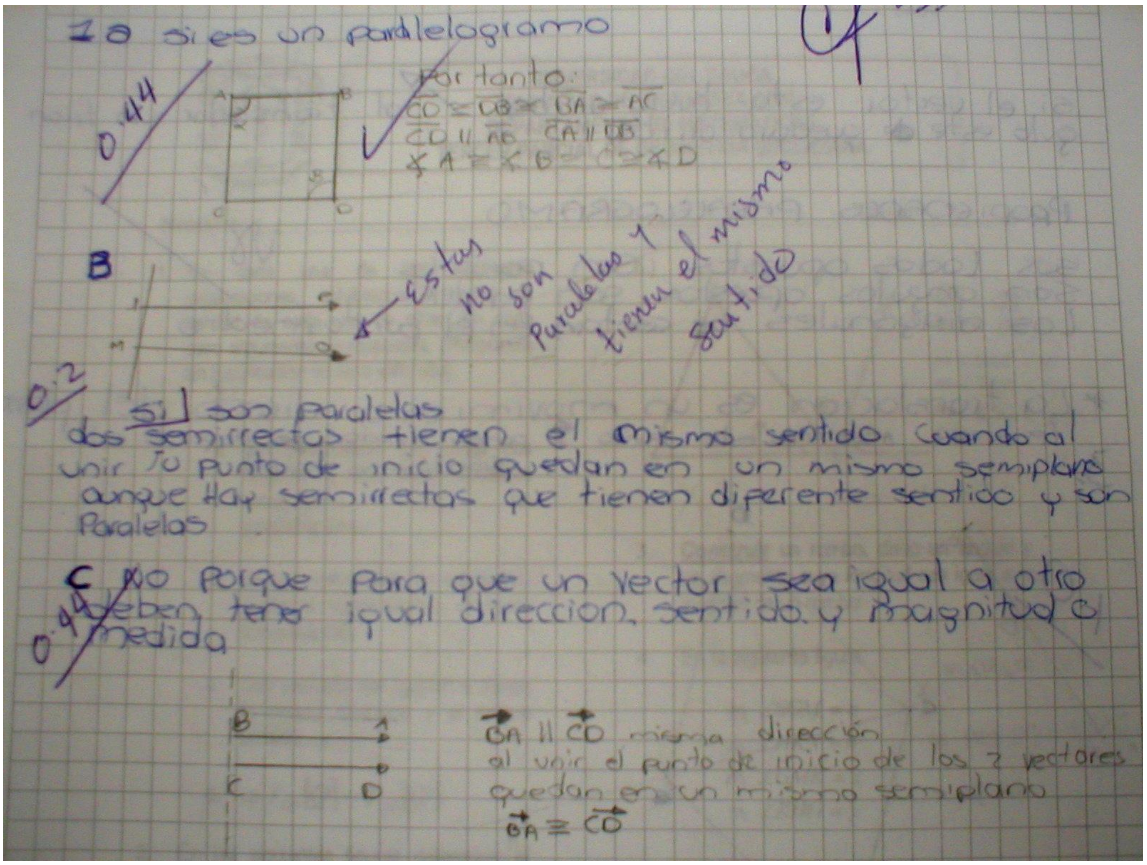
Figura 25. Evidencias del punto 2 del modelo 2.





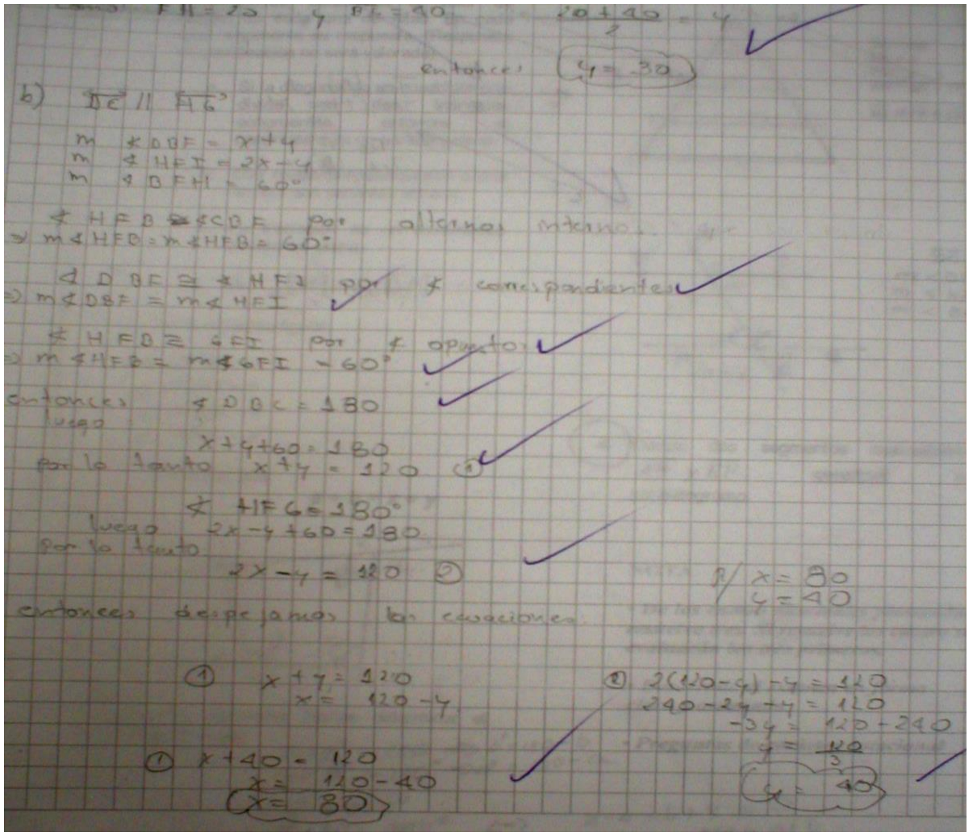
8.2.2 Argumentación. Han mejorado considerablemente en la utilización de elementos teóricos para explicar una proposición dada, pero aún presentan dificultades para justificar sus respuestas. En ocasiones dan los argumentos correctos para justificar una proposición y sin embargo cambian el valor de verdad de las mismas tal y como se observa en el punto 1 literal b del modelo 3. (ver anexo E).

Figura 26. Evidencias del punto 1 del modelo 3.



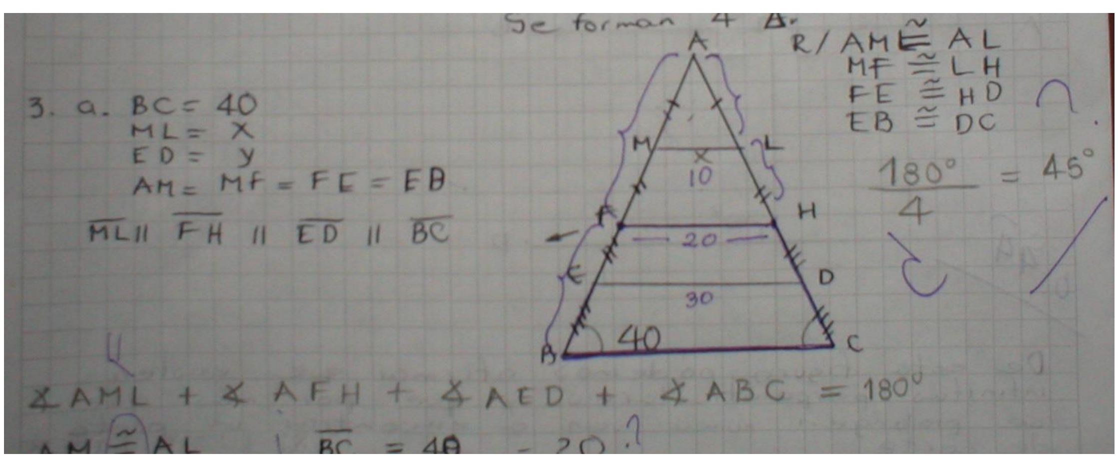
Algunos estudiantes utilizan coherentemente conceptos matemáticos, tales como solución de sistemas de ecuaciones por el método de sustitución, eliminación e igualación, para desarrollar las situaciones planteadas.

Figura 27. Evidencias del punto 3.b. del modelo 1.



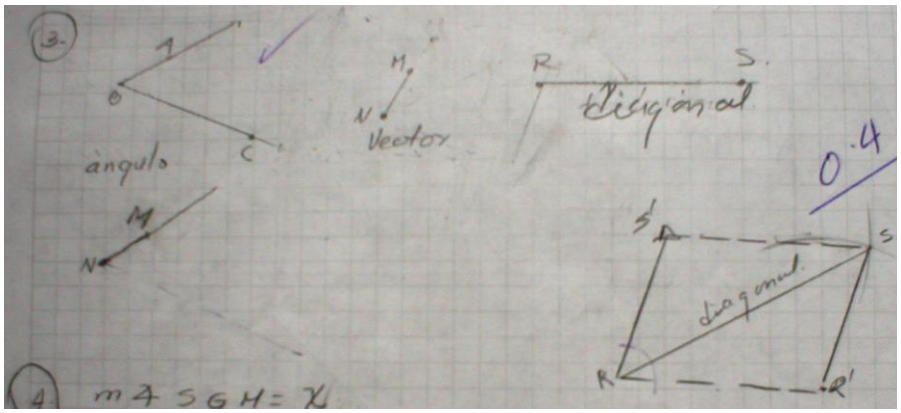
Se les dificulta manejar algunas propiedades de cuadriláteros, como la de paralela media. Por ejemplo,

Figura 28. Evidencias del punto 3.a. del modelo 1.



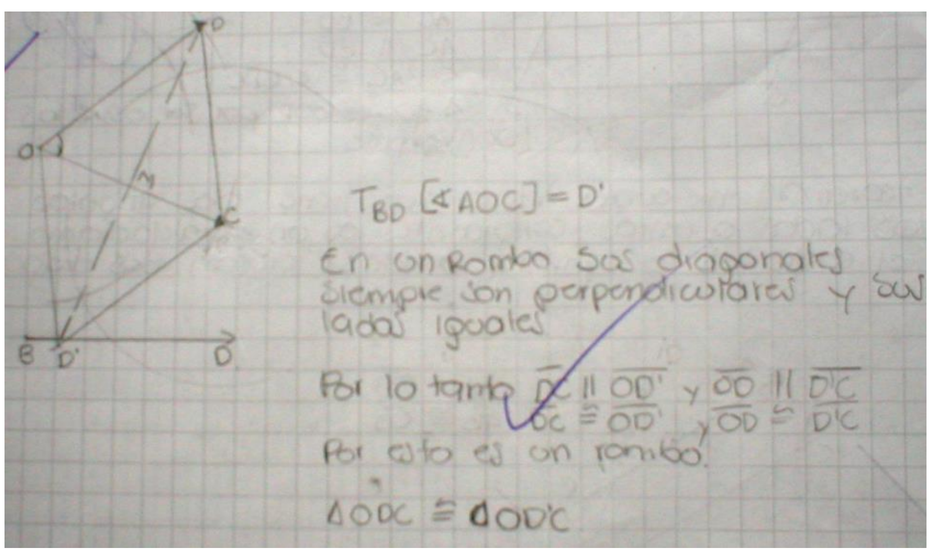
En las construcciones intentan seguir un argumento lógico que permita llegar a lo requerido, pero aún se les dificulta escribir en lenguaje matemático y utilizan las demostraciones gráficas para dar a entender sus procedimientos.

Figura 29. Evidencias del punto 3 del modelo 2.



Sin embargo hay estudiantes que ya están familiarizados con la notación matemática y realizan una construcción correcta con su respectivo procedimiento a seguir. Tal y como lo evidencia la siguiente figura,

Figura 30. Evidencias del punto 3 del modelo 3.



8.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA DE NIVEL 2

8.3.1 Los resultados obtenidos en esta prueba develan que la mayoría de los estudiantes tienen dificultad para establecer las interrelaciones en las figuras (por ejemplo: en un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos son congruentes) y entre figuras (un cuadrado es un rectángulo porque tiene todas sus propiedades). Adicionalmente, no comprenden la importancia de las definiciones ni los requisitos necesarios para una definición correcta.

8.3.2 El análisis de los resultados de la prueba y los comentarios realizados por los estudiantes alrededor de la misma, dejan entrever que éstos únicamente estudiaron el material de apoyo (las notas de clase) uno o dos días antes de la aplicación de la prueba. En este sentido, el estudiante, bajo presión, desarrollará una serie de ejercicios que le permitirán adquirir ciertos conocimientos para enfrentarse a una evaluación. Pero no estará en capacidad de realizar un estudio atento del material. Se pretendía que el estudiante estudiará durante el transcurso del proceso, para que tuviera la oportunidad de crear conocimiento nuevo a partir de un estudio consciente y atento del material, sin embargo el estudiante solo lo hizo unos días antes, a pesar de la insistencia, por parte del docente y sus asistentes, de la importancia de hacerlo a lo largo del desarrollo de las actividades de aprendizaje.

8.3.3 Algunos estudiantes muestran a este nivel progresos en cuanto a su capacidad argumentativa, es decir, ya se han familiarizado con el uso del lenguaje matemático y lo utilizan, a pesar de que en ocasiones no lo hacen correctamente. En cuanto a la pregunta número uno de la prueba, los estudiantes presentaron argumentos teóricos bastante contundentes en comparación a pruebas anteriores para justificar el valor de verdad de las proposiciones. Prefieren realizar ejercicios relacionados con construcciones geométricas y no con demostraciones; esto, debido a que consideran que una demostración es mas tediosa, complicada y necesita de un lenguaje matemático riguroso.

8.3.4 Los ejercicios propuestos en la prueba permiten fortalecer no solo la capacidad de visualización, argumentación y creatividad, sino también el nivel de razonamiento del estudiante. Lastimosamente fueron pocos los resultados que dieron muestras de los avances en cuanto a superar este nivel se refiere.

8.3.5 La mayoría de los estudiantes no logran estar en este nivel de pensamiento geométrico, lo cual nos indica que para el tema de traslación y paralelismo en el plano euclidiano, los estudiantes en su gran número solo alcanzaron el nivel 1 del modelo de Van Hiele, aunque algunos de ellos muestran características en su trabajo que indican que pueden llegar fácilmente a alcanzar el nivel 2 sin problema.

9. CONSIDERACIONES

- Las fases de aprendizaje presentadas por el modelo de Van Hiele, en esta experiencia estuvieron limitadas por el tiempo y por la falta del software cabri.

- Los estudiantes tienen falencias en la utilización e interpretación del lenguaje.

- La falta de compromiso por parte de los estudiantes y la evaluación se convierten en limitantes del proceso por cuanto el estudiante desea se le de una nota por su participación en las actividades de aprendizaje.

- Los problemas logísticos presentados en el desarrollo del trabajo, debido a que no se contó con los equipos requeridos para que los estudiantes manipularan directamente el software.

Cuando se dio por terminado el tema de "Traslación y Paralelismo en el Plano Euclidiano", se continuó con el siguiente tema: "Rotación y circunferencias", iniciando con la primera actividad de aprendizaje de acuerdo a este tema y aplicando las fases descritas en el modelo de Van Hiele.

10. CONCLUSIONES

1. Durante el proceso de seguimiento, el análisis de los resultados mostró que los estudiantes se encontraban en un nivel cero (0) antes de desarrollar el tema de "traslación y paralelismo en el plano". Luego de trabajar con ellos y finalizado el proceso, en su gran mayoría, alcanzaron el nivel uno (1) de razonamiento. Existen, sin embargo, algunos estudiantes que muestran en su trabajo características de nivel dos (2), aunque aun no han alcanzado este nivel de razonamiento.

2. El material escrito presentado (las notas de clase y las actividades de aprendizaje), brindó a los estudiantes actividades que propician la creación de conocimiento nuevo a partir de las temáticas presentadas en clase; pero en esta experiencia, la falta de compromiso de los participantes (estudiantes) en el proceso no permitió alcanzar este propósito tal y como se esperaba.

3. Las actividades de aprendizaje, organizadas a través de la secuencia cíclica de cinco fases, propuestas por el modelo de Van Hiele, exigen la participación activa de los actores en el proceso.

4. El nivel argumentativo de los estudiantes ha evolucionado a lo largo de este proceso. A pesar de que en ocasiones dan argumentos no válidos; ya han superado la etapa

de presentar procedimientos sin explicación alguna, es decir, que para dar explicaciones a proposiciones dadas, estos recurren a elementos teóricos que justifiquen sus respuestas, esto, a pesar de que se les dificulte un poco la utilización del lenguaje matemático.

5. A pesar de que no fue posible desarrollar este proceso en su totalidad con el software cabri, estamos seguros de que la realización de experiencias basadas en el modelo de Van Hiele y el acercamiento a las practicas innovadoras en geometría que incluye la tecnología, específicamente el software cabri géomètre, contribuyen con la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes.

6. Durante este proceso tanto estudiantes como docentes participaron y se enriquecieron mutuamente. Algunas ocasiones sorprende como los estudiantes afrontan un problema y dan soluciones que no habían sido trabajadas por el orientador.

7. Las notas de clase eran definitivas para el buen desarrollo del proceso. Hacían parte importante del sustento teórico que permitiría a los estudiantes trabajar individualmente sobre el tema, desarrollar las actividades, estudiar la temática presentada y sacar sus propias conclusiones.

8. Las actividades de aprendizaje llevadas a cabo, requieren de un tiempo considerable para su elaboración por cuanto su diseño debe tener en cuenta el nivel de aprendizaje en que se encuentra el estudiante.

BIBLIOGRAFÍA

[AC94] AZCÁRATE P., CARDEÑOSO J. M. La naturaleza de la Matemática Escolar: problema fundamental de la didáctica de la matemática. Revista Investigación en la escuela No 24. 1994

[B89] BONILLA E. La educación Matemática: Una reflexión sobre su Naturaleza y sobre su metodología. Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN. Documento tomado de l a revista" Educación Matemática". Vol I, No 2. 1989

[B86] BRUSSEAU G. Fundamentos y Métodos de las Didácticas de las Matemáticas. Revista Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7 No 2. 1986

[C02] CASTIBLANCO A. Documento del Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. presentado como ponencia. en Chile. 2002

[D97] Díaz, T. Fundamentos de geometría euclidiana.., (Notas de clase), Universidad del Cauca, 1997.

[F99] FREGONA.D. La didáctica de las Matemáticas y la Formación de Profesores de Matemática Artículos de investigación. Revista Educación Matemática Vol. 11 No 2. 1999

[H83] HOFFER, A. Van Hiele---based researcah, en Acquisition of Mathematical Concepts and Proceses, (eds. Lesh, R., Landau, M.). pp. 205—227, Academic Press, 1983.

[J86] JARAMILLO P. Víctor. Elementos de geometría plan. Traducción y adaptación del Tours de Géométrie. Universidad EAFIT. Medellín 1986.

[L63] LANDAVERDE F. J. Curso de Geometría, , editorial progreso S.A., México, 1963.

[M99] MEN. Nuevas tecnologías y Currículo de Matemáticas. Serie Lineamientos. Punto Exe Editores. Bogotá, D.C. 1999.

[M00] MEN. Documento del Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. Fase de Expansión y Profundización. 2000.

[M98] Ministerio de Educación Nacional. Matemáticas, Lineamientos Curriculares. Creamos Alternativas Soc. Ltda, Santa fe de Bogotá. 1998

[M02] Ministerio de Educación Nacional. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Serie Memorias. Primera edición. Bogotá D.C. 2002.

[MD96] MOISE E, DOWNS Floyd. Geometría Moderna, L, Edit. Addison - Wesley publishing Company. 1996.

[P84] POINCARÉ H.,. Las definiciones matemáticas y su enseñanza. Filosofía de la Ciencia. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México. 1984.

[P61] PUIG, A. Fundamentos de Geometría Métrica. Edit Nuevas gráficas Madrid, 1961

[R00] Revista de las Ciencias, Año 2000. Pág. 18. Investigación Didáctica.

[RS03] ROSERO, R. Yeny. SILVA S. Alba L. Proyecto de Investigación Incorporación de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Geometría. VRI 1131. Universidad del Cauca.2003.

[R88] RUSSELL B. Introducción a la Filosofía Matemática . Ediciones Paidós Ibérica, S.A. Barcelona. 1988.

[S93] SANTOS T. L. M. La naturaleza de las Matemáticas y sus implicaciones Didácticas. Mathesis Pág. 431-432. 1993

[V90] VALENCIA Santiago. Londoño Rodolfo. Geometría Euclidiana. Medellín, 1990.V:A

[V90] VILLEGAS de Arias Cecilia. Notas de Geometría Plana. Universidad Nacional de Colombia. 1990.

[Z02] ZAMBRANO A. Pedagogía, educabilidad y formación de docentes. Colección. Ensayos Pedagogía. Segunda edición. 2002.

ANEXOS

ANEXO A. Notas de "Traslación y paralelismo en el Plano"

Lectura recomendada

LA AUTOBIOGRAFÍA DE UN VECTOR[1]

Hola mi nombre es x. Soy un vector. Esta es la historia de mi vida: Empecé a existir en un plano formado por dos rectas que se cortan en un punto. No era el único vector joven de por allí, así que hice afines a bastantes vectores de mi entorno. Los pequeños vectores jugábamos alegres por todo el plano. Crecí y tuve que ir al colegio. Allí me explicaron como ser un autentico vector, como acoplarme a rectas, matrices y otros planos. Y otros planos!. Hasta entonces había creído que solo existía el plano donde yo vivía, fue un descubrimiento que cambio mi vida. Y no solo había otros planos, sino que eran infinitos!.

Los años pasaron y por fin acabe mis estudios y me mude al plano complejo donde conseguí un trabajo como fila en una matriz de n x n. Me llevaba bastante bien con mis compañeros vectores pero odiaba al vector director, que no paraba de montármela. Un día no pude aguantar mas, así que... lo mate (le sume su opuesto).
Al día siguiente, me estaba ya arrepintiendo de mi arrebato de locura, pues vinieron a arrestarme los agentes π y ε. El juicio fue la risa, me asignaron como abogado a un 0 a la izquierda, que a pesar de tener voluntad, hizo un pésimo trabajo. De todas maneras, el juicio estaba perdido, ya que el fiscal era el 3 y el juez el 1, y claro como eran primos... Me condenaron a ser un vector fijo en el campo de fuerza mas seguro del plano.

Cuando cumplí la mitad de mi condena, me soltaron bajo palabra en libertad condicional, lo que para los vectores es convertirnos en deslizantes (siempre con una recta siguiendo los pasos). Durante mi estancia en la penitenciaria conocí a gran cantidad de mala gente: Malvadas ecuaciones no lineales, Matrices esquizofrénicas que se trasponían sin ton ni son, limites psicópatas que se colaban en exámenes de letras y hacían verdaderas masacres, integrales drogodependientes... pero la peor de todas fue aquella función acusada de cortar a sus asíntotas en pedacitos diferenciales. Cuando pienso en ellos se me ponen los componentes de punta.

Y por fin, se acabo!, salí del talego y volví a ser un vector libre. Sabia que ya no me encontrarían en el plano complejo, así que decidí emprender una nueva vida, para lo cual me inscribí en un programa de entrenamiento como astronauta en la floreciente carrera espacial. Muchas veces pensé que no seria aceptado, ya que cuando me inscribí era de los últimos de una larga sucesión, y además mi pasado me lo pondría crudo. Me equivoque, me aceptaron y logre cumplir el duro entrenamiento, me embarque en un viaje al espacio (vectorial) R3 donde tuve varias aventuras que contare en otra ocasión.

Pues bien, gane mucho, pero que mucho dinero, así que decidí retirarme de la vida activa. Compre un terreno en el plano mas caro del espacio conocido y allí me construí una hermosa casa con el resto de un teorema no acabado.

---

[1] Tomado del sitio web www.gratisweb.com/manifiecsto/notae4.htm. Modificado por Fabián Enrique Martínez.

Entonces conocí a la mujer que luego fue mi esposa. Era una hermosa vectora, con una representación gráfica que ponía los componentes a 100. Empezamos a salir, a tontear, a multiplicarnos escalarmente, etc... Sin embargo nuestro amor nos obligo a formar una familia, queríamos vectorcillos corriendo y revolcándose por el plano. Así que decidimos multiplicarnos vectorialmente.

Bueno, creo que ya estoy bastante viejo y que pronto tendré que dividirme por mi modulo para volver a nacer. Es triste, pues en la nueva vida no me acordare de esta. Pero si algo he aprendido en esta vida, es lo siguiente: "Todo vector tiene su momento"... ...Y creo que el mío ya ha pasado.

CAPÍTULO 3. TRASLACIÓN Y PARALELISMO EN EL PLANO

3.1 DIRECCIÓN Y SENTIDO

En el lenguaje cotidiano los términos **dirección, sentido u orientación**; se emplean indistintamente, pero en términos geométricos es necesario establecer con precisión el significado de cada uno de ellos.

Definición:

$\overline{SQ}, \overline{RT}$; $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{HJ}$ tienen la misma dirección de $\overleftrightarrow{AB}$, dado que están ubicadas sobre rectas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$. Sin embargo, $\overleftrightarrow{OH}$ tiene diferente dirección que $\overrightarrow{OP}$, tal y como se puede observar en la Fig. 65.

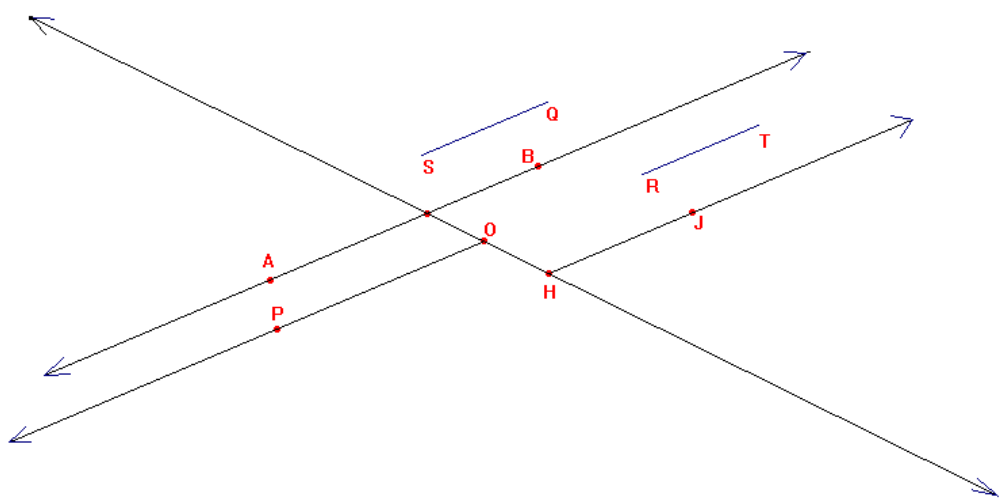


Fig. 65

Definición:

a) Sobre una recta *r,* dos segmentos (o dos semirrectas) tienen el mismo sentido, si establecido un orden en *r* se cumple que los segmentos o las semirrectas conservan este orden; en caso contrario diremos que tienen sentidos opuestos.

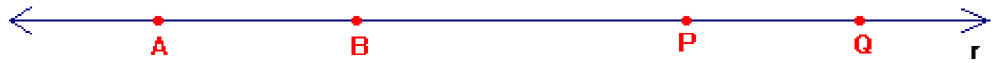


Fig. 66

En la Fig. 66, $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ tienen sentidos opuestos, aunque AB = BA; $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$ tienen el

mismo sentido; $\underset{QP}{\longrightarrow}$ y $\underset{BP}{\longrightarrow}$ tienen sentidos opuestos.

b) Dos semirrectas, no colineales, de igual dirección, tienen el mismo sentido cuando están ambas en un mismo semiplano, determinado por la recta que une sus orígenes; en caso contrario se dirá que tienen sentidos opuestos.

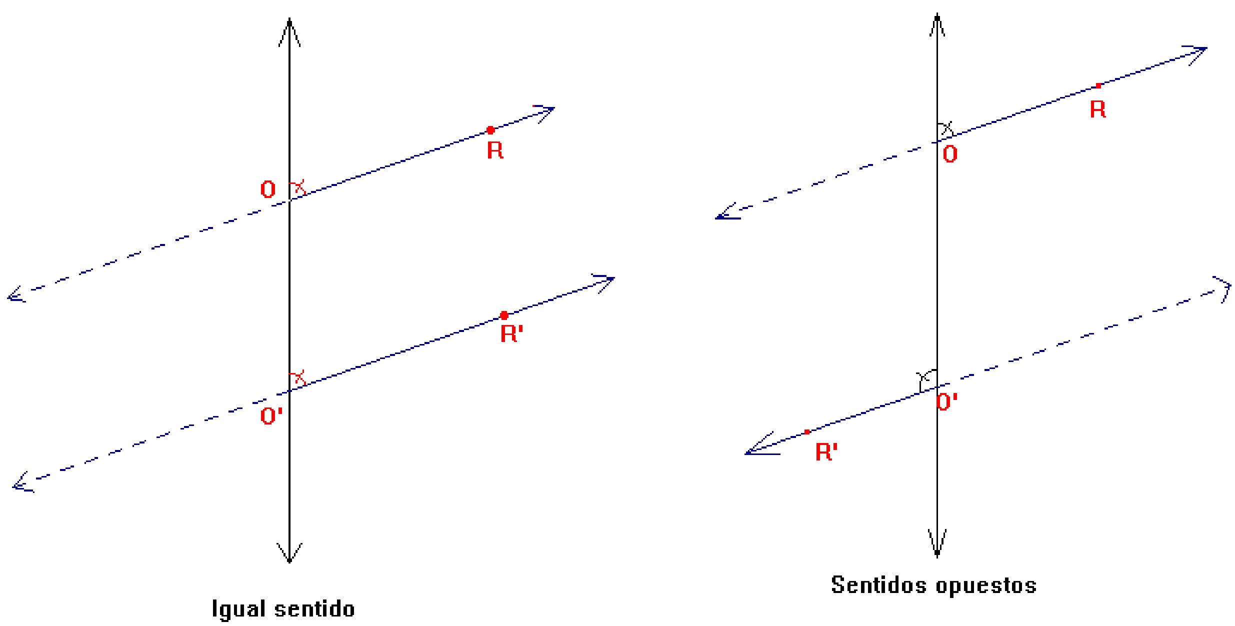


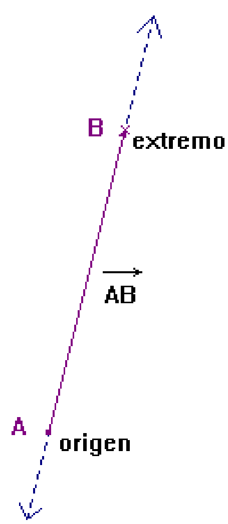
Fig. 67

3.2 TRASLACIÓN Y PARALELISMO

El concepto de ***vector***[2] tiene amplia aplicación en diferentes áreas, por ejemplo, en *física* es utilizado para representar la aceleración, la velocidad, la fuerza, la tensión, etc.; en *programación* son utilizados para organizar información; en *matemáticas* es objeto de estudio de una estructura algebraica denominada Espacio Vectorial; para los *Ingenieros* puede ser una matriz o una fuerza que representa la carga, la tensión, etc.; y así podemos seguir enumerando variadas situaciones donde es necesario emplear el concepto de vector. Para efecto de éste curso necesitamos entender el concepto de ***vector geométrico***.

<u>Definición</u>:

Un vector geométrico es un segmento orientado, el cual se caracteriza por tener dirección, sentido y longitud o magnitud. Así, la dirección del vector es la de la recta que lo contiene, el sentido es el que va del origen al extremo y la magnitud es la longitud del segmento.



2 http://enciclopedia.us.es/wiki.phtml?title=vector (de éste artículo se tomaron las ideas para la parte de introducción del concepto de vector)

Fig. 68

El vector AB lo simbolizaremos por $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$. ver Fig. 68.

Diremos que los vectores geométricos son iguales si tienen la misma dirección y sentido e igual magnitud. ver Fig. 69

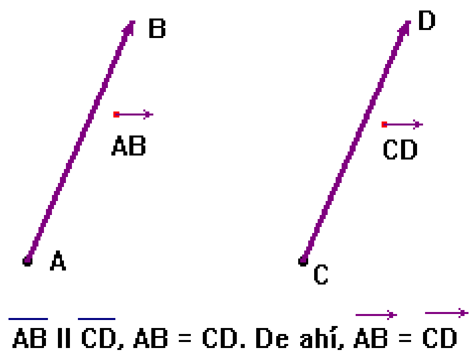
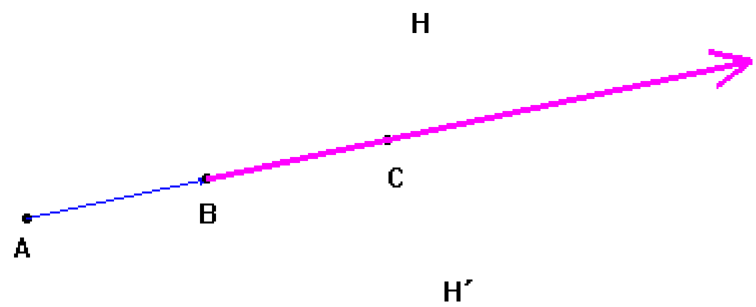


Fig. 69

<u>Definición</u>:

Sean A, B y C tres puntos colineales del plano α, tales que B está entre A y C. La ***traslación*** de $\underset{AB}{\longrightarrow}$ dada por $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, es el movimiento del plano que envía $\underset{AB}{\longrightarrow}$ en $\underset{BC}{\longrightarrow}$, dejando invariantes los semiplanos que determina la $\underset{AB}{\longleftrightarrow}$. La traslación determinada por el $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, la denotaremos por T_{AB} . (Fig. 70).

La recta que contiene el vector de desplazamiento se llama ***guía*** o directriz de la traslación***.*** (Fig.70).



$T_{AB}(\overrightarrow{AB})$ es $\overrightarrow{BC}$

Fig. 70

Observaciones:

- Observe que la traslación es un movimiento directo; pues deja invariantes los semiplanos H y H' determinados por $\overleftrightarrow{AB}$, a un mismo lado.
- $T_{AB} \neq T_{BA}$; pues los vectores que la definen son diferentes.
- $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ es el vector opuesto a $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$

Una traslación está definida por dos puntos A y B dados en un orden; es decir, la determina $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$. La $T_{AB}(\overleftrightarrow{AB})$ es $\overleftrightarrow{AB}$; esto significa que T_{AB} envía la $\overleftrightarrow{AB}$ en sí misma, aunque cada punto de $\overleftrightarrow{AB}$ es transformado en otro punto diferente de $\overleftrightarrow{AB}$ debido al desplazamiento.

EJEMPLOS

A. Dada una traslación definida por el vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, encontrar la traslación del punto P.

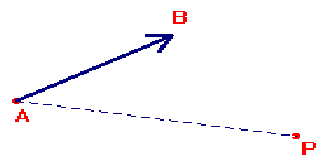


Fig. 71

1. Construimos $\underset{AP}{\longrightarrow}$. Ver Fig.71
2. Con el compás se toma la longitud de $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ (centro en A); luego haciendo centro en P se traza un arco de circunferencia sobre el mismo semiplano de $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, determinado por $\underset{AP}{\longrightarrow}$.
3. De la misma forma, con el compás, tomamos la longitud de $\overline{AP}$ y con centro en B trazamos otro arco de circunferencia que intercepte al primer arco construido.
4. El punto P', donde se cortan los arcos trazados, es el transformado de P. Es decir que
   $T_{AB}(P)$ es P'. Ver Fig. 72.

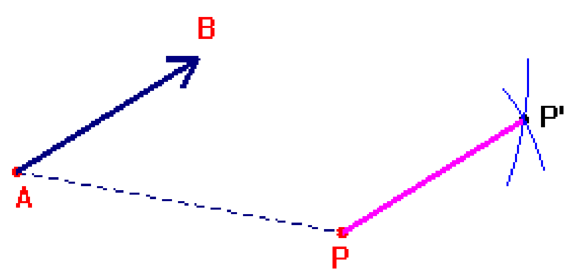


Fig. 72

B. Si P esta entre A y B, encontrar la traslación del punto P.

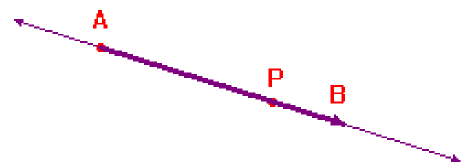


Fig. 73

Se construye la recta que contiene $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$. Con el compás y con centro en A se toma la longitud de $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.

Con centro en P se traza un arco de circunferencia cuyo radio es AB hasta cortar la prolongación del $\overline{AB}$ en el punto P'. Ver Fig. 73.

C. Dada una recta ℓ y un vector $\overrightarrow{\mu}$, efectuamos la traslación de ℓ definida por μ.

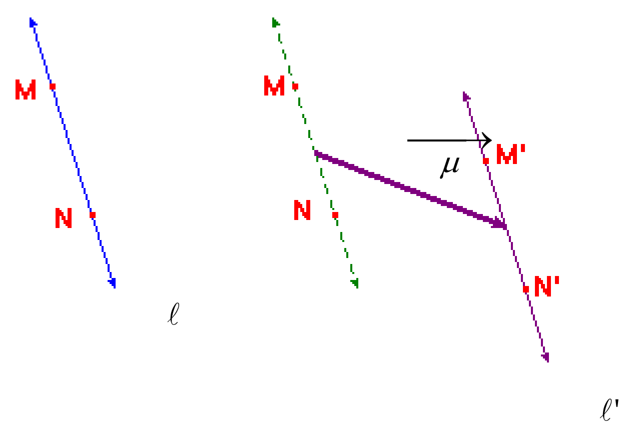


Fig.74

Con ayuda de escuadras se desplaza la recta ℓ hasta el punto terminal de μ. Ver Fig. 74

D. Obtener la transformación del segmento $\overline{MN}$ a partir del vector $\overrightarrow{\mu}$.

Por los puntos M y N se trazan semirrectas paralelas al vector μ. Ver Fig. 75

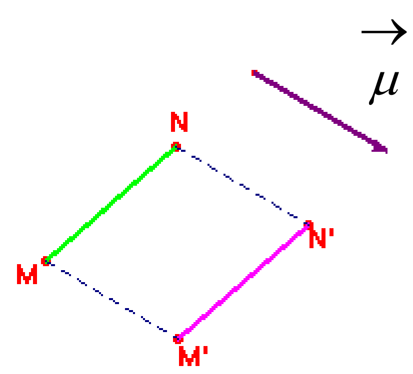


Fig. 75

Teorema:

En un plano, al aplicar a una recta r una traslación, se obtiene otra recta r' paralela a r y éstas rectas forman con la directriz ángulos congruentes.

Demostración:

Consideremos el caso en el cual r no es paralela a la directriz y sean A, A' los puntos donde r y r' cortan a ésta, respectivamente. Esto muestra que es la traslación $T_{AA'}$, que envía a *A* en *A*'. Probemos que r y r' forman ángulos congruentes con la directriz. Expresemos ésta traslación como la unión de dos semirrectas opuestas *t* y *t* '. Ver Fig. 76.

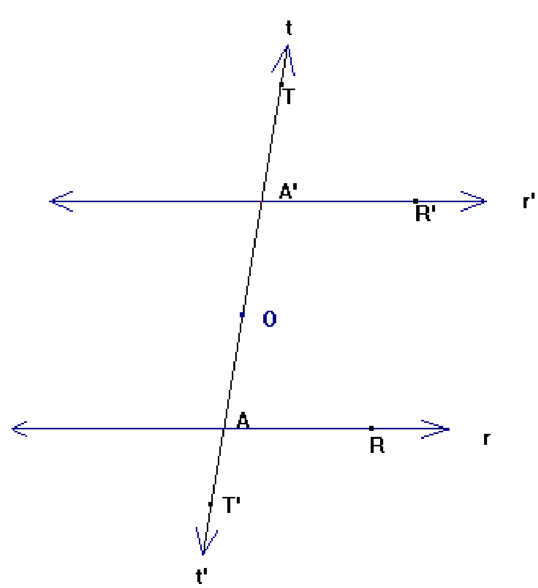


Fig. 76

Entonces, $T_{AA'}(\angle RAT) \cong \angle R'A'T$, pues $T_{AA'}(A)$ es A', $T_{AA'}(\overrightarrow{AR})$ es $\overrightarrow{A'R'}$ y $T_{AA'}(\overrightarrow{AT})$ es $\overrightarrow{A'T}$. Por tanto $\angle RAT \cong \angle R'A'T$.

Probemos, ahora, que r II r''. Sean $\overrightarrow{A'S}$ y $\overrightarrow{AP}$ las semirrectas opuestas

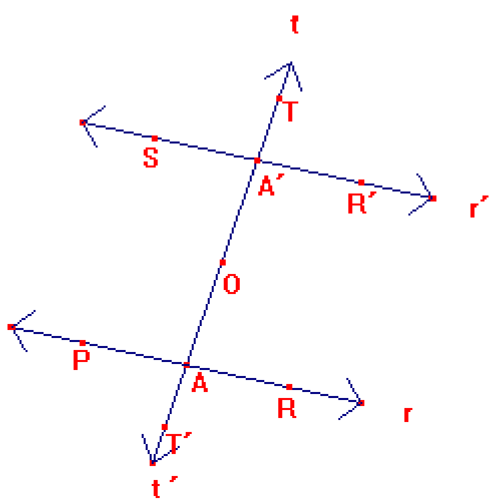


Fig. 77

de $\overrightarrow{A'R'}$ y de $\overrightarrow{AR}$ respectivamente y O el punto medio de $\overline{AA'}$, ver figuras 76 y 77.

Sea S la simetría de centro *O* en el plano de r y r'. Tenemos $S(\angle RAT)_0 \cong \angle SA'T'$ y $S(\angle PAT)_O \cong \angle R'A'T'$, pues $S(A)_O \cong A'$, $S(\overrightarrow{AT})_O$ es $\overrightarrow{A'T'}$ y $\angle RAT \cong \angle R'A'T$, como ya se demostró.

En consecuencia, $S(r)_O$ es r'. Luego r II r'' (Recordemos que dos rectas simétricas, respecto a un punto, son paralelas).

Corolario: Dos ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos y dirigidos ambos en el mismo sentido o en sentidos opuestos son congruentes; si en los lados paralelos un par de ellos van en sentidos opuestos, los ángulos son suplementarios. Ver Fig. 78 (a).

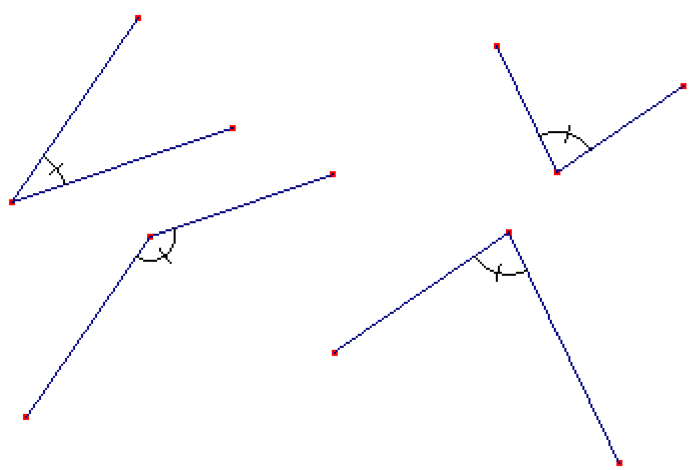


Fig. 78 (a)

Teorema:

Si $T_{AA'}(P)$ es P', entonces: $\overline{PP'} \cong \overline{AA'}$, $\overline{AP} \cong \overline{A'P'}$ y $\overline{PP'}$ II $\overline{AA'}$, $\overline{AP}$ II $\overline{A'P'}$, respectivamente.. Fig. 78(b).

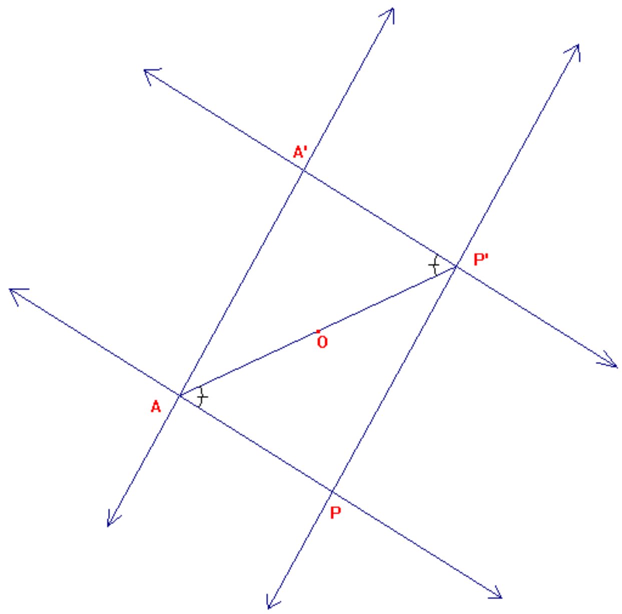


Fig. 78 (b).

3.3 AXIOMA DE PARALELISMO[3]

A lo largo de la historia de las matemáticas, quizá sea el quinto postulado el enunciado más controvertido. El problema no surge porque alguien dude de la verdad de su contenido; realmente, siempre se aceptó que era una necesidad lógica. Lo que siempre se discutió fue su carácter de postulado; ya el escritor clásico *Proclo* advertía de que era más bien un *teorema* y, por tanto, debería ser demostrado a partir de los otros cuatro.

Hasta el siglo XIX, innumerables matemáticos intentaron demostrarlo, pero nunca lo consiguieron, y aunque dieron con numerosos enunciados equivalentes a él, la búsqueda de una demostración continuó, muchas veces incluso por el afán de alcanzar fama eterna. Ya entrado el siglo XIX, tres matemáticos, *Gauss, Bolyai* y *Lobachevski*, independientemente, llegaron a la conclusión de que podía obtenerse una nueva geometría, de toda consistencia lógica, sin aceptar el *postulado de las paralelas*; más exactamente, una geometría, igual en todo a la de *Euclides,* pero en la que los ángulos de un triángulo sumaran menos de 180º. Fue éste el primer invento de *geometría no* *euclídea*; algunos años después, otro matemático, *Riemann,* creó otra geometría no euclídea suponiendo rectas no infinitas y en la cual resultaba que la suma de los ángulos de un triángulo superaba 180º.

Axioma de paralelismo (Quinto Postulado de Euclides)

Por un punto P exterior a una recta m pasa una y sólo una paralela a ella.

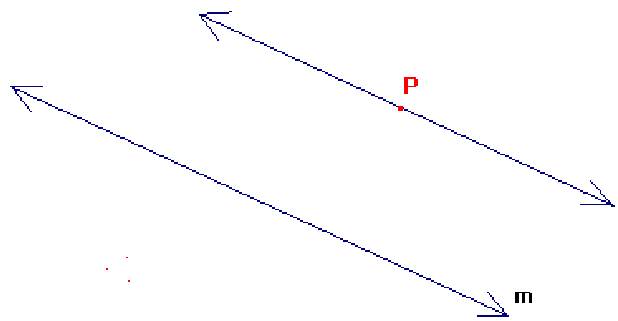


Fig. 79

Observaciones:

- Si una recta a corta a otra b, corta también a todas sus paralelas.
- Se dice que un conjunto de rectas paralelas, tienen la misma dirección.
- Dos rectas distintas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.
- Si una recta es perpendicular a otra lo es a todas sus paralelas.
- Dos rectas respectivamente perpendiculares a dos rectas paralelas también son paralelas entre sí.
- Si dos rectas se cortan, sus perpendiculares respectivas también se cortan.

Definición:

Tres rectas secantes no concurrentes r, s y t determinan las siguientes clases de ángulos:

[3] Nota tomada del sitio web www.descartes.com

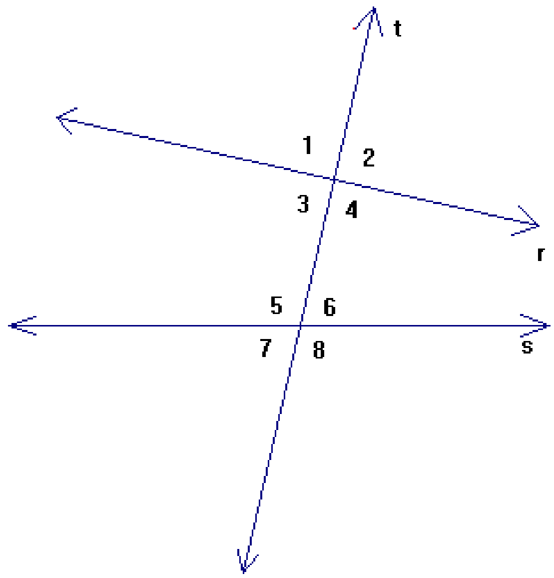


Fig. 80

- Los ángulos 3, 4, 5 y 6, que se denominan ángulos internos.
- Los ángulos 1, 2, 7 y 8, que se denominan ángulos externos.
- Los pares de ángulos 3 y 6, 4 y 5 , que se llaman ángulos alternos internos y los ángulos 1 y 8, 2 y 7 que se denominan ángulos alternos externos.
- Los ángulos 3 y 5, 4 y 6 que se llaman ángulos conjugados[4].
- Los ángulos del mismo semiplano, uno interno y otro externo, se llaman ángulos correspondientes. Por ejemplo 2 y 6.

Teorema:

Sean r, s y t tres rectas secantes no concurrentes. Entonces r y s son paralelas sí y solo sí:

1. Los ángulos alternos internos son congruentes
2. Los ángulos alternos externos son congruentes
3. Los ángulos correspondientes son congruentes
4. Los ángulos conjugados son suplementarios.

La demostración de este teorema se hace en los dos sentidos:

i. Si p, entonces q, y,

[4] en algunos textos los ángulos 3 y 5 o 4 y 6 se denominan colaterales

ii. Si q, entonces p.

Demostración: i)[5] Si r II s, en la traslación T_{AB} (A) = B, y T_{AB} (s) = r. Luego, $\angle 6 \cong \angle 2$ pues el movimiento conserva los ángulos. La congruencia de los ángulos alternos internos, alternos externos se deduce del teorema de los ángulos opuestos por el vértice y del hecho de que un ángulo llano mide 180^0. También se dice que los ángulos conjugados son suplementarios.

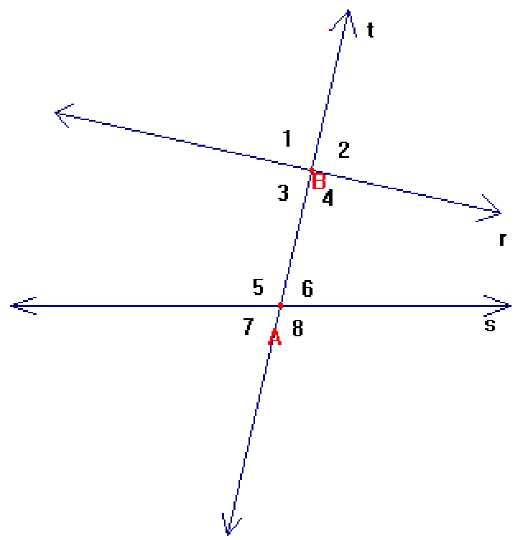


Fig. 81

ii)[6] Supongamos la congruencia entre los ángulos anotados en el enunciado del teorema. Puesto que $\angle 6 \cong \angle 2$, entonces, T_{AB} (A) es B, esto implica que T_{AB} (s) es r. Por tanto r II s.

Teorema:

El producto de dos traslaciones, del mismo plano, es una traslación.

5 Demostraremos que si r y s son paralelas, entonces se da la congruencia entre los ángulos anotados en el enunciado del teorema.

6 Demostraremos que si se da la congruencia entre los ángulos anotados en el enunciado del teorema entonces r II s.

*Demost*ración:

Sean T_{AB} y T_{AC} dos traslaciones. Sea D un punto, de modo que los vectores $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ sean iguales. Ver Fig.82.

Sea r la semirrecta AD. Hallemos $(T_{AC} \circ T_{AB})$ (r).

$(T_{AC} \circ T_{AB})$ (r) = T_{AC} $(T_{AB}$ $(r))$= $T_{AC}(r')$, donde $r' = T_{AB}(r)$. Pero, $T_{AC}(r') = T_{BD}(r')$, pues $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ = $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$ Sea $r'' = T_{BD}(r')$. Puesto que r II r' y r'II r'', entonces r II r'', por tanto, r y r''son colineales, ya que tienen un punto en común y son paralelas.

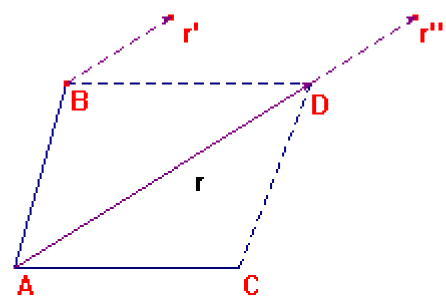


Fig. 82

Es decir, $T_{AC} \circ T_{AB}$ manda la semirrecta r, de origen A en la semirrecta, r´´, de origen D. Probemos que: $T_{AC} \circ T_{AB} = T_{AD}$. Basta sólo ver que $T_{AC} \circ T_{AB}$ deja invariante los planos determinados por $\underset{AD}{\longleftrightarrow}$. Sea Q un punto en uno de éstos semiplanos y l la recta paralela a $\underset{AD}{\longleftrightarrow}$ por Q.

Observe que, l está contenida en el semiplano de Q. Además, por lo visto anteriormente, $(T_{AC} \circ T_{AB})(Q)$ es un punto de l.

3.4 OBSERVACIONES

1. Dos rectas distintas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

2. Si una recta es perpendicular a otra, lo es a todas sus paralelas.
3. Dos rectas respectivamente perpendiculares a dos rectas paralelas también son paralelas entre sí.
4. Si dos rectas se cortan, sus perpendiculares respectivas también se cortan.

3.5 La paralela como lugar geométrico

El lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de una recta es el conjunto de dos rectas paralelas a ella situadas una en cada uno de los semiplanos que ella determina.

Teorema:
En todo triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos interiores es igual a 180^0.
Demostración. Ver ejercicio 2 del taller

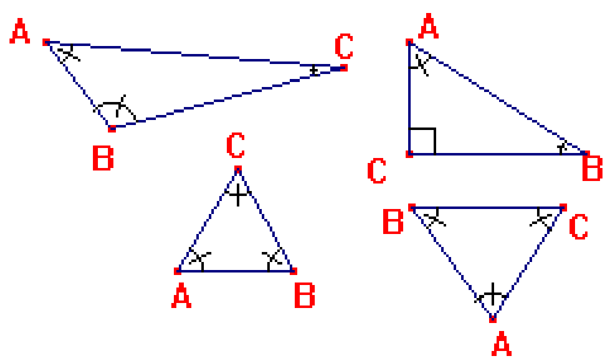


Fig. 83

Corolario: En un triángulo rectángulo, las medidas de los ángulos agudos suman 90^0.

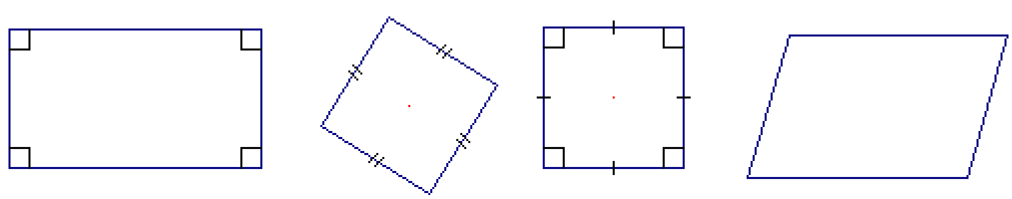
3.6 CUADRILÁTEROS

Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros tienen distintas formas pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. En todos los cuadriláteros la suma de las medidas de los ángulos interiores es igual a 360º.

Los cuadriláteros se clasifican según el paralelismo de sus lados en:

3.6.1 **Paralelogramos** son cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos dos a dos. A su vez, éstos se dividen en cuatro clases:

- **Rectángulos**, aquellos que tienen los cuatro ángulos congruentes.
- **Rombos**, que tienen los cuatro lados congruentes.
- **Cuadrados**, aquellos que tienen los cuatro ángulos congruentes y los cuatro lados congruentes.
- **Romboides**, aquellos paralelogramos que no son rectángulos, ni rombos, ni cuadrados.



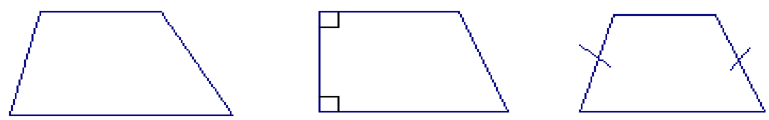
paralelogramos

3.6.2 **Trapecios** son cuadriláteros que tienen dos lados paralelos, de distinta longitud. Los otros dos lados no son paralelos.

Hay tres tipos de trapecios:

- **Trapecios rectángulos** que tienen dos ángulos rectos, de 90º.
- **Trapecios isósceles**, cuyos lados no paralelos tienen la misma longitud.
- **Trapecios escálenos**, aquellos que no son ni rectángulos ni isósceles.

3.6.3 Los **trapezoides** son cuadriláteros cuyos lados no son paralelos.



Escaleno *Rectángulo* *Isósceles*

trapecios

Teorema:

En todo paralelogramo:

1. Los lados opuestos son congruentes.
2. Los ángulos opuestos son congruentes.
3. Los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios.
4. Las diagonales se cortan en su punto medio.

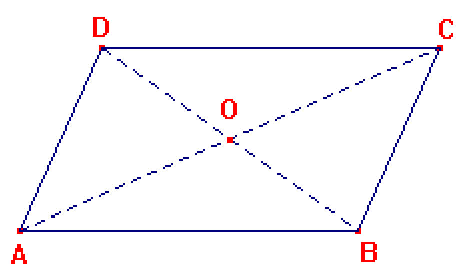


Fig.84

Demostración:

Sea $ABCD$ un paralelogramo, entonces $\overline{AB}$ II $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ II $\overline{BC}$, luego:

1. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ por ser segmentos paralelos comprendidos entre paralelas.

2. $\overline{AB}$ II $\overline{DC}$ y $\overline{AD}$ II $\overline{BC}$, luego $\angle DAB \cong \angle BCD$. En forma análoga se puede demostrar que $\angle ADC \cong \angle CBA$.

3. $\angle BAD$ y $\angle ADC$ son suplementarios por ser ángulos colaterales internos comprendidos entre paralelas.

4. En el paralelogramo $ABCD$ consideremos $\overline{AC}$, sea O el punto medio de $\overline{AC}$. Entonces:

$$S(A)_O \cong C$$

$$S(\overline{AO})_O \cong \overline{CD}$$

$$S(B)_O \cong D$$

Luego O es punto medio de $\overline{BD}$. Por tanto las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Ver Fig.84

NOTA: Este punto O es el centro de simetría del paralelogramo $ABCD$

El recíproco de éste teorema, también se cumple

Recíproco: Un cuadrilátero es un paralelogramo, si se cumplen los siguientes argumentos:

1. Si los lados opuestos son congruentes.
2. Si los ángulos opuestos son congruentes.

3. Si los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios.

4. Si las diagonales se cortan en su punto medio.

Ver Fig. 84

<u>Teorema:</u>

Todo cuadrilátero que tiene dos lados congruentes y paralelos es un paralelogramo.

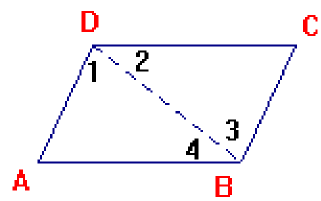


Fig. 85

Demostración:

Sea $\overline{AB}$ II $\overline{DC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, debemos demostrar que $\overline{AD}$ II $\overline{BC}$,

Tracemos la diagonal BD; por hipótesis $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y además decimos que $\angle 2 \cong \angle 4$, por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

Por lo tanto $\Delta ABD \cong \Delta BCD$, por el criterio LAL.

Por consiguiente: $\angle 1 \cong \angle 3$ por ser ángulos homólogos de triángulos congruentes; y además $\overline{AD}$ II $\overline{BC}$ por que los ángulos alternos internos ($\angle 1$ y $\angle 3$) son congruentes

<u>Teorema:</u>

Las diagonales de un rectángulo son congruentes

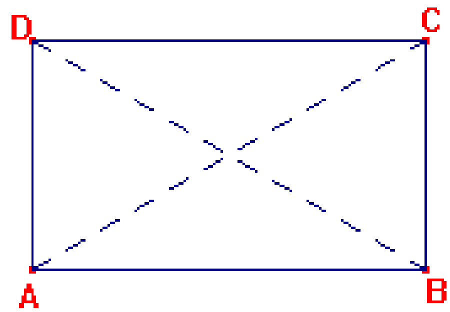


Fig. 86

Demostración: (ejercicio)

Teorema:

Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos del rombo.

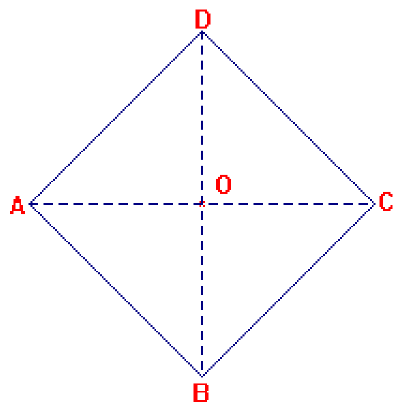


Fig.87

Demostración:

Sea $ABCD$ un rombo, entonces $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$.

Sea $\overline{BD}$ una diagonal (eje de simetría del rombo), el simétrico de A es C, luego $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Sea $\angle CBD$, la inversión del ángulo respecto a $\overline{BD}$ es $\angle ABD$, luego $\angle ABD \cong \angle CBD$. Por consiguiente $\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$.

Si $\overline{AC}$ es eje de simetría entonces, la inversión de $\angle BAC$ es $\angle CAD$, luego $\angle BAC \cong \angle CAD$; por lo tanto $\overline{AC}$ es bisectriz del $\angle BAD$.

Teorema:

Dos paralelogramos son congruentes si tienen dos lados contiguos y el ángulo que forman respectivamente congruentes.

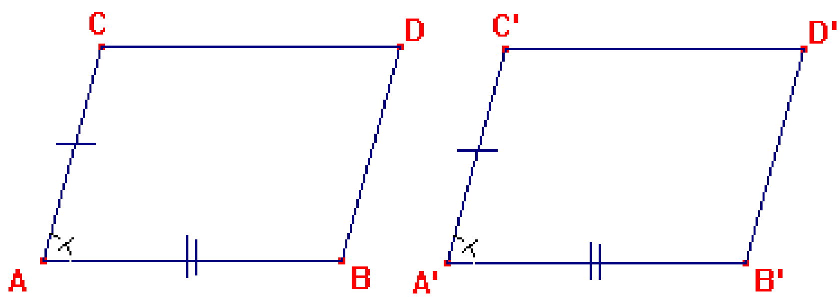


Fig. 88

Demostración: (ejercicio)

Corolarios:

1. Dos rectángulos son congruentes cuando tienen dos lados contiguos respectivamente congruentes.

2. Dos rombos son congruentes cuando tienen un lado y un ángulo respectivamente congruentes.

3. Dos cuadrados son congruentes cuando tienen un lado congruente

Definición:

1. En un paralelogramo, se llama paralela media al segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos. Fig. 89 (a).

2. En un trapecio, se llama paralela media al segmento que une los puntos medios de sus lados no paralelos. Fig. 89 (b)

3. En un triángulo se llama paralela media al segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos. Fig. 89 (c).

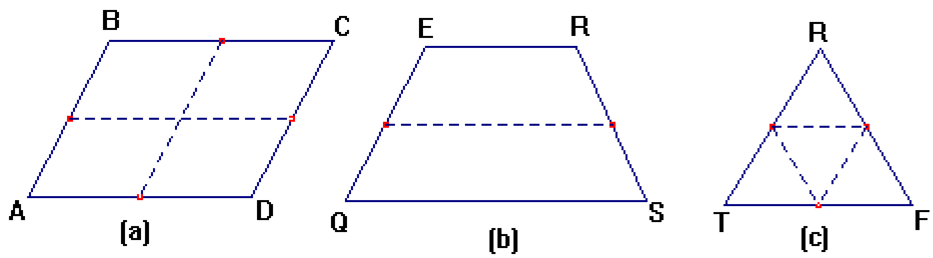


Fig. 89

Teorema:

La base media de un trapecio es paralela a la base y su longitud es la semisuma de las medidas de la base.

Demostración:

Sea el trapecio ABCD Y MN su paralela media. Construyamos el trapecio simétrico a éste respecto al punto N; es decir, el trapecio A'B'DC, siendo D el simétrico de C y viceversa. Como las rectas simétricas en la simetría respecto a N son paralelas, obtenemos el paralelogramo AB'A'B, del cual MM' es una paralela media. Esto quiere decir que BA' = MM' = AB'. Como AD = CA' y BC = DB' (por las propiedades del movimiento), entonces, además de ser los segmentos BC, MN y AD paralelos, se deduce que MN = $1/2(BC + AD)$.

Ver Fig. 90

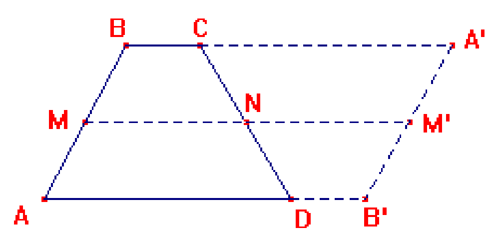


Fig.90

Teorema:

Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son congruentes.

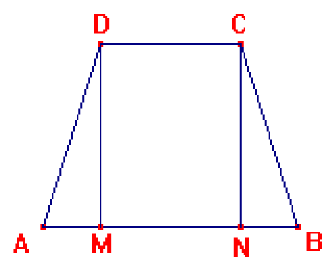


Fig. 91

Demostración: (ejercicio).

Teorema:

Las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes

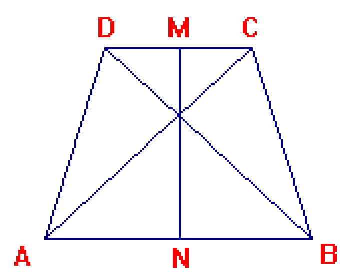


Fig.92

Demostración: (ejercicio).

Teorema:

1. En un paralelogramo, la paralela media es congruente y paralela a los otros dos lados sin punto en común con ésta.

2. En un triángulo la paralela media es paralela al tercer lado sin punto en común con ésta, y de longitud igual a la mitad de la longitud de ésta.

Corolario: Tanto en un trapecio como en un triángulo, la paralela a una base trazada por el punto medio de un lado, corta al otro lado en su punto medio.

3.7 TALLER DE "TRASLACIÓN Y PARALELISMO"

1. Demuestre que la relación "ser paralelo" es una relación de equivalencia.
2. Demuestre que: " En todo triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 180^0."
3. Demuestre que en un triángulo rectángulo, la suma de las medidas de los ángulos agudos es 90^0.
4. Demuestre que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo, de n lados es (n-2) veces el ángulo llano.
5. En un Triángulo ABC, el ángulo A es recto; D es el punto medio de BC, probar que AD = ½ BC.
6. Demuestre que la medida de cualquier ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes.
7. En la siguiente figura considere:

   Si l es paralelo a m y además:

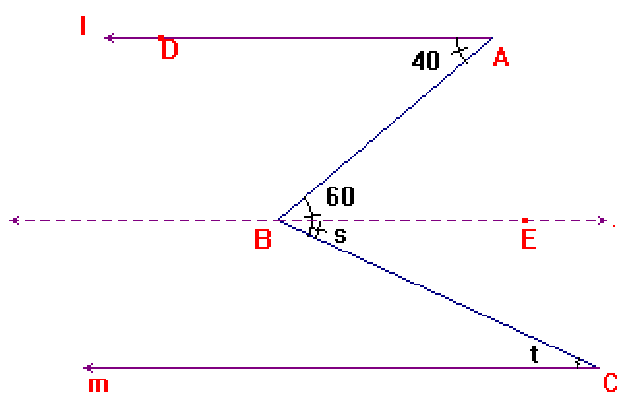
   $m(\angle DAB) = 40^0$

   $m(\angle ABC) = 60^0$

   Encuentre:

   $m(\angle s) = ?$

   $m(\angle t) = ?$

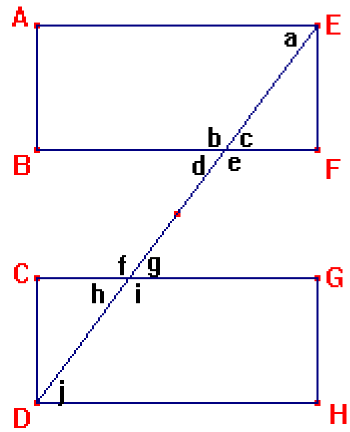


   Calcular la medida de los ángulos s y t.

8. Sabiendo que AB II EF II CD II GH, AE II BF II CG II DH y m($\angle$**a**) = 60^0.

Calcular:

m($\angle$**b**), m($\angle$**c**) , m($\angle$**d**) , m($\angle$**e**) , m($\angle$**f**) , m($\angle$**g**) , m($\angle$**h**) , m($\angle$**i**) , m($\angle$**j**)



9. Dados dos segmentos cualesquiera, construir un paralelogramo.

10. Construir un paralelogramo si se dan uno de sus ángulos, la longitud del lado más corto y la longitud de la diagonal mas larga.

11. Construir un rombo dado un ángulo y un segmento cuya longitud sea igual a la diagonal de un rombo.

ANEXO B. PRUEBA DIAGNÓSTICA

Universidad del Cauca.
Facultad de Ingeniería Civil.
Curso de Geometría Euclidiana
Prueba diagnóstica. Julio de 2003

Introducción: Los estudiantes de este curso de geometría formarán parte del proyecto “Incorporación de tecnologías computacionales en el currículo de geometría” el cual ha sido formulado por las profesoras Yeny Leonor Rosero y Alba Lorena Silva del departamento de matemáticas de la Universidad del Cauca y quiénes orientarán estos cursos.

La presente prueba ha sido diseñada sobre aspectos generales de geometría, con ellos buscamos hacer un diagnóstico sobre los conocimientos que los estudiantes han alcanzado en su formación básica y media en ésta área. Los resultados serán la pauta para el desarrollo del curso de geometría euclidiana, en este programa.

Por lo anterior es pertinente que la prueba sea respondida de la manera más responsable y honesta posible para así poder establecer condiciones de trabajo efectivas para el desarrollo del curso.

Objetivos:

1. Establecer su nivel de conocimiento alcanzado en el área de geometría en su formación básica y media.
2. Definir criterios para el estudio de la geometría a partir de los resultados obtenidos con esta prueba.

Cuestionario:

- **Dibuje tres triángulos diferentes y establezca la razón o razones de sus diferencias.**

- **Dibuje un par de rectas paralelas y tres rectas perpendiculares entre sí; un par de rectas que no sean ni paralelas ni perpendiculares.**

- **Según la figura 1, qué relación o relaciones existen, entre:**
  - **a)** $\angle 2$ **y** $\angle 5$
  - **b)** $\angle 6$ **y** $\angle 7$
  - **c)** $\angle 1$ **y** $\angle 2$
  - **d)** $\angle 3$ **y** $\angle 8$
  - **e)** $\angle 1$**,** $\angle 3$ **y** $\angle 7$**.**
  - **f)** Δ **ABG y** Δ **GBC.**
  - **g)** Δ **EFG y** Δ **GAB.**

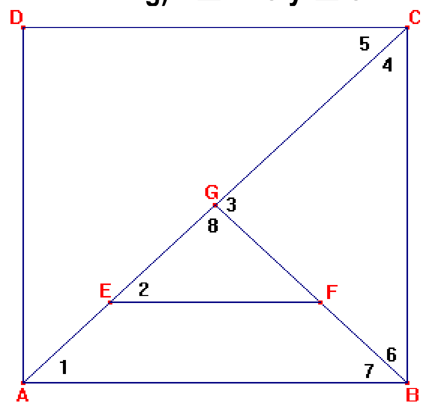


Figura1

- **¿Existe alguna diferencia entre círculo y circunferencia? Justifique su respuesta.**

- **Si el perímetro de un triángulo equilátero es 243 centímetros, ¿Cuál es la longitud de uno de sus lados? ¿Por qué?**

- **Haga una representación de un paralelogramo que tenga dos de sus ángulos rectos.**

ANEXO C. PRUEBA DE NIVEL 0

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
II PERIODO ACADEMICO DE 2003
TRASLACIÓN Y PARALELISMO EN EL PLANO

I. En la siguiente sopa de letras señale con un segmento las siguientes palabras:

RECTA, LADO, PLANO, PUNTO, SEGMENTO, TEOREMA, AXIOMA, COLINEAL, CONGRUENTE, VÉRTICE, LINEA, COORDENADA, ANGULO, ARISTA, GEOMETRIA, PAR.

<u>Existen palabras que se repiten, también debes resaltarlas</u>

R	E	C	T	A	A	E	S	T	A	M	O	L	G
P	S	I	N	R	T	X	T	E	R	E	A	A	E
U	S	A	D	I	S	E	I	O	S	D	E	E	O
N	N	E	X	S	I	P	O	O	O	L	I	N	M
T	C	A	R	T	R	L	L	R	M	E	S	I	E
O	L	O	S	A	A	U	C	O	E	A	N	L	T
T	C	E	P	T	G	O	S	D	V	M	E	O	R
N	D	I	R	N	E	C	C	I	E	O	A	C	I
U	N	Y	A	D	A	N	E	D	R	O	O	C	A
P	L	A	N	O	N	A	L	P	T	S	E	N	T
O	T	N	E	M	G	E	S	L	I	N	E	A	P
E	T	N	E	U	R	G	N	O	C	I	D	O	A
S	E	G	M	E	N	T	O	A	E	N	I	L	R

1. Al desarrollar esta sopa de letras, dar ejemplos de palabras que tengan la misma dirección o el mismo sentido.

2. Con tus palabras, explica qué entiendes por dirección y qué entiendes por sentido.

3. Con las letras restantes, ¿qué mensaje se forma?

_ _ _ _ _ _ _   _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _   _ _   _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _   _ _ _ _ _ _ _ _ _ _   _ _   _ _ _ _ _ _ _ _ _ _   _   _ _ _ _ _ _ _ _

II. Elabora un barco en papel silueta. Después de la construcción, dibuja sobre los dobleces del papel varias semirrectas paralelas.

ANEXO D. PRUEBA DE NIVEL 1

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
GEOMETRÍA EUCLIDIANA
PRUEBA DE NIVEL 1:TRASLACIÓN Y PARALELISMO EN EL PLANO

*Nombre:*____ *curso:*____________

Es importante que leas detenidamente cada uno de los ejercicios propuestos en esta guía.

1. Identificar Segmentos en la Fig.1 que sean paralelos a segmentos de la Fig.2

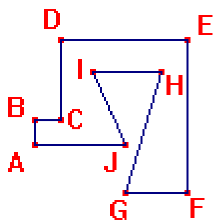


Fig. 1

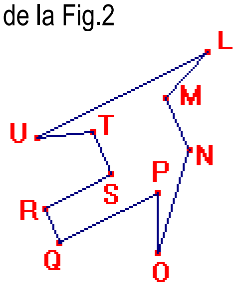
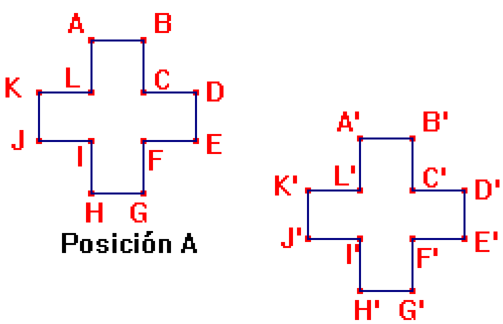


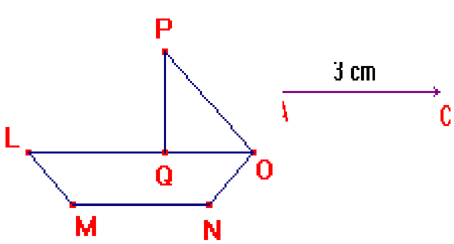
Fig. 2

2. ¿Qué sugerencias haría Ud. para ir de la posición A a la posición B?

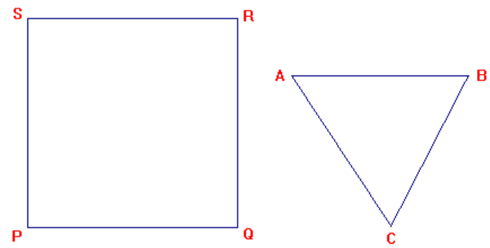


Posición A **Posición B**

3. Trasladar la figura como lo indica el vector



4. A partir del triángulo ABC y el cuadrado PQRS, Describir el procedimiento para obtener la Fig. 3



formar la figura:

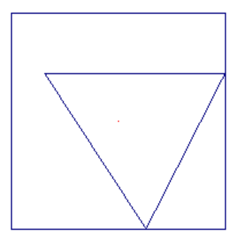
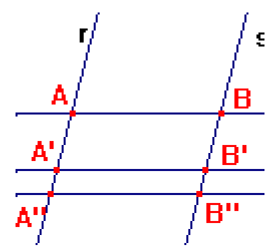
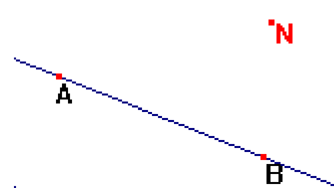


Fig. 3

5. En la siguiente figura, ¿Qué características geométricas se pueden encontrar?



6. Presenta sugerencias para Trazar una paralela a la recta AB que pase por el punto N



DIRECCIÓN Y SENTIDO.

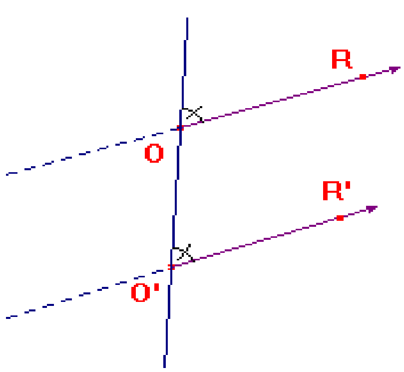
En el lenguaje cotidiano los términos dirección, sentido u orientación se emplean indistintamente, pero en términos geométricos es necesario establecer con precisión el significado de cada uno de ellos. Diremos que los puntos A, B; los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{RT}$ o las semirrectas $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{HJ}$ tienen la misma dirección pues están ubicadas sobre rectas paralelas entre si, es decir, en una misma dirección están todas las rectas paralelas entre sí.

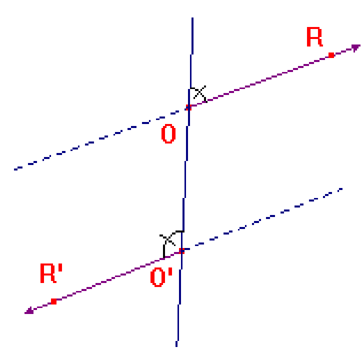
Sobre una recta *r,* dos segmentos (o dos semirrectas) tienen el mismo sentido, si establecido un orden en *r* se cumple que los segmentos o las semirrectas conservan este orden ; en caso contrario diremos que tienen sentidos opuestos

Fig.1

En la Fig. 1 , $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ tienen sentidos opuestos, aunque AB = BA; $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$ tienen el mismo sentido; $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{BP}$ tienen sentidos opuestos.

Dos semirrectas no colineales pertenecientes a rectas paralelas se dice que tienen el mismo sentido cuando están ambas en el mismo semiplano determinado por la recta que une sus orígenes, en caso contrario se dirá que tienen sentidos opuestos**.**



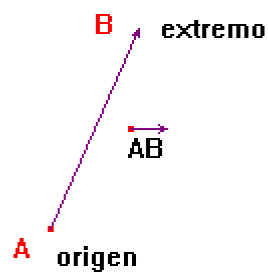


TRASLACIÓN Y PARALELISMO

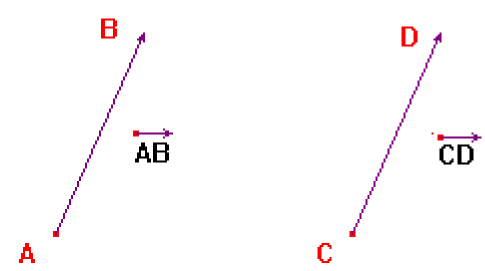
El concepto de vector tiene amplia aplicación en diferentes áreas, por ejemplo, en *Física* es utilizado para representar la aceleración, la velocidad, la fuerza, la tensión, etc.; en *Programación* son utilizados para organizar información; en *Matemáticas* es objeto de estudio de una estructura algebraica denominada Espacio Vectorial; para los *Ingenieros* puede ser una matriz o una fuerza que representa la carga, la tensión, etc.; y así podemos seguir enumerando variadas situaciones donde sea necesario emplear el concepto de vector. Para efectos de este curso necesitamos entender el concepto de ***vector geométrico***.

Un vector geométrico es un segmento orientado. Es decir que está caracterizado por una dirección, un sentido y una longitud o magnitud

El segmento AB con la orientación de la semirrecta AB, es el vector AB , denotado $\overrightarrow{AB}$.
La dirección del vector es la de la recta que lo contiene, el sentido es el que va del origen al extremo y la magnitud es la longitud del segmento.



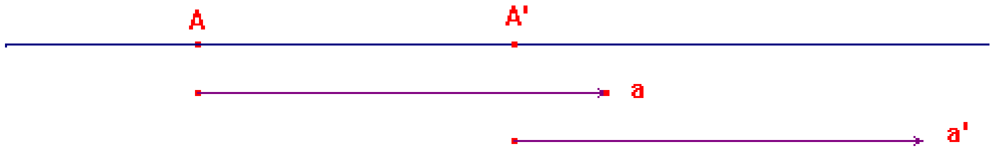
Diremos que los vectores geométricos son iguales si tienen la misma dirección, igual sentido y los segmentos que lo definen son congruentes



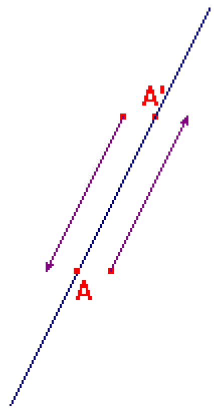
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, AB = CD. De ahi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

TRASLACIÓN

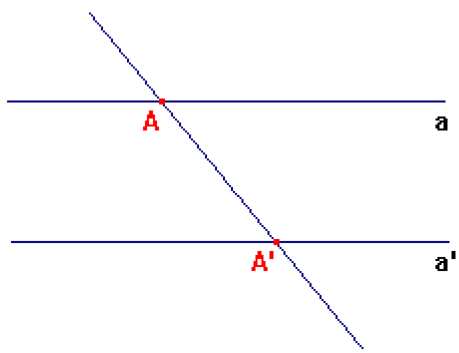
Dados dos puntos A y A’ del plano, consideremos en la recta que ellos determinan, las semirrectas a y a'. El movimiento que transforma la semirrecta a en a' conservando los semiplanos del mismo lado se denomina *Traslación*



Una traslación viene definida por dos puntos homólogos A y A’ dados en un orden.
Los vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{A'A}$ se denominan opuestos. La recta AA’ se transforma en si misma en una y otra traslación y se llama ***guía*** o directriz de la traslación.**.**



Rectas Homologas En Una Traslación

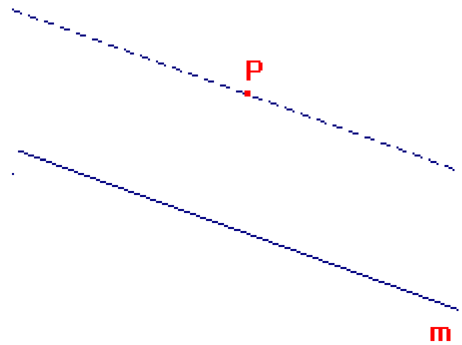


Por dos puntos homólogos A y A’ de la guía, se trazan 2 rectas homólogas a y a’ correspondientes en la traslación.

- Dos rectas homólogas forman ángulos congruentes con la directriz.
- Dos rectas homólogas en una traslación son paralelas.

Axioma de Paralelismo

Por un punto P exterior a una recta m pasa una y sólo una paralela a ella

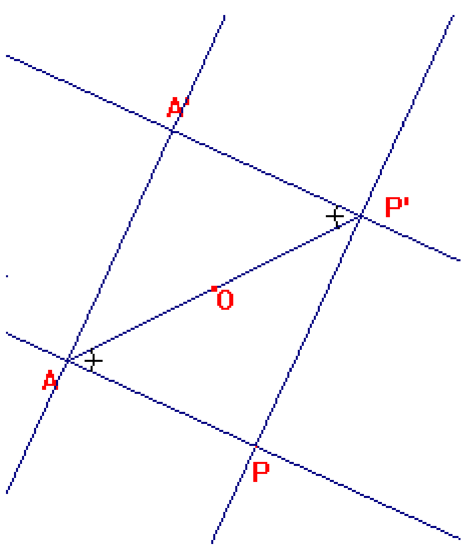


Observaciones:

- Si una recta a corta a otra b, corta también a todas sus paralelas
- Un conjunto de rectas paralelas se dice que tiene la misma dirección

Ángulos de lados paralelos

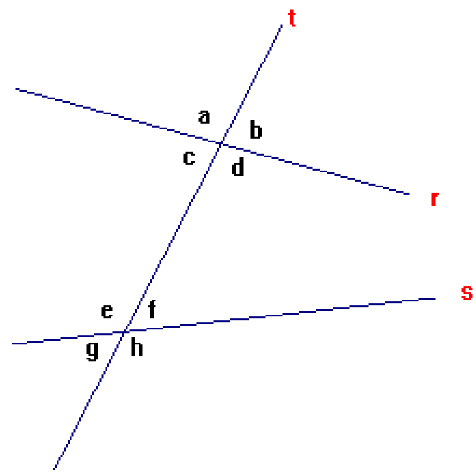
Dos ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos y dirigidos en mismo sentido o sentido opuesto son congruentes.



Dos puntos homólogos P, P’ en una traslación AA’ determinan un segmento PP’ congruente y paralelo al segmento AA’.

$\overline{AP}$ II $\overline{A'P'}$ por ser rectas homologas en la traslación AA’

Definición: Sean r ,s y t tres rectas secantes no concurrentes



Los ángulos d, c, e, f se denominan ángulos internos

Los ángulos a, b, g, h se denominan ángulos externos

Los pares de ángulos f y d, e y c se llaman ángulos alternos-internos y los ángulos a y h, g y b se denominan ángulos alternos-externos.

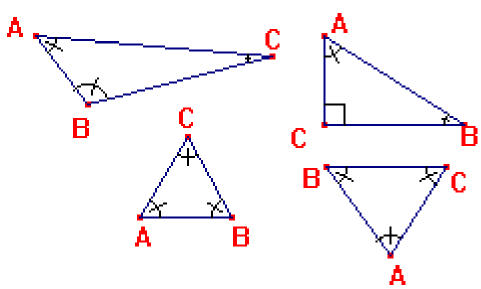
Los ángulos c y f, d y e se llaman ángulos conjugados.

Los ángulos del mismo semiplano, uno interno y otro externo, se llaman ángulos correspondientes. Por ejemplo b y f.

Teorema: Sean r, s, t tres rectas secantes no concurrentes. Entonces r y s son paralelas si y solo si:

1. Los ángulos alternos internos son congruentes
2. Los ángulos alternos externos son congruentes
3. Los ángulos correspondientes son congruentes
4. Los ángulos conjugados son suplementarios.

Teorema: En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a uno llano(180^0)

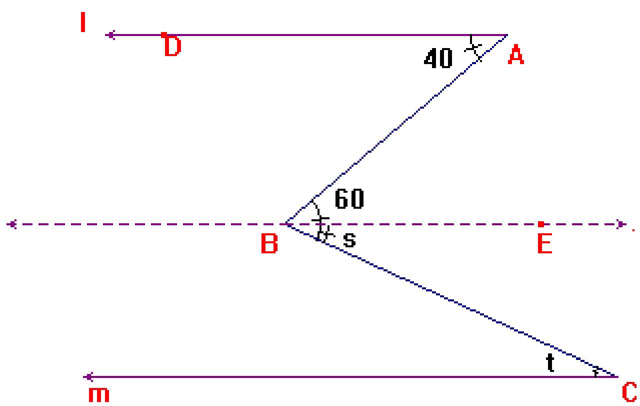


En todo triángulo ABC**:**

$$\mathbf{m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0}$$

Taller

1. Demostrar que el paralelismo es una relación de equivalencia.
2. Demostrar que en todo triángulo, la suma de sus ángulos interiores es 180^0.
3. En el Triángulo ABC El ángulo A es recto. D es el punto medio de BC, probar que AD = ½ BC.
4. Demostrar que la medida de cualquier ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes.
5. Dada la siguiente figura con las hipótesis, calcular la medida de los ángulos s y t



H: l es paralelo a m

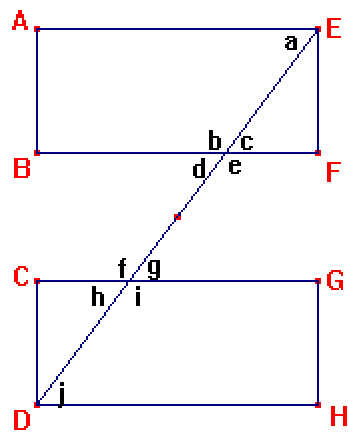
$m(\angle DAB) = 40^0$

$m\ (\angle ABC) = 60^0$

T: $m(\angle s) = ?$

$m(\angle t) = ?$

6. Sabiendo que AD II BE II CF, AE II BF II CG II DH y $m(\angle \mathbf{a}) = 60^0$. Calcular:
$m(\angle \mathbf{b})$, $m(\angle \mathbf{c})$, $m(\angle \mathbf{d})$, $m(\angle \mathbf{e})$, $m(\angle \mathbf{f})$, $m(\angle \mathbf{g})$, $m(\angle \mathbf{h})$, $m(\angle \mathbf{i})$, $m(\angle \mathbf{j})$



ANEXO E. PRUEBA DE NIVEL 2. MODELO 1.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRUEBA DE NIVEL 2

1. En cada una de las siguientes proposiciones, establezca el valor de verdad de cada una de ellas. En cada caso argumente su respuesta. (Respuesta sin justificación no será valorada).

    a. Si la diagonal de un cuadrilátero lo divide en dos triángulos congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

    b. Dos rectas perpendiculares a una tercera son secantes entre sí.

    c. La traslación es un movimiento directo del plano.

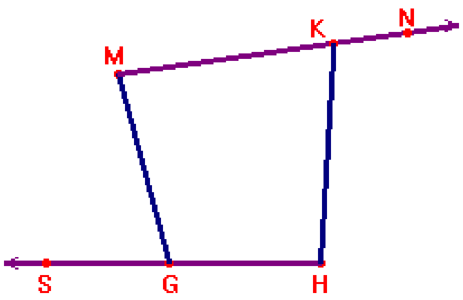
    d. La $T_{AB}[M] = T_{BA}[M']$

2. En la siguiente figura:

$\angle SGM = a$
$\angle HKN = b$
$\angle GMK = x$
$\angle KHG = y$

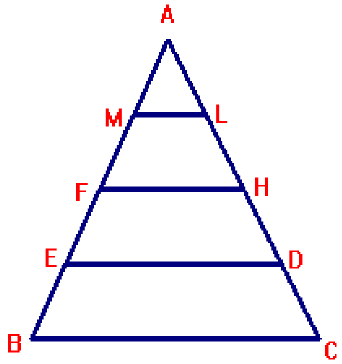
demostrar que:

$$\boldsymbol{a + b = x + y}$$



3. En las siguientes figuras determinar el valor de **x** y **y**

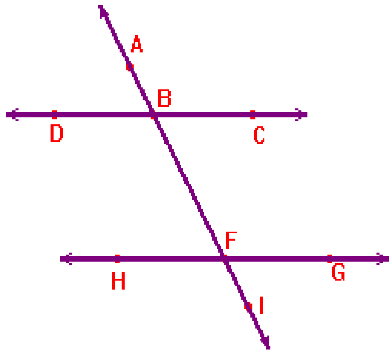
a.)



BC = 48
ML = x
ED = y
AM = MF = FE = EB

$\overline{ML} \parallel \overline{FH} \parallel \overline{ED} \parallel \overline{BC}$

b.)



$\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{HG}$
<DBF = x + y
<HFI = 2x - y
<BFH = 60

4. Dados dos segmentos cualesquiera, $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$, **construir** un paralelogramo.

NOTA:

• ***De los cuatro numerales planteados resuelva tres. Si resuelve los cuatro se evaluarán los tres primeros.***

• ***Desarrolle el examen en forma clara y ordenada.***

• ***Preguntas de carácter notacional***

ANEXO E. PRUEBA DE NIVEL 2. MODELO 2.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
TERCER PARCIAL DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Nombres:____ Grupo:_________

1. En cada una de las siguientes proposiciones, establezca el valor de verdad de cada una de ellas. En cada caso argumente su respuesta. (Respuesta sin justificación no será valorada).

   a. En un cuadrilátero. Si dos de sus ángulos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

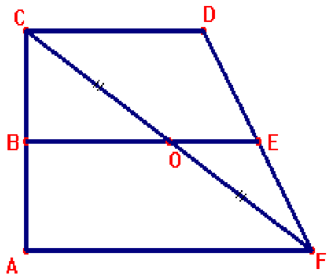
   b. Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

   c. Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un rectángulo.

   d. La $T_{BA}[S] = T_{AB}[S']$

2. En las siguientes figuras determinar el valor de **x** y **y**

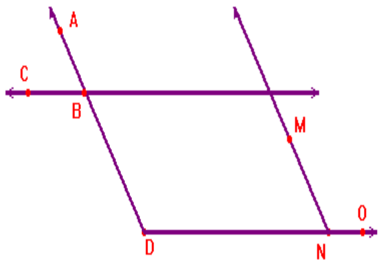
a.)



BC = 3x
BA = 3y + 22
ED = 5x + 9
EF = 8y
CO = OF

$\overline{CD} \parallel \overline{AF} \parallel \overline{BE}$

b.)



$\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{DO}$ y $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{NH}$
$\angle ABC = x$
$\angle MNO = y$
$\angle BDN = 130$

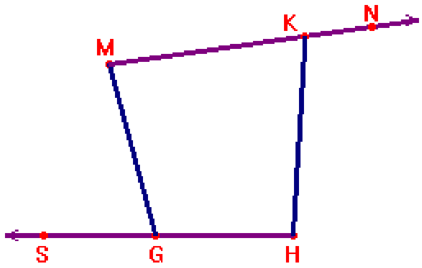
3. **<u>Construir</u>** un paralelogramo si se dan: uno de sus ángulos, la longitud del lado más corto y la longitud de la diagonal más larga.

4. En la siguiente figura:

$$\angle SGM = x$$
$$\angle HKN = y$$
$$\angle GMK = a$$
$$\angle KHG = b$$

demostrar que:

$$\boldsymbol{x + y = a + b}$$



NOTA:

• ***De los cuatro numerales planteados resuelva tres. Si resuelve los cuatro se evaluarán los tres primeros.***

• ***Desarrolle el examen en forma clara y ordenada.***

• ***Preguntas de carácter notacional***

ANEXO E. PRUEBA DE NIVEL 2. MODELO 3.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
TERCER PARCIAL DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Nombres:____ Grupo:__________

1. En cada una de las siguientes proposiciones, establezca el valor de verdad de cada una de ellas. En cada caso argumente su respuesta. (Respuesta sin justificación no será valorada).

   a. Un cuadrilátero que tenga dos ángulos y dos lados opuestos congruentes, es un paralelogramo.

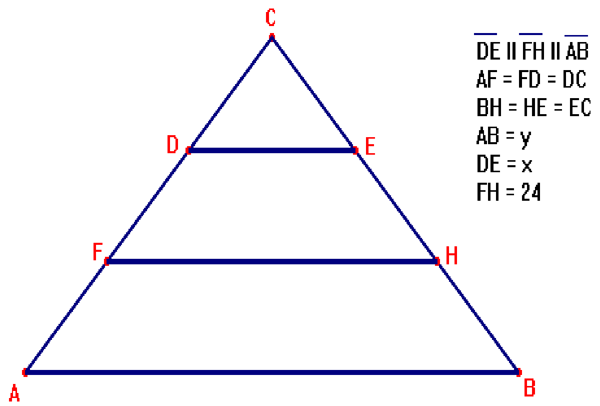
   b. Si dos semirrectas, no colineales, tienen el mismo sentido, entonces son paralelas.

   c. Dos vectores son iguales si tienen la misma dirección y el mismo sentido.

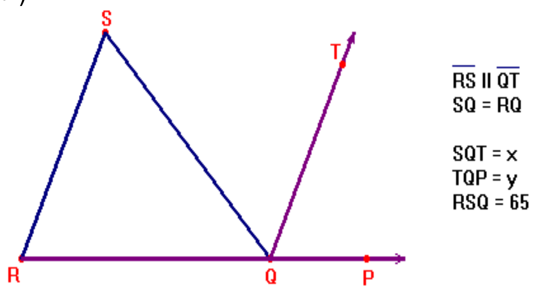
   d. La $T_{CD}[Q] = T_{DC}[Q']$

2. En las siguientes figuras determinar el valor de **x** y **y**

a.)



b.)



3. **Construir** un rombo, dado un ángulo y un segmento cuya longitud sea igual a la longitud de un rombo

4. En la siguiente figura:

$\angle SGM = a$

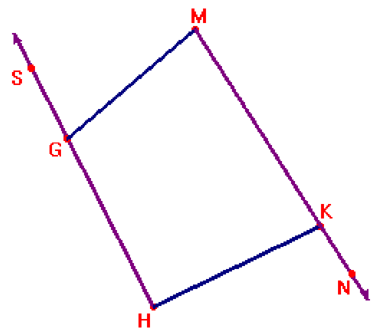
$\angle HKN = b$

$\angle GMK = x$

$\angle KHG = y$

demostrar que:

$$a + b = x + y$$



NOTA:

- *De los cuatro numerales planteados resuelva tres. Si resuelve los cuatro se evaluarán los tres primeros.*

- *Desarrolle el examen en forma clara y ordenada.*

- *Preguntas de carácter notacional*

ANEXO E. PRUEBA DE NIVEL 2. MODELO 4.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
TERCER PARCIAL DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Nombres:____ Grupo:_________

1. En cada una de las siguientes proposiciones, establezca el valor de verdad de cada una de ellas. En cada caso argumente su respuesta. (Respuesta sin justificación no será valorada).

   a. Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son congruentes.

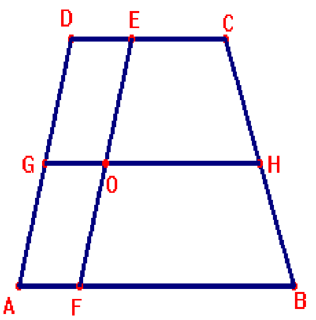
   b. Un cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos es un paralelogramo.

   c. La traslación es un movimiento inverso del plano.

   d. La $T_{EF}[L] = T_{FE}[L']$

2. En las siguientes figuras determinar el valor de **x** y **y**

a.)

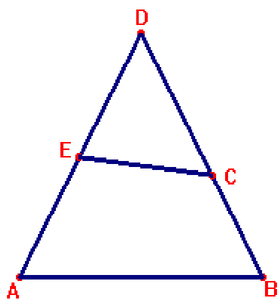


$\overline{DC} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{AB}$

$\overline{EF} \parallel \overline{AD}$

EO = 18
FO = 3x
CH = 20
CB = y

b.)



<EDC = x
<ECD = y
m<AEC = 110
m<EAB = 50
m<ABC = 70

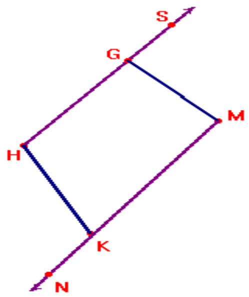
3. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ son congruentes con las diagonales de un rombo, **Construir** el rombo.

4. En la siguiente figura:

$\angle SGM = a$
$\angle HKN = b$
$\angle GMK = x$
$\angle KHG = y$

demostrar que:

x + y = a + b



NOTA:

- *De los cuatro numerales planteados resuelva tres. Si resuelve los cuatro se evaluarán los tres primeros.*
- *Desarrolle el examen en forma clara y ordenada.*
- *Preguntas de carácter notacional*