

ESTADO DEL ARTE DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA
“UN PANORAMA DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA”

Francia Arely Caicedo Urrea

Yudy Andrea Ibarra Sánchez

Jhon Jair Jiménez Gutiérrez

Claudia Marcela Paz Narváez

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURLES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2003

ESTADO DEL ARTE DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA
“UN PANORAMA DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA”

Francia Arely Caicedo Urrea

Seminario de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Matemática

Yudy Andrea Ibarra Sánchez

Jhon Jair Jiménez Gutiérrez

Claudia Marcela Paz Narváez

Seminario de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciados en educación con especialidad en Matemáticas

Director

Mg. Yilton Ovirne Riascos Forero

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA
EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN

2003

AGRADECIMIENTOS

Al magister Yilton Forero Riascos, por su constante y valiosa colaboración durante la carrera y en el desarrollo del seminario.

A Angel Hernán Zúñiga profesor de matemáticas, por sus sugerencias y contribuciones aportadas.

A nuestros padres, familiares y amigos por su apoyo permanente y constante motivación en el transcurso de nuestra carrera.

A la Universidad del Cauca y a todos los profesores del Departamento de matemáticas y demás personas que colaboraron con la realización de este.

CONTENIDO

	Pág N°
INTRODUCCIÓN	1
1. CAPÍTULO 1. UN PANORAMA DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA	4
1.1. LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA: UN CAMPO DE INNOVACIÓN	4
- ¿Qué es la Estadística?	4
- Algunas Notas Históricas	5
1.2. IMPORTANCIA DE LA ESTADÍSTICA EN LA EDUCACIÓN	7
1.3. SURGIMIENTO DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA	12
1.4. INVESTIGACIÓN EN LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA	24
2. CAPÍTULO 2. MODELO TEÓRICO SOBRE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS	32
2.1. UN PRIMER ACERCAMIENTO	34
2.2. REALISMO Y PRAGMATISMO	40
2.3. PROBLEMAS MATEMÁTICOS, PRÁCTICAS E INSTITUCIONES	44
2.3.1. Concepto de Problema	46
2.3.2. Prácticas Significativas	51
2.3.3. La Noción de Institución	51
2.4. OBJETOS INSTITUCIONALES Y OBJETOS PERSONALES	53
2.4.1. Objeto Personal	55
2.5. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE UN OBJETO	56
2.5.1. Dimensión Subjetiva del Significado	58
2.6. SIGNIFICADO Y COMPRENSIÓN	59
2.6.1 El Problema de la Evaluación de los Conocimientos	61
2.7. LAS NOCIONES DE OBJETO MATEMÁTICO Y SIGNIFICADO EN OTROS AUTORES.	63

2.8. SIGNIFICADOS Y CONCEPCIONES	69
2.9 TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA, SIGNIFICADO Y ECOLOGÍA CONCEPTUAL.	72
2.1.0.SÍNTESIS Y EVALUACIÓN DEL MODELO PROPUESTO	74
3. CAPÍTULO 3. EL CURRÍCULO DE ESTADÍSTICA Y SUS COMPONENTES	78
3.1 CURRÍCULO DE ESTADÍSTICA INTERNACIONAL	80
3.1.1. BASES EN QUE SE APOYA EL DISEÑO CURRICULA	80
- Fenómenos Estocásticos	80
- Concepción de las Matemáticas	86
- Teorías Educativas	91
- Factores que Condicionan el Currículo Estadístico	102
- La Evaluación del Aprendizaje	106
- Materiales y Recursos Didácticos	113
3.2. CURRÍCULO NACIONAL	128
3.3. CURRÍCULO INSTITUCIONAL	135
3.4 CURRÍCULO DE AULA	136
4. CAPITULO 4. ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS	139
4.1 LA ESTADÍSTICA EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA	139
4.2 ANÁLISIS DE DATOS Y ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS	144
4.3 ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS	148
4.4 CARACTERÍSTICAS DEL ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS	150
4.5 RECURSOS NECESARIOS PARA EL ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS	153
4.5 1 EL COMPUTADOR	153
4.5.2 SOFTWARE PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA	157
4.5.3 RECURSOS EN INTER-RED	162
4.5.4 CALCULADORAS GRAFICAS	164

4.6 TÉCNICAS ELEMENTALES DE ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS	165
4.6.1 Gráfico del tronco	166
4.6.2 Gráfico de la «Caja»	170
4.7. EJEMPLOS DE ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA	174
4.7.1 EJEMPLOS DE PROYECTOS PARA LA CLASE DE ESTADÍSTICA.	176
- Proyecto 1. ¿Cómo son los alumnos de la clase?	178
- Proyecto 2: Análisis demográfico	194
- Proyecto 3: Comprueba tus intuiciones sobre el azar	206
4.8. REFLEXIONES	209
4.9 INFORMACIÓN Y RECURSOS EN INTER-RED	212
5.REFLEXIONES FINALES	217
BIBLIOGRAFÍA	220

INTRODUCCIÓN

El estilo de vida actual, sumido en una montaña cada vez más grande de información, ha generado lo que se conoce como la Sociedad de la Información que exige para sobresalir en ella, capacidad de procesamiento y análisis crítico de tal cúmulo de conocimiento.

Los medios de comunicación (prensa, radio y televisión) y adicionalmente la Inter - red, son fuentes interminables de información que saturan al común de la gente.

Con vista a mejorar la enseñanza de la estadística a todos los niveles y en todos los contextos, el Instituto Internacional del Estadística (International Statistical Institute – ISI) creó en 1949 el Comité de la Enseñanza de la Estadística (Committee on Statistical Education) que dejó de existir en 1991, cuando se creó la Asociación Internacional para la Enseñanza de la Estadística (International Association for Statistitical Education – IASE). Gracias a la investigación en la enseñanza de la estadística, ésta ha resultado ser una “disciplina moderna”, de gran utilidad para desarrollar la

mayoría de las competencias requeridas por el mundo entero y la sociedad de la información en la que vivimos.

Actualmente, uno de los papeles del IASE también consiste en difundir los hallazgos de la investigación en la enseñanza de la estadística para que los estadísticos puedan familiarizarse con el potencial de la estadística como disciplina. En los países en vía de desarrollo, el IASE busca lograr este objetivo fundamental fomentando la creación de grupos locales de educadores estadísticos quienes, gracias a los lazos cooperativos fácilmente accesibles, sean capaces de difundir la enseñanza de la estadística al beneficiarse de la colaboración internacional y el reparto de la información.¹

Este trabajo estará enfocado principalmente en reflexionar y discutir acerca de los diferentes problemas a los cuales se dedica la Educación Estadística y que constituyen su campo de acción, apoyándose principalmente en los resultados que presentan los educadores estadísticos españoles.

En el capítulo uno se muestra una reseña histórica de la Educación Estadística, haciendo énfasis en la posición de la Escuela Española. Comienza mostrando la importancia de la enseñanza de la Estadística en los distintos niveles educativos así como sus fines fundamentales y sus vínculos con otras disciplinas. Igualmente se hace una presentación del Instituto

¹ Ottaviani, M. G. Promover la Enseñanza de la Estadística: La Función del IASE y su Cooperación con los Países en Vías de Desarrollo. <http://www.inf.ufsc.br/cee/mesa/MGOTTAVI.html>

Internacional de Estadística (ISI) y la Asociación Internacional para la Educación Estadística (IASE), como la encargada del desarrollo de la Educación Estadística a nivel mundial y se presentan algunas reflexiones sobre lo que se puede entender por Educación Estadística.

El capítulo dos trata sobre la temática del significado institucional y personal de los objetos matemáticos, se aborda desde un punto de vista didáctico, sin quitar la importancia que tiene la disciplina estadística como tal. Se precisan aspectos que encaminan un estudio posterior en la investigación referida principalmente en la evaluación que ha sido un tema que se ha abordado durante las actividades de seminario que hemos venido realizando.

En el capítulo tres se presenta un panorama sobre los cuatro componentes del currículo de estadística; los cuales son currículo internacional y la bases en que se apoya el diseño curricular estadístico, currículo nacional, currículo institucional y currículo de aula. Tomando la definición de currículo desde la concepción de Stenhouse: Currículo como actividad de planificar una acción.

En el capítulo cuatro se presenta una nueva filosofía de aplicación de la estadística *“El Análisis Exploratorio de Datos”*, introducida por Tukey; Este enfoque exploratorio dentro de la enseñanza de la estadística hace que los alumnos puedan investigar y obtener sus propios datos y permite el uso de las nuevas tecnologías. Se presentarán los aspectos y las características que

enmarcan este enfoque y ejemplos de proyectos de Análisis Exploratorio de Datos para desarrollarse en la clase de estadística.

Finalmente mediante el desarrollo de este trabajo se pretende dar a conocer la Educación Estadística como una disciplina en formación y generar un espacio de reflexión de los aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la estadística.

1. UN PANORAMA DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

1.1. LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA: UN CAMPO DE INNOVACIÓN

¿QUÉ ES LA ESTADÍSTICA?

Son muchas las definiciones posibles de estadística, entre ellas, los investigadores Carmen Batanero y Juan Godino de la Universidad de Granada España han elegido las dos siguientes que reflejan bien las características de esta materia:

“La estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final.”

La estadística es la ciencia de los datos. Con más precisión, el objeto de la estadística es el razonamiento a partir de datos empíricos. La estadística es una disciplina científica autónoma, que tiene sus métodos específicos de razonamiento. Aunque es una ciencia matemática, no es un subcampo de la Matemática. Aunque es una disciplina metodológica, no es una colección de métodos.

ALGUNAS NOTAS HISTÓRICAS

Los orígenes de la Estadística son muy antiguos, ya que se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes y producción en las civilizaciones china (aproximadamente 1000 años a. c.), sumeria y egipcia. Incluso en la Biblia, en el libro de Números aparecen referencias al recuento de los israelitas en edad de servicio militar. No olvidemos que precisamente fue un censo lo que motivó el viaje de José y María a Belén, según el Evangelio. Los censos propiamente dichos eran ya una institución el siglo IV A.C. en el imperio romano. Sin embargo, sólo muy recientemente la estadística ha adquirido la categoría de ciencia.

En el siglo XVII surge la aritmética política, desde la escuela alemana de Conring, quien imparte un curso con este título en la universidad de Helmsted. Posteriormente su discípulo Achenwall orienta su trabajo a la recogida y análisis de datos numéricos, con fines específicos y con base en

los cuales se hacen estimaciones y conjeturas, es decir se observan ya los elementos básicos del método estadístico. Para los aritméticos políticos de los siglos XVII y XVIII la estadística era el arte de gobernar; su función era la de servir de ojos y oídos al gobierno. La proliferación de tablas numéricas permitió observar la frecuencia de distintos sucesos y el descubrimiento de leyes estadísticas. Son ejemplos notables los estudios de Graunt sobre tablas de mortalidad y esperanza de vida a partir de los registros estadísticos de Londres desde 1592 a 1603 o los de Halley entre 1687 y 1691, para resolver el problema de las rentas vitalicias en las compañías de seguros. En el siglo XIX aparecen las leyes de los grandes números con Bernouilli y Poisson.

Otro problema que recibe gran interés por parte de los matemáticos de su tiempo, como Euler, Simpson, Lagrange, Laplace, Legendre y Gauss es el del ajuste de curvas a los datos. La estadística logra con estos descubrimientos una relevancia científica creciente, siendo reconocida por la British Association for the Advancement of Science, como una sección en 1834, naciendo así la Royal Statistical Society.

Dada la anterior reseña, se puede entrever que la estadística no es solo una colección de conceptos y técnicas, sino, sobretodo, una forma de razonar (el razonamiento que, en situaciones de incertidumbre, permite realizar inferencias y guiar la toma de decisiones a partir de los datos).

1.2. IMPORTANCIA DE LA ESTADÍSTICA EN LA EDUCACIÓN

Es indudable la importancia que tiene la estadística en la vida moderna, actualmente en los medios masivos de información nos vemos rodeados de gran cantidad de datos que requieren de nuestra interpretación aun cuando ésta sea meramente intuitiva. Existen, además, diversas razones que justifican la importancia de la enseñanza de la estadística; las cuales han sido planteadas desde comienzos de la década de los 80 por diferentes autores mencionados por la investigadora Carmen Batanero de la Universidad de Granada (España), entre ellos: Según Holmes (2002), la enseñanza de la estadística y probabilidad fue introducida en 1961 en el currículo de Inglaterra en forma opcional para los estudiantes de 16 a 19 años que querían especializarse en matemáticas, con el fin de mostrar las aplicaciones de las matemáticas a una amplia variedad de materias. Holmes y su equipo, con el proyecto SCHOOL COUNCIL PROJECT (Holmes, 1980) mostraron que era posible iniciar la enseñanza desde la escuela primaria, justificándola por las razones siguientes:

- La Estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de

lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos.

- Es útil para la vida posterior, que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva y subjetiva.
- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

Estas recomendaciones han hecho que la estadística se incorpore cada vez más a los currículos. Por ejemplo, Santaló (1980) presentaba un informe en una audiencia internacional, indicando que la estadística se incluyó en la escuela secundaria en Argentina, para alumnos de 16 años en 1966 y para alumnos de 13 años en 1967. Recientemente, Terán (2002) analiza los contenidos de la Ley Federal de Educación en Argentina, que la incluye en el Polimodal desde la Educación General Básica.

Otros de los aspectos son los señalados por Fischbein (1975) el cual considera que una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico, además menciona el carácter exclusivamente determinista que el currículo de matemáticas tuvo hasta hace algunos años, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más

equilibrada de la realidad, en la que hay una fuerte presencia de fenómenos aleatorios.

Begg (1997) señala que la estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso de computadores, trabajo cooperativo y en grupo, a los que se da hoy gran importancia; además, la estadística se puede aplicar fácilmente, puesto que no requiere de técnicas matemáticas complicadas (las matemáticas sirven para resolver problemas reales).

Estos son algunos temas relevantes que hacen necesaria la incorporación de la estadística en los nuevos diseños curriculares tanto de la educación básica y la media, como dentro de la educación profesional de muy variadas disciplinas.

Al respecto, los miembros del departamento de didáctica de la matemática, de la Universidad de Granada, consideran que son dos los fines fundamentales de la enseñanza de la estadística en la escuela:

- Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la estadística en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo.
- Que los Alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la estadística

puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones.

De los fines anteriores se puede concluir, que no es el fin primordial convertir a los futuros ciudadanos en “estadísticos aficionados” puesto que la aplicación razonable y eficiente de la estadística para la resolución de problemas requiere un amplio conocimiento de esta materia y es competencia de los estadísticos profesionales. Tampoco se trata de capacitarlos en el cálculo y la representación gráfica puesto que los computadores hoy día resuelven estos problemas; lo que se pretende es formar una *Cultura estadística*, término sugerido en forma espontánea por estadísticos y educadores estadísticos. En los últimos años se quiere resaltar que la estadística se considera como parte de la herencia cultural necesaria para el ciudadano educado. Como señala Ottaviani (1998):

“A nivel internacional la UNESCO implementa políticas de desarrollo económico y cultural para todas las naciones incluyendo no solo la alfabetización básica, sino la numérica, se pretende por parte de esta organización difundir la estadística no solo como técnica para tratar datos cuantitativos sino como una cultura en términos de “Capacidad para comprender la abstracción lógica que hace posible el estudio cuantitativo de los fenómenos colectivos”

De los aspectos anteriores se intuye que no se pretende formar estadísticos profesionales, sino llegar a la formación de una cultura estadística, que se refiere a dos componentes interrelacionados que son:

- a) Capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos.

El ciudadano común debe conocer las convenciones que le permitan juzgar la calidad de la información cuantitativa divulgada por la prensa. El o ella deben saber utilizar datos cuantitativos que le permitan resolver problemas y tomar decisiones adecuadas.

- b) Capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante.

La información a veces sensacionalista de los resultados de algunas pruebas difundidas por los medios, algunas veces mal diseñadas es hoy día un tema preocupante.

Pero, ¿como desarrollar esta cultura estadística?; es claro que la forma más sencilla de llegar a todos los ciudadanos es desde la institución escolar. En consecuencia, las autoridades educativas y los diseñadores del currículo son los primeros responsables en conseguir una cultura estadística para todos.

Gran cantidad de campos científicos se han preocupado por investigar aquellas metodologías y procedimientos que permitan desarrollar la vinculación de la estadística dentro de la comunidad en general, desde la psicología, conocemos los estudios realizados acerca del razonamiento sobre la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre y el desarrollo evolutivo del razonamiento estocástico. Dentro de la educación matemática se ha investigado sobre la didáctica de la estadística, de donde se han publicado algunos resultados de las investigaciones; también se conocen trabajos de tesis donde jóvenes investigadores pretenden seguir la ruta de investigación en esta área.

1.3. SURGIMIENTO DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

Debido a que la estadística se ha implementado en el currículo escolar, surge la preocupación por todo aquello que compete a la enseñanza y el aprendizaje de la misma, desde esta perspectiva y de la propia estadística surge lo que se conoce como **Educación Estadística**.

Como se mencionó anteriormente en 1834 surge la Royal Statistical Society (Real Sociedad de Estadística), en el momento de su fundación se definió la estadística como *“conjunto de hechos, en relación con el hombre,*

susceptibles de ser expresados en números, y lo suficientemente numerosos para ser representados por leyes". Se crearon poco a poco sociedades estadísticas y oficinas estadísticas para organizar la recogida de datos estadísticos; la primera de ellas en Francia en 1800. Como consecuencia, fue posible comparar las estadísticas de cada país en relación con los demás, para especificar los factores determinantes del crecimiento económico y comenzaron los congresos internacionales, con el fin de homogeneizar los métodos usados. El primero de ellos fue organizado por Quetelet en Bruselas en 1853. Posteriormente, se decidió crear una sociedad estadística internacional, naciendo en 1885 el Instituto Internacional de Estadística (ISI) que, desde entonces celebra reuniones bianuales. La finalidad específica del ISI, es conseguir uniformidad en los métodos de recopilación y abstracción de resultados e invitar a los gobiernos al uso correcto de la estadística en la solución de los problemas políticos y sociales. En la actualidad el ISI cuenta con 5 asociaciones:

1. International Association of Survey Statisticians, IASS (Asociación Internacional de Estadísticas de Supervivencia, 1973)
2. Bernoulli Society (Sociedad Bernoulli, 1975)
3. International Association for Statistical Computing, IASC (Asociación Internacional para la Estadística Computacional, 1977)
4. International Association for Official Statistics, IAOS (Asociación Internacional para las Estadísticas Oficiales, 1985)

5. International Association for Statistical Education, IASE (Asociación Internacional para la Educación Estadística, 1991)

Uno de los objetivos comunes con las Naciones Unidas, al finalizar la segunda guerra mundial, era mejorar la información estadística disponible para contribuir a la recuperación económica, ya que la mayoría de los archivos estadísticos, de los países participantes, habían sido destruidos.

En 1948 el ISI concretó oficialmente la Educación Estadística con el establecimiento del Comité de Educación que sería el encargado de promover la formación estadística a nivel internacional, además tenía la responsabilidad de desarrollar las diplomaturas y licenciaturas en estadística donde se formarían profesores y técnicos estadísticos, también se crearon los Centros Internacionales de Educación Estadística en Calcuta y Beirut, para atender las necesidades formativas en los países de su respectivo entorno geográfico. El Comité, de igual forma, colaboró en la creación y difusión de ayudas para la enseñanza, como la preparación de libros universitarios, de bibliografías específicas y diccionarios de términos estadísticos.

Entre 1979 y 1987, el Comité de Educación logro resultados importantes; en 1979, el Centro Internacional para la Enseñanza de la Estadística de la Universidad de Sheffield, publicó por primera vez "Teaching Statistics"

(Enseñanza de la Estadística), una de las revistas didácticas más importantes distribuida por el mundo, orientada principalmente a profesores en los niveles de educación básica, secundaria y universitaria ; ha cumplido ya 23 años de existencia durante los cuales se ha desarrollado y adquirido una identidad y calidad internacional. Además de los artículos sobre temas didácticos, la versión actual incluye temas históricos, curriculares, resúmenes de investigación, actividades para el aula, análisis de software y libros de bancos de datos con orientaciones para el uso en clase.

Además se encuentra la Journal of Statistical Education que es una revista de educación estadística en el ámbito universitario.

También empezaron conferencias sobre Educación Estadística en particular las International Conferences of Teaching Statistics, ICOTS (CONFERENCIAS INTERNACIONALES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA), la primera en 1982 en Sheffield y han continuado cada cuatro años; ICOTS II, (1986) en Victoria, ICOTS III(1990) en Otago, ICOTS IV (1994) en Marrakesk, ICOTS V, (1998) en Singapur, ICOTSVI (2002)en Durban, Sudáfrica; estas conferencias son el medio de intercambio más importante que se ofrece a la comunidad de profesores e investigadores interesados en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, las reuniones de los ICOTS se destacan por ser una cita a la que acuden profesionales con las formaciones más diversas para debatir la enseñanza de la estadística.

Ottaviani (2002) sugiere que el énfasis de los trabajos presentados en los ICOTS ha variado, mientras que en las primeras ediciones el centro de interés eran los problemas de enseñanza y aprendizaje, ahora se ha desplazado a la comprensión y competencia de los estudiantes. Una preocupación inicial era el desarrollo de programas de computador adecuado para ayudar al desarrollo de conceptos, en particular en un curso introductorio de estadística de universidad; más recientemente se proponen modelos educativos adecuados para la estocástica, se enfatiza en el papel de la evaluación y se aumenta el interés hacia la investigación.

La publicación de la revista Enseñanza de la Estadística y su distribución así como el éxito de los ICOTS demostraron que los docentes de estadística sintieron una fuerte necesidad de unirse, hablar y debatir de los problemas a los que se enfrentan en sus actividades diarias.

Otro resultado importante del Comité de Educación fue la creación del Boletín Internacional de la Enseñanza de la Estadística (ISEN Newsletter), cuyo fin era informar a los miembros de la ISI del trabajo de los Comités y mantenerlos actualizados en cuanto a la enseñanza de la Estadística y sus problemas, se puede acceder a este Boletín por correo electrónico.

En 1991, en una conferencia realizada en el Cairo, la asamblea general de la ISI aprueba por unanimidad la propuesta de establecer una asociación

internacional para la enseñanza de la estadística como una nueva sección del ISI a la que se transfirieron las responsabilidades y objetivos que hasta entonces había tenido el Comité de Educación, así nace la IASE y el Comité de Educación deja de funcionar.

La IASE se encarga de promover la comprensión y el avance de la enseñanza de la estadística y de temas conexos y fomentar el desarrollo de servicios educacionales efectivos y eficientes mediante contactos internacionales. En la actualidad la IASE cuenta con más de 500 miembros de unos 40 países; personas que dirigen investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, así como aquellas que preparan materiales y enseñan en todos los niveles, desde la escuela hasta formaciones especializadas. La comunidad de docentes, educadores, investigadores que hacen parte de esta asociación han permitido que muchas de sus iniciativas tengan un resultado exitoso.

Como indica Hawkins (1999) la sociedad tiene un triple objetivo:

Como organización profesional, proporciona un foro de discusión para todos los que de algún modo se interesan por la educación estadística.

Como sociedad de investigación, se encamina hacia la constitución de una disciplina autónoma.

Al ser el brazo educativo del ISI toma el liderazgo y responde a las cuestiones sobre educación y formación estadística y promueve la educación estadística especialmente en los países en vía de desarrollo.

Para lograr estos objetivos la IASE tenía que continuar con la organización de los ICOTS, las Mesas Redondas, desarrollar un programa de publicaciones y sesiones sobre la enseñanza en las Asambleas Generales; se previó también la organización de comités, entre ellos el Comité Ejecutivo responsable de las actividades organizadas por la IASE. Desde su creación ha contado con cinco comités ejecutivos y su presidente es la Investigadora Carmen Batanero por el periodo 2001-2003 del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada España, quien ha estado al frente de la organización desde sus inicios; actualmente realiza y dirige investigación, así como supervisa Tesis Doctorales en Educación Estadística, entre otros.

Esta sociedad asumió la organización de las conferencias ICOTS a partir de la número 4, los temas tratados en esta conferencia fueron, la alfabetización Estadística, la enseñanza de la Estadística a grupos especializados y el análisis de datos para el programa escolar elemental; en el ICOTS 5, se presentaron materiales que subrayaron la importancia de la enseñanza de la estadística desde un punto de vista didáctico y pedagógico para favorecer estas competencias individuales requeridas en una sociedad moderna; en el ICOTS 6 realizado en Durban (África del Sur), el cual estaba introduciendo

nuevos programas escolares para niños entre 6 y 15 años que incluían la enseñanza de la Estadística en el programa de matemáticas. El tema de esta conferencia fue : Desarrollo de una sociedad alfabetizada en estadística. Ese tema pone de manifiesto el hecho que el grupo al que el ISI se dirige es la sociedad en su conjunto, y no simplemente un pequeño subgrupo de educadores en estadística. Este ICOTS fue todo un éxito, como los demás ICOTS, pero algo particular de resaltar en este fue el acercamiento que se tuvo con maestros de escuelas de Sudáfrica con la colaboración de la Asociación de la Estadística Sudáfricana (SASA) y la Secretaría de Educación, se realizaron una serie de eventos para que ellos conocieran los conceptos de la Estadística básica pues muchos de los maestros nunca habían recibido formación en Estadística. El ICOTS 7 se llevará a cabo en Brasil en el 2006.

La IASE ha seguido apoyando las Round Tables (Mesas Redondas) sobre temas específicos como satélites en los encuentros del ICME International Congress of Mathematics Education, (Congresos Internacionales de Educación Matemática); en 1992 se celebró en Québec, Canadá y tuvo como tema: "Introducir el Análisis de Datos en las Escuelas", en 1996 en Granada España el tema fue: "Investigación sobre el papel de la tecnología en la enseñanza de la Estadística", en Tokio 2000; "Formar investigadores al uso de la estadística". Además las Secciones sobre la enseñanza de la estadística fueron organizadas por la IASE en las Asambleas Generales

Otras reuniones han sido añadidas a las tradicionales. En 1993 se celebró el primer encuentro científico del IASE en Perugia (Italia). En 1994 se llevó a cabo el segundo encuentro científico en El Cairo. El IASE ha presentado un resumen de sus actividades en otras conferencias con temas tocantes a la enseñanza de la estadística, como la Conferencia conjunta IAOS/IASS, Aguas Calientes, Méjico, 1998 (Ottaviani, 1998); la IV Conferencia Estadística Iraní, Teherán, Irán, 1998 (Batanero, 1998); la IV Conferencia de las Sociedades de Estadística Latinoamericanas, Mendoza, Argentina, 1999 (Ottaviani, 1999) y la VI Conferencia de Ciencias Estadísticas de Países Islámicos, Lahore, Pakistán, 1999 (Ottaviani, Batanero, 1999).

La IASE también ha promovido la publicación de libros, entre ellos se encuentran las conferencias sobre la enseñanza de la estadística presentadas en el ICME 8.

Otra de las prioridades de la IASE es la Investigación, pues ellos consideran que la investigación es un medio para ampliar el conocimiento en los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación de la Estadística; así como permite avanzar hacia el reconocimiento de la Educación Estadística como disciplina científica. Con este fin nace al interior del la IASE un subgrupo, el SERG (Statistical Education Research Group), formado por más de 250 investigadores preocupados por la investigación en este campo y abierto

para todos los interesados en el tema. Entre los objetivos del SERG se encuentra, el intercambio de información dentro de sus miembros, conseguir reconocimiento académico para la investigación en Educación Estadística.

La investigación es un trabajo que no se puede desarrollar aislado, por ello para hacerlo efectivo debe darse a conocer; en ese sentido, el grupo comienza a editar una revista con este fin, primero escrita y luego electrónica, en 1999 esta se convierte en la SERN (Statistical Education Research Newsletter), como mecanismo de impulso y difusión de la investigación, se publica 3 veces al año e incluye trabajos cortos de interés general, resúmenes de investigación, resúmenes de tesis, información sobre conferencias recientes y futuras, libros y tesis recientes.

Existe una versión en español de esta Newsletter editada en Venezuela, la primera en el 2000 y se publica dos veces al año, tiene como objetivo divulgar información profesional y documentos de interés para la comunidad de educación estadística en Venezuela. Así como servir de puente entre los miembros locales e IASE, incluyendo la transmisión de información sobre las actividades de IASE y dando a conocer las actividades que se llevan a cabo en dicho país a la asociación; hasta el momento se han publicado 7 Hipótesis Alternativa y en las dos últimas se unieron a ella México y España.

Dos años después de la creación de la SERN, este instrumento se vio insuficiente y surge la necesidad de una revista específica de investigación; y se pone en marcha la SERJ (Statistical Education Research Journal). Esta es una revista arbitrada que se publica dos veces al año y está dirigida a todo aquel que se sienta comprometido con la investigación en educación estadística o con cualquier aspecto de esta, ya sea maestro, profesor o investigador; una característica específica de esta revista es el aceptar trabajos en tres idiomas diferentes español , inglés y francés con objeto de ayudar a superar las dificultades lingüísticas que supone para muchos investigadores, especialmente jóvenes. Entre los objetivos de la revista se encuentran:

- Estimular la actividad de la investigación en educación estadística.,
- El avance del conocimiento sobre las actitudes de estudiantes, sus concepciones y dificultades para lograr el conocimiento estocástico.
- El mejoramiento de la enseñanza de estadísticas en todos los niveles educativos.

Otro de los objetivos de la IASE es mejorar la enseñanza de la Estadística en países en vía de desarrollo; esto se ha venido planteando desde 1993, igualmente han propuesto ideas para poder cumplir ese objetivo:

- Reunir y formar equipos estadísticos adecuados
- Preparar materiales de enseñanza básica, a nivel escolar y superior

- Apoyar equipos individuales en universidades u otras instituciones de enseñanza para favorecer el cambio estadístico
- Reclutar miembros en países en vía de desarrollo
- Organizar reuniones internacionales en países en vías de desarrollo
- Formación de grupos locales

Desde 1993 la IASE ha venido utilizando estas estrategias y en estos momentos apoyar la creación de grupos locales de docentes o educadores es su prioridad, pues consideran que un grupo local conoce perfectamente las necesidades locales y es capaz de elegir entre los materiales, investigaciones y experiencias que los miembros de la IASE han desarrollado y han puesto a disposición, gracias a los lazos de cooperación fácilmente accesibles, que les permita mejorar su labor docente e iniciar nuevos estudios y nuevas investigaciones en este campo.

La IASE no es la única asociación interesada por la enseñanza de la estadística, otras sociedades de estadística o de educación están también organizando secciones específicas de educación estadística, ejemplo de ellas son la Asociación de Estadística Americana (ASA), la American Education Research Association (AERA), La Real Sociedad de Estadística en Inglaterra y La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

1.4. INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

Gracias a la IASE y sus miembros ha crecido el interés por la enseñanza de la estadística y a hecho que la comunidad mundial se comprometa en la investigación sobre los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y las probabilidades, lo que involucra no solo a estadísticos sino también a educadores en matemáticas y psicólogos. Puesto que las contribuciones y el intercambio mutual entre estas tres fuentes de investigación, así como entre especialistas de esas disciplinas y de otras como la pedagogía, la historia y la sociología, ha hecho que la enseñanza de la estadística crezca y se convirtiera en una especialidad académica.

Al respecto, en cuanto a investigación en Educación Estadística los miembros de la IASE y más precisamente los miembros del SERG han reflexionado y propuesto aspectos importantes de la misma así como preguntas que consideran relevantes para la comprensión de la Educación Estadística, es el caso de:

Carmen Batanero (Universidad Granada España), Joan B. Garfield (Universidad de Minnesota, USA), M. Gabriella. Ottaviani(Universidad la Sapienza, Roma, Italia), John Truran(Australia).

- Estos investigadores establecen que cuando se pretende realizar una investigación en Educación Estadística se presentan algunas dificultades como:
- Las personas implicadas en la Educación Estadística provienen de áreas diferentes, lo que hace muy difícil diseñar y dirigir proyectos de investigación de calidad.
- No parece tener validez o aplicabilidad general y muchos hallazgos potencialmente valiosos no han sido implementados en forma generalizada.
- Algunos académicos creen firmemente que la educación no es una disciplina que pueda contribuir de algún modo al conocimiento.

Así mismo, realizan una serie de cuestionamientos que necesitan mayor reflexión y discusión para clarificar: *“¿ Qué debemos considerar como investigación en educación estadística?, ¿Cómo establecer la validez de los resultados de la investigación?, ¿ cuáles cuestiones deben ser estudiadas prioritariamente, y qué marcos teóricos y métodos de investigación deberían recomendarse para llevar a cabo esta investigación?”.*

Estas son algunas de las preguntas relevantes consideradas por Batanero:

- ¿Qué modelos psico-pedagógicos nos pueden ayudar a comprender el desarrollo del razonamiento estadístico y cómo podemos usar estos modelos para facilitar este desarrollo?

- ¿Qué teorías de enseñanza-aprendizaje pueden contribuir a comprender y explicar la enseñanza y el aprendizaje de la estadística?
- ¿En qué sentido la enseñanza y aprendizaje de la estadística es específico y cómo se relaciona con la enseñanza y aprendizaje de la matemática y otras disciplinas?
- ¿Cómo influyen el contexto cultural en la transferibilidad de los resultados de la investigación?

Teniendo en cuenta la diversidad de enfoques, ¿Cuáles son las características de una investigación de calidad en Educación Estadística?.

Cada una de las preguntas representa un campo problemático, lo que llevó a investigadores de diferentes partes del mundo a interesarse y reaccionar sobre esta problemática, dando su posición frente a ella y proponiendo no solo aspectos relacionados con la investigación en Educación Estadística, sino también algunas preguntas de investigación. Entre ellos se encuentran:

H. Bacelar-Nicolau, Facultad de Psicología y Ciencias de la educación, Lisboa Portugal; es estadística y matemática, ha trabajado mucho tiempo como profesora e investigadora en estadística y análisis de datos. Su experiencia en el campo de la estadística se centra en el análisis de datos multivariado, lo cual le ha proporcionado un interés creciente por desarrollar y conocer las estrategias de enseñanza y de formación, y por resolver las dificultades de los estudiantes en los temas de análisis de datos multivariado,

además plantea que según su experiencia “Qué es la investigación en educación estadística” tiene mucho en común con “Qué es la investigación en educación en otras ciencias”, donde “otras ciencias” puede reemplazarse por matemáticas. Lo anterior sugiere que se debe buscar lo que hay en común en educación con otras materias en particular con educación matemática.

Theodore Chadjiipadelis, department of education Aristotle University of Thessaloniki, Greece; dice “ al tratar de responder la pregunta general “ ¿Qué significa la investigación en educación estadística?” , debemos considerar el hecho de que la investigación y la enseñanza varían, dependiendo de nuestro entorno académico, clasificándolo en tres categorías:

a. Estudiantes con buena base estadística

En este grupo se encuentra aquellos estudiantes que han ingresado a cursos introductorios de teoría de la probabilidad, combinatoria, computación; pero que tienen dificultad en entender que en estadística no hay una verdad absoluta, mientras que en matemáticas existen proposiciones que por su naturaleza lógica puede demostrarse que son verdadera o falsa y otras que por la necesidad del discurso matemático se asumen como verdaderas, en estadística cada conjetura lógica (hipótesis) se acepta o rechaza con un nivel de significación.

b. Estudiantes con sólida base matemática

Aquellos que se interesan en el uso de técnicas específicas en sus propias disciplinas (ingeniería, economía, ciencias, etc.). Para este grupo de estudiantes la estadística es significativa, porque es útil para las aplicaciones pero no son capaces de conocer la importancia de la modelización y no prestan atención a los supuestos del modelo, al estudio del contexto y a la explicación de los resultados.

c. Estudiantes con poca base matemática”

Consideran la estadística como una técnica avanzada que usan o han usado en sus investigaciones.

Además Chadijipadelis plantea algunas preguntas adicionales de investigación:

- ¿Cuál es el mejor medio de enseñanza o la mejor combinación de métodos en cada ambiente académico?.
- ¿Deberíamos desarrollar herramientas y técnicas generales de evaluación?.
- ¿Es posible enseñar estadística usando proyectos en lugar de enseñar proyectos usando estadística?.

Michael Glencross, Research Resource Center, University Transkey, South Africa; considera que la investigación en educación estadística es tanto un proceso como un producto. “Es un proceso en el sentido que buscamos la

verdad y tratamos de construir conocimiento. Es también un producto en el sentido de que los resultados del proceso de investigación son en si mismo conocimientos (Ernest, 1998)".

Para Michael Glencross la educación estadística se compone de múltiples actividades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la estadística de modo que la investigación en educación estadística es investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística.

Flavia Jolliffe, Escuela de computación y Matemáticas, Universidad de Greenwich, UK; se refiere a lo poco que conocemos sobre la metodología de la investigación en educación estadística. No es siempre posible experimentar en la investigación educativa y con frecuencia no es ético hacerlo como en el caso de la investigación social y médica. Además, la interacción entre investigadores en educación estadística y especialistas en educación significaría que la investigación en educación estadística está basada en teorías educativas. Finaliza con tres preguntas importantes sobre Investigación en Educación Estadística:

- ¿Quién debería investigar en Educación Estadística?.
- ¿Dónde debería llevarse a cabo esta investigación?.
- ¿Cómo conseguir fondos para la investigación? (esta pregunta es común a casi todos los investigadores).

Las anteriores necesidades deben considerarse en paralelo a las preguntas iniciales. *Maxine Pfannkunch, Departamento de Matemáticas Universidad de Auckland, Nueva Zelanda;* propone “los investigadores en educación estadística deberían mirar la investigación sobre el desarrollo del pensamiento estadístico de los estudiantes como una prioridad, creo que el pensamiento estadístico opera en tres áreas diferentes: Investigación empírica, evaluación de investigación y vida cotidiana”.

Cliff Konold, Scientific Reasoning Research Institute, University of Massachusetts, ofrece unas pocas preguntas que se deberían hacer en una investigación:

- ¿Hacia donde oriento mi investigación?
- ¿Qué tipo de teoría necesitamos?
- ¿Qué hacen otros?
- ¿Qué pueden tomar los profesores de mi investigación?

Los anteriores aspectos han llevado a algunos miembros de la IASE a plantear qué se puede entender por Educación Estadística, y los elementos que pueden llegar a abarcar, estas son algunas expresiones:

Shaughnessy (1992) nos muestra múltiples perspectivas desde las cuales se puede abordar: desarrollo de instrumentos de evaluación, identificación de

las concepciones iniciales y errores de los estudiantes, formación de profesores, evaluación de la enseñanza.

Bright 1997 dice que: “hay una variedad de perspectivas que podemos usar como lentes para ver la educación estadística y el razonamiento estadístico, pero mis lentes serán aquí el razonamiento sobre los datos”.

Batanero 2000, “Entendemos por educación estadística el campo de innovación, desarrollo e investigación, constituido por todas aquellas personas (*Educadores Estadísticos*) que se interesan o trabajan por mejorar la enseñanza, el aprendizaje, la comprensión, la valoración, el uso y las actitudes hacia la estadística”.

Entendemos por Educación Estadística “Un campo de trabajo profesional y de investigación relativamente joven, comparado con la educación matemática; interesado por desarrollar y mejorar todo aquello que concierne a la enseñanza y el aprendizaje de la estadística”.

2. MODELO TEÓRICO SOBRE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS – Carmen Batanero y Juan D. Godino.

Desde el inicio de nuestras actividades de seminario; he mostrado cierta inclinación en la evaluación de los conocimientos; encontrándome en principio con lo amplio de esta temática, lo que me dio algunos inconvenientes para la redacción de mi trabajo escrito. Particularizando el tema de la evaluación desde el punto de vista didáctico, me he encontrado, dentro de los escritos del Departamento de didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada España, con el análisis de la noción de SIGNIFICADO utilizada con frecuencia de modo informal, y que realmente es un tema controvertido en filosofía, semántica y lógica y demás ciencias interesadas en la cognición humana; he optado estudiar el significado institucional y personal de los objetos matemáticos desde el marco teórico propuesto por Juan D. Godino y Carmen Batanero; con el propósito de conocerlo y darlo a conocer para más adelante observar algunas de las aplicaciones que hemos estudiado desde una perspectiva estadística como lo es, el significado y comprensión de conceptos estadísticos elementales.

El estudio que voy a realizar presenta una teoría pragmática del significado de los objetos matemáticos en la que se muestra un triple condicionamiento: institucional, personal y temporal; en principio, no he encontrado distinción

alguna entre los conceptos estadísticos y matemáticos. En investigaciones recientes se propone a profesores de estadística y estadísticos la complejidad de estos conceptos incluso los “elementales” cuyo significado debe construirse progresivamente.

Dentro del propósito de nuestro seminario de investigación, hemos enfatizado en reflexionar y discutir acerca de diferentes temas dentro de la educación estadística; en el momento me encuentro ante la pregunta ¿Cuáles son los objetos o conceptos matemáticos y estadísticos en la Educación Estadística? Y me encuentro con una gran variedad de material que en el semestre pasado hemos discutido, como lo son: Significado y comprensión de las medidas de posición central Batanero , Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales C. Batanero, J.D. Godino, D.R. Green, P. Holmes y A. Vallecillos; Significa y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos “C. Batanero, 1997”; Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños “C. Batanero, M.T. Canizares , L. Serrano y J.J. Ortiz, 1999” . A los que será preciso referirse para comprender adecuadamente el marco teórico que voy a mostrar.

2.1. UN PRIMER ACERCAMIENTO

Entendiendo la didáctica, como el saber que trata sobre el proceso de enseñanza aprendizaje, orientando sus métodos, sus estrategias, su eficiencia, sistematizando el pensamiento pedagógico, que se especializa en diferentes áreas; como la didáctica de las matemáticas, la cual estudia los procesos de enseñanza aprendizaje de los saberes matemáticos, en los aspectos teórico- conceptuales y de resolución de problemas (que en nuestro contexto ocupa actualmente lugar preponderante) trata de caracterizar los factores que condicionan dichos procesos. Se procura aquí (los autores) determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción. Como lo mencioné anteriormente, el tema en estudio se refiere principalmente a la evaluación de los conocimientos matemáticos, entendida como “el informe comprensivo sobre un sujeto o grupo respecto de las matemáticas o en la aplicación de las matemáticas” (Webb, 1992 p 662); Se asume aquí como propia la pregunta de Wheeler (1993) ¿Como podemos evaluar lo que no conocemos? Se reconoce también en este escrito la complejidad de la respuesta.

El concepto de significado que proponen diferentes autores en el ámbito de la didáctica de las matemáticas pone de manifiesto la importancia que tiene el mismo dentro de la educación estadística, para aproximarnos a las

diferentes perspectivas las cuales incluyo a continuación: El papel relevante que la idea de significado tiene, por tanto, para la didáctica se pone de relieve por el uso que hacen de ella algunos autores interesados por el fundamento de esta disciplina. Así, Balacheff (1990) cita el significado como palabra clave de la problemática de investigación de la Didáctica de la Matemática: "Un problema pertenece a una problemática de investigación sobre la enseñanza de la matemática si está específicamente relacionado con el significado matemático de las conductas de los alumnos en la clase de matemáticas" (p.258). Como cuestiones centrales para la Didáctica de la Matemática menciona las siguientes:

- ¿Qué significado matemático de las concepciones de los alumnos podemos inferir a partir de una observación de su conducta?
- ¿Qué clase de significado pueden construir los alumnos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuál es la relación entre el significado del contenido a enseñar y el del conocimiento matemático elegido como referencia?
- ¿Cómo podemos caracterizar el significado de los conceptos matemáticos?

También Brousseau (1980) destaca como centrales las preguntas siguientes: "¿cuáles son los componentes del significado que pueden deducirse del comportamiento matemático observado en el alumno?; ¿cuáles son las condiciones que conducen a la reproducción de la conducta, teniendo la misma significación, el mismo significado?" (p. 132). Asimismo, Brousseau

(1986) se pregunta si existe una "variedad didáctica" del concepto de sentido, desconocida en lingüística, psicología o en matemáticas.

Otra autora que considera como básica para la Didáctica de la Matemática la idea de Significado es Sierpinska (1990), que, a su vez, la relaciona íntimamente con la comprensión:

"Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado.

Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p. 27). "La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos" (p. 35).

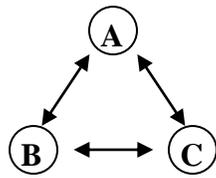
Dummett (1991) relaciona, asimismo, el significado y la comprensión desde una perspectiva más general: "una teoría del significado es una teoría de la comprensión; esto es, aquello de que una teoría del significado tiene que dar cuenta es aquello de que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, esto es, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje" (p. 372).

Desde el punto de vista de la psicología cultural, el objetivo principal de la misma, según Bruner (1991), es el estudio de las reglas a las que recurren los seres humanos a la hora de crear significados en contextos culturales. "El concepto fundamental de la psicología humana es el de significado y los procesos y transacciones que se dan en la construcción de los significados" (Bruner, 1990, p. 47).

Se aprecia de lo anterior, la idea relevante que tiene el concepto de significado tanto para la didáctica de la matemática como para la psicología general, sin embargo no se encuentra aún un análisis explícito del significado de las nociones matemáticas. Las personas interesadas en el tema utilizan el término significado de una forma que se puede considerar como lenguaje ordinario, es decir como un sentido intuitivo o preteórico.

Primero y como parte primordial se estudia la naturaleza de los objetos matemáticos, sobre la génesis personal y la cultura del conocimiento matemático desde un punto de vista epistemológico. Se presenta a continuación la significación dada en (Lyón 1980) como una relación ternaria, analizable en tres relaciones binarias, dos básicas, signo, concepto y una derivada, el referente.

La problemática de la significación se presenta en forma de esquema introducido por Orden y Richard (1923) así:



A: Signo

B: Concepto (referencia)

C: Significatum (referente)

El esquema muestra que la relación entre un signo A y su referente C es indirecta, o sea mediatizada por un concepto B. En este caso A representa un término o expresión matemática, B el correspondiente objeto matemático (concepto, Proposición, procedimiento,...) y C el significado (o referente) de dicho objeto; estas relaciones se hacen evidentes en Anna Sierpiska (1992) la cual menciona variadas relaciones que se pueden establecer para que un estudiante llegue a apropiarse un concepto matemático.

Dado lo anterior se llega a la compleja cuestión general ¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos? Para responder a la pregunta anterior se pueden diferenciar dos perspectivas; desde el punto de vista matemático y desde la psicología cognitiva.

Para la matemática, los distintos tipos de definiciones que se utilizan describen con precisión las notas características de sus objetos: un concepto matemático viene dado por sus atributos y por las relaciones existentes entre los mismos. Para la psicología cognitiva interesada por los procesos de formación de los conceptos, ha adquirido una posición dominante una concepción según la cual para describir la estructura interna de los conceptos no existen atributos necesarios y suficientes que la determinen

completamente. Se evidencia aquí una diferencia marcada en las dos posiciones.

A partir de la obra E. Rosch, Pozo (1989) indica que se ha impuesto la idea que los conceptos están definidos de un modo difuso. Gerard Vergnaud (1982-1990) desde el punto de vista psicológico propone una definición de concepto adaptada para los estudios psicológicos y didácticos en la cual no solo incluye las propiedades invariantes que dan sentido al concepto, sino también las situaciones y los significados asociados al mismo.

Como consecuencia del análisis anterior se utilizará en el presente marco teórico el estudio de la significación desde una perspectiva matemática, psicológica y didáctica, con el fin de establecer conexiones entre las distintas aproximaciones al tema en cuestión.

En la propuesta de Batanero y Godino se usan técnica y restringidamente los términos “objeto” y “significado”, incorporándolos en un esquema teórico, vinculando diversos temas centrales para la didáctica. Se presentan a continuación distintas aportaciones realizadas sobre la cuestión del significado, reconociendo de antemano su carácter limitado dado el gran número de ciencias que se han interesado en la cognición humana.

2.2. REALISMO Y PRAGMATISMO

Las teorías del significado según Kutschera (1979) pueden agruparse en dos categorías: realistas y pragmáticas. La primera se refiere o concibe el significado como una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientes de los signos lingüísticos, en consecuencia suponen un realismo conceptual.

"Según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semántica y pragmática" (Kutschera, 1979; p. 34), una palabra se hace significativa por el hecho de que se le asigne un objeto, un concepto, o una proposición como significado. De esta forma, hay entidades, no necesariamente concretas, aunque siempre objetivamente dadas con anterioridad a las palabras, que son sus significados.

La semántica realista se presenta en los autores que le asignan a las expresiones lingüísticas solo una función semántica, por ejemplo:

- El significado de un nombre propio consiste en el objeto que se designa por dicho nombre;
- los predicados (por ejemplo, esto es rojo; A es más grande que B) designan propiedades o relaciones , en general, atributos;
- las oraciones simples (sujeto - predicado - objeto) designan hechos (por ejemplo, Madrid es una ciudad)

Otros escritores como Frage, Carnal, Wittgenstein del Tragtatus, proponen que las relaciones lingüísticas tienen una función de atribución con ciertas entidades (objetos, hechos, atributos).

La segunda categoría del significado, denominada pragmática, tiene las dos ideas fundamentales siguientes:

- El significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en que se usan;
- niegan la posibilidad de observación científica, empírica e intersubjetiva de las entidades abstractas - como conceptos o proposiciones-, que es admitida implícitamente en las teorías realistas. (Aquí observamos una diferencia marcada entre las teorías mencionadas). Se parte del significado a partir de su uso lingüístico, de aquí se infiere el significado de los objetos abstractos.

Wittgentein formula que una palabra se hace significativa por el hecho de desempeñar una función determinada en un juego lingüístico, por el hecho de ser usada en este juego de una manera determinada y para un fin concreto. Para que una palabra resulte significativa, no es preciso que haya algo (concreto) que sea significado de esa palabra.

Desde el punto de vista epistemológico esta definición del significado "es mucho más satisfactoria que la teoría figurativa realista: al desaparecer los conceptos y proposiciones como datos independientes de la lengua, se

disipa también el problema de cómo pueden ser conocidas esas entidades, y nos acercamos a los fenómenos que justifican la dependencia del pensamiento y de la experiencia respecto del lenguaje" (Kutschera, 1979; Pág. 148).

La aplicación de los supuestos ontológicos de la semántica realista a la Matemática se corresponde con una visión platónica de los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, Teorías,...). Según esta posición filosófica, las nociones y estructuras matemáticas tienen una existencia real, independiente de la humanidad, en algún dominio ideal. El conocimiento matemático consiste en descubrir las relaciones preexistentes que conectan estos objetos.

La concepción anterior implica una visión absolutista del conocimiento matemático, dado que este es considerado como un sistema de verdades seguras e inmutables. Bajo los supuestos anteriores el significado del término función, sería simplemente el concepto de función dado por su definición matemática.

A pesar de los distinguidos representantes de esta corriente, entre los que se cuenta Frege, Russell, Cantor, Bernays, Hilbert, Gödel,..., se encuentran nuevas tendencias en la filosofía de las matemáticas que aportan críticas

severas a las perspectivas absolutistas y platónica de las matemáticas. Una síntesis de estas críticas la encontramos en Ernest (1991).

Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. Desde el punto de vista de Godino y Batanero se observa el hecho que dentro de ciertas instituciones se realicen determinados tipos de practicas que determinan la emergencia progresiva de los “objetos matemáticos” y que el significado de estos objetos este íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática.

Se precisará ahora un sentido teórico para los términos de práctica, objeto y significado que se corresponden con los presupuestos pragmáticos de las teorías del significado.

2.3. PROBLEMAS MATEMÁTICOS, PRÁCTICAS E INSTITUCIONES

Chevallard (1991) define un objeto matemático como "un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se

desglosan en diferentes registros Semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito" (Pág. 8). Llama praxema a los "objetos materiales ligados a las prácticas" y usa esta noción para definir el objeto como un "emergente de un sistema de praxemas".

Chevallard centra su atención en una nueva noción teórica, que denomina relación al objeto, sobre la que se que apoya su teoría del conocimiento. En este marco teórico "un objeto existe desde que una persona X o una institución I reconoce este objeto como existente (para ella). Más precisamente, se dirá que el objeto O existe para X (resp., para I) si existe un objeto, que represento por $R(X,O)$ (resp., $R(O)$) que llamo relación personal de X a O (resp., relación institucional de I a O)" (Chevallard, 1992, Pág. 9). Es importante mencionar aquí que el autor Chevellard no se interesa por la noción de significado de un objeto.

Esta parte muestra una ruptura epistemológica dentro de los marcos teóricos usados en la didáctica (según Godino y Batanero, en donde, es preciso clarificar las nociones introducidas por Chevellard, hacerlas operativas y poner de manifiesto las semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales usadas ampliamente en la actualidad, como son, por ejemplo las de concepción y significado. Para esto, precisan las nociones

de práctica y de objeto, al igual que proponen un uso técnico para la noción de significado que sea de utilidad en los estudios didácticos. La noción de Chevallard “relación al objeto” puede ser considerada como una interpretación semántico pragmática.

Se realizará aquí una distinción entre objeto personal (o mental) y objeto institucional (base del conocimiento objetivo). Para ello, se cree necesario destacar la prácticas y los objetos que interviene en ellas, y los que emergen de las mismas, así como las relaciones a estos objetos que están organizados entorno a una finalidad: tomar decisiones, actuar y resolver situaciones problemáticas. Por esto se toma en principio la noción primitiva de situación problema.

El punto de partida será entonces, una formulación ontológica de los objetos matemáticos que tienen en cuenta el triple aspecto de la matemática:

- Como resolución de problema.
- Como lenguaje simbólico.
- Como sistema conceptual lógicamente organizado.

Se inicia con la noción primitiva de situación problemática, seguido de la definición de los conceptos teóricos de practica, objeto (institucional y personal) y finalmente significado, con el fin de hacer patente y operativo el triple carácter de la matemática que se mencionó anteriormente y por otro

lado, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático así como su mutua interdependencia.

2.3.1. Concepto de problema

Lester (1980) define un problema como "una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución" (Pág. 287). A su vez, Simón (1978) describe que "un ser humano se enfrenta con un problema cuando intenta una tarea pero no puede llevarla a cabo y tiene algún criterio para determinar cuándo la tarea ha sido completada satisfactoriamente" (Pág. 198).

Las definiciones anteriores se refieren a un problema de cualquier índole, en este marco teórico se referirá más particularmente a problemas o situaciones de tipo matemático. El presente análisis se fija en un ejemplo particular donde de las actividades y problemas emergen del objeto matemático designado con el termino "media".

En ciertas situaciones necesitamos medir una cantidad X desconocida de una cierta magnitud. Pero debido a la imperfección de nuestros instrumentos, en mediciones sucesivas obtenemos distintos números como medidas de X .

No tenemos ninguna razón para pensar que el verdadero valor esté más alejado de cualquiera de los números obtenidos. ¿Cómo determinar, a partir de un conjunto de medidas X_1, X_2, \dots, X_N la mejor estimación posible del verdadero valor X desconocido? Este es un enunciado moderno, algo general y abstracto de un problema, que es en realidad el campo de problemas de la estimación de una cantidad desconocida, en presencia de errores de medida que los astrónomos de Babilonia resolvieron calculando la suma total de las observaciones y dividiendo por el número de datos. Según Plackett (1970) esta misma técnica matemática - lo que hoy conocemos como media aritmética- fue aplicada de un modo general por Ptolomeo para estimar la cantidad por la cual la duración de un año excede de 365 días.

A partir del ejemplo anterior surge el interrogante ¿Cuáles son las características de las situaciones y de las actuaciones de las personas que permitirían clasificar los problemas y los métodos de solución como “matemáticos”? ¿Qué es lo característico de la actividad matemática?

Inicialmente se observa que en el enunciado de la cuestión y en el desempeño de las actividades o tareas correspondientes intervienen “objetos Matemáticos” (operaciones, números...) representaciones simbólicas por ejemplo actualmente se usa la expresión

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$$

También se aprecia como característico en la actividad matemática extender las soluciones a diversas situaciones que guardan un comportamiento característico a la situación presentada (generalizar los procedimientos de solución) incluso para el ejemplo mencionado hacerlo para una variable discreta con un número infinito de valores o para una variable continua.

En la resolución de un problema matemático como el enunciado anteriormente, es necesario buscar dentro del campo de problemas lo esencial entre los distintos contextos, las relaciones con otras instituciones, problemas o procedimientos; es también característico de la actividad de simbolizar, formular, validar, generalizar en definitiva, y como describe Freudental (1991) MATEMATIZAR.

En la siguiente definición se introduce la noción de práctica y esta permite sintetizar las características de la actividad de matematización:

DEFINICIÓN 1: Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

Para la solución de problemas matemáticos, mediante las prácticas matemáticas, entendidas como aparece en la definición 1, intervienen objetos abstractos o materiales los cuales pueden estar presentados en varias formas como textual, oral, gráfico o incluso gestual, como lo menciona Chevallard (1991) al llamar praxemas a estos objetos ligados a practicas.

Las prácticas matemáticas personales pueden ser observables, es decir manifestaciones empíricas, o también acciones no observables directamente. La definición 1 nos lleva a tener en cuenta el principio Piagetiano de la construcción del conocimiento a través de la acción.

Vygotskii (1934) Considera la actividad, en este caso matemática, como elemento esencial de su teoría del aprendizaje. El papel que juegan los signos no es solo en el aspecto comunicativo sino que cumplen un papel instrumental que modifica al propio sujeto que los utiliza como mediadores. El análisis semiótico de la actividad matemática realizado por Rotman (1988) apoya también la íntima interdependencia entre el pensamiento y el lenguaje matemático: "Los números son objetos que resultan de una amalgama de dos actividades, pensar (imaginar acciones) y simbolizar (hacer marcas), las cuales son inseparables: los matemáticos piensan sobre marcas que ellos mismos han imaginado en una existencia potencial" (Pág. 32).

Una práctica habitual en el problema de la estimación de la media aritmética, consiste en sumar todos los valores de las mediciones y dividir por el número de sumandos. Aunque en cada problema concreto de estimación de la media aritmética, las magnitudes, los instrumentos de medición, el número de medidas tomadas y los valores concretos cambian, la expresión anterior es aplicable a cualquiera de estas situaciones.

Más que las prácticas particulares de los objetos ante determinado tipo de problemas, lo que interesa son los tipos de prácticas; esto es, los invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas no las muestras particulares de las mismas. Se llaman a estos invariantes prácticas prototípicas. Generalmente para cada campo de problemas y en principio para cada persona podemos asociar un sistema de prácticas prototípicas o características.

2.3.2. Prácticas Significativas

Cuando se presenta una situación problemática, la actividad matemática llevada a cabo por las personas comprometidas en la resolución del mismo, no es un proceso lineal y deductivo. Por el contrario, se manifiestan intentos fallidos, ensayos, errores y procedimientos infructuosos que se abandonan, por esta razón se precisa en esta parte introducir la noción de práctica significativa.

DEFINICIÓN 2: Diremos que una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

Las prácticas significativas conllevan una aptitud organizativa, indicativa de una competencia, lo que constituyen una “Praxis” en el sentido de Morin (1877).

2.3.3. La Noción de Institución

Las situaciones problemáticas así como también sus soluciones son socialmente compartidas, esto es, están vinculadas a instituciones. Se propone (los autores) la siguiente conceptualización de la noción de “institución” y de sistemas de “prácticas sociales”.

DEFINICIÓN 3: Una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.

Se llama institución matemática (M) a las personas comprometidas con la resolución de nuevos problemas matemáticos. Se nombran en esta parte los siguientes ejemplos: Instituciones involucradas con “situaciones matemáticas” que son los “utilizadores” del saber matemático y los “enseñantes” del saber matemático.

Para una comprensión más detallada de las diferentes actividades que se llevan a cabo en el seno de las distintas instituciones con el fin de lograr la solución de un determinado campo de problemas, se precisa considerar el conjunto de tales practicas desde una perspectiva sistémica con el fin indagar su estructura o principio organizativo.

DEFINICIÓN 4: Sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas: Está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I . Su carácter social indica que son observables. Como tipos de tales prácticas sociales citamos: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones y procedimientos que son invariantes característicos del campo de problemas, argumentaciones, representaremos a este sistema por la notación $PI(C)$

2.4. OBJETOS INSTITUCIONALES Y OBJETOS PERSONALES

Dado el objeto matemático “media”, en este caso, este se presenta como un ente abstracto que emerge progresivamente de prácticas socialmente compartidas, que se realizan para resolver cierto campo de problemas matemáticos.

Como las prácticas matemáticas pueden variar en las distintas instituciones, se ha de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas, de esta manera se propone la siguiente definición:

DEFINICIÓN 5: Objeto institucional OI :

Es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de PI(C). Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de OI.

Hay que destacar que de cierto campo de problemas pueden emerger diversos objetos, que como consecuencia están mutuamente relacionados. Por tal motivo Vergnaud enuncia: "Un concepto no toma susignificado en un sólo tipo de situaciones y una situación no se analiza con ayuda de un sólo concepto" (Pág. 167). Es importante mencionar aquí que los mismos objetos institucionalmente reconocidos son fuente de nuevos problemas y pueden

ser usados como herramientas en la solución de otros. (Dauady 1986 lo denomina Dialéctica útil – objeto)-

Existen (culturalmente) distintos objetos, según la institución de referencia, los autores se conducen a esta formulación como consecuencia de presupuestos pragmáticos y la consideración de su utilidad para el análisis antropológicos de los fenómenos cognitivos y didácticos.

Rotman (1988) llega a una conclusión similar en su análisis semiótico de la actividad matemática cuando enuncia: "El teorema de Euclides 'dado cualquier número primo podemos encontrar otro mayor' no es el mismo que el teorema moderno 'existen infinitos números primos' puesto que, aparte de otras consideraciones, la naturaleza de los numerales griegos hace altamente improbable que los matemáticos griegos pensarán en términos de una progresión infinita de números" (Pág. 33). Para este autor, los números estudiados por los babilonios, los griegos, los romanos y por los matemáticos actuales nos parecen los mismos números, como consecuencia de un fenómeno de apropiación regresiva.

2.4.1. Objeto Personal

Se encuentra en Verngnaud (1982) Pág. 31 que el carácter progresivo de la construcción de los objetos en la ciencia tienen su paralelismo en el

aprendizaje del sujeto, además de la invención de nuevas ideas matemáticas. Vergnaud lo enuncia así: "No sólo en sus aspectos prácticos, sino también en los teóricos, el conocimiento emerge de los problemas para ser resueltos y de las situaciones para ser dominadas. Es cierto en la historia de las ciencias y en la tecnología; también es cierto en el desarrollo de instrumentos cognitivos en los niños muy jóvenes" (Vergnaud, 1982, p. 31).

De aquí Godino y Batanero proponen la introducción de las nociones de "sistemas de prácticas personales" y "objeto personal".

DEFINICIÓN 6: Sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas: Está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C . Representamos este sistema por la notación $Pp(C)$

DEFINICIÓN 7: Objeto personal Op : Es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $Pp(C)$.

2.5. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE UN OBJETO.

Vergnaud (1990) considera que el significado de un objeto desde el punto

de vista didáctico y psicológico no queda reducido a su definición: "Un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si nos interesamos en su aprendizaje y su enseñanza " (p. 135).

Se observa aquí una similitud con las ideas de Godino y Batanero quienes plantean que el significado de los objetos matemáticos deben estar referidos a la acción (interiorizada o no) que realizan con sujetos en relación con dichos objetos. Se precisa entonces una dimensión personal e institucional para este significado. Respecto al objeto "Media":

(1) En la "escuela elemental" encontramos que los curriculos proponen:

- ▶ la definición, en el caso más simple, empleando una notación sencilla (se evita el sumatorio y la ponderación);
- ▶ algunos ejemplos de aplicación, limitados al cálculo manual o con calculadora del número obtenido como media de un conjunto de datos.
- ▶ discriminación respecto de otras medidas de tendencia central (mediana, moda).

(2) En la "escuela secundaria" (o en la universidad), como puede verse en los textos correspondientes, el rango de cosas que se dicen y hacen con la media se amplía al enunciado y demostración de algunas propiedades y a su aplicación a situaciones problemáticas más realistas y complejas. Así se

introduce la noción de media o esperanza matemática de una distribución de probabilidad, se muestran algunas distribuciones de probabilidad, como la normal que tienen como uno de sus parámetros la media; se distingue entre media de la muestra y media de la población, etc.

(3) En la "vida diaria", en la cultura popular (medios de comunicación, relaciones sociales, (...), en el mundo empresarial, la evolución de la bolsa, precios, producción, empleo y otros indicadores económicos se mide a partir de números índice, en los que intervienen medias ponderadas. Los científicos emplean la media en el diseño de sus experimentos, como medida del efecto de sus tratamientos. Lo esencial en estas instituciones no son las propiedades matemáticas o definiciones de la media, sino que es su uso como herramienta de análisis y toma de decisiones en cierto tipo de situaciones problemáticas.

En estos ejemplos vemos que el término "media" es usado para referirse a unidades culturales (o institucionales) diferentes. Esto nos lleva a proponer la siguiente definición:

DEFINICIÓN 8: Significado de un objeto institucional OI: Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge OI en un momento dado.

La noción anterior de significado permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los cuales emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y dependencia institucional.

2.5.1. Dimensión Subjetiva del Significado

DEFINICIÓN 9: Significado de un objeto personal Op : Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto Op en un momento dado. Depende, por tanto, del sujeto y del tiempo estocásticamente.

Simbólicamente, $S(Op) = Pp(C)$

2.6. SIGNIFICADO Y COMPRENSIÓN

Entendiendo una institución como un grupo de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas, se menciona en este apartado la institución denominada clase de matemáticas. El profesor de la clase proporciona al estudiante un ambiente didáctico adecuado que esta acompañado de los instrumentos necesarios (libros de texto, materiales didácticos) que pueden ser considerados también como instituciones

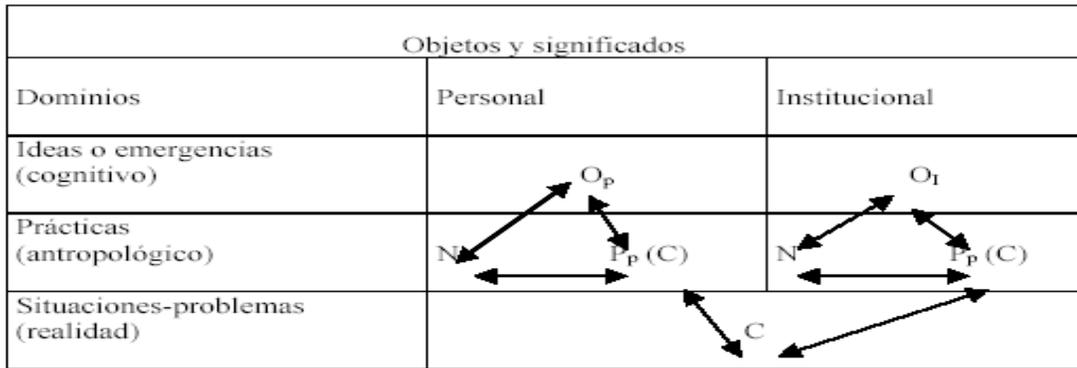
portadores de aspectos parciales del significado de los objetos correspondientes. Para un objeto matemático O_M , el profesor realiza un proceso de selección de situaciones, notaciones, etc., que se traducirán en un significado restringido para O_M .

La siguiente definición precisa un aspecto particularmente importante, la evaluación del aprendizaje donde se confronta el significado que se trata de transmitir y el efectivamente adquirido.

DEFINICIÓN 10: Significado de un objeto O_I para un sujeto p desde el punto de vista de la institución I :

Es el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en I como adecuadas y características para resolver dichos problemas.

Cuando se presenta un objeto matemático determinado, una persona determinada apropia su significado, es decir $S(O_P)$ dado el significado institucional $S(O_I)$. La intersección entre estos dos significados es lo que se considera correcto; las demás prácticas que realiza el sujeto se miran como incorrectas desde el punto de vista de la institución.



En una institución dada se menciona que un sujeto “Comprende” el significado del objeto O_I – o que ha “captado el significado” de un concepto, cuando el sujeto es capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente.

La comprensión de un objeto O_I por un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, esta abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles. La teoría que se presenta en este trabajo coincide con Glaserfeld (1989) que afirma: "El proceso de acomodación y ajuste del significado de las palabras y expresiones lingüísticas continua de hecho para cada uno de nosotros a lo largo de nuestras vidas. No importa durante cuanto tiempo hemos hablado una lengua, habrá aún la ocasión en que nos demos cuenta que, hasta cierto

punto, hemos estado usando una palabra de tal modo que ahora resulta ser idiosincrásico en algún aspecto particular" (Pág. 133).

2.6.1. El Problema de la Evaluación de los Conocimientos.

Como lo mencione al inicio de esta presentación una de las finalidades de la teoría que se presenta en este marco teórico es proporcionar criterios para la elaboración de una teoría de la evaluación del mismo, si se precisa evaluar el conocimiento matemático de los estudiantes para algunos fines determinados la primera cuestión que debe dilucidarse es o se refiere a la naturaleza del propio conocimiento. Wheeler (1993) lo manifiesta con el siguiente interrogante ¿Cómo podemos evaluar lo que no conocemos?

El sistema cognitivo de cada sujeto (su conocimiento conceptual y procedimental, intuiciones, representaciones, esquemas,...) es una totalidad organizada y compleja. En la teoría que se muestra en este trabajo se distinguen dos dominios, el primero es el referente a las ideas u objetos abstractos (personales e institucionales) el segundo dominio es el de los significados de donde emergen tales objetos inobservables, se pretende aquí buscar una correspondencia entre ambos, es decir el problema de la evaluación de los conocimientos tanto subjetivos como objetivos e institucionales.

Para determinar que un sujeto “comprende” (determinar los conocimientos subjetivos) es preciso realizar inferencias, a partir de las prácticas asociadas a toda situación de evaluación, cuya validez y fiabilidad hay que garantizar (se trata de medición educacional y psicológica). El proceso de inferencia es muy complejo dadas las múltiples interrelaciones entre varios objetos matemáticos además el conocimiento de un sujeto sobre un objeto no puede reducirse a un estado dicotómico (conoce o no conoce) ni a un grado de porcentaje unidimensional (conoce x por ciento), lo anterior hace difícil aplicar a la evaluación las teorías clásicas psicométricas de maestría (Webb 1992, Show y Lohman 1991). Se puede entrever en esta parte la complejidad del proceso de evaluación, esta problemática supone toda una nueva línea de investigación de tipo metodológico en los estudios didácticos, con la teoría proporcionada se puede apuntar específicamente sobre la selección de las situaciones de evaluación.

Los autores del presente trabajo, suponen viable para un sujeto dado determinar un campo de problemas asociado, así como los significados institucionales. El análisis de las variables didácticas del campo de problemas proporciona un criterio para estructurar la población de las posibles tareas de las cuales debe extraerse una muestra representativa, si se quiere garantizar la validez de contenido del instrumento de evaluación.

Los elementos anteriores proporcionan los primeros puntos de referencia a tener en cuenta para diseñar las situaciones de evaluación pertinentes para la evaluación de los conocimientos subjetivos.

2.7. LAS NOCIONES DE OBJETO MATEMÁTICO Y SIGNIFICADO EN OTROS AUTORES.

La atribución que se ha desarrollado a lo largo de esta presentación se basa en dos enfoques: el primero presentado por Eco (1991) que da significación a una práctica si se desempeña una función en una situación problemática, así mismo supone una semiótica pragmática según la cual el significado de una expresión viene dado por el uso o función que esta expresión tiene en el correspondiente juego del lenguaje (Wittgenstein 1953).

Steinbring (1991) propone lo que se denomina triángulo epistemológico, constituido por el objeto, el signo y el concepto; aquí se establece una íntima conexión “implícita y axiomática” con las situaciones y representaciones en dicho triángulo.

Este autor no propone una definición de significado de un concepto, pero si introduce la idea de significado intencional de los signos matemáticos y de las situaciones de referencia:

"El signo en sí mismo no tiene significado matemático, sólo en su intención para algún contexto; y los elementos del nivel objeto sólo proporcionan significado matemático en la intención de mostrar una estructura relacional oculta en la situación de referencia. Los signos matemáticos y los aspectos de las situaciones de referencia deben ser dotados de significado por intención para llegar a ser elementos del triángulo epistemológico" (Pág. 85).

En Godino y Batanero la noción de significado, intencional de los signos se puede relacionar con la noción de práctica significativa en la cual se reconoce una finalidad, para la resolución de problemas o situaciones.

El significado como entidad compuesta no es nuevo. Putnam (1991) presenta el significado como un "vector" o sucesión finita de componentes entre los cuales destaca:

"(1) los marcadores sintácticos que se aplican a las palabras, como "nombre"; (2) los marcadores semánticos que se aplican a la palabra, como "animal", "período de tiempo"; (3) una descripción de los rasgos adicionales del estereotipo, si lo hubiere; (4) una descripción de la extensión.

Parte de esta propuesta consiste en la siguiente convención: "los componentes del vector representan todos ellos, excepto la extensión, una hipótesis acerca de la competencia del hablante individual" (Pág. 191).

Bunge (1985) define la significación de un concepto por medio de un par constituido por la intención y extensión: $Sig(C) = \langle I, E \rangle$, donde, C: Un concepto; Sig (C): El significado del concepto; I: intención, las notas esenciales que caracterizan el concepto; E: extensión, conjunto de objetos a los cuales se aplica o refiere el concepto. Al conjunto de notas inequívocas de un concepto lo llama Bunge (1985) núcleo intencional. Aunque lo considera insuficiente para caracterizarlo completamente, el núcleo intencional proporciona una definición de trabajo del concepto.

La distinción realizada en este marco teórico entre significado personal e institucional corresponde con la propuesta realizada por Ausubel y cols (1983) quienes distinguen entre significado psicológico y significado lógico aunque conceptualizados de manera diferente. Para Ausubel y cols un material de enseñanza posee significado lógico, si sus elementos están organizados de tal forma que las distintas partes de la estructura se relacionan entre si de modo no arbitrario. Desde el punto de vista del sujeto se produce un aprendizaje significativo "si la tarea de aprendizaje puede relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial (no al pié de la letra), con lo que el alumno ya sabe" (Pág. 37). Estos autores conciben el contenido como una red de conceptos y proposiciones lógicamente organizados; pero respecto a la estructura interna de los conceptos adoptan una concepción clásica según la cual un concepto está constituido por una serie de atributos

necesarios y suficientes, de tal modo que todos los ejemplos del concepto tienen unos atributos y ningún no-ejemplo del concepto posee esos atributos.

La formulación que presentamos de la noción de objeto y significado personal es compatible con la expuesta por Vergnaud (1990): "El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en práctica para tratar las situaciones a las cuales es confrontado, y que implican la idea de adición" (p. 158). Vergnaud (1982), presenta una noción de concepto matemático que puede ser interpretada en términos semánticos. Este autor define un concepto como una tripleta (S, I, z) en la cual cada símbolo representa lo siguiente:

S: conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto;

I: conjunto de invariantes que constituyen el concepto;

z: conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere (Pág. 36).

En el trabajo de 1990, Vergnaud describe a S como la referencia (del concepto); I el significado ("el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas"); z, el significante (conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento).

Puesta en común:

Se presentan además en Godino y Batanero puntos importantes como los siguientes:

- El concepto es un emergente (una idea) de este sistema de “prácticas” realizadas por alguien (o en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones problemáticas, tareas o disposiciones del entorno.
- El establecimiento de relaciones entre los distintos objetos, tanto a nivel personal como institucional, es una parte esencial de los sistemas de prácticas de los que emergen los objetos, pero no agotan todos los aspectos relevantes involucrados en tales sistemas y, por tanto, en el significado.
- Los distintos elementos constituyentes del concepto, en el sentido descrito por Vergnaud, dan lugar para nosotros a distintos tipos de prácticas significativas.
- En la noción de significado de un concepto que se ha propuesto intervienen los tres elementos de la triplete que propone Vergnaud como definición de un concepto. Se coincide con Vergnaud al explicar que las situaciones y representaciones están íntimamente asociadas con la actividad de la que emergen los objetos matemáticos culturalmente definidos, esto es, destacar la relación entre actividad (praxis) y el concepto. El concepto es un emergente de prácticas.

- En nuestra definición de significado de un objeto incorporamos en un todo dialéctico tanto el objeto (fijado intensivamente) como su uso en situaciones problemáticas características, así como las representaciones simbólicas asociadas al mismo, las cuales intervienen también en la actividad de resolución.
- El trabajo de Batanero y Godino precisa las nociones de practica y objeto descritas en Chevallard (1991) dado que en el trabajo de este autor no se especifica una institución de referencia en la cual tienen lugar las prácticas (en distintas instituciones se realizan practicas distintas, lo que da lugar a objetos distintos) y, además no cualquier practica es pertinente a la emergencia de los objetos (algunas practicas son incorrectas, inapropiadas o irrelevantes).
- La noción de praxema es un objeto teórico de gran interés, pues aquí se analiza de forma más elemental la idea de práctica social: este concepto permite atraer la atención hacia las circunstancias contextuales (institucionales), de las manifestaciones lingüísticas o gestuales que deben ser tenidas en cuenta para identificar la significación pragmática de dichas manifestaciones.
- Distinguir entre el nombre de un objeto (como una entidad cultural) y el sistema de prácticas sociales ligadas a la resolución de problemas del que emerge esa unidad cultural, a la cual consideramos como significado del objeto. Se produce aquí una semiótica connotativa en

el sentido descrito por Eco (1991): El término "función" denota la idea de función, y esta a su vez connota el sistema de usos.

2.8. SIGNIFICADOS Y CONCEPCIONES

Se realiza en esta parte un estudio comparativo entre el término concepción, que en el lenguaje ordinario se usa para referirse a la idea general que tiene una persona en su mente cuando piensa sobre algo; y la noción de objeto y significado expuesto en esta presentación.

Según Artigue (1990) la noción de concepción responde a dos necesidades distintas:

- Poner en evidencia la pluralidad de puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que le son asociados, poner en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de distintas clases de problemas.
- Ayudar al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica transmitida por los modelos empiristas del aprendizaje, permitiéndole diferenciar el saber que la enseñanza quiere transmitir y los conocimientos efectivamente construidos por el alumno" (Pág. 265).

En la anterior descripción se aprecian dos sentidos complementarios para el término concepción:

- Punto de vista epistemológico (Naturaleza compleja de los objetos matemáticos y su funcionamiento).
- Punto de vista cognitivo (los conocimientos del sujeto en relación a un objeto matemático particular).

Sobre las concepciones del sujeto se discuten dos tipos de usos según los distintos autores:

a) la concepción como estado cognitivo global que tiene en cuenta la totalidad de la estructura cognitiva del sujeto en un momento dado en relación a un objeto. Esta conceptualización es la que hace Vergnaud (1982) y es la que también proporciona Confrey (1989): "el sistema global de conocimientos y creencias del sujeto" en relación a un objeto.

b) la concepción como un objeto local, estrechamente asociado al saber puesto en juego y a los diferentes problemas en cuya resolución intervienen.

Desde nuestro punto de vista, la noción de concepción, en cualquiera de sus dos acepciones (epistemológica y cognitiva) tiene un carácter global. Lo que es local es la parte investigada o evaluada con situaciones específicas en una investigación particular.

La noción de concepción puede ser asimilada a la idea de objeto institucional O_I , es decir, emergente de ciertos subsistemas de prácticas sociales asociadas a subcampos de problemas de campo dado.

El punto de vista cognitivo global de la concepción se puede relacionar con el objeto personal O_P .

La idea de concepción sobre un objeto y de relación al objeto, tanto personal como institucional, parten de un dato previo cuya existencia, naturaleza y estructura interna no se analiza ni cuestiona: el objeto. Aquí según el punto de vista de los autores se presenta una debilidad en el sentido de investigar los procesos en la formación de tales concepciones o relaciones, además no se trata aquí el problema de su evaluación y de la validez de las inferencias que se deben realizar a partir de las manifestaciones empíricas.

Para la investigación didáctica se propone teóricamente el “Sistema de prácticas sociales” asociadas a un campo de problemas $P_I(C)$ que dado su carácter social, son compartidas en el seno de I y, por tanto observables. De este sistema emerge el objeto O_I cuyo significado no es otra entidad que el propio sistema de prácticas del que emerge y que constituye al mismo tiempo sus sistemas de indicadores empíricos.

2.9 TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA, SIGNIFICADO Y ECOLOGÍA CONCEPTUAL.

Entendida como el cambio que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza, Chevallard introduce este término para diferenciar el funcionamiento académico (a nivel de investigación, como “saber sabio”) de un determinado conocimiento y el funcionamiento didáctico del mismo.

Esta noción puede ser interpretada en términos de diferencias en el significado de los objetos matemáticos entre la "institución matemática" y las instituciones escolares. Por diversas causas los usos y connotaciones de las nociones matemáticas tratadas en las instituciones de enseñanza son necesariamente restringidos. El problema didáctico se presenta cuando, en forma innecesaria, el muestreo realizado sobre los componentes del significado tiene un carácter sesgado o se añaden prácticas inadecuadas, presentando, no un significado limitado del concepto (lo cual es inevitable), sino otro incorrecto o irrelevante (por ejemplo, cuando ocurre un deslizamiento metadidáctico).

En los currículos, en principio se transforma el significado de los objetos matemáticos. Se presenta un fraccionamiento y secuenciación del saber

dado principalmente por niveles y grupos d alumnos a quienes se imparte; además se restringe de manera severa el significado del mismo.

Además, al proponer ciertas formas de uso, notaciones y connotaciones para los contratos matemáticos, se condiciona el entorno de significación que se ofrece a los alumnos.

La transposición didáctica puede ser interpretada en términos más generales dentro del marco de la ecología conceptual (Toulmin, 1972), o la ecología de las ideas (Morin, 1992; Godino, 1993), esto es, como el estudio de las condiciones socioculturales e históricas que determinan la formación y los distintos modos de existencia de los significados institucionales y de sus mutuas interdependencias.

2.10. SÍNTESIS Y EVALUACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

El modelo presentado adopta la noción de situación problema como idea primitiva. La variación de todas las variables que intervienen en las situaciones problema da lugar a diferentes campos de problemas e instituciones. Se proponen también dos unidades primarias de análisis para estudiar los procesos cognitivos y didácticos: la *práctica significativa* y el *significado de un objeto*. Para ambas unidades se postuló la distinción entre dos dimensiones independientes: personal e institucional.

Una práctica significativa implica una situación problema, un contexto institucional, una persona y los instrumentos semióticos que mediatizan la acción.

La noción de significado de un objeto propuesta nos permite derivar una noción de comprensión que tiene en cuenta los procesos institucionales y contextuales implicados. De este modo, la comprensión no se reduce a un acto puramente mental.

La utilidad práctica de un modelo teórico como el propuesto no puede mostrarse mediante un ejemplo. Por el contrario, sería necesario implementar un plan coordinado de investigaciones, en el cual aún estamos comprometidos. No obstante, podemos identificar algunas consecuencias de nuestro modelo, que consideramos de interés para la orientación general de la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

1. De este sistema teórico se puede deducir que la investigación didáctica debería centrar la atención de modo preferente en el estudio de las relaciones complejas entre los significados institucionales de los objetos matemáticos y los significados personales construidos por los sujetos. Esto debería ser así porque los procesos de enseñanza y aprendizaje tienen lugar en el seno de diversas instituciones en las cuales el conocimiento

matemático adopta significados específicos, y estos significados condicionan dichos procesos. Sin duda existen procesos mentales que condicionan el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, el centro de atención de la investigación didáctica no debería ser las mentes de los estudiantes, sino los contextos culturales e institucionales en que tiene lugar la enseñanza.

2. La naturaleza sistémica del constructor que hemos llamado *significado de un objeto* (conceptos, proposiciones, teorías) permite orientar el proceso de selección maestra de las situaciones de enseñanza y evaluación: Los significados institucionales pueden desempeñar el papel de universo de referencia para estos procesos maestros. Además, los componentes que hemos incorporado en las prácticas significativas, y las categorías sugeridas de tales prácticas, nos permiten centrar la atención sobre la dialéctica objeto situación e institución-herramientas mediadoras en el estudio de los procesos cognitivos y didácticos.

3. La distinción entre las dimensiones personal e institucional, tanto para los objetos como para los significados, nos permite articular las facetas epistemológicas, sociológicas y psicológicas en los procesos de cognición humana, y, por tanto, en los procesos de educación matemática. Una parte importante de la problemática de la investigación didáctica se puede formular mediante dos ideas básicas: '*semiometría*', esto es, la caracterización de los

significados personales e institucionales, y la '*ecología de los significados*', o sea, el estudio de las relaciones entre ambos significados.

4. El sistema teórico pretende articular diferentes aproximaciones cognitivas y epistemológicas mediante la construcción de un vínculo ontosemántico que podría ser compartido por las mismas. Entre estas aproximaciones podemos citar: constructivismo social, teoría de la actividad, cognición situada, etnomatemática, antropología cognitiva y didáctica, teoría de situaciones didácticas, etc. Sin embargo, el nivel de acuerdo y complementariedad entre estas teorías y nuestro modelo requerirá estudios más profundos en el futuro.

En síntesis, la principal utilidad de la teoría ontosemántica esbozada y el relativismo socioepistémico postulado, incluso para el conocimiento matemático, se basa en su potencial para integrar diferentes teorías. Además, consideramos que proporciona un marco para formular o para reorientar algunas cuestiones de investigación en didáctica de las matemáticas.

3. EL CURRÍCULO DE ESTADÍSTICA Y SUS COMPONENTES

El Interés por la enseñanza de la estadística, dentro de la educación matemática, viene ligado al rápido desarrollo de la estadística como ciencia y como herramienta en la investigación, la técnica y la vida profesional, impulsado notablemente por la difusión de los computadores y el crecimiento espectacular de la potencia y rapidez de cálculo de los mismos, así como por las posibilidades de comunicación; facilitando el uso de la estadística en un número considerable de personas y provocando en consecuencia, una gran demanda de formación básica en esta materia, formación que ha sido encomendada, en los niveles no universitarios a los profesores de matemáticas, los cuales no poseen la formación específica en didáctica de la estadística y muchos de ellos tampoco en Estadística aplicada, lo que no les permite abordar con éxito los objetivos educativos correspondientes y a pesar de ello pretenden incrementar su conocimiento, no sólo sobre la materia, sino también sobre los aspectos didácticos del tema. Pero este no es el único inconveniente presente en la educación estadística, ya que existen factores tan o más importantes que el anteriormente mencionado que han contribuido al fracaso escolar, como el sistema educativo.

Por lo tanto, los sistemas educativos tienen un gran desafío: lograr la transformación de sus estructuras curriculares, entendiendo que éstas ya no pueden depender totalmente de los contenidos temáticos, como ha sido tradicional, sino de un desarrollo del conocimiento en sus individuos que incorpore el fortalecimiento de actividades como la generalización, la sistematización y la abstracción. Los estudiantes, cada vez más, tienen necesidad de enfrentarse a la resolución de problemas, no sólo en el ámbito escolar sino en sus futuros lugares de trabajo, en donde la creatividad y la innovación serán elementos importantes para su buen desempeño. Los estudiantes necesitan instrumentos de aprendizaje, es decir, estructuras cognitivas con alto grado de adaptabilidad a lo nuevo. Esta necesidad refleja una dimensión central del proceso de educación continua en el que cada día estaremos inmersos.

En la actualidad existe un número notable de publicaciones, diseños curriculares e investigación relacionadas con este tema, ejemplos de proyectos curriculares desarrollados de acuerdo a estas ideas son, los del Schools Council Project on Statistical Education en el Reino Unido (1957-1981) y el Quantitative Literacy Project (1985-98) y Data Driven Mathematics (1996-2000) en Estados Unidos. Los materiales didácticos, el software educativo, investigaciones, revistas, reuniones y congresos sobre la enseñanza de la estadística han crecido espectacularmente en los últimos años.

Este interés, sin embargo, no es exclusivo de la comunidad de educación matemática. La preocupación por las cuestiones didácticas y por la formación de profesionales y usuarios de la estadística ha sido una constante de los propios estadísticos, y las investigaciones sobre el razonamiento estocástico han tenido un gran auge en el campo de la Psicología.

El currículo, se toma bajo la concepción de Stenhouse : currículo como actividad de planificar una acción.

3.1. CURRÍCULO DE ESTADÍSTICA INTERNACIONAL

3.1.1. BASES EN QUE SE APOYA EL DISEÑO CURRICULAR

- **Fenómenos Estocásticos**

En los nuevos diseños curriculares se sugiere adelantar la enseñanza de la probabilidad, y utilizar una metodología apoyada en la simulación y experimentación, indicando como un punto fundamental la adquisición de un lenguaje preciso en relación con el azar y la probabilidad. Por ejemplo, en el diseño curricular del Ministerio de Educación y Ciencia de España (MEC) para la enseñanza secundaria obligatoria, en el bloque 5, denominado

"Tratamiento del azar" se encuentra como concepto a presentar a los alumnos: "Fenómenos aleatorios y terminología para describirlos".

Dentro de los procedimientos, se hace referencia a la "utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar". El currículo del MEC no es una excepción, ya que se encuentran parecidos términos o expresiones en los diseños curriculares de las comunidades autónomas y en otros países, como Inglaterra o Estados Unidos, que han propuesto reformas recientes sobre el currículo de Matemáticas.

Por otro lado, cuando el alumno se inicia en probabilidad, ha usado con frecuencia términos y expresiones para referirse a los sucesos aleatorios, que con frecuencia no tienen el mismo sentido preciso que adquieren en la clase de matemáticas. En el lenguaje ordinario, tanto en las conversaciones, como en la prensa o literatura se encuentra con frecuencia referencias al azar y lo aleatorio, aunque el significado que se da a estos términos no siempre coincide con el que se trata de enseñar. Otros términos coloquiales se asocian a los fenómenos aleatorios que pueden presentar matices diferenciados según el contexto, como casual, accidental, eventual, fortuito, impensado, imprevisible, inesperado, inopinado, ocasional, por suerte o las expresiones tales como por chiripa, por chamba , de rebote, de rechazo, sin querer, sin intención, sin plan.

La aleatoriedad es un modelo matemático que permite describir un gran número de fenómenos en forma más adecuada que otros modelos deterministas (Batanero).

Las situaciones de tipo aleatorio tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Si se quiere que el alumno valore el papel de la probabilidad y estadística, es importante que los ejemplos y aplicaciones mostrados en la clase hagan ver de la forma más amplia esta posible fenomenología (la convergencia estocástica hace posible el estudio de los fenómenos aleatorios en su conjunto, ya que individualmente son impredecibles). La fenomenología del azar se clasifica en cuatro grandes grupos de fenómenos que rodean al hombre: su mundo biológico, físico, social y político.

Dentro del **mundo biológico**, puede darse a conocer al alumno que algunas de las características están plenamente determinadas al producirse la concepción las cuales no se pueden predecir con anterioridad, como: el sexo, color de pelo, peso al nacer, etc. Algunos rasgos como la estatura, número de pulsaciones por minuto, recuento de hematíes, etc., dependen incluso del momento en que son medidas.

Otras aplicaciones se refieren al campo de la medicina. La posibilidad de contagio o no en una epidemia, la edad en que se sufre una enfermedad infantil, la duración de un cierto síntoma, o la posibilidad de un diagnóstico

correcto cuando hay varias posibles enfermedades que presentan síntomas parecidos varían de uno a otro chico. El efecto posible de una vacuna, el riesgo de reacción a la misma, la posibilidad de heredar una cierta enfermedad o defecto, o el modo en que se determina el recuento de glóbulos rojos a partir de una muestra de sangre son ejemplos de situaciones aleatorias.

Cuando se hacen predicciones sobre la población mundial o en una región dada para el año 2050, por ejemplo, o sobre la posibilidad de extinción de las ballenas, se están usando estudios probabilísticos de modelos de crecimiento de poblaciones, de igual forma que cuando se hacen estimaciones de la extensión de una cierta enfermedad o de la esperanza de vida de un individuo.

En agricultura y zootecnia se utilizan estos modelos para prever el efecto del uso de fertilizantes o pesticidas, evaluar el rendimiento de una cosecha o las consecuencias de la extensión de una epidemia, nube tóxica, etc. Por último, y en el ámbito de la psicofisiología, observamos el efecto del azar sobre el cociente intelectual o en la intensidad de respuesta a un estímulo, así como en los tipos diferentes de caracteres o capacidades de los individuos.

Además del mundo biológico del propio individuo, también existe un **mundo físico** variable en el que los individuos nos hallamos sumergidos. Uno de los

ejemplos sobre fenómenos aleatorios físicos más importantes son los meteorológicos de los cuales la duración, intensidad, extensión de las lluvias, tormentas o granizos; las temperaturas máximas y mínimas, la intensidad y dirección del viento son variables aleatorias. Así mismo lo son las posibles consecuencias de estos fenómenos: el volumen de agua en un pantano, la magnitud de daños de una riada o granizo son ejemplos en los que se presenta la ocasión del estudio de la estadística y probabilidad.

También en nuestro medio físico dependemos de ciertas materias primas como el petróleo, carbón y otros minerales; la estimación de estas necesidades, localización de fuentes de energía, el precio, etc., están sujetos a variaciones de un claro carácter aleatorio.

Otra fuente de variabilidad aleatoria es la medida de magnitudes. Cuando pesamos, medimos tiempo, longitudes, etc., cometemos errores cuya magnitud es aleatoria. Uno de los problemas que se puede plantear es la estimación del error del instrumento y asignar una estimación lo más precisa posible de la medida.

Otro grupo de fenómenos que rodea al hombre es el **mundo social**. El hombre no vive aislado: vivimos en sociedad; la familia, la escuela, el trabajo, el ocio están llenos de situaciones en las que predomina la incertidumbre. El número de hijos de la familia, la edad de los padres al contraer matrimonio, el tipo de trabajo, las creencias o aficiones de los miembros varían de una

familia a otra. En la escuela, ¿podemos prever las preguntas del próximo examen?; ¿quién ganará el próximo partido? Para desplazarnos de casa a la escuela, o para ir de vacaciones, dependemos del transporte público que puede sufrir retrasos. ¿Cuántos viajeros usarán el autobús? ¿Cuántos clientes habrá en la caja del supermercado el viernes a las 7 PM?.

En los ratos de ocio los seres humanos practicamos juegos de azar tales como loterías, parques, cartas, dados, etc. Se acude a encuentros deportivos cuyos resultados son inciertos y en los que tendremos que hacer cola para conseguir las entradas. Cuando hacemos una póliza de seguros no sabemos si la cobraremos o por el contrario perderemos el dinero pagado; cuando compramos acciones en bolsa estamos expuestos a la variación en las cotizaciones y su fluctuación en el mercado.

Finalmente, por ser el hombre un ser político, se encuentra rodeado de situaciones aleatorias pertenecientes al **mundo político**. El Gobierno, a cualquier nivel, local, nacional o de organismos internacionales, necesita tomar múltiples decisiones que dependen de fenómenos inciertos y sobre los cuales necesita información. Por este motivo la administración precisa de la elaboración de censos y encuestas diversas. Desde los resultados electorales hasta los censos de población hay muchas estadísticas cuyos resultados afectan las decisiones de gobierno y todas estas estadísticas se refieren a distintas variables aleatorias relativas a un cierto colectivo. Entre las más importantes se encuentran: el índice de precios al consumidor, las

tasas de población activa, emigración-inmigración, estadísticas demográficas, producción de los distintos bienes, comercio, etc., de las que diariamente son transmitidas en las noticias.

▪ **Concepción de las Matemáticas**

Por otro lado, no se puede desconocer la **concepción de las matemáticas** para el diseño curricular; ya que en la actualidad se reconoce la importancia que tiene la visión de las matemáticas sobre la práctica docente. En cuanto a este aspecto se han identificado dos concepciones extremas sobre la matemática y sus aplicaciones a problemas de la vida real.

La primera se refiere a la matemática como descubrimiento que consiste en pensar que los objetos matemáticos (conceptos, teoremas, propiedades, algoritmos) tienen una existencia objetiva, ideal, independiente del sujeto y de la realidad a la que se aplican y de la cultura. Según esta visión no se puede resolver ninguna aplicación, que no sea trivial, si antes no se ha dado un buen fundamento matemático de una manera axiomática, rigurosa, abstracta y lógica; por ejemplo, se pensaría que las propiedades de los conjuntos numéricos tienen una “existencia real” y no pueden ser cambiadas por otras diferentes. Así, si se tiene esta creencia, quedaría justificada una enseñanza en la que se de un peso a los conceptos y técnicas donde las

aplicaciones y problemas matemáticos serían en esta concepción, un apéndice; que se trataría después de que el alumno ya ha aprendido las matemáticas y sería capaz de aplicar correctamente los conceptos una vez aprendidos. En gran medida, la práctica de la enseñanza de las matemáticas en los últimos años ha estado dominada por esta concepción.

Por el contrario, existe otra concepción que considera a las matemáticas como una construcción humana que surge como consecuencia de la necesidad y curiosidad del hombre por resolver cierta clase de problemas o disposiciones del entorno; que, asimismo, en la invención de los objetos matemáticos tiene lugar un proceso de negociación social y que estos objetos son falibles y sujetos a evolución, por lo cual el aprendizaje y la enseñanza debe tener en cuenta estos procesos, por ejemplo, se pensaría que podríamos haber construido los conjuntos numéricos con otros convenios y otras propiedades y que podemos definir nuevas propiedades sobre los conjuntos numéricos, que sean importantes para algún problema nuevo. Esta última es la posición de las teorías psicológicas constructivistas, que están apoyadas en un constructivismo social como filosofía de las matemáticas.

Si se tiene esta postura, se considera que las matemáticas y sus aplicaciones deben mantenerse en íntima relación a lo largo del currículo. Los estudiantes deberían ver la necesidad de cada segmento particular de

matemáticas antes de que le sea presentado (o incluso mejor, antes de que los estudiantes lo creen por sí mismos) y deberían ser capaces de ver cómo las matemáticas creadas satisfacen la necesidad sentida al principio. Según esto, las aplicaciones de las matemáticas, tanto externas como internas, deberían preceder y seguir a la creación de las matemáticas; éstas deben aparecer como una respuesta natural y espontánea de la mente y el genio humano al entorno físico, biológico y social en que el hombre vive. Los estudiantes deben ver, por sí mismos, que la axiomatización, la generalización y la abstracción de las matemáticas son necesarias con el fin de comprender los problemas de la Naturaleza y la Sociedad.

Por otro lado, las tendencias recientes en filosofía de las matemáticas reconocen un triple carácter en esta disciplina: las matemáticas como quehacer humano, comprometido con la resolución de cierta clase de situaciones problemáticas; las matemáticas como lenguaje simbólico y las matemáticas como un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido, emergente de la actividad de matematización. La instrucción matemática debe ser coherente, por tanto, con este triple carácter, tanto en la organización general del currículo, como en la planificación de las actuaciones del profesor en el aula.

Teniendo en cuenta las tendencias recientes de la filosofía de las matemáticas, presentadas por autores como Tymoszko (1986) y Ernest (1991), que sintetizan las posiciones de autores como Wittgenstein y Lakatos

(citadas en el libro “Didáctica de la Estadística”, Carmen Batanero), se considera necesario distinguir en las Matemáticas al menos tres aspectos esenciales mutuamente imbricados, que deben ser tenidos en cuenta en la organización de su enseñanza:

a) Las matemáticas constituyen una actividad de resolución de situaciones problemáticas de una cierta índole, socialmente compartida; estas situaciones problemáticas se pueden referir al mundo natural y social o bien pueden ser internas a la propia matemática; como respuesta o solución a estos problemas externos o internos surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, ...).

b) Las matemáticas son un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones- problemas y las soluciones encontradas; al igual que la música son un lenguaje universal en el que los signos empleados, su semántica y sintaxis son compartidos en los diferentes grupos humanos; como todo lenguaje implica unas reglas de uso que hay que conocer y su aprendizaje ocasiona dificultades similares al aprendizaje de otro lenguaje no materno.

c) Las matemáticas constituyen un sistema conceptual, lógicamente organizado y socialmente compartido; la organización lógica de los conceptos, teoremas y propiedades explican también gran número de las dificultades en el aprendizaje; un sistema no puede reducirse a sus

componentes aislados, ya que las interrelaciones entre los mismos son una parte esencial. Surge así una paradoja en la enseñanza de las matemáticas: Cada concepto no puede enseñarse adecuadamente en forma aislada de otros conceptos; tampoco pueden enseñarse los diferentes conceptos simultáneamente; en consecuencia, cabría pensar que no es posible su enseñanza. Este problema se resuelve, al menos parcialmente, con la consideración del curriculum "en espiral"; cada concepto es tratado varias veces a lo largo de la enseñanza, las primeras veces de modo implícito; progresivamente se va tomando como objeto de estudio en sí mismo, aumentando el grado de complejidad y completitud en su estudio.

Las matemáticas constituyen, por tanto, una *realidad cultural* constituida por conceptos, proposiciones, teorías, (los objetos matemáticos) y cuya significación personal e institucional está íntimamente ligada a los sistemas de prácticas realizadas para la resolución de las situaciones-problemas (Godino y Batanero). Las matemáticas no constituyen solamente una actividad sino también son un lenguaje simbólico y un sistema conceptual lógicamente organizado, aunque no en una jerarquía estricta de niveles de abstracción y complejidad.

- **Teorías Educativas**

Como ya se ha indicado, la probabilidad y la estadística son muy cercanas al mundo que rodea al alumno y que, por tanto proporcionan una oportunidad extraordinaria de "matematizar", de mostrar al alumno el proceso de construcción de modelos, así como la diferencia entre "modelo" y realidad. Por otro lado, las teorías de aprendizaje aceptadas con mayor generalidad enfatizan el papel de la resolución de problemas, de la actividad del alumno en la construcción del conocimiento, así como de la formulación (lenguaje matemático), validación (demostración y razonamiento de las ideas matemáticas) e institucionalización (puesta en común; acuerdo social en la construcción del conocimiento). El profesor no es ya un transmisor del conocimiento, sino un gestor de este conocimiento y del medio (instrumentos, situaciones) que permite al alumno progresar en su aprendizaje.

Cobra entonces un papel primordial las diversas **teorías educativas** que han influenciado la Educación Matemática y que pueden ser potencialmente útiles en la organización de la enseñanza de la estadística. A continuación, se describe brevemente algunas teorías educativas en las que se sitúa el significado de los objetos matemáticos.

Entre estas se encuentra el **Constructivismo**.

La génesis histórica de los conceptos tiene su paralelismo en el aprendizaje de los mismos, que también es un proceso gradual y es por ello paradójico que la enseñanza siga con frecuencia un proceso contrario al de la construcción histórica. En el aula de clase se suele dar una gran importancia a los conceptos, proposiciones y teoremas (a nivel universitario, las clases teóricas son las más importantes, impartidas generalmente por el profesor con mayor experiencia). Los problemas y aplicaciones se consideran sólo un apéndice, suponiendo que si el alumno comprende la teoría será capaz de resolver los problemas que se les plantea. Esta creencia es hoy rebatida por los psicólogos educativos, sobre todo en relación a niños y adolescentes.

Entre los teóricos estudiosos de la materia se encuentra Piaget, el cual se centró en dar criterios para determinar en qué nivel de desarrollo intelectual se encuentra el niño a diversas edades, y analiza la comprensión formal de los conceptos. Piaget postula que la experiencia, la actividad y el conocimiento previo son las bases que determinan el aprendizaje. El conocimiento es construido activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno. El niño trata de adaptarse al mundo que le rodea. Cuando una idea nueva se le presenta, se crea un "*conflicto cognitivo*" o "*desequilibrio*" en su estado mental si esta idea choca con las ya existentes. Para reaccionar a este desequilibrio se requiere un proceso de equilibración que consiste en los pasos de *asimilación* y *acomodación*. La asimilación es la incorporación (aceptación) por parte del sujeto de los datos nuevos La

acomodación es el cambio o reestructuración de los ya existentes. El aprendizaje se concibe como un proceso que progresa lentamente con puntos conflictivos que el alumno debe superar mediante el proceso descrito. Conocer es un proceso de adaptación que organiza el propio mundo experiencial; luego la posibilidad de aprender depende del conocimiento previamente adquirido y del desarrollo intelectual del alumno, que sigue una serie de etapas. Las etapas son particiones en fases, de modo que los sujetos que están en una misma fase tienen un modo de razonamiento similar y la progresión de una etapa a otra siempre sigue un cierto patrón.

En cuanto a esta clasificación, Para el estudio del desarrollo del razonamiento probabilístico, Piaget consideró tres etapas del conocimiento:

* *Preoperatoria*, caracterizada por la necesidad de manipular objetos reales para el aprendizaje de un cierto concepto, pues el niño se apoya en sus experiencias empíricas para comprender los conceptos.

* *Operaciones concretas*: Se comienza a comprender la conservación de la masa, peso, número y volumen. Aparecen conceptos secundarios, que no necesitan ser abstraídos de la experiencia concreta.

* *Operaciones abstractas*: Se pueden manipular relaciones entre representaciones simbólicas, se formulan hipótesis y se establecen

conclusiones. Se comprende el significado de abstracciones verbalmente, sin referirse a objetos particulares.

Además, Piaget e Inhelder (1951) citados por Batanero en su libro *Didáctica de la Estadística*, defienden que la comprensión del azar por parte del niño es complementaria a la de la relación causa-efecto. Los niños concebirían el azar como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas, que actuando independientemente producirían un resultado inesperado. En consecuencia, hasta que el niño no comprende la idea de causa, no tiene un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios. El azar habría que considerarlo asimismo como complementario a la composición lógica de operaciones reversibles y requiere un razonamiento combinatorio, para poder concebir las distintas posibilidades existentes en estas situaciones.

Además de los aspectos antes mencionados, Piaget definió a la escuela como un entorno que debe estimular y favorecer el proceso de auto-construcción; el profesor, convertido en un mediador entre los conocimientos y el alumno debe facilitar el descubrimiento de nociones y la elaboración del saber y del saber-hacer, más que presentarlos bajo una forma preestablecida. El maestro tradicional pone el acento en los aspectos figurativos del pensamiento y considera el desarrollo cognitivo como una acumulación lineal de conocimientos o técnicas enciclopédicas. La

concepción heredada del modelo piagetiano es muy diferente: se refiere a aprender a pensar y a valorar los aspectos operativos del pensamiento (procesos internos, operaciones mentales), a hacer experimentar al niño, a favorecer la manipulación con el fin de hacer surgir leyes generales. Según esta concepción, la simple observación de la realidad es insuficiente para la estructuración de los conocimientos. La actividad desplegada por el aprendiz se convierte así en una poderosa fuente de motivación, necesaria para la construcción del conocimiento.

Otra forma de llevar a cabo el aprendizaje por descubrimiento es mediante la **resolución de problemas** por parte del alumno. Se trata no de problemas rutinarios sino que requieren una verdadera actividad de resolución por parte del alumno quien, al resolverlo, ha aprendido algo nuevo; así pues, la situación-problema constituye el punto de partida de las situaciones didácticas. Definida como una situación didáctica fundamental, pone en juego, como instrumento implícito, los conocimientos que el alumno debe aprender. La situación-problema es el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características:

*Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.

*Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él.

*Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores.

*Debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones.

*Debe contener su propia validación.

La resolución de la situación-problema supone una serie de interacciones simétricas entre estudiantes y de interacciones asimétricas entre los estudiantes y el profesor, pero también supone la superación de un conflicto cognitivo interno del sujeto entre sus conocimientos anteriores y los que resuelven la situación planteada.

Polya ha sido uno de los impulsores de la resolución de problemas, recomendando el uso de estrategias generales y su método en cuatro fases:

- Comprensión del problema;
- Concepción de un plan de resolución;
- Ejecución del plan;
- Examen retrospectivo de la solución hallada.

Otra influencia muy fuerte en educación viene de la teoría de Vigostky, que tiene como interés fundamental considerar la intervención social como el factor predominante del progreso del conocimiento; porque comprender el papel del entorno social en el aprendizaje del individuo es una de las ambiciones mayores de la Psicología de la educación; quien además, basa su teoría del aprendizaje en la *actividad*, considerando que el sujeto no sólo

responde a los estímulos que le proporcionamos sino que actúa sobre ellos y los transforma, usando instrumentos mediadores de dos tipos: herramientas y símbolos (signos) o también conocidos como **herramientas semióticas** que son productos culturales necesarios para la interacción social y descubrimiento de la función del niño. Para Vygotsky, el desarrollo de las funciones mentales superiores –la memoria, el lenguaje, la conciencia - sólo es posible a través de los sistemas semióticos, por ejemplo, la escritura, los números, el habla. Verdaderos instrumentos de la construcción psicológica, los sistemas de signos tienen, en el tratamiento del conocimiento, un papel análogo al de las herramientas técnicas en la manipulación del mundo físico. En la perspectiva Vygotskyana, el aprendizaje de los sistemas de signos es una apuesta capital del desarrollo individual. El papel de los signos es fundamental, en la medida en que hacen posible la "duplicación" interna del mundo. Es necesario el recurso de un sistema semiótico de representación (el lenguaje natural es el ejemplo prototípico) para pensar en las representaciones mentales de la persona. Las representaciones mentales, pues, no son independientes de la asistencia de un sistema de representación externa. Tampoco es posible la comunicación sin dichos sistemas. La herramienta actúa sobre el estímulo y lo modifica. El signo es un producto cultural, que actúa como mediador entre la persona y el entorno y no modifica el estímulo, sino a la persona que lo usa como mediador, puesto que el símbolo permite referirse a un objeto o acción, y con ello interiorizarlo, así como compartir su significado con otros. El aprendizaje consiste en la interiorización progresiva de

instrumentos mediadores. Vygotsky diferencia dos niveles de desarrollo de la persona:

El desarrollo efectivo que es lo que el individuo es capaz de hacer por sí mismo, sin ayuda de mediadores externos o personas, es decir con los mediadores ya interiorizados;

El desarrollo potencial que es lo que el individuo es capaz de hacer con la ayuda de otras personas o mediadores externos. La diferencia entre estos dos niveles de desarrollo es la *zona de desarrollo potencial*.

Además, Vygotsky al hacer explícita la influencia de variables sociales y culturales en el funcionamiento cognitivo del individuo se aleja de la dimensión intra-individual del aprendizaje(como la teoría Piagetiana); renovando la reflexión sobre la organización de las situaciones escolares, igualmente inspira el campo de la educación por el papel relevante que atribuye a la intervención del adulto en la progresión de los aprendizajes del estudiante.

Las teorías anteriores son generales, para cualquier tipo de conocimiento que se quiera transmitir. El carácter específico del conocimiento matemático y la importancia particular de las situaciones que se empleen en la enseñanza y la gestión de las mismas por parte del profesor son subrayadas

por Brousseau (un didacta de las matemáticas) y denominadas **situaciones didácticas**. Para este autor, en una situación didáctica hay que considerar el grupo de alumnos y el profesor, así como el medio didáctico que incluye los problemas, materiales e instrumentos que el profesor proporciona a los alumnos, con el fin específico de ayudarlos a reconstruir un cierto conocimiento. Para lograr el aprendizaje el alumno debe interesarse personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. Se diferencian cuatro tipos de situaciones didácticas:

Situación de acción, donde se indagan posibles soluciones para el problema planteado.

Situaciones de formulación / comunicación: en las que el alumno debe explicar oralmente o por escrito para otra persona la solución hallada, lo que le hace usar el lenguaje matemático.

Situaciones de validación: donde se pide a los alumnos las pruebas de que su solución es la correcta. En caso de que no sea así, el debate con los compañeros les permite descubrir los puntos erróneos.

Situaciones de institucionalización: tienen como fin dar un estatuto oficial al nuevo conocimiento aparecido, ponerse de acuerdo en la nomenclatura, formulación, propiedades, para que pueda ser usado en el trabajo posterior.

Brousseau también plantea que el trabajo intelectual del alumno debe ser en ciertos momentos comparable al de los propios matemáticos, y por ello debería tener oportunidad de investigar sobre problemas a su alcance, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiar sus ideas con otros, reconocer las que son conformes con la cultura matemática, adoptar las ideas que le sean útiles.

Por el contrario, el trabajo del profesor es en cierta medida inverso del trabajo del matemático profesional: En lugar de "inventar" métodos matemáticos adecuados para resolver problemas, debe "inventar" problemas interesantes que conduzcan a un cierto conocimiento matemático. Esta formulación del aprendizaje matemático se corresponde con las teorías constructivistas, ampliamente asumidas. Por ejemplo, en el National Council of Teachers of Mathematics (U.S.A.), mencionado por Carmen Batanero, se indica:

"El aprendizaje debe venir guiado por la búsqueda de respuestas a problemas –primero a un nivel intuitivo y empírico; más tarde generalizando; y finalmente justificando (demostrando)" (NCTM, 1989).

El significado de un objeto matemático emerge de la actividad de resolución de problemas, mediada por herramientas semióticas, es claro que el aprendizaje tiene un carácter constructivo y también se asume la teorías de

resolución de problemas y la de Vigotsky. La teoría de enseñanza que mejor se acomoda a la visión española, y en general la visión mundial de las matemáticas es la de Brousseau, ya que tiene en cuenta los cinco tipos de elementos considerados en el significado de un objeto matemático.

Las anteriores teorías señalan la conveniencia de cambiar el enfoque tradicional expositivo en la clase de estadística, abandonar el énfasis excesivo en los aspectos teóricos y reforzar el trabajo práctico en pequeños grupos de alumnos, a partir de los problemas que dan sentido a los conceptos. Es importante también incrementar la capacidad argumentativa, la comprensión de las diferentes representaciones y el cambio de una representación a otra.

Estas recomendaciones coinciden plenamente con la esencia actual de la estadística, que no se limita al paradigma clásico de confirmación de hipótesis formuladas antes de recoger los datos, sino que es también un instrumento de exploración y descubrimiento. Puesto que los computadores actualmente hacen innecesario que los alumnos empleen largas horas en aprender los algoritmos de cálculo o la elaboración manual de gráficos, es posible concentrarse en los restantes elementos del significado de los objetos estadísticos; propiedades, representaciones, problemas y argumentaciones. Creemos, por ello que en la escuela debe propiciarse la filosofía del análisis exploratorio de datos y el trabajo con proyectos que permita dotar de un significado más completo a los conceptos estadísticos, a

partir de situaciones variadas conectadas con otras áreas curriculares o con los intereses de los estudiantes.

▪ **Factores que Condicionan el Currículo Estadístico**

Además de las teorías pedagógicas ya señaladas, existe una serie de factores que es preciso tener en cuenta cuando se pretende comprender y analizar el currículo de Estadística en la enseñanza primaria y secundaria; los cuales explican la dificultad e importancia que tiene el diseño curricular.

Entre estos se encuentran los diferentes sentidos del término currículo, teniendo en cuenta que esta palabra puede usarse con diversos significados; para este caso, y de acuerdo a la perspectiva de las matemáticas y de su enseñanza planteadas en los párrafos anteriores tiene consecuencias sobre el diseño de planes de educación matemática, entendido este como un "plan operativo que detalla qué matemáticas necesitan conocer los alumnos, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen sus conocimientos matemáticos y cuál debe ser el contexto en el que tenga lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje" (N.C.T.M. (1989). Sin embargo, se puede hacer referencia al término con diferentes matices; como los presentados por Batanero en su libro "Didáctica de la Estadística":

Currículo pretendido: plan escrito para el sistema escolar, que incluye especificaciones de lo que se tiene que enseñar, en qué secuencia y a qué edades. Puede también contener sugerencias de métodos de enseñanza y de modos de evaluación del aprendizaje. El currículo pretendido se conoce a través de la lectura de los documentos oficiales.

Currículo enseñado: lo que se enseña realmente en las aulas, puede ser evaluado mediante la observación de las clases o entrevistas o informes de los profesores.

Currículo aprendido: ideas y habilidades que los estudiantes realmente aprenden en clase y en el trabajo personal. Puede ser evaluado mediante pruebas o exámenes a los estudiantes.

Currículo retenido: las ideas y habilidades que los estudiantes recuerdan algún tiempo después de la instrucción.

Currículo ejercitado: lo que los estudiantes pueden luego aplicar en sus estudios posteriores o en su vida profesional.

Asimismo, Batanero hace referencia a Rico(1997), quien considera cuatro dimensiones principales en torno a las cuales se organiza la reflexión curricular.

La primera de ellas reconoce que el fundamento del currículo para el caso de la estocástica, está en la propia ciencia estadística, de igual manera el conocimiento a aprender, las capacidades para practicar y la lógica de la instrucción tendrían en cuenta los principios de esta disciplina; esta es la llamada dimensión cultural-conceptual.

La segunda hace énfasis a que el diseño del currículo se basa en el estudio de la forma en que aprenden los sujetos, el cual requiere un conocimiento de como los estudiantes piensan, como cambian sus concepciones y como se puede dirigir este cambio; otra de las bases del currículo son las concepciones ingenuas de los estudiantes sobre la incertidumbre, en la que los temas se distribuirán a lo largo del tiempo, en función del desarrollo de la capacidad de cálculo de los alumnos; esta recibe el nombre de dimensión cognitiva.

La tercera, plantea el análisis de la educación, sus agentes y funciones, planificación, control y optimización. Un punto importante es el conocimiento de los profesores: se ha mostrado que los profesores son los que finalmente determinan el currículo enseñado y que, a veces, presentan también dificultades en el razonamiento estocástico e inseguridad por esta materia. Por tanto, la implantación real pasa por la motivación y formación de los profesores que deben llevar a cabo la enseñanza; esta es la dimensión ética-formativa.

La cuarta, se centra en las necesidades sociales que fundamentan la necesidad de educar ciudadanos que comprendan los informes de las encuestas y estudios y que hagan decisiones inteligentes en situaciones de incertidumbre; debido a la importancia de la utilidad social del conocimiento es denominada la dimensión social.

- **La Evaluación del Aprendizaje**

Cuando se habla de currículo, es importante tener en cuenta las **disposiciones oficiales** de educación. Los conceptos y procedimientos se presentan cíclicamente, incrementando progresivamente la profundidad del estudio. En lugar de limitarse a las clásicas unidades sobre variaciones, combinaciones y permutaciones, el análisis combinatorio elemental se presenta estructurado de acuerdo con tres modelos específicos que permiten resolver una gran cantidad de problemas combinatorios, tanto simples como complejos: los modelos de muestreo, colocación de objetos en urnas y partición de conjuntos. La potencia de los procedimientos combinatorios se presenta también con referencia a las sucesiones recurrentes, métodos lógicos, grafos y árboles, etc., que se usan para conectar el tema con la matemática discreta, de la que el análisis combinatorio es un núcleo central.

Desde la concepción dada de las matemáticas la **evaluación** es el estudio de la correspondencia entre el significado institucional de los conceptos que se trata de enseñar en una cierta institución escolar y el significado personal construido por los estudiantes y tiene, por tanto, un carácter social; por este motivo la evaluación se considera hoy día una parte importante del proceso de instrucción, así en NCTM se concibe la evaluación como un proceso dinámico y continuo de producción de información sobre el progreso de los alumnos hacia los objetivos de aprendizaje. No desconociendo que la palabra evaluación se usa con diferentes significados: Como examen o como sistema de calificación; como sistema de seleccionar los alumnos para el acceso a un centro o para ser promocionados de un curso a otro o simplemente, como método de informar a los alumnos sobre su progreso.

La importancia de la evaluación dentro del funcionamiento del sistema de enseñanza en su conjunto, y de los propios sistemas didácticos es ampliamente reconocida. Si las situaciones y formas de evaluación son deficientes, se corre el riesgo de que esta evaluación ejerza una influencia negativa ocasionando serias distorsiones entre los objetivos educativos y lo que finalmente aprenden los estudiantes. Por tanto, un componente imprescindible de cualquier currículo es la propuesta de criterios sobre qué evaluar, cómo (procedimientos y circunstancias) y cuándo, además de reconocer la complejidad de la función evaluadora, debido a que ésta debe atender a las múltiples facetas del conocimiento estadístico (comprensión

conceptual y procedimental, actitudes) ya que es necesario usar todo un sistema para recoger datos sobre el trabajo y rendimiento del alumno y no es suficiente evaluarlo a partir de las respuestas breves dadas a preguntas rutinarias en una única evaluación (o examen), por lo que es relevante tener en cuenta sus componentes, como los señala Garfield (1995):

- ¿Qué se evalúa? : los conceptos, habilidades, aplicaciones actitudes y creencias concretas sobre los que habla la evaluación
- Fin de la evaluación: qué se pretende; por qué se recoge la información (por ejemplo, para informar a los alumnos)
- ¿Quién evalúa? : el profesor habitual u otro; los mismos alumnos; un alumno a otro
- El método e instrumento usados

Independientemente del significado de evaluación su principal propósito es mejorar el aprendizaje de los alumnos, pero existen otros propósitos secundarios los cuales son:

- Proporcionar a los alumnos información individual sobre qué han aprendido y en qué puntos tienen dificultades.

- Proporcionar información al profesor, a los padres y al centro escolar sobre el progreso y la comprensión de sus alumnos, en general y sobre las dificultades de estudiantes particulares
- Proporcionar a las autoridades educativas o a cualquier agente educativo un indicador global del éxito conseguido en los objetivos educativos.

Existen diversos aspectos del conocimiento matemático señalados en los Estándares de evaluación del NCTM que se deben tener en cuenta en la planificación de la instrucción y en su correspondiente evaluación.

El primer estándar se refiere a la *coherencia* donde los métodos y tareas que se usen para evaluar el aprendizaje de los alumnos deben ser coherentes con el currículo, esto es, con el plan global de formación matemática diseñado. Deben corresponderse con las situaciones didácticas propuestas, con los objetivos, contenidos y métodos de enseñanza y aprendizaje.

Asimismo, la valoración del aprendizaje de los alumnos debe basarse en información obtenida a partir de diversas fuentes, métodos y formas de evaluación. La evaluación de los conocimientos matemáticos de los estudiantes, de acuerdo con los Estándares citados, debe tener en cuenta las siguientes dimensiones:

Comprensión conceptual:

- Dar nombre, verbalizar y definir conceptos;
- Identificar y generar ejemplos válidos y no válidos;
- Utilizar modelos, diagramas y símbolos para representar conceptos;
- Pasar de un modo de representación a otro;
- Reconocer los diversos significados e Interpretaciones de los conceptos;
- Identificar propiedades de un concepto determinado y reconocer las condiciones que determinan un concepto en particular;
- Comparar y contrastar conceptos. Conocimiento procedimental:
- Reconocer cuándo es adecuado un procedimiento;
- Explicar las razones para los distintos pasos de un procedimiento;
- Llevar a cabo un procedimiento de forma fiable y eficaz;
- Verificar el resultado de un procedimiento empíricamente o analíticamente;
- Reconocer procedimientos correctos e incorrectos;
- Generar procedimientos nuevos y ampliar o modificar los ya conocidos;
- Reconocer la naturaleza y el papel que cumplen los procedimientos dentro de las matemáticas.

Resolución de problemas:

- Formular y resolver problemas;
- Aplicar diversas estrategias para resolver problemas;
- Comprobar e interpretar resultados;
- Generalizar soluciones.

Formulación y comunicación matemática:

- Expresar ideas matemáticas en forma hablada, escrita o mediante representaciones visuales;
- Interpretar y juzgar ideas matemáticas, presentadas de forma escrita, oral o visual;
- Utilizar el vocabulario matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones.

Razonamiento matemático.

- Utilizar el razonamiento inductivo para reconocer patrones y formular conjeturas;
- Utilizar el razonamiento deductivo para verificar una conclusión, juzgar la validez de un argumento y construir argumentos válidos;
- Analizar situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes;
- Reconocer la naturaleza axiomática de las matemáticas.

Actitud o disposición hacia las matemáticas:

- Confianza en el uso de las matemáticas para resolver problemas, comunicar ideas y razonar;
- Flexibilidad al explorar ideas matemáticas y probar métodos alternativos para la resolución de problemas;
- Deseo de continuar hasta el final con una tarea matemática;
- Interés, curiosidad e inventiva al hacer matemáticas;

- Inclinación a revisar y reflexionar sobre su propio pensamiento y su actuación;
- Valorar la aplicación de las matemáticas a situaciones que surjan de otras materias y de la experiencia diaria;
- Reconocer el papel que cumplen las matemáticas en nuestra;
- cultura, y el valor que tienen como herramienta y como lenguaje.

Los instrumentos y situaciones de evaluación deben estar en consonancia con la Enseñanza, por lo que se hace necesario que las situaciones de evaluación tengan en cuenta las actividades realizadas en clase y el conocimiento matemático que se derivan de ellas. Garfield(1995) indica las siguientes posibilidades de instrumentos de evaluación para el caso de la estadística:

- Observación sistemática de las intervenciones de los alumnos en clase a lo largo del curso;
- Revisión periódica de los cuadernos y apuntes de los alumnos;
- Pruebas específicas escritas tipo examen;
- Preguntas realizadas en clase a alumnos particulares o a toda la clase;
- Encuestas breves sobre lo que han aprendido o lo que han encontrado confuso en una clase particular, sobre la actitud de los estudiantes, el contenido del curso o su visión de la estadística;
- Trabajos de síntesis sobre un tema o una colección de lecturas que muestren la comprensión y capacidad de síntesis;

- Proyectos de análisis de datos individuales o colectivos;
- Test de opciones múltiples;
- Problemas para realizar en la clase o como trabajo de casa;
- "Dossier" donde el profesor va recogiendo información diversa acerca del alumno;
- "Diario" elaborado por los alumnos con resúmenes de lo aprendido en clase.

▪ **Materiales y Recursos Didácticos**

Por otro lado, no se puede desconocer la importancia de los materiales y recursos didácticos para el aprendizaje de conceptos estocásticos y su papel en dicho aprendizaje; puesto que representan una forma de llevar a cabo esta enseñanza.

Para ello es preciso comenzar por clarificar lo que se entiende por el término material. Este fue definido por Alsina y colaboradores(1988) como aquel término que agrupa todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje, entonces se debe incluir el material manipulativo, software didáctico y no didáctico, libros, problemas, juegos, notaciones simbólicas, representaciones gráficas y en

general todas las formas expresivas e instrumentales que permiten el trabajo matemático en el campo particular de la estocástica.

En cuanto al **material manipulativo**, debe desempeñar un papel básico en los primeros niveles de enseñanza por la función instrumental que desempeña en los procesos de contextualización de las técnicas y conceptos matemáticos, y por la necesidad que tienen los niños de contar con referentes concretos de los conceptos abstractos que tratamos de enseñarles. En este sentido se pronuncian los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática del NCTM cuando afirman que en el estudio de la probabilidad en primaria los estudiantes deben explorar situaciones de forma activa, experimentando y simulando modelos de probabilidad.

Pero hay que tener en cuenta que el material en sí mismo no es suficiente y puede ser usado de múltiples maneras indeseables. En cuanto a este aspecto, Batanero cita a Glayman y Varga quienes sugieren que para iniciar al niño en ideas específicas es preciso echar mano de medios específicos. No basta contar con el simple azar para tropezar con sucesos aleatorios que permitan a los niños descubrir las leyes de las probabilidades; es necesario introducir estrategias, apelar a la actividad para suscitar la curiosidad natural del niño, conducirlo a que se enfrente con la realidad y luchar contra las ideas falsas que pueda tener.

El aprendizaje de las matemáticas es consecuencia de confrontar a los alumnos a problemas cuya solución son los conocimientos matemáticos pretendidos. El uso de material se justifica en la medida en que haga posible el planteamiento de problemas significativos para los alumnos. Además, estos problemas deben estar integrados dentro de situaciones didácticas que den oportunidad a los estudiantes, no sólo de indagar personalmente posibles soluciones, sino también de expresar dichas soluciones y razonar su validez.

En consecuencia, los movimientos de reforma de la enseñanza de las matemáticas deben superar una cierta ingenuidad sobre el uso del material didáctico. El interés debería enfocarse hacia la búsqueda y redacción de documentos que describan el diseño, experimentación y evaluación de secuencias de situaciones didácticas sobre las técnicas y estructuras conceptuales propuestas para los distintos niveles de enseñanza, basados en materiales concretos. El material manipulativo y visual estará de esta forma integrado en un proceso de estudio más rico y complejo; lo cual permite a la enseñanza de la estocástica, como otras ramas de la matemática, verse favorecida con el uso del material manipulativo. Sin embargo, conviene tener en cuenta algunos puntos específicos sobre el uso de tales materiales.

Una característica particular de los experimentos aleatorios es su carácter irreversible, destacado ya desde los trabajos de Piaget e Inhelder , para quienes la aleatoriedad se produce por la interferencia de una serie de causas que actuando independientemente, llevan a un resultado impredecible. Una vez producido un resultado aleatorio, no es posible volver al estado inicial con seguridad. Por ejemplo, si al impulsar la aguja de una ruleta numerada de 1 a 10 se obtiene el número 5, un giro en sentido contrario no devuelve en general a la posición inicial.

Esta falta de reversibilidad impide un apoyo directo del material concreto en el estudio de los fenómenos aleatorios. Mientras que en el aprendizaje de las operaciones básicas en aritmética o de los conceptos geométricos, el niño puede explorar, mediante composición y descomposición una operación o propiedad dada (por ejemplo, al estudiar la suma de dos números o la descomposición de un polígono en triángulos) con ayuda de material concreto (mediante las regletas o mediante modelos de polígonos), ello no es posible en el caso de los fenómenos aleatorios. El análisis de un experimento aleatorio va más allá del resultado inmediato (suceso producido) y requiere la consideración de todos los sucesos que podrían haber ocurrido, es decir de la consideración del espacio muestral del experimento.

Por otro lado, en los ejemplos citados en aritmética o geometría el niño puede repetir las veces que quiera el trabajo con el modelo, obteniendo siempre el mismo resultado. Una repetición de la experiencia aleatoria,

debido a su mismo carácter, no puede servir para comprobar un resultado, cosa que sí ocurre, por ejemplo, con las operaciones aritméticas. Es necesario establecer un sistema de registro que permita reflexionar sobre las experiencias y plantear otras nuevas relacionadas.

Por tanto, el uso del material para la clase de probabilidad, implica la realización, no de un único experimento, sino de una serie de experimentos repetidos, la recogida de sus resultados, el recuento de las frecuencias con que aparecen los diversos resultados, además del cálculo de frecuencias relativas o acumuladas, promedios, la representación gráfica de los datos, la comparación con los resultados obtenidos por otros compañeros, la elaboración y comprobación de conjeturas (hipótesis) sobre el experimento, etc. Es decir, el estudio de los experimentos aleatorios implica la organización de una situación de recogida y análisis de datos estadísticos. De la misma forma, si se parte de una clase de estadística (situación de análisis de datos) será difícil olvidar completamente los problemas de variabilidad, muestra, población, generalizabilidad de las conclusiones, posibilidad de predicción, aleatoriedad. De esta manera estadística y probabilidad son dos caras de una misma moneda, de ahí que se prefiera hablar de "estocástica". Esto es, al realizar algunos experimentos aislados, lo único que puede aprender (y enseñar, o sea, estudiar) es que los resultados del experimento son impredecibles. Es únicamente cuando se recogen los resultados de una serie larga de tales experimentos, cuando se

producen los fenómenos de convergencia y se aprecian regularidades en el comportamiento de los fenómenos aleatorios. Estas regularidades (como la convergencia de las frecuencias relativas, las distintas distribuciones de probabilidad asociadas al experimento) son las que estudia el cálculo de probabilidades y se pretende que los alumnos re-inventen con la ayuda del profesor.

Sin embargo, es importante analizar los materiales disponibles, estudiando las características que los diferencian y que pueden contribuir a un uso preferente de cada uno de ellos para la enseñanza de nociones o propiedades específicas.

En primer lugar los generadores aleatorios. Existen en el comercio cajas de material probabilístico que contienen distintos dispositivos y juegos con los cuales se pueden generar experimentos aleatorios. No obstante, es importante resaltar que para el estudio de las situaciones aleatorias, así como los conceptos y técnicas probabilísticas y estadísticas correspondientes, la adquisición de material preparado no es imprescindible, ya que los profesores y alumnos pueden preparar con gran facilidad materiales similares a los comercializados. Pensar, por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda, o la extracción de bolas o papeles numerados de una caja o bolsa. Este tipo de material también es muy común para

juegos de tipo social, ya que es rara la familia en que no se cuente con un juego de dados, cartas, etc.

Los generadores aleatorios de tipo físico pueden reducirse a cuatro tipos principales: "dados", "bolas", "ruletas" y "barajas de cartas".

Dados: Puede considerarse como dado cualquier objeto que presente un número finito de posiciones distintas. Podrían incluirse en este grupo los trompos, monedas, fichas bicolores, etc. Concretizan el experimento aleatorio más simple posible: Cuando el espacio muestral es finito y los resultados son equiprobables. Una generalización sería que el dispositivo fuese sesgado, por lo cual los dos resultados no fuesen equiprobables (como en el caso de un dado sesgado, etc.).

Bolas en urnas: Se incluye en este grupo no sólo las bolas propiamente dichas, sino cualquier colección de objetos (fichas, cartas, regletas, bloques, etc.) que se puedan mezclar antes de extraer de una urna, caja, etc., de modo que todas tengan la misma posibilidad de salir. La diferencia con el caso anterior es que permite, por un lado introducir el número de elementos diferentes que se desee, en lugar de estar restringido a un número dado de elementos. Por otro lado, la mayor o menor proporción de elementos de cada tipo en la urna permite cambiar a voluntad las probabilidades de los distintos sucesos elementales. La extracción de bolas de urnas, un número dado de

veces, puede dar origen a cuatro tipos de experimentos diferentes: extracciones con reemplazamiento, sin reemplazamiento, ordenadas, no ordenadas (que se corresponden con las cuatro operaciones combinatorias básicas). Finalmente, la extracción de bolas en urnas puede dar lugar al estudio de problemas de inferencia si se usa una urna opaca y el alumno desconoce la composición de la urna.

Ruletas, u otro dispositivo que permita plantear problemas de probabilidades geométricas: Pueden servir las ruletas construidas con cartulina por los propios alumnos, con áreas rayadas de formas diversas. Como eje de giro de estas ruletas puede utilizarse un lápiz y como aguja un clip sujetapapeles desplegado por uno de sus laterales. Este tipo de material permite utilizar sectores con áreas iguales o desiguales, y sucesos con probabilidades iguales o diferentes. Permite también plantear problemas de probabilidades compuestas mediante un juego de coronas y sectores circulares. Podemos generar variables continuas.

Barajas de cartas, o colecciones de tarjetas con datos referentes a más de un atributo. Estos generadores contienen datos por lo menos de dos variables aleatorias diferentes (palo de la baraja y número / figura). Por lo tanto, pueden dar origen al estudio de la asociación/ independencia de variables, además del estudio de experimentos compuestos.

Las caras, bolas, áreas, en estos dispositivos pueden estar numeradas o coloreadas, con números o colores iguales o diferentes, lo cual produce sucesos equiprobables o no equiprobables. También se pueden usar ruletas y dados de los "Juegos reunidos" o similares que casi con seguridad tienen los alumnos en sus casas.

Se pueden utilizar otros materiales, como:

*Chinchetas (o cualquier otro objeto irregular).

*Tablas de números aleatorios, o generadores de números al azar con computador, tablas de las distribuciones de probabilidades básicas.

*Diagramas de barras, cartesianos, en árbol, de Venn, y cualquier tipo de gráfico estadístico.

*Botellas de muestreo.

*Canales, por los que se dejan caer bolas (máquina de Galton).

*Dianas y dardos para tirar al blanco.

*Programas de computador para simulación de fenómenos aleatorios.

Tutoriales.

*Programas de cálculo estadístico y representación gráfica, incluyendo las hojas de cálculo.

*Anuarios estadísticos, tablas y colecciones de datos estadísticos tomados de la prensa o recogidos por los propios alumnos, junto con proyectos asociados a los mismos.

*Plantillas para el dibujo de funciones de densidad o modelos planos o espaciales de dichas distribuciones (por ejemplo, representaciones gráficas con computador de dichas distribuciones).

*Materiales curriculares específicos; en particular los desarrollados por proyectos centrados en áreas de interés para el alumno (por ejemplo, materiales del School Council Projects, School Mathematics Projects, Quantitative Literacy Project, etc.)

*Otros materiales, como la regla para tomar tiempos de reacción, instrumentos de medida para comparar medidas y estimaciones de las mismas, etc.

Otro punto importante es recordar que un uso característico del material en estocástica es **la simulación**, es decir, sustituir un experimento aleatorio difícil de observar en la realidad, por otro equivalente. La simulación es una de las ideas estocásticas fundamentales, porque permite condensar el experimento en el tiempo y en el espacio y operar con el experimento simulado para obtener conclusiones válidas para el experimento original. Además, la simulación proporciona un método universal para obtener una estimación de la solución de los problemas probabilísticos, que no tiene paralelo en otras ramas de la matemática.

En la enseñanza de la estocástica en secundaria la simulación cobra papel importante, ya que ayuda al alumno a conocer las diferencias entre la probabilidad experimental y la teórica. En los Estándares del NCTM para los

niveles de secundaria propone, a este respecto, que el centro de atención de la docencia debe dejar de ser la selección de la técnica apropiada de recuento y enfocar en su lugar el análisis de la situación problema y el diseño de un procedimiento adecuado de simulación.

Cualquier problema probabilístico implica una serie de experimentos aleatorios compuestos de una determinada manera. Cada uno de estos experimentos puede ser simulado con un modelo de urnas convenientemente escogido (incluso los modelos continuos de probabilidad).

El experimento compuesto se obtiene componiendo las urnas correspondientes a los experimentos simples y la repetición del experimento global, junto con el análisis de los datos producidos permite una solución aproximada del problema. En este sentido la urna con bolas de colores (fichas, tarjetas) es un material universal, válido para estudiar cualquier problema o concepto probabilístico. Muchos problemas complejos se resuelven hoy día mediante simulación y el mostrar a los alumnos ejemplos sencillos de esta técnica puede servir para mostrar su aplicabilidad a campos y problemas reales.

La simulación, en sí misma, sin embargo, no resuelve todos los problemas de la enseñanza. Aunque la simulación es un medio de estudiar cualquier experimento aleatorio, la misma variabilidad de estos experimentos hace que

las experiencias realizadas en clase no siempre converjan con suficiente rapidez o no converjan en el sentido esperado, ya que generalmente las secuencias de resultados que se recogen no son muy largas. Incluso aunque lo fueran, el cálculo de probabilidades no asegura que no se produzca una fluctuación; sólo que las fluctuaciones grandes son cada vez menos probables; además la realización de experimentos, en sí misma (el enfoque frecuencial de la enseñanza de las probabilidades) permite encontrar una estimación de la solución del problema (incluso la solución para algunos problemas, como los de optimización). Pero no proporciona la justificación del porqué esa solución es correcta, es decir, no revela los objetos matemáticos subyacentes que hacen posible la convergencia en uno u otro sentido.

Existen diferentes elementos mediante los cuales se puede realizar el proceso de simulación, entre ellos se encuentra: las calculadoras gráficas y juegos de azar.

Las calculadoras gráficas, ofrece posibilidades a la enseñanza de la estadística, como:

- *Transmisión de datos(entre calculadoras o calculadora y computador)

- *Opciones de manejo de listas

- *Posibilidad de transformación de los datos

- * Cálculos estadísticos básicos para una y varias variables

- * Gráficos estadísticos usuales
- * posibilidad de ser programadas
- * Generador de números aleatorios y tablas estadísticas básicas

En cuanto a los juegos de azar, no se puede olvidar que el desarrollo matemático comenzó precisamente a partir de los juegos de azar; que además constituyen en la actualidad una actividad socialmente muy extendida, incluso en forma institucional.

Aunque es importante que los alumnos realicen algunas actividades de simulación con apoyo de material manipulativo, como moneda, dados o ruletas, con tablas de números aleatorios y calculadoras, es realmente el **computador** el que proporciona una mayor potencia de simulación, construcción de modelos y exploración de los mismos.

Las posibilidades son todavía mayores con los programas estadísticos que suelen incluir módulos de estudio de las diferentes distribuciones de probabilidad con representación gráfica y cálculo de valores críticos y áreas bajo la función de densidad. Unido esto a la posibilidad de extracción de muestras de valores de estas distribuciones de tamaño dado, almacenamiento de las mismas en nuevos ficheros de datos, que pueden ser analizados, proporciona una herramienta muy interesante para la introducción de ideas de probabilidad y particularmente de inferencia;

además existen en Internet programas didácticos específicos para explorar conceptos estocásticos, desde los más elementales a los más avanzados; también cuenta con una gran ventaja su naturaleza dinámica , su velocidad y el creciente rango de software permite a los estudiantes experimentar y explorar todos los aspectos de los procesos estadísticos, desde la planificación de la muestra o del diseño experimental hasta la recolección y el manejo de datos, para interpretar y comunicar los resultados.

Debido a los aspectos ya señalados, el uso del computador en la enseñanza de la estadística esta recibiendo mucha atención, tanto de profesores como de los investigadores, como se puede constatar en Shaughnessy, Garfield , Greer y Biehler (1997).

A propósito de estos investigadores Biehler (1997) clasifica el software estadístico según sus funciones educativas en micromundos y herramientas. Los micromundos posibilitan la realización de experimentos interactivos, mediante simulaciones y visualizaciones exploratorias que ayudan a los estudiantes a conceptuar la estadística.

Las herramientas permiten a los estudiantes practicar la estadística del mismo modo que lo hacen los estadísticos profesionales. En el caso particular del análisis exploratorio de datos, estas herramientas deberían

facultar a los estudiantes para hacer un trabajo interactivo, exploratorio y abierto, utilizando software flexible, fácil de usar y aprender.

Existen diferentes tipos de software para la enseñanza de la estadística, entre los que se encuentran:

paquetes estadísticos profesionales, como por ejemplo: SPSS, STATGRAPHICS, etc. Cada uno de estos paquetes tiene una amplia disponibilidad de representación gráfica y numérica.

Software didáctico, como Fathom, que es un medio de aprendizaje para análisis exploratorio de datos y álgebra, y se utiliza en secundaria y en cursos introductorios de estadística a nivel de bachillerato.

Software de uso general, entre los que se cuentan las hojas de cálculo, como por ejemplo excel.

Tutoriales, que son programas desarrollados para enseñar a los estudiantes sobre habilidades estadísticas específicas o evaluar su conocimiento.

Software en Inter.-red.

Cálculo y representación gráfica, permite incorporar la filosofía del análisis exploratorio de datos, en que los gráficos y el cambio de uno a otro sistema de representación se usa como herramienta de descubrimiento y análisis.

Trabajo con datos reales: mediante este se pretende capacitar al alumno para recoger , organizar, depurar, almacenar, representar y analizar sistemas de datos sencillos; comenzando por la comprensión de las ideas básicas sobre organización de datos: codificación grabación y depuración.

Ficheros de datos y proyectos. El profesor puede proporcionar ficheros de datos a los alumnos, para introducir algún tema particular o porque sea difícil de recoger por los propios alumnos. Existen colecciones de ficheros de datos disponibles para los profesores en revistas como Teaching Statics o en internet. Los ficheros de datos son fácilmente analizables desde una hoja electrónica, que pueden ser utilizadas por estudiantes de 14 o 15 años.

3.2. CURRÍCULO NACIONAL

El currículo Nacional, consta de las directrices que a nivel nacional se plantean en cuanto a la actividad matemática escolar; que aparecen estipulados en el documento conocido como Lineamientos Curriculares para Matemáticas del Ministerio de Educación (Colombia).

Estos lineamientos, proponen considerar tres grandes aspectos para organizar el currículo en un todo armonioso:

Procesos generales, tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Conocimientos básicos, tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas. Estos procesos específicos se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros.

Los sistemas son aquellos propuestos desde la renovación curricular como: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

El contexto, tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto

educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.

En cuanto a los conocimientos básicos, es importante tener en cuenta una tendencia actual en los currículos de matemáticas que es la de favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, el cual ha estado presente a lo largo de este siglo, en la ciencia, en la cultura y aún en la forma de pensar cotidiana.

La teoría de la probabilidad y su aplicación a los fenómenos aleatorios, han construido un andamiaje matemático que de alguna manera logra dominar y manejar acertadamente la incertidumbre. Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, regidos por el azar, son ordenados por la estadística mediante leyes aleatorias de una manera semejante a como actúan las leyes determinísticas sobre otros fenómenos de las ciencias. Los dominios de la estadística han favorecido el tratamiento de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la Psicología, la antropología, la lingüística, entre otros, aún más han permitido desarrollos al interior de la misma matemática.

Las investigaciones de Shaughnessy (1985), planteadas en los lineamientos curriculares le han llevado a establecer que en las matemáticas escolares el desarrollo del pensamiento aleatorio, mediante contenidos de la probabilidad y la estadística, debe estar inmerso de un espíritu de exploración y de

investigación tanto por parte de los estudiantes como de los docentes. Debe integrar la construcción de modelos de fenómenos físicos y del desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos. También han de estar presentes la comparación y la evaluación de diferentes formas de aproximación a los problemas con el objeto de monitorear posibles concepciones y representaciones erradas. De esta manera el desarrollo del pensamiento aleatorio significa resolución de problemas.

La búsqueda de respuestas a preguntas que sobre el mundo físico se hacen los niños resulta ser una actividad rica y llena de sentido si se hace a través de recolección y análisis de datos. Decidir la pertinencia de la información necesaria, la forma de recogerla, representarla y de interpretarla para obtener las respuestas lleva a nuevas hipótesis y a exploraciones muy enriquecedoras para los estudiantes. Estas actividades permiten además encontrar relaciones con otras áreas del currículo y poner en práctica conocimientos sobre los números, las mediciones, la estimación y las estrategias de resolución de problemas.

En la tarea de buscar y recoger datos es importante mantener claros los objetivos, las actitudes, los intereses que la indujeron, prever qué tipos de respuestas se pueden encontrar, las dificultades que podrían presentarse, las distintas fuentes como consultas, entrevistas, encuestas, observaciones, la evaluación de su veracidad, distorsiones, sesgos, lagunas, omisiones y la

evaluación de la actitud ética de quien recoge los datos y su responsabilidad social; son señalados por Carlos E. Vasco(sistemas de datos, documento en prensa).

Cuando se habla de datos, es importante una reflexión sobre su naturaleza. Ellos no serían comprensibles sin considerar que tienen un mínimo de estructura, el formato y seguramente un orden, por ejemplo el estar unos a continuación de otros, el orden alfabético si son palabras, el orden aditivo si se trata de números. En este sentido podría considerarse que no hay datos sino sistemas de datos.

La enseñanza de las matemáticas convencionales ha enfatizado la búsqueda de la respuesta correcta única y los métodos deductivos. La introducción de la estadística y la probabilidad en el currículo de matemáticas crea la necesidad de un mayor uso del pensamiento inductivo al permitir, sobre un conjunto de datos, proponer diferentes inferencias, las cuales a su vez van a tener posibilidades de ser ciertas. Este carácter no determinista de la probabilidad hace necesario que su enseñanza se aborde en contextos significativos, en donde la presencia de problemas abiertos con cierta carga de indeterminación permitan exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones. Explorar e interpretar los datos, relacionarlos con otros, conjeturar, buscar configuraciones cualitativas, tendencias, oscilaciones, tipos de crecimientos, buscar correlaciones,

distinguir correlación de causalidad, calcular correlaciones y su significación, hacer inferencias cualitativas, diseños, pruebas de hipótesis, reinterpretar los datos, criticarlos, leer entre líneas, hacer simulaciones, saber que hay riesgos en las decisiones basadas en inferencias, Vasco (sistemas de datos); son logros importantes en el aprendizaje de la estadística.

Entonces habrá de tenerse especial cuidado para que la enseñanza de conceptos, de métodos, de representaciones del mundo estadístico y probabilístico como camino hacia la construcción de una teoría matemática no cause la pérdida de su carácter aleatorio.

Heinz Steinbring, citado por Vasco (lineamientos curriculares para matemáticas) en su artículo la interacción entre la práctica de la enseñanza y las concepciones teóricas, presenta un modelo basado en un análisis epistemológico de la naturaleza de la probabilidad, el cual considera tres niveles. El primero tiene que ver con la estructura del contenido, el segundo tiene en cuenta el estudiante que aprende significativamente y el tercero considera al docente quien planifica, organiza, apoya y desarrolla esta forma de aprendizaje.

El proyecto del consejo escolar de educación estadística, presenta tres principios que pueden tenerse en cuenta al introducir los conceptos

probabilísticos y estadísticos (Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Ministerio de Educación Nacional) son:

Los conceptos y las técnicas deben introducirse dentro de un contexto práctico.

No es necesario desarrollar completamente las técnicas en que se presentan por primera vez.

No es necesario ni deseable una justificación teórica completa de todos los temas, algunos de ellos se trataran dentro de un problema particular, otros se considerarán mediante experiencias y no se justificarán teóricamente.

Los docentes, además de considerar situaciones de aplicación reales para introducir los conceptos aleatorios, deben preparar y utilizar situaciones de enseñanza abiertas, orientadas hacia proyectos y experiencias en el marco aleatorio y estadístico, susceptibles de cambios y de resultados inesperados e imprevisibles. Los proyectos y experiencias estadísticos que resultan interesantes y motivadores para los estudiantes generalmente consideran temas externos a las matemáticas lo cual favorece procesos interdisciplinarios de gran riqueza.

Estas reflexiones acerca de los procesos que se desarrollan mediante contenidos matemáticos que tienen que ver con el pensamiento aleatorio se

tuvieron en cuenta al proponer indicadores de logros curriculares para el área de matemáticas, en la resolución 2343 de 1996, en los lineamientos curriculares.

3.3. CURRÍCULO INSTITUCIONAL

El currículo institucional, se refiere a todos los aspectos relacionados con el contexto de determinada institución, el cual se desarrolla y se materializa en el proyecto educativo institucional(PEI).

El proyecto Educativo Institucional es la herramienta que permite a determinada institución expresar sus grandes propósitos y finalidades, recogidos en la misión institucional, producto de la participación y reflexión de la comunidad educativa; teniendo en cuenta los lineamientos curriculares que tienen como fin orientar a las instituciones educativas en el diseño y desarrollo del currículo dentro del respectivo PEI. A si mismo, la naturaleza de las matemáticas, el quehacer matemático en la escuela, las justificaciones para aprender y enseñar matemáticas, los procesos que los niños siguen al aprender y las relaciones de la matemática con la cultura, son elementos para tener en cuenta a la hora de proponer una estructura curricular del área al igual que su articulación con otras disciplinas en el PEI.

El PEI, consta de elementos como: naturaleza, visión, misión, objetivos generales, principios y propósitos, metodologías, aspectos legales; que para cada institución son diferentes debido al ejercicio de la autonomía escolar establecido por el Ministerio de Educación Nacional; basados en los lineamientos curriculares los cuales constituyen una propuesta que puede ser consultada por los docentes y utilizada para enriquecer el currículo del PEI.

3.4.CURRICULO DE AULA

Con la reordenación del sistema educativo, específicamente los nuevos currículos de educación primaria y secundaria a nivel mundial, que incluyen en forma generalizada recomendaciones sobre la enseñanza de la estadística, muchos son los cambios a los que los profesores han debido o deben enfrentarse, lo que supone un proceso sumamente complejo a través del cual se intenta promover determinadas modificaciones en los sistemas escolares.

Estas reformas plantean también un cambio de paradigma educativo, que es paralelo al desarrollo de un nuevo paradigma epistemológico en la matemática, busca criterios y medios para llevar a cabo esta formación que debe ser asumida y adaptada por los profesores, sin embargo, en la reciente

conferencia organizada por la IASE sobre la formación de investigadores se puso de manifiesto que la estadística se usa incorrectamente (Batanero), no se comprenden conceptos aparentemente elementales y no hay una valoración suficiente del trabajo del estadístico dentro de los equipos de investigación, lo cual indica la existencia de una problemática educativa que tiene su raíz; en que la incorporación de la estadística desde la escuela no es todavía un hecho; a pesar que los currículos de educación primaria y secundaria la incluyen, los profesores suelen dejar este tema para el final del programa y con frecuencia lo omiten.

Estos problemas se agudizan debido a la formación de profesores, ya que las modernas teorías pedagógicas sobre la formación de profesores diferencian dos tipos de conocimiento que ellos deben adquirir: conocimiento del contenido; en este caso conocimiento de la estadística y conocimiento didáctico; particularmente conocimiento sobre la didáctica de la estadística. A pesar de ello, la formación específica de los profesores en este ámbito es prácticamente inexistente, en España, sólo muy recientemente se ha iniciado una asignatura específica de didáctica de la estadística en la licenciatura en ciencias y técnicas estadísticas de la Universidad de Granada y se cree que este tipo de asignatura es prácticamente inexistente en otras universidades del mundo; la situación es todavía peor en lo que se refiere a los profesores de primaria, la mayor parte de los cuales no tienen una formación ni siquiera básica sobre la didáctica de la estadística, ni sobre los conceptos básicos de

estadística o probabilidad. Este es el caso de Colombia que por medio del Ministerio de Educación; a pesar de plantear en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas la importancia de desarrollar el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, se desconoce la formación específica de los profesores en el área de estadística y probabilidad, pues se hace gran énfasis por todos los medios y herramientas, en la formación de los educadores en el área de matemáticas. Lo cual evidencia que el currículo propuesto es bien diferente del que se desarrolla efectivamente en el aula y el que es aprendido por los estudiantes.

4. ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

4.1. LA ESTADÍSTICA EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Nos enfrentamos a diario a la necesidad de recoger, organizar e interpretar sistemas de datos y esta necesidad aumentará en el futuro, debido al desarrollo de los sistemas de comunicación y las bases de datos. De igual manera nos vemos rodeados de información que encontramos en los medios de comunicación, la mayor parte de las veces esta información viene expresada en forma de tablas o gráficos estadísticos; es el caso de la simple lectura del periódico, con la que nos damos cuenta que hacen falta conocimientos elementales para entender y comprender el significado de estadísticas de consumo, de nivel de vida, de predicciones electorales, económicas, etc, además, conocimientos que nos permitan juzgar la calidad de la información cuantitativa divulgada por estos medios y resolver, en cada caso, problemas tanto científicos como sociales que precisen de conocimientos estadísticos. Ello ha mostrado la necesidad de incluir la enseñanza de la Estadística en el currículo de Matemáticas en los niveles de primaria, secundaria y en diversos estudios universitarios. Algunos países han dedicado grandes esfuerzos a diseñar currículos y materiales específicos como los elaborados en Inglaterra para el School Council Project on Statistical Education (Proyecto del Consejo Escolar sobre Educación

Estadística), por Holmes y cols. (1980), el Quantitative Literacy Project (Proyecto de Literatura Cuantitativa) en Estados Unidos (Landwehr y Watkins, 1986; Landwehr y cols 1987; Gnanadesikan y cols. 1987); Azar y probabilidad en España (Godino y cols. 1987) y el Curriculum and Evaluation Standards (Currículo y Estándares de Evaluación) del National Council of Teachers of Mathematics, N.C.T.M.(2000) (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas), conocido como "Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática".

De los anteriores estándares mencionamos los de la N.C.T.M.; USA. De este documento citamos contenidos estadísticos de algunos niveles de enseñanza .

Para el nivel P-4 (Preescolar a 9 años) propone que el currículo incluya experiencias con análisis de datos y probabilidades para que los alumnos sean capaces de:

- recoger, organizar y describir datos;
- construir, leer e interpretar datos presentados de manera organizada;
- formular y resolver problemas que impliquen la recogida y análisis de datos;
- explorar el concepto de causalidad.

En los niveles 5-8 (que corresponden a los dos últimos cursos de enseñanza primaria y los dos primeros de enseñanza secundaria obligatoria en

España) el currículo de matemáticas debe incluir la exploración de la Estadística en situaciones del mundo real para que el estudiante sea capaz de:

- recoger, organizar y analizar datos de forma sistemática;
- elaborar, leer e interpretar tablas y diversas representaciones gráficas;
- formular inferencias y argumentos convincentes que se basen en el análisis de datos;
- evaluar argumentos que estén basados en el análisis de datos;
- llegar a apreciar los métodos estadísticos como medios potentes en la toma de decisiones.
- Usar las medidas de posición central, particularmente la mediana y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos.

En estos niveles se pretende que progresivamente los niños sean capaces de ver el conjunto de datos como un todo, describir su forma y usar las características estadísticas, como el rango y las medidas de tendencia central para comparar conjuntos de datos. Deben considerar que los datos son muestras recogidas de poblaciones mayores y llevar a cabo investigaciones y proyectos, considerando el ciclo: formular preguntas, recoger datos y representarlos. Analizarán si sus datos proporcionan la información necesaria para responder sus preguntas. Podrían recoger datos o usar otros disponibles en la escuela o en la ciudad, por ejemplo, del censo o sobre el tiempo o disponibles en Internet. La experiencia con una variedad de gráficos les permitirá comprender los valores en los ejes horizontal y

vertical, la utilidad de las escalas y cómo representar el cero en una gráfica. Los niños deberían también usar programas de ordenadores que les ayuden a representar gráficos, por ejemplo, la hoja electrónica.

El Diseño Curricular Base correspondiente a España propone cinco bloques para la Enseñanza Secundaria Obligatoria, dos de los cuales están relacionados con la Estadística: “Interpretación, representación y tratamiento de la información” y “tratamiento del azar”; donde toman el término "currículo" en la acepción de Stenhouse (1984) como actividad de planificar una formación.

En Colombia se tienen Los Estándares Básicos de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, Republica de Colombia). Los estándares están organizados en cinco tipos de pensamiento matemático uno de los cuales está relacionado con la Estadística, el pensamiento aleatorio y sistemas de datos que comprende: Situaciones susceptibles de análisis a través de recolección sistemática y organización de datos. Ordenación y presentación de la información. Gráficos y su representación. Métodos Estadísticos de análisis. Nociones de probabilidad. Relación de la aleatoriedad con el azar y noción del azar como opuesto a lo deducible, como un patrón que explica los sucesos que no son predecibles o de los que no se conoce la causa. Ejemplos en situaciones reales. Tendencias, predicciones y conjeturas.

Los aspectos mencionados de los diferentes estándares dejan ver que existen similitudes en cuanto a los contenidos que se plantean para la enseñanza de la Estadística en España, Estados Unidos y Colombia; a pesar de que el currículo de la NCTM es un currículo avanzado en materia de estadística ya que esta se orienta desde preescolar hasta el final de la secundaria; se puede decir que no estamos alejados de lo que se propone en los currículos de Matemáticas para la enseñanza primaria y secundaria de los países desarrollados. Sin embargo, en nuestro país, en primaria y secundaria los temas relacionados con la enseñanza de la Estadística son tratados muy brevemente y en algunos casos son omitidos.

Esta problemática también es resaltada por la investigadora Carmen Batanero que indica que aunque los currículos de Educación Primaria y Secundaria en España incluyen la estadística, la incorporación de esta en la escuela, no es todavía un hecho. Los profesores suelen dejar este tema para el final del programa y con frecuencia lo omiten. Los alumnos llegan a la universidad sin los conocimientos básicos y es preciso comenzar el programa repitiendo los contenidos de estadística descriptiva y cálculo de probabilidades que debieran haber asimilado en la escuela.

4.2. ANÁLISIS DE DATOS Y ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

Hasta hace unos 30 años se presentaba una división clásica de la Estadística; Estadística Descriptiva y Estadística Inferencial. Hasta los comienzos del siglo XX la Estadística se restringía a la estadística descriptiva, que tiene como fin presentar resúmenes de un conjunto de datos y poner de manifiesto sus características mediante representaciones gráficas. Los datos se usan con fines comparativos, y no se usan principios de probabilidad . El interés se centra en describir el conjunto dado de datos y no se plantea el extender las conclusiones a otros datos diferentes o a una población. A partir de esta época comenzaría, con los trabajos de Fisher, Pearson y sus colaboradores, la Inferencia Estadística, que por el contrario, estudia los resúmenes de datos con referencia a un modelo de distribución probabilístico o una familia de modelos, determinando márgenes de incertidumbre en la estimación de los parámetros desconocidos del mismo.

Se supone que el conjunto de datos analizados es una muestra de una población y el interés es predecir el comportamiento de la población, a partir de los resultados en la muestra, de igual forma busca actualizar, renovar el conocimiento del verdadero estado de la naturaleza.

Cabriá (1994) señala que los avances del cálculo de probabilidades llevaron a la creación de la estadística teórica, la cual se alejó de las ideas estadísticas primitivas centradas en el análisis y recogida de datos. De este modo, en los años 60, la mayor parte de los libros de texto se ocupaban especialmente de los modelos inferenciales clásicos o bayesianos con respecto a un conjunto simple de datos y hubo una tendencia a la matematización, junto con un descuido en la enseñanza de los aspectos prácticos del análisis de datos (Batanero 2001).

Como señalan Batanero, Estepa y Godino (1991), anteriormente el análisis de datos se basaba fundamentalmente en el cálculo de estadísticos, conduciendo a dos consecuencias:

En primer lugar se disminuía la importancia visual de la representación de los datos, dándosele exclusivamente a los cálculos y en segundo se equiparaba el análisis con el modelo confirmatorio. En este tipo de análisis el conjunto de valores de las variables observadas se supone que se ajusta a un modelo preestablecido, calculando los estadísticos para aceptar o no una hipótesis, que es previa a la toma de las observaciones, las cuales han sido recogidas con el único propósito de poner tal hipótesis a prueba. Al contemplar solamente dos alternativas, confirmación o no de la hipótesis, los datos no se suelen explorar para extraer cualquier otra información que pueda deducirse de los mismos.

En el presente siglo el rápido desarrollo de la informática trajo consigo la disponibilidad de computadores y software estadísticos con posibilidad de representación gráfica y tratamiento de grandes masas de datos; dejando a un lado las limitaciones de los métodos estadísticos basados en distribuciones conocidas donde su principal aplicación eran las pequeñas muestras. Además abrió la posibilidad de realizar cálculos dispendiosos y optimizar el tiempo al manejar gran cantidad de datos.

Como consecuencia, durante las últimas décadas se ha desarrollado una serie de tipos de análisis de datos que se sitúan entre la Estadística Descriptiva y la Inferencia o Estadística Teórica. Entre estos tipos se encuentran el análisis multivariante y una nueva filosofía de aplicación de los estudios estadísticos: **el análisis exploratorio de datos** desarrollado por Tukey (1977). (Batanero 2001). Antes de mostrar los aspectos y las características relacionados con esta nueva filosofía, mencionaremos un elemento importante que hace parte del análisis exploratorio de datos: El sistema de datos. Como indica Godino (1995); este término es más adecuado que el de conjunto de datos, según Vasco (1994), para describir las estructuras de los datos en las aplicaciones reales, un conjunto no tiene por qué ser ordenado, mientras que en un sistema de datos ha de organizarse para poder ser procesado. Organizamos un sistema de datos al identificar en el mismo las unidades de análisis, las variables y las categorías de las mismas. Un conjunto no tiene elementos repetidos, mientras que una de las

características de las variables de un sistema de datos es que cada uno de sus valores se dará con una cierta frecuencia. No tendría ningún interés estadístico un sistema de datos en que todos sus elementos fuesen diferentes ya que son precisamente las regularidades globales, dentro de la variabilidad individual, el objeto de estudio de la estadística.

En la mayor parte de los sistemas de datos hay al menos tres componentes: la descripción de las variables, los valores de las variables (campos), que es el cuerpo principal de los datos, y los resúmenes estadísticos de cada variable. Los campos pueden ser de longitud fija o variable, y puede haber campos vacíos. Asimismo, clasificamos las variables según diversas tipologías: cualitativas o cuantitativas; discretas, continuas; nominales, ordinales, datos de intervalo o de razón (escalas de medición).

Sobre cada una de estas componentes pueden realizarse operaciones o transformaciones internas (clasificación, remodificación, agrupamiento) y externas (insertar, borrar, seleccionar...). Podemos clasificar variables, clasificar los casos dentro de una variable o clasificar los resúmenes estadísticos, por ejemplo, por su magnitud. Podemos seleccionar casos por los valores de una variable, o seleccionar variables porque sus valores coinciden en una serie de casos. También es posible determinar relaciones entre estos componentes, por ejemplo, de dependencia, implicación,

similaridad (dependencia entre variables; similaridad de sujetos; similaridad de variables,...)

Estos sistemas de datos pueden ser la base de trabajos interdisciplinarios en geografía, ciencias sociales, historia, deportes, etc. Una vez construido un sistema de datos el siguiente paso sería analizarlo con ayuda del ordenador que es un instrumento indispensable para realizar análisis exploratorio de datos.

4.3. ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

Para entender los principios por los que se guía el análisis exploratorio, se ha de tener en cuenta que los datos están constituidos por dos partes:

la “regularidad” y las “desviaciones”. La regularidad indica la estructura simplificada de un conjunto de observaciones (en una nube de puntos, por ejemplo, es la recta a la cual se ajusta). Las diferencias de los datos con respecto a esta estructura (diferencia en nuestro caso respecto a la recta), representan las desviaciones o residuos de los datos, que usualmente no tienen por qué presentar una estructura determinada.

Tradicionalmente el estudio se ha concentrado en la búsqueda de un modelo que exprese la regularidad de las observaciones. Por el contrario, el análisis exploratorio de datos es básicamente el desglose de los mismos en las dos partes que hemos citado. En lugar de imponer, en hipótesis, un modelo a las observaciones, se genera dicho modelo desde las mismas. Por ejemplo, cuando se estudian las relaciones entre dos variables, el investigador no solamente necesita ajustar los puntos a una línea recta, sino que estudia los estadísticos, compara la línea con los residuos, estudia la significación estadística del coeficiente de correlación u otros parámetros para descubrir si la relación entre las variables se debe o no al azar. Aunque los estadísticos calculados presenten un valor estadísticamente significativo (en el ejemplo, el coeficiente de correlación sea significativamente distinto de cero), la relación entre las variables puede no ajustarse bien a una línea recta. En este caso al investigador le faltaría descubrir algo importante: el modelo latente no es el esperado.

El análisis exploratorio de datos, no es pues, un conjunto de técnicas, sino una nueva filosofía que consiste en el estudio de los datos desde todas las perspectivas y con todas las herramientas posibles (Godino, 1995).

La importancia del análisis de datos es también resaltada por Ben-Zvi (2000), quien sugiere que: “El análisis exploratorio de datos es la disciplina de organización, descripción, representación y análisis de datos, con una fuerte

confianza en las herramientas analíticas y visuales. Su objetivo principal es dar sentido y buscar más allá de los datos para que, de esta manera, junto a la inferencia, se puedan explorar nuevos datos.” (Tauber Liliana. Pág. 39).

También Roberto Behar (2002) plantea que el análisis exploratorio de datos como su nombre lo indica pretende actuar sobre los datos para que estos digan cosas, es decir, nos proporcionen información, usando principalmente herramientas de tipo gráfico y estadísticas descriptivas. Podemos decir, en general, que los datos son el registro de hechos y realidades, mientras que la información es la respuesta a preguntas elaboradas o el descubrimiento de nuevos hechos con sentido en la dirección del problema que se estudia. El análisis exploratorio de datos es una etapa casi obligatoria, pues además de darnos información sobre la problemática en estudio y de dar respuestas en forma preliminar a algunas preguntas previamente formuladas, podría también usarse para detectar algunas inconsistencias en los propios datos y también puede sugerirnos hipótesis plausible sobre el fenómeno.

4.4. CARACTERÍSTICAS DEL ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

El análisis exploratorio de datos tiene las siguientes características planteadas por Batanero, Estepa y Godino (1991), que lo hacen un tema apropiado de estudio, particularmente en la enseñanza secundaria:

- Posibilidad de generar situaciones de aprendizaje referidas a temas de interés para el alumno. Lo usual es trabajar sobre ficheros de datos que han sido codificados previamente e introducidos en el computador, ya que se pretende estudiarlos mediante cuantas perspectivas y técnicas tengamos a nuestro alcance. Estos conjuntos de datos pueden ser obtenidos por los mismos estudiantes, mediante la realización de una encuesta a sus compañeros sobre temas diversos, como características físicas, aficiones, empleo del tiempo libre, etc., o incluyendo valores de variables relacionadas con otras áreas curriculares obtenidos en anuarios o publicaciones estadísticas.
- Fuerte apoyo en representaciones gráficas: “Una idea fundamental del análisis exploratorio de datos es que al usar representaciones múltiples de los datos se convierte en un medio de desarrollar nuevos conocimientos y perspectivas. Esto puede ejemplificarse al pasar de tablas a gráficos, de lista de números a representaciones como la del “tronco”, reduciendo los números a una variedad discreta en un mapa estadístico para facilitar la exploración de la estructura total, construyendo gráficos, como el de la “caja” que hace posible la comparación de varias muestras”.

- Empleo preferente de los estadísticos de orden, porque son sensibles a la mayor parte de los datos y con ellos se disminuye el efecto producido por los valores atípicos, escasos y muy alejados de la norma.
- No necesita una teoría matemática compleja. Como el análisis de datos no supone que estos se distribuyen según una ley de probabilidad clásica (frecuentemente la normal), no utiliza sino nociones matemáticas muy elementales y procedimientos gráficos fáciles de realizar. Hasta aquí es, pues,. bastante parecida a la estadística descriptiva tradicional, pero se aleja de ella por su intención. Pues al contrario que en ella, la representación o el cálculo no son en el análisis exploratorio de datos un fin, sino un medio de descubrir la información oculta en los mismos”.
- Uso de diferentes escalas o reexpresión: La escala en la que una de las variables es observada y registrada no es única. A veces, transformando los valores originales de la variable a una nueva escala se puede lograr que dichos valores sean más manejables. De este modo se incluye también el empleo de otros contenidos matemáticos, especialmente los referidos al concepto de función y el estudio de las propiedades de las funciones elementales.

- Es especialmente adecuado para trabajar con calculadoras y ordenadores, y pueden servir para que los alumnos se familiaricen con las nuevas tecnologías.

4.5. RECURSOS NECESARIOS PARA EL ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

4.5.1. EL COMPUTADOR

El avance de la Estadística como disciplina ha sido influenciado por el desarrollo que ha traído consigo los computadores, estos facilitan el acceso a la estadística a un número cada vez mayor de personas, aumentando las demandas de formación básica en estadística.

Como indica Batanero, los computadores han aumentado, por un lado, el número de contenidos estadísticos a enseñar, incluyendo el uso adecuado del software, sin el cual es hoy día impensable la realización del análisis de datos en cualquier campo de aplicación. También ha habido un cambio en los contenidos, prestándose mayor importancia a los aspectos interpretativos y conceptuales y menor a los procedimentales y algoritmos de cálculo.

La utilización del computador en la enseñanza de la Estadística está recibiendo atención creciente, tanto por parte de los profesores como de los investigadores, dado que uno de sus beneficios es el de optimizar el tiempo empleado para la realización de cálculos tediosos a los que se enfrentaba tanto el profesional como el estudiante; así mismo se facilita el manejo de grandes masas de datos ya que la naturaleza dinámica, la velocidad, y el creciente rango de software que se desarrolla en el computador permite a los estudiantes experimentar y explorar todos los aspectos de los procesos estadísticos, desde la planificación de la muestra o del diseño experimental hasta la recolección y el manejo de datos, la simulación y el análisis, para interpretar y comunicar los resultados. Además el computador es también un potente instrumento didáctico, que refuerza la motivación del alumno y le permite explorar los conceptos estadísticos y probabilísticos; también da la posibilidad de manipular los datos de forma interactiva, y de observar el efecto producido mediante las representaciones gráficas, ayudando a que los conceptos estadísticos sean menos abstractos.

Varios son los aspectos planteados sobre las formas del uso del computador en la enseñanza de la estadística, todas ellas de gran importancia y que suponen una revolución sobre la forma en que se debe enseñar y se debe aprender estadística siendo destacadas en los eventos organizados por el Instituto Internacional de Estadística (ISI) como las “Conferencias Internacionales para La Enseñanza de la Estadística”, en particular en el

ICOTS V, donde uno de sus temas tratados fue “el uso de ordenadores en la enseñanza de la Estadística y desarrollo del software”, también la Round Table Conference sobre el computador en la enseñanza de la estadística, realizada en Austria en 1970 y otra en Camberra en 1984. La Round Table Conference, organizada por IASE en Granada en 1996, se centró en “el rol de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de estadística” (Garfield y Burrill, 1997) y de la cual se resaltan las siguientes conclusiones:

- Las nuevas tecnologías incluyen los computadores, calculadoras gráficas y la red de comunicaciones Inter-red y es previsible que contribuyan a una revolución en los métodos de enseñanza. En particular, hay un gran número de recursos disponibles en Inter-red para la enseñanza de la materia. Además, es posible tomar datos disponibles en Inter-red y usarlos en la enseñanza.

- Hay una serie de mitos sobre el papel del computador en el aprendizaje. Es cierto que la comprensión de algunos conceptos puede ser facilitada con la ayuda de la simulación, pero también los computadores introducen nuevos objetivos de aprendizaje y existe el peligro de que, en vez de enseñar estadística, nos desviemos hacia el estudio exclusivo del software, debido a la sofisticación de éste y al tiempo requerido en su aprendizaje.

- Aunque los paquetes estadísticos con los que se puede realizar el análisis de datos tienen actualmente un gran desarrollo, los paquetes didácticos para la enseñanza son aún muy escasos y deficientes. Las características deseables para un software estadístico de uso general no tienen por qué coincidir con las que serían necesarias desde un punto de vista educativo, teniendo en cuenta también el desarrollo de los alumnos.
- La disponibilidad de nuevas tecnologías puede ser un nuevo factor que contribuya a aumentar la diferencia entre países, clases sociales o centros educativos. Es importante obtener una difusión real de estos medios entre una comunidad lo más amplia posible.

A estas conclusiones se deberían agregar algunas otras, relacionadas con el profesorado. Actualmente muchos países invierten en el equipamiento de sus institutos y universidades en material informático. Sin embargo, el presupuesto destinado a la capacitación de los profesores en el uso del computador y de los diversos paquetes es mucho menor, por lo cual se produce una situación contradictoria: se tiene el material, pero no se sabe utilizar o no se conoce en qué situaciones se puede aplicar.

Las herramientas (en nuestro caso el computador, calculadoras gráficas, Inter-red), permiten a los estudiantes acercarse a la estadística de una

forma más práctica. En el caso particular del análisis exploratorio estas herramientas deberían facultar a los estudiantes para hacer un trabajo interactivo, exploratorio y abierto, utilizando software flexible, fácil de usar y aprender.

Además, las clases de estadística proporcionan actividades interesantes para introducir al alumno en el uso de recursos informáticos habituales, como procesadores de texto y hoja de cálculo, así como para el aprendizaje del manejo de la calculadora científica y gráfica.

4.5.2. SOFTWARE PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADISTICA

Podemos encontrar una diversidad de software estadístico, tanto software profesional como didáctico y también paquetes que cumplen diferentes funciones debido al rápido desarrollo que han alcanzado actualmente. Presentaremos brevemente diversas categorías de programas informáticos que ayuden en la elección del programa adecuado a la hora de realizar un determinado estudio.

1. *Lenguajes de programación.* En las primeras experiencias de enseñanza, una opción era que los alumnos escribieran sus propios programas de computador, en lenguaje LOGO, Basic o Pascal. En

este caso era necesario que el alumno conociese el lenguaje de programación o, en su defecto, que el profesor dedicase cierta cantidad de tiempo a la enseñanza de éste. Esta opción está hoy día prácticamente abandonada, por la desventaja del tiempo adicional empleado para la enseñanza del lenguaje de programación lo cual va en detrimento del tiempo dedicado al desarrollo de conceptos estadísticos.

2. *Paquetes estadísticos profesionales.* Existe una gran variedad de ellos, como por ejemplo: BMDP New System, SYSTAT, STATVIEW, SPSS, STATGRAPHICS, etc. Cada uno de estos paquetes tiene una amplia disponibilidad de presentación gráfica y numérica, aunque en ciertos casos, pueden facilitar el proceso de comprensión de los alumnos (Biehler, 1997, Tauber y Batanero, 1998), si se cuida de proporcionar la información adecuada para no provocar confusiones, por lo que se deberán tener en cuenta estos condicionantes a la hora de planificar actividades para desarrollar con estos programas.

3. *Software didáctico.* Debido a la complejidad de estos programas algunos investigadores han realizado adaptaciones de ellos a lo que generalmente se requiere en la clase o han construido su propio paquete didáctico. En España se estuvo usando el paquete PRODEST (Batanero, Godino y Estepa, 1987; Estepa, Godino y

Batanero, 1989) durante más de una década, cuando no se disponía del sistema Windows ni de software interactivo para uso didáctico. Este paquete, diseñado por los anteriores autores, incluía todos los contenidos de un curso de análisis exploratorio de datos, probabilidad e inferencia estadística, a nivel universitario. El paquete era interactivo, y permitía grabar la interacción del alumno con el computador por lo que fue usado en las investigaciones de los autores sobre análisis exploratorio de datos y asociación estadística. Un ejemplo más reciente lo encontramos en el programa MEDASS Light (Biehler, 1997), el cual es una herramienta interactiva de análisis de datos para un curso introductorio de estadística. Incluye métodos gráficos como el diagrama de la caja, histogramas, diagramas de barras, gráficos de puntos y de líneas. También puede presentar resúmenes numéricos e información frecuencial para analizar diferentes tipos de variables. El paquete ELASTIC (Rosebery y Rubin, 1989) presenta características similares. FATHOM, (Ben-Zvi, 2000) es un medio de aprendizaje para análisis exploratorio de datos y álgebra, y se utiliza en secundaria y en cursos introductorios de estadística a nivel de bachillerato. Este paquete incluye manipulación dinámica de diversas representaciones, permite trazar gráficos de puntos, de barras, graficar funciones e importar datos desde Inter-red. Existen otros Software didácticos para fines especiales, como los siguientes: Statlab (Inferencia), Gasp (Procesos estocásticos), Tabletop

(Exploración de contextos multivariantes para alumnos muy jóvenes), Quercus (Curso de autoaprendizaje de bioestadística). En Colombia el Grupo de Estudio y Desarrollo de Software (GEDES) ha desarrollado un software didáctico, interactivo e ilustrativo dirigido a los niveles de primaria “Hagamos Estadística”, el cual presenta la historia de la estadística, conceptos, gráficos y tablas, este software permite a los niños acercarse a la estadística de una forma lúdica y amena ya que su presentación ilustrativa y sencilla lo hace posible.

4. *Micromundos*. Estos consisten en grupos de programas que sirven para demostrar métodos estadísticos, incluyen experimentos, visualizaciones exploratorias y simulaciones. Por medio de los micromundos, los estudiantes pueden conocer y comprender los conceptos estadísticos manipulando gráficos, parámetros y métodos (Ben-Zvi, 2000). Ejemplos típicos de estos micromundos son los que permiten la investigación de los efectos del cambio de datos o de coeficientes de correlación sobre las representaciones gráficas, o los efectos del cambio del tamaño muestral sobre la media de la distribución. Ejemplos de micromundos de este tipo son Prob Sim (Konold, 1994, 1995) y Sampling Distributions delMas, Garfield y Chance, 1998; Chance, Garfield y DelMas, 1999).

5. *Software de uso general*, como por ejemplo las hojas de cálculo, EXCEL, QUATTRO6PRO, LOTUS, etc, que son aplicadas en diversas experiencias de clase y brindan un amplio espectro de posibilidades en la enseñanza de conceptos elementales de estadística (Ben-Zvi y Friedlander, 1997; Ben-Zvi, 2000; Tauber, 1996 a y b; Tauber y cols., 1995).

6. *Tutoriales*, que son programas desarrollados para enseñar a los estudiantes sobre habilidades estadísticas específicas o evaluar su conocimiento. El tutorial puede, en algunos casos, reemplazar parcialmente al profesor y a los libros de texto proporcionando demostraciones y explicaciones de diferentes conceptos. Ejemplos de tutoriales utilizados en la enseñanza de la estadística son: ActivStats y ConStats (Cohen y Chechile, 1997),

7. *Software en Inter-red*, el desarrollo de la World Wide Web ha incrementado el material que puede obtenerse “en-línea” y en ella podemos encontrar diversos recursos que sirven de apoyo en la enseñanza de la estadística como software, materiales de cursos de estadística, textos, artículos, etc. Por ejemplo, el micromundo Sampling Distributions (DeIMas, Garfield y Chance, 1998; Chance, Garfield y DeIMas, 1999), puede obtenerse por medio de Inter-red.

4.5.3. RECURSOS EN INTER-RED

Una nueva dimensión en la enseñanza y la práctica estadística está siendo marcada por Inter-red. Los investigadores Snell (1996), Batanero (1998) y Galmacci (2001) presentan algunos de los recursos disponibles en la red.

- **Cursos y Materiales Didácticos:**

El prototipo de los cambios previsible con las nuevas tecnologías es el curso Chance, desarrollado en cooperación por varias universidades americanas. Este curso presenta el uso de los conceptos básicos de estadística en la prensa. Un boletín electrónico proporciona trimestralmente resúmenes de artículos de prensa que usan conceptos de estadística.

Adicionalmente una base de datos en WWW contiene planificación de cursos que han utilizado este material y una guía para el profesor. Las clases de un curso de este tipo se organizan del modo siguiente: se elige un artículo reciente y se preparan algunas preguntas relacionadas. Los estudiantes, en grupos, leen el artículo e intentan contestar las preguntas formuladas u otras relacionadas que surjan durante la discusión. Todo ello se utiliza como base para introducir un tema de estadística relacionado con el contenido del artículo.

- **Revistas Electrónicas:**

Otros recursos que pueden obtenerse desde Inter-red son las revistas y boletines electrónicos, los cuales publican artículos, sistemas de datos, revisiones e informes relacionados con todos los aspectos de la enseñanza de la estadística. Un ejemplo de ellos es el Journal of Statistics Education (JSE), es una revista publicada desde 1993, cuyo tema es la enseñanza de la estadística a nivel universitario que sólo puede obtenerse por medio de Inter-red y también puede conseguirse los números atrasados o un artículo suelto directamente a partir de la dirección donde están archivados. La universidad de North Carolina mantiene una base de datos relacionada con esta revista la cual contiene otra serie de recursos para la enseñanza de la estadística. Una diferencia de esta revista con una convencional es que es posible a los lectores mandar comentarios a un artículo o hacer búsquedas automatizadas de artículos sobre un cierto tema. Muchos de estos comentarios serán seleccionados para pasar a ser parte del archivo y, por tanto, del propio artículo. Incluye "teaching bits" que proporciona resúmenes de artículos de interés para los profesores de estadística.

- **Conjuntos de Datos**

Un recurso interesante es el llamado "data sets and stories", donde se acumulan conjuntos de datos, junto con su descripción y algunas indicaciones de sus posibles usos en la enseñanza. Los datos se pueden recuperar en formato útil para la mayor parte de paquetes estadísticos, hojas

de cálculo y calculadoras gráficas. Existen otros servidores que presentan colecciones de datos para la enseñanza de la estadística, (Ver 4.9).

- **Grupos de Discusión o Trabajo**

Se puede ser miembro activo de un grupo de discusión sobre la enseñanza de la estadística por correo electrónico. Los temas pueden ir desde pedir la solución a un problema o sugerencias sobre como resolver la dificultad que tiene un estudiante, anuncios de nueva bibliografía, intercambio de material didáctico, etc. Estas discusiones también se archivan para posibles búsquedas sobre un tema. Dos grupos relevantes son el grupo de discusión Edstat-L mantenido en el servicio JSE y el IASE Statistics Education Research Group (Stated-List) mantenido actualmente en la universidad de Granada. Este último publica también un boletín distribuido por correo electrónico con resúmenes de trabajos de investigación de sus miembros y noticias sobre reuniones, proyectos y recursos de interés para la investigación en el área.

4.5.4 CALCULADORAS GRAFICAS

Considerados por algunos autores como la tecnología del futuro, debido a que su costo, cada vez menor, hace creíble que, en el futuro, cada estudiante pueda disponer de su propia calculadora. Entre las nuevas posibilidades que ofrecen a la enseñanza de la estadística, citamos:

- Transmisión de datos (entre calculadoras o calculadora y computador). Es posible, por ejemplo, tomar datos de Inter-red, sobre un tema de interés y transmitirlo a la calculadora, sin necesidad de tener que grabarlos a mano.
- Opciones de manejo de listas
- Posibilidad de transformación de los datos
- Cálculos estadísticos básicos para una y varias variables
- Gráficos estadísticos usuales
- Posibilidad de ser programadas
- Generador de números aleatorios y tablas estadísticas básicas.

4.6. TÉCNICAS ELEMENTALES DE ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

Aunque, como hemos indicado, lo usual en este enfoque sería trabajar con un computador, muchas de estas técnicas son sencillas de realizar incluso a mano. En lo que sigue, y para ejemplificar algunas de ellas, Batanero y colaboradores, han trabajado con el conjunto de datos que se muestra en la Figura 1, y que se supone ha sido recogido en clase por los propios alumnos.

Peso en Kg.

Varones	Hembras
55 64 70 74 75 70	60 45 46 50 47 55
64 93 60 62 70 80	49 52 50 46 50 52
61 60 62 68 65 65	52 48 52 63 53 54
66 68 70 72 72 71	54 54 53 55 57 44
	56 56 56 53 60 65
	67 61 68 55 64 60

4.61. Gráfico del tronco

El gráfico del tronco (en inglés -stem and leaf-) fue descrito por Tukey y es utilizado para la representación de distribuciones de variables cuantitativas, consiguiendo con él, además de una gráfica de la distribución, la visualización de los valores de los datos que estamos estudiando. Para realizar este gráfico procederemos de la siguiente forma:

- Se redondean los datos a dos o tres cifras, expresando los valores con números enteros. En nuestro ejemplo, puesto que los datos disponibles constan sólo de dos cifras, este paso no es necesario.
- Se ordenan de menor a mayor, como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

44 45 46 46 47 48 49 50 50 50 52 52 52 52 53
53 53 54 54 54 55 55 55 55 56 56 56 57 60 60
60 60 60 61 61 62 62 63 64 64 64 65 65 65 66
67 68 68 68 70 70 70 70 71 72 72 74 75 80 93

- Se separan por la izquierda uno o más dígitos de cada dato, según el número de filas que se quiera obtener, en general no más de 12 ó 15. Cada uno de estos valores se escriben uno debajo del otro, trazando una línea a la derecha de los números escritos. Estas cifras constituyen el “tronco”. En nuestro caso tomaremos la primera cifra para formar con ella el “tronco”.
- Para cada dato original se buscan los dígitos escritos en el tronco y a la derecha de los mismos se escriben las cifras que nos habían quedado. Estas cifras forman las “hojas”.

De este modo obtenemos el gráfico del tronco para nuestros datos (Figura 3).

Gráfico del tronco del peso de los alumnos

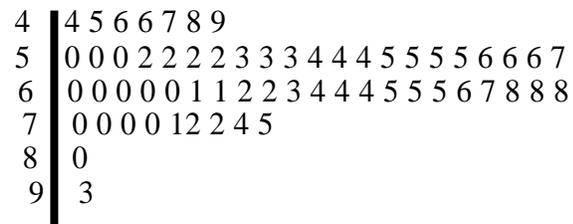


Figura 3

Como se observa, el resultado es, en la práctica, un histograma de amplitud de intervalo 10, que además de mostrarnos la forma de la distribución, presenta todos los datos ordenados. Esta representación puede ser ampliada o condensada para aumentar o disminuir el número de filas, subdividiendo o fundiendo dos o más filas adyacentes. Por ejemplo, para extender el gráfico de la Figura 3, podemos subdividir en dos cada fila de la siguiente forma: marcamos con un asterisco las filas cuyos dígitos de la derecha varían de 0 a 4 y con un punto las filas cuyos dígitos de la derecha varían de 5 a 9. Este nuevo diagrama, que podemos observar en la Figura 4, recibe el nombre de gráfico del tronco extendido.

Gráfico del tronco extendido del peso de los alumnos

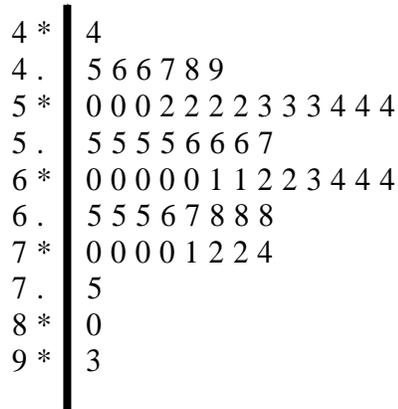


Figura 4

Al comparar el gráfico del tronco con un histograma de frecuencias observamos las siguientes ventajas:

- Su fácil construcción, especialmente con papel cuadriculado.
- Se pueden observar los datos con más precisión que en el histograma, pues los rectángulos pueden ocultar diferencias importantes entre los valores, mientras que en el gráfico del tronco estas lagunas pueden ser fácilmente detectadas y observadas.
- Pueden obtenerse a partir de él rápidamente los estadísticos de orden, como los valores máximo y mínimo, la mediana, cuartiles, percentiles y sus rangos, así como la moda.

Como contrapartida observamos que no podemos elegir la amplitud del intervalo. como en el caso del histograma, sino que viene impuesta por el sistema de numeración. Tampoco podemos escoger la escala de la representación gráfica, que viene impuesta por el espaciado del papel empleado.

Además de emplear este gráfico para el estudio de una variable aislada, también puede servir para establecer comparaciones entre dos distribuciones, observando claramente las diferencias y semejanzas en las mismas.

4.6..2. Gráfico de la «Caja»

El gráfico de la caja fue descrito por Tukey [denominándolo “box and whiskers”. Para su construcción se utilizan 5 estadísticos de la distribución de frecuencias: el mínimo, el primer cuartil Q_1 , la mediana, el tercer cuartil Q_3 , y el máximo, procediéndose de la forma siguiente:

- Se traza una línea vertical u horizontal de longitud proporcional al recorrido de la variable, que llamaremos eje (Véase la Figura 6). Los extremos del eje serán el mínimo y el máximo de la distribución, que en nuestro caso son 44 y 93 kilos. En el interior del eje se señalarán las subdivisiones que creamos necesarias, para formar una escala.

Paralelamente al eje se construye una caja rectangular con altura arbitraria y cuya base abarca desde el primer cuartil al tercero. Como vemos esta “caja” indica gráficamente el intervalo de variación del cincuenta por ciento de valores centrales en una distribución que, para el peso de los estudiantes, abarca desde 53 a 66.5.

- La caja se divide en dos partes, trazando una línea a la altura de la mediana (60 kg. en nuestro caso). Cada una de estas partes indica pues el intervalo de variabilidad de una cuarta parte de los datos. De este modo, en el ejemplo dado, una cuarta parte de los alumnos tiene un peso comprendido entre 44 y 53, estando incluidas las otras cuartas partes en los siguientes intervalos de peso: 53 a 60. 60 a 66.5 y 66.5 a 93.
- A la caja así dibujada se añaden dos guías paralelas al eje, una a cada lado, de la forma siguiente: el primero de estos segmentos se prolonga desde el primer cuartil hasta el valor máximo entre el mínimo de la distribución y la diferencia entre el primer cuartil y una vez y media el recorrido intercuartilico. Como en nuestro caso el peso mínimo es 44 kilos, y el recorrido intercuartilico es $66.5 - 53 = 13.5$, al restar al primer cuartil, $Q_1 = 53$ una vez y media el recorrido intercuartilico obtenemos:

$$Q_1 - 1.5 RI = 53 - 20.25 = 32.75$$

El máximo entre 44 y 32.75 es 44, por lo que el segmento inferior que debe dibujarse en el gráfico de la caja debe llegar hasta 44, como se muestra en la Figura 5.

El segmento dibujado al otro lado de la caja abarca desde el tercer cuartil hasta el mínimo entre el mayor de los datos y la suma del tercer cuartil con una vez y media el recorrido intercuartílico. En el peso de los alumnos el máximo es 93 kilos y, al sumar una vez y media el recorrido intercuartilico al cuartil superior 66.5. obtenemos:

$$Q_3 + 1.5 RI = 66.5 + 20.25 = 86.75$$

De este modo, el extremo superior del segmento debe prolongarse ahora sólo hasta 86.75

Si alguno de los datos queda fuera del intervalo cubierto por la caja y estos segmentos, como ocurre en el ejemplo con el alumno que pesa 93 kg, se señala en el gráfico mediante un asterisco o cualquier otro símbolo, como puede verse en la Figura 5.

Estos datos son los llamados valores atípicos (“outliers” en la terminología anglosajona), que son valores muy alejados de los valores centrales de la distribución. En la distribución normal, fuera del intervalo que resulta de

extender los cuartiles en una vez y media el recorrido intercuartilico, sólo aparecen un uno por ciento de los casos, por lo que estos valores, si no son debidos a errores, suelen ser casos excepcionales.

Grafico de la caja para el peso de los alumnos

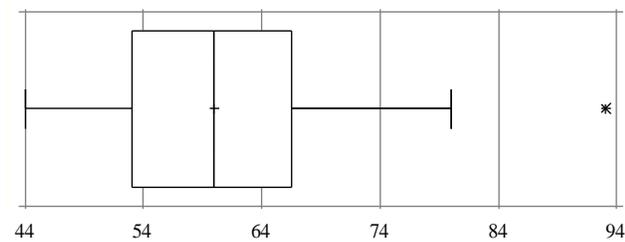


Figura 5

Como vemos en el ejemplo dado, este gráfico nos proporciona, en primer lugar, la posición relativa de la mediana, cuartiles y extremos de la distribución. En segundo lugar, nos proporciona información sobre los valores atípicos, sugiriendo la necesidad o no de utilizar estadísticos robustos. En tercer lugar, nos informa de la simetría o asimetría de la distribución, y posible normalidad o no de la misma.

El gráfico de la caja también se puede utilizar para comparar la misma variable en dos muestras distintas, como se muestra en la Figura 6 al comparar los pesos de chicos y chicas.

Gráfico de la caja para niños y niñas

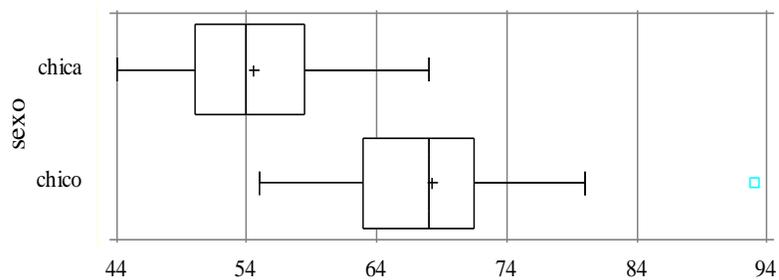


Figura 6

4.7. EJEMPLOS DE ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

Trabajo con proyectos y análisis exploratorio de datos para la enseñanza de la estadística.

La enseñanza de la estadística tradicional está basada generalmente en el desarrollo de teoría, al mismo tiempo, sus clases prácticas se dedican a la

resolución de problemas típicos donde se presentan una serie de ejercicios que buscan que el estudiante adquiera una agilidad en el desarrollo de cálculos, dejando a un lado la relevancia que tiene el análisis, el tratamiento de la información, la interpretación gráfica, trabajo en grupo, entre otros.

Actualmente se sugiere una metodología ideal de trabajo con los alumnos, basada en proyectos para ser desarrollados en la clase de estadística. Los proyectos en la clase de estadística están concebidos para introducir en la clase una filosofía exploratoria y participativa. Los proyectos son pequeñas investigaciones asequibles al alumno, donde integramos la estadística dentro de una investigación. Es decir, se plantea unos objetivos y preguntas que el alumno debe tratar de contestar por medio del análisis de datos. Lo deseable sería que los propios alumnos eligieran el tema en el que quieren trabajar y elaborasen sus propios proyectos en grupos de dos o tres alumnos. Incluso aunque pocos alumnos se interesen por la estadística, en sí misma, por medio de los proyectos los alumnos pueden interesarse en muchos temas diferentes y llegar a valorar la estadística como instrumento de investigación de los problemas que les gustaría resolver. En algunos países como Estados Unidos o Inglaterra es ya tradicional el celebrar en las escuelas competiciones de proyectos estadísticos y lo ideal sería que esta tendencia llegue a nuestras aulas.

4.7.1. EJEMPLOS DE PROYECTOS PARA LA CLASE DE ESTADÍSTICA

Se presentan ejemplos de proyectos sugeridos por varios investigadores, entre ellos la investigadora Carmen Batanero presenta algunos ejemplos de proyectos que pueden ser desarrollados en la clase de estadística, donde se describe los datos y la forma en que han sido recogidos. Sugiere algunas posibles actividades que propicien la reflexión sobre los conceptos estadísticos y permitan la ejercitación de las diversas representaciones, técnicas y tipos de argumentación. Dependiendo de la edad y conocimientos previos de sus alumnos, de sus intereses, tiempo disponible, el profesor puede suprimir o añadir otras actividades o proyectos.

Los proyectos que se presentan se conciben como verdaderas investigaciones asequibles al nivel del alumno, donde se trata de integrar la estadística dentro del proceso más general de investigación. Es decir, plantean unos objetivos y preguntas que el alumno debe tratar de contestar. Para ello el alumno necesita recoger datos, que, pueden provenir de diversas fuentes, ser obtenidos mediante diferentes técnicas, y corresponder a diversas escalas de medida y tipos de variables estadísticas. Consideran importante que, a lo largo de la educación secundaria el alumno tenga oportunidad de apreciar esta diversidad de

datos estadísticos. Algunas veces los datos se encuentran disponibles, pero hay que saber localizarlos de diferentes fuentes, como libros o anuarios estadísticos y además, la Inter-red proporciona en la actualidad datos para cualquier tema por el que los alumnos estén interesados.

Los proyectos estadísticos permiten mostrar a los alumnos los campos de aplicación de la estadística y su utilidad en muchas facetas de la actividad humana. No hay nada que haga más odiosa la estadística que la resolución de ejercicios descontextualizados, donde se pida al alumno calcular la media o ajustar una recta de regresión a un conjunto de números. No se debe olvidar que la estadística es la ciencia de los datos y los datos no son números, sino números en un contexto. A continuación se presentarán algunos ejemplos de proyectos sugeridos por los investigadores para ser orientados en los cursos de estadística en los niveles de secundaria y los primeros cursos de universidad.

Proyecto 1. ¿Cómo son los alumnos de la clase?

Objetivos

Se trata de elaborar un perfil de los alumnos, identificando el alumno típico y analizando si hay diferencias entre el chico y la chica típicos, así como identificar relaciones entre las variables analizadas. Un objetivo importante

es introducir al alumno en las diferentes técnicas de recogida de datos observación, encuesta y medición. Además se quiere hacer ver al alumno que al usar datos cualitativos, surge la necesidad de categorización, que siempre supone una simplificación de la realidad y que existen diversos modos de categorizar la misma realidad. Se trata de poner al alumno en la situación de realizar una encuesta, concienciándolo de la importancia de la fiabilidad de los datos, la necesidad y dificultad de la categorización, de la importancia de la claridad en las preguntas y de la serie de pasos que van desde la idea inicial de la investigación hasta la obtención de las conclusiones.

Alumnos

El proyecto podría ser adecuado para alumnos a partir de 14-15 años, ya que hacemos una primera introducción a la idea de asociación y estudio de las tablas de contingencia.

Los datos

Se preparará una lista de las características que se quieren incluir en el estudio, analizando las diferentes formas en que podrían obtenerse los datos:

- Por simple observación: como el sexo, color de pelo y ojos, si usa o no gafas;
- Se requiere una medición: como el peso, talla o longitud de brazos extendidos;
- Habría que preguntar a los alumnos; es decir realizar una pequeña encuesta: número de hermanos, cómo viene al instituto; si práctica deporte y con que frecuencia, etc.

Los datos serán recogidos por los propios alumnos, mediante las diversas técnicas señaladas. Se requerirá un metro y una báscula, para tomar datos de los alumnos con un mismo instrumento.

Preguntas, actividades y gestión de la clase

Una vez planteado el proyecto, la actividad comienza con la recogida, codificación y registro de los datos. Algunas características a incluir, y las preguntas relacionadas con la obtención de los datos, se recogen a continuación.

1. Tomemos datos de la variable sexo de cada alumno. ¿Qué tipo de variable es el sexo? ¿tendría sentido calcular la media de esta variable? ¿y la moda? Para ello es interesante que nos pongamos de acuerdo, sobre como vamos a codificar los chicos y chicas. De lo contrario, alguno de ustedes

podría usar chico/chica", otros "varón/ mujer" o "hombre/mujer", "V/M", etc.

Un sistema posible de codificar los datos sería

1= "chico "; 2="chica".

Es importante el hecho de que la codificación es un convenio, pero que debemos llegar a un acuerdo y describir el sistema empleado para que otros puedan comprender los datos.

2. ¿Cómo se distribuye el sexo de los alumnos en esta clase? Prepara una tabla de frecuencias y un gráfico que describa la distribución. ¿Es el alumno típico un chico o una chica?

Los alumnos prepararán una tabla de frecuencias similar a la tabla 1.1 y elaborarán alguno de los gráficos que ya conocen, como el diagrama de barras o de sectores. El alumno típico de la clase es una chica, puesto que la moda es ser una chica (valor más frecuente).

Tabla 1.1 Distribución de frecuencia del sexo de los alumnos

Sexo	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje
Chicos	23	0,3833	38.3
Chicas	37	0,6167	61.7
Total	60	1	100

3. Trátemos, ahora de recoger datos sobre la práctica de deporte. ¿Cómo podemos recoger estos datos? ¿Cómo los podríamos codificar?

Los alumnos se encuentran ahora con el problema de que la práctica de deporte no es una variable directamente observable, aunque cada uno de los alumnos conoce si practica o no deporte y la frecuencia con que lo practica. Surgirá la discusión de cómo codificar esta variable: una posibilidad sería preguntar por el número de días a la semana que se practica deporte (con lo cual tendríamos una variable cuantitativa discreta con valores 0 a 7). Pero es posible que no todos los alumnos sean sistemáticos en la práctica de deporte: unas semanas practiquen 3 días y otras ninguno, quizás dependiendo de si es época de exámenes o no.

Al realizar este proyecto en clase, los autores decidieron codificar simplemente con tres valores: 1 (poco, sólo de vez en cuando), 2 (con frecuencia, alguna vez cada semana), 3 (sistemáticamente, por ejemplo, 2 o más días en semana). Con este convenio (u otro como una escala 0-10) obtenemos una escala ordinal, porque lo que un alumno considera sistemático puede no coincidir con la opinión de otro y porque 2 no representa el doble que 1.

Una vez llegados a una decisión se recogerían los datos, elaboraría una tabla de frecuencias y se buscaría el valor típico. La tabla de frecuencias esta

vez puede tener frecuencias acumuladas y el valor típico preferible sería la mediana, porque es más informativa que la moda y la media no sería muy precisa al ser la escala ordinal. La mediana en los alumnos de la clase fue 2, por lo que el alumno típico es una mujer que practica deporte con frecuencia.

4. ¿Cómo clasificamos a los alumnos según el color de pelo? ¿Y según el color de ojo?

Esta vez se trata de variables cualitativas que pueden observarse directamente, sin necesidad de preguntar. Sin embargo, se plantea el problema de la clasificación. Para los ojos, por ejemplo, podríamos considerar ojos verdes, azules, grises, castaños y negros, e incluso diferenciar entre castaño y dorados. Incluso así, para algunos alumnos podría ser difícil decidir si sus ojos son azules o verdes y al final habría que tomar una decisión sobre como categorizar al alumno.

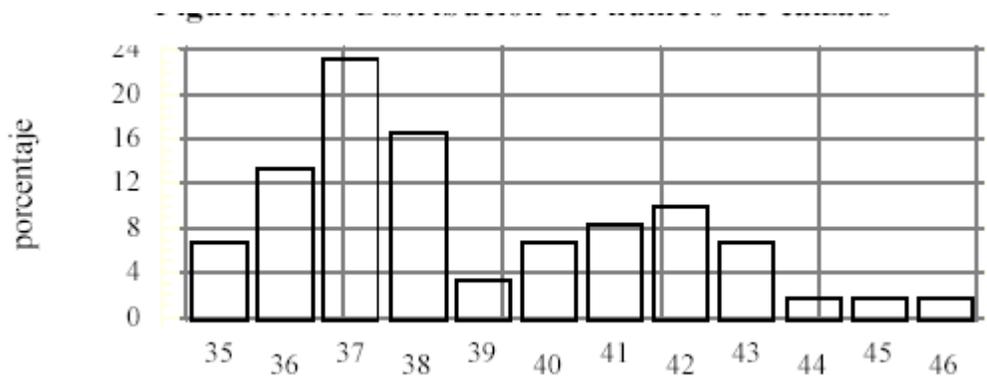
Estas variables dan lugar a reflexiones interesantes sobre que al categorizar siempre simplificamos la realidad y que los mismos datos podrían categorizarse en forma diferente. En estadística no hay una única solución a cada problema y tan importante o más que los cálculos son las decisiones que se toman sobre cómo recoger y categorizar los datos. En este caso se clasifican simplemente a los alumnos por ojos claros/ oscuros y pelo claro/ oscuro. El 61 % (37 alumnos tenía los ojos oscuros) y el 58% tenía los pelo

oscuros, luego el alumno típico es una mujer de pelo y ojos oscuros que practica deporte en forma moderada.

5. ¿Cuál es el número de calzado típico?

Los alumnos analizarán la distribución del número de calzado (Figura 1.1.), cuya moda es el 37 (el calzado más frecuente). Puesto que la variable se mide ahora en escala de razón, se podría plantear el cálculo de la media, cuyo valor es igual 38.8. Se puede plantear al alumno la pregunta de ¿Qué significa que el número promedio de calzado es 38.8, cuando tal número realmente no existe y también, por qué hay tanta diferencia entre la media y la moda en este caso.

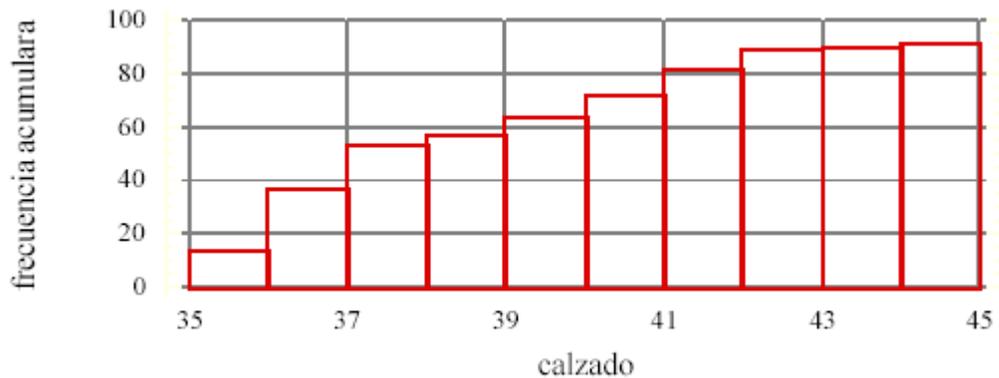
Figura 1.1. Distribución del número de calzado



Observamos que unos pocos alumnos tienen un pie muy grande y hacen subir artificialmente el valor de la media, que es muy sensible a los casos atípicos. La mediana es un estadístico más robusto, y se sugiere a los

alumnos calcular la mediana a partir del diagrama de frecuencias acumuladas. (Figura 1.2).

Figura 1. 2. Diagrama de frecuencias acumuladas



Vemos de este diagrama que el 50 % de los alumnos tienen un número de calzado igual o menor a 37 y el resto igual o mayor (puesto que en 37 la frecuencia acumulada salta del 43% al 60%). El valor mediano del número de calzado es 37 y coincide con la moda. Tenemos que añadir, como característica típica del alumno típico el número de calzado 37.

6. ¿Cuáles son el peso, la talla y la longitud típica de brazos?

Al trabajar con variables continuas o variables en que el número de valores diferentes es grande, se hace necesaria la agrupación. Como paso previo a la construcción de una tabla de frecuencias o un gráfico, se puede pedir a los

alumnos que construyan un diagrama de tallo y hojas (Figura 1.3). En este diagrama se visualiza la frecuencia en intervalos de amplitud 10 o 5 y se conservan los valores numéricos de los datos. Es sencillo de construir con una hoja de papel cuadriculado.

Figura 1. 3. Gráfico de tallo y hojas. Altura de los alumnos

```
15|55689
16|0000111122223333444
16|555566777899
17|000222344
17|55556889
18|0344
18|55
19|1
```

A partir de este gráfico los alumnos prepararán tablas de frecuencia para las variables, similares a la tabla 1.1 Un punto importante es que no hay una regla fija respecto a la elección de los intervalos de clase y el número y límite de intervalos determinará la forma del histograma (Figuras 1.4 y 1.5.).

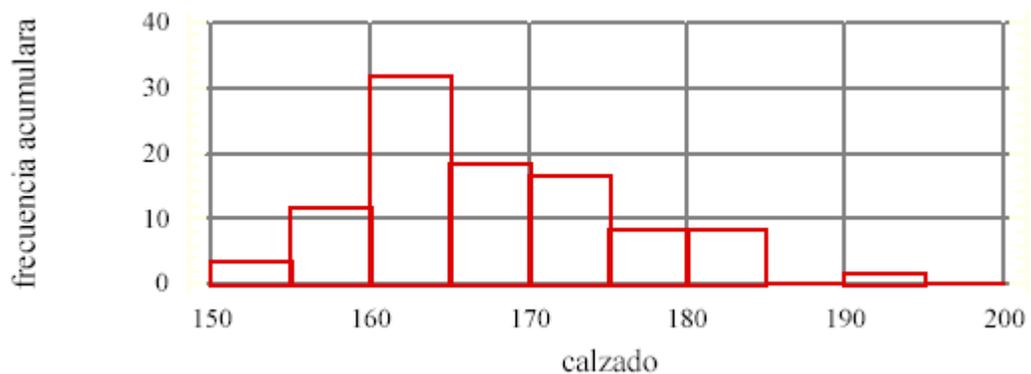
Mientras que con 9 intervalos se visualiza un valor atípico, este aparece oculto con 7 intervalos. Un criterio a seguir es que los extremos de los intervalos sean números enteros y también que el número de intervalos sea, aproximadamente, la raíz cuadrada del número de datos (aunque no exacta;

en nuestro caso, con 60 datos, un número razonable de intervalos sería 7, pero hemos tomado nueve, para que los extremos sean múltiplos de 5.

Tabla 1.2. Distribución de la talla (cm.) de los alumnos

Intervalo	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada	Acumulada relativa
150-155	152.5	2	0.0333	2	0.033
155-160	157.5	7	0.2267	9	0.1500
160-165	162.5	19	0.3167	28	0.4667
165-170	167.5	11	0.1833	39	0.6500
170-175	172.5	10	0.1677	49	0.8167
175-180	177.5	5	0.0833	54	0.9000
180-185	182.5	5	0.0833	59	0.9833
185-190	187.5	0	0.0000	59	0.9833
190-195	192.5	1	0.0167	60	1.0000

Figura 1.4. Distribución de la talla de los alumnos (9 intervalos)



La agrupación en intervalos introduce una reducción en los datos; por ejemplo, si calculamos la media y otros estadísticos directamente de la tabla, los valores obtenidos son aproximados, por eso también el número de intervalos afectará a estos estadísticos. Este problema no se presenta al calcular directamente los datos con la calculadora o el computador.

Figura 1.5. Distribución de la talla de los alumnos (7 intervalos)



Tomando la mediana como medida de posición central llegamos a la conclusión de que el alumno típico es una chica de pelo y ojos oscuros que practica deporte moderadamente, calza el 37, mide 166,5 cm., pesa 62 kilos y la longitud de sus brazos es 165 cm. También llegaremos a la conclusión de que esta chica realmente no existe: Ninguna de las alumnas corresponde exactamente a esta descripción .

Este proyecto puede ser más o menos complejo, en función del número y tipo de variables incluidas. En la Tabla 1.3. Se incluyen los datos obtenidos

sobre características físicas y práctica de deporte en una clase de 60 estudiantes del curso preuniversitario. Dependiendo de la edad de los alumnos y el tiempo disponible estas variables podrían reducirse o ampliarse.

Por ejemplo, el estudio podría llevarse a cabo sólo con las variables cualitativas (sexo, deporte, ojos, pelo, y número de calzado) o añadir otras como perímetro de cintura, anchura de hombros, etc. Para relacionar posteriormente las variables será bueno elaborar una hoja de recogida de datos como la que se muestra en la Tabla 1.3.

7¿Cuáles son las principales diferencias entre sexos?¿Cómo sería el chico/chica típico?

En este fichero hemos mezclado datos de dos poblaciones diferenciadas en cuanto a sus características físicas. Ello podría explicar el hecho de que no hubiésemos encontrado en la clase un representante del alumno típico. El trabajo continua analizando las características que diferencian al alumno / alumna típicos.

Tabla 1.3. Datos obtenidos en el estudio de alumno típico de 60 estudiantes

Sexo	Deporte	Ojos	Pelo	N. calzado	Peso (kgs.)	Talla (cm.)	L. brazos (cm.)
M	2	C	C	37	59	161	160
V	1	O	O	41	62	178	181
M	2	O	O	36	50	159	153
V	2	O	O	42	69	176	179
V	2	O	O	43	74	175	179
M	3	C	C	37	62	169	165
M	2	O	O	36	56	162	158
M	2	O	O	37	58	162	163
M	1	O	O	38	52	170	171
V	1	O	O	42	68	170	172
V	3	O	O	43	72	184	185
V	2	C	C	42	74	180	182
V	2	C	C	41	66	175	177
M	2	O	O	38	60	170	168
M	1	C	C	38	60	165	161
M	3	O	O	36	55	163	160
M	2	O	O	37	60	167	165
M	2	C	O	37	50	167	165
M	2	C	C	35	52	160	157
M	1	O	O	37	53	164	160
M	2	O	C	38	58	163	166
M	2	O	O	40	74	175	178
M	2	O	O	39	63	173	180
M	2	O	C	38	60	161	164
M	2	O	O	37	53	162	162
V	3	C	C	41	82	174	180
V	2	O	C	42	68	178	180

Para ello los alumnos pueden comparar las distribuciones de las variables en las dos muestras (muestras independientes). Por ejemplo, en las figuras 1.6, 1.7 y 1.8 se incluye algunas de las gráficas que se podrían usar para comparar las variables en hombres y mujeres. Mientras el hombre típico

calzaría el 42, pesaría 69 kilos, mediría 177 cm., y tendría una longitud de brazos de 179.5 cm.. la mujer típica calzaría el 38, pesaría 58 kilos, mediría 163 cm y tendría una longitud de brazos de 161 cm.

Los gráficos de caja visualizan las medias y medianas, cuartiles, recorrido intercuartílico y, en caso de haberlos, los valores atípicos. Observamos que estos valores son siempre menores en las chicas, así como la dispersión de los datos. Los histogramas, por su lado resaltan las modas y la frecuencia de casos en cada intervalo.

Los gráficos de cuantiles ponen de relieve, que, para cualquier rango de percentil (por ejemplo el 30 o 60 % la altura de las mujeres es siempre menor que la de los hombres.

Figura 1.6 Gráficos de cajas paralelos. Número de calzado de hombres y mujeres

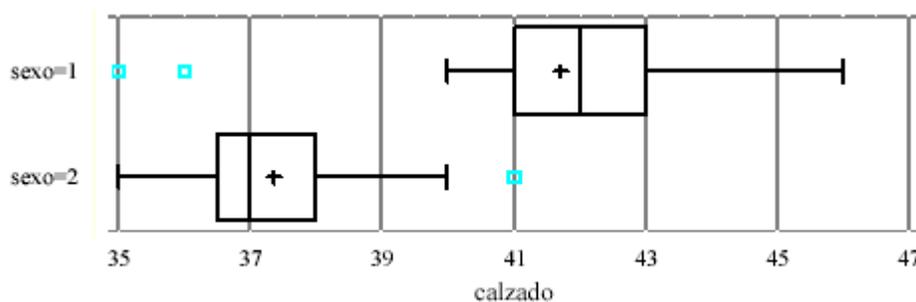


Figura 1.7 Histogramas Longitud de brazos chicos y chicas

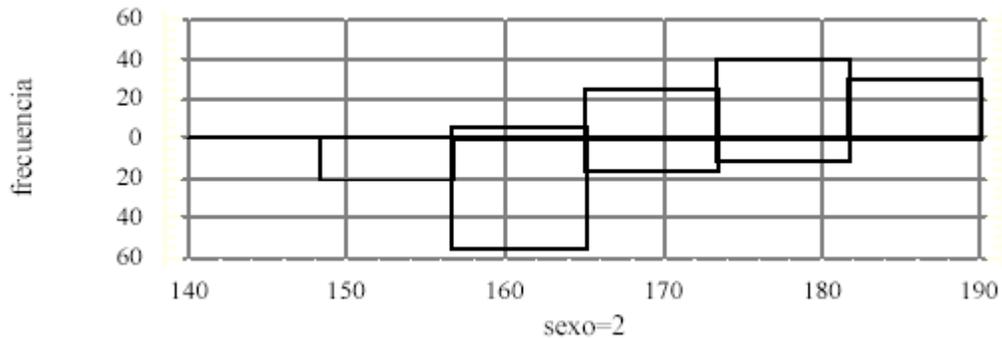
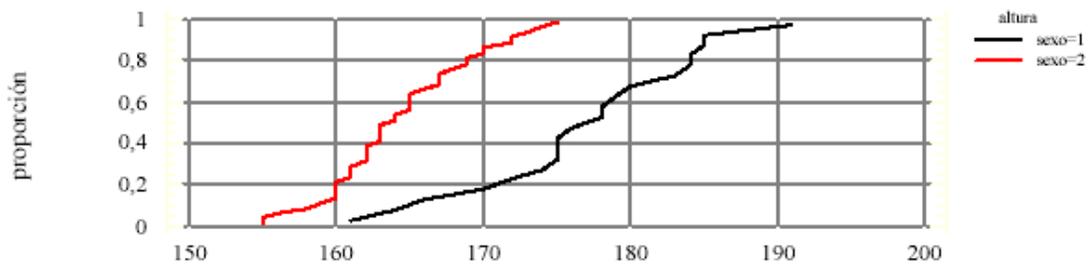


Figura 1. 8. Gráfico de cuantiles. Alturas de hombres y mujeres



Análisis del contenido estadístico

En este proyecto podemos identificar, explícita o implícitamente los siguientes contenidos:

1. Aplicaciones de la estadística:

- Diseño de un experimento;
- Análisis de datos experimentales; comparación de datos experimentales con patrones teóricos.

2. Conceptos y propiedades:

- Datos: codificación de datos: dificultad de la categorización.
- Variable estadística: Variable nominal, discreta y continua, frecuencia absoluta, relativa y acumulada; tabla de frecuencias; distribución de frecuencias, agrupación; intervalos, extremos y marcas de clase.
- Posición central: moda, media, mediana, percentiles, rangos de percentiles.
- Dispersión: rango, máximo, mínimo, cuartiles; recorrido intercuartílico.
- Asociación: tablas de contingencia; frecuencias dobles, marginales y condicionadas; asociación en tablas de contingencia.

3. Notaciones y representaciones:

- Palabras como extremos de clase, marcas de clase, cuartiles, recorrido intercuartílico.
- Símbolos correspondientes a las frecuencias acumuladas, marginales y condicionadas.
- Tablas de frecuencia; gráficos de tallo y hoja., caja, histograma, curvas empírica de distribución, gráfico de cuantiles, tablas de contingencia.

4. Técnicas y procedimientos:

- Elaboración de un cuestionario; observación, medida, codificación de datos.

- Elaboración de tablas de frecuencia simples y cruzadas; recuento y cálculo de frecuencias agrupadas y frecuencias marginales y condicionadas en tablas de contingencia.
- Elaboración de gráficos de tallo y hoja., caja, histograma, curvas empírica de distribución, gráfico de cuantiles.
- Interpretación de tablas y gráficos; elaboración de conclusiones a partir del análisis de tablas y gráficos; estudio de asociación en tablas de contingencia.
- Elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos obtenidos en observación, encuesta y medida.
- Uso de calculadora gráfica, hojas de cálculo o software estadístico.

Proyecto 2: Análisis demográfico

Objetivos

Se trata de analizar una serie de variables demográficas, entender su utilidad y el motivo por el cual son recogidas, analizar las relaciones entre las diferentes variables y estudiar las diferencias en sus distribuciones entre países según su nivel de desarrollo. Un objetivo importante es mostrar la utilidad de la estadística en el estudio de interrelaciones entre variables en estudios transversales. Los alumnos, alternativamente, podrían tomar otros ficheros de datos de Internet o de anuarios estadísticos y desarrollar proyectos sobre otros temas en diferentes áreas de aplicación. El análisis es

descriptivo, con finalidad exploratoria y no se plantean problemas de inferencia.

Rouncenfield (1995) presenta este proyecto sobre el cual los alumnos pueden trabajar en grupos, comparando las variables en los diferentes grupos de países y formulando por si mismos preguntas de su interés. Se mostraran algunos ejemplos de las posibles actividades a desarrollar en un curso de análisis exploratorio de datos.

Alumnos

Este proyecto podría ser desarrollado con alumnos de los últimos cursos de secundaria (16-17 años) o en el curso introductorio en la Universidad. En este último caso, se podrían plantear preguntas de tipo inferencial, lo que requeriría el uso de procedimientos estadísticos más avanzados.

Los datos

La actividad se desarrolla en torno a un proyecto a partir de un fichero que contiene datos de 97 países y que ha sido adaptado del preparado por Rouncenfield (1995), Este fichero ha sido tomado de Internet, del servidor de Journal of Statistical Education. Contiene las siguientes variables, que se refieren a 1990:

- Tasa de natalidad: Niños nacidos vivos en el año por cada 1000 habitantes.

- Tasa de mortalidad: Número de muertes en el año por cada 1000 habitantes.

Mortalidad infantil: Número de muertes en el por cada 1000 niños de menos de 1 año.

- Esperanza de vida al nacer para hombres y mujeres.

- PNB. Producto Nacional Bruto per cápita en dólares (USA).

- Grupo: Clasificación de países en función de la zona geográfica y situación económica, en las siguientes categorías: 1 = Europa Oriental, 2 = Iberoamérica, 3 = Europa Occidental, Norte América, Japón, Australia, Nueva Zelanda, 4 = Oriente Medio, 5 = Asia, 6 = Africa.

Hemos añadido el número de habitantes en 1990 en miles de personas (Población), tomado del anuario publicado por el periódico español "El País".

En la tabla 2.1 listamos los datos del proyecto.

Tabla 2.1. Fichero de datos del proyecto "Análisis demográfico"

País	Grupo	Tasa natalidad	Tasa mortalidad	Mortalidad infantil	Esperanza vida hombre	Esperanza vida mujer	PNB	Población (miles)
Afganistán	5	40.4	18.7	181.6	41.0	42.0	168	16000
Albania	1	24.7	5.7	30.8	69.6	75.5	600	3204
Alemania (Oeste)	3	11.4	11.2	7.4	71.8	78.4	22320	16691
Alemania Este	1	12.0	12.4	7.6	69.8	75.9	.	61337
Algeria	6	35.5	8.3	74.0	61.6	63.3	2060	24453
Angola	6	47.2	20.2	137.0	42.9	46.1	610	9694
Arabia Saudí	4	42.1	7.6	71.0	61.7	65.2	7050	13562
Argentina	2	20.7	8.4	25.7	65.5	72.7	2370	31883
Austria	3	14.9	7.4	8.0	73.3	79.6	17000	7598
Bahrein	4	28.4	3.8	16.0	66.8	69.4	6340	459
Bangladesh	5	42.2	15.5	119.0	56.9	56.0	210	111590
Bélgica	3	12.0	10.6	7.9	70.0	76.8	15540	9886
Bielorusia	1	15.2	9.	13.1	66.4	75.9	1880	.
Bolivia	2	46.6	18.0	111.0	51.0	55.4	630	7110
Botswana	6	48.5	11.6	67.0	52.3	59.7	2040	1217
Brasil	2	28.6	7.9	63.0	62.3	67.6	2680	147294

Preguntas, actividades y gestión de la clase

1. ¿Podrías explicar qué significa cada una de las variables del fichero? ¿Quién y cómo las calcula? ¿Cómo se recogen los datos? ¿Habría otro modo de calcular el índice de natalidad? ¿Para qué sirven? ¿Podrías encontrar alguna noticia en la prensa relacionada con estas variables?

La actividad inicial consiste en discutir el significado de las variables de este fichero y analizar cómo se han calculado las diferentes tasas: natalidad, mortalidad, esperanza de vida, PNB. Los alumnos podrían investigar qué otros indicadores alternativos se emplean para obtener un indicador demográfico o económico de la riqueza de un país. El profesor podría pedir a los alumnos que busquen artículos en la prensa en que se hable de alguno de estos indicadores y que expliquen con sus propias palabras la utilidad que pueden tener y que averigüen quien y como los calcula.

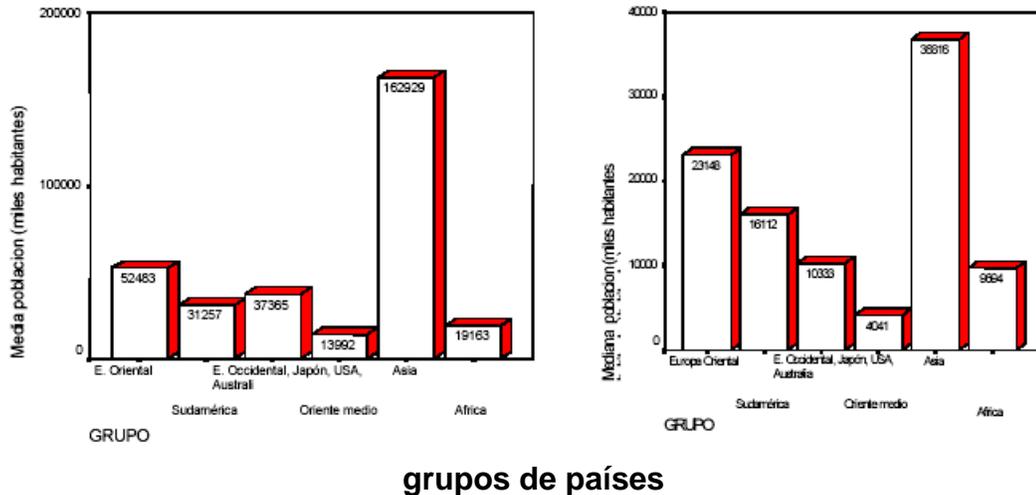
Un punto muy importante es la discusión de las variables y el problema de la medición. Es preciso concienciar a los alumnos de la dificultad que reviste el proceso de categorización o de medición, porque la realidad es siempre más compleja que nuestros métodos para estudiarla. La toma de conciencia sobre la complejidad del proceso de elaboración de las estadísticas demográficas o económicas es un paso importante para valorar el trabajo del estadístico y fomentar la cooperación en censos y encuestas.

En este fichero se ha usado un código para agrupar los países en función de la zona geográfica y desarrollo económico. Los alumnos podrían sugerir otras variables de clasificación de los países o añadir otras variables o países al fichero. El trabajo con un fichero completo, en lugar de centrarse en variables aisladas supone el inicio de una filosofía multivariante donde cada variable cobra su importancia o bien es explicada en función del resto y donde el

alumno puede tratar de comprobar sus conjeturas con la incorporación de nuevas variables al estudio.

2. En la Figura 2.1 hemos representado el número promedio de habitantes en cada país, según grupo, usando dos promedios diferentes: media y mediana. ¿Por qué las dos gráficas son tan diferentes? ¿Elegirías la media o la mediana para representar el número típico de habitantes en los países, según la zona geográfica.

Figura 2.1: Mediana y media del número de habitantes en los diferentes



La elaboración de una tabla o un gráfico ya supone una primera reducción de los datos, pero a veces queremos hallar un único valor representativo de la distribución. Esta actividad puede realizarse a partir de las gráficas ya elaboradas o también pedir a los alumnos que las construyan previamente.

En el segundo caso la clase puede dividirse en grupos para calcular estos promedios, así como la moda, y para explicar lo que representa cada uno de estos promedios y elegir en cada grupo el que mejor lo representa, argumentando la elección. Se puede pedir a los alumnos que señalen las principales diferencias entre los dos gráficos y que decidan cuál de los dos promedios acentúa más las diferencias explicando la razón.

3 La tasa de natalidad. Construye ahora una tabla de frecuencias que muestre la distribución de las tasas de natalidad. ¿Por qué en este caso conviene agrupar en intervalos?, ¿Qué representa la frecuencia dentro de un intervalos?, ¿Cuántos intervalos conviene usar en la tabla de frecuencias?, ¿Cómo representaría gráficamente estos datos?, ¿Es simétrica la distribución?, ¿Cómo cambia la forma al variar el número de intervalos? ¿Y si usamos intervalos de distinta amplitud?, ¿Qué representa y cómo representaría la frecuencia acumulada?, ¿Qué posición ocupa mi país respecto a la tasa de natalidad?, ¿Hay algunos países atípicos respecto a la tasa de natalidad?, Para contestar esta y otras preguntas similares puedes usar el gráfico del tallo y hojas (Figura 2.2).

```

0|99
1|001111222223333333444444
1|556778
2|011222334
2|677888899
3|00111122234
3|5568899
4|011122224444
4|55566677788888
5|0012

```

Figura 2.2. Gráfico de tallo y hojas: Tasa de natalidad

Cuando la variable presenta un número grande de valores, surge la necesidad de agrupación. Ahora bien, no existe una regla fija sobre la forma de construir los intervalos de clase, aunque se recomienda un número de intervalos aproximadamente igual a la raíz cuadrada del número de datos.

En esta actividad se muestra un ejemplo de como en estadística es posible tener más de una solución correcta al mismo problema y también como la forma del histograma varía en función de la elección de los intervalos. Junto con las representaciones gráficas tradicionales, como diagramas de barras o histogramas, en análisis exploratorio de datos aparecen nuevas representaciones como el diagrama de tallo y hojas o los gráficos de cajas, cuya potencia exploratoria se acentúa con el paso de una a otra representación, así como la selección de partes del fichero para realizar estudios comparativos, por ejemplo al comparar las variables en los distintos grupos de países, que es el tema de la siguiente actividad. El interés no sólo

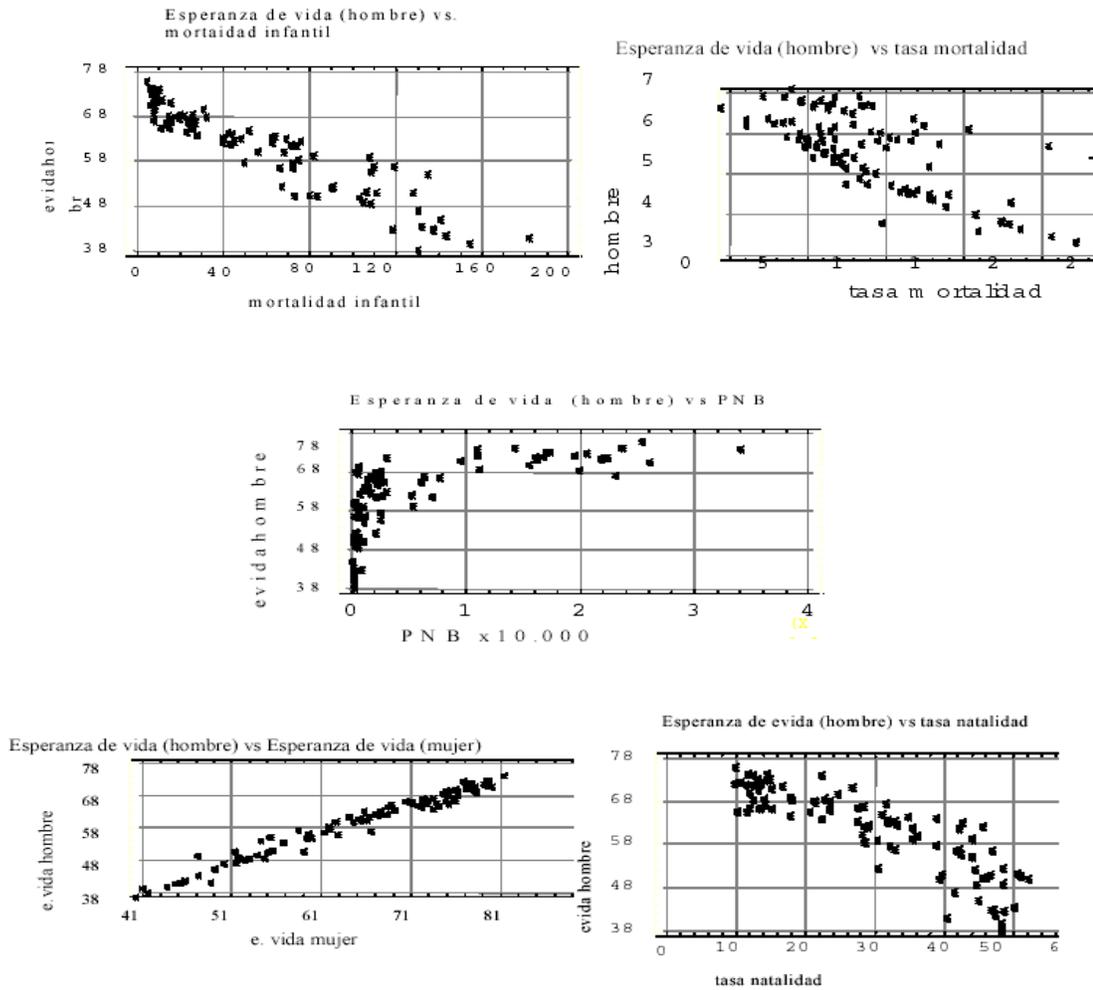
se centra en las tendencias, sino en la variabilidad, así como el estudio de los valores atípicos. Vemos también como la idea de distribución siempre es relativa a un colectivo; por eso un valor puede ser atípico dentro de un subconjunto de datos y no serlo en el global.

4.Relación de la esperanza de vida con otras variables.

En la Figura 2.3 se ha representado los diagramas de dispersión de la esperanza de vida del hombre en cada país, en función de diversas variables.

¿Cuál de las variables está relacionada con la esperanza de vida del hombre?, ¿En cuáles la relación es directa /inversa? ¿Cuáles influyen o son influidas por la esperanza de vida? ¿Cuál de ella sirve mejor para predecir la esperanza de vida?, ¿En qué casos la relación podría ser debida a otras variables?, ¿Podríamos en alguno de los casos hallar una función matemática para predecir, aproximadamente la esperanza de vida del hombre a partir de la otra variable?, ¿Qué tipo de función?

Figura 2.3 Relación de la esperanza de vida del hombre con otras variables



Al analizar las relaciones entre dos variables numéricas los alumnos deben de extender la idea de dependencia funcional a dependencia aleatoria y diferenciar sus tipos (lineal o no; directa e inversa) así como graduar al menos intuitivamente la intensidad de la relación. Es importante también diferenciar correlación y causalidad y analizar los distintos tipos de relaciones que pueden llevar a la existencia de correlación: dependencia causal;

interdependencia, dependencia indirecta, concordancia y correlación espúrea (Estepa, 1995). Una vez detectada la correlación, el interés se centra en la búsqueda de modelos que puedan predecir las variables explicadas en función de las variables explicativas, lo que de nuevo conecta con otro contenido del currículo de matemáticas: las funciones.

Además de estas actividades en el proyecto, también se presentan actividades relacionadas con la media ponderada, frecuencia acumulada, valores atípicos, diagramas de caja y dispersión, asociación y causalidad. rangos intercuartílicos en las cuales se comparan y se relacionan variables tanto a nivel global como por grupos de países y se plantean preguntas con las cuales se desarrolla el taller.

Análisis del contenido estadístico

En este proyecto podemos identificar, explícita o implícitamente los siguientes contenidos:

1. Aplicaciones de la estadística:

- Estudios demográficos y socioeconómicos.
- Estadísticas oficiales; organismos y procedimientos en la elaboración de estadísticas oficiales.
- Fuentes de datos estadísticos: anuarios estadísticos; fuentes de datos en Internet.

2. Conceptos y propiedades:

- Agrupación de variables en intervalos; efectos de la agrupación;
- Medidas de posición: medias ponderadas, percentiles, rangos de percentiles.
- Valores atípicos y su efecto sobre los promedios.
- Asociación y sus tipos: directa/ inversa; lineal no lineal; asociación y causalidad.
- Modelos; ajuste de modelos sencillos a datos bivariantes; uso de modelos en la predicción.

3. Notaciones y representaciones:

- Palabras como, intervalos, extremos y marcas de clase, percentiles y sus rangos, cuartiles, valores atípicos, asociación, correlación, regresión.
- Símbolos usados para los diferentes estadísticos y otros como el sumatorio;
- Diagrama de tallo y hojas, gráficos de caja, gráficos de cuantiles, diagramas de dispersión.

4. Técnicas y procedimientos:

- Búsqueda de datos a partir de anuarios estadísticos o de la Inter-red;
- Elaboración de tablas de frecuencia con datos agrupados;
- Elaboración de gráficos de tallo y hojas, gráficos de caja, gráficos de cuantiles y diagramas de dispersión;
- Interpretación de tablas y gráficos; elaboración de conclusiones a partir del análisis de tablas y gráficos;

- Elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos;
- Uso de calculadora gráfica, hojas de cálculo o software estadístico.

PROYECTO 3: Comprueba tus intuiciones sobre el azar

Objetivos

Se trata de realizar un experimento para comprobar si tenemos buenas intuiciones respecto a los experimentos aleatorios. En concreto se trata de comprobar si somos capaces de simular una secuencia de resultados aleatorios.

Se utiliza el dispositivo aleatorio más sencillo posible: una moneda equilibrada, comparando los resultados obtenidos al lanzar realmente una moneda con los simulados. La finalidad principal es hacer reflexionar al alumno sobre el hecho de que nuestras intuiciones sobre el azar nos engañan con frecuencia. También se les quiere mostrar la utilidad de la estadística en la prueba de nuestras hipótesis o teorías (en este caso la hipótesis de que nuestras intuiciones sobre los fenómenos estocásticos son correctas).

Alumnos

Puesto que las variables a tratar son discretas y las actividades no introducen conceptos estadísticos complejos, el proyecto podría ser

adecuado para alumnos a partir de 13-14 años, es decir, desde el comienzo de la educación secundaria. Se sugiere empezar con preguntas similares a las siguientes y realizar en clase una discusión colectiva.

1. ¿Cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una moneda 20 veces seguidas? ¿Serías capaz de escribir 20 resultados de lanzar una moneda (sin lanzarla realmente, sino como tú pienses que debieran salir) de forma que otras personas piensen que has lanzado la moneda en realidad. O, ¿podría otra persona adivinar que estás haciendo trampa?

Los datos

Los datos son producidos como resultado del experimento que será realizado por cada uno de los alumnos de la clase. Se le proporciona a cada alumno una pauta cuadrículada, dándole la siguiente consigna:

2. Vamos a comprobar qué tal son tus intuiciones respecto a los resultados aleatorios. Abajo tienes dos cuadrículas. En la primera de ellas escribe 20 resultados sin realizar realmente el experimento. En la segunda mitad lanza la moneda 20 veces y escribe los resultados obtenidos. Pon C para cara y + para cruz.

Análisis del contenido estadístico

En este proyecto podemos identificar, explícita o implícitamente los siguientes contenidos:

1. Aplicaciones de la estadística:

- Diseño de un experimento.
- Análisis de datos experimentales; comparación de datos experimentales con patrones teóricos.

2. Conceptos y propiedades:

- Aleatoriedad: experimento aleatorio; secuencia de resultados aleatorios, sucesos equiprobables, independencia de ensayos, rachas.
- Variable estadística discreta, frecuencia absoluta; tabla de frecuencias; distribución de frecuencias.
- Posición central, moda, media, mediana.
- Dispersión: rango, casos centrales, 50% de casos centrales

3. Notaciones y representaciones:

- Palabras como frecuencia, media, mediana, moda, recorrido.
- Símbolos como \bar{x} , Me, Mo.
- Tablas de frecuencia; Gráficos de puntos, barras, sectores, cajas.

4. Técnicas y procedimientos:

- Recogida y registro de datos experimentales.
- Elaboración de tablas de frecuencia; recuento y cálculo de frecuencias.
- Elaboración de gráficos de puntos, diagramas de barras y gráficos de sectores.
- Interpretación de tablas y gráficos; elaboración de conclusiones a partir del

análisis de tablas y gráficos.

- Elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos obtenidos en un experimento.
- Uso de calculadora gráfica, hojas de cálculo o software estadístico.

4.8. REFLEXIONES

En el enfoque exploratorio de la enseñanza de la estadística los alumnos pueden investigar y obtener sus propios datos o completar los datos por el profesor. Los ficheros contenidos en Inter-red, los anuarios estadísticos, la prensa, o los datos recogidos por los alumnos (mediante medición, encuesta u observación) pueden ser la base para plantear problemas que motiven a los alumnos y les haga interesarse por el aprendizaje. Los computadores actuales brindan muchas posibilidades para la enseñanza y el aprendizaje de la estadística como se menciona anteriormente, desde paquetes profesionales o paquetes didácticos a las hojas electrónicas. El análisis exploratorio de datos puede también implementarse con las calculadoras gráficas o dividiendo la clase en equipos para repartir el trabajo de cálculo y la realización de los gráficos.

El trabajo con un fichero completo, en lugar de centrarse en variables aisladas supone el inicio de una filosofía multivariante donde cada variable

cobra su importancia o bien es explicada en función del resto y donde el alumno puede tratar de comprobar sus conjeturas con la incorporación de nuevas variables al estudio.

El primer paso en el análisis es el estudio de cada variable, la tabulación y representación gráfica. Algunos investigadores han analizado los diferentes niveles de comprensión de las gráficas (Curcio, 1989) y las dificultades de los alumnos en la elaboración de las mismas o la selección de un gráfico adecuado, debido a la diferente información que aportan las diversas gráficas estadísticas (Li y Shen, 1992). Deberíamos también fomentar en los alumnos un sentido gráfico que les haga ser críticos frente a los posibles gráficos tendenciosos que con frecuencia encontramos en los medios de comunicación.(Batanero,C)

Junto con las representaciones gráficas tradicionales, como diagramas de barras o histogramas, en análisis exploratorio de datos aparecen nuevas representaciones como el diagrama de tallo y hojas o los gráficos de cajas, cuya potencia exploratoria se acentúa con el paso de una a otra representación, así como la selección de partes del fichero para realizar estudios comparativos. El interés no sólo se centra en las tendencias, sino en la variabilidad, así como el estudio de los valores atípicos.

El trabajo con análisis exploratorio de datos refuerza también algunos objetivos sugeridos para la educación matemática en los nuevos currículos de secundaria, como el trabajo con problemas abiertos, el uso de sistemas múltiples de representación, la introducción al trabajo con computadores o calculadoras gráficas y la conexión de las matemáticas con otras áreas del currículo (Shaughnessy, Garfield y Greer, 1997). Pero el razonamiento estadístico va más allá del conocimiento matemático y de la comprensión de los conceptos y procedimientos. La modelización, la valoración de la bondad del ajuste de los modelos a la realidad, la formulación de cuestiones, la interpretación y síntesis de los resultados, la elaboración de informes son también componentes esenciales de las capacidades que se quiere desarrollar en los alumnos. Los alumnos, acostumbrados a que en la mayoría de los problemas en la clase de matemáticas tengan una única solución, podrían encontrar complejo el trabajo con los proyectos y la existencia de diferentes procedimientos y soluciones correctas. Es labor del profesor acostumbrarles al método y razonamiento estadístico.

Finalmente es preciso reconocer que la enseñanza de la estadística es una tarea delicada, debido a la dificultad que revisten los conceptos estadísticos incluso los más sencillos (Batanero y cols., 1994).

4.9. INFORMACIÓN Y RECURSOS EN INTER-RED

Cursos y materiales didácticos

Baker R. (University of Saskatchewan, CA), Basic principles of statistical analysis,

<http://duke.usask.ca/~rbaker/stats.html>.

De Leeuw J. (University of California, Los Angeles), Statistics UCLA,

<http://www.stat.ucla.edu/textbook/>.

Department of Statistics (University of South Carolina), Interactive Statistics and the GASP Initiative - Globally Accessible Statistical Procedures,

<http://www.stat.sc.edu/rsrch/gasp/>.

Hopkins W.G. (Sportscience), A New View of Statistics,

<http://www.sportsci.org/resource/stats/>.

Lane D.M. (Rice University), HyperStat,

<http://davidmlane.com/hyperstat/index.html> .

Martínez de Lejarza J. & Martínez de Lejarz I. (Universidad de Valencia)

<http://www.uv.es/~lejarza/estadistic.htm>.

NWP Associates, Inc. (The Pennsylvania State University), Investigating Statistics,

<http://espse.ed.psu.edu/statistics/investigating.htm>.

Snell J.L., Peter Doyle, Joan Garfield, Tom Moore, B. Peterson, N. Shah (Dartmouth College), CHANCE,

<http://www.dartmouth.edu/~chance/>.

Stirling W. D. (Massey University, NZ), CAST - Computer Assisted Statistics Teaching, <http://cast.massey.ac.nz/>.

Stockburger D. W. (Southwest Missouri State University), Introductory Statistics, <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>.

StatSoft, Inc. (Tulsa, OK), Electronic Statistics Textbook, <http://www.statsoft.com/textbook/stathome.html>.

Conjunto de datos:

Servidores que presentan colecciones de datos para la enseñanza se listan a continuación:

American Statistical Association, JSE Data Archive, <http://amstat.org/publications/jse/archive.htm>.

Behrens J. (Arizona State University), Dr. B's Data Gallery, http://seamonkey.ed.asu.edu/~behrens/classes/data_gallery/.

Cornell University, DASL - The Data and Story Library, <http://lib.stat.cmu.edu/DASL/>.

de Leeuw J. (University of California, Los Angeles), Case Studies, <http://www.stat.ucla.edu/cases/>.

Software:

Bonnier M. (Värpinge, Lund, Scania, Sweden), Statische, <http://www.df.lth.se/~mikaelb/statische/statische-enu.shtml>.

Claremont Colleges' "Web Interface for Statistics Education", Statistics Applet made for the WISE Project,

<http://www.grad.cgs.edu/wise/appletsf.shtml>.

de Leeuw J. (University of California, Los Angeles), Statistics UCLA,

<http://www.stat.ucla.edu/textbook/>.

Lewis B. (Kent State University), Elementary Statistical Java Applets and Tools,

Marden J. (University of Illinois at Urbana-Champaign), The CUWU Statistics Program, <http://www.stat.uiuc.edu/~stat100/cuwu/>.

Siegrist K. (University of Alabama in Huntsville), Virtual Laboratories in Probability

and Statistics, <http://www.math.uah.edu/stat/>.

En particular, el siguiente software es especialmente adecuado para simulación:

Stark P.B. (University of California, Berkeley), SticiGui: : Statistical Tools for Internet and Classroom Instruction with a Graphical User Interface,

<http://www.stat.berkeley.edu/~stark/SticiGui/index.htm>.

Statistics Department (University of Glasgow), STEPS - STatistical Education through Problem Solving,

<http://www.stats.gla.ac.uk/steps/home.html>

West R. W. & Ogden R. T. (University of South Carolina), WebStat,

<http://www.stat.sc.edu/webstat/>.

Young F. W. (University of North Carolina), Vista - The Visual Statistical System,

<http://forrest.psych.unc.edu/research/index.html>.

Zielman B. (University of), Statistical Page,

<http://huizen.dds.nl/~berrie>

Algunas páginas web preparan listas de recursos para la enseñanza aprendizaje de nociones estocásticas, como las siguiente:

ASA, Center for Statistics Education,

<http://amstat.org/education/index.html>.

CIRDIS, Centro Interuniversitario di Ricerca per la Didattica delle Discipline Statistiche, <http://www.stat.unipg.it/CIRDIS/>.

CTI Statistics (University of Glasgow),

<http://www.stats.gla.ac.uk/cti/>.

IASE, International Association for Statistical Education,

<http://www.cbs.nl/isi/iase.htm>

NCTM, National Council of Teachers of Mathematics,

<http://www.nctm.org/>.

Grupo de Educación Estadística (Universidad de Granada),

<http://www.ugr.es/~batanero/>.

Royal Statistical Society Centre for Statistical Education,

<http://science.ntu.ac.uk/rsscse/>.

SIIP, The Statistical Instruction Internet Palette,

<http://research.ed.asu.edu/siip/>.

Teaching Statistics

<http://science.ntu.ac.uk/rsscse/ts/>

5. REFLEXIONES FINALES

- * El seminario nos permitió abordar un nuevo campo de estudio e investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Estadística, la *Educación Estadística*, llegando a lanzar una aproximación de lo que para nosotros es Educación Estadística.

- * Como futuros profesionales de la educación, el presente seminario nos ofrece una visión más amplia de la problemática que encierra todo lo que compete a la enseñanza y aprendizaje de la estadística, proporcionándonos herramientas teóricas y prácticas facilitadoras del quehacer docente en esta área específica.

- * Esperamos que este documento proporcione a las personas interesadas en el campo de la educación estadística elementos que sirvan de punto de partida para entrar en esta disciplina en formación.

- * Pretendemos crear un espacio de reflexión y discusión sobre los aspectos tratados en el presente documento.

Al terminar el seminario, nos parece conveniente mencionar algunas preguntas que encierran un campo problemático y pueden ser consideradas para futuras investigaciones:

* ¿Qué elementos se deben proporcionar a los estudiantes, para que valoren la estadística?

* ¿Cómo apoyar el aprendizaje del razonamiento sobre datos?

* ¿Cómo implementar el software educativo en clase de estadística?

* ¿Cómo relacionar la enseñanza y el aprendizaje de la estadística con otras disciplinas?

* ¿Quiere decir esto que se ha resuelto el problema de la Enseñanza de la Estadística?

* ¿Se debe reducir la enseñanza tradicional a enseñar a los alumnos el uso de programas informáticos ?

* ¿Cómo debemos reconsiderar los contenidos, objetivos y metodologías de aprendizaje en función de las nuevas tecnologías ?

- * ¿ Cómo se evaluaría un curso de Análisis Exploratorio de Datos?

- * ¿ Será posible realizar un curso de Estadística en la Universidad del Cauca bajo esta metodología del Análisis Exploratorio de Datos?

BIBLIOGRAFÍA

Armella Moreno Luis, Waldegg Guillermina. Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México.

Batanero, C. Godino, J. Análisis de Datos y su Didáctica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. 2001. (Recuperable en <http://www.ugr.es/local/batanero>)

Batanero, C. Didáctica de la Estadística Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. 2001. (Recuperable en <http://www.ugr.es/local/batanero>)

Batanero, C. 2002. ¿Hacia dónde va la educación estadística? Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Batanero, C. 2002. Presente y Futuro de la Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Batanero. C.,(1999) Taller sobre análisis exploratorio de datos en la enseñanza secundaria.(Actas de la conferencia internacional “Experiencias e Expectativas do Ensino de Estatística –Desafios para o Seculo XXI”.Florianópolis Brasil 20-23 de setembro 1999.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. Ponencia presentada en el "Encontro sobre Ensino e Aprendizagem da Estatística". Faculdade de Ciências de Lisboa, 3-4 Fevereiro 200. [Recuperable en <http://www.ugr.es/local/batanero>]

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.

Batanero, C., 2003. Los Retos de la Cultura Estadística.

Batanero, C., Garfield, J.B., Ottaviani M.G., Turan, J. 2000. Investigación en Educación Estadística: Algunas Cuestiones Prioritarias.

Batanero C, Bernabeu, Romero Luis, UNO. La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas, 5, 15-28.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J.D.,1992 Análisis Exploratorio de datos:
Sus posibilidades en la enseñanza secundaria. Suma numero 9, 25-31

Behar Gutiérrez Roberto, Ojeda Ramírez Mario. El proceso de aprendizaje de
la estadística, Universidad del Valle; Universidad Veracruzana.

Behar Gutiérrez Roberto, Ojeda Ramírez Mario. El problema de la educación
estadística: perspectiva desde el aprendizaje, Universidad del Valle
Veracruzana.

Bunge M. (1985), La investigación científica. Madrid, Ariel.

Clifton B. La Psicología del aprendizaje desde el enfoque constructivista,
Chadwick, The Chadwick School, Santiago de Chile.

Godino, J.D., 1995. ¿Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y
aprendizaje de la Estadística?.

Godino, J.D. Batanero, M.C., Navarro-Pelayo, V. Epistemología e instrucción
matemática, Implicaciones para el diseño curricular,

Godino, J.D. Batanero, Significado Institucional y Personal de los Objetos
Matemáticos.

Hipótesis Alternativa, Boletín de la IASE para Venezuela No. 1 al 7.

Molina. M. C.,(2002) La Estadística y Probabilidad en la formación de los Maestros de Educación Primaria. Ed. Octubre 2001.

Ottaviani, M.G 1999 Promover la Enseñanza de la Estadística: La función del IASE y su cooperación con los países en vías de desarrollo.

SERJ 1(1) Volume 1 number 1 May 2002.,

SERJ 1(2) volume 1 number 2 December 2002

Statistical Education Research Newsletter (SERN) Volume 1 Number 1 January 2000 al Volume 2 Number 3 September 2001.

Tauber, Liliana. Tesis Doctoral, La Construcción del Significado de la Distribución Normal en un Curso de Análisis de Datos. Ed. 2001.

liliana_tauber@yahoo.com.ar

Tischer Irene. La motivación en los procesos de enseñanza-aprendizaje universitarios. Universidad del Valle.

Tukey, J. W. (1970). Exploratory data analysis. New York: Addison Wesley