HOMOTECIA Y SEMEJANZA EN EL PLANO EUCLIDIANO

JIMMY OSWALDO MUÑOZ GAVIRIA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2004

HOMOTECIA Y SEMEJANZA EN EL PLANO EUCLIDIANO

(Enmarcado en el proyecto "Incorporación de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Geometría")

JIMMY OSWALDO MUÑOZ GAVIRIA

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad de Seminario presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Educación con Especialidad en Matemáticas

Directora:
ALBA LORENA SILVA SILVA
Especialista en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2004

Nota de aceptación

____

____

____

____

Directora **Especialista** Alba Lorena Silva Silva

Comité evaluador

____

Doctor Carlos A. Trujillo Solarte

____

Magíster Ángel Hernán Zúñiga

____

Especialista Elkin Cárdenas Díaz

Popayán, 24 de Agosto de 2004

A mis padres,
por darme todo el apoyo fundamental para culminar una meta académica y así poder vincularme al ejercicio profesional de la vida.

A mi hermano,
quien me indicó el camino y lograr pertenecer al mundo de la matemática.

A los amigos,
con los que compartí gratos momentos en mi paso por la universidad

A mis profesores,
quienes brindan de la mejor manera su conocimiento.

A mi sobrino, Jimmy Alexander Muñoz Cháves,
Al que le ofrezco mi vida y todo mi conocimiento al cumplir sus primeros 3 años de vida, que Dios lo guarde para siempre en vida.

AGRADECIMIENTOS

Como participe del seminario en educación matemática, enmarcado dentro del proyecto "INCORPORACIÓN DE TECNOLOGÍAS COMPUTACIONALES EN EL CURRÍCULO DE GEOMETRÍA", inscrito en la vicerrectoría de investigaciones de la Universidad del Cauca, agradezco la colaboración sincera de:

Alba Lorena Silva S, licenciada en educación con especialidad en matemáticas, especialista en educación matemática y especialista en matemática aplicada, por su constante asesoría para la culminación de este trabajo de grado, durante el segundo período académico de 2003.

Yeny Leonor Rosero R., licenciada en educación con especialidad en matemáticas y especialista en educación matemática, por los aportes académicos para la realización de este trabajo.

Javier Alexander Hurtado, ingeniero electrónico y de telecomunicaciones, docente de la Facultad de Ingeniería Electrónica de la Universidad del Cauca, por su constante motivación y por su grandiosa colaboración a lo largo de mi carrera universitaria.

Fabián Enrique Martínez, licenciado en educación con especialidad en matemáticas, compañero, amigo e integrante de este seminario de grado, por sus grandes consejos y el apoyo fundamental a lo largo de mi carrera universitaria.

Doris Lucía Cháves, licenciada en Lenguas Modernas, egresada de la Universidad del Cauca, por las sugerencias a la redacción de este documento.

Eduar Lasso Gómez, licenciado en educación con especialidad e matemáticas, compañero y participe de este seminario de grado, por su colaboración para el desarrollo de este trabajo.

Doctor: Carlos Alberto Trujillo Solarte, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca y miembro del comité evaluador por sus apreciables sugerencias.

Magíster: Ángel Hernán Zúñiga, profesor del departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca y miembro del comité evaluador por sus valiosas sugerencias y por el gran interés en el desarrollo de este trabajo de grado.

Especialista: Elkin Cárdenas Díaz, profesor del departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca y miembro del comité evaluador por sus valiosas sugerencias.

Los estudiantes pertenecientes al programa de Geotecnología de la Universidad del Cauca, matriculados en el segundo período académico del año 2003.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

Página

INTRODUCCIÓN

Este trabajo, es la sustentación de un ejercicio de desarrollo investigativo enmarcado dentro del proyecto "**Incorporación de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Geometría**", desarrollado durante el segundo período académico de 2003, en el cual se presentan los resultados de la adquisición de nuevas habilidades del pensamiento geométrico de un grupo de estudiantes del programa de Geotecnología; para los cuales se diseñaron actividades de aprendizaje, encaminadas a presentarles el contenido del tema "**Semejanza y Homotecia en el Plano Euclidiano**" según el modelo teórico de van Hiele.

La importancia de este trabajo se suscribe en dos ámbitos: El educativo y el formativo.

El primero se sustenta en que todo intento por mejorar la enseñanza en una disciplina en particular, en este caso la Geometría, debe estar soportado en la búsqueda de metodologías de trabajo donde el estudiante sea algo más que un simple receptor de información, es decir, que participe de manera más activa en la adquisición del conocimiento.

En el segundo, un complemento a la formación profesional dado que esta experiencia es una reflexión de una práctica educativa enmarcada dentro de un modelo de desarrollo de pensamiento y como modelo para el aprendizaje de la geometría.

Los productos elaborados para desarrollar esta propuesta de trabajo están abiertos a la crítica las sugerencias y todas aquellas observaciones que permitan mejorarlo.

.

1. JUSTIFICACIÓN

Dado que la geometría es un componente importante de la disciplina matemática, parece oportuno y necesario presentarla de manera que, contribuya efectivamente, al desarrollo del pensamiento matemático, utilizando para ello, un lenguaje matemático adecuado y un desarrollo lógico, apoyados en la intuición y el sentido común, sin dejar de lado la necesidad de alguna dosis de rigor, inherente a la ciencia.

Hoy en día, a pesar de la evolución de la Física y la matemática, sigue siendo importante el conocimiento de la geometría euclidiana, la que se enseña tradicionalmente en los niveles básicos. Ésta es intuitiva y a la vez abstracta. Cuando la geometría es considerada como una herramienta para el razonamiento, describiendo e interactuando con el espacio en el que vivimos, se transforma en la más intuitiva, concreta y real de las partes de la matemática. Así, se considera que su enseñanza debería iniciar en edades tempranas y evolucionar en forma permanente a lo largo de todo el currículo escolar.

El estudio de la geometría en los currículos de las matemáticas se había abandonado como una consecuencia de la "matemática moderna", pero actualmente, se considera una necesidad inevitable volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría.

Según el pensador, Howard Gardner[1], en su teoría de las múltiples inteligencias, considera como una de estas inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, pues se usa para representar y manipular información en el aprendizaje y la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es característico a las personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, (dibujo técnico, arquitectura, ingenierías, aviación, y disciplinas científicas como química, física, matemáticas), requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial.

En este proceso, se trata de actuar y argumentar sobre el pensamiento espacial ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje natural, con actividades lúdicas para el aprendizaje de la geometría.

La iniciativa de este trabajo, surge a partir del estudio del curso de computación educativa, de la participación del grupo de estudio en geometría y de la vinculación al proyecto **"Incorporación de tecnologías computacionales en el currículo de la geometría"**; espacios académicos donde fue posible reconocer la importancia que tiene la geometría, como componente fundamental en los programas académicos de los niveles de educación básica y media de Colombia y por tanto la necesidad de hacer énfasis en el estudio de procesos de enseñanza y aprendizaje de ésta área. El propósito de este trabajo, es mostrar

[1] Serie Lineamientos Curriculares-Conocimientos básicos-Pensamiento espacial y sistemas geométricos. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. 1998.

una alternativa de enseñanza que involucra al estudiante en un papel más activo al que tradicionalmente desempeña en un curso donde solo se limita a recibir información, adicionalmente esta experiencia es un buen referente de trabajo para el desempeño profesional como futuro licenciado en el área de las matemáticas.

2. OBJETIVOS

2.1 Contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes con el diseño de situaciones didácticas y el apoyo de tecnologías computacionales para la enseñanza de la geometría.

2.2 Crear ambientes propicios para la enseñanza en el aula a través de la utilización de las nuevas tecnologías.

2.3 Analizar la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes, según el modelo de Van Hiele.

3. MARCO TEÓRICO

La incorporación de las herramientas computacionales en la enseñanza de las matemáticas, no trae de manera automática cambios curriculares. Estos se producen después de haber realizado un proceso de concientización de la necesidad de cambio en tales estructuras y establecer la pertinencia del mismo.

Este proceso es lento ya que cualquier necesidad de cambio produce tensiones. Esto quizá indique que un cambio central dentro de la educación consistirá en evolucionar el objetivo de la fluidez algorítmica y transformarlo por el objetivo de fluidez representacional. Esto es, que el estudiante pueda representar un problema con estos objetivos, en diversos sistemas de representación y sea capaz de interpretar los resultados del tratamiento que se dé a tales sistemas mediante el instrumento ejecutor del que disponga.

Una de las herramientas computacionales es el software Cabri Géomètre, el cual es un programa que permite diagnosticar las habilidades iniciales, planificar un aprendizaje paso a paso, evaluar los progresos y tomar decisiones que reorienten la enseñanza de muchos temas geométricos y al contar con un “sub-menú histórico”, las acciones realizadas en las fases de construcciones geométricas pueden ser retomadas por los estudiantes, siendo posible así analizar el desarrollo de los procesos mentales. El análisis de situaciones métricas con Cabri permite seguir el siguiente proceso:

diseñar $\rightarrow$ *explorar* $\rightarrow$ *modelizar* $\rightarrow$ *conjeturar* $\rightarrow$ *definir* $\rightarrow$ *argumentar* $\rightarrow$ *demostrar* para inducir descubrimientos.

Por otra parte, Cabri es una herramienta matemática que esta muy difundida en instituciones de educación media en muchos países tales como: Francia, España, los E.E. U.U., Brasil, Argentina, entre otros.

En la necesidad de mejorar los resultados de los aprendizajes en los estudiantes, hemos optado por el **modelo de van Hiele**, por cuanto este presenta la característica de explicar al mismo tiempo cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo es posible potenciar la calidad de este.

Pierre M. y Dina, Van Hiele, exponen por primera vez en sus tesis doctorales leídas en 1957, un modelo que explica al mismo tiempo cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo es posible ayudar a los estudiantes a mejorar su razonamiento. Este modelo estratifica el conocimiento en cinco niveles y dentro de cada nivel en una serie de fases que permiten analizar el aprendizaje de la geometría.[2]

---

[2] **Marco teórico del proyecto INCORPORACIÓN DE TECNOLOGÍAS COMPUTACIONALES EN EL CURRICULO DE GEOMETRÍA.**

3.1 NIVELES DE ENTENDIMIENTO.

A los cinco niveles de entendimiento se les denomina de la siguiente manera: “Visualización”, “Análisis”, “Deducción Informal”, “Deducción Formal” y “Rigor”, que describen características del proceso de pensamiento. Auxiliado por experiencias instruccionales adecuadas, en él se afirma que el aprendiz se mueve secuencialmente desde el nivel inicial o básico (visualización), donde la actividad es simplemente observar las propiedades de las figuras que no son reconocidas explícitamente a través de la secuencia anteriormente planeada; hasta llegar al más alto (rigor), el cual se relaciona con los aspectos abstractos formales de la deducción. Algunos estudiantes son expuestos al último nivel o tienden a él. A continuación se presenta una sinopsis de los niveles.

3.1.1. Nivel 0 Visualización o reconocimiento. En esta primera etapa, los estudiantes están conscientes del espacio sólo como algo que existe alrededor de ellos. Los conceptos geométricos se ven como entidades totales como algo provisto de componentes o atributos. Las figuras geométricas, son reconocidas por su forma como un todo, esto es, por su apariencia física y no por sus partes o propiedades. Una persona que funciona a este nivel puede aprender un vocabulario geométrico, identificar formas especificadas y, dada una figura, reproducirla.

En este nivel el estudiante:

- Percibe los objetos en su totalidad y como unidades.

- Describe los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica con base en semejanzas y diferencias físicas globales entre ellos.
- No reconoce explícitamente las componentes y propiedades de los objetos.

3.1.2. Nivel 1 Análisis. En nivel 1 comienza un análisis de los conceptos geométricos. Por ejemplo, a través de la observación y la experimentación los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras. Estas propiedades que surgen se usan para conceptualizar clases de formas. Es notorio que las figuras tienen partes y son reconocidas mediante ellas. Las relaciones entre propiedades, aún no pueden ser explicadas por los estudiantes en este nivel, en el cual todavía no se ven las interrelaciones entre las figuras, ni se entienden las definiciones.

En este nivel el estudiante:

- Percibe los objetos como formados por partes dotadas de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas.
- Puede describir los objetos de manera informal, mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas.
- Deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.

3.1.3. Nivel 2 Clasificación / Deducción informal. Aquí, los estudiantes pueden establecer las interrelaciones en las figuras (por ejemplo: en un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos sean iguales) y entre figuras (un cuadrado es un rectángulo por que tienen todas sus propiedades).

Así, se pueden deducir propiedades de una figura y reconocer clases de figuras. Se entiende la inclusión de clases. Las definiciones adquieren significado. Sin embargo, el estudiante en este nivel, no comprende el significado de la deducción como un todo, ni el rol de los axiomas. Algunos resultados obtenidos de manera empírica se usan a menudo conjuntamente con técnicas de deducción. Se pueden seguir pruebas formales; pero los estudiantes no ven como el orden lógico podía ser alterado ni perciben tampoco cómo articular una demostración a partir de premisas diferentes o no familiares.

En este nivel el estudiante:

- Realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades con base en propiedades o relaciones ya conocidas y por medio del razonamiento informal.
- Describe las figuras de manera formal, es decir que comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
- Comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no comprende el encadenamiento de esos pasos ni la estructura de una demostración.
- No es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por este motivo, tampoco comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.

3.1.4. Nivel 3 Deducción formal. En este nivel se entiende el significado de la deducción como una manera de establecer una teoría geométrica con un sistema de axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones. Una persona puede construir, y no sólo memorizar demostraciones, percibir la posibilidad del desarrollo de una prueba de varias maneras, entender la interacción de condiciones necesarias y suficientes y distingue entre una afirmación y su recíproca. En este nivel el estudiante:

- Es capaz de realizar razonamientos lógicos formales.
- Comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.
- Acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etc.).

3.1.5. Nivel 4 Rigor. En esta etapa el aprendiz puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos. Pueden estudiarse geometrías no euclidianas y compararse diferentes sistemas. La geometría se capta en forma abstracta.

Este es el nivel final que se desarrolla en los trabajos originales y ha recibido poca atención por parte de los investigadores. Como la mayoría de los cursos de geometría del nivel medio son planeados en el tercero, no es sorprendente que la mayoría de los investigadores estén también concentrados en los niveles inferiores. Quizás, como el modelo Van Hiele se ha extendido a otras áreas (está siendo aplicado a la economía y la química en Holanda), el último nivel adquirirá posteriormente mayor notoriedad.

En este nivel el estudiante:

- Es capaz de analizar con alto grado de rigor los sistemas deductivos y utilizar los diferentes sistemas axiomáticos.
- Puede manejar, analizar y comparar diferentes Geometrías.

3.2. PROPIEDADES DEL MODELO

La descripción anterior de los niveles de razonamiento pone de manifiesto las propiedades del Modelo, cuya importancia radica en que muestra las líneas básicas a seguir si se quiere aplicar este modelo en la enseñanza de la Geometría.

Una breve descripción de estas propiedades.

3.2.1. Recursividad*:* Los elementos implícitos en el razonamiento del Nivel N se hacen explícitos en el razonamiento del nivel N+1.

3.2.2. Secuencialidad: No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles, es decir que no se puede alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado, de forma ordenada, todos los niveles inferiores. Pasar o no de un nivel a otro depende mas del contenido y los métodos de instrucción recibidos que de la edad. Ningún método lleva a un estudiante a brincar un nivel, algunos incrementan los progresos, mientras que otros los retardan o incluso previenen un movimiento entre niveles.

3.2.3. Especificidad del lenguaje: Cada nivel lleva asociado sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones para comunicarse y un significado específico del lenguaje matemático, de forma que dos personas que utilicen lenguajes de diferentes niveles no podrán entenderse. Así una relación que es “correcta” en un nivel puede ser modificada en otro.

3.2.4. Continuidad: La experiencia de quienes han utilizado este modelo muestra que el tránsito entre los niveles de Van Hiele se produce de forma continua y pausada, con una duración variable que puede llevar años en el caso de los niveles 3 y 4.

3.2.5. Falta de concordancia: Si un estudiante está en un nivel y la instrucción que recibe en otro, el aprendizaje y el progreso deseado puede o no ocurrir.

3.2.6. Localidad: Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la Geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento.

Mientras que los niveles de razonamiento nos orientan acerca de cómo secuenciar y organizar el currículo geométrico de una forma global, el objetivo de las fases de aprendizaje es favorecer el desplazamiento del estudiante de un nivel al inmediatamente superior mediante la organización de las actividades de enseñanza y aprendizaje, lo que ha permitido que el modelo tuviera una influencia real en la elaboración de currículos de geometría en distintos países como es el caso de la Unión Soviética, EE.UU., Países Bajos, etc.

3.3. FASES DE APRENDIZAJE

Las actividades de enseñanza, se organizarán a través de una secuencia cíclica de cinco *fases de aprendizaje*, se hará seguimiento a los estudiantes con el fin de progresar desde un nivel de pensamiento al siguiente. Aunque las fases son las mismas para todos los niveles, los contenidos, el lenguaje empleado y la forma de resolver los problemas son diferentes para cada nivel; la metodología de trabajo se mantiene, pero cambia su contenido concreto.

A continuación exponemos las *fases de aprendizaje*, propuestas por el Modelo de Van Hiele:

3.3.1. Información. Al empezar a desarrollar un nuevo tema, el docente informará a los estudiantes acerca del campo en que se va trabajar y cuáles son los problemas que se van a tratar de resolver. Esta fase permite que el profesor se entere de los conocimientos previos que poseen, sus estudiantes, sobre el tema y en caso que tengan algunos conocimientos organizados, cuál es su calidad y en qué nivel de razonamiento son capaces de desenvolverse. La información obtenida sirve al profesor de punto de partida para afianzar conceptos y empezar a modificar los errores detectados y a los estudiantes en que dirección dará el estudio posterior del mismo.

3.3.2. Orientación dirigida. En esta fase los estudiantes exploran el campo temático por medio de las actividades suministradas por su profesor. Estas actividades van dirigidas al descubrimiento y aprendizaje de los conceptos y propiedades fundamentales del tema que se está estudiando, tienen objetivos y directrices claras y se presentan al estudiante de forma progresiva. Esas actividades podrían revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel.

3.3.3. Explicitación. Esta fase es fundamentalmente de diálogo entre los estudiantes, con intervenciones del profesor cuando sea necesario. En esta fase se busca que los estudiantes reflexionen “en voz alta” sobre le trabajo que están haciendo, sus soluciones, dificultades, métodos, etc. Este debate entre compañeros enriquece el conocimiento de cada estudiante, pues les obliga a organizar sus ideas y a expresarlas con claridad, además pone de manifiesto los métodos y resultados incorrectos, permitiendo al docente la oportuna corrección.

Un objetivo muy importante de esta fase es lograr que las experiencias adquiridas, por los estudiantes, se unan a los símbolos lingüísticos para que aprendan a expresarse con precisión (dentro de las características del nivel de razonamiento en que están) en el transcurso de las discusiones que tienen lugar en el aula.

Así en esta tercera fase se forma parcialmente la nueva red de relaciones entre los conceptos propios del área de estudio.

3.3.4. Orientación libre. El profesor asignara a sus estudiantes tareas, que puedan desarrollarse de diversas formas o que conduzcan a diferentes soluciones, donde el estudiante pueda aplicar los conocimientos adquiridos, afianzar los que aún no estén firmes y completar sus propios conocimientos.

Las actividades y problemas propuestas a los estudiantes serán menos dirigidas que las planteadas en la segunda fase, pues en ese momento se buscaba el aprendizaje de unos conocimientos concretos, mientras que en la fase de orientación libre se persigue que el estudiante profundice en dichos conocimientos, que relacione unos con otros y que descubran y aprendan algunas propiedades que por su complejidad no pueden ser estudiadas antes.

3.3.5. Integración. Con el trabajo realizado en las fases anteriores el estudiante ha adquirido nuevos conocimientos y habilidades de razonamiento, pero todavía le falta adquirir una visión general de los métodos que tiene a su disposición. Por ello en esta fase, el profesor trata de resumir en un todo, el campo que ha explorado con sus estudiantes para que ellos integren lo que acaban de aprender en una red de conocimientos relacionados con el campo de estudio anterior. El docente puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas compresiones no le aporten ninguna novedad al estudiante. Solamente deben ser una acumulación de las cosas que ya conoce.

Las fases de aprendizaje tienen, por los objetivos de cada una, una secuencia lógica que no se puede alterar. La única excepción es la tercera fase, de explicitación; ésta no tiene un período de tiempo entre las fases segunda y cuarta, sino que hay que entenderla como una dinámica continúa, presente en todas las clases, de dialogo y de reflexión común después de cualquier tipo de actividad, sea de la fase que sea. De esta manera, la fase de explicitación estaría "sobrevolando" las otras fases y entremezclada con cada una de ellas.

Las fases no tienen una duración determinada, puede que una fase de un determinado nivel no requiera actividades específicas, pues el profesor ya sabe qué conocimientos y nivel de razonamiento tienen sus estudiantes y puede ser suficiente hacer algunos comentarios o preguntas para re-tomar el tema y comenzar con las actividades de la siguiente fase.

Al finalizar la quinta fase, los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de pensamiento que reemplazará al viejo y estarán listos para repetir las fases de aprendizaje en el siguiente nivel.

.

4. METODOLOGÍA

En este seminario de grado se trabajó sobre el tema de homotecia y semejanza en el plano, en la implementación de la propuesta de trabajo diseñado, participaron los estudiantes adscritos al programa de Geotecnología de la facultad de Ingeniería Civil de la Universidad del Cauca, matriculados en el segundo período académico del año 2003.

Para lograr los objetivos propuestos por el seminario se diseñaron diferentes tareas, entre las más significativas se destacan: las notas de clase, asesoría permanente, talleres, el diseño y aplicación de actividades de aprendizaje referentes al tema, diseñadas según las especificaciones dadas por el modelo de Van Hiele. Inicialmente se tenía presupuestado desarrollar el tema con la implementación del software Cabri Géomètre, pero infortunadamente las condiciones logísticas no permitieron este apoyo tecnológico en el avance del curso, no obstante en horas de asesoría fue posible con pocos estudiantes mostrar las bondades de esta herramienta en la comprensión del tema. En estas oportunidades, se dió auge a la creación de espacios académicos para el aprendizaje de la geometría, pues fue importante aclarar las inquietudes que los estudiantes presentaron al ir avanzando en el tema de la semejanza y la homotecia.

El desarrollo de las actividades de aprendizaje por parte de los estudiantes permitió recoger una serie de registros, los cuales se sometieron a un análisis para establecer el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico alcanzado por estos según las características que el modelo proporciona.

En la dinámica del seminario se identifican cinco etapas: la etapa de diagnóstico, la etapa de preparación y de diseño de actividades de aprendizaje, la de aplicación de las actividades diseñadas, análisis de resultados, y la elaboración del informe final. A continuación se presentan en forma más detallada cada una de estas etapas.

4.1. ETAPA DE DIAGNÓSTICO

En esta etapa se diseñó una prueba escrita, cuyo objetivo fue establecer el nivel de conocimiento alcanzado en el área de geometría durante la formación básica y media por los estudiantes, objeto de la experiencia; adicionalmente definió criterios para el estudio de esta asignatura, a partir de los resultados obtenidos. El contenido temático de evaluación involucró preguntas relacionadas con semejanza de figuras en el plano; específicamente semejanza triangular.

4.2. ETAPA DE PREPARACIÓN Y DISEÑO DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Siguiendo con la dinámica planteada por los demás miembros del seminario, en esta etapa se diseñaron actividades de aprendizaje, en aras a que respondan a los objetivos expuestos dentro del plan de trabajo. Las actividades de aprendizaje incluyen tres pruebas que se elaboraron teniendo en cuenta las características que plantean los niveles de razonamiento 0, 1 y 2 según el modelo de Van Hiele.

El inventario de productos en esta etapa incluye: notas de clase, talleres de estudio, lecturas complementarias y tres pruebas. Las notas de clase además de ser un referente para la presentación y el diseño de las actividades es material de estudio apropiado para el grupo.

4.2.1. **Notas de clase.** Apoyados en diferentes referentes teóricos, las notas de clase sobre semejanza y homotecia en el plano, incluyen: teoremas básicos junto con sus demostraciones, ejemplos, ejercicios que involucran aplicaciones de este tema en el campo de la ingeniería, un taller y finalmente algunas construcciones geométricas elementales sustentadas en el tema.

4.2.2. Prueba considerada de nivel cero. La prueba de nivel cero, consiste en la formulación de ejercicios prácticos que implícitamente involucran la comprensión de los términos de razón y proporción. Ella exige a los estudiantes hacer la descripción de los procedimientos empleados para el desarrollo de cada uno de los ítems formulados.

El objetivo principal de ésta, es indagar sobre los conocimientos preeliminares frente al tema de Homotecia y Semejanza, luego de haber culminado el estudio de los movimientos en el plano. También la prueba responde al propósito de que el estudiante encuentre otros métodos de aprendizaje en la aplicación de la temática de proporcionalidad.

4.2.3. Prueba considerada de nivel uno. El interés por indagar, la capacidad de los estudiantes para aplicar las nociones básicas sobre el tema de estudio que nos convoca, trajo como resultado **la prueba de nivel uno.** En ella, se plantean una serie de situaciones que van desde la reproducción de una figura, hasta la aplicación de homotecias pasando por construcciones elementales que requieren de definiciones básicas de semejanza. Esta prueba se adapta fácilmente para la utilización del software Cabri Géomètre.

4.2.4. Prueba considerada de nivel dos. A diferencia de las pruebas anteriores, para esta se diseñaron tres actividades con los requerimientos que exige este nivel, el esquema adoptado para su elaboración contempla preguntas de tipo teórico y práctico distribuidas aleatoriamente entre el grupo. En el momento de la aplicación de estas actividades, los estudiantes han contado con un período de tiempo prudencial para que se apropien de las definiciones y de los teoremas más importantes de la semejanza triangular.

4.3. ETAPA DE APLICACIÓN

Durante los meses de noviembre y de diciembre del año 2003, fueron aplicadas a una población de 38 estudiantes pertenecientes al primer semestre del programa de Geotecnología, las actividades de aprendizaje 0, 1 y 2 diseñadas para el desarrollo del tema anteriormente mencionado. Los resultados de esta aplicación son evidencias que pretenden mostrar el nivel de razonamiento geométrico alcanzado por los estudiantes, una vez que se involucren a la metodología de trabajo. Las notas de clase fueron un punto de apoyo importante para la explicación y selección de los resultados más relevantes del tema; además se les proporcionó a los estudiantes con antelación para que avancen y complementen su estudio. En las horas de clase se desarrollaron algunas demostraciones de los resultados teóricos más importantes y se ejemplificaron algunas situaciones que requieren de estos contenidos para la solución. Las horas de asesoría fueron de vital importancia, en especial para los estudiantes que se les dificultó el curso de geometría, no sólo en esta temática, sino durante el semestre. Algunos de los estudiantes, observaron las ventajas del uso de las tecnologías computacionales como la calculadora TI 92 plus, en su paquete geométrico, para ilustrarlo y mostrar caminos de solución con la temática en estudio. Infortunadamente por razones logísticas no fue posible que la mayoría de los estudiantes se apoyaran en estas tecnologías. Como invitación, se les mencionó que es posible adquirir el programa Cabri Géomètre para uso en un PC. Durante estas horas de asesoría es posible subsanar las falencias que puedan presentar los estudiantes ante el aprendizaje del curso. Puesto que el uso de las tecnologías computacionales fue limitado, los pocos estudiantes que vieron su manejo, comprendieron que el costo de los equipos y el uso de los mismos, debe ser específicamente organizado en un laboratorio para matemáticas, lugar adecuado para el aprendizaje de esta área. Esta fue una de las condiciones logísticas que irrumpió el proceso.

A continuación se presenta, con más detalle, la aplicación de las pruebas:

4.3.1. **Prueba considerada de nivel cero**: Una vez culminado el estudio de los movimientos en el plano, después de hacer una síntesis de los mismos, se expone una motivación a los estudiantes para el estudio sobre “homotecias y semejanzas en el plano”. Una vez terminada esta actividad se aplica la Prueba de Nivel 0. Los estudiantes se apoyaron de otros conocimientos adquiridos en áreas diferentes a la geometría para el desarrollo de la misma. Cabe resaltar que no es necesaria la utilización de alguna herramienta computacional para la prueba.

Más adelante en el análisis de resultados se entenderá por qué fueron pocos los estudiantes que se percataron de hacer consideraciones en el uso de la cuadrícula para la reproducción del dibujo a una escala doble. La aplicación de la prueba presentó dificultades en el desarrollo de las últimas preguntas debido a problemas de interpretación.

4.3.2. Prueba considerada de nivel uno: Debido a la premura del tiempo esta prueba no se aplicó en horas de clase, sino que a diferencia de las distintas pruebas realizadas, esta se les entregó a los estudiantes para que fuera desarrollada en sus horas de estudio. Infortunadamente los estudiantes no entregaron el desarrollo; para poder recoger registros de ella se les habló de una bonificación sobre la nota del examen final, como era de esperarse estos abundaron. No obstante, pese a que los registros dan muestra de un buen desarrollo de ésta; a diferencia de las anteriores pruebas, es difícil determinar su evolución en el desarrollo del pensamiento geométrico, dado que no se pudo establecer si realmente fue solucionada por cada estudiante o si motivados por obtener la bonificación se limitaron a copiar el desarrollo, sin detenerse a analizar el por qué de este. Algunos estudiantes interesados en el tema confrontaron sus resultados con las soluciones a estos problemas durante las horas de asesoría, mediante la utilización del paquete Cabri Géomètre incorporado a la calculadora TI 92 plus, describiendo paso a paso el ejercicio de construcción y el manejo de esta herramienta computacional.

4.3.3. Prueba considerada de nivel dos: La aplicación de esta prueba constituyó la evaluación final, este carácter especial de prueba demandó del estudiante: preparar el tema, usar los espacios de asesorías y apoyarse en textos bibliográficos. La solución del cuestionario exige respuestas argumentadas, a partir de las ideas, definiciones y conceptos que detenidamente vienen manejando desde el inicio del curso y de este tema en particular.

Las actividades para este nivel, se resumen en preguntas de aplicación de las propiedades de la semejanza de triángulos. En las notas de clase, se propuso un taller con temáticas afines a este nivel; en él, además de complementar el tema, los estudiantes tuvieron la oportunidad de aprovechar las ventajas que tiene el software Cabri Géomètre; durante las asesorías se desarrollaron actividades concernientes a construcciones que involucran homotecias de polígonos apoyados en esta herramienta, comprobando de manera sencilla las propiedades que se conservan en este tipo de transformación.

Dentro del plan de trabajo se contempla la posibilidad de trabajar con el uso de herramientas computacionales para el desarrollo del tema, no obstante el diseño presentado no respondió a esta iniciativa, pese a que fue diseñado con este objetivo, pues las condiciones logísticas, el tiempo y los ritmos de aprendizaje del grupo, entre otras cosas, no lo permitieron. Dadas estas condiciones de trabajo los registros obtenidos no ayudan a responder el siguiente interrogante: ¿Las herramientas computacionales contribuyen a una mejor comprensión de la semejanza y homotecia de figuras planas?

No obstante el material de clase y las pruebas diseñadas constituyen un buen referente que en condiciones normales de trabajo pueden generar evidencias que permitan elaborar una respuesta a esta inquietud.

4.4. CATEGORÍAS PARA LA ETAPA DE ANÁLISIS DE RESULTADOS

Con el fin de determinar el desarrollo del pensamiento geométrico, según Van Hiele, en los estudiantes que participaron de este proceso se definen categorías de análisis según la descripción de los niveles dada por el modelo que se implementó. Para tal efecto se estudian registros obtenidos en el desarrollo de cada una de las pruebas descritas anteriormente y de la participación de los estudiantes dentro de la clase o en hora de asesoría para el tema.

4.4.1. Categorías de análisis. Prueba de nivel cero. De acuerdo a las propiedades que describe el nivel de Visualización, se consideran las siguientes categorías de análisis para la prueba de nivel cero:

1. Reconocimiento y Reproducción de figuras:

   Recepción e interpretación de la información por parte de los estudiantes sobre cada pregunta de la prueba.

2. Descripción de los objetos:

   Uso del lenguaje natural para describir diferentes elementos geométricos planteados en la prueba y las relaciones entre estos.

3. Operatividad:

   Elementos aritméticos y/o algebraicos que utiliza el estudiante para trabajar la prueba.

4.4.2. Categorías de análisis. Prueba de nivel uno. Para este nivel se consideran las siguientes categorías:

1. Reproducción de figuras y manejo de construcciones en el plano:

   Capacidad que posee el estudiante para solucionar un problema de esta naturaleza.

2. Empleo de las propiedades de la semejanza:

   Elementos teóricos que utiliza el estudiante para presentar la solución de esta prueba.

3. Descripción de los objetos:

Uso del lenguaje natural y técnico para describir diferentes elementos geométricos planteados en la prueba y las relaciones entre estos.

4. Argumentación:

   Explicaciones dadas por el estudiante, que dan cuenta de la comprensión de un tema de estudio en particular.

4.4.3. Categorías de análisis. Prueba de nivel dos. Los registros obtenidos en esta parte se analizan bajo las siguientes categorías:

1. Relaciones entre las figuras.

   Capacidad de identificar en las actividades propuestas la relación de semejanza y la aplicación de la homotecia entre figuras del plano.

2. Argumentación.

   Comprensión y justificación teórica por parte del estudiante de un determinado tema que se le ha dado a conocer.

3. Razonamiento lógico.

   Capacidad de organizar las ideas en secuencia cuando se identifica la solución del problema que involucra el conocimiento de la semejanza y la homotecia.

En los capítulos 6, 7 y 8, de este informe se presenta en detalle el análisis de los registros de acuerdo a estas categorías establecidas, de antesala se hacen algunas observaciones de la información proporcionada en la etapa de diagnostico.

4.5. ELABORACIÓN INFORME FINAL

Como sistematización de este seminario de grado, se presenta este documento que contiene:

1. El desarrollo del Diagnóstico realizado.
2. La presentación de los diferentes talleres que se diseñaron.
3. La aplicación y el análisis de los talleres diseñados.
4. Evaluación del proceso a la luz del modelo de Van Hiele.
5. Análisis del proceso de seguimiento realizado a los estudiantes.
6. Elementos más importantes que se presentaron como obstáculos a lo largo del proceso.
7. Posibles errores que se cometieron durante el proceso.

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA PRUEBA DIAGNOSTICA

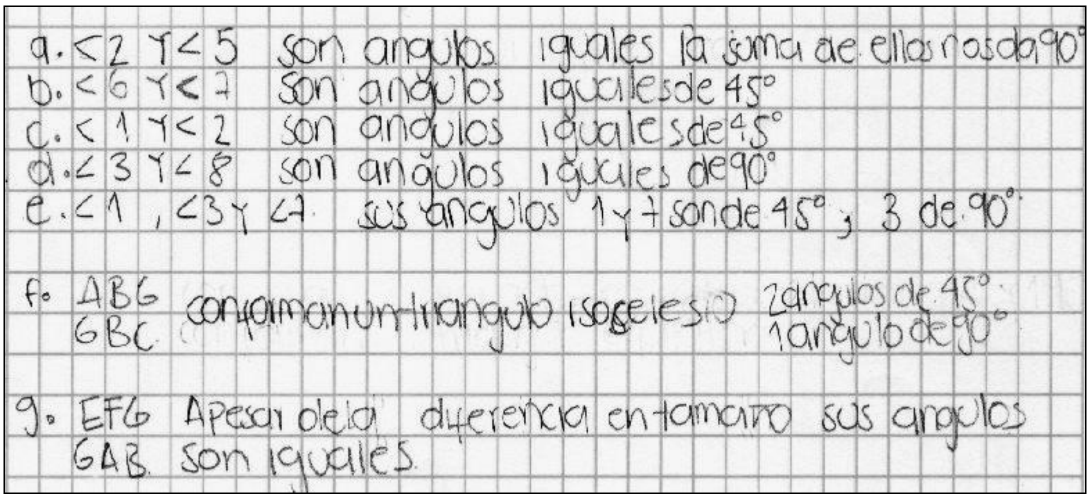
5.1. DISEÑO Y APLICACIÓN DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA.

La prueba de Diagnóstico fue diseñada incluyendo temas amplios de geometría en el plano y tiene por objeto hacer una exploración sobre los conocimientos alcanzados por los estudiantes en su formación básica y media.

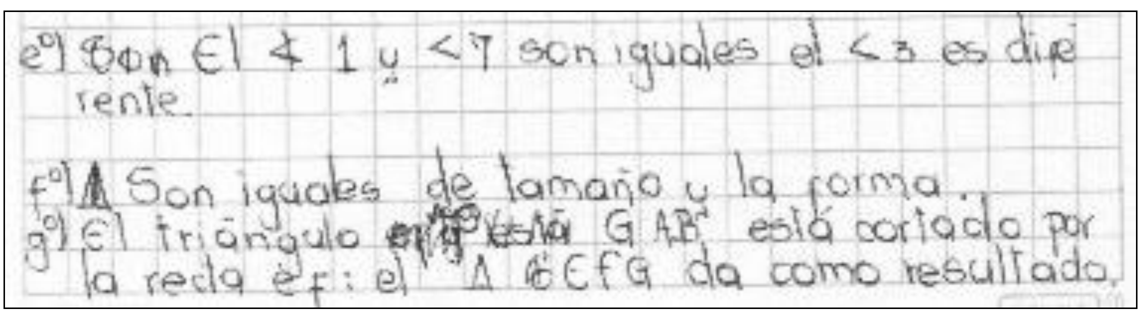
La prueba se aplicó antes de iniciar el curso de geometría euclidiana, la presentaron 23 estudiantes de los cuales 10 entregaron la hoja diligenciando el encabezado de la prueba. La presentación de los resultados se caracterizó por el inadecuado manejo del lenguaje y de la notación matemática.

5.2. RESULTADOS OBTENIDOS

El desarrollo presentado por los estudiantes evidencia dificultades en el manejo de conceptos, en la argumentación de los procesos que realizan y en la representación de situaciones. En lo referente a semejanza el temario no contiene preguntas explicitas, pero en las posibles respuestas para el numeral tres (3) (Ver anexo A. Actividad 1) se identifican muestras que llaman la atención para esta parte del seminario. A continuación se presentan escritos que confirman las observaciones anotadas.

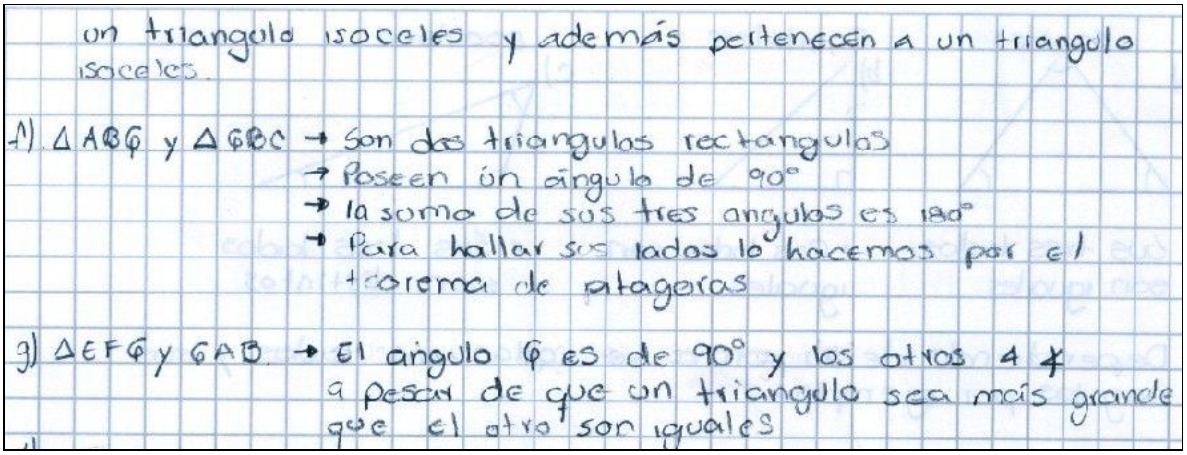


a. <2 y <5 son angulos iguales la suma de ellos nos da 90°
b. <6 y <7 son angulos iguales de 45°
c. <1 y <2 son angulos iguales de 45°
d. <3 y <8 son angulos iguales de 90°
e. <1 , <3 y <7 sus angulos 1 y 7 son de 45° ; 3 de 90°
f. ABG GBC conforman un triangulo isoceles 2 angulos de 45°, 1 angulo de 90°
g. EFG GAB Apesar de la diferencia en tamaño sus angulos son iguales.



e) Son El ∢ 1 y <7 son iguales el <3 es diferente.
f) ▲ Son iguales de tamaño y la forma.
g) el triángulo GAB está cortado por la recta ef: el Δ EFG da como resultado.

Figura 1. Evidencia del punto III sobre manejo de conceptos.



un triangulo isoceles y además pertenecen a un triangulo isoceles.

f) ΔABG y ΔGBC → Son dos triangulos rectangulos
→ Poseen ún ángulo de 90°
→ la somo de sus tres angulos es 180°
→ Para hallar sus lados lo hacemos por el teorema de pitagoras

g) ΔEFG y GAB → El angulo G es de 90° y los otros 4 ∡ a pesar de que un triangulo sea más grande que el otro son iguales

Figura 2. Evidencia del punto III sobre uso inadecuado del lenguaje y notación matemática.

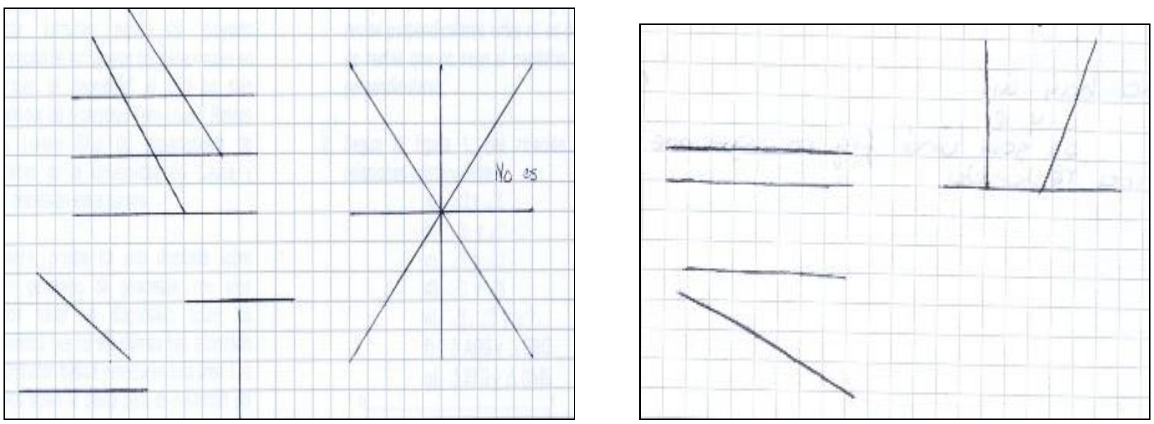


Figura 3. Evidencias sobre dificultad para representar situaciones.

5.3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Los registros seleccionados no dan cuenta clara sobre la relación de semejanza entre triángulos, fácilmente identifican la relación de congruencia (caso particular de semejanza), pero sin una buena utilización del lenguaje, pues para los estudiantes semejanza es sinónimo de igualdad, (Figura 1 y Figura 2). Estos registros también ilustran la dificultad que tienen la mayoría de los estudiantes para representar rectas paralelas (Figura 3); relación que está presente en los teoremas más sobresalientes de la semejanza triangular.

En cada registro analizado se observa en general un manejo inadecuado del lenguaje, mala ortografía y deficiencia en la redacción de las respuestas.

En general los datos proporcionados por esta prueba dan cuenta del poco desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes al iniciar el estudio de la geometría euclidiana; se espera obtener mejores registros en las actividades de aprendizaje diseñadas para la presentación del tema preparado, ya que estas se ha previsto aplicarlas en las últimas semanas que dan terminación de este curso; en esta instancia se supone que ya se han familiarizado con los elementos teóricos básicos, con el lenguaje matemático y con algunas relaciones (paralelismo, congruencia, perpendicularidad, etc.) que son de recurrente utilización dentro de la Geometría Euclidiana.

Una vez finalizada esta etapa de diagnostico se desarrollan las diferentes actividades de aprendizaje para los temas relacionados con la parte axiomática del curso, definiciones de los objetos geométricos esenciales para avanzar en éste y los movimientos en el plano; la primera actividad de aprendizaje diseñada para la presentación de semejanza y homotecia en el plano, se aplica a mediados del mes de noviembre de 2003. En la siguiente sección presentamos los resultados de esta.

6. PRIMERA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

PRUEBA DE NIVEL CERO

6.1. FASES DE APRENDIZAJE

6.1.1. Información. En esta parte se hace un recuento, a través de un cuadro sinóptico, de los temas más relevantes que se han presentado hasta esta instancia del curso de geometría; se hace hincapié en el concepto de **transformación** reiterando, una vez más, que cada movimiento en el plano es una transformación biunívoca de puntos del mismo; para finalmente anunciar que la homotecia es una trasformación del plano y que se pretende que deduzcan el por qué ésta no es un movimiento en él.

6.1.2. Orientación dirigida. En esta fase los estudiantes exploraron en el curso de geometría por primera vez, con ejercicios lúdicos, situaciones prácticas que tienen explicación en el tema que van a estudiar en esta parte. El haber participado en el curso les permite dar opiniones coherentes y con un mejor lenguaje. La aparición de nuevos términos (razón, proporción) crea curiosidad.

6.1.3. Explicitación. Es aquí donde las opiniones de los estudiantes adquieren importancia, al confrontar los diferentes desarrollos mostrados surgen aportes de los estudiantes que incitan a la polémica, pues cada estudiante justifica su respuesta, se interviene en ella cuando enuncian argumentos falsos y se aclaran las inquietudes.

6.1.4. Orientación libre. Es un espacio en el que enfrentamos al estudiante con situaciones problema que lo invitan a formular caminos de solución según su experiencia y conocimiento; con ellos se intenta que el estudiante comprenda que existen situaciones de variación directa e inversa o la combinación de las dos. Se espera que estas relaciones sean expresadas en términos de razones y proporciones y que apoyados en las notas de clase miren sus propiedades.

6.1.5. Integración. En esta parte se organizan las ideas dadas por los estudiantes y que se consideran importantes para presentar las definiciones; algunos resultados permiten un acercamiento paulatino a la relación de semejanza en el plano. Se insiste en ejemplificar la importancia que tiene el concepto de razón, en especial cuando se utilizan escalas, en tasas de cambio, intereses y porcentajes; curiosamente por descuido, no se presenta la razón geométrica.

6.2. RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PRUEBA DE NIVEL CERO

A continuación se muestran los registros obtenidos para los cuales se hace un análisis de acuerdo a las categorías establecidas para esta prueba.

6.2.1. Reconocimiento y reproducción de figuras. Todos los estudiantes presentaron el desarrollo del primer numeral de la prueba, pero solo un reducido número de ellos mostraron interés en presentar reproducciones de buena calidad, con trazo delicado y sobre todo la implementación de recursos que les facilitaran la elaboración. (Ver anexo C. Actividad 2).

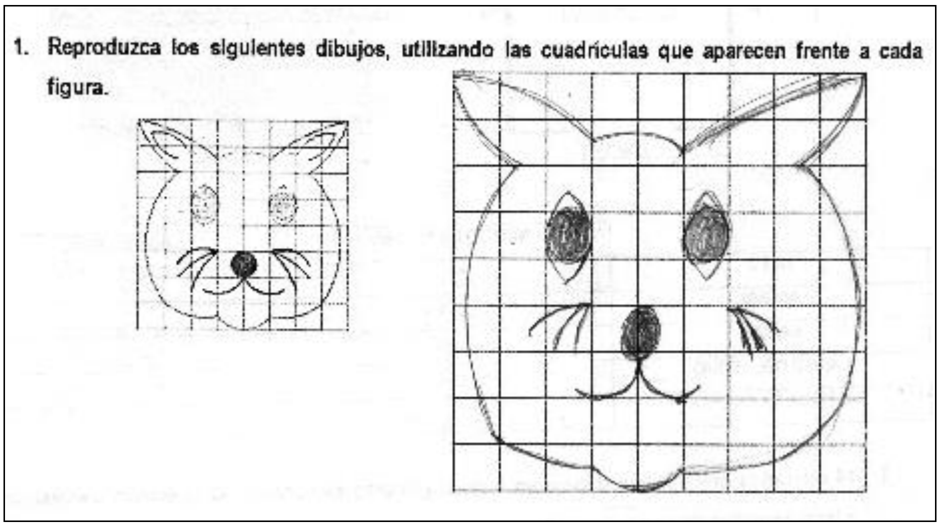


Figura 4. Evidencias del punto I sobre ampliación de figuras.

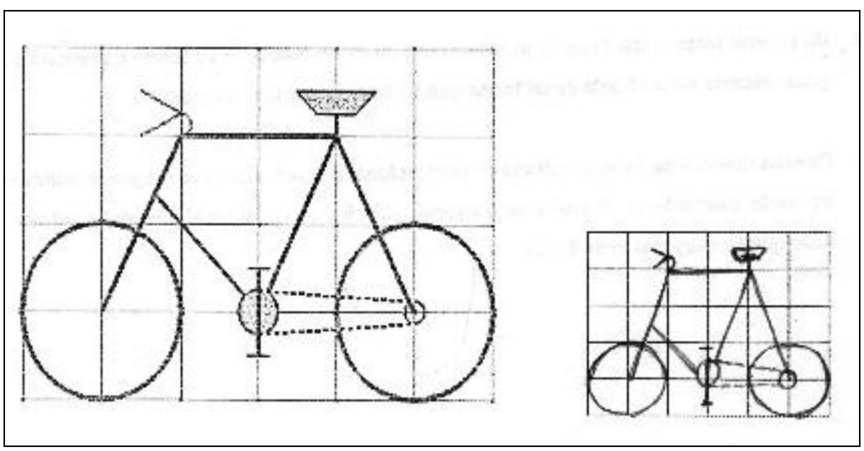


Figura 5. Evidencias del punto I sobre reducción de figuras.

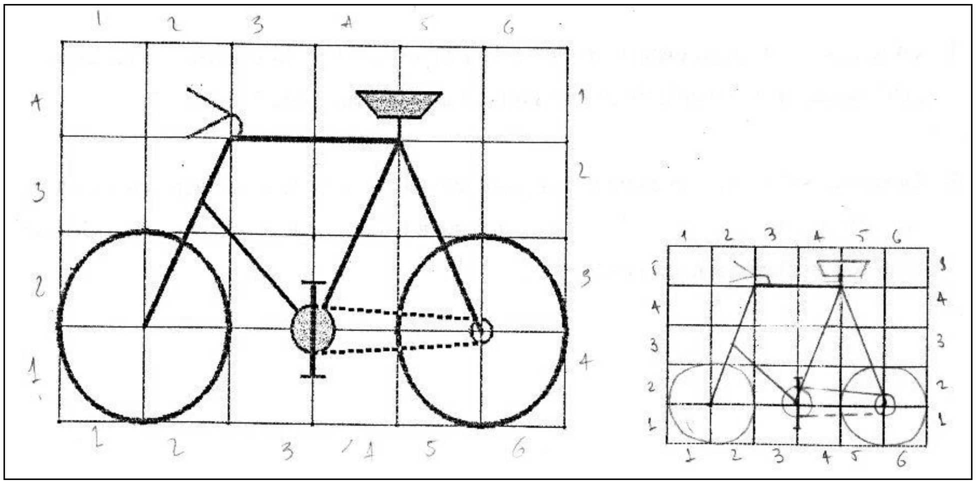


Figura 6. Evidencias del punto I sobre ampliación y reducción de figuras - Técnicas.

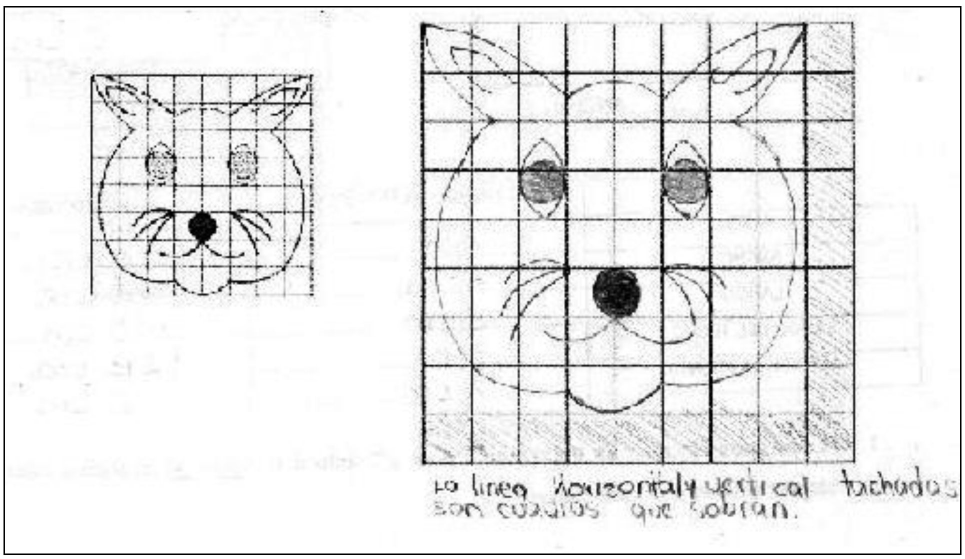


Figura 7. Evidencias del punto I sobre ampliación y reducción de figuras - Técnicas.

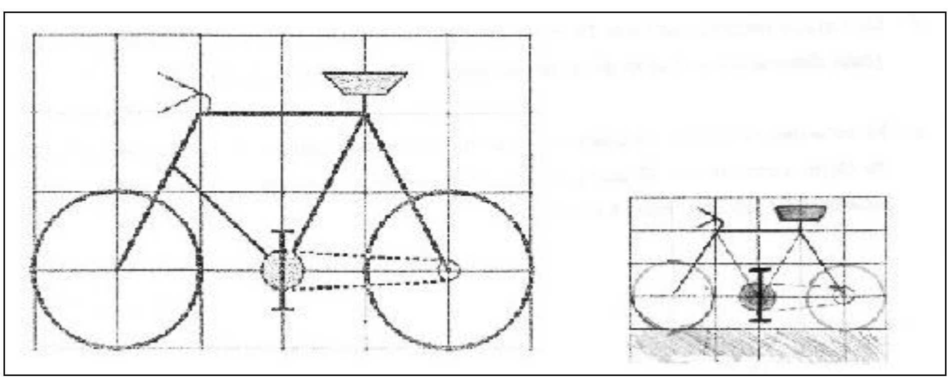


Figura 8. Evidencias del punto I sobre ampliación y reducción de figuras.

6.2.2. Descripción de los objetos. De los registros analizados, a continuación se exponen algunas narraciones donde los estudiantes describen de manera lacónica, la estrategia empleada para reproducir las figuras. Se han seleccionado muestras que exhiben tres tendencias: la primera caracterizada por la coherencia narrativa, la segunda por la inadecuada utilización del lenguaje que dificulta la comprensión de las explicaciones y finalmente las que no hacen aportes o sus ideas son difíciles de interpretar. (Ver anexo C. Actividad 2).

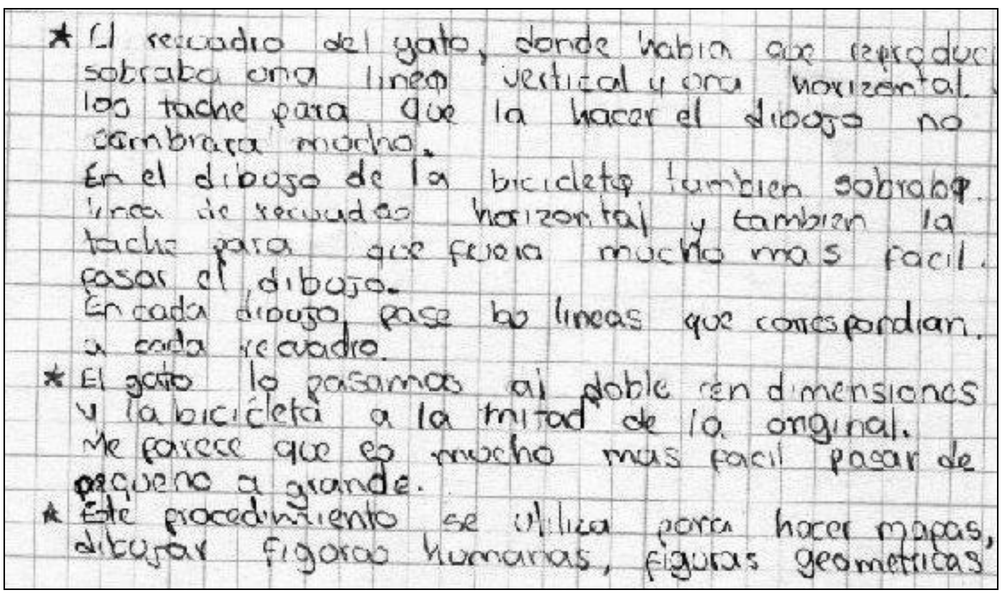
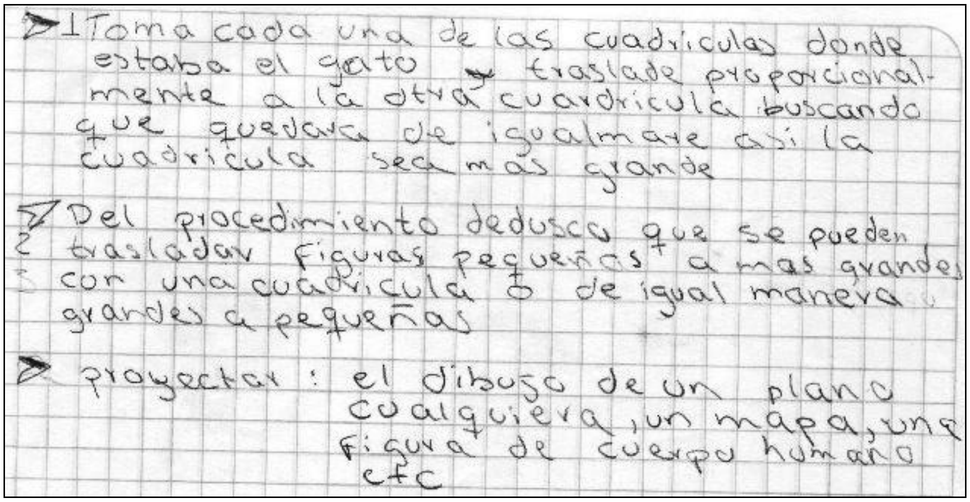

* El recuadro del gato, donde habia que reproduci
sobraba una linea vertical y una horizontal
los tache para que la hacer el dibujo no
cambrara mucho.
En el dibujo de la bicicleta tambien sobraba
linea de recuadro horizontal y tambien la
tache para que fuera mucho mas facil
pasar el dibujo.
En cada dibujo pase las lineas que correspondian
a cada recuadro.
* El gato lo pasamos al doble en dimensiones
y la bicicleta a la mitad de lo original.
Me parece que es mucho mas facil pasar de
pequeno a grande.
* Este procedimiento se utiliza para hacer mapas,
dibujar figoras humanas, figuras geometricas

Figura 9. Evidencias del punto I sobre descripción primer grupo.

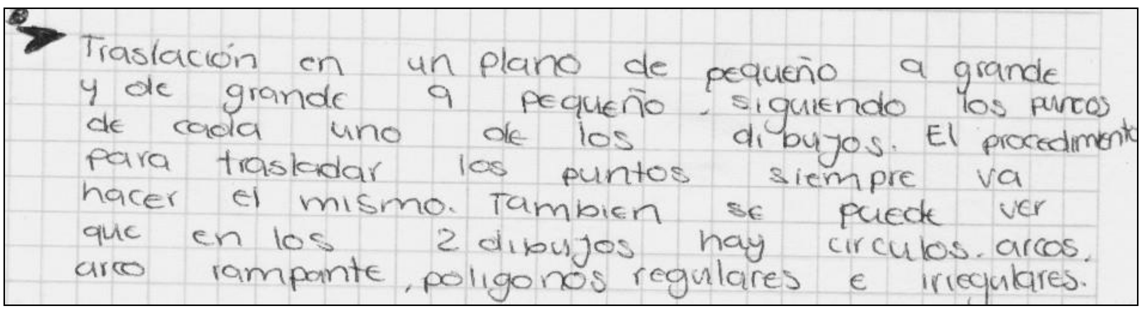


1 Toma cada una de las cuadriculas donde estaba el gato y traslade proporcionalmente a la otra cuadricula buscando que quedara de igualmente así la cuadricula sea más grande

Del procedimiento dedusco que se pueden trasladar figuras pequeñas a mas grandes con una cuadricula o de igual manera grandes a pequeñas

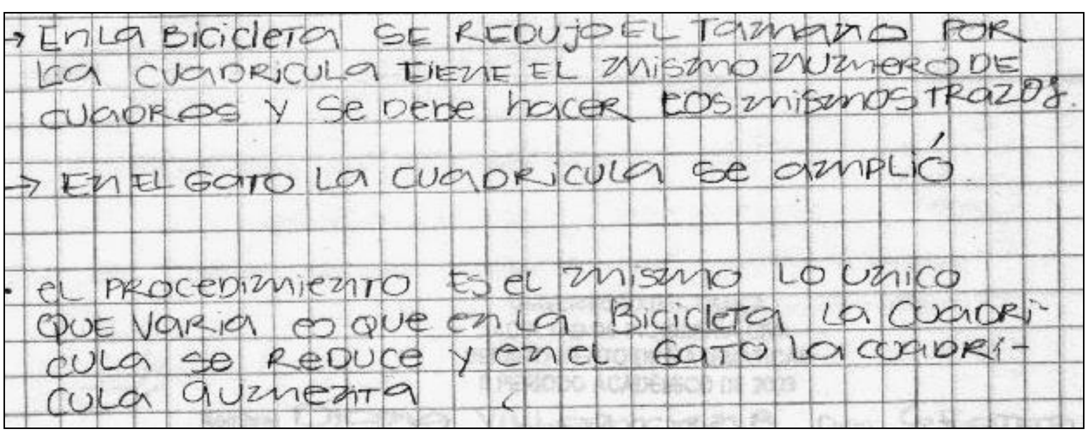
proyectar: el dibujo de un plano cualquiera, un mapa, una figura de cuerpo humano etc

Figura 10. Evidencias del punto I sobre descripción segundo grupo.



Traslación en un plano de pequeño a grande y de grande a pequeño siguiendo los puntos de cada uno de los dibujos. El procedimiento para trasladar los puntos siempre va hacer el mismo. Tambien se puede ver que en los 2 dibujos hay circulos. arcos, arco rampante, poligonos regulares e irregulares.

Figura 11. Evidencias del punto I sobre descripción segundo grupo.



→ En la Bicicleta se redujo el tamaño por la cuadricula tiene el mismo numero de cuadros y se debe hacer los mismos trazos.

→ En el gato la cuadricula se amplió.

• el procedimiento es el mismo lo unico que varia es que en la Bicicleta la cuadricula se reduce y en el gato la cuadricula aumenta

Figura 12. Evidencias del punto I sobre descripción tercer grupo.

6.2.3. Operatividad. Los registros muestran datos numéricos y operaciones aritméticas, para obtener la información necesaria. Los estudiantes emplearon instrumentos de medición y presentaron algunos procedimientos que les permiten responder a algunos cuestionamientos planteados. (Ver anexo C. Actividad 2). Para esta actividad, pocos recurrieron al uso de calculadoras. Se evidencian muestras en las que ellos plantean relaciones directas e inversas que les permite dar solución de algunas situaciones de aplicación. Se reconoce que un gran número de estudiantes trabajan las operaciones básicas correctamente, pero en ocasiones olvidan interpretar los resultados según el contexto del problema, impidiendo así el detectar datos erróneos. (Ver anexo C. Actividad 2).

	LONGITUD EN EL DIBUJO	LONGITUD REAL
ALTO	4cm	100 cm
ANCHO	3,9 cm.	97.5 cm.
LARGO	4,9 cm	122.5 cm
LARGO DEL TECHO	6,80 cm	170 cm
ALTO DE LA PUERTA	1.9	47.5 cm

Figura 13. Evidencias del punto II sobre operaciones aritméticas.

	LONGITUD EN EL DIBUJO	LONGITUD REAL
ALTO	4cm	1m
ANCHO	4cm	1m
LARGO	5cm	1.25m.
LARGO DEL TECHO	7cm	1.50m
ALTO DE LA PUERTA	2 cm	50cm

Figura 14. Evidencias del punto II sobre operaciones aritméticas.

Para el numeral dos de esta prueba, son pocos los registros que dan muestra de un trabajo serio por parte de los estudiantes, en su mayoría se limitaron a tomar copia de compañeros que asumieron con responsabilidad el trabajo, limitándose a variar la información para no ser detectados.

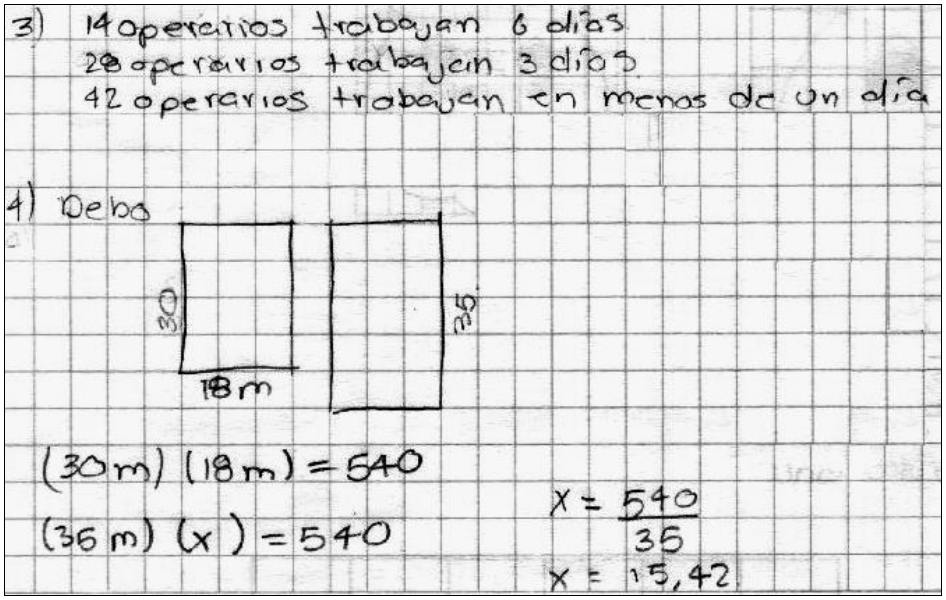


Figura 15. Evidencias del punto III y IV sobre operaciones aritméticas.

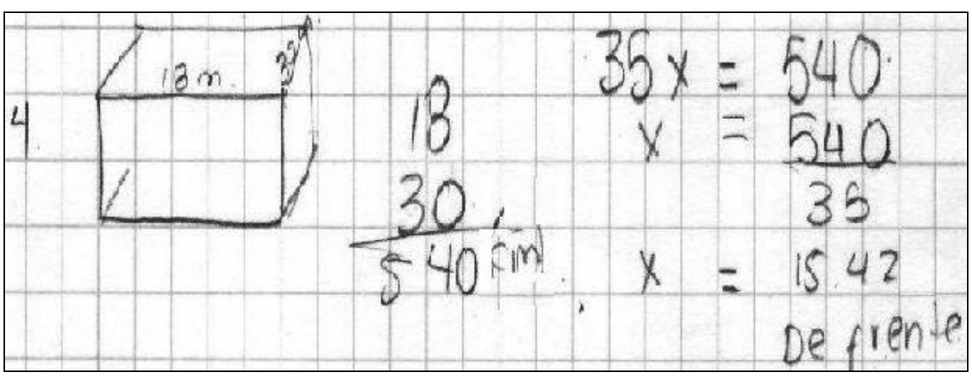


Figura 16. Evidencias del punto IV no existe interpretación.

	LONGITUD EN EL DIBUJO	LONGITUD REAL
ALTO	56.cm	2,3mm
ANCHO	100 cm	4cm.
LARGO	125 cm	5cm
LARGO DEL TECHO	150 cm	6cm.
ALTO DE LA PUERTA	50	2cm.

Figura 17. Evidencia del punto II sobre inconsistencia de información.

No se tiene algún registro donde se muestre la solución correcta de los últimos enunciados dados en la prueba, es de especial interés observar que la última pregunta involucra elementos geométricos con los que el estudiante se ha familiarizado en el curso, pero no son utilizados para tratar de esbozar un planteamiento de solución a esta.

6.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Al hacer una lectura más detallada de cada uno de los registros de esta prueba se pueden inferir las siguientes apreciaciones, teniendo en cuenta las categorías de análisis establecidas.

6.3.1. El reconocimiento y la reproducción de figuras por parte de los estudiantes no reviste dificultad, la cuadrícula se convierte en un instrumento de apoyo que les ofrece realizar de manera más sencilla el ejercicio, en algunos casos la supresión de filas o columnas permitió, además de la reproducción del gráfico, concluir que estaban duplicando o reduciendo a la mitad el tamaño de la figura. En cuanto a la reproducción de figuras el estudiante se preocupa más por hacer un buen dibujo que por sacar observaciones que le ayuden a descubrir algunos elementos teóricos de el tema que se trata de presentar.

6.3.2. Es notoria la dificultad que tienen los estudiantes para hacer la descripción de su trabajo, los problemas de redacción que se detectaron en la fase de diagnostico parecen no haber sido superados aún; utilizan inadecuadamente el lenguaje, no dan a entender fácilmente sus observaciones y generalmente desfiguran sus enunciados pues expresan una idea diferente a lo que realmente quieren decir. Se observa que tratan de contestar más por cumplir con la actividad que por sacar beneficio propio de ella. No muestran más ejemplos que los que se popularizan en los comentarios escuchados durante la aplicación de la prueba.

6.3.3. En lo que respecta a la parte operativa de esta prueba se puede inferir que se les facilita encontrar las operaciones adecuadas para resolver las inquietudes que se les plantea, no obstante, no se toman el trabajo de presentar un análisis del ejercicio y contextualizar el resultado de las operaciones ante la situación que están resolviendo. Se esperaba que en esta prueba utilizaran los elementos teóricos vistos, no solo en el curso, sino en las demás asignaturas que están cursando durante el semestre (dibujo técnico, matemáticas, entre otras). En algunos registros se presentan respuestas pero sin ningún tipo de análisis, pocos registros dan muestra de interpretación de variaciones directas e inversas, no obstante deducen resultados correctos de las preguntas. Curiosamente no existen registros de una solución para el último punto de la prueba, en la cual se involucran elementos teóricos del curso y que a esta instancia del mismo y por el trabajo que se ha venido implementando no existen obstáculos que les impida dar un resultado o al menos esbozar un camino para la solución.

7. SEGUNDA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

PRUEBA DE NIVEL UNO

7.1. FASES DE APRENDIZAJE

Con esta nueva actividad de aprendizaje se tiene por objeto que el estudiante a través de la experimentación sea capaz de hacer aplicación de las propiedades de semejanza y homotecia en la solución de cada una de las preguntas que en ella se plantea. Según el análisis de la prueba de nivel cero se observa que los estudiantes reconocen las figuras y son capaces de describirlas por su aspecto físico pero no son capaces de describir explícitamente las propiedades y componentes de la transformación que se involucran en el proceso de ampliación y reducción de una figura. A continuación se describen las fases de aprendizaje previas a la aplicación de la prueba de nivel uno:

7.1.1. Información. Haciendo uso de algunas observaciones dadas por los estudiantes en el desarrollo de la prueba anterior se hace la presentación de las definiciones y algunos resultados relacionados con semejanzas y homotecia. Se le brinda especial importancia a las propiedades y aplicaciones de las razones y proporciones. Dados estos elementos teóricos se pretende que los estudiantes justifiquen algunas construcciones geométricas.

7.1.2. Orientación dirigida. En esta parte se avanza en la presentación de los resultados más relevantes para el tema de semejanza en el plano, se hace hincapié en el teorema de Thales, dada su importancia para desarrollar todos los casos de semejanza triangular. Se muestra la congruencia como un caso especial de semejanza.

7.1.3. Explicitación. En esta fase de aprendizaje, es notoria la preocupación de parte de los estudiantes más por dar respuesta a los cuestionamientos que el orientador hace que por comprender el tema, pues entre los estudiantes no se generan discusiones que permitan vislumbrar argumentos claros en la presentación de sus respuestas. No existen registros sobre cuestionamientos contradictorios por parte de los estudiantes que puedan contribuir con el aprendizaje entre ellos.

7.1.4. Orientación libre. De nuevo enfrentamos al estudiante con situaciones problema que requieren para su solución la comprensión de los resultados que se les ha presentado previamente. Se espera que los diferentes desarrollos elaborados en el grupo contengan una buena argumentación sustentada en los resultados que se les ha presentado.

7.1.5. Integración. En esta fase de aprendizaje se tiene dificultad para alcanzar los objetivos que ella establece, pues no existe por parte de los estudiantes interés por el tema ni por compartir las conclusiones de su trabajo, esto obliga a cambiar la estrategia para poder obtener registros que den cuenta del avance en el desarrollo del pensamiento geométrico.

7.2. RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PRUEBA DE NIVEL UNO

A continuación se muestran algunos registros obtenidos sobre los cuales se hace un análisis de acuerdo a las categorías establecidas para esta prueba.

7.2.1. Reproducción de figuras y manejo de construcciones en el plano. Algunos estudiantes desarrollaron los ejercicios teniendo en cuenta, por separado, los principales elementos de la homotecia (centro y la constante), sin embargo existen registros donde los estudiantes no se han apropiado del tema e insisten en la reproducción de la figura a través de la simetría axial, es decir, aun no diferencian el movimiento en el plano de esta transformación; no se apropian de los términos semejanza y congruencia a pesar que se les ha insistido en la congruencia como caso especial de la semejanza; adicionalmente se muestran registros donde la reproducción de la figura no muestra ningún tipo de construcción geométrica. (Ver anexo D. Actividad 3).

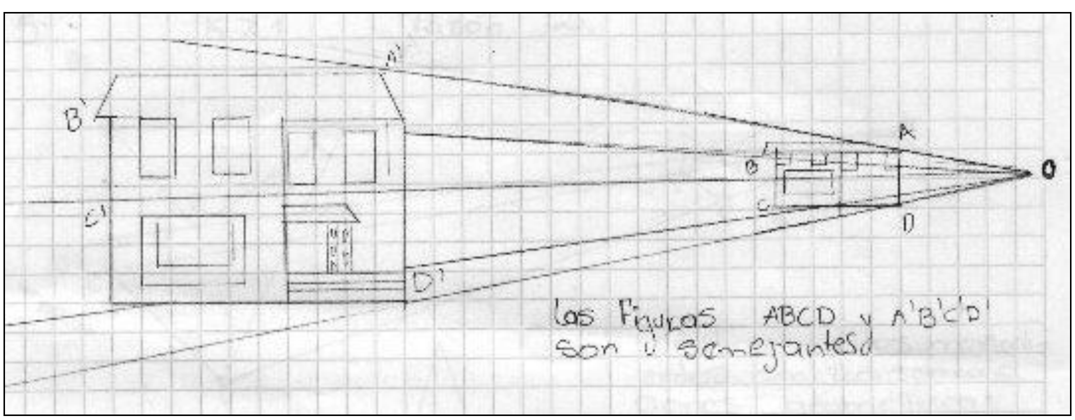


Figura 18. Evidencia de una homotecia donde establece el centro, pero no determina la constante.

Figura 19. Homotecia que establece la constante, pero no el centro.

Figura 20. Reproducción de la figura a través de simetría axial.

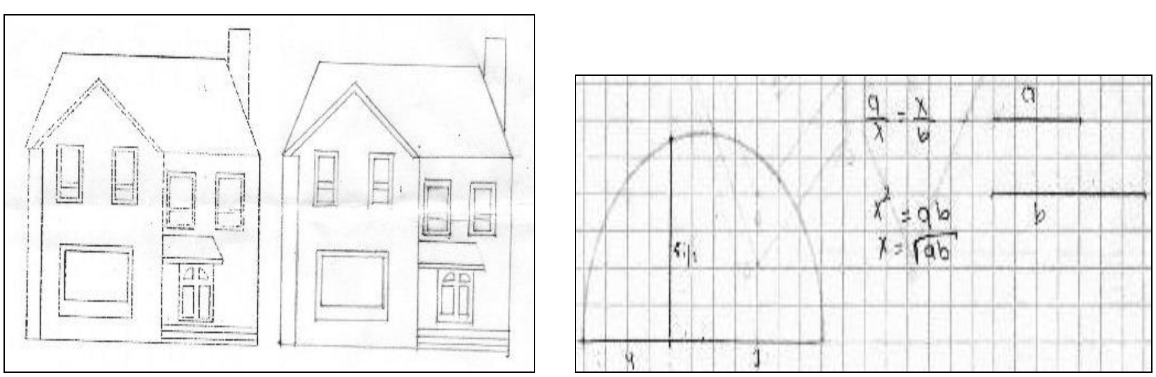


Figura 21. Reproducción de la figura sin ningún tipo de argumentación.

7.2.2. Empleo de las propiedades de la semejanza. En estos registros se observan la identificación y el empleo, por parte de los estudiantes, de las propiedades de proporcionalidad, de semejanza y del teorema de Thales en la solución de las construcciones que la prueba plantea. (Ver anexo D. Actividad 3).

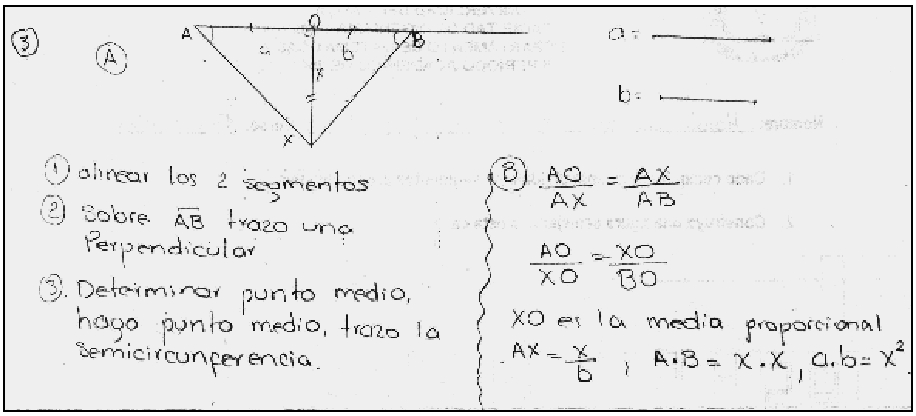


Figura 22. Evidencia sobre el uso de propiedades de la proporcionalidad.

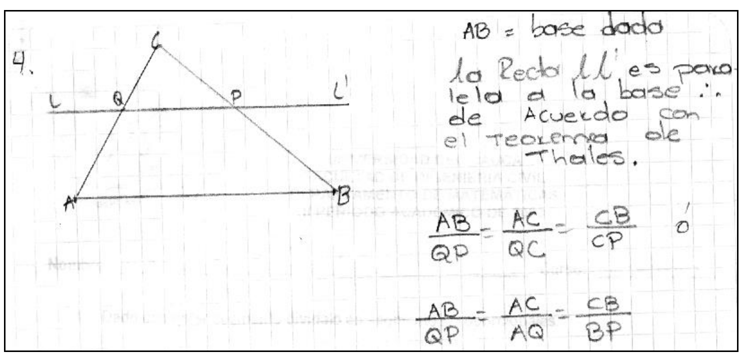


Figura 23. Evidencia sobre el uso del teorema de Thales.

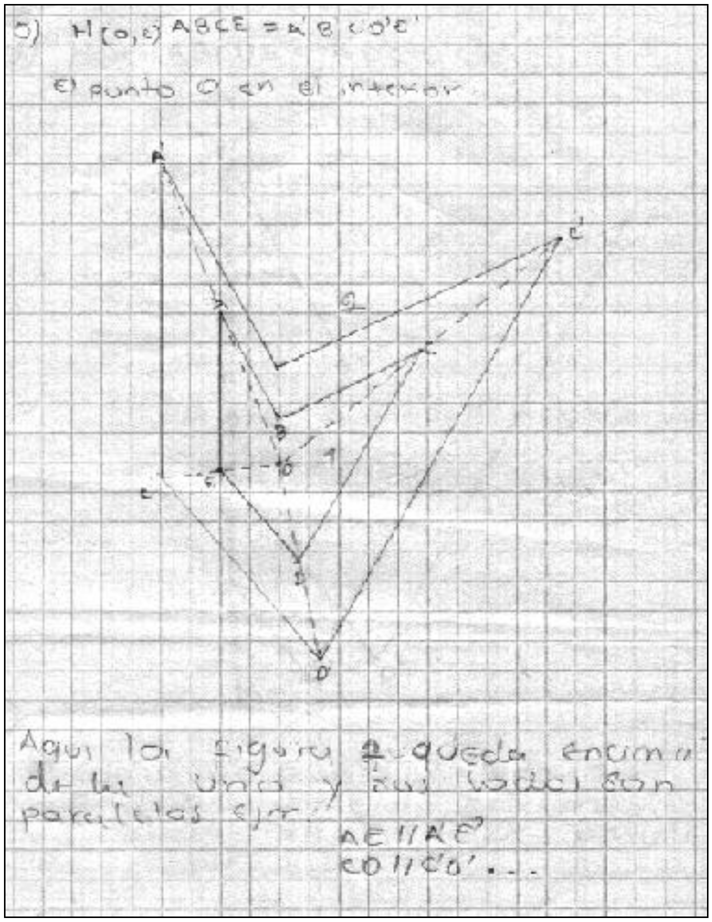


Figura 24. Identificación de propiedades.

7.2.3. Descripción de los objetos. (Ver anexo D. Actividad 3). En los siguientes registros se muestra una descripción más coherente, a diferencia de lo que se presentó en la prueba de nivel cero, de los procesos empleados en el desarrollo de algunas preguntas que plantea la prueba, se evidencia una mejor utilización del lenguaje natural y de la notación matemática, pese a que el desarrollo del ejercicio es deficiente.

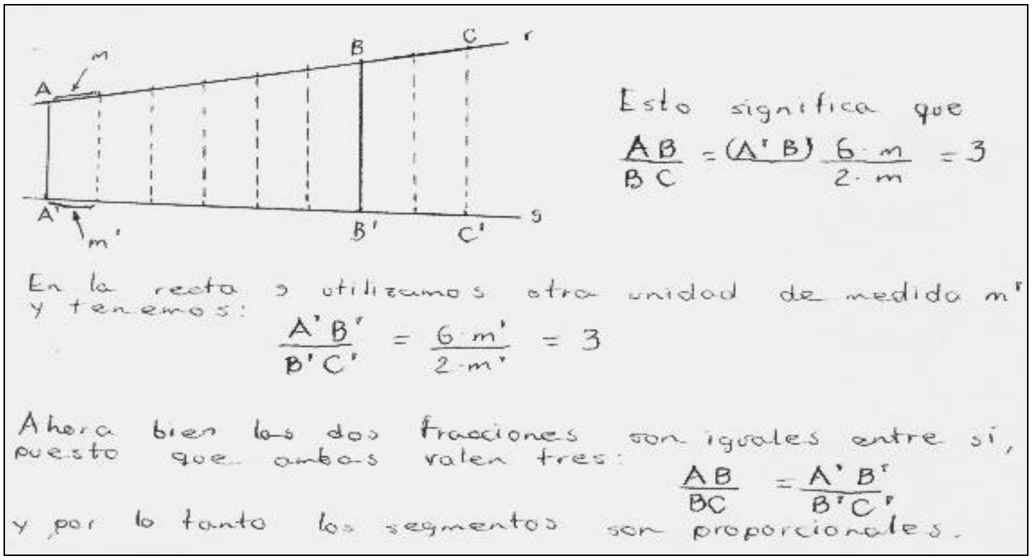


Figura 25. Evidencia de la utilización del lenguaje.

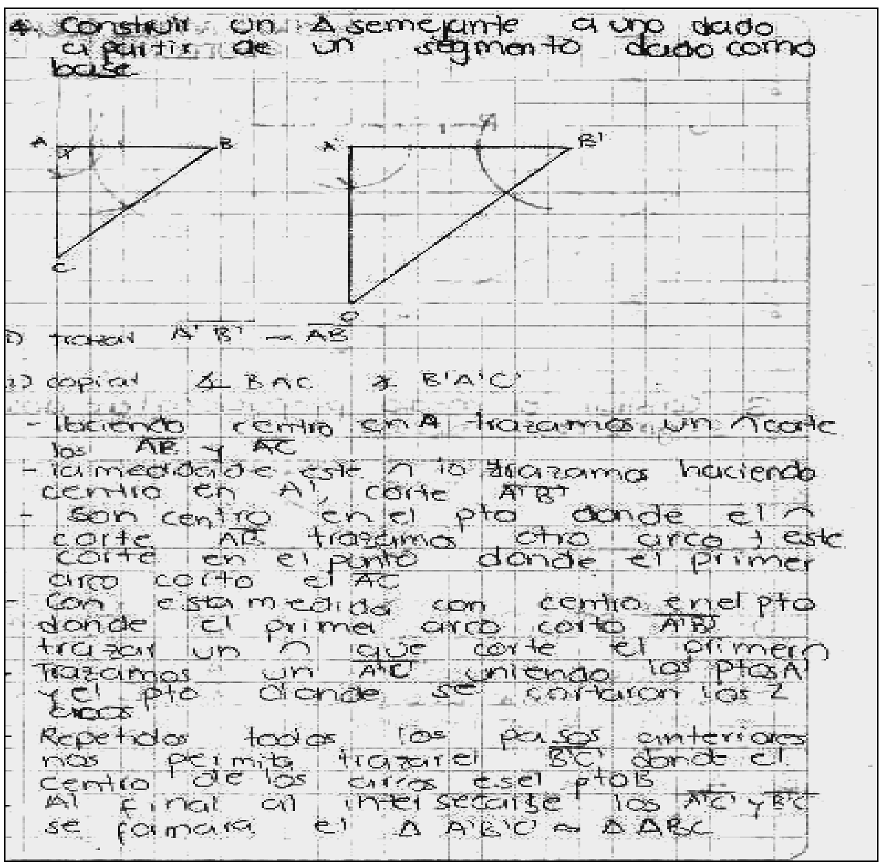


Figura 26. Evidencia sobre la descripción de procesos.

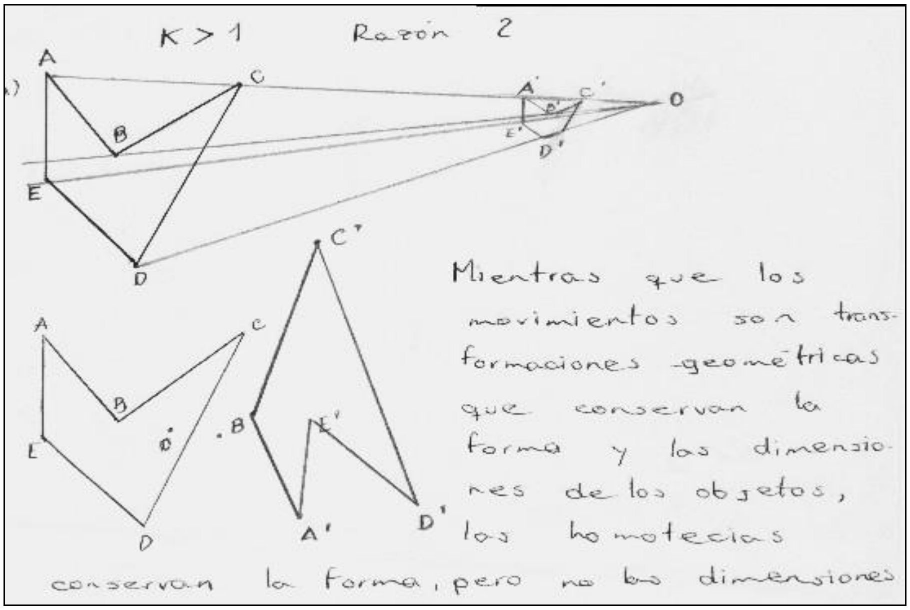


Figura 27. Evidencia sobre descripción de objetos.

7.2.4. Argumentación Los registros que se muestran a continuación dan evidencias de niveles de argumentación, apoyados en los temas dados a conocer en el curso, aunque no es un nivel ideal, son pocos los estudiantes que se han percatado de la necesidad de dar explicaciones coherentes de cada uno de los pasos que presentan en el desarrollo de cualquier ejercicio, tratan de hacer buen uso del lenguaje y de la notación matemática.

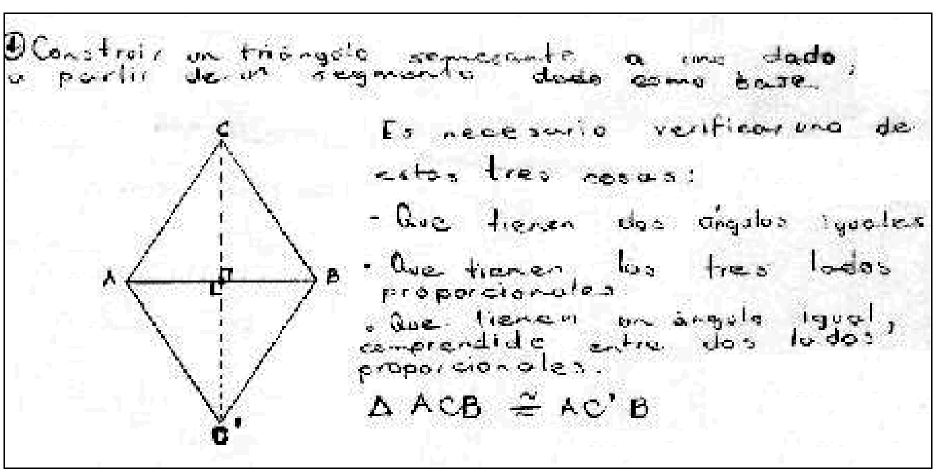


Figura. 28. Evidencias sobre argumentación

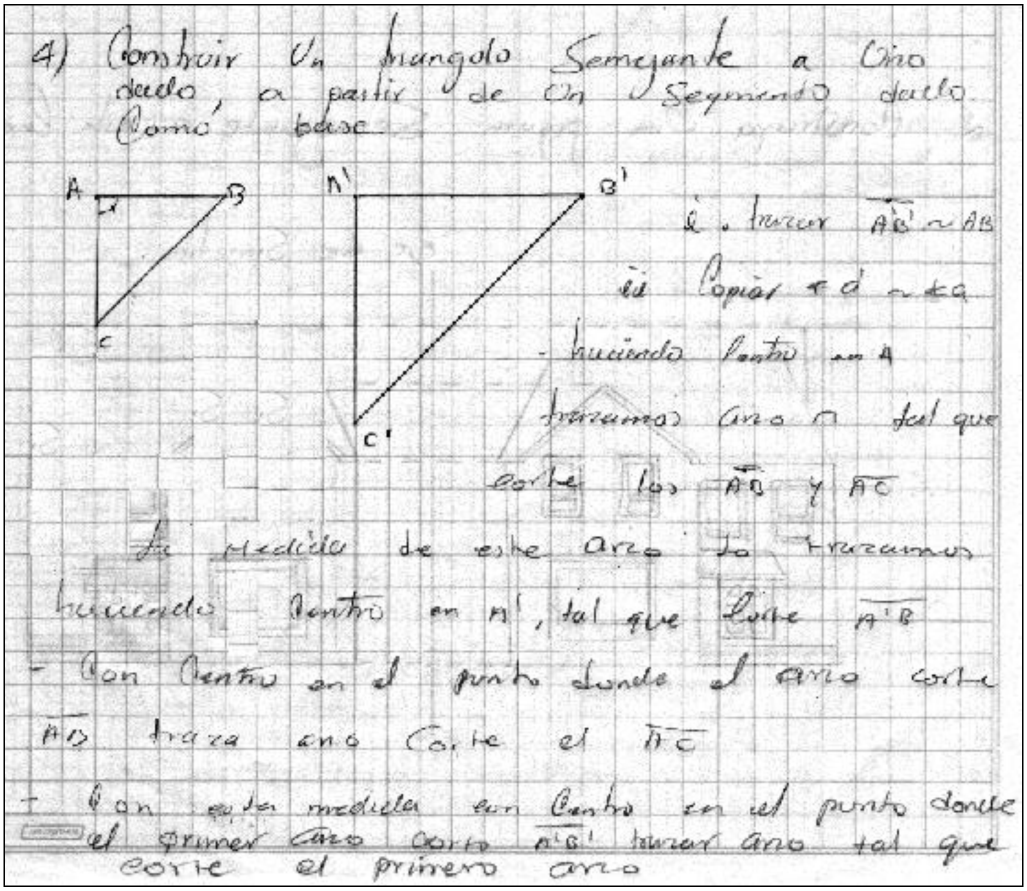


Figura 29. Evidencias sobre argumentación punto IV.

7.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se han mostrado registros para cada una de las categorías de análisis establecidas, se dará a continuación un análisis más detallado de cada uno de ellos en su respectiva categoría.

7.3.1. Reproducción de figuras y manejo de construcciones en el Plano. Todos los estudiantes desarrollaron los puntos concernientes a las construcciones que pedía la prueba, sin embargo no todos los registros dan cuenta de los elementos teóricos utilizados en cada construcción, la mayoría de los registros son construcciones “mudas”, es decir no dan cuenta de lo que hicieron para obtener los resultados. En cuanto al punto especifico de homotecia, se puede concluir que aunque conocen los elementos que intervienen en una transformación de este tipo, no son capaces de relacionarlos; en unos casos resaltan el centro, pero no mencionan la constante o lo contrario, resaltan la constante y se olvidan del centro.

7.3.2. Empleo de las propiedades de la semejanza. Los resultados de la prueba en esta parte dan cuenta que la mayor parte de los estudiantes hace buen uso de las propiedades de la semejanza, el empleo de las proporciones en la solución de los ejercicios también se les facilita. Se espera que estos elementos teóricos no se les olviden pues son importantes en el avance de este tema; el describir las propiedades básicas de la semejanza para obtener construcciones, es un aporte que evidencia un nivel de aprendizaje mayor.

7.3.3. Descripción de los objetos. Son pocos los registros que dan cuenta detallada de cada una de las construcciones, esto llama la atención pues en el momento de aplicación de la prueba los estudiantes ya cuentan con elementos teóricos que les permite describir cada uno de los pasos empleados en el desarrollo de cada construcción, esto da una explicación de lo sucedido en la quinta fase de aprendizaje. Algunas características a resaltar en esta categoría son un mejor uso del lenguaje natural y de la notación, aunque persiste el uso inadecuado de términos (p. ej. igualdad como sinónimo de congruencia). Otra causa de la poca descripción de los objetos obedece a la mecánica de implementación de la prueba, puesto que a diferencia de la aplicación de las anteriores, esta fue entregada a los estudiantes para que la desarrollaran como trabajo extraclase y fue difícil recuperar información; se condicionó su entrega a reconocimiento de nota, generando entrega masiva y como era de esperarse registros repetidos.

7.3.4. Argumentación. Son pocos los registros que dan cuenta de argumentación, pues como se ha comentado en las anteriores categorías la mayoría de los desarrollos no están acompañados de descripciones que den cuenta de cada desarrollo presentado; pero a pesar de esto, y aunque los registros no den cuenta de ello, los estudiantes han tomado conciencia de que son capaces de argumentar apoyados en lo desarrollado en clase o en las notas de estudio y que deben dejar el temor de cometer errores, pues este es el principal obstáculo para lanzarse a estructurar una argumentación.

Otra causa de estos escasos niveles de argumentación reside en la dificultad que los estudiantes tienen para expresar sus ideas, esto se ha evidenciado en la prueba diagnóstica y en la de nivel cero.

8. TERCERA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

PRUEBA DE NIVEL DOS

8.1. FASES DE APRENDIZAJE

8.1.1. Información. Finalizada la presentación teórica ante el grupo, se les concede un periodo de tiempo para que retomen los contenidos preparados en esta parte, no sin antes hacerles un compendio del tema, resaltando las aplicaciones más importantes e insistiendo en el desarrollo del taller propuesto en las notas de clase. Los estudiantes disponen de suficiente material para complementar y avanzar en la comprensión del contenido.

8.1.2. Orientación dirigida. Para esta fase de aprendizaje se le presentó a cada estudiante una evaluación diseñada con el objeto de tomar registros que permitan observar los avances de ellos frente al tema de estudio que se ha desarrollado. Para esta evaluación se diseñaron preguntas de tipo proposicional en las cuales los estudiantes debían determinar el valor de verdad y justificarlo. Como todo cuestionario de evaluación genera preguntas de variados tipos, algunas de las cuales no es oportuno responder dado el objetivo de la actividad, solo se les ofrece respuesta que aclaren dudas sobre la notación o sobre los gráficos que se muestran. Para alcanzar la propuesta se hacen circular en el grupo tres pruebas con la misma estructura pero con diferentes preguntas.

8.1.3. Explicitación. Durante el desarrollo del examen, se presentaron varios momentos que son interesantes resaltar. Al inicio de la actividad los estudiantes, como es natural, sienten temor ante la prueba escrita, su inseguridad los enfrenta inicialmente a buscar un sitio estratégico de ubicación, posteriormente identifican algún compañero que tenga el mismo cuestionario; al parecer esto les brinda seguridad y finalmente inician su trabajo. Cada estudiante intenta resolver la prueba, las preguntas de carácter proposicional los condujo a construir argumentos y las de desarrollo a aplicar la teoría. De las inquietudes que se presentaron sólo se resolvieron las que eran pertinentes.

8.1.4. Orientación libre. Se observa en el desarrollo de la prueba la dificultad de los estudiantes para resolver las preguntas, la comprensión de lectura y su dificultad para escribir fueron obstáculos que se evidenciaron; aunque conocen los criterios de semejanza aún no se han apropiado de ellos pues frente a un ejercicio no son hábiles en identificar cual es el más apropiado de aplicar; se ofrece a los estudiantes, cuando es debido, algunas ideas que les permita avanzar en el desarrollo de la actividad.

8.1.5. Integración. Una vez finalizada esta actividad de aprendizaje, los estudiantes comentan entre si sus respuestas, en especial los que sienten seguridad de estas; cuando encuentran diferencias entre sus respuestas, acuden a los orientadores para esclarecer la situación. Aquellos que complementaron su estudio con las notas de clase se percataron que algunos puntos estaban enunciados como ejercicios en el taller de notas. Los estudiantes que no tenían argumentos suficientes para esta prueba, desistieron de la actividad antes de lo previsto.

8.2. RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PRUEBA DE NIVEL DOS

A continuación se muestran los registros obtenidos para los cuales se hace un análisis de acuerdo a las categorías establecidas para esta prueba.

8.2.1. Relaciones entre las figuras. La actividad de aprendizaje plantea preguntas para las cuales el estudiante debe establecer relaciones de congruencia y de semejanza. Es de interés observar cómo el estudiante es capaz de diferenciar estas relaciones entre las figuras o en las preguntas que exhibe la prueba. Al analizar cada registro se observan varias situaciones; en algunos casos identifican la relación correcta, pero los argumentos son deficientes, o sus argumentos son válidos y se equivocan en la relación o en el valor de verdad; en otras situaciones los estudiantes utilizan algún gráfico para su respuesta, pero no argumentan (Ver anexos E, F, G. Actividad 4).

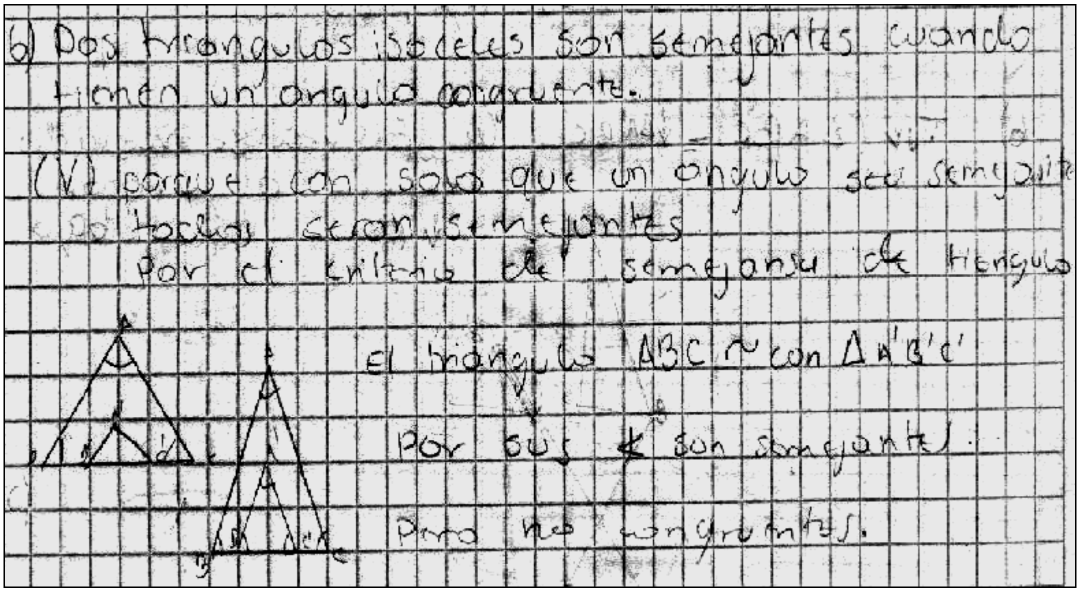


Figura 30. Evidencia de identificación de la relación pero inadecuada argumentación.

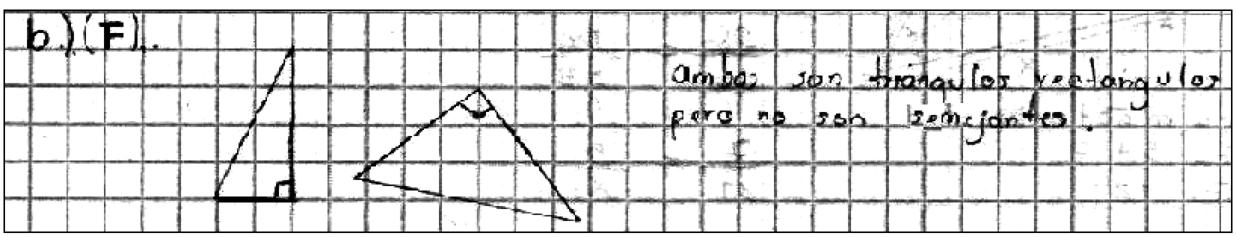


Figura 31. Evidencias de la relación entre figuras de semejanza triangular, argumentación a través de un gráfico.

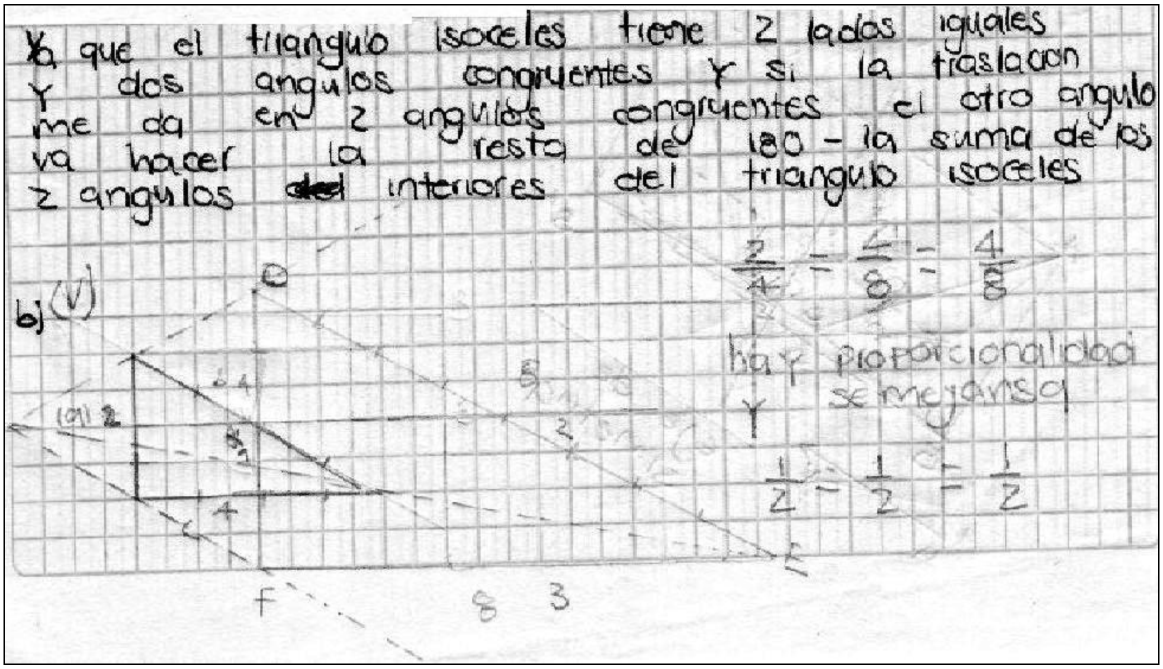
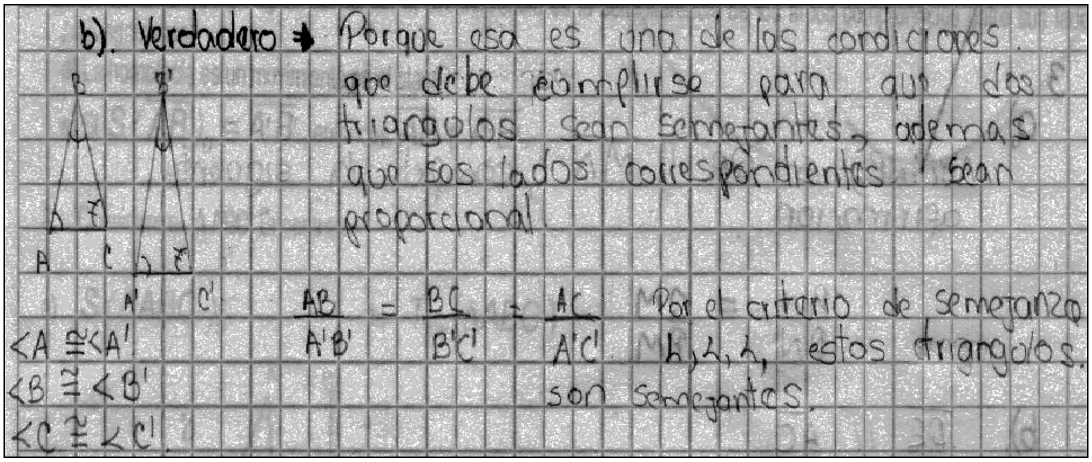


Figura 32. Evidencias del punto I para identificar triángulos semejantes, con buena argumentación.

8.2.2. Argumentación. Aunque en la anterior categoría se aduce a la argumentación, los registros que se presentan en esta parte están relacionados con las preguntas de tipo proposicional que plantea la prueba, pues en cada una de estas los estudiantes deben argumentar, no es suficiente establecer el valor de verdad. Se muestran evidencias de argumentos válidos, argumentos incompletos, argumentación inadecuada y ningún tipo de argumentación. (Ver Anexos E, F, G. Actividad 4).

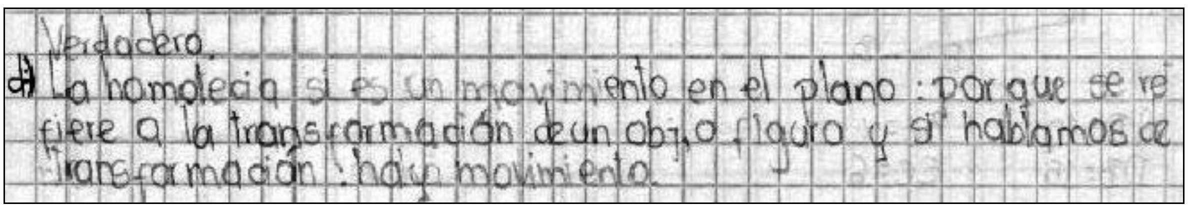


b). Verdadero → Porque esa es una de las condiciones que debe cumplirse para que dos triangulos sean semejantes, ademas que sus lados correspondientes sean proporcional

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ Por el criterio de semejanza ∠,∠,∠, estos triangulos son semejantes.

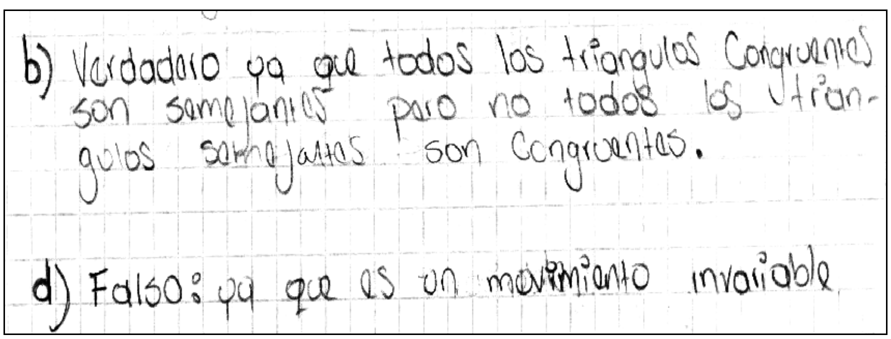
$\angle A \cong \angle A'$
$\angle B \cong \angle B'$
$\angle C \cong \angle C'$

Figura 33. Evidencia de una buena argumentación.



Verdadero.
d) La homotecia si es un movimiento en el plano: porque se refiere a la transformación de un objeto figura y si hablamos de transformación: hay movimiento

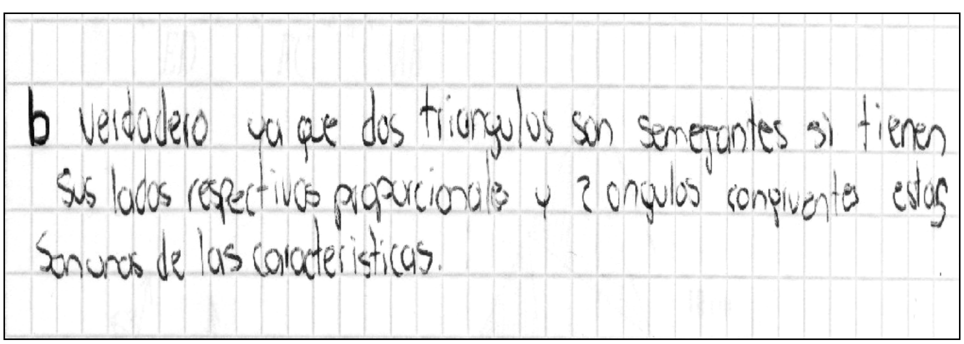
Figura 34. Evidencias sobre una inadecuada argumentación.



b) Verdadero ya que todos los triangulos congruentes son semejantes pero no todos los triangulos semejantes son congruentes.

d) Falso: ya que es un movimiento invariable

Figura 35. Registros de argumentos válidos e insuficientes.



b verdadero ya que dos triangulos son semejantes si tienen sus lados respectivos proporcionales y 2 angulos congruentes estas son unas de las caracteristicas.

Figura 36. Evidencias de una adecuada argumentación.

8.2.3. Razonamiento lógico. Los desarrollos de esta categoría, son escasos pero algunos evidencian una estructura operativa muy coherente que muestran el trabajo de parte de los estudiantes, para presentar respuestas argumentadas, apoyados en elementos tanto geométricos como algebraicos. Esta situación no es nueva para los estudiantes, pues en anteriores actividades de aprendizaje se les han presentado este tipo de preguntas; adicionalmente en el curso de matemáticas, desarrollado en el mismo semestre, se ha trabajado preguntas de este tipo.

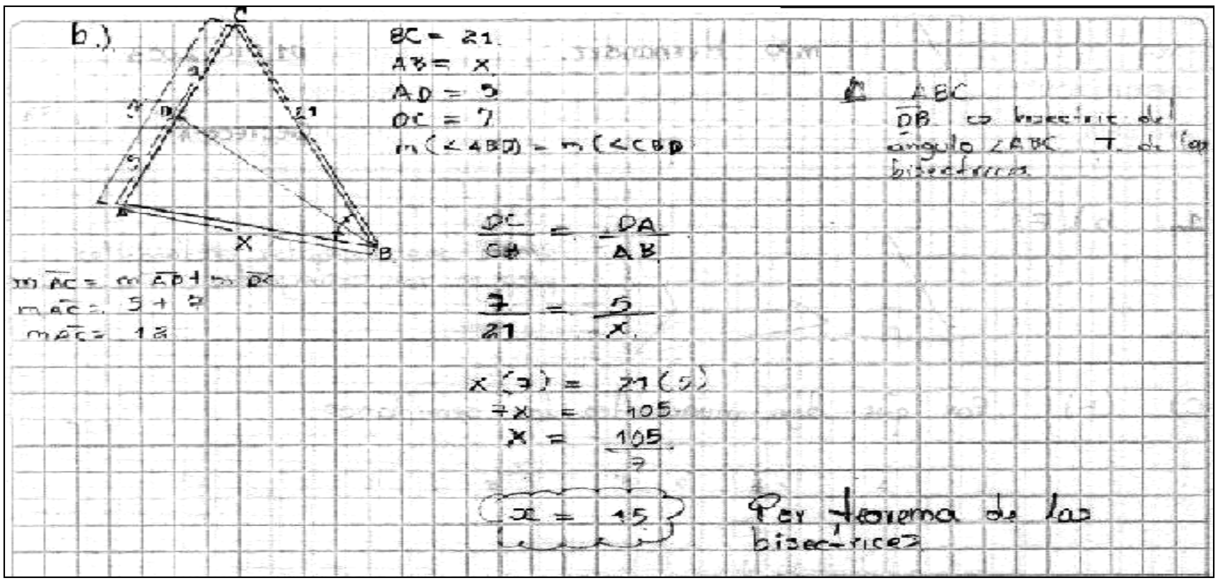


Figura 37. Evidencias de razonamiento lógico.

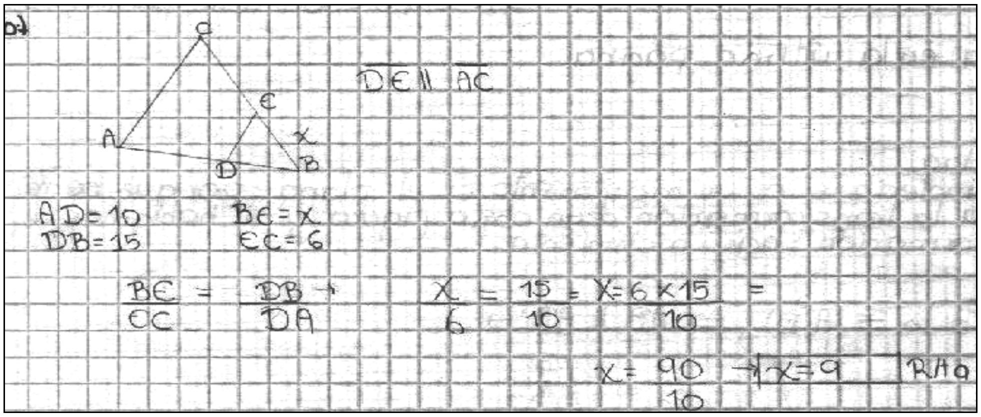


Figura 38. Evidencia en la organización de ideas para solución de un ejercicio operativo.

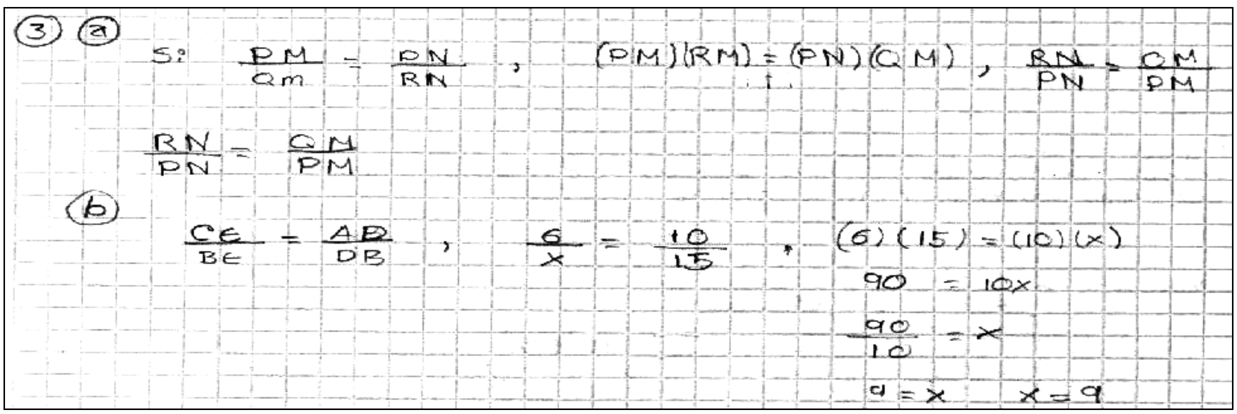


Figura 39. Evidencia de una secuencia operativa para solución de una pregunta.

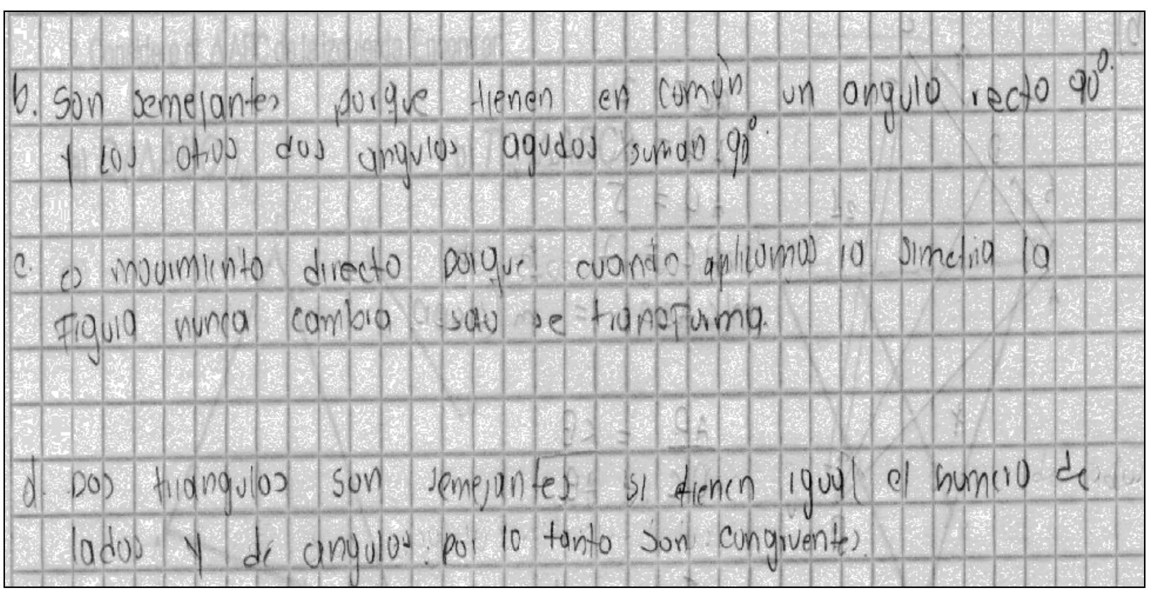


Figura 40. Análisis de las propiedades de la semejanza triangular, punto I formato 1.

8.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación se analiza en mayor detalle los registros considerados para esta prueba, para esto se tienen en cuenta las categorías de análisis establecidas para la prueba de nivel 2.

8.3.1. En la categoría de relaciones entre figuras hay que resaltar dos situaciones: en la primera es claro que la mayoría de los estudiantes son capaces de diferenciar entre la relación de semejanza y congruencia, pero aún les cuesta diferenciar entre movimiento y transformación, es decir que para ellos toda transformación en el plano es un movimiento, olvidando que los movimientos en el plano son un caso especial de transformaciones en éste. En segundo lugar no son contundentes en el momento de fundamentar el tipo de relación, es decir son capaces de identificar pero se quedan cortos en la explicación que debe acompañar este tipo de afirmaciones. Existen preguntas donde el estudiante no se da la oportunidad de apoyarse en un gráfico para tratar de interpretar el cuestionamiento que se les plantea, esto les dificulta la modelación de la misma.

8.3.2. En lo referente a la argumentación, definitivamente uno de los mayores obstáculos que refleja la prueba es la insuficiente capacidad lectora y escritora de los estudiantes, en los registros podemos observar que mencionan elementos geométricos que de cierta manera dan muestras de argumentación, pero la inadecuada redacción los conduce a la presentación de ideas confusas y argumentos poco contundentes. Los registros ilustran relaciones geométricas que el estudiante identifica fácilmente, pero que no es capaz de justificar con la teoría que ha estudiado. No obstante existen registros que muestran una buena argumentación, aunque son escasos.

8.3.3. En general el grupo es deficiente en el desarrollo lógico, están muy lejos de enfrentar demostraciones, pues tienen dificultad para conectar argumentos, relacionar los conocimientos adquiridos, no solo en el curso de geometría. Los estudiantes son dados a dar respuestas sin algún tipo de soporte teórico y/o procedimental. Aun no han comprendido la dimensión de los teoremas y cómo estos le sirven de medio para justificar sus desarrollos. Utilizan sus resultados, pero no se percatan si las condiciones de aplicabilidad se dan dentro de una situación en particular. En el desarrollo lógico se podía haber avanzado más, pero la falta de compromiso del estudiante frente a cada actividad de aprendizaje, junto con las otras falencias antes mencionadas, fueron obstáculos para el proceso.

9. CONSIDERACIONES

Obstáculos a lo largo del proceso.

1. Desde la metodología de este trabajo se enuncia que la falta de un espacio adecuado para la enseñanza de la Geometría a través del software Cabri Géomètre constituyó un fuerte obstáculo para alcanzar a plenitud dos de los objetivos propuestos en el plan de la trabajo; no obstante las asesorías brindadas con el uso de la calculadora, subsanan en parte esta dificultad.
2. El tiempo de implementación de esta metodología de trabajo, en la parte de Homotecia y Semejanza en el Plano, fue escaso a diferencia de los temas anteriores y en contra de una de las propiedades del modelo como lo es la Continuidad.
3. La asistencia esporádica a clases por parte de los estudiantes de Geotecnología, impactó negativamente en la implementación de la propuesta de Trabajo. La secuencialidad es una propiedad del proceso, según el modelo Van Hiele, que pueden haber logrado ante el desarrollo de las pruebas de nivel uno y dos.
4. No fue posible construir modelos de actividades de aprendizaje bajo la perspectiva de este marco teórico que ilustrara pautas de trabajo en el aula.

Posibles errores que se cometieron durante el proceso.

1. La ausencia de preguntas sobre el tema en la formulación de la prueba diagnóstica, no nos permitió recoger mayor evidencia y así lograr que los estudiantes obtuvieran una mejor preparación del tema de Homotecia y Semejanza.
2. En discusiones del grupo de trabajo del seminario, algunas preguntas pudieron haber sido formuladas fuera de los límites que establece el modelo Van Hiele. Siempre se tuvo en cuenta la interpretación más adecuada de cada nivel en cuanto a cada fase y categoría, basándose en los registros dejados por los estudiantes.
3. Dentro de los productos elaborados en este seminario, las notas de clase demandó más tiempo del que inicialmente se había contemplado, restando espacio para elaborar más actividades de aprendizaje.

Grado de satisfacción de los estudiantes al finalizar este proceso.

1. Ante la realización de actividades de aprendizaje para estudiar el tema de la Semejanza, los estudiantes que aprobaron el curso, se sintieron satisfechos por las actividades implementadas. Ellos, veían que las pruebas eran un modelo básico para incrementar su razonamiento geométrico, pues el rigor que estas poseían nivel a nivel, les ayudaba a mejorar la argumentación que algunas pruebas requerían para solucionarse.

2. En contratiempo a este hecho, vieron que la incorporación de software educativo en algunas de las clases era un avance importante para su aprendizaje. No obstante, al informarles cómo era posible adquirir este paquete computacional para el uso

personal y con licencia libre, nunca fue solicitado a los integrantes de este seminario. Desconocemos las razones de este hecho.

3. Los estudiantes que tuvieron la mayor dificultad a lo largo del curso, por su frecuente inasistencia a las clases y por el poco interés prestado a la realización de los talleres para el desarrollo del tema de la Homotecia y Semejanza.

10. CONCLUSIONES

1. La evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes del programa de Geotecnología fue lento e inferior a lo esperado, esto es posible explicarse a partir de las propiedades del modelo de van Hiele, en especial de la Localidad, Continuidad y la Especificidad del lenguaje. Otros atenuantes de esta situación es la falta de interés de los estudiantes `por la materia y sus falencias en la lectura y la escritura.

2. El nivel de razonamiento alcanzado por la mayoría de los estudiantes, después de la aplicación de las diferentes actividades de aprendizaje, se suscribe al de Análisis (Nivel 1). Es posible que el tiempo limitado para la implementación de esta propuesta de trabajo sea una causa de este resultado; no obstante las actividades de aprendizaje deben evaluarse, para mirar sus aciertos y desaciertos dentro del proceso.

3. Los estudiantes no lograron integrarse al diseño planteado; las actividades desarrolladas no generaron las expectativas previstas en el diseño, de ahí la importancia de evaluarlas.

4. Por las condiciones logísticas, fueron pocos los estudiantes que se apoyaron en el software Cabri Géomètre; quienes utilizaron esta herramienta computacional además del impacto positivo generado lograron avanzar en el proceso.

5. Al finalizar este proceso, los estudiantes con buen desempeño académico en otras áreas, los que conformaron grupo de estudio o los que aprovecharon su espacio de asesoría sobresalieron en desarrollo del pensamiento geométrico.

6. El trabajo en equipo, el diseño, presentación y evaluación de todo el proceso, la dinámica de seminario, entre otras, son experiencias que contribuyen notablemente en la formación profesional.

.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

📖 [AC94] AZCÁRATE, P. y CARDEÑOSO, J. M. La naturaleza de la Matemática Escolar: problema fundamental de la didáctica de la matemática. Revista Investigación en la escuela No 24. 1994.

📖 [B89] BONILLA, E. La educación Matemática: Una reflexión sobre su Naturaleza y sobre su metodología. Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN. Documento tomado de la revista"Educación Matemática", Vol. 1, No 2. 1989.

📖 [B86] BRUSSEAU, G. Fundamentos y Métodos de las Didácticas de las Matemáticas. Revista Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 7 No 2. 1986.

📖 [C02] CASTIBLANCO, A. Documento del Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. presentado como ponencia. en Chile. 2002.

📖 [D97] DÍAZ, Tomás. Fundamentos de geometría Euclidiana, (Notas de clase), Universidad del Cauca, 1997.

📖 [F99] FREGONA, D. La didáctica de las Matemáticas y la Formación de Profesores de Matemática Artículos de investigación Revista Educación Matemática Vol. 11 No 2. 1999.

- [J86] JARAMILLO P, Víctor. Elementos de Geometría Plana. Traducción y adaptación del Cours de Géomètre. Universidad EAFIT. Medellín, 1986.
- [L63] LANDAVERDE, F. J. Curso de Geometría, editorial progreso S.A., México, 1963.
- [M99] MEN. Nuevas tecnologías y Currículo de Matemáticas. Serie Lineamientos. Punto Exe Editores. Bogotá, D.C. 1999.
- [M00] MEN. Documento del Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. Fase de Expansión y Profundización. 2000.
- [M98] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas, Lineamientos Curriculares. Creamos Alternativas Soc. Ltda., Santa fe de Bogotá. 1998
- [M02] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Serie Memorias. Primera edición. Bogotá D.C. 2002
- [MD96] MOISE E. y DOWNS Floyd L., Geometría Moderna, Edit. Addison - Wesley publishing company. 1996.
- [P84] POINCARÉ, H. Las definiciones matemáticas y su enseñanza. Filosofía de la Ciencia. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. México. 1984.
- [P61] PUIG, A., Fundamentos de Geometría Métrica, Edit Nuevas gráficas Madrid, 1961
- [R00] Revista de las Ciencias, Año 2000. Pág. 18. Investigación Didáctica.

- [RS03] ROSERO R, Yeny y SILVA S, Alba. Incorporación de Tecnologías computacionales en el currículo de la geometría. VRI 1131. Universidad del Cauca. 2003
- [R88] RUSSELL, B. Introducción a la Filosofía Matemática. Ediciones Paidós Ibérica, S.A. Barcelona. 1988.
- [S93] SANTOS, T. L. M. La naturaleza de las Matemáticas y sus implicaciones Didácticas. Mathesis. Pág. 431-432. 1993
- [V90] VALENCIA, Santiago y LONDOÑO, Rodolfo Notas de geometría Euclidiana,; Universidad de Antioquia. Medellín. 1990.
- [V90] VILLEGAS DE ARIAS, Celia. Notas de geometría plana. Universidad Nacional. Medellín. 1990.
- [Z02] ZAMBRANO, A. Pedagogía, educabilidad y formación de docentes. Colección. Ensayos Pedagogía. Segunda edición. 2002.

ANEXOS

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA EL DESARROLLO DEL TEMA “HOMOTECIA Y SEMEJANZA EN EL PLANO EUCLIDIANO”

Anexo A. Actividad 1. Prueba diagnóstica.

Anexo B. Notas de Clase: Homotecia y Semejanza.

Anexo C. Actividad 2. Prueba de nivel 0.

Anexo D. Actividad 3: Prueba de nivel 1.

Anexo E. Actividad 4. Prueba de nivel 2. Examen final tema A.

Anexo F. Actividad 4. Prueba de nivel 2. Examen final tema B.

Anexo G. Actividad 4. Prueba de nivel 2. Examen final tema C.

ANEXO A. ACTIVIDAD 1. PRUEBA DIAGNÓSTICA.

Universidad del Cauca.
Facultad de Ingeniería Civil.
Curso de Geometría Euclidiana
Prueba diagnóstica. Julio de 2003

Nombre: ______________________________________ Edad: ______ Teléfono: _________

Título obtenido: ______________________ Institución: ______________ Año: _________

Municipio: ______________

<u>Introducción:</u> Los estudiantes de este curso de geometría formarán parte del proyecto "Incorporación de tecnologías computacionales en el currículo de geometría" el cual ha sido formulado por las profesoras Yeny Leonor Rosero y Alba Lorena Silva del departamento de matemáticas de la Universidad del Cauca y quiénes orientarán estos cursos.

La presente prueba ha sido diseñada sobre aspectos generales de geometría, con ellos buscamos hacer un diagnóstico sobre los conocimientos que los estudiantes han alcanzado en su formación básica y media en ésta área. Los resultados serán la pauta para el desarrollo del curso de geometría euclidiana, en este programa.

Por lo anterior es pertinente que la prueba sea respondida de la manera más responsable y honesta posible para así poder establecer condiciones de trabajo efectivas para el desarrollo del curso.

<u>Objetivos</u>:

1. Establecer su nivel de conocimiento alcanzado en el área de geometría en su formación básica y media.
2. Definir criterios para el estudio de la geometría a partir de los resultados obtenidos con esta prueba.

<u>Cuestionario:</u>

- **Dibuje tres triángulos diferentes y establezca la razón o razones de sus diferencias.**

- **Dibuje un par de rectas paralelas y tres rectas perpendiculares entre sí;**

un par de rectas que no sean ni paralelas ni perpendiculares.

- **Según la figura 1, qué relación o relaciones existen, entre:**
  - **a)** $\angle 2$ **y** $\angle 5$
  - **b)** $\angle 6$ **y** $\angle 7$
  - **c)** $\angle 1$ **y** $\angle 2$
  - **d)** $\angle 3$ **y** $\angle 8$
  - **e)** $\angle 1$**,** $\angle 3$ **y** $\angle 7$**.**
  - **f)** Δ **ABG y** Δ **GBC.**
  - **g)** Δ **EFG y** Δ **GAB.**

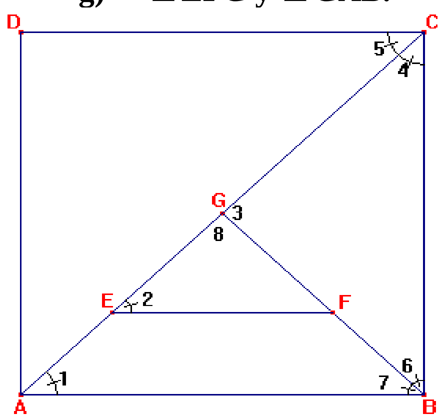


Figura 1.

- **.¿Existe alguna diferencia entre círculo y circunferencia? Justifique su respuesta.**

- **Si el perímetro de un triángulo equilátero es 243 centímetros, ¿Cuál es la longitud de uno de sus lados? ¿Por qué?**

- **Haga una representación de un paralelogramo que tenga dos de sus ángulos rectos.**

ANEXO B. NOTAS DE CLASE HOMOTECIA Y SEMEJANZA.

LECTURA: "ERATÓSTENES: EL PRIMER CIENTÍFICO QUE MIDIÓ LA CIRCUNFERENCIA DE LA TIERRA"

Son increíbles las cosas que se pueden hacer con materiales sencillos y un poco de geometría con aplicación de los criterios de la semejanza triangular. Por ejemplo, una vara. Quizás lo único que se nos ocurre es tirársela a nuestro perro para que nos la traiga. Sin embargo, si sabemos sólo unos cuantos principios geométricos podemos llegar a medir. **EL RADIO DE LA TIERRA.** Aunque suene increíble, es posible medirlo usando el sistema que inventó Eratóstenes hace 2.200 años. Este notable hombre de la Antigüedad nació en Cirene (actual Libia) en el año 276 a.C. Fue, como muchos hombres sabios de su tiempo astrónomo, historiador, geógrafo, filósofo, poeta, crítico teatral y matemático. Sus conocimientos lo llevaron a ocupar un puesto muy importante para los sabios de la Antigüedad: Director de la Biblioteca de Alejandría. Alejandría era la ciudad más importante de su época, famosa por su gran faro (una de las siete maravillas del mundo) y por su enorme biblioteca, la más grande en su época.

Eratóstenes pasaba todo el día estudiando, ya que una de las misiones como director, era justamente leer, clasificar y estudiar todos los libros que allí estaban. De ahí que fuera un hombre notable en tantas disciplinas. Sin embargo, no faltaban los envidiosos que lo llamaban "Beta" (nombre que recibe la segunda letra del alfabeto griego), porque según ellos Eratóstenes era siempre el "segundo" mejor del mundo en todo. No obstante, por lo que sabemos de él, parece que su apodo correcto debió haber sido "Alfa", ya que su inteligencia y avidez por el conocimiento lo convirtieron en un hombre recordado hasta hoy.

Uno de sus descubrimientos más importantes fue el que le permitió medir la circunferencia de la Tierra. Estaba un día Eratóstenes, metido en sus papiros, cuando leyó que en un lugar llamado Syenne, cerca de la primera catarata del Nilo, el día del solsticio de verano (21 de junio en el hemisferio norte) el Sol se reflejaba de manera directa en el fondo de un pozo. Fenómeno que es equivalente a poner una vara de manera vertical en el suelo y que no proyecte ningún tipo de sombra. Esta era una observación que muchos podrían haber ignorado con facilidad, pero no Eratóstenes. Curioso como era, repitió entonces la experiencia el 21 de junio, esta vez en Alejandría. ¡Cuál no sería su sorpresa al comprobar que los resultados eran totalmente diferentes. Para Eratóstenes la única explicación posible para este fenómeno era que la Tierra era una esfera.

El Sol está tan lejos de la Tierra que sus rayos son paralelos cuando llegan a nuestro planeta. Los palos verticales situados en distintos puntos forman ángulos diferentes con respecto al Sol y proyectan, por lo tanto, diferentes longitudes de sombra.

La diferencia entre las sombras de Alejandría y Syenne, puso a trabajar a Eratóstenes, quien llegó a la conclusión que la distancia angular, con respecto a la circunferencia de la Tierra, entre estas dos ciudades era de siete grados. Es decir si trazamos imaginariamente una línea recta desde el punto de medición en cada ciudad hasta el centro de la Tierra, el ángulo que se forma es de siete grados.

Eratóstenes conocía la distancia entre Alejandría y Syenne (el equivalente a 800 kilómetros actuales), así basándose en esto hizo una serie de cálculos y dedujo la circunferencia de la Tierra con gran exactitud.

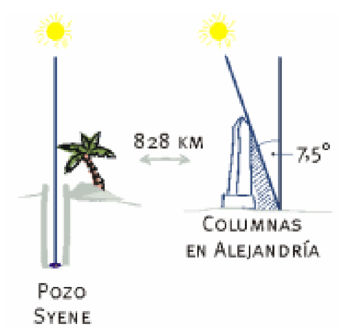
Hoy sabemos que esta medida es de 40.000 Km. Eratóstenes pudo medirla, usando sólo su capacidad de observación, su inteligencia y sobre todo su gusto por la experimentación. Con estos elementos midió por primera vez un planeta, con un margen de error mínimo, lo cual constituye todo un logro.

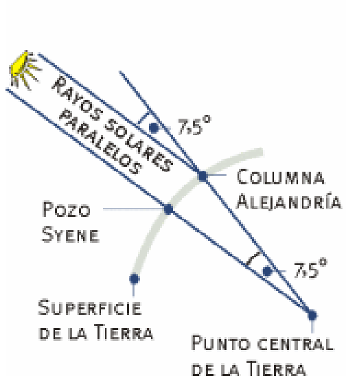
Te invitamos a repetir la experiencia de Eratóstenes. Cierto es que hoy contamos con métodos más sofisticados para hacerlo. Sin embargo, remontarnos al pensamiento de este hombre notable, puede ser una experiencia increíble que te invitamos a compartir

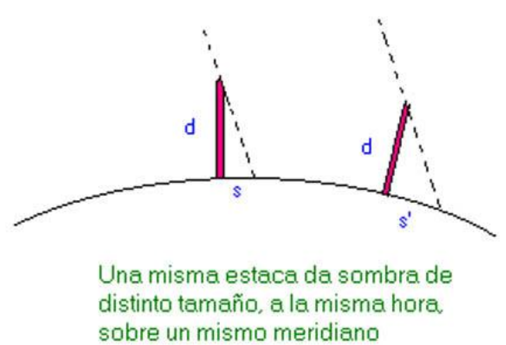
Eratóstenes sabía que en una tarde determinada de junio, el sol se reflejaría en un profundo pozo, en Syenne cerca de la actual ciudad de Assuan, en el norte de Egipto. Syenne está situada más o menos en el Trópico de Cáncer, es decir ahí donde el sol en un día de junio está directamente en el cenit y no hecha ninguna sombra más. Entonces, el reflejo resulta cuando el sol se encuentra exactamente perpendicular al horizonte, de manera que la línea de conexión del sol al centro de la Tierra transcurre a través del pozo.

Eratóstenes midió la sombra de una columna de 828 kilómetros ubicada más al norte de Alejandría, pues a la tarde del mismo día mostró una desviación del sol de la línea perpendicular de 7,5° hacia el sur. Ambas líneas de conexión al centro de la Tierra, -las del pozo y las de la columna-abarcan igualmente en el centro de la Tierra un ángulo de 7,5°. Ahora están contenidas 48 veces 7,5° en 360° de un circulo entero. Por consiguiente asciende la circunferencia de la Tierra 48 veces 828 kilómetros, es decir 39.744 kilómetros. ¡Eratóstenes no pudo comprobar su resultado hace 2250 años antes, pero su cálculo se basa tan sólo 330 Km. o 0,8 % bajo el valor real! Partiendo de la hipótesis de la forma esférica de la Tierra, Eratóstenes también se había planteado la pregunta, donde sería de localizar la parte habitable del mundo,-si ésta sólo cubriría la mitad del hemisferio norte- que se podría esperar de los hemisferios norte y sur desconocidos. Eratóstenes sólo podía suponer de qué se trataba en su mayoría de mares y océanos.

Durante miles de años hubo entre los hombres divergencias sobre el tamaño de la Tierra. Hace más de 2000 años un bibliotecario de Alejandría hizo un cálculo de asombrosa exactitud.







Notas tomadas de los sitios Web:
www.lighthouse-foundation.org/lighthouse-foundation.org/ esp/artikel/eratoesp.shtml
personales.ya.com/casanchi/rec/eratos.htm _Modificadas por: Jimmy Oswaldo Muñoz Gaviria.

SEMEJANZA Y HOMOTECIA EN EL PLANO.

- Supongamos que en una apuesta en el hipódromo seleccionamos un caballo que paga 2 a 15; esto significa que por cada \$ 2 que apostemos recibiremos \$ 15 si ganamos. Estamos en una razón de 2 a 15.

- En un colegio por cada 18 estudiantes varones hay 30 estudiantes mujeres. La razón en esta situación es 18 a 30, en forma reducida 3 a 5.

- Supongamos que vamos al supermercado y observamos que una lata de café descafeinado cuesta \$ 3480 y contiene 0.75 libras, si deseamos saber la razón por unidad, es decir, el precio por libra, simplemente se divide 3480 entre 0.75. De ahí que la libra de café descafeinado cuesta \$ 4640.

En cada una de las anteriores situaciones aparece el término ***RAZÓN.*** A continuación presentamos una definición para éste término.

Definición:

Sean $a, b \in \Re, \quad b \neq 0$. El número de la forma $\frac{a}{b}$ se denomina ***razón.***

Observaciones:

- La razón de dos cantidades o de dos números a y b es el cociente indicado de éstos.

- La razón $\frac{a}{b}$ ("a es a b") es la comparación de dos cantidades o números; es decir, significa que al número a le corresponde el número b.

- Una razón $\frac{a}{b}$ también se puede simbolizar:

  $a : b$, $a \, R \, b$, y leemos "a es a b".

- El número a se denomina antecedente y el número b se denomina consecuente.

- ✶ Antes de hallar la razón de dos cantidades, es necesario expresarlas en la misma unidad de medida.

Ejemplo:

Los perímetros de dos triángulos son 8 cm y 0.16 m., respectivamente. Hallar la razón entre sus medidas.

Solución: Según las observaciones, primero se reducen las cantidades, que deseamos comparar, a una misma unidad de medida, es decir, recordemos que 0.16 m equivalen a 16 cm. La razón entre los perímetros de los triángulos es $\frac{8\ cm}{16\ cm} = \frac{1}{2}$. Esto significa que el perímetro de uno de los triángulos es el doble del otro.

En la práctica, para representar objetos materiales como casas, puentes, edificios, planos o mapas de una ciudad, etc., se dibuja una figura que tenga la misma forma, pero distinto tamaño que la original; tal figura se dice que es una representación a **escala**.

Una **escala** es la razón entre cada longitud del dibujo y la longitud real del objeto que se representa, es decir:

ESCALA = $\frac{cada\ longitud\ del\ dibujo}{longitud\ real}$, ambas con la misma unidad de medida.

Generalmente la escala se representa mediante una fracción de numerador 1.

Ejemplos:

a) En un mapa la distancia entre dos ciudades A y B que es de 150 Km., está representada por 3 cm. ¿Cuál es la escala del mapa?

ESCALA = $\frac{3\ cm}{15000000 cm} = \frac{1}{5000000}$. Recordemos que 1 Km. equivale a 100000 cm.

Por tanto el mapa es 5000000 de veces más pequeño que la realidad.

b) Un salón está representado en un plano, a escala $\frac{1}{125}$, por un rectángulo de 6.4 cm de largo y 4.8 cm. de ancho. ¿Cuál es el largo y el ancho real del salón?

Según la escala, $\frac{1}{125}$, esto significa que cada una de las longitudes del salón son 125 veces más grandes que las representadas en el plano, por lo tanto:

$$125 * 6.4\, cm = 800\, cm = 8\, m$$

$$125 * 4.8\, cm = 600\, cm = 6\, m$$

Así, las dimensiones reales del salón son: 8 *m*. de largo por 6 *m*. de ancho.

c) Representar en un plano α, el dibujo de una puerta que mide 75 cm de ancho y 200 cm de alto.

Solución: Para ello dibujemos un rectángulo que mide 3 cm de ancho y 8 cm de alto.

$\frac{3}{75} = \frac{8}{200}$, significa que cada dimensión en el dibujo es 25 veces menor que en la realidad. La escala del dibujo es $\frac{1}{25}$.

<u>Ejercicio</u>:

Dos lados de un triángulo miden 12 cm y 8 cm. ¿ Cuál es la razón del lado menor al lado mayor ?

Definición:

Una **Proporción** es la igualdad entre dos razones. Las notaciones más usuales son $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *o* $a : b :: c : d$ y se lee a es a b como c es a d.

Los términos *a* y *d* se denominan **extremos**, mientras que los restantes *b* y *c* **medios**.

Propiedades de las proporciones:

1. **Propiedad fundamental**:

   El producto de extremos es igual al producto de medios:

$$a \cdot d = b \cdot c \,.$$

2. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ o $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

3. En toda proporción, la suma o la diferencia de los dos primeros términos es al segundo, como la suma o diferencia de los últimos es al cuarto.

   Si se tiene $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \\ \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \\ \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \end{cases}$

4. En toda proporción la suma de los dos primeros términos es a la suma de los dos últimos como la diferencia de los dos primeros es a la diferencia de los dos últimos.

   Si se tiene $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ también $\begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \\ \\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \end{cases}$.

Segmentos proporcionales

Consideremos los siguientes segmentos:

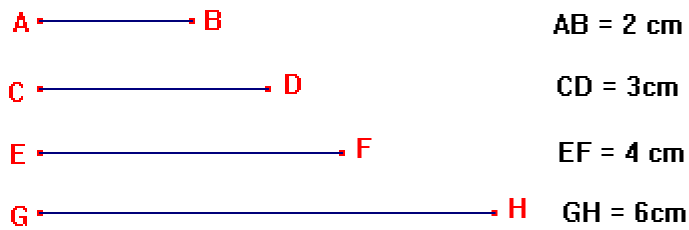


Figura No. 130

La razón de dos segmentos, se entiende como el cociente entre sus longitudes; esto es:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}, \quad \frac{CD}{EF} = \frac{3}{4}, \quad \frac{CD}{GH} = \frac{3}{6}, \quad \text{etc.}$$

Recordemos que las longitudes de los segmentos deben estar en la misma unidad de medida.

Definiciones:

1. Segmentos proporcionales

Dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a otros dos segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$, cuando la razón de las medidas de los dos primeros es igual a la razón de las medidas de los otros dos.

Es decir,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

2. Media proporcional

Una cantidad es media proporcional entre otras dos cantidades cuando se encuentra en los medios o en los dos extremos de una proporción.

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \quad \text{o} \quad \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

h es la media proporcional entre m y n. De la proporción anterior resulta: $h^2 = m \cdot n$, luego $h = \sqrt{m \cdot n}$.

La media proporcional también es conocida como la media geométrica entre números, *m* y *n*. A cada uno de estos términos se les denomina tercera proporcional.

3. Cuarta proporcional

Es un término cualquiera de una proporción con respecto a los otros tres términos.

Proyección paralela de los segmentos de una recta sobre otra

Sean r, r', l tres restas secantes no concurrentes. Si A' es el punto de r' donde la paralela a l por A en r corta a r', decimos que A' es la Proyección Paralela de A.

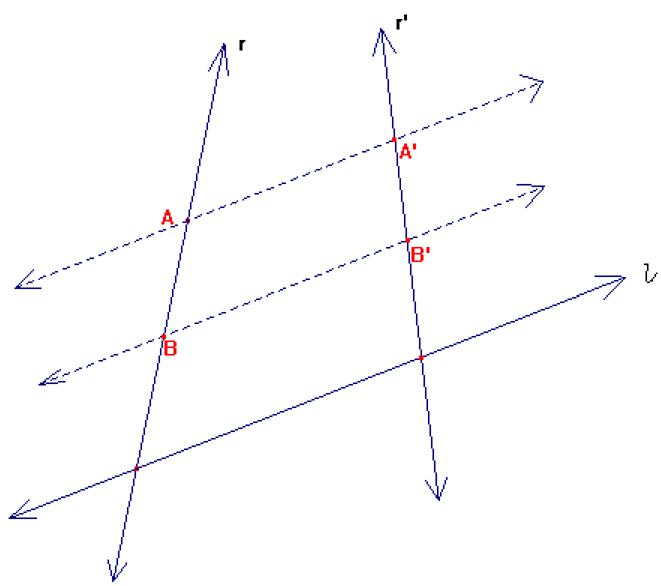


Figura No. 131

En la Figura No. 131 B' es proyección paralela de B. Análogamente, $\overline{A'B'}$ es proyección paralela de $\overline{AB}$.

Teorema de Thales de Mileto[1]:

Si dos rectas r y r' se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas, son proporcionales a los determinados por sus proyecciones paralelas correspondientes en la otra recta.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \quad \text{o} \quad \frac{BD}{FG} = \frac{B'D'}{F'G'} \ , \quad \text{etc.}$$

Ver Figura No. 132.

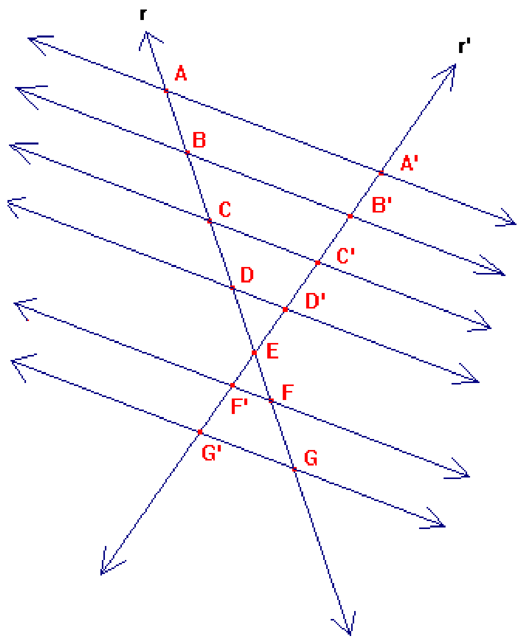


Figura No. 132

Demostración:

Consideremos las rectas *r* y r', cortadas por un sistema de paralelas. Sean *A, B, C* y *D* cuatro puntos de r tales que:

---

[1]Tales de Mileto (c. 625-c. 546 a.C.), filósofo griego nacido en Mileto (Asia Menor). Fundador de la filosofía griega, y es considerado como uno de los Siete Sabios de Grecia. Tales es famoso por sus conocimientos de astronomía luego de predecir el eclipse de sol que ocurrió el 28 de mayo del 585 a.C. También introdujo la geometría en Grecia. Biblioteca de Consulta Microsoft® Encarta® 2003.

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \qquad (1)$$

Analicemos los siguientes casos:

Caso 1: $r \parallel$ r', Figura No. 133-A.

$$\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{CD} \cong \overline{C'D'} \end{array} \qquad (2)$$

Por ser segmentos paralelos comprendidos entre paralelas.

Luego por (1) y (2) tenemos:

$$\overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}.$$

Ahora

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}, \text{ se cumple.}$$

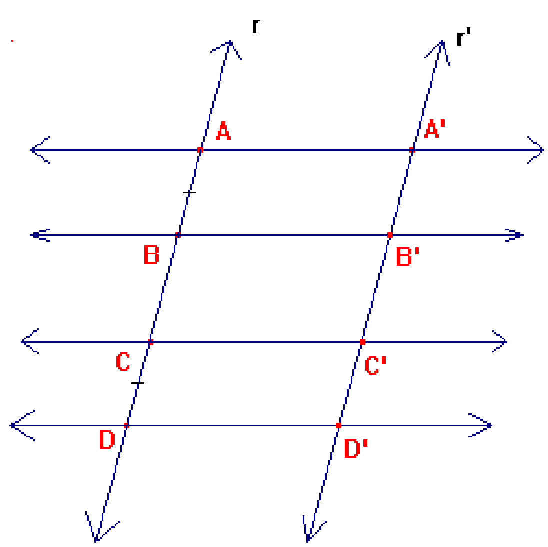


Figura No. 133-A

Caso 2: r no paralela a r'. Figura No. 133-B

Consideremos el trapecio $ABB'A'$ y efectuemos la traslación: $\mathbf{T_{AC}}(ABB'A') \cong CDB''A''$; esto significa:

a) $\mathbf{T_{AC}}\left(\overline{A'B'}\right) \cong \overline{A''B''}$

b) $\overline{A''B''} \cong \overline{C'D'}$ por ser segmentos paralelos entre rectas paralelas.

c) $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$ porque $\overline{A'B'}$ y $\overline{A''B''}$ son homólogos.

d) $\overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$ por b) y c).

Luego

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$ Ver Figura No. 133-B

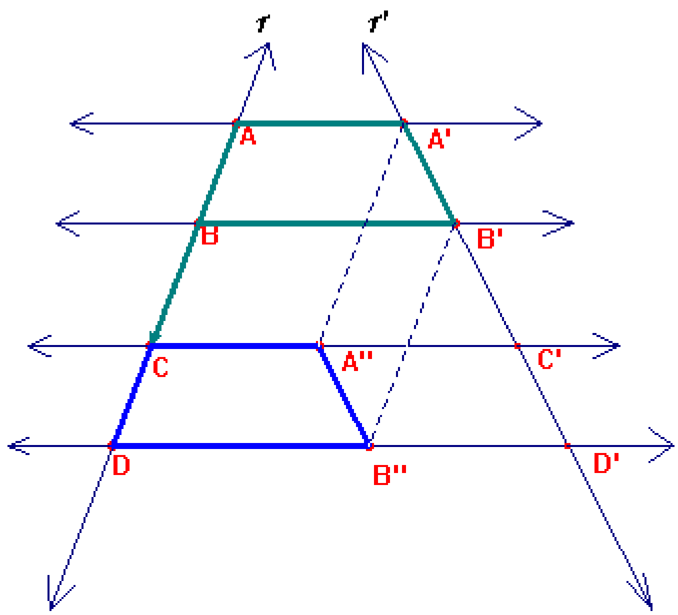


Figura No. 133-B

<u>Caso 3</u>: Consideremos un punto M en el interior de $\overline{AB}$, la proyección paralela de M está comprendida entre la proyección paralela de A y la proyección paralela de B; esto es :

Si $AM < AB$ entonces $A'M' < A'B'$.

Si $AM + MB = AB$ entonces $A'M' + M'B' = A'B'$. Ver Figura No. 133-C.

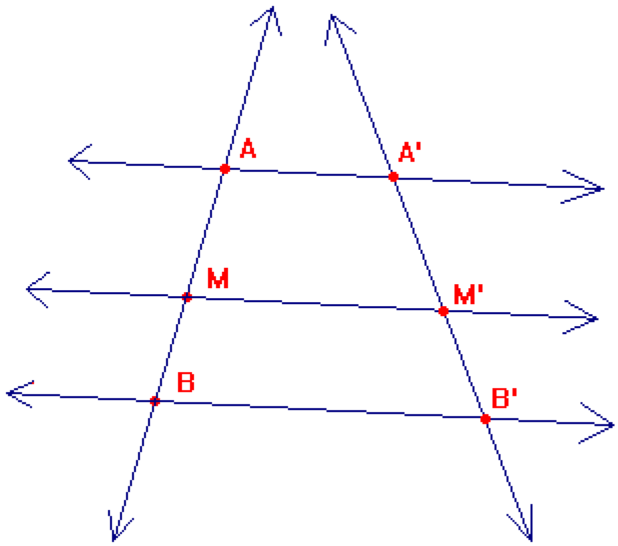


Figura No. 133-C

En consecuencia: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$

Segmentos determinados por una paralela a un lado de un triángulo

Teorema:

Toda paralela a un lado de un triángulo determina sobre los otros dos lados o sobre sus prolongaciones segmentos proporcionales a ellos.

Esto es, B' y C', son los puntos de intersección de una recta paralela al lado $\overline{BC}$ del ΔABC. con $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ respectivamente.

Se tendrá

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}.$$

Ver Figura No. 134 a

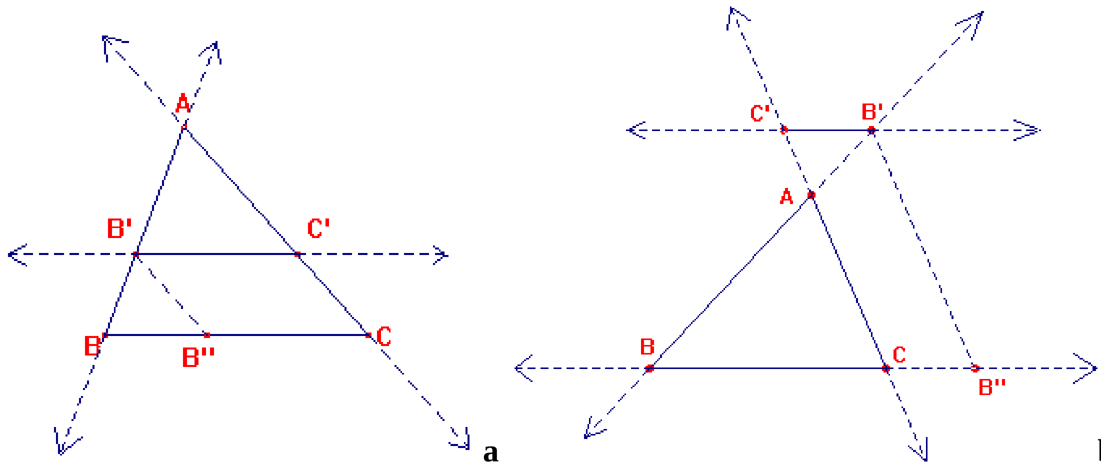


Figura No. 134

Otras proporciones son:

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'},\quad \frac{BC}{BB''}=\frac{BA}{BB'},\quad \frac{BA}{BC}=\frac{BB'}{BB''},\quad \frac{BA}{AC}=\frac{BB'}{B'B''}$$

Si observamos, el recíproco de éste teorema, también se cumple. Lo enunciaremos en el siguiente teorema:

Teorema:

Toda recta que divide dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales es paralela al tercer lado.

Demostración:

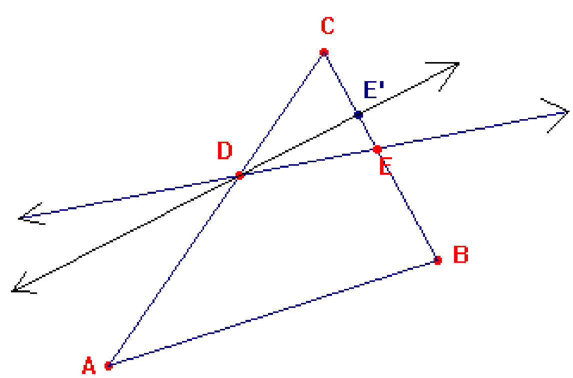


Figura No. 135

En el ΔABC, Figura No 135, por hipótesis se cumple:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB} \qquad (*)$$

Debemos probar que $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{AB}$.

Demostremos éste teorema por el método de reducción al absurdo.

Supongamos que $\overleftrightarrow{DE}$ no es paralelo a $\overline{AB}$. Por el punto D, según el postulado de las paralelas, existe un punto E' en $\overline{BC}$ tal que $\overleftrightarrow{DE''} \parallel \overline{AB}$.

Luego los segmentos determinados son proporcionales, esto es, por la propiedad fundamental de la proporcionalidad, tenemos:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE'}{E'B}; \quad \frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB} \qquad (1).$$

Por hipótesis

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB} \qquad (2)$$

Luego de (1) se tiene

$$\frac{CE'}{E'B} = \frac{CE}{EB}.$$

Aplicando las propiedades de las proporciones:

$$\frac{CE'+E'B}{E'B} = \frac{CE+EB}{EB}$$

$$\frac{CB}{E'B} = \frac{CB}{EB} \qquad (3)$$

De (3) se concluye que $\overline{E'B} \cong \overline{EB}$, luego E' coincide con E.

Esto contradice el supuesto inicial ($\overline{DE}$ no es paralelo a $\overline{AB}$).

Luego el teorema está demostrado.

Construcción del cuarto proporcional a tres segmentos dados

Dados tres segmentos de magnitudes a, b y c, el segmento de magnitud x que verifica la proporción $a:b=c:x$ se llama cuarto proporcional. Ver Figura No. 136

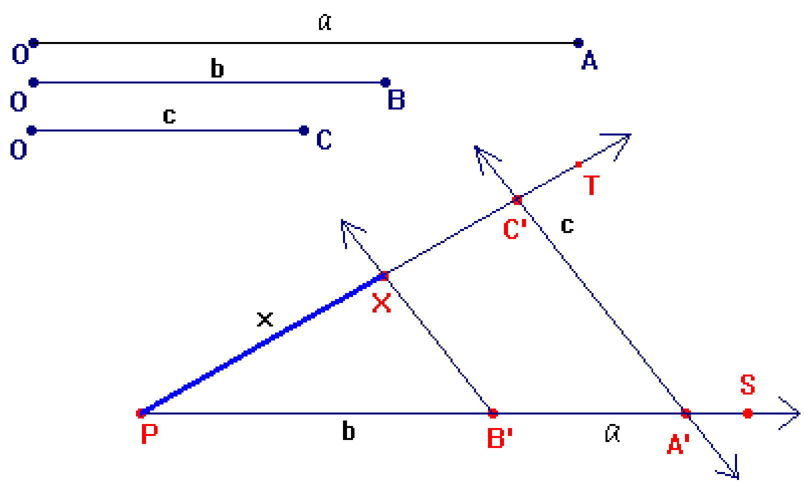


Figura No. 136

Consideremos un $\angle SPT$ cualquiera. Sobre $\overrightarrow{PS}$ ubicamos A' y B' tal que $PA'=a$ y $PB'=b$, (ver Figura No. 136). Sobre el lado $\overline{PT}$ ubicamos C' tal que $A'C'$ = c.

Por B' trazamos una recta paralela a $\overleftrightarrow{A'C'}$. El punto de intersección entre esta paralela y $\overrightarrow{PT}$, X, determina el segmento $\overline{PX}$, que es el cuarto proporcional pedido.

Observaciones:

- Como todos los cuartos proporcionales a tres segmentos dados son congruentes la solución es independiente del ángulo elegido.

- Si $b = c$ se obtiene el segmento llamado tercero proporcional entre a y b.

División de un segmento en partes proporcionales a segmentos dados.

Una aplicación del teorema de Thales es poder dividir con facilidad un segmento dado $\overline{AB}$, en segmentos proporcionales a otros segmentos de magnitudes *m*, *n*, *p*.

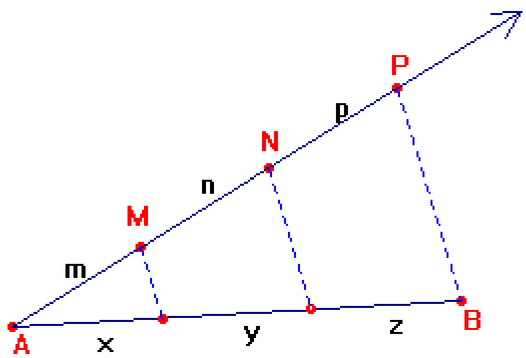


Figura No. 137

Traslademos cada una de las magnitudes de éstos segmentos, consecutivamente, sobre una semirrecta concurrente con un extremo del segmento dado $\overline{AB}$, (por ejemplo *A*). Consideremos sobre esta semirrecta un punto *P* tal que $AP = m + n + p$. Construyamos el segmento $\overline{PB}$; los segmentos paralelos a $\overline{PB}$ por los puntos de división *M* y *N*, determinan segmentos de magnitudes x, *y*, *z*, proporcionales a los segmentos de medidas *m*, *n* , *p* , donde $x + y + z = AB$. Ver Figura No. 137.

FIGURAS SEMEJANTES EN EL PLANO

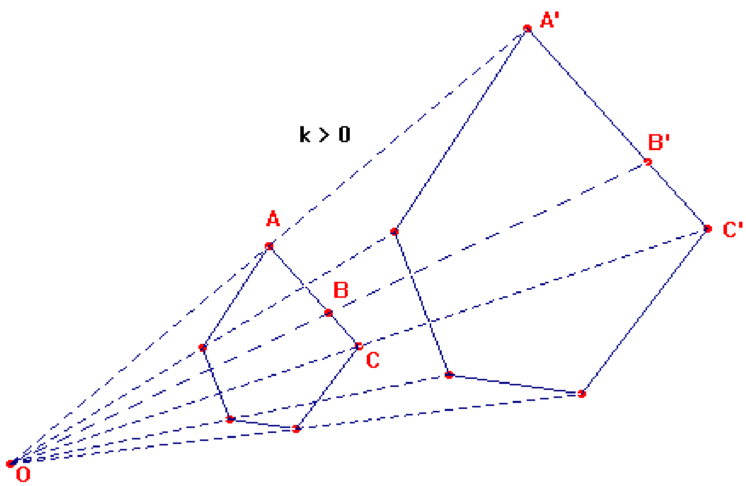
Después de haber estudiado los diferentes movimientos en el plano, en esta parte, analizaremos una transformación especial del plano llamada **Homotecia** y veremos de qué manera se relaciona con los movimientos definidos anteriormente.

Definición:

Sea O un punto fijo de un plano α y k un número real, $k \neq 0$. La **homotecia** de centro en O y razón k, denotada por $H_{(O,k)}(A)$ es A', es la transformación del plano que hace corresponder a cada punto A de α, distinto de O, otro punto A' en $\overleftrightarrow{OA}$ tal que $\frac{OA'}{OA} = k$. (Ver Figura No. 138 **a** y Figura No. 138 **b**).

Observaciones:

- Si $k > 0$, A' está situado sobre $\overrightarrow{OA}$, en caso contrario, A' está sobre la semirrecta opuesta.
- $H_{(O,1)}(A)$ es A', la función identidad de α.
- $H_{(O,-1)}(A)$ es A'; Es una simetría central de centro O.
- Llamaremos Figuras Homotéticas a aquellas que se corresponden en una homotecia.



a

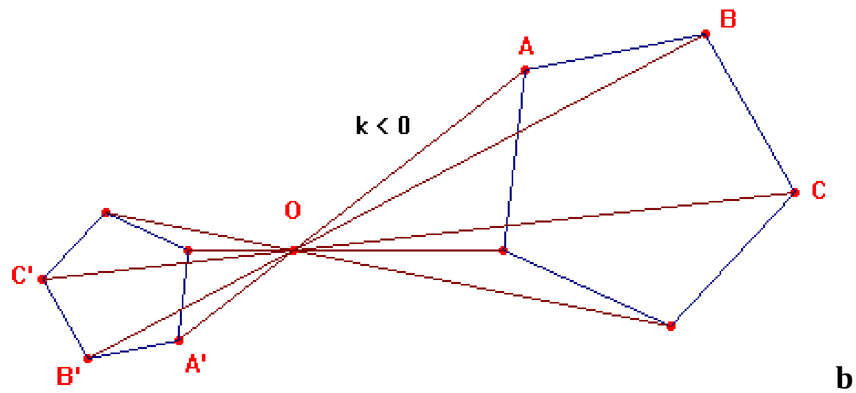


Figura No. 138

Propiedades de la Homotecia

- Si *A', B'*son las transformaciones de *A, B* a través de una $H_{(O,k)}$, se verifica: $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \quad [1].$

- Si *A, B, C,* son tres puntos de una recta r, que no pasa por el centro de Homotecia, y *A', B'* y *C'* sus transformados $H_{(O,k)}$, entonces *A', B'* y *C'* están en otra recta r ' paralela a r . (Ver Figura No. 140).

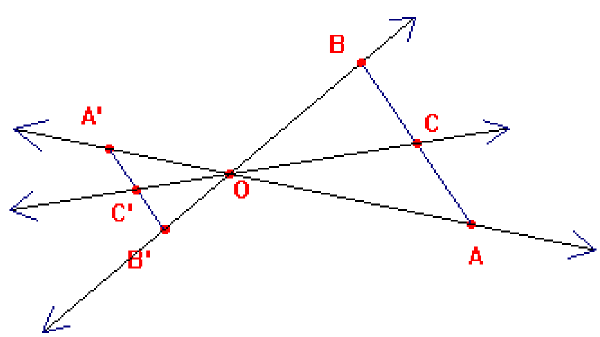


Figura No. 139

Por $[1]$ tenemos: $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$.

Esto significa que $\overline{AB}$ II $\overline{A'B'}$ (Teorema de Thales) y $\overline{BC}$ II $\overline{B'C'}$, pero por *B'* solo puede pasar una paralela a r, entonces *A', B',* y *C'*, son colineales. Además $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$.

- La razón entre segmentos homotéticos es constante, esto es

  Si $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$ son segmentos homotéticos de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ o $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$.

- Los ángulos que se corresponden en una homotecia $H_{(O,k)}$ son congruentes $\angle AOB \cong \angle A'OB'$. Por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido o en sentidos opuestos.

Definiciones:

Polígonos semejantes: Dos polígonos *P* y *P'*, en el plano α, de igual número de lados, son semejantes si tienen los ángulos respectivamente congruentes y los lados correspondientes a ángulos congruentes proporcionales. Ver Figura No. 140

Ángulos homólogos: Los ángulos respectivamente congruentes.

Lados homólogos: En las figuras semejantes se les llama lados homólogos a los lados adyacentes a los ángulos respectivamente congruentes.

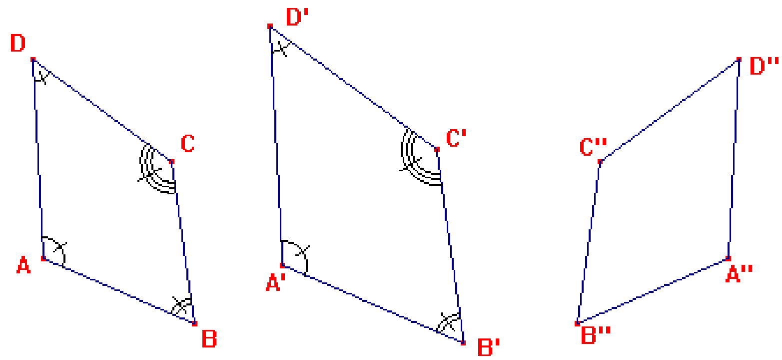


Figura No. 140

$$\begin{array}{l} \angle DAB \cong \angle D'A'B' \\ \angle ADC \cong \angle A'D'C' \\ \angle DCB \cong \angle D'C'B' \\ \angle CBA \cong \angle C'B'A' \end{array}, \qquad \frac{DA}{D'A'} = \frac{AB}{A'B'} \text{ , o , } \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{C'B'}$$

Nota: La semejanza entre los cuadriláteros *ABCD* y *A'B'C'D'* se denota por *ABCD* ~ *A'B'C'D'*.

Propiedades de la semejanza

- La semejanza puede ser directa o inversa, esto es:

  Directa: si los polígonos semejantes *P* y *P'* conservan el sentido en el plano, en caso contrario es **Inversa**.

  En la Figura No. 140:

  ABCD ~ *A'B'C'D'* (Directa) y *A'B'C'D'* ~ *A''B''C''D''*.(Inversa)

- La razón de proporcionalidad entre segmentos homólogos se llama razón de semejanza.

- Si una figura *F* del plano α, se le aplica $H_{(O,k)}$ y luego un movimiento directo, se obtiene una semejanza directa; si se aplica un movimiento inverso se tendrá semejanza inversa.

- La congruencia es un caso particular de la semejanza, cuya razón *K* es igual a 1.

A continuación se presentarán algunos resultados que nos permiten establecer semejanza entre triángulos, de manera análoga como se estableció la congruencia triangular.

Definición: **Triángulos Semejantes.**

Dos triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes cuando sus ángulos son respectivamente congruentes, y sus lados homólogos son proporcionales. Ver Figura No. 141.

$\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle A \cong \angle C'$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

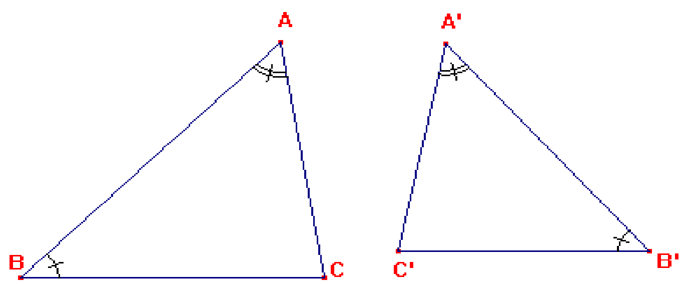


Figura No. 141 $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Observación:

Dados dos triángulos *ABC* y *A'B'C'* semejantes, uno de ellos puede obtenerse al aplicar al otro triángulo una homotecia seguida de un movimiento. Ver Figura No. 142.

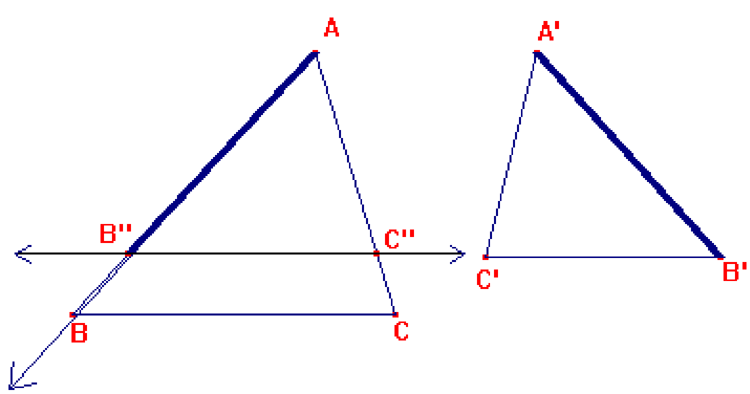


Figura No. 142

Traslademos sobre $\overleftrightarrow{AB}$ el $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$ y tracemos por B'', la paralela $\overleftrightarrow{B''C''}$ a $\overline{BC}$. El $\Delta AB''C''$ obtenido es homotético del ΔABC. Como los ángulos del ΔABC y del $\Delta AB''C''$ son congruentes, entonces también son congruentes a los del $\Delta AB'C'$ y como $AB'' = A'B'$, el $\Delta AB'C' \cong \Delta AB''C''$, es decir, homólogos en un movimiento.

Teorema:

Toda recta paralela trazada a un lado de un triángulo determina un segundo triángulo semejante al primero.

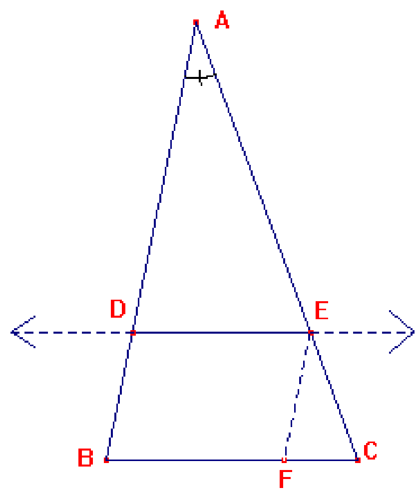


Figura No. 143

Demostración:

Sea ΔABC, $\overleftrightarrow{DE}$ II $\overline{BC}$. Consideremos ΔADE, demostraremos que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

1. En la Figura No. 143, Los ángulos respectivamente congruentes son:

$\angle A \cong \angle A$: por ser el ángulo común.

$\angle ADE \cong \angle ABC$: por ser ángulos correspondientes.

$\angle AED \cong \angle ACB$, por ser correspondientes entre paralelas.

2. Lados correspondientes a ángulos congruentes son proporcionales:

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (1), $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$ (2).

De otro lado, el cuadrilátero *BFED* es un paralelogramo. Luego *DE* = *BF*.

De las proporciones (1) y (2), obtenemos:

$\frac{AD}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, lo que demuestra el teorema.

Nota: $\Delta ABC, \Delta ADE, \Delta EFC$ son semejantes.

Teorema:

Si dos triángulos tienen sus lados, respectivamente, proporcionales, son semejantes.

Demostración:

Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$, con la condición $A'B' < AB$. Sea $B'' \in \operatorname{int} \overline{AB}$ tal que $AB'' = A'B'$. Tracemos por B’’ una paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, que corte a $\overline{AC}$ en un punto C''. Por las propiedades de las proporciones entre los lados y por el teorema de Thales, se deduce que $\Delta A'B'C' \cong \Delta AB''C''$ y en consecuencia $\Delta A'B'C'$ y $\Delta AB''C''$ son semejantes.

Ver Figura No.144

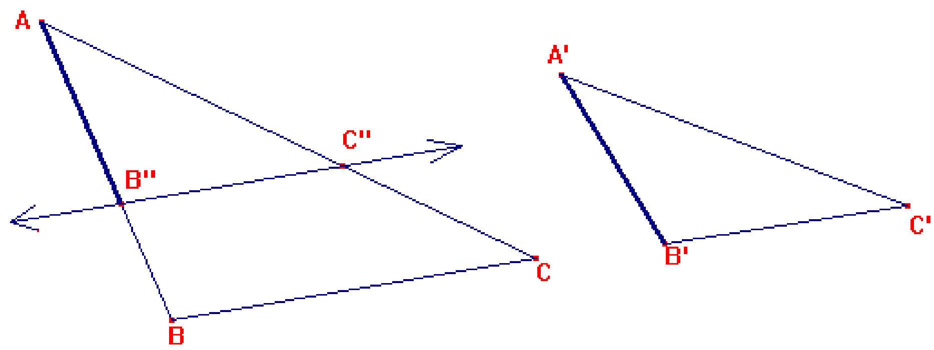


Figura No. 144

Ejemplo : En la Figura No 145, ΔABC es semejante a ΔCDE .

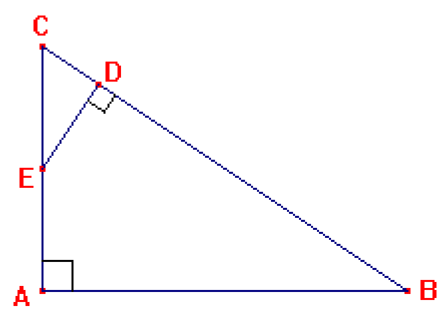


Figura No. 145

En este caso los lados homólogos son $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CE}$. En consecuencia, se tiene: $\frac{AB}{ED}=\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{CE}$ o $\frac{AB}{ED}=\frac{AC}{CD}$ y $\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{CE}$.

Teorema de la bisectriz:

En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interior, divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes a éste.

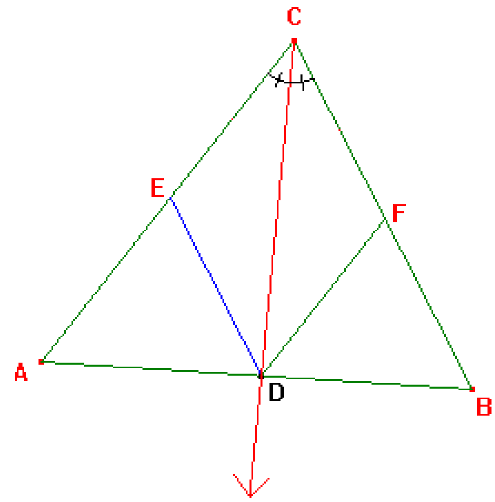


Figura No. 146

Demostración: (Ver Figura No. 146).

Sean ABC un triángulo cualquiera, $\overrightarrow{CD}$ la bisectriz del $\angle C$ que corta $\overline{AB}$ en D; debemos probar que $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$. Tracemos por D, una paralela $\overline{DE}$ a $\overline{AC}$, con E en $\overline{AC}$ y una paralela $\overline{DF}$ a $\overline{BC}$, con F en $\overline{BC}$. Entonces, $\Delta ADE \sim \Delta ABC, \Delta BDF \sim \Delta ABC$. Por teorema anterior $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AD+BD}$ y $\frac{DF}{AC} = \frac{BD}{AD+BD}$. Además, $\Delta DCE \cong \Delta DCF$ por el criterio A-L-A. Por lo tanto $DE = DF$. De las dos proporciones anteriores, obtenemos $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$, como se quería probar.

***Lema*[2]**

Si en un triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a su hipotenusa, se verifica lo siguiente:

---

[2] Lema: En matemáticas, Proposición que es preciso demostrar antes de establecer un teorema. Biblioteca de Consulta Microsoft® Encarta® 2003.

1. *La altura es media proporcional entre los segmentos que ella determina sobre la hipotenusa.*

2. *Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección ortogonal sobre ella.*

En la Figura No. 147, dados el ΔABC, recto en C a,b los catetos, c la hipotenusa, h la altura que cae sobre la hipotenusa y m,n los segmentos que determina la altura sobre la hipotenusa, entonces 1. y 2. dicen $\frac{n}{h}=\frac{h}{m}, \frac{c}{b}=\frac{b}{n}, \frac{c}{a}=\frac{a}{m}$, siendo además, m y n las proyecciones ortogonales de *b* y a sobre *c*, respectivamente.

La demostración de este lema es consecuencia directa de la proporcionalidad que existe entre los segmentos homólogos.

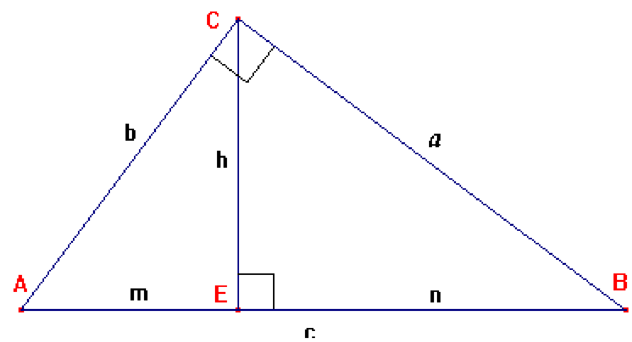


Figura No. 147

Teorema de Pitágoras[3] y su recíproco

Sean a, b, c las medidas de los lados de ΔABC *con* $c > a, c > b$, *entonces* ΔABC *es rectángulo, si y sólo si,* $c^2 = a^2 + b^2$.

[3] Pitágoras (c. 582-c. 500 a.C.), filósofo y matemático griego. Nacido en la isla de Samos, Pitágoras fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes. Biblioteca de Consulta Microsoft® Encarta® 2003.

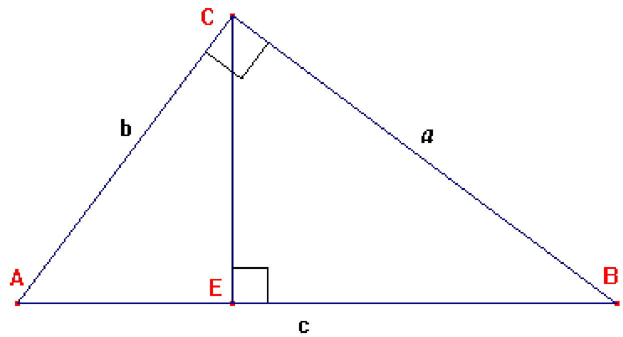


Figura No. 148

Por tener una doble implicación ante el teorema, lo demostraremos así:

1) Si ΔABC es rectángulo, entonces $c^2 = a^2 + b^2$.

2) Si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces ΔABC es rectángulo.

Demostración: (ver Figura No. 148).

1) Sea ΔABC rectángulo. Por el lema anterior, obtenemos $\frac{c}{b} = \frac{b}{AD}$ y $\frac{c}{a} = \frac{a}{BD}$. Así $a^2 + b^2 = c(AD + BD) = c^2$.

2) Supongamos que $a^2 + b^2 = c^2$ y sean las rectas l y *m*, perpendiculares, que se cortan en un punto *P*. Sea *A'* un punto de l tal que *PA'* = a y *B'* un punto de *m* tal que *PB'* sea igual a *b*. Basta probar que *A'B'* = *c*. Como $\Delta A'B'P$ es rectángulo en *P*, se tiene $(A'B')^2 = a^2 + b^2$. En virtud de la hipótesis, $(A'B')^2 = c^2$. Es decir que *A'B'* es igual a *c*. Como $\Delta ABC \cong \Delta A'B'P$ por criterio L-L-L, se concluye que ΔABC es rectángulo.

Criterios para la Semejanza de triángulos

Dados dos triángulos cualesquiera *ABC* y *A'B'C'*, construyamos el triángulo *AB''C''* obtenido trasladando sobre $\overrightarrow{AB}$, el $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$ y trazando por *B''* $\overleftrightarrow{B''C''}$, paralelo a $\overline{BC}$. Ver Figura No. 149.

Todo criterio que permita afirmar la congruencia entre los triángulos *AB’’C’’* y *A’B’C’* asegurará la semejanza entre *ABC* y *A’B’C’*.

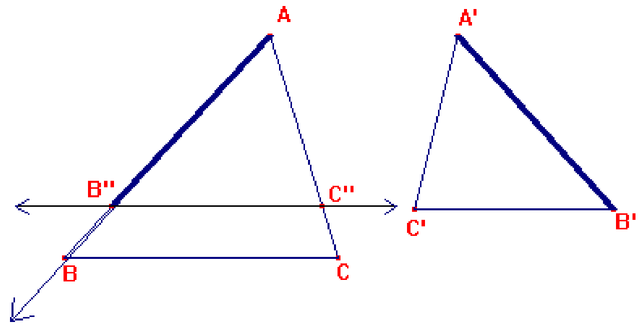


Figura No. 149

Primer Criterio de semejanza: A-A-A*: Sea una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza. Es decir, dada una correspondencia entre* ΔABC *y* $\Delta A'B'C'$*; si* $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, *entonces los triángulos ABC y A’B’C’ son semejantes.* (Ver Figura No. 150).

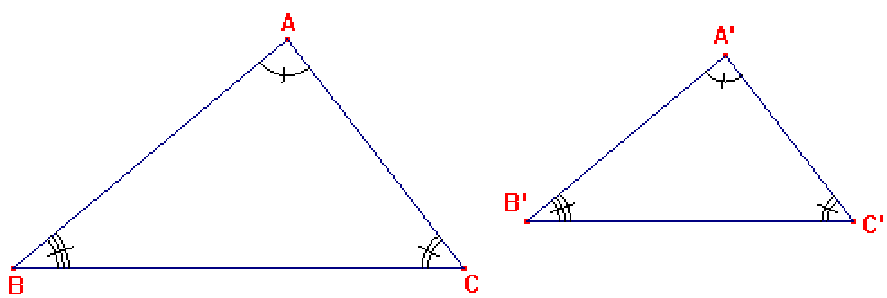


Figura No. 150

Demostración:

Sea G un punto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{AG} \cong \overline{A'B'}$. Tracemos $\overline{GH}$ II $\overline{BC}$, donde H pertenece a $\overline{AC}$.

$\angle AGH \cong \angle B$, por ser ángulos correspondientes entre paralelas. $\angle B \cong \angle B'$, luego $\angle AGH \cong \angle B'$.

Por la construcción realizada, $\overline{AG} \cong \overline{A'B'}$, por hipótesis se tiene que $\angle A \cong \angle A'$, lo que implica que $\Delta AGH \cong \Delta A'B'C'$ debido al criterio A-L-A.

Puesto que $\overline{GH}$ II $\overline{BC}$ en ΔABC, por teorema, se garantiza que ΔAGH es semejante a ΔABC. Por lo tanto ΔABC es semejante a $\Delta A'B'C'$, era lo que se quería demostrar. (Ver Figura No. 151)

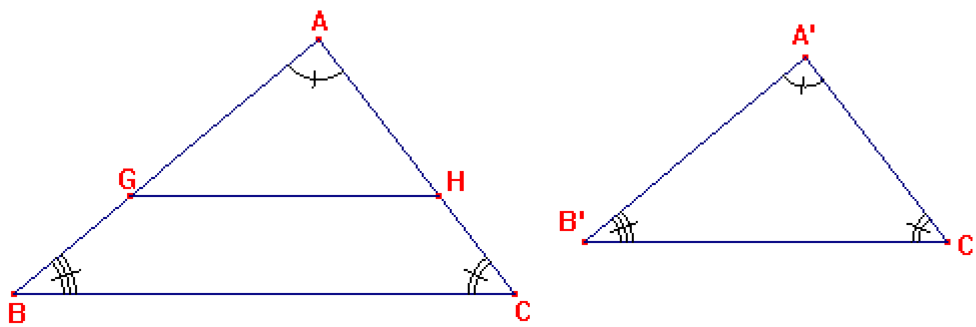


Figura No. 151

***Corolario**: Dos triángulos rectángulos con catetos proporcionales son semejantes.*

> ***Segundo Criterio de semejanza: L-A-L**: Sea una correspondencia entre dos triángulos. Si la medida de dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los dos ángulos incluidos en estos lados son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.*
>
> *Es decir, dada una correspondencia entre ΔABC y $\Delta A'B'C'$; si $\angle A \cong \angle A'$ y $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ entonces los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.* (Ver Figura No. 152).

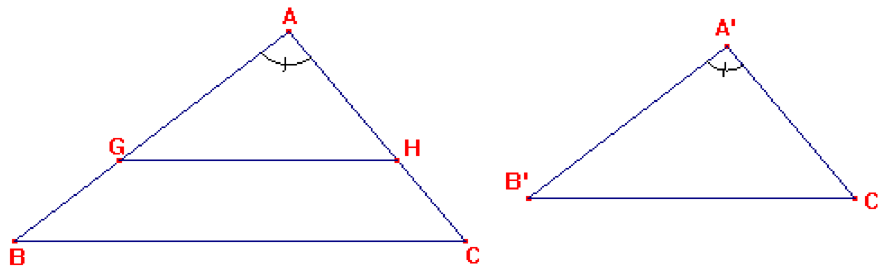


Figura No. 152

Demostración:

Sea G un punto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{AG} \cong \overline{A'B'}$. Tracemos $\overline{GH}$ II $\overline{BC}$, donde H pertenece a $\overline{AC}$.

ΔAGH es semejante a ΔABC, por la construcción realizada, luego se obtienen las proporciones de las medidas de los lados así: $\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH}$. Como hemos tomado AG = A'B', sustituimos en la proporción anterior y obtenemos $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AH}$. Luego $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$. Aplicando transitividad a las proporciones anteriores, $\frac{AC}{AH} = \frac{AC}{A'B'}$, lo que implica AH = A'B'. Además se tiene que $\angle A \cong \angle A'$, luego $\Delta AGH \cong \Delta A'B'C'$ debido al criterio L-A-L.

De los pasos anteriores concluimos que $\Delta A'B'C'$ es semejante a ΔABC. (Ver Figura No 152).

Corolario: *Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo congruente son semejantes.*

> ***Tercer Criterio de semejanza: L-L-L****: Sea una correspondencia entre dos triángulos. Si las medidas de los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia es una semejanza.*
>
> *Es decir, dada una correspondencia entre ΔABC y $\Delta A'B'C'$; $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ entonces los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.* (Ver Figura No. 153).

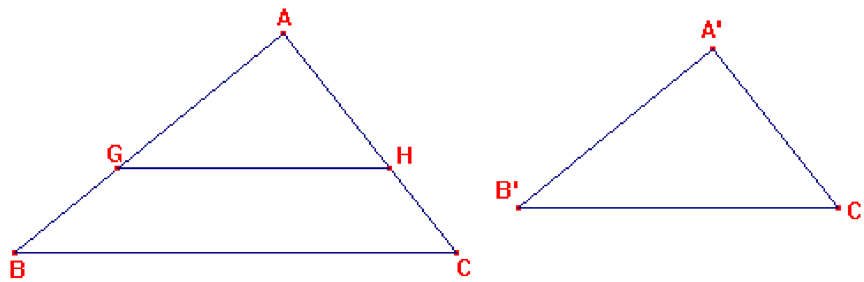


Figura No. 153

Demostración:

Sea G un punto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{AG} \cong \overline{A'B'}$. Tracemos $\overline{GH}$ II $\overline{BC}$, donde H pertenece a $\overline{AC}$. ΔAGH es semejante a ΔABC, por la construcción realizada, luego se obtienen las proporciones de ésta correspondencia de la siguiente manera: $\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{GH}$.

Puesto que hicimos AG = A'B', al sustituir en la proporción anterior resulta $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{GH}$. Por hipótesis tenemos que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, luego AH = A'B', GH = B'C', por consiguiente $\Delta AGH \cong \Delta A'B'C'$, lo que implica que $\Delta A'B'C'$ es semejante con ΔABC.

Definición: Triángulos homotéticos

Dos triángulos no congruentes, de lados respectivamente paralelos, son homotéticos. Ver Figura No. 154 **a** y Figura No. 154 **b**.

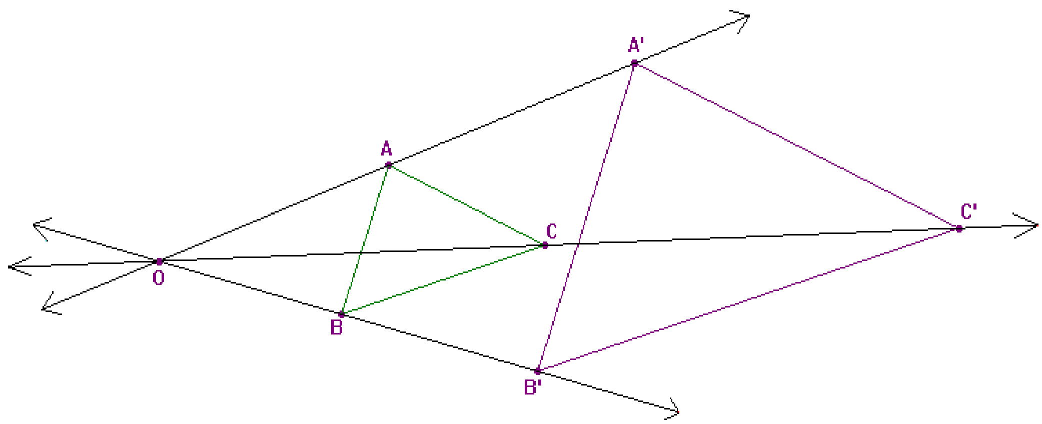


Figura No. 154-**a**

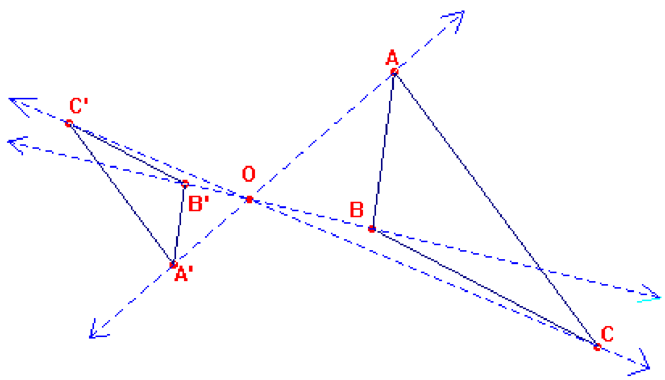


Figura No. 154-**b**

Observación:

$$\overleftrightarrow{AA'} \text{ y } \overleftrightarrow{BB'} \text{ se cortan en un punto } O \text{ tal que } \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = k \neq 1.$$

SEMEJANZA DE POLÍGONOS

Por las definiciones de semejanza, por las propiedades de la función homotecia y debido a algunas características del movimiento en un plano α, se dice que dos polígonos son semejantes si y sólo si se satisface lo siguiente:

1. Sus lados homólogos sean proporcionales.
2. Sus ángulos homólogos sean congruentes.

Ilustremos esta situación en la Figura No 155:

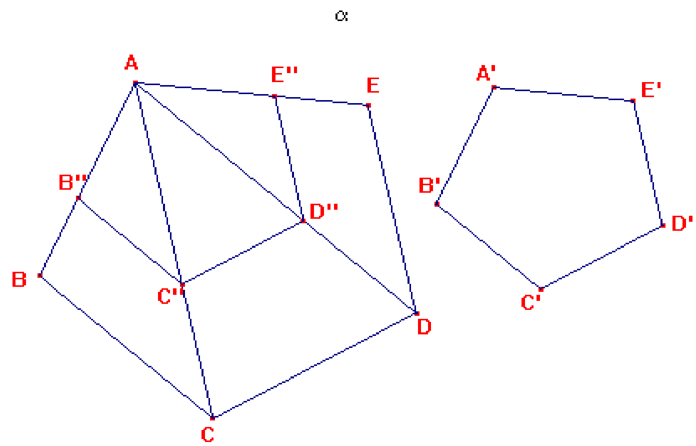


Figura No. 155

Consideramos los polígonos *ABCDE* y *A'B'C'D'E'*. Si satisfacen que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'}$ y $\angle B \cong \angle B'; \angle C \cong \angle C'; \angle D \cong \angle D'$, entonces los polígonos dados anteriormente, son semejantes.

En efecto, sea *B''* un punto del plano α, tal que *AB'' = A'B'* y sea $\frac{AB''}{AB} = k$. Consideremos la homotecia $H_{(A,k)}(ABCDE)$. Aquí, encontramos que las imágenes de *B, C, D, E* son respectivamente los puntos *B'', C'', D'', E''*. Esto implica que los polígonos *A'B'C'D'E'* y *A''B''C''D''E''* son congruentes. De aquí se concluye que los polígonos *A'B'C'D'E'* y *A''B''C''D''E''* son semejantes.

Nota: Recordemos que la congruencia de dos polígonos es un caso particular de la homotecia de razón *k = 1*, y centro en un punto *O*.

Corolario:

La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes, es igual a la razón que existe entre sus respectivos lados homólogos.

Este corolario significa, que si $A_1A_2...A_n$ y $A_1'A_2'...A_n'$ son polígonos semejantes, entonces:

$$\frac{A_1A_2}{A_1'A_2'} = \frac{A_2A_3}{A_2'A_3'} = \ldots = \frac{A_{n-1}A_n}{A_{n-1}'A_n'} = \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n}{A_1'A_2' + A_2'A_3' + \ldots + A_{n-1}'A_n'}.$$

Corolario:

Dos polígonos regulares,[4] *de igual número de lados son semejantes.*

Corolario:

La imagen de una circunferencia, al aplicarle una homotecia, es otra circunferencia.

TALLER SOBRE SEMEJANZA Y HOMOTECIA

1. Complete Cada uno de los siguientes enunciados:

- Si $a \cdot b = c \cdot d$ entonces $a : d = \cdots : \cdots$
- La media proporcional entre 9 y 16 es **. . .**
- La cuarta proporcional entre 5, 3, 2 es **. . .**
- La tercera proporcional entre 9 y 16 es **. . .**
- $\frac{5}{x} = \frac{8}{y}$ significa lo mismo si $\frac{x}{y} = \cdots$
- $\frac{x+3}{4} = \frac{4}{x-3}$, si $x = \cdots$

2. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En cada caso justifique su respuesta.

a. Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes congruentes, entonces sus ángulos correspondientes son congruentes.

b. Dos triángulos isósceles son semejantes, si tienen un ángulo respectivamente congruente.

c. La altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo es media proporcional entre los segmentos que determina sobre la hipotenusa.

d. Si una recta divide proporcionalmente a dos de los lados de un triángulo, esa recta es paralela al tercer lado.

e. Dos polígonos que tienen sus ángulos respectivamente congruentes son semejantes.

[4] Recordemos que un polígono regular es aquel que tiene sus lados de igual longitud y sus ángulos interiores congruentes.

f. Dos cuadriláteros que tienen sus lados respectivamente proporcionales son semejantes.

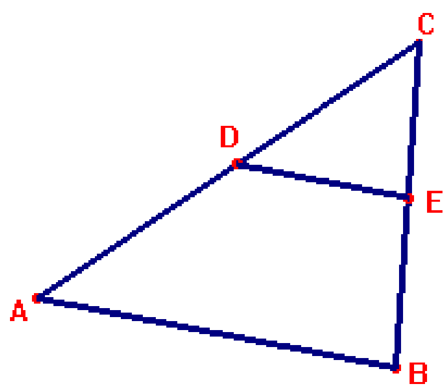
g. Dos triángulos rectángulos isósceles son semejantes.

h. La semejanza es una relación de equivalencia.

i. La figura homotética de un polígono con centro en un punto O y razón $k=1$ es la misma figura luego de aplicarle simetría central en el punto O.

3. Determine el valor de la variable x en los siguientes casos

a.



CE=3x

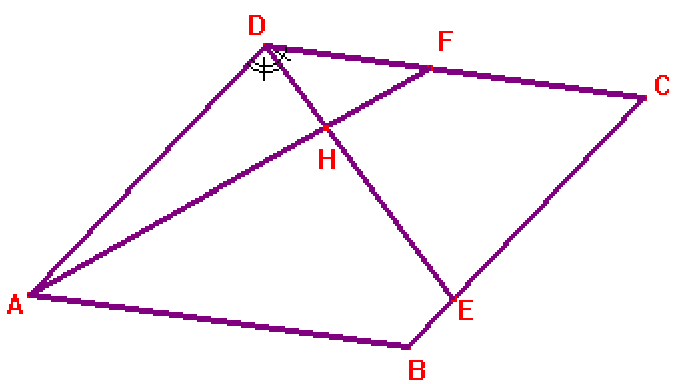
DC=15

AD =11

EB =2x+2

$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

b.



$\angle EDC \cong \angle EDA$

AD =16

FC =8

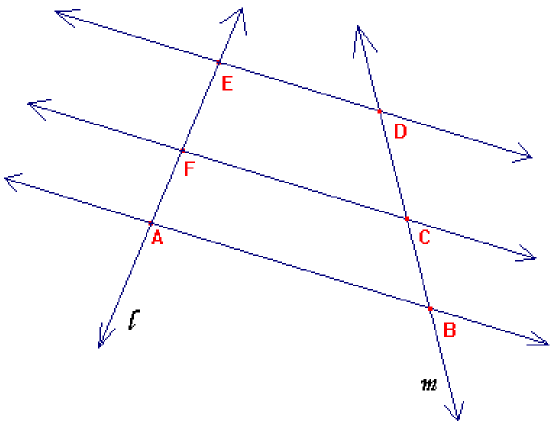
AH =13

HF = x

AB =14

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

c.



AE =15

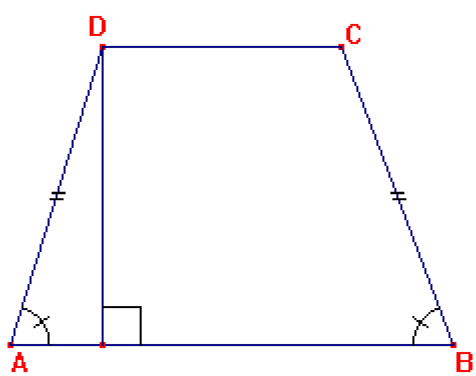
FE =6

DC =x

BC =12

$\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

d.



DC = 20

AD = 8

AB = 30

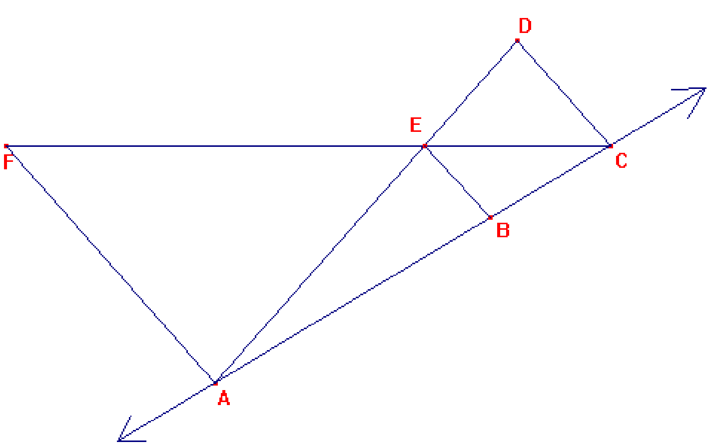
DE = x

$m(\angle ABC) = 45^\circ$

$m(\angle DEA) = 90^\circ$

$\overline{DA} \cong \overline{CB}$

4. En la siguiente figura:



FA =x

DC =y

EB =z

AB =p

BC =q

$m(\angle ABE) = 90^\circ$

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overline{FA}$

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overline{EB}$

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overline{DC}$

Según la figura, ¿cuáles de las siguientes proporciones son verdaderas?

$$\frac{z}{y} = \frac{p}{q}; \quad \frac{z}{y} = \frac{p}{p+q}; \quad \frac{z}{x} = \frac{q}{p} \quad \frac{z}{x} = \frac{q}{p+q}$$

5. **Dado un pentágono, construir uno semejante al dado, cuyo tamaño sea el doble del original.**
6. **Sobre un segmento dado, construir un triángulo semejante a un triángulo dado.**

ANEXO C. ACTIVIDAD 2. PRUEBA DE NIVEL CERO.

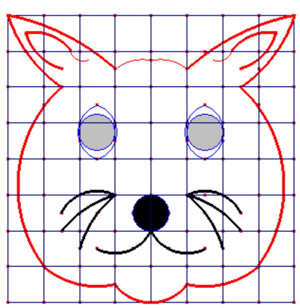
UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
II PERÍODO ACADÉMICO DE 2003

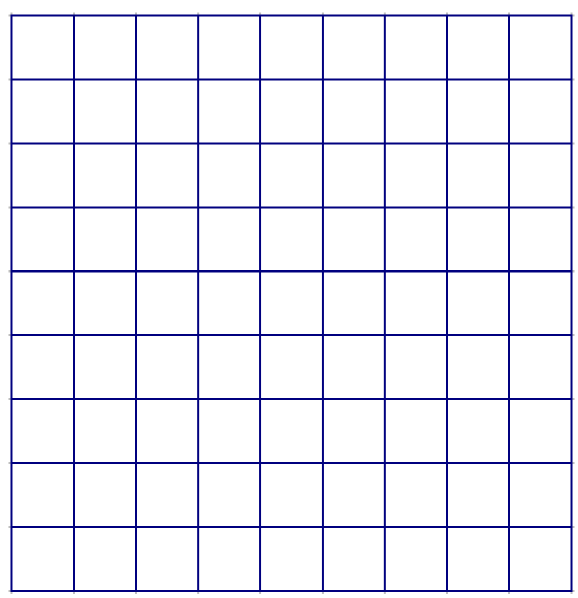
Nombre:____

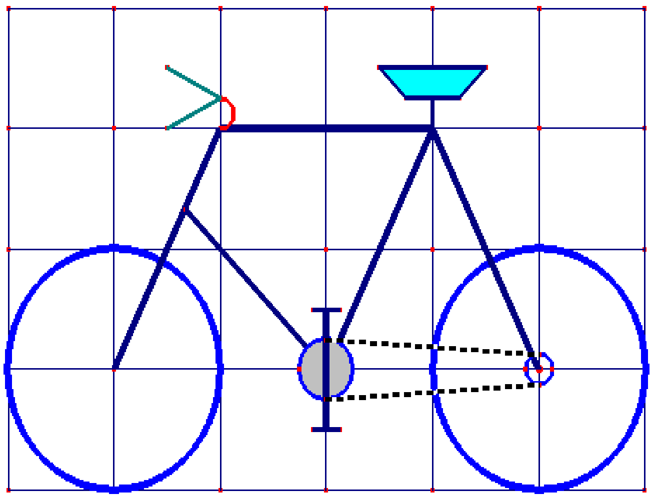
Curso: ______________________

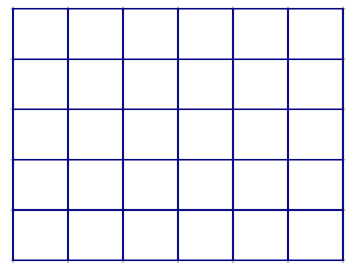
Después de haber estudiado los Movimientos en el Plano, presentaremos una transformación especial definida en un plano α. Debes desarrollar cada uno de los enunciados propuestos en esta guía, dado que es importante indagar sobre tus conocimientos iniciales frente al tema que pretenderemos abordar.

1. **Reproduzca los siguientes dibujos, utilizando las cuadrículas que aparecen frente a cada figura.**



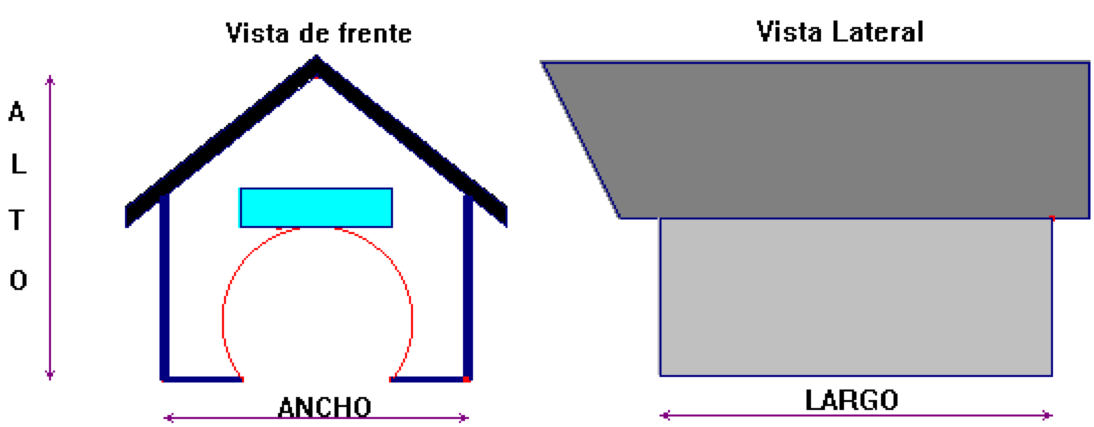






- Describe el procedimiento empleado al dibujar la bicicleta y el gato.
- Al reproducir la bicicleta y el gato, sobre las cuadrículas, ¿Qué puedes deducir del procedimiento empleado en cada caso?
- Enumera algunas situaciones donde sea necesario aplicar estos procedimientos.

2. Cada centímetro en la siguiente figura representa en realidad 25 cm. De acuerdo con esta información, completa la tabla:



	LONGITUD EN EL DIBUJO	LONGITUD REAL
ALTO		
ANCHO		
LARGO		
LARGO DEL TECHO		
ALTO DE LA PUERTA		

3. **14 operarios efectúan un trabajo en 6 días. ¿Cuánto demorarían 42 operarios trabajando la misma cantidad de horas diarias?**

4. **Un terreno rectangular tiene 18 m. de frente y 30 m. de fondo. Si su fondo aumentara a 35 m., ¿cuál debería ser su frente de tal forma que su área se mantuviese igual?**

5. **Se sabe que el área de un cuadrado es proporcional al cuadrado de su diagonal; donde el área de cierto cuadrado es 18 cm^2 y su diagonal mide 6 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado si se sabe que su diagonal mide 8 cm?**

ANEXO D. ACTIVIDAD 3. PRUEBA DE NIVEL 1.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
II PERIODO ACADEMICO DE 2003

Nombre: ____

Curso: _____________

1. **Dado cualquier segmento divídalo en segmentos proporcionales.**

2. **Construya una figura semejante a esta casa.**

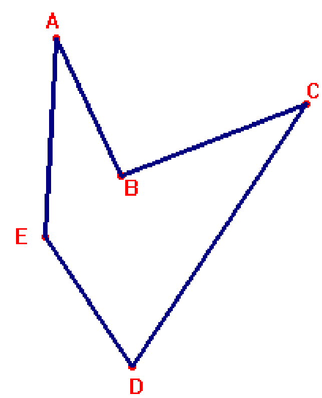
3. **Construir el medio proporcional de dos segmentos dados.**

4. **Construir un triángulo semejante a uno dado, a partir de un segmento dado como base.**

5. **Dado un pentágono ABCDE y un punto *O*, hallar la figura homotética de razón 2 si:**

   a) ***O* está en el interior de la figura.**

   b) ***O* está por fuera de la figura.**



ANEXO E. ACTIVIDAD 4. PRUEBA DE NIVEL DOS, EXAMEN FINAL TEMA A.

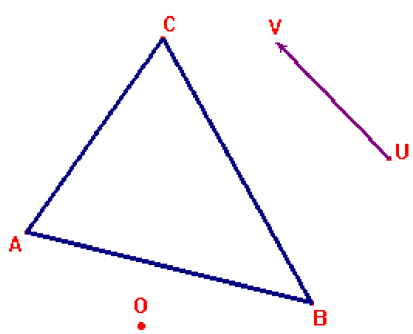
UNIVERSIDAD DEL CAUCA.
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
EXAMEN FINAL DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA

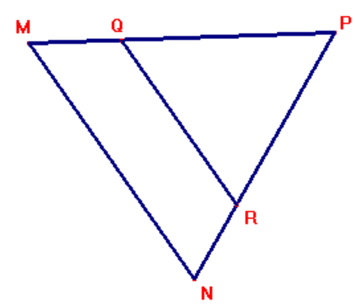
1. En cada una de las siguientes proposiciones establezca el valor de verdad de cada una de ellas. En cada caso argumente su respuesta. RESPUESTA SIN JUSTIFICACIÓN NO SERÁ VALORADA.

a) Si la medida de un ángulo es el doble de su complemento, entonces la medida del ángulo es 15°.
b) Dos triángulos rectángulos cualesquiera siempre son semejantes.
c) La simetría central es un movimiento indirecto del plano.
d) La semejanza es un caso especial de congruencia.
e) Las diagonales de un paralelogramo cualesquiera son congruentes.

2. Considere el Δ ABC de la izquierda. Encontrar:

a) 💧(Δ✌👌👍)$_{⚐}$ b) ❄$_{\mathbf{UV}}$(Δ✌👌👍)

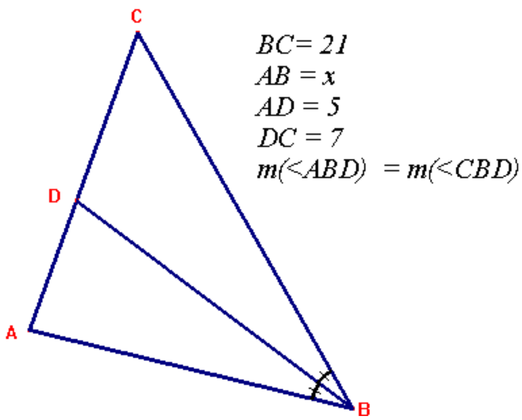


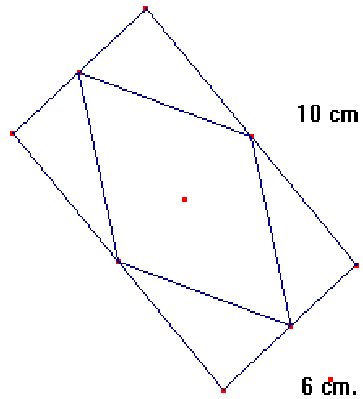


3. a) En el triángulo de la derecha MNP, si $\overline{✈☼}$ || $\overline{💣☠}$, complete la siguiente afirmación:

$$\frac{⚐💣}{⚐✈} = \frac{?}{?}$$

b) Determine el valor de *x* *(figura de la izquierda).*





4. En la figura de la derecha, calcular el área de la parte sombreada.

ANEXO F. ACTIVIDAD 4. PRUEBA DE NIVEL 2, EXAMEN FINAL TEMA B.

UNIVERSIDAD DEL CAUCA.
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
EXAMEN FINAL DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA

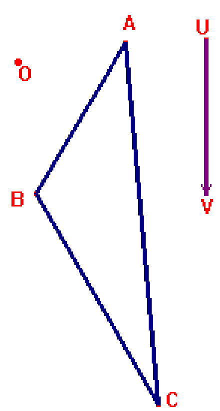
1. En cada una de las siguientes proposiciones establezca el valor de verdad de cada una de ellas. En cada caso argumente su respuesta. RESPUESTA SIN JUSTIFICACIÓN NO SERÁ VALORADA.

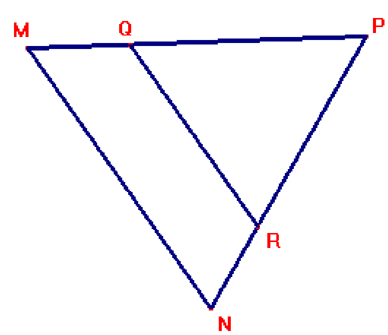
a) En todo cuadrilátero la suma de las medidas de sus ángulos interiores equivale a 4 rectos.
b) Dos triángulos isósceles son semejantes cuando tienen un ángulo congruente.
c) La medida de un ángulo interior en la circunferencia es la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.
d) La homotecia es un movimiento en el plano.
e) Si 💧(✌👌)🏳 ≅ ✌' 👌, entonces ✌👌 ∥ ✌' 👌.

2. Considere el Δ ABC. Encontrar**:**

a) 💧(Δ✌👌👍)🏳

b) ❄$_{UV}$ (Δ✌👌👍)



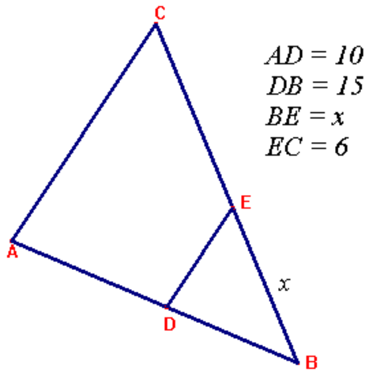


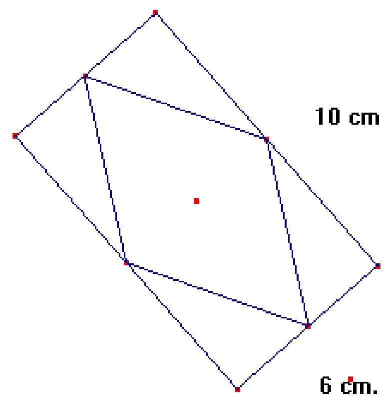
3. a) En el triángulo de la derecha MNP, si ✈☼ ∥ 💣☠, complete la siguiente afirmación:

$$\frac{?}{?} = \frac{✈💣}{⚐💣}$$

b) Determine el valor de *x.(figura de la izquierda).*

$$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$$





4. En la figura de la derecha, calcular el área de la parte sombreada.

ANEXO G. ACTIVIDAD 4. PRUEBA DE NIVEL DOS, EXAMEN FINAL TEMA C.

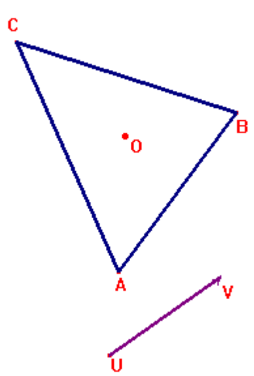
UNIVERSIDAD DEL CAUCA.
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
EXAMEN FINAL DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA

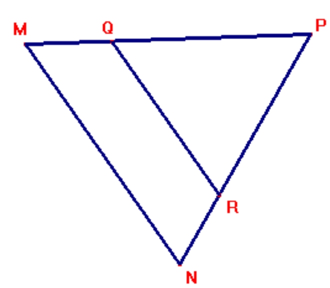
1. En cada una de las siguientes proposiciones establezca el valor de verdad de cada una de ellas. En cada caso argumente su respuesta. RESPUESTA SIN JUSTIFICACIÓN NO SERÁ VALORADA.

a) Dos triángulos son congruentes si sus ángulos respectivos son congruentes.
b) Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivos proporcionales.
c) La mediatriz de un segmento es cualquier recta perpendicular a este.
d) Si Δ✌👌👍 y Δ👎☜☞ son triángulos tales que $\angle$✌ $\cong$ $\angle$👎 y $\angle$👌 $\cong$ $\angle$☜ entonces los triángulos son semejantes.
e) Dos vectores son iguales si tienen igual dirección y el mismo sentido.

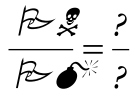
2. Considere el ΔABC de la izquierda. Encontrar:

a) 💧(Δ✌👌👍)🏳 **b)** ❄$_{UV}$(Δ✌👌👍)



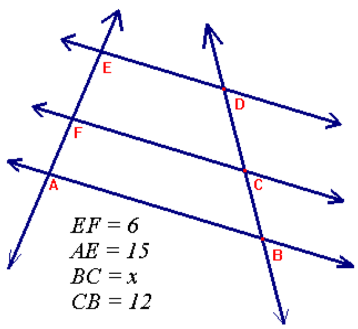


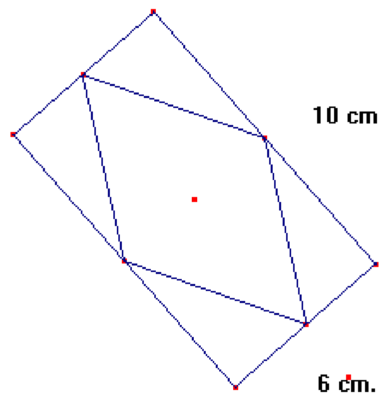
3. **a)** En el triángulo de la derecha MNP, si $\overline{\text{✈☼}}$ || $\overline{\text{💣☠}}$, complete la siguiente afirmación:



b) Determine el valor de *x.*

$$\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$$





4. . En la figura de la derecha, calcular el área de la parte sombreada