

**FUNDAMENTOS DE COLOREADO DE GRAFOS Y  
TEORÍA DE RAMSEY**

**SAMIN INGRITH CERÓN BRAVO  
WILSON ARLEY MARTÍNEZ FLOR  
LILIANA LUCÍA PALECHOR SILVA**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA  
EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
POPAYÁN  
2005**

# FUNDAMENTOS DE COLOREADO DE GRAFOS Y TEORÍA DE RAMSEY

Trabajo de Grado presentado como requisito para optar a los títulos de  
Licenciado en Educación con Especialidad en Matemáticas y Matemático

Estudiantes

**SAMIN INGRITH CERÓN BRAVO  
WILSON ARLEY MARTÍNEZ FLOR  
LILIANA LUCÍA PALECHOR SILVA**

Director

**CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE**

UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA  
EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
POPAYÁN  
2005

**Nota de aceptación:**

---

---

---

---

---

---

---

---

**Director:** \_\_\_\_\_  
*Dr. Carlos Alberto Trujillo Solarte*

**Jurado:** \_\_\_\_\_  
*Dr. Luis Eduardo Montoya Delgado*

**Jurado:** \_\_\_\_\_  
*Mg. Mauricio Maca Chagüendo*

**Fecha de sustentación: Popayán, 8 de septiembre de 2005.**

*Dios por habernos dado un universo  
escrito con el lenguaje de las matemáticas.*

*A nuestros Padres, Profesores, Familiares y Amigos,  
que con su dedicación y estímulo han hecho  
posible la gran aventura de empezar a comprender éste lenguaje.*

## TABLA DE CONTENIDO

		Pág.
	<b>INTRODUCCIÓN</b>	9
1.	<b>FUNDAMENTOS SOBRE GRAFOS</b>	10
1.1.	Conceptos y resultados básicos	10
1.2.	Algunas clases de grafos y operaciones entre grafos	14
1.2.1.	Grafos especiales	14
1.2.2.	Operaciones con grafos	18
1.2.3.	Resultados obtenidos de las operaciones con grafos	18
2.	<b>PROBLEMA DEL NÚMERO CROMÁTICO</b>	19
2.1.	Coloreado de los vértices de un grafo	19
2.2.	Números cromáticos de la suma, unión y producto de dos grafos	24
2.3.	Cotas inferiores para $\chi(G)$	26
2.4.	Cotas superiores para $\chi(G)$	27
2.5.	Algoritmo voraz o codicioso (greedy)	28
2.6.	Una cota de $\chi(G)$ derivada de grafos inducidos	30
2.7.	Una cota de $\chi(G)$ derivada de grafos $k$ -críticos	32
2.8.	Una cota de $\chi(G)$ derivada de un ordenamiento de los vértices	33
2.9.	Una cota de $\chi(G)$ derivada de orientaciones	35
2.10.	Una cota de $\chi(G)$ derivada de grafos conexos y no $k$ -regulares	38
2.11.	Problemas extremales	43
3.	<b>PRINCIPIO DEL PALOMAR Y TEOREMA DE RAMSEY</b>	47
3.1.	Versiones del Principio del Palomar	47
3.2.	Aplicaciones del Principio del Palomar	52
3.2.1.	Teorema de Erdős-Szekeres	53
3.2.2.	Lema de Dilworth	55
3.2.3.	Teorema de Sperner	58
3.3.	Versiones del Teorema de Ramsey	60
3.3.1.	El Principio del Palomar a partir del Número de Ramsey	62
3.4.	Demostración del Teorema de Ramsey	63
3.5.	Aplicaciones del Teorema de Ramsey	68
3.5.1.	Aplicación a Sucesiones	68
3.5.2.	Versión infinita del Teorema de Erdős-Szekeres	69
3.5.3.	Aplicación a Teoría de Grupos	70
3.5.4.	Aplicación Geométrica	70
3.5.5.	Aplicación a Teoría de Números	72
4.	<b>NÚMEROS DE RAMSEY</b>	76

	Pág.
4.1. Interpretación del número $R(3, 3)$	76
4.2. $(m, n) - grafos$	78
4.3. Números de Ramsey en términos de $(m, n) - grafos$	86
4.4. Grafos cíclicos	91
4.5. Los números $R(3, 3)$ , $R(3, 4)$ , $R(3, 5)$ y $R(4, 4)$	97
4.6. El número $R(3, 6)$	98
4.7. Una cota superior de $R(3, 12)$	107
<b>APÉNDICE</b>	<b>117</b>
A. El Polinomio Cromático	117
B. Teorema de los Cuatro Colores	125
C. Tabla Actualizada de Números de Ramsey	135
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>139</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>140</b>
<b>ÍNDICE</b>	<b>142</b>

## TABLA DE SÍMBOLOS

$A = A_G$	Conjunto de aristas del grafo $G$
$ A $	Tamaño del grafo $G$
$B_{s,r}$	Grafo bipartito
$B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$	Grafo $k$ -partito
$C_l$	Ciclo de longitud $l$
$d(v_i, v_j)$	Distancia de $v_i$ a $v_j$
$D = (V(D), A(D))$	Grafo orientado
$d_G$	Densidad de aristas en un grafo $G$
$e(m, n, p)$	Mínimo número de aristas en un $(m, n)$ - grafo con $p$ vértices
$f^{-1}$	Inversa de la función $f$ .
$G = (V, A) = (V_G, A_G)$	Grafo simple (sobre $V$ )
$G = (V_G, A_G)$	Grafo simple (sobre $V_G$ )
$G = (V, \emptyset)$	Grafo nulo
$\overline{G} = (V, \overline{A})$	Grafo complemento de $G$
$gr(x)$	Grado del vértice $x$
$gr_2(v)$	Segundo grado de un vértice $v$
$G + H$	Grafo suma de $G$ y $H$
$G \cup H$	Grafo unión de $G$ y $H$
$G \times H$	Grafo producto cartesiano de $G$ y $H$
$(G, \phi)$	Grafo etiquetado
$G - v$	Grafo que surge de eliminar el vértice $v$ del grafo $G$
$G - S$	Grafo que surge de eliminar un subconjunto $S$ de vértices de $G$
$G - a = G^{(a)}$	Grafo que surge de eliminar la arista $a$ del grafo $G$
$G_{(a)}$	Grafo que surge del grafo $G^{(a)}$ , al identificar los extremos de la arista $a$
$H \subseteq G$	Subgrafo de $G$
$H \subset G$	Subgrafo propio de $G$
$H_1(v)$	Subgrafo inducido, por el conjunto de vértices adyacentes a $v$
$H_2(v)$	Subgrafo inducido, por el conjunto de vértices independientes a $v$
$K_n$	Grafo completo sobre $n$ vértices
$K_{s,r}$	Grafo bipartito completo
$K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$	Grafo $k$ -partito completo
$l(W_G)$	Longitud del camino $W_G$
$m_i(G)$	Número de particiones cromáticas distintas de $G$
$(m, n)$ - grafo	Grafo $G$ con $\omega(G) < m$ y $\alpha(G) < n$
$(m, n; p, q)$ - grafo	$(m, n)$ - grafo con $p$ vértices y con $q$ aristas

$(m, p, W)$	Problema que tiene como solución una secuencia ordenada de $m$ elementos de $W$ , tal que su suma es $p$
$((m, p, W))$	Problema que tiene como solución una secuencia de $m$ elementos de, tal que su suma es $p$ y las sumas de sus términos adyacentes están en $W$ en $i$ clases cromáticas
$N_G(x)$	Vecindad del vértice $x$ en $G$
$N_n = \{1, 2, \dots, n\}$	Conjunto de los primeros $n$ números naturales
$N_m$	Número de de Erdős-Szekeres
$\wp(S)$	Conjunto de partes de $S$
$ R $	Número de flechas en la relación $R$
$R(a)$	Imagen de $a$ mediante la relación $R$
$ R(a) $	Número de flechas que salen de $a$ en la relación $R$
$R^{-1}$	Relación recíproca de $R$
$R^{-1}(b)$	Preimagen de $b$ mediante la relación $R$
$ R^{-1}(b) $	Número de flechas que llegan a $b$ en la relación $R$
$R(p, q)$	Número de Ramsey
$R(p_1, p_2, \dots, p_t; r)$	Número de Ramsey generalizado
$\leq_S$	Orden parcial definido sobre una sucesión $S$
$S(m)$	Número de Schur
$T = (V_T, A_T)$	Árbol
$T_G$	Trayectoria en un grafo $G$
$V = V_G$	Conjunto de vértices de $G$
$ V $	Orden del grafo $G$
$\langle V_I \rangle_G$	Subgrafo inducido por $V_I \subseteq V_G$
$V^{[k]}$	Conjunto de todos los subconjuntos de $V$ con $k$ elementos
$W_D = (v_1, v_2, \dots, v_{l+1})$	Trayectoria orientada de longitud $l$ en $D$
$W_G$	Camino en un grafo $G$
$W(G)$	Conjunto de los pesos de las aristas de $G$
$W(\overline{G})$	Complemento de $W(G)$ en $\{1, 2, \dots, p-1\}$
$W(r, l)$	Número de Van der Waerden
$ X $	Cardinal del conjunto $X$
$\leq_X$	Orden parcial sobre un conjunto $X$
$X(t)$	Colección de subconjuntos del conjunto $N_t$
$\alpha(G)$	Número de independencia de $G$
$\delta(G)$	Mínimo grado de $G$
$\Delta(G)$	Máximo grado de $G$
$\Delta G(X, Y) = X\Delta Y$	Conjunto de aristas de $G$ que tienen un extremo en $X$ y el otro en $Y$
$\kappa(G)$	Vértice-conectividad de $G$
$\chi(G)$	Número cromático de $G$
$\chi(G; k)$	Polinomio cromático de $G$
$\omega(G)$	Número de clique de $G$



## INTRODUCCIÓN

El desarrollo de éste trabajo se realizó en la modalidad de seminario, adscrito al Grupo de Investigación “Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones ERM”, inscrito en la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Cauca y en COLCIENCIAS (Grupo “B-Promisorio”, Convocatoria 2000; “Reconocido”, Convocatoria 2003; Categoría A, Convocatoria 2004). En este grupo se originó un espacio para que estudiantes del Departamento de Matemáticas conocieran temas sobre combinatoria que les permitiera generar ideas, las cuales fundamentaran trabajos de grado.

Así, surgió el interés en el estudio del coloreado de grafos con respecto a vértices y aristas analizando los problemas del número cromático y la Teoría de Ramsey. Situaciones que involucran estos problemas surgen en las diferentes ramas de la ciencia. Por ello es importante estudiar técnicas eficientes que ayuden a encontrar solución a estos problemas.

El contenido de este trabajo está dividido en cuatro partes. La primera constituida por fundamentos sobre grafos, que contiene definiciones y resultados básicos para el desarrollo del texto. En segundo lugar se presentan definiciones y cotas para el problema del número cromático, éste capítulo se amplía en los Apéndices A y B, que se refieren al Polinomio Cromático y al Teorema de Los Cuatro Colores del cual se hace una presentación informal e histórica. Posteriormente, se dedica la tercera parte al Teorema de Ramsey y algunas aplicaciones, para lo cual se presenta como preámbulo el Principio del Palomar. Se termina con un capítulo sobre el cálculo de algunas cotas y números de Ramsey, de lo cual se muestra una tabla actualizada en el Apéndice C.

Para la mejor comprensión de las definiciones y resultados de este documento se incluyen ejemplos e ilustraciones, también se amplían y reorganizan algunas demostraciones, de las cuales se referencian entre corchetes aquellas que se obtuvieron total o parcialmente de la bibliografía, y no se referencian aquellas que se desarrollaron en este estudio.

# 1 FUNDAMENTOS SOBRE GRAFOS

La finalidad de este capítulo es presentar una base conceptual de la teoría de grafos y algunos resultados necesarios para el desarrollo de este trabajo.

## 1.1 Conceptos y resultados básicos

Sea  $V$  un conjunto no vacío y  $k$  un número natural, se denota mediante  $V^{[k]}$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $V$  con  $k$  elementos, es decir

$$V^{[k]} := \{X \subseteq V : |X| = k\}, \text{ donde } |X| \text{ es el cardinal del conjunto } X.$$

**Definición 1.1.1.** Un **grafo simple** (sobre  $V$ ) es un par ordenado

$$G = (V, A) \text{ donde } A \subseteq V^{[2]},$$

$V$  se llama el conjunto de **vértices** de  $G$  y  $A$  el conjunto de **aristas** de  $G$ .  $|V|$  y  $|A|$  se llaman el **orden** y el **tamaño** del grafo  $G$ , respectivamente.

En este documento cuando se haga referencia a un grafo, este será un grafo simple.

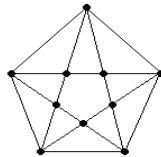
Si  $a = \{x, y\} \in A$ , los vértices  $x, y$  se llaman **adyacentes** o **extremos** de la arista  $a$ . Si  $x \in V$  y para todo  $y \in V$ ,  $\{x, y\} \notin A$ , entonces  $x$  es un **vértice aislado**.

Si  $|V|$  es finito, también lo es  $|A|$  y el grafo  $G = (V, A)$  se dice **finito**. El tamaño de un grafo finito  $G$  es al menos 0 y a lo sumo  $\binom{|V|}{2}$ . Si  $|V|$  es infinito y  $|A|$  es infinito el grafo  $G = (V, A)$  se dice **infinito**.

A menos que se diga lo contrario, los grafos que se estudian en este documento serán finitos.

Cuando sea necesario se notará un grafo  $G = (V, A)$  mediante  $G = (V_G, A_G)$ , para hacer énfasis en que los conjuntos  $V_G$  y  $A_G$ , son los conjuntos de vértices y aristas respectivamente del grafo  $G$ .

Generalmente un grafo se representa gráficamente en forma tal que cada vértice queda representado por un punto en el plano y cada arista por una curva de Jordan que une los representantes de sus extremos, es decir una curva continua entre los extremos que no se cruza a si misma, ver siguiente figura.



**Figura 1.1.** Grafos  $G$ , con  $|V| = 10$  y  $|A| = 20$

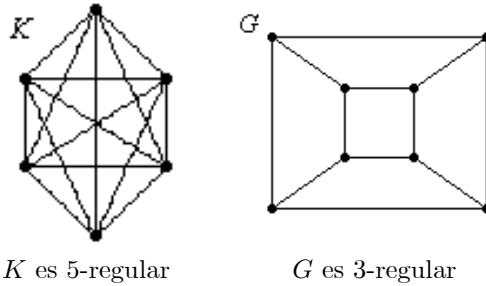
**Definición 1.1.2.** Sean  $G = (V, A)$  un grafo y  $x \in V$ ; mediante  $N_G(x)$  se denota el conjunto de vértices adyacentes a  $x$  (**vecindad** de  $x$ ) y su cardinal es el **grado del vértice**  $x$  en el grafo  $G$ , denotado  $gr(x)$ ; es decir:

$$\begin{aligned} N_G(x) &= \{y \in V : \{x, y\} \in A\} \\ gr(x) &= |N_G(x)| \end{aligned}$$

El **máximo grado** de  $G$  (según vértices) se denota mediante  $\Delta(G)$ , y el **mínimo grado** mediante  $\delta(G)$ ; es decir:

$$\Delta(G) = \text{máx} \{gr(v) : v \in V_G\} \quad \text{y} \quad \delta(G) = \text{mín} \{gr(v) : v \in V_G\}.$$

Si  $\delta(G) = \Delta(G) = k$ , entonces el grafo se llama  **$k$ -regular**. Ver siguiente figura.



**Figura 1.2**

**Lema 1.1.3.** En todo grafo  $G = (V, A)$  se cumple la siguiente igualdad:

$$2|A| = \sum_{v \in V_G} gr(v).$$

*Demostración* [12]: El resultado es inmediato, ya que cuando se suman los grados de los vértices de un grafo, cada arista  $a$  de  $G$  se cuenta dos veces, porque  $a$  tiene dos vértices como extremos.  $\square$

**Corolario 1.1.4.** Todo grafo  $G = (V, A)$  tiene un número par de vértices con grado impar.

*Demostración:* Por el **Lema 1.1.3** se tiene que:

$$2|A| = \sum_{v \in V_G} gr(v).$$

Si se consideran los conjuntos

$$V_1 = \{u \in V_G : gr(u) \text{ es impar}\} \quad \text{y} \quad V_2 = \{w \in V_G : gr(w) \text{ es par}\},$$

entonces

$$\sum_{v \in V_G} gr(v) = \sum_{u \in V_1} gr(u) + \sum_{w \in V_2} gr(w) = 2|A|. \quad (1.1)$$

Ya que la suma de números pares es par, entonces  $\sum_{w \in V_2} gr(w)$  es par. Para que la igualdad (1.1) se cumpla, la suma  $\sum_{u \in V_1} gr(u)$  debe ser par y como  $gr(u) = m_u + 1$ , donde  $m_u$  es un número natural par, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V_1} gr(u) &= \sum_{u \in V_1} (m_u + 1) \\ &= |V_1| + \sum_{u \in V_1} m_u. \end{aligned}$$

Así  $|V_1|$  es par y por lo tanto hay un número par de vértices de grado impar.  $\square$

La demostración del teorema que se enuncia a continuación, utiliza el **Principio del Palomar** en su versión más simple: *Si se tienen  $k + 1$  objetos que están contenidos en  $k$  cajas, entonces hay al menos una caja con al menos 2 objetos.* Este principio se estudiará en el capítulo 3.

**Teorema 1.1.5.** *En cualquier grafo  $G = (V, A)$ , existe por lo menos un par de vértices que tienen el mismo grado.*

*Demostración* [6]: Si  $G$  tiene  $p$  vértices, entonces cada vértice tiene grado igual a uno de los números  $0, 1, \dots, p-1$ . Sin embargo, es imposible para  $G$  tener un vértice de grado 0 y un vértice de grado  $p-1$ . Por lo tanto la lista de los grados de los  $p$  vértices de  $G$  contiene a lo sumo  $p-1$  números diferentes. Por el Principio del Palomar, por lo menos dos vértices tienen el mismo grado.  $\square$

**Definición 1.1.6.** En un grafo  $G$ , el **segundo grado de un vértice**  $v$  denotado  $gr_2(v)$ , es la suma de los grados de los vértices adyacentes a  $v$ . Es decir:

$$gr_2(v) = \sum_{w \in N_G(v)} gr(w).$$

**Lema 1.1.7.** *En todo grafo  $G = (V, A)$  se cumple la siguiente igualdad:*

$$\sum_{v \in V_G} gr_2(v) = \sum_{v \in V_G} (gr(v))^2.$$

*Demostración:* Sea  $|V| = n$  y si se supone que  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , entonces por la **Definición 1.1.6** para cada  $i = 1, \dots, n$  se tiene que:

$$gr_2(v_i) = \sum_{v_j \in N_G(v_i)} gr(v_j).$$

Luego,

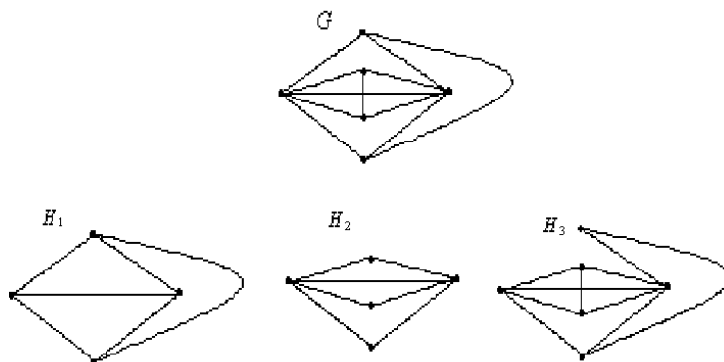
$$\sum_{i=1}^n gr_2(v_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{v_j \in N_G(v_i)} gr(v_j)$$

y si  $v$  es adyacente a  $m_v$  vértices de  $G$ , entonces  $gr(v)$  debe estar  $m_v$  veces en la suma del término derecho de la igualdad anterior, pero  $m_v = gr(v)$  por tanto  $m_v \cdot gr(v) = (gr(v))^2$ .

Esto se puede hacer con cada uno de los vértices obteniendo:

$$\sum_{i=1}^n gr_2(v_i) = \sum_{i=1}^n (gr(v_i))^2. \quad \square$$

**Definición 1.1.8.** Sean  $G = (V_G, A_G)$ ,  $H = (V_H, A_H)$  dos grafos,  $H$  es **subgrafo** de  $G$  si  $V_H \subseteq V_G$  y  $A_H \subseteq A_G$ , donde cada arista en  $A_H$  tiene sus extremos en  $V_H$ . Si  $H$  es **subgrafo** de  $G$ , se escribe  $H \subseteq G$  y se dice que  $G$  contiene a  $H$ . Si  $H$  es **subgrafo** de  $G$  y  $H \neq G$ ,  $H$  se llama **subgrafo propio** de  $G$  y se denota  $H \subset G$ . Ver siguiente figura.



**Figura 1.3.** Subgrafos propios  $H_1, H_2, H_3$  del grafo  $G$

El siguiente resultado responde a la pregunta: ¿cuál es el número mínimo de aristas en el grafo  $G$  para que contenga un triángulo (grafo completo de orden 3), es decir que contenga un grafo con tres vértices y las aristas que unen estos vértices?

**Lema 1.1.9.** Si  $G = (V, A)$  es un grafo, con  $|V| = n$ ,  $n \geq 3$  y  $|A| > \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ , entonces el grafo  $G$  contiene un triángulo.

*Demostración* [6]: Si  $G = (V, A)$  no contiene un triángulo, para  $\{x, y\} \in A$  se tiene que:

$$N_G(x) \cap N_G(y) = \emptyset,$$

luego

$$gr(x) + gr(y) = |N_G(x)| + |N_G(y)| \leq n,$$

porque si no fuera así, existiría un vértice  $v \in N_G(x) \cap N_G(y)$ , entonces para toda arista  $\{x, y\} \in A$  se cumple

$$gr(x) + gr(y) \leq n.$$

Sumando este resultado para cada arista de  $G$  se tiene:

$$\sum_{\{x,y\} \in A} gr(x) + gr(y) \leq n|A|,$$

en esta desigualdad la sumatoria esta formada por los grados de los v\u00e9rtices de  $G$ , tal que para todo  $v \in V$ ,  $gr(v)$  aparece  $gr(v)$  veces en la suma, por tanto:

$$\sum_{\{x,y\} \in A} gr(x) + gr(y) = \sum_{v \in V} (gr(v))^2 \leq n|A|. \quad (1.2)$$

Por el **Lema 1.1.3** se tiene,

$$\left[ \sum_{v \in V} gr(v) \right]^2 = 4|A|^2. \quad (1.3)$$

Por la desigualdad de Cauchy Schwartz,

$$\left[ \sum_{v \in V} gr(v) \cdot 1 \right]^2 \leq \sum_{v \in V} (gr(v))^2 \cdot \sum_{v \in V} 1 = n \sum_{v \in V} (gr(v))^2. \quad (1.4)$$

De las desigualdades (1.3) y (1.4) se deduce que:

$$4|A|^2 \leq n \sum_{v \in V} (gr(v))^2,$$

y utilizando (1.2) resulta

$$4|A|^2 \leq n \sum_{v \in V} (gr(v))^2 \leq n^2 |A|.$$

Por tanto,

$$|A| \leq \frac{n^2}{4}.$$

En conclusi\u00f3n  $|A| > \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$  para que el grafo  $G$  contenga un tri\u00e1ngulo.  $\square$

## 1.2 Algunas clases de grafos y operaciones entre grafos

A continuaci\u00f3n se presenta un listado de grafos que se utilizan en el desarrollo de este trabajo. Ver **Figuras 1.5** y **1.6**.

### 1.2.1 Grafos especiales

Sea  $G = (V, A)$  un grafo.

- i) Si  $A = \emptyset$ , el grafo  $G$  se llama **grafo nulo** (sobre  $V$ ) y se denota como  $G = (V, \emptyset)$ .

- ii) Si  $A = V^{[2]}$  es decir  $|A| = \binom{|V|}{2}$  el grafo  $G$  se llama **grafo completo** sobre  $V$  y se denota  $K_{|V|} = (V, V^{[2]})$ .  $K_n$  denota el grafo completo sobre  $n$  vértices. Todo grafo completo con  $n$  vértices es  $(n - 1)$ -regular.
- iii) El **grafo complemento** del grafo  $G$  (respecto de adyacencia) es el grafo  $\overline{G} = (V, \overline{A})$  donde  $\overline{A} = V^{[2]} \setminus A$ . El complemento de un grafo completo  $K_n$  es el grafo nulo sobre  $V_{K_n}$ ,  $\overline{K_n} = (V_{K_n}, \emptyset)$ .
- iv) Sea  $V = V_1 \cup V_2$ , donde  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  y  $|V_1| = s$ ,  $|V_2| = r$ . Si

$$\{x, y\} \in A \implies x \in V_1, y \in V_2,$$

el grafo  $G$  recibe el nombre de **grafo bipartito** (sobre  $V$ ) y se denota  $B_{s,r}$ .  $G$  se dice **grafo bipartito completo** cuando

$$\{x, y\} \in A \iff x \in V_1, y \in V_2$$

en tal caso  $G$  se denota mediante  $K_{s,r}$ .

- v) Sea  $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ , donde  $|V_1| = n_1$ ,  $|V_2| = n_2, \dots, |V_k| = n_k$  y  $V_i \cap V_j = \emptyset$ , para todo par  $i, j$  con  $i \neq j$ . Si

$$\{x, y\} \in A \implies (\exists i, j : i \neq j)(x \in V_i, y \in V_j),$$

el grafo  $G$  recibe el nombre de **k-partito** (sobre  $V$ ) y se denota mediante  $B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ .  $G$  se dice **k-partito completo** cuando

$$\{x, y\} \in A \iff (\exists i, j : i \neq j)(x \in V_i, y \in V_j),$$

en tal caso,  $G$  se denota mediante  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ .

**Definición 1.2.1.1.** Un **camino** en un grafo  $G = (V, A)$ , es una secuencia de vértices (no necesariamente distintos) del grafo  $G$ ,

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_t, v_{t+1}$$

de tal forma que  $a_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  es arista de  $G$ , para todo  $i$ , con  $1 \leq i \leq t$ . Un camino en  $G$  se denota  $W_G$  y se representa mediante  $W_G = (v_1, v_2, \dots, v_{t+1})$ , además se dice que  $W_G$  es un camino con extremos  $v_1$  y  $v_{t+1}$ . El número de aristas contenidas en el camino es la **longitud del camino** y se denota  $l(W_G)$ .

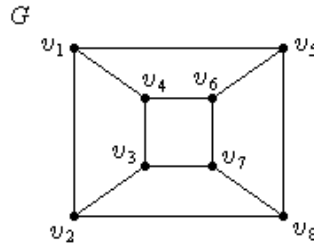
Si  $v_i, v_j \in V$ , entonces la **distancia** de  $v_i$  a  $v_j$ , denotada  $d(v_i, v_j)$ , se define como:

$$d(v_i, v_j) := \min \{l(W_G) : W_G \text{ es un camino en } G \text{ con extremos } v_i \text{ y } v_j\}$$

**Definición 1.2.1.2.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo. Un camino de la forma  $W_G = (v_1, v_2, \dots, v_{l+1})$  se llama una **trayectoria de longitud  $l$** , si todos los

vértices  $v_i$ , para  $1 \leq i \leq l+1$  son distintos, excepto posiblemente  $v_1$  y  $v_{l+1}$ . Una trayectoria de  $G$  se denota  $T_G$  y se representa mediante  $T_G = (v_1, v_2, \dots, v_{l+1})$ . Cuando  $v_1 = v_{l+1}$  y  $l \geq 3$  a la trayectoria se le llama: **trayectoria cerrada de longitud  $l$** .

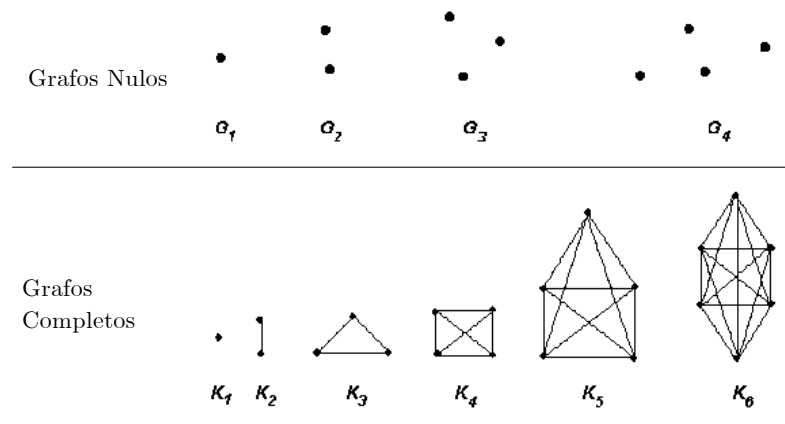
En el grafo de la **Figura 1.4**, hay un camino  $W_G = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_5, v_6)$  de  $l(W_G) = 6$  y una trayectoria  $T_G = (v_1, v_5, v_6)$ .



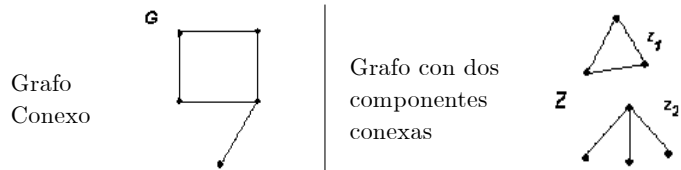
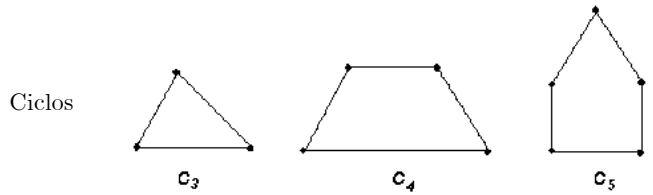
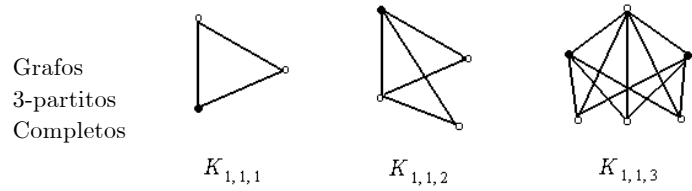
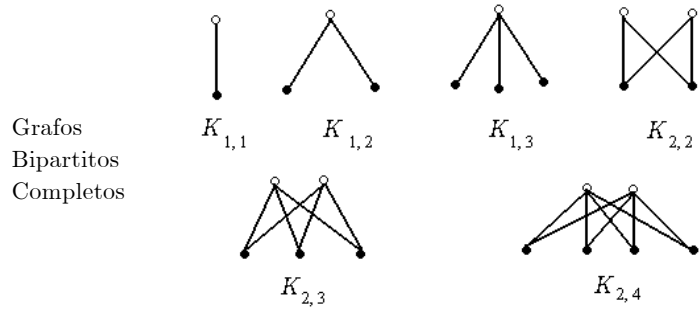
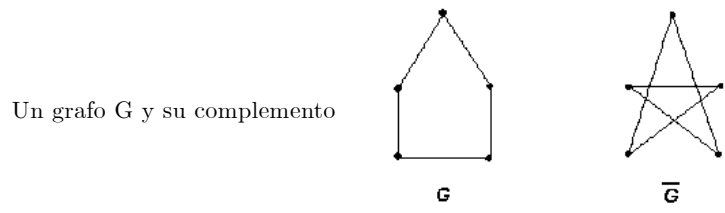
**Figura 1.4**

- vi) El grafo  $C_l = (V, A)$  formado por los vértices y las aristas de una trayectoria cerrada  $T_G = (v_1, v_2, \dots, v_{l+1})$ , se llama **ciclo de longitud  $l$** . Los ciclos de longitud  $l$  corresponden a los polígonos de  $l$  lados ( $l$ -ágonos).
- vii) Un grafo  $G$ , se llama **conexo** si cualquier par de vértices están unidos por una trayectoria. Un **subgrafo conexo maximal de  $G$**  es un subgrafo conexo con el mayor número de vértices posible y se llama una **componente conexa** de  $G$ .
- viii) Si un grafo  $T = (V_T, A_T)$  es conexo y no contiene ciclos, entonces se llama un **árbol**. Un grafo (conexo o no) sin ciclos se llama un **bosque**. Cada componente conexa de un bosque es un árbol.

**Figura 1.5. Algunos grafos especiales.**







### 1.2.2 Operaciones con grafos

Sean  $G = (V_G, A_G)$  y  $H = (V_H, A_H)$  dos grafos tales que  $V_G \cap V_H = \emptyset$ . Las siguientes son algunas operaciones que se pueden realizar con  $G$  y  $H$ .

- i) El **grafo suma** de  $G$  y  $H$  es el grafo  $G + H = (V_+, A_+)$  donde

$$V_+ = V_G \cup V_H \text{ y } A_+ = A_G \cup A_H.$$

- ii) El **grafo unión** de  $G$  y  $H$  es el grafo  $G \cup H = (V_\cup, A_\cup)$  donde

$$V_\cup = V_G \cup V_H \text{ y } A_\cup = A_G \cup A_H \cup \{\{x, y\} : x \in V_G, y \in V_H\}$$

- iii) El **grafo producto cartesiano** de  $G$  y  $H$  es el grafo  $G \times H = (V_\times, A_\times)$  donde  $V_\times = V_G \times V_H$ , y  $A_\times$  es el conjunto de todas las aristas de la forma  $\{(u, v), (u', v')\}$  tales que:

$$(u = u' \in V_G \text{ y } \{v, v'\} \in A_H) \text{ o } (v = v' \in V_H \text{ y } \{u, u'\} \in A_G)$$

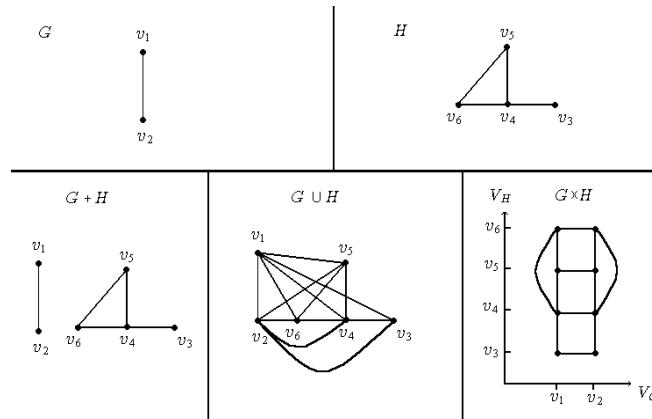


Figura 1.6

### 1.2.3 Resultados obtenidos de las operaciones con grafos

- i) Sea  $G = (V, A)$  un grafo con componentes conexas  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , entonces

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_k.$$

- ii) El complemento de  $K_{s,r}$  es el grafo  $K_s + K_r$ .

- iii) El complemento de  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  es  $K_{n_1} + K_{n_2} + \dots + K_{n_k}$ .

## 2 PROBLEMA DEL NÚMERO CROMÁTICO

Si se tiene un grupo de personas que se han inscrito en los diferentes cursos de un congreso, el problema de organizar el horario de tal forma que ninguna persona deje de asistir a alguno de los cursos se puede mirar en términos de grafos.

Sea  $G = (V_G, A_G)$  el grafo, donde el conjunto de vértices representa los cursos y una arista indica que al menos una persona esta inscrita en los dos cursos que relaciona la arista. La solución al problema es equivalente a encontrar el valor mínimo de  $k$  para el cual el conjunto de vértices  $V_G$  puede ser particionado en  $k$  clases,  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , tal que ninguna arista una dos vértices de la misma clase.

De manera similar el problema de colorear un mapa con un mínimo de colores de tal forma que regiones vecinas tengan distinto color, se representa de igual manera que el anterior. Las regiones conforman el conjunto de vértices y una arista es la relación de vecindad entre regiones. De este problema surgió el famoso Teorema de los Cuatro Colores probado en 1976 por K. Appel y W. Haken. En términos de mapas este teorema afirma que todo mapa plano puede ser coloreado con a lo sumo cuatro colores de tal forma que ningún par de territorios fronterizos tengan el mismo color. (Ver apéndice B).

En la solución de este tipo de problemas interviene el estudio del número cromático de un grafo, para el cual en este capítulo se presentan algunas cotas.

### 2.1 Coloreado de los vértices de un grafo

La idea de “pintar mapas”, sin que regiones vecinas estén pintadas del mismo color, conlleva a las nociones de “coloración de vértices de un grafo y número cromático”.

¿Cuál es el menor valor de  $k$  tal que al formar una partición  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  de  $V_G$ , ninguna arista una dos vértices de la misma clase?, es decir: ¿cuál es el menor valor de  $k$  tal que si  $\{x, y\} \in A_G$ , entonces  $x \in V_i, y \in V_j$  para  $i \neq j$ ?. Este mínimo recibe el nombre de número cromático del grafo  $G$  y se denota por  $\chi(G)$ .

**Definición 2.1.1.** Un **etiquetado** de un grafo  $G = (V, A)$  con  $|V| = n$ , es una función biyectiva:

$$\phi : V \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

Un **grafo etiquetado** es un par  $(G, \phi)$ , donde  $G$  es un grafo y  $\phi$  es un etiquetado de  $G$ , tal que, si  $v \in V$  y  $\phi(v) = i$ ,  $v$  se nombra  $v_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ , así se genera un orden para los vértices de  $G$ , esto es  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Para un **ejemplo** de grafo etiquetado, ver siguiente figura:

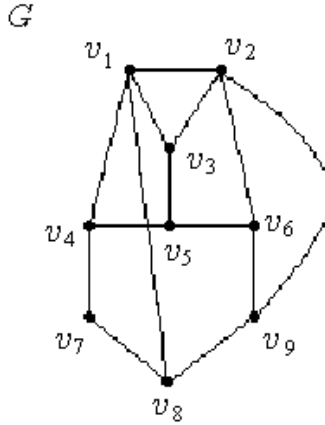


Figura 2.1.

**Definición 2.1.2.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo. Un subconjunto  $U$  de vértices en  $V$  se llama **independiente** en  $G$  si ningún par de vértices en  $U$  son adyacentes. El **número de independencia de  $G$**  se define como:

$$\alpha(G) := \text{máx}\{|U| : U \text{ es independiente en } G\}.$$

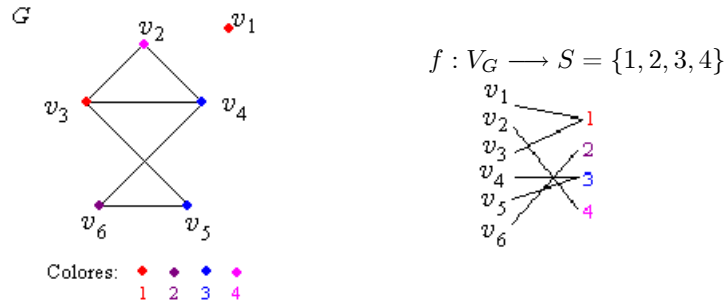
Además, se dice que  $U$  es independiente a  $v$ , para algún  $v \in V$ , cuando ninguno de los vértices de  $U$  es adyacente a  $v$ .

**Definición 2.1.3.** Sea  $G = (V_G, A_G)$  un grafo, una  **$k$ -coloración propia de  $G$**  es una función  $\mathcal{C} : V_G \rightarrow S$ , donde  $S$  es un conjunto con  $k$  elementos, tal que  $\mathcal{C}^{-1}(i)$  es un conjunto independiente para todo  $1 \leq i \leq k$  (es decir  $\mathcal{C}(x) \neq \mathcal{C}(y)$  para todo  $\{x, y\} \in A_G$ ). Es claro que el conjunto  $S$  puede ser cualquier conjunto con  $k$  elementos, por ejemplo  $S = \{1, \dots, k\}$ . Se dice que el grafo  $G$  es  **$k$ -coloreable** si admite una  $k$ -coloración propia  $\mathcal{C}$ . Los valores que toma  $\mathcal{C}$  son llamados colores y los vértices que pertenecen a  $\mathcal{C}^{-1}(i)$  para cada  $1 \leq i \leq k$  son del mismo color y forman una **clase cromática** que genera una partición de  $V_G$ , teniendo así una **coloración de los vértices del grafo  $G$** .

El **número cromático de  $G$**  se define como:

$$\chi(G) := \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : \text{existe una } k\text{-coloración propia de } G\}.$$

Si  $\chi(G) = k$  se dice que  $G$  es  **$k$ -cromático** y una  $k$ -coloración propia de  $G$  se llama una **coloración óptima de  $G$** . Por **ejemplo** en el grafo  $G$  de la siguiente figura:



**Figura 2.2.** Una 4-coloración propia de  $G$

1, 2, 3 y 4 son llamados colores. Las clases cromáticas del grafo  $G$  de la **Figura 2.2** son:  $V_1 = \{v_1, v_3\}$ ,  $V_2 = \{v_6\}$ ,  $V_3 = \{v_4, v_5\}$  y  $V_4 = \{v_2\}$ , por tanto  $V_G = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ .

**Lema 2.1.4.** Un grafo  $G = (V, A)$  es  $k$ -coloreable si y sólo si es  $k$ -partito.

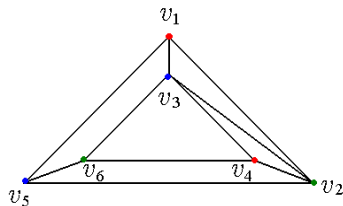
*Demostración:* Si  $G$  es  $k$ -coloreable,  $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ , con  $V_i \cap V_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ , donde los  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , son las clases cromáticas generadas por la  $k$ -coloración propia de  $G$ . Por lo tanto, si  $\{x, y\} \in A$ , entonces existen  $i, j$  con  $i \neq j$ , tales que  $x \in V_i, y \in V_j$ . Así,  $G$  es  $k$ -partito.

Si  $G$  es  $k$ -partito, entonces  $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$  donde  $V_i \cap V_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ , y si  $\{x, y\} \in A$ , entonces existen  $i, j$  con  $i \neq j$ , tales que  $x \in V_i, y \in V_j$ .

Ahora, sea  $\mathcal{C} : V_G \rightarrow \{1, \dots, k\}$  la función tal que  $\mathcal{C}(x) = i$  para todo  $x \in V_i$ ;  $1 \leq i \leq k$ , ésta función es una  $k$ -coloración propia de  $G$ , ya que  $\mathcal{C}(x) \neq \mathcal{C}(y)$  si  $\{x, y\} \in A$ . Por tanto  $G$  es  $k$ -coloreable.  $\square$

**Definición 2.1.5.** Sea  $(G, \phi)$  un grafo etiquetado. Se dice que  $(G, \phi)$  es  $k$ -coloreable en forma única si  $\chi(G) = k$  y cualquier  $k$ -coloración propia de  $G$  induce la misma partición cromática.

Por **ejemplo** el grafo de la **Figura 2.3** se puede colorear con tres colores de varias maneras induciendo la misma partición cromática  $\{v_1, v_4\}, \{v_6, v_2\}, \{v_5, v_3\}$ . Es decir, al intentar colorear este grafo de otra manera con tres colores siempre se obtiene la misma partición.



**Figura 2.3.**

**Lema 2.1.6.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo  $k$ -coloreable en forma única con clases cromáticas  $V_1, V_2, \dots, V_k$ . Si  $x \in V_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , entonces existe al menos un  $y \in V_j$ , para todo  $j \neq i$ , tal que  $\{x, y\} \in A$ .

*Demostración* [11]: Sea  $G = (V, A)$  grafo  $k$ -coloreable en forma única con clases cromáticas  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , y sea  $x \in V_i$  tal que no existe  $y \in V_j$  para el cual  $\{x, y\} \in A$ , así  $x$  puede ser recoloreado con el color de la clase  $V_j$ , entonces se genera otra partición cromática de  $G$ , lo cual contradice el hecho que el grafo  $G$  es  $k$ -coloreable en forma única.  $\square$

**Corolario 2.1.7.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo  $k$ -coloreable en forma única, entonces  $gr(x) \geq k - 1$ , para todo  $x \in V$ .

*Demostración* [11]: Por el lema anterior si  $x \in V_i$  existe al menos una arista  $\{x, y\} \in A$  con  $y \in V_j$ , para todo  $j \neq i$ , así  $x$  es adyacente al menos a  $k - 1$  vértices de  $G$ .  $\square$

**Proposición 2.1.8.** Un ciclo  $C_n = (V, A)$  es 2-coloreable si y sólo si  $n$  es par.

*Demostración:* Si  $C_n$  es 2-coloreable, entonces  $V = P \cup Q$ , donde  $P \cap Q = \emptyset$ ;  $P$  es el conjunto de los  $v_i \in V$  tales que  $\mathcal{C}(v_i) = 1$  y  $Q$  es el conjunto de los  $v_j \in V$  tales que  $\mathcal{C}(v_j) = 2$ . Si  $v_1 \in P$ , entonces  $v_2$  y  $v_n \in Q$ , ya que  $\{v_1, v_2\}, \{v_n, v_1\} \in A$ , además  $v_3 \in P$ , ya que  $\{v_2, v_3\} \in A$ , al continuar éste proceso se obtiene que en  $Q$  están los  $v_j$  donde  $j$  es par y como  $v_n \in Q$ ,  $n$  es par.

Si  $C_n$  es un ciclo par  $n = 2t$ ,  $t > 1$ , se debe demostrar que  $C_n$  es 2-coloreable; se define la función  $\mathcal{C} : V \rightarrow S$ ,  $\mathcal{C}(v_i) = 1$  si  $i$  es impar y  $\mathcal{C}(v_i) = 2$  si  $i$  es par, esta es una función de coloración ya que para cada arista  $\{v_i, v_{i+1}\} \in A$ ,  $\mathcal{C}(v_i) \neq \mathcal{C}(v_{i+1})$ . Por lo tanto  $C_n$  es 2-coloreable.  $\square$

**Proposición 2.1.9.** Si  $n$  es impar, entonces  $C_n$  es 3-coloreable y por lo tanto 3-cromático.

*Demostración:* Sea  $T = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_{n+1})$  la trayectoria cerrada que forma el ciclo  $C_n = (V_{C_n}, A_{C_n})$  de longitud  $n$ , donde  $n$  es impar, y sea  $f$  la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : V_{C_n} &\longrightarrow \{0, 1, 2\} \\ v_i &\longrightarrow f(v_i) \equiv i \pmod{3}. \end{aligned}$$

Esta función es una 3-coloración propia de  $C_n$ , ya que  $f(v_i) \neq f(v_{i+1})$ , para toda arista

$$a_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in A_{C_n}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

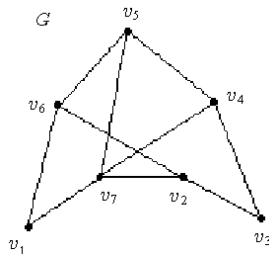
En efecto al suponer que  $f(v_i) = f(v_{i+1})$  para algún  $i$ , se tiene que

$$i \equiv i + 1 \pmod{3},$$

y por tanto  $1 \equiv 0 \pmod{3}$ , lo cual no es posible.

Por lo tanto  $C_n$  es 3-coloreable. Además, como  $C_n$  no es 2-coloreable por ser  $n$  impar se tiene que  $C_n$  es 3-cromático.  $\square$

Dado que un grafo  $G = (V, A)$  es 2-coloreable si y sólo si es bipartito, una manera simple de decidir si un grafo es 2-coloreable es escoger un vértice  $v_i$ , y dividir los vértices restantes en dos grupos: aquellos a distancia par de  $v_i$ , y aquellos a distancia impar. El grafo es bipartito y por ende 2-coloreable si y sólo si estos dos conjuntos de vértices forman una partición del conjunto  $V$  con conjuntos independientes. Es decir, los vértices del conjunto a distancia par no son adyacentes entre sí y los vértices del conjunto a distancia impar tampoco son adyacentes entre sí. Por **ejemplo** en el grafo  $G$  de la **Figura 2.4** los conjuntos de vértices que están a distancia par o impar de  $v_7$  son respectivamente  $I = \{v_5, v_2, v_4, v_1\}$ ,  $P = \{v_6, v_3, v_7\}$ . Así, el grafo  $G$  no es 2-coloreable, ya que los conjuntos  $P, I$  no forman una partición del conjunto  $V$  con conjuntos independientes, porque  $v_5$  y  $v_4$  son adyacentes.



**Figura 2.4.**

El proceso de calcular la distancia de cada vértice a  $v_i$  puede hacerse de forma eficiente, por ejemplo, el algoritmo de Dijkstra [14] resuelve el problema del camino más corto entre dos vértices.

No se ha encontrado una manera eficiente de decidir si un grafo es  $k$ -coloreable con  $k \geq 3$ .

De la sección anterior y de las definiciones del Capítulo 1, se obtienen los siguientes resultados sobre números cromáticos para grafos especiales.

- i) Sean  $G$  y  $H$  dos grafos. Si  $H \subseteq G$ , entonces  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .
- ii) Si  $G = (V, \emptyset)$  es un grafo nulo, entonces  $\chi(G) = 1$ .
- iii)  $\chi(K_n) = n$ .
- iv)  $\chi(C_n) = 2$ , si  $n$  es par y  $\chi(C_n) = 3$ , si  $n$  es impar.
- v)  $\chi(K_{s,r}) = 2$ .
- vi)  $\chi(B_{s,r}) = 2$ .
- vii)  $\chi(K_{n_1, \dots, n_k}) = k$ .
- viii)  $\chi(B_{n_1, \dots, n_k}) \leq k$ .
- ix) Sea  $G$  un grafo. Si  $G$  es un árbol, entonces  $\chi(G) = 2$ .

## 2.2 Números cromáticos de la suma, unión y producto de dos grafos

**Proposición 2.2.1.** Si  $G = (V_G, A_G)$  y  $H = (V_H, A_H)$  dos grafos, tales que  $V_G \cap V_H = \emptyset$ , entonces

$$\chi(G + H) = \text{máx} \{ \chi(G), \chi(H) \}$$

*Demostración:* Sean  $\chi(G) = t$  y  $\chi(H) = q$ ,  $t \geq q$ . Existen funciones de coloración  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ ,

$$\mathcal{C}_1 : V_G \longrightarrow \{1, 2, \dots, t\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_2 : V_H \longrightarrow \{1, 2, \dots, q\},$$

tales que  $\mathcal{C}_1(x) \neq \mathcal{C}_1(y)$ , para todo  $\{x, y\} \in A_G$  y  $\mathcal{C}_2(v) \neq \mathcal{C}_2(w)$ , para todo  $\{v, w\} \in A_H$ , la función

$$\mathcal{C} : V_+ \longrightarrow \{1, 2, \dots, t\},$$

definida por:

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}_1(x), \forall x \in V_G \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(v) = \mathcal{C}_2(v), \forall v \in V_H,$$

es tal que

$$\mathcal{C}(s) \neq \mathcal{C}(z), \forall \{s, z\} \in A_+,$$

ya que si  $\{s, z\} \in A_G$ ,  $\mathcal{C}_1(s) \neq \mathcal{C}_1(z)$ , similarmente si  $\{s, z\} \in A_H$ ,  $\mathcal{C}_2(s) \neq \mathcal{C}_2(z)$ . Por tanto el grafo  $G + H$  es  $t$ -coloreable, pero no es  $(t - 1)$ -coloreable, porque contiene un subgrafo  $t$ -coloreable que es el grafo  $G$ .

Se concluye que  $\chi(G + H) = \text{máx} \{ \chi(G), \chi(H) \}$ .  $\square$

**Proposición 2.2.2.** Si  $G = (V_G, A_G)$  y  $H = (V_H, A_H)$  son dos grafos, tales que  $V_G \cap V_H = \emptyset$ , entonces

$$\chi(G \cup H) = \chi(G) + \chi(H).$$

*Demostración:* Sea  $\chi(G) = t$  y  $\chi(H) = q$ . Existen funciones de coloración  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ ,

$$\mathcal{C}_1 : V_G \longrightarrow \{1, 2, \dots, t\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_2 : V_H \longrightarrow \{t + 1, t + 2, \dots, t + q\}$$

tales que  $\mathcal{C}_1(x) \neq \mathcal{C}_1(y)$ , para todo  $\{x, y\} \in A_G$  y  $\mathcal{C}_2(v) \neq \mathcal{C}_2(w)$  y para todo  $\{v, w\} \in A_H$ . La función:

$$\mathcal{C} : V_{\cup} \longrightarrow \{1, 2, \dots, t\},$$

definida por

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}_1(x), \forall x \in V_G \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(v) = \mathcal{C}_2(v), \forall v \in V_H,$$

es tal que;

$$\mathcal{C}(s) \neq \mathcal{C}(z), \forall \{s, z\} \in A_{\cup},$$



ya que si  $\{s, z\} \in A_G$ ,  $\mathcal{C}_1(s) \neq \mathcal{C}_1(z)$ , similarmente si  $\{s, z\} \in A_H$ ,  $\mathcal{C}_2(s) \neq \mathcal{C}_2(z)$ .

Si  $\{s, z\} \in A_{\cup}$  tal que  $s \in V_G$  y  $z \in V_H$ , también se tiene que  $\mathcal{C}(s) \neq \mathcal{C}(z)$ , debido a que

$$\mathcal{C}(s) \in \{1, 2, \dots, t\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(z) \in \{t+1, t+2, \dots, t+q\}.$$

Por lo tanto el grafo  $G \cup H$  es  $(t+q)$ -coloreable, pero no es  $(t+q-1)$ -coloreable, porque de ocurrir esto, existe  $v \in V_H$  tal que  $\mathcal{C}(v) = \mathcal{C}(x)$ , para algún  $x \in V_G$ , lo cual no puede suceder ya que  $\{x, v\} \in A_{\cup}$ . Por lo tanto

$$\chi(G \cup H) = \chi(G) + \chi(H). \quad \square$$

**Proposición 2.2.3.** Si  $G = (V, A)$  es un grafo con componentes conexas  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , entonces

$$\chi(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{\chi(G_i)\}.$$

*Demostración:* La proposición se cumple para grafos con una componente conexas.

Como hipótesis de inducción, se supone que el resultado es verdadero para todo grafo que tiene  $k-1$  componentes conexas. Se probará que la proposición se cumple si  $G$  tiene  $k$  componentes conexas  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , es decir:

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_k.$$

Ahora, sea  $H = G_1 + G_2 + \dots + G_{k-1}$ . Así  $G = H + G_k$  y por la **Proposición 2.2.1**,

$$\chi(G) = \max \{\chi(H), \chi(G_k)\},$$

como  $H$  tiene  $k-1$  componentes conexas, por hipótesis de inducción

$$\chi(H) = \max_{1 \leq i \leq k-1} \{\chi(G_i)\},$$

entonces

$$\chi(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{\chi(G_i)\}. \quad \square$$

**Proposición 2.2.4.** Si  $G = (V_G, A_G)$  y  $H = (V_H, A_H)$  son dos grafos, tales que  $V_G \cap V_H = \emptyset$ , entonces

$$\chi(G \times H) = \max \{\chi(G), \chi(H)\}$$

*Demostración:* Sean  $\chi(G) = t$  y  $\chi(H) = q$ , sin pérdida de generalidad supongase que  $t \geq q$ . Existen funciones de coloración  $g, h$ ,

$$g : V_G \longrightarrow \{1, 2, \dots, t\} \quad \text{y} \quad h : V_H \longrightarrow \{1, 2, \dots, q\},$$

tales que  $g(u) \neq g(u'), \forall \{u, u'\} \in A_G$  y  $h(v) \neq h(v'), \forall \{v, v'\} \in A_H$ , La función:

$$f : V_{G \times H} \longrightarrow \{1, 2, \dots, t\},$$

definida por

$$f(u, v) = g(u) + h(v) \pmod{t}, \forall (u, v) \in V_{G \times H},$$

es tal que;

$$f(u, v) \neq f(u', v'), \forall \{(u, v), (u', v')\} \in A_{G \times H},$$

ya que si  $\{(u, v), (u', v')\} \in A_{G \times H}$ , con  $u = u'$  y  $\{v, v'\} \in A_H$  entonces

$$f(u, v) = g(u) + h(v) \pmod{t} \quad \text{y} \quad f(u', v') = g(u') + h(v') \pmod{t}$$

Luego

$$\begin{aligned} f(u, v) - f(u', v') &= g(u) + h(v) - g(u') - h(v') \pmod{t} \\ &= h(v) - h(v') \pmod{t} \end{aligned}$$

como  $h(v), h(v')$  son ambos menores o iguales que  $t$  y  $h(v) \neq h(v')$ , entonces  $f(u, v) \neq f(u', v')$ , y por tanto el grafo producto  $G \times H$  es  $t$ -coloreable pero no  $(t-1)$ -coloreable, porque  $G \subseteq G \times H$  y  $\chi(G) = t$ , por lo tanto  $\chi(G \times H) = t$   $\square$

### 2.3 Cotas inferiores para $\chi(G)$

**Definición 2.3.1.** Dado un grafo  $G = (V_G, A_G)$ , el **número de clique de**  $G$ , se denota por  $\omega(G)$  y es el orden del subgrafo completo (**clique**) con mayor número de vértices de  $G$ .

Así  $\omega(G) = m$  si y sólo si  $G$  contiene un  $K_m$  más no contiene un  $K_{m+1}$ . Es claro que:

- i)  $\omega(G) \geq 2$  si y sólo si  $A_G \neq \emptyset$ .
- ii) Si  $H \subseteq G$ , entonces  $\omega(H) \leq \omega(G)$ .

**Teorema 2.3.2.** Para todo grafo  $G = (V_G, A_G)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} i) \quad \chi(G) &\geq \omega(G), \\ ii) \quad \chi(G) &\geq \frac{|V_G|}{\alpha(G)}. \end{aligned}$$

*Demostración* [11]: La primera parte se prueba por contradicción. No es posible que  $\chi(G) < \omega(G)$ , ya que el subgrafo completo de  $G$  con  $\omega(G)$  vértices necesita colores distintos para cada uno de sus vértices.

Para la segunda parte, sea  $\chi(G) = k$ , entonces existe una partición cromática de  $G$  con clases cromáticas  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , cada una de ellas independientes en  $G$  y por tanto, con a lo sumo  $\alpha(G)$  vértices. Esto es  $|V_i| \leq \alpha(G)$  para  $1 \leq i \leq k$ . Luego,

$$\sum_{i=1}^k |V_i| \leq \sum_{i=1}^k \alpha(G)$$

de donde,

$$|V_G| \leq k \cdot \alpha(G)$$

debido a que  $\sum_{i=1}^k |V_i| = |V_G|$ . Y como  $\chi(G) = k$ , entonces

$$\frac{|V_G|}{\alpha(G)} \leq \chi(G). \quad \square$$

En las dos cotas mencionadas anteriormente la igualdad se da para grafos completos. Es posible encontrar grafos en que ambas cotas son estrictas, por **ejemplo** el grafo  $G$  de la siguiente figura, donde  $\omega(G) = \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} = 2$  y  $\chi(G) = 3$ .

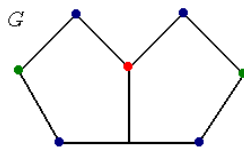


Figura 2.5.

## 2.4 Cotas superiores para $\chi(G)$

La mayoría de las cotas superiores para  $\chi(G)$  surgen de algoritmos que producen coloraciones. La más simple se presenta en el siguiente lema.

**Lema 2.4.1.** Si  $G = (V, A)$  es un grafo, entonces  $\chi(G) \leq |V|$ .

*Demostración* [11]: Al utilizar un color distinto para cada vértice de  $G$ , se tiene una coloración propia de  $G$ , por lo cual  $\chi(G) \leq |V|$ .  $\square$

**Definición 2.4.2.** Sea un grafo  $G = (V_G, A_G)$ . Si  $v \in V_G$  se define el grafo  $G - v$ , como:  $G - v = (V', A')$  donde

$$V' = V_G - \{v\} \quad \text{y} \quad A' = A_G - \{\{v, x\} : x \in N_G(v)\}.$$

$G - v$  se llama el grafo que surge de **eliminar el vértice**  $v$  del grafo  $G$ .

Si  $S \subset V_G$ . Se define el grafo  $G - S$ , como:  $G - S = (V'', A'')$  donde

$$V'' = V_G - S \quad \text{y} \quad A'' = A_G - \{\{v, x\} : x \in N_G(v), v \in S\}.$$

$G - S$  se llama el grafo que surge de **eliminar un subconjunto  $S$  de vértices** del grafo  $G$ .

**Lema 2.4.3.** *Sea un grafo  $G = (V, A)$ , si  $U$  es un conjunto independiente en  $G$  con  $|U| = \alpha(G)$ , entonces, se cumple que:*

$$\chi(G) - 1 = \chi(G - U).$$

*Demostración:* Sea  $\chi(G) = k$  y  $V_1, V_2, \dots, V_k$  una partición de  $V$  generada por una  $k$ -coloración de  $G$ , donde  $U = V_k$ , esto es posible, ya que los conjuntos  $V_i, i \leq 1 \leq k$  son conjuntos independientes.

Ahora se analiza  $V - U$ ,

$$V - U = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{k-1},$$

así  $V - U$  es  $(k - 1)$ -coloreable, pero no es  $(k - 2)$ -coloreable, porque si esto ocurriera existiría un  $i$ , con  $1 \leq i \leq k - 1$  tal que cada  $v \in V_i$ , se puede reubicar en un  $V_j, j \neq i$  para  $1 \leq j \leq k - 1$ . Pero esto implicaría que  $G$  es  $(\chi(G) - 1)$ -coloreable, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\chi(G - U) = k - 1$$

Así,  $\chi(G) - 1 = \chi(G - U)$ .  $\square$

**Teorema 2.4.4.** *Para cualquier grafo  $G = (V, A)$  se cumple:*

$$\chi(G) \leq |V| - \alpha(G) + 1.$$

*Demostración [11]:* Sea  $U$  un conjunto independiente en el grafo  $G$  con  $|U| = \alpha(G)$ , el grafo  $G - U$  tiene  $|V| - \alpha(G)$  vértices. Por el **Lema 2.4.1**  $\chi(G - U) \leq |V| - \alpha(G)$  y por el teorema anterior  $\chi(G - U) = \chi(G) - 1$ . Luego,  $\chi(G) - 1 \leq |V| - \alpha(G)$ . Por tanto,  $\chi(G) \leq |V| - \alpha(G) + 1$ .  $\square$

## 2.5 Algoritmo voraz o codicioso (greedy)

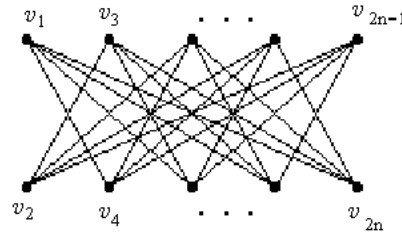
Sea  $(G, \phi)$  un grafo etiquetado, donde  $G = (V, A)$  y  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  en este orden. Y sea  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  un conjunto de colores.

Se define la siguiente función de coloración:

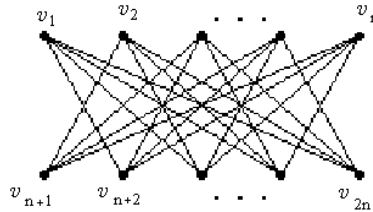
$$\begin{aligned} \mathcal{C} & : V \longrightarrow S, \\ \mathcal{C}(v_1) & = 1, \\ \mathcal{C}(v_2) & = \text{mín} (S - \{\mathcal{C}(v_i) : v_i \in N_G(v_2), i < 2\}), \\ & \vdots \\ \mathcal{C}(v_k) & = \text{mín} (S - \{\mathcal{C}(v_i) : v_i \in N_G(v_k), i < k\}), \\ & \vdots \\ \mathcal{C}(v_n) & = \text{mín} (S - \{\mathcal{C}(v_i) : v_i \in N_G(v_n), i < n\}). \end{aligned}$$

Es decir, una vez coloreados los  $k - 1$  primeros vértices, del conjunto de colores se eliminan aquellos colores usados en los vecinos de  $v_k$  que ya hayan sido coloreados. De los colores que quedan se le asigna a  $v_k$  el mínimo color disponible.

La efectividad del algoritmo depende esencialmente del etiquetamiento inicial del grafo. Por **ejemplo**, el siguiente etiquetamiento de los vértices de  $B_{n,n}$ , hace que el algoritmo voraz utilice  $n$  colores.



Mientras que el siguiente, hace que el algoritmo voraz utilice 2 colores, que es su número cromático.



**Definición 2.5.1.** Sea un grafo  $G = (V_G, A_G)$ . Un **subgrafo inducido** por  $V' \subseteq V_G$  es el subgrafo  $I = (V_I, A_I)$  donde  $V_I = V'$  y  $A_I = \{\{x, y\} \in A_G \cap V_I^{[2]}\}$ . Se denota  $I = \langle V_I \rangle_G$ , para enfatizar que  $I$  es un subgrafo inducido de  $G$ .

**Nota:** Si  $G = (V, A)$  es un grafo y  $v \in V$ , entonces  $G - v$  es un grafo inducido de  $G$ .

**Teorema 2.5.2.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo, entonces

$$\delta(G) \leq \text{máx} (\delta(I)) \quad \text{y} \quad \text{máx} (\Delta(I)) \leq \Delta(G),$$

donde  $I$  recorre el conjunto de todos los subgrafos inducidos de  $G$ .

*Demostración:* Sea  $v \in V$ , tal que  $gr(v) = \delta(G)$ , luego para el grafo  $G - v$  se tiene que  $\delta(G - v) \geq \delta(G)$ . Por lo tanto,

$$\delta(G) \leq \text{máx} (\delta(I)).$$

Sea  $w \in V$ , tal que  $gr(w) = \Delta(G)$ , luego para el grafo  $G - w$  se tiene que  $\Delta(G - w) \leq \Delta(G)$ . Por lo tanto,

$$\text{máx} (\Delta(I)) \leq \Delta(G). \quad \square$$

**Teorema 2.5.3.** *Sea  $G = (V, A)$  un grafo, entonces*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

*Demostración:* En el algoritmo voraz, el subgrafo inducido por  $N_G(v)$ , donde  $v \in V$ , utiliza a lo sumo  $gr(v)$  colores, ya que, por el **Lema 2.4.1**.

$$\chi(\langle N_G(v) \rangle_G) \leq |N_G(v)| = gr(v).$$

Luego, al menos uno de los colores  $1, 2, \dots, gr(v) + 1$  debe estar sin usar y éste será el color asignado a  $v$ .

Como  $gr(v) \leq \Delta(G)$  para todo  $v \in V$ , entonces  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .  $\square$

La cota anterior es óptima para grafos completos y ciclos impares.

A continuación se presentan algunas cotas que mejoran la cota anterior para  $\chi(G)$ .

## 2.6 Una cota de $\chi(G)$ derivada de grafos inducidos

**Proposición 2.6.1.** *Sea  $G = (V_G, A_G)$ , un grafo con  $\chi(G) = n$  y sea  $\langle U \rangle_G \in T$ , donde*

$$T = \{\langle I \rangle_G : \chi(\langle I \rangle_G) = n\} \quad \text{y} \quad |U| = \text{mín} \{|V_R| : R \in T\}.$$

*Si  $v \in U$ , entonces*

$$\chi(\langle U - \{v\} \rangle) = n - 1 \quad \text{y} \quad gr(v) \geq n - 1.$$

*Demostración [11]:* Por hipótesis

$$\chi(\langle U \rangle_G) = n. \tag{2.1}$$

Si  $v \in U$ , entonces el subgrafo  $\langle U - \{v\} \rangle$  es un subgrafo inducido en  $\langle U \rangle_G$ , luego

$$\chi(\langle U - \{v\} \rangle) < n. \tag{2.2}$$

Ahora, se mostrará que  $\chi(\langle U - \{v\} \rangle) = n - 1$ . Al suponer que

$$\chi(\langle U - \{v\} \rangle) < n - 1, \tag{2.3}$$

por la **Proposición 2.2.2** para el grafo  $\langle U - \{v\} \rangle \cup K_1$ , donde  $K_1 = (\{v\}, \emptyset)$  se tiene que,

$$\chi(\langle U - \{v\} \rangle \cup K_1) = \chi(\langle U - \{v\} \rangle) + 1.$$

Como  $\langle U \rangle_G \subseteq \langle U - \{v\} \rangle \cup K_1$ , entonces

$$\chi(\langle U \rangle_G) \leq \chi(\langle U - \{v\} \rangle) + 1.$$

Como por (2.3) se tiene que  $\chi(\langle U - \{v\} \rangle) < n - 1$ ,  $\chi(\langle U \rangle_G) < n$  y esto contradice (2.1). Por la desigualdad (2.2) se puede concluir que

$$\chi(\langle U - \{v\} \rangle) = n - 1. \quad (2.4)$$

Ahora, para mostrar que  $gr(v) \geq n - 1$  para todo  $v \in U$ , se supone que  $gr(v) < n - 1$  para algún vértice  $v$  en  $U$ . Luego, para algún entero  $m < n - 1$ ,  $m$  vértices en  $U - \{v\}$  son adyacentes a  $v$  en  $\langle U \rangle_G$ . Y por (2.4),  $\chi(\langle U - \{v\} \rangle) = n - 1$ , entonces  $\langle U - \{v\} \rangle$  tiene mínimo  $n - 1$  vértices, y como  $gr(v) < n - 1$  existe  $u \in U - \{v\}$  tal que  $u \notin N_{\langle U \rangle}(v)$  para el cual puede ocurrir una de las dos situaciones:  $u$  es adyacente a todos los vértices en  $U - \{v\}$  o para algún vértice en  $U - \{v\}$ ,  $u$  es adyacente a dicho vértice.

En cualquier caso, se puede asignar al vértice  $v$  el mismo color que a  $u$ . Por lo tanto,  $\langle U \rangle_G$  puede colorearse con  $n - 1$  colores y esto contradice la ecuación (2.1). Así para todo  $v \in U$ ;  $gr(v) \geq n - 1$ .  $\square$

**Proposición 2.6.2.** *Para todo grafo  $G = (V, A)$ , se cumple:*

$$\chi(G) \leq \text{máx } (\delta(\langle I \rangle_G)) + 1.$$

*Demostración:* Sean  $\chi(G) = n$  y  $\langle U \rangle_G \in T$ , donde

$$T = \{ \langle I \rangle_G : \chi(\langle I \rangle_G) = n \} \quad \text{y} \quad |U| = \text{mín } \{ |V_R| : R \in T \}.$$

Si  $v \in U$ , entonces por el teorema anterior

$$\chi(\langle U - \{v\} \rangle) = n - 1 \quad \text{y} \quad gr(v) \geq n - 1.$$

Por lo tanto  $\delta(\langle U \rangle_G) \geq n - 1$  y por lo cual se tiene que,

$$\chi(G) \leq \delta(\langle U \rangle_G) + 1.$$

Como

$$\delta(\langle U \rangle_G) \leq \text{máx } (\delta(\langle I \rangle_{\langle U \rangle_G})),$$

por el **Teorema 2.5.2**, y

$$\text{máx } (\delta(\langle I \rangle_{\langle U \rangle_G})) \leq \text{máx } (\delta(\langle I \rangle_G)),$$

ya que los grafos inducidos sobre  $\langle U \rangle_G$  también son inducidos sobre  $G$ , por lo tanto

$$\chi(G) \leq \text{máx } (\delta(\langle I \rangle_G)) + 1. \quad \square$$

El teorema anterior se ilustra en la siguiente figura, en la cual se identifican los subgrafos inducidos del grafo  $G$  y  $\text{máx } (\delta(\langle I \rangle_G)) = 2$ , por tanto  $\chi(G) \leq 3$

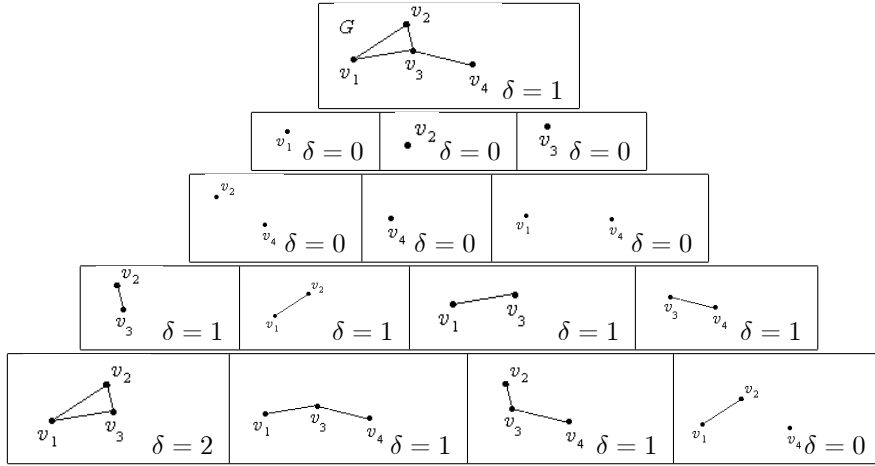


Figura 2.6. Subgrafos inducidos de  $G$

**Corolario 2.6.3.** Para cualquier grafo  $G = (V, A)$ , se tiene:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

*Demostración:* Anteriormente se hizo la demostración de esta cota mediante el algoritmo voraz, pero también se puede probar utilizando el teorema anterior, observando que:

$$\chi(G) \leq 1 + \text{máx} (\delta(\langle I \rangle_G)) \leq 1 + \Delta(G),$$

ya que  $\delta(\langle I \rangle_G) \leq \Delta(\langle I \rangle_G)$ , y por el **Teorema 2.5.2**,  $\text{máx} (\Delta(\langle I \rangle_G)) \leq \Delta(G)$ .  $\square$

## 2.7 Una cota de $\chi(G)$ derivada de grafos $k$ -críticos

**Definición 2.7.1.** Sea  $G = (V, A)$ ,  $H \subset G$  y  $\chi(G) = k$ . Si  $\chi(H) < k$  para todo  $H$ ,  $G$  se llama  $k$ -crítico o cromáticamente crítico.

El único grafo 2-crítico es  $K_2$  y todo grafo completo  $K_n$  es  $n$ -crítico.

**Lema 2.7.2.** Si  $G = (V, A)$  es un grafo con  $\chi(G) = k$ , entonces existe un grafo  $H$ ,  $H \subseteq G$  tal que  $H$  es  $k$ -crítico.

*Demostración:* Supóngase que para todo  $H \subseteq G$ , tal que  $\chi(H) = k$ , existe  $H' \subset H$  tal que  $\chi(H') = k$ . Como  $H' \subset G$ ,  $\chi(H') = k$ , nuevamente se tiene que existe  $H''$ ,  $H'' \subset H'$  tal que  $\chi(H'') = k$  y así se obtienen infinitos subgrafos propios de  $G$ , lo cual es imposible porque  $G$  es un grafo finito, por tanto todo grafo  $k$ -cromático tiene un subgrafo  $k$ -crítico.  $\square$

**Lema 2.7.3.** Si  $G = (V, A)$  es un grafo  $k$ -crítico, entonces  $\delta(G) \geq k - 1$ .



*Demostración* [5]: Sea  $x \in V$ , como  $G$  es  $k$ -crítico,  $\chi(G - x) \leq k - 1$ . Si  $gr(x) < k - 1$ , entonces todo  $u \in N_G(x)$ , puede ser coloreado con  $k - 2$  colores, así el color que no se utiliza en los vecinos del vértice  $x$ , puede ser asignado a  $x$  en la coloración de  $G$  y se obtiene una  $(k - 1)$ -coloración propia de  $G$ . Esto contradice que  $\chi(G) = k$ . Por lo tanto  $gr(x) \geq k - 1$  para todo  $x \in V$  y en consecuencia  $\delta(G) \geq k - 1$ .  $\square$

**Teorema 2.7.4. (Szekeres-Wilf, 1968).** *Si  $G = (V, A)$  es un grafo, entonces*

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} (\delta(H)).$$

*Demostración:* Sea  $k = \chi(G)$ , y sea  $H_1$  un subgrafo  $k$ -crítico de  $G$ . Por el lema anterior,

$$k - 1 \leq \delta(H_1) \leq \max_{H \subseteq G} (\delta(H)).$$

Por tanto  $\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} (\delta(H))$ .  $\square$

**Comentario:** La cota anterior es igual a la cota  $\chi(G) \leq 1 + \max (\delta(\langle I \rangle_G))$  de la **Proposición 2.6.2**, porque para todo  $H \subseteq G$  existe un grafo inducido  $\langle I \rangle_G$  tal que  $H \subseteq \langle I \rangle_G$  donde  $V_H = V_{\langle I \rangle_G}$  así

$$\delta(H) \leq \delta(\langle I \rangle_G), \text{ porque } |A_H| \leq |A_{\langle I \rangle_G}|.$$

por lo tanto  $\max (\delta(H)) = \max (\delta(\langle I \rangle_G))$ .

Del anterior teorema se observa que la cota  $\chi(G) \leq \delta(H_1) + 1$ , donde  $H_1$  es un subgrafo  $k$ -crítico de  $G$ , sería más sencilla de manipular ya que, como se probó antes, todo grafo  $k$ -cromático tiene un subgrafo  $k$ -crítico; desafortunadamente no se tiene idea de cómo encontrar  $H_1$  eficientemente.

## 2.8 Una cota de $\chi(G)$ derivada de un ordenamiento de los vértices

**Teorema 2.8.1. (Welsh-Powell, 1967).** *Sea  $G = (V_G, A_G)$  un grafo con  $|V_G| = n$ . Si*

$$g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq \dots \geq g_n$$

*es una lista ordenada de los grados de los vértices de  $G$ , entonces*

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \{\min(i - 1, g_i)\}.$$

*Demostración:* Los vértices  $v \in V_G$  se etiquetan de acuerdo a la función  $f(v) = v_i$ , si  $gr(v) = g_i$ .

Existe un vértice  $v_k$  tal que si  $g_i \geq i - 1$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ , entonces

$$\min(i - 1, g_i) = i - 1$$

y si  $g_i \leq i - 1$ , para todo  $k \leq i \leq n$ , entonces

$$\text{mín}(i - 1, g_i) = g_i.$$

De lo anterior se tiene que  $\text{mín}(k - 1, g_k) = k - 1$ . Luego

$$\text{máx}_{1 \leq i \leq k} (\text{mín}(i - 1, g_i)) = k - 1$$

y

$$\text{máx}_{k \leq i \leq n} (\text{mín}(i - 1, g_i)) = g_{k+1}.$$

De donde,

$$\text{máx}(\text{mín}(i - 1, g_i)) = \text{máx}(k - 1, g_{k+1})$$

Si  $\text{máx}(k - 1, g_{k+1}) = k - 1$ , entonces por el algoritmo voraz es posible que todos los  $k - 1$  vértices anteriores a  $v_k$  pertenezcan a  $N_G(v_k)$ , así se necesitan  $k - 1 + 1 = k$  colores para pintar los vértices hasta  $v_k$ . Como  $g_i \leq i - 1$  entonces al pintar  $v_i$  para  $i > k$  se utilizan a lo sumo  $k$  colores. Por lo tanto

$$\chi(G) \leq 1 + \text{máx}_{1 \leq i \leq n} \{\text{mín}(i - 1, g_i)\}$$

Similarmente cuando  $\text{máx}(k - 1, g_{k+1}) = g_{k+1}$ .  $\square$

El anterior teorema se ilustra por medio de la **Figura 2.7** junto con la tabla correspondiente.

Se observó en el **Teorema 2.5.3** y el **Corolario 2.6.3**, que, usando el algoritmo voraz para colorear un grafo  $G$ , siempre es posible colorearlo con no más de  $1 + \Delta(G)$  colores. Después se analizó que, si los vértices son ordenados de modo que  $gr(v_i) \geq gr(v_{i+1})$ , entonces es posible ocupar un máximo de

$$1 + \text{máx}\{\text{mín}(i - 1, g_i) : 1 \leq i \leq |V_G|\}$$

colores y que esto es menor o igual que  $1 + \Delta(G)$ .

Luego surge la siguiente pregunta: dado un grafo  $G = (V, A)$  cualquiera. **¿Será posible encontrar un etiquetamiento  $v_1, v_2, \dots, v_{|V|}$  de los vértices de  $G$  tal que, al aplicar el algoritmo voraz con dicho orden, se obtenga una coloración óptima?** La respuesta es afirmativa. El problema de llevar esto a la práctica es que, en general, es muy difícil hallar un etiquetamiento que genere la coloración óptima.

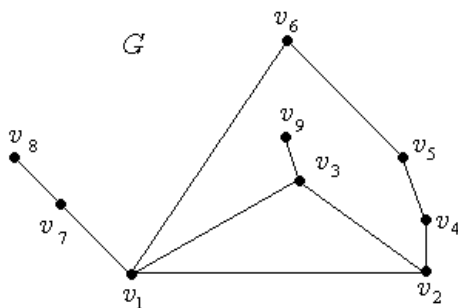


Figura 2.7.

Vértices ordenados	Grado	$(i - 1, gr(v_i))$	$mín(i - 1, gr(v_i))$
$v_1$	4	(0, 4)	0
$v_2$	3	(1, 3)	1
$v_3$	3	(2, 3)	2
$v_4$	2	(3, 2)	2
$v_5$	2	(4, 2)	2
$v_6$	2	(5, 2)	2
$v_7$	2	(6, 2)	2
$v_8$	1	(7, 1)	1
$v_9$	1	(8, 1)	1

$$máx\{mín(gr(v_i), i - 1)\} = 2$$

Ilustración del Teorema (Welsh-Powell, 1967)

Por lo tanto el número máximo de colores para colorear los vértices del grafo de la **Figura 2.7** es 3 y además se mejora la cota  $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G) = 5$ .

## 2.9 Una cota de $\chi(G)$ derivada de orientaciones

**Definición 2.9.1.** Un **grafo orientado** es un par ordenado  $D = (V(D), A(D))$  generado a partir de un grafo  $G = (V, A)$  con

$$V(D) = V \text{ y } A(D) = \{(x, y) \text{ o } (y, x) : \{x, y\} \in A\}.$$

$V(D)$  es el conjunto de vértices del grafo orientado  $D$  y  $A(D)$  es el conjunto de aristas del grafo orientado  $D$ . Una arista cuyo primer término es  $x$  y cuyo segundo término es  $y$ , se denota  $(x, y)$  y se dice que  $x$  incide en  $y$ . Cabe resaltar que las aristas  $(x, y)$  y  $(y, x)$  son distintas.

**Definición 2.9.2.** Sea  $D = (V(D), A(D))$  un grafo orientado, un **camino orientado** en  $D$  es una secuencia de vértices

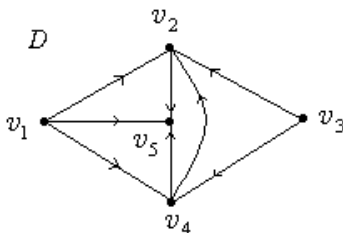
$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_t, v_{t+1},$$

de vértices  $v_i$ , no necesariamente distintos, y aristas orientadas  $a_i = (v_i, v_{i+1})$ ,  $1 \leq i \leq t$ , y se denota  $W_D = (v_1, v_2, \dots, v_{t+1})$ , donde  $v_1$  y  $v_{t+1}$  se llaman respectivamente inicio y final del camino. El número de aristas contenidas en el camino es la **longitud del camino orientado** y se denota  $l(W_D)$ .

Un camino orientado  $W_D = (v_1, v_2, \dots, v_{l+1})$  es una **trayectoria orientada de longitud  $l$  en  $D$** , si todos los vértices  $v_i$  para  $1 \leq i \leq l+1$  son distintos excepto posiblemente  $v_1$  y  $v_{l+1}$ . Si  $l \geq 3$  y  $v_1 = v_{l+1}$  la trayectoria se llama **trayectoria orientada cerrada de longitud  $l$  en  $D$  o ciclo orientado en  $D$** .

Un **subgrafo orientado de  $D$**  es un grafo orientado  $D' = (V(D'), A(D'))$  donde  $V(D') \subseteq V(D)$  y  $A(D') \subseteq A(D)$ .  $D'$  se llama **subgrafo orientado maximal sin ciclos**, cuando  $V(D') = V(D)$  y  $A(D')$  tiene el máximo número de aristas y no tiene ciclos orientados.

En la **Figura 2.8**, el grafo orientado  $D$  tiene un camino  $(v_3, v_2, v_5)$  de longitud 2 y sin ciclos.



**Figura 2.8.**

**Teorema 2.9.3. (Gallay-Roy-Vitaver (1968, 1967 y 1962)).** Si  $D = (V(D), A(D))$  es un grafo orientado a partir de  $G = (V, A)$  y

$$l(D) = \max_{W_D} \{l(W_D)\},$$

entonces  $\chi(G) \leq 1 + l(D)$ . Más aún,  $G$  tiene una orientación para la cual se alcanza la igualdad.

*Demostración [5]:* Sea  $D$  un grafo orientado a partir de  $G$ . Sea

$$D' = (V(D'), A(D'))$$

un subgrafo orientado maximal sin ciclos de  $D$ . Sea  $f$  una función:

$$\begin{aligned} f : V(D) &\longrightarrow S \\ v &\longrightarrow f(v) = 1 + \ell(D'), \end{aligned}$$

donde  $\ell(D') = \max_{W_{D'}} \{l(W_{D'}) : v \text{ es el final de } W_{D'}\}$ .

Sea  $P$  un camino en  $D'$  y  $u$  el primer vértice de  $P$ , entonces todo camino en  $D'$  que tiene final  $u$  puede ser extendido a través de  $P$ , ya que  $D'$  no tiene ciclos orientados. Así,  $f(v_i) < f(v_j)$  a lo largo de cada camino  $P$  en  $D'$  (esto se debe a que  $D'$  no tiene ciclos). Ahora, se muestra que  $f$  es una coloración propia de  $G$ . Si  $(u, v) \in A(D)$ , existe un camino entre  $u$  y  $v$  en  $D'$ , ya que  $(u, v) \in A(D')$  o al hacer incidente  $u$  en  $v$ , sobre  $D$  se forma al menos un ciclo. Así,  $f(u) < f(v)$  o  $f(u) > f(v)$ , por lo tanto para toda  $\{u, v\} \in A$ ,  $f(u) \neq f(v)$ , así  $f$  es un coloración propia de  $G$  y  $\chi(G) \leq 1 + l(D)$ .

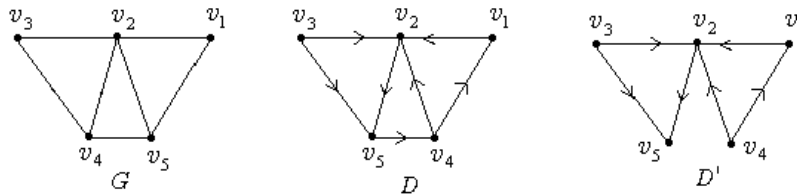
De lo cual, para todo  $\{u, v\} \in A$ ,  $f(u) \neq f(v)$  por lo tanto  $f$  es un coloración propia de  $G$  y

$$\chi(G) \leq 1 + \ell(D') \leq 1 + l(D).$$

Para demostrar que existe alguna orientación de  $G$  tal que para su grafo orientado  $D^*$  se tenga,  $l(D^*) = \chi(G) - 1$ , se considera una coloración óptima  $\mathcal{C}$  de  $G$ .

Para cada arista  $\{u, v\} \in A$ :  $(u, v) \in A(D^*)$  si y sólo si  $\mathcal{C}(u) < \mathcal{C}(v)$ , ya que  $\mathcal{C}(u) \neq \mathcal{C}(v)$ . Si  $P$  es un camino orientado de  $D^*$  que tiene inicio  $v$  y final  $w$ , para todo  $v_t \in P$ ,  $\mathcal{C}(v_t) \neq \mathcal{C}(v_{t+1})$  y como un camino con  $l(D^*)$  tiene  $l(D^*) + 1$  vértices, entonces estos vértices utilizan a lo sumo  $\chi(G)$  colores, por lo tanto  $l(D^*) + 1 \leq \chi(G)$ ; pero se tenía que  $l(D^*) + 1 \geq \chi(G)$ , luego  $l(D^*) = \chi(G) - 1$ .  $\square$

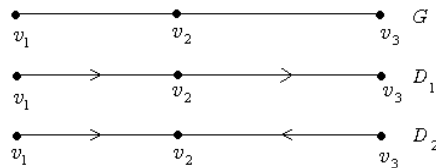
La **Figura 2.9** ilustra este teorema, donde  $D$  es un grafo orientado de  $G$ , y  $D'$  es el subgrafo orientado maximal sin ciclos orientados en  $D$ .



**Figura 2.9**

$v_i$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$f(v_i) = 1 + \ell(D')$	2	3	1	1	4

La **Figura 2.10** muestra dos orientaciones de un grafo  $G$ , donde en la primera orientación se tiene  $\chi(D_1) \leq 3$  y en la segunda  $\chi(D_2) \leq 2$ .



**Figura 2.10.**

**Comentario:** Si se logra obtener de un grafo  $G$  un grafo orientado  $D$  para el cual

$$l(D) = \min \{l(D^*) : D^* \text{ es un grafo orientado de } G\},$$

se obtiene el mínimo valor para  $l(D) + 1$ .

Un método para obtener una mejor orientación del grafo  $G$ , es considerar el vértice  $v$  al cual llega el mayor número de aristas, y a cada una de estas se le asigna la orientación hacia  $v$ . A las aristas que tengan un vértice adyacente a  $v$ , se les dá la orientación que inicie en  $v$ . Así, se continua el proceso teniendo en cuenta que no se formen ciclos.

## 2.10 Una cota de $\chi(G)$ derivada de grafos conexos y no $k$ -regulares

**Definición 2.10.1.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo y  $S \subseteq V$  tal que  $G - S$  tiene más de una componente conexas, es decir  $G - S = F_1 + \dots + F_i$ , donde  $i \geq 2$ , y cada  $F_j$  es una componente conexas de  $G - S$ .  $S$  se llama un **conjunto separador o corte por vértices de un grafo  $G$** . Si  $v \in V$  y  $S = \{v\}$ ,  $v$  se llama **vértice de corte**. Ver siguiente figura, donde  $a$  y  $b$  son vértices de corte en  $G$  y  $\kappa(G) = 1$ :

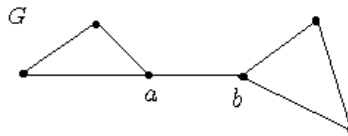


Figura 2.11.

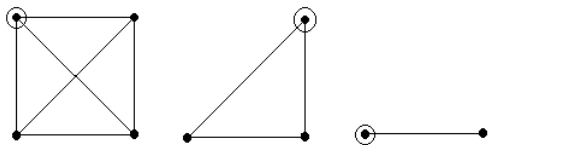
Si  $G$  es conexas, se define la **vértice-conectividad  $\kappa(G)$  de  $G$**  como

$$\kappa(G) = \min \{|S| : S \subseteq V_G \text{ y } S \text{ es un conjunto separador de } G\}.$$

Si  $\kappa(G) \geq k$ ,  $G$  se llama  $k$ -conexas.

**Observaciones:**

i)  $\kappa(K_n) = n - 1$ .



ii)  $\kappa(K_{m,n}) = \min \{m, n\}$ , ya que del grafo  $K_{m,n}$  se pueden suprimir hasta  $\min \{m, n\} - 1$  vértices sin desconectarlo.

iii) Un grafo  $G$  con más de un vértice es conexo si y sólo si tiene  $\kappa(G) \geq 1$ .

**Definición 2.10.2.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo conexo y  $T = (V_T, A_T)$  un árbol tal que  $T \subset G$  con  $V_T = V$ . El árbol  $T$  se llama **un árbol abarcador** de  $G$  o **un árbol de recubrimiento** de  $G$ . Ver siguiente figura:

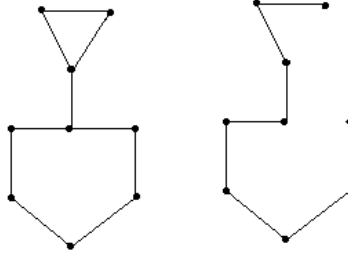


Figura 2.12.  $G$  y su árbol abarcador  $T$

**Proposición 2.10.3.** Si  $G$  es un grafo es conexo, entonces  $G$  tiene al menos un árbol abarcador.

*Demostración:* Si  $G$  es conexo y no tiene un árbol abarcador  $T$ , entonces existen  $v$  y  $w$  en  $V$ , tal que no hay un camino con extremos  $v$  y  $w$  en  $G$ , pero esto contradice el hecho que  $G$  es conexo.  $\square$

**Teorema 2.10.4.** Si  $G = (V, A)$  es un grafo 2-conexo,  $k$ -regular (con  $k \geq 3$ ) y no es completo, entonces existen  $v_1, v_2, v_n$  vértices de  $G$  tales que  $v_1, v_2 \in N_G(v_n)$ ,  $\{v_1, v_2\} \notin A$  y  $G - \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$  es conexo.

*Demostración* [5]: Sea  $x$  cualquier vértice de  $G$ , tal que  $\kappa(G - x) \geq 2$  (ver **Figura 2.13**). Así se toma  $v_1 = x$  y  $v_2$  cualquier vértice a distancia 2 de  $x$  (que existe ya que  $G$  es  $k$ -regular con  $k \geq 3$  y no es un grafo completo), y si se toma  $v_n$  cualquier vecino común de  $v_1$  y  $v_2$ , entonces  $G - \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$  es conexo porque  $\kappa(G - x) \geq 2$  y

$$G - \{\{v_1\}, \{v_2\}\} = (G - v_1) - v_2.$$

Si  $\kappa(G - x) = 1$  (ver **Figura 2.14**),  $G - x$  tiene al menos un vértice de corte y al menos 2 componentes conexas, es decir  $G - x = F_1 + \dots + F_i$ , donde  $i \geq 2$  y cada  $F_j$  es una componente conexa de  $G - x$ . Además,  $x$  debe tener vecinos en cada componente conexa de  $G - x$ . Si  $y, z \in V_{G-x}$  e  $y \in F_j, z \in F_t, t \neq j$ , como  $G - x$  es conexo y como  $x \in N_G(y)$  y  $x \in N_G(z)$  hay un camino entre  $x$  y  $y$  distinto a los caminos entre  $x$  y  $y$  en  $G - x$ . Por lo tanto  $G - \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$  es conexo. En éste caso, se toma  $v_n = x$ , y  $v_1, v_2$  dos vértices adyacentes a  $x$  en componentes conexas distintas.  $\square$

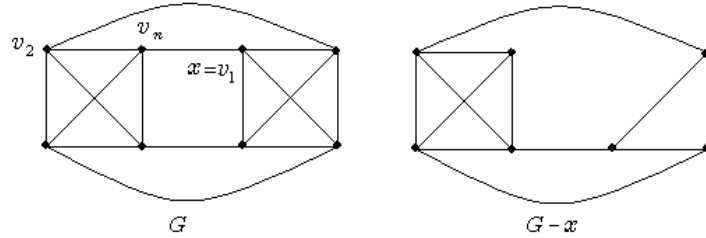


Figura 2.13. El grafo  $G - x$  es un grafo de conectividad igual a 3

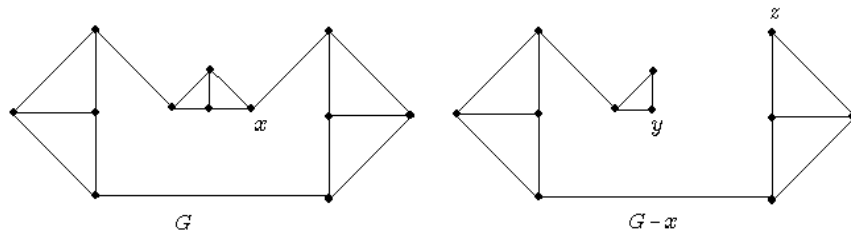


Figura 2.14. El grafo  $G - x$  es un grafo de conectividad igual a 1

Como se ha visto anteriormente  $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ , y esta cota se alcanza si  $G$  es un grafo completo o un ciclo impar. Los siguientes teoremas muestran que éstos son los únicos grafos donde se alcanza dicha cota.

**Teorema 2.10.5.** *Si  $G = (V, A)$  es un grafo conexo con  $|V| = n$ ,  $\Delta(G) = k$ ,  $k \geq 3$  y  $G$  no es  $k$ -regular, entonces  $\chi(G) \leq k$ .*

*Demostración* [5]: Como el grafo  $G$  no es  $k$ -regular, entonces existe un vértice  $v \in V$  tal que  $gr(v) < k$ . Ya que  $G$  es conexo, entonces se puede formar un árbol abarcador  $T = (V, A_T)$  de  $G$  a partir de  $v$ . Ahora, se ordenan los vértices de  $G$  en orden decreciente de su distancia a  $v$  en  $T$ . Es decir se calcula  $d_T(w, v)$  para cada  $w \in V$ , y se ordenan:  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{n-1}$ . Por ser  $T$  un árbol se tiene que  $1 \leq d_i \leq n - 1$ . Ahora, se etiquetan los vértices de  $G$  así:

$$\phi(w) = w_i, \text{ si } d_T(w, v) = d_i;$$

originando el orden mencionado anteriormente.

Por ser  $T$  un árbol abarcador si  $v_i \in V$ , (excepto  $v$ ) existe un  $v_j$ ,  $j > i$  tal que  $\{v_i, v_j\} \in A_T$ , ya que si esto no sucediera  $T$  no sería conexo lo cual es imposible, por lo tanto todo  $v_i \in T$  tiene por lo menos un vecino que viene después en el orden, así hay a lo más  $k - 1$  vecinos que anteceden a  $v_i$ . Como  $gr(v) < k$ , para  $v$  también hay a lo más  $k - 1$  vecinos que lo anteceden en el orden (porque tiene a lo más  $k - 1$  vecinos), por lo tanto al aplicar el algoritmo



voraz :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(v_1) &= 1, \\
\mathcal{C}(v_2) &= \text{mín} (S - \{\mathcal{C}(v_i) : v_i \in N_G(v_2), i < 2\}), \\
\mathcal{C}(v_3) &= \text{mín} (S - \{\mathcal{C}(v_i) : v_i \in N_G(v_i), i < 3\}), \\
&\vdots \\
\mathcal{C}(v_n) &= \text{mín} (S - \{\mathcal{C}(v_i) : v_i \in N_G(v_i), i < n\}),
\end{aligned}$$

se ocuparán a lo más  $k$  colores. Así,  $\chi(G) \leq k$ .  $\square$

**Teorema 2.10.6. (Brooks, 1941).** Si  $G = (V_G, A_G)$  es un grafo conexo que no es ni un grafo completo ni un ciclo impar, entonces  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

*Demostración* [5]: Sea  $\Delta(G) = k$ .

- i) Si  $k \leq 1$ , entonces por ser  $G$  un grafo conexo, puede ser  $K_1$  o  $K_2$  (no se considera éste caso).
  - ii) Si  $k = 2$ , entonces por ser  $G$  conexo debe ser un ciclo o un grafo bipartito, como no se considera el caso de  $G$  ciclo impar:  $G$  es un ciclo par o bien es bipartito donde  $\chi(G) = 2 = k$ .
  - iii) Si  $k \geq 3$  y  $G$  no es  $k$ -regular, por el teorema anterior se cumple que  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .
  - iv) Si  $k \geq 3$  y  $G$  es  $k$ -regular, se consideran dos casos:  $G$  puede tener un vértice de corte o ser 2-conexo.
- iv-1) Si  $G$  tiene un vértice de corte  $x$  (ver **Figura 2.15**), entonces

$$G - x = F_1 + \dots + F_i, \quad i \geq 2,$$

donde las  $F_i$  son componentes conexas de  $G - x$ . Sea  $G_1 = (V_1, A_1) \subseteq G$  con

$$V_1 = V_{F_1} \cup \{x\} \quad \text{y} \quad A_1 = A_{F_1} \cup \{\{x, b\} : \{x, b\} \in A_G \text{ y } b \in V_{F_1}\},$$

sucesivamente para cada  $F_j$  se define  $G_j = (V_j, A_j) \subseteq G$ , con

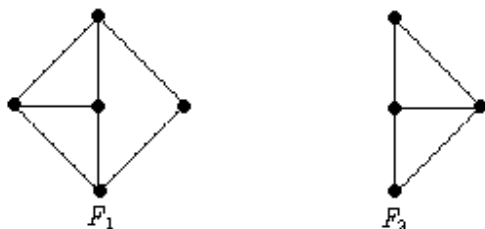
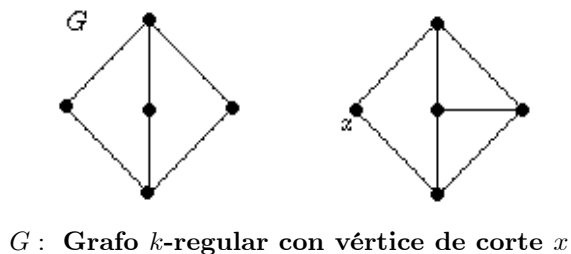
$$V_j = V_{F_j} \cup \{x\} \quad \text{y} \quad A_j = A_{F_j} \cup \{\{x, b\} : \{x, b\} \in A_G \text{ y } b \in V_{F_j}\}.$$

En cada  $G_j$ ,  $gr(x) < k$ , entonces como cada  $G_j$  es conexo y no  $k$ -regular, se puede aplicar el método del teorema anterior y obtener una coloración propia para cada  $G_j$  con la condición que  $x$  tenga el mismo color en cada  $G_j$ , y en cada coloración se utilicen a lo sumo los mismos  $k$  colores por tanto  $\chi(G_j) \leq k$ , como

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i \quad \text{y} \quad A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i,$$

entonces con las coloraciones de los  $G_j$  se colorea a  $G$  con a lo sumo  $k$  colores, por lo tanto  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

iv-2) Nos queda ver el caso en que  $G$  es  $k$ -regular y 2-conexo (ver **Figura 2.16**). Por el **Teorema 2.10.4**,  $G$  tiene vértices  $v_1, v_2$  y  $v_n$  tales que  $G - \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$  es conexo. Luego se puede formar un árbol abarcador  $T$  de  $G - \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$  a partir de  $v_n$  y se ordenan los vértices en el árbol abarcador  $T$  sin  $v_n$  es decir en  $T - \{v_n\}$  etiquetándolos  $v_3, v_4, \dots, v_{n-1}$ ; de modo que las etiquetas aumenten a medida que se acercan a la raíz  $v_n$ . Así, tal como en el teorema anterior todo vértice antes de  $v_n$  tiene a lo más  $k-1$  vecinos antes que él en el orden, por lo que el algoritmo voraz ocupa a lo más  $k$  colores para colorear  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ , ya que el algoritmo voraz le asigna el mismo color a  $v_1$  y a  $v_2$  y como  $v_n$  tiene a lo más  $k-1$  colores ocupados entre sus vecinos, entonces  $v_n$  puede ser coloreado con el color  $k$ , por lo tanto  $G$  es coloreado con a lo más  $k$  colores.



Componentes conexas de  $G - x$

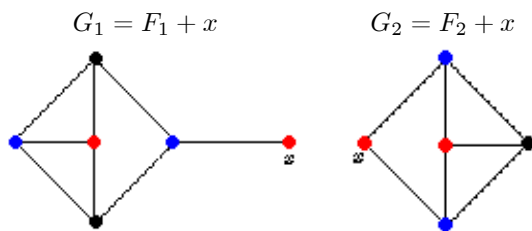
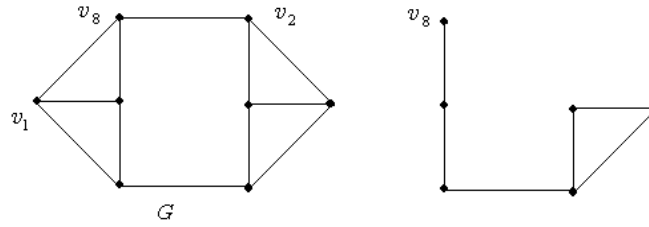
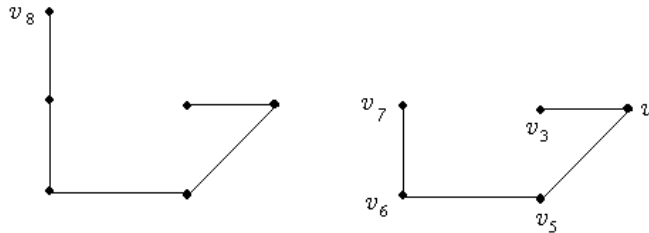


Figura 2.15.



$G$  y  $G - \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$  son Grafos  $k$ -regulares y 2-conexos



Árbol abarcador  $T$  y el grafo  $T - \{v_8\}$

Figura 2.16.

## 2.11 Problemas extremales

Al haber estudiado el problema del número cromático para un grafo surge la siguiente pregunta **¿Cuáles son los grafos  $k$ -cromáticos con menos aristas sobre  $n$  vértices?** y **¿Cuáles son los grafos  $k$ -cromáticos con más aristas sobre  $n$  vértices?**

**Proposición 2.11.1.** Si  $G = (V, A)$  es un grafo  $k$ -cromático con  $|V| = n$ , entonces  $|A| \geq \binom{k}{2}$  aristas.

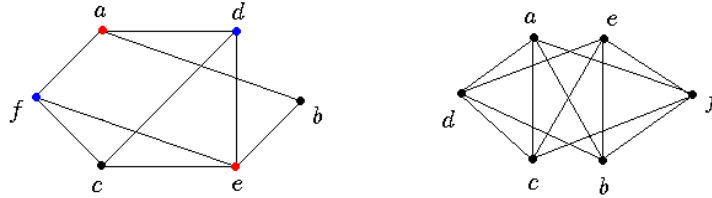
*Demostración:* Como  $G$  es  $k$ -cromático, entonces  $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$  tal que los subgrafos inducidos  $\langle V_i \rangle_G$  para todo  $i$ ,  $1 < i < k$  no tienen aristas. En el caso extremo que para cada  $i$ ,  $|V_i| = 1$ , entonces se tiene un  $K_k$ , el cual tiene  $\binom{k}{2}$  aristas. Por tanto  $|A| \geq \binom{k}{2}$ .  $\square$

**Definición 2.11.2.** Si  $G = (V, A)$  es un grafo y  $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$  es la partición de los vértices de  $G$  generada por una  $k$ -coloración propia de  $G$ , entonces el grafo  $H = (V_H, A_H)$  tal que  $V_H = V$  y

$$A_H = A \cup \{\{x, y\} \notin A : x \in V_i, y \in V_j, i \neq j\},$$

es  $k$ -coloreable ya que la función de coloración de  $G$  también colorea al grafo  $H$ . El grafo  $H$  se llama  **$k$ -coloreable maximal** con  $n$  vértices, el cual es  $k$ -partito completo de la forma  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  donde  $|V_i| = n_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Ver siguiente

figura:



**Figura 2.17.** Un grafo 3-coloreable y un 3-coloreable maximal

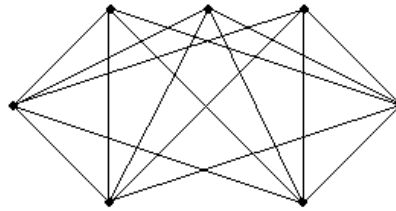
¿Qué condición deben cumplir los valores  $n_1, n_2, \dots, n_k$  para que

$$G = K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

tenga la mayor cantidad posible de aristas?. La respuesta se da a continuación.

**Definición 2.11.3.** Un **grafo de Turán**  $T_{n,r}$  es un grafo  $r$ -partito completo,  $T_{n,r} = K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ , con  $n$  vértices en el cual  $|n_i - n_j| \leq 1$ , para  $i \neq j$ . Así,  $n_i = \lfloor n/r \rfloor$  o  $n_i = \lceil n/r \rceil$ .

La **Figura 2.18** muestra un grafo de Turán  $T_{7,3}$ .



**Figura 2.18.**

**Teorema 2.11.4.** Un grafo de Turán  $T_{n,r}$  es el único grafo  $r$ -partito (o lo que es equivalente  $r$ -coloreable) con  $n$  vértices y máximo número posible de aristas.

*Demostración:* Sea  $T_{n,r}$  un grafo de Turán, a partir de él se crea otro grafo  $r$ -partito completo y se mostrará que éste tiene menos o igual número de aristas que  $T_{n,r}$ . Esto es suficiente ya que todo grafo  $r$ -partito no completo con  $n$  vértices tiene menos aristas que el grafo  $r$ -partito completo con  $n$  vértices.

- Si  $v \in V_i$  tal que  $|V_i| = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ , entonces  $gr(v) = n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ ,

si  $v$  se pasa a una de las partes de orden  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ , entonces

$$gr(v) = n - \left( \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor + 1 \right).$$

Así se pierde una arista para este grafo  $r$ -partito completo.

si  $v$  se pasa a una de las partes de orden  $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ , entonces

$$\begin{aligned} gr(v) &= n - \left( \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil + 1 \right) \\ &= n - \left( \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor + 2 \right). \end{aligned}$$

Así se pierden dos aristas para este grafo  $r$ -partito completo.

- Si  $v \in V_i$  tal que  $|V_i| = \lceil \frac{n}{r} \rceil$ , entonces  $gr(v) = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil$ ,

si  $v$  se pasa a una de las partes de orden  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ , entonces

$$\begin{aligned} gr(v) &= n - \left( \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= n - \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil. \end{aligned}$$

Así no se pierden aristas para este grafo  $r$ -partito completo.

si  $v$  se pasa a una de las partes de orden  $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ , entonces

$$gr(v) = n - \left( \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil + 1 \right).$$

Así se pierde una arista para este grafo  $r$ -partito completo.

Por tanto el nuevo grafo tiene igual o menos aristas que  $T_{n,r}$ . Similarmente se puede seguir el proceso de mover dos o mas vértices.  $\square$

El grafo de Turán dá un ejemplo de cuántas aristas se pueden agregar como máximo a un grafo  $k$ -cromático con  $n$  vértices, de tal forma que siga siendo  $k$ -cromático.

Si  $G = (V, A)$  y  $\chi(G) = k$ ,  $|V| = n$ , como el grafo  $T_{n,k} = (V, A_T)$  tiene:

$$|A_T| = \sum_{j=2}^r n_1 n_j + \sum_{j=3}^r n_2 n_j + \dots + \sum_{j=r}^r n_{r-1} n_j = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r n_i n_j,$$

entonces se pueden agregar como máximo  $|A_T| - |A|$  aristas en  $G$  y así obtener un grafo  $k$ -cromático maximal con  $|A_T|$  aristas.

**Definición 2.11.5.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo y  $a = \{v_i, v_j\} \in A$ . Se define el grafo  $G - a$  como  $G - a = (V', A')$  donde  $V' = V$  y  $A' = A - \{a\}$ .  $G - a$  se llama el **grafo que surge de eliminar la arista  $a$**  del grafo  $G$ .

**Proposición 2.11.6.** Si  $G = (V, A)$  es un grafo  $k$ -crítico, entonces.

1. Dado cualquier  $v \in V$ , hay una  $k$ -coloración propia de  $G$  en que el color asignado a  $v$  no es asignado a ningún otro vértice, y donde los otros  $k - 1$  colores aparecen en  $N_G(v)$ .

2. Dados  $v_1, v_2 \in V$  y  $a = \{v_1, v_2\} \in A$  toda  $(k-1)$ -coloración propia de  $G - a$  le asigna el mismo color a los extremos de  $a$ .

*Demostración* [5]:

1. Sea  $f$  una  $(k-1)$ -coloración propia de  $G - v$ . Asignando un  $k$ -ésimo color a  $v$  se completa una  $k$ -coloración propia de  $G$ . Si los vértices de  $N_G(v)$  no utilizan los  $k-1$  colores, entonces es posible asignar el color faltante a  $v$  y completar una  $(k-1)$ -coloración propia de  $G$ , pero esto no puede suceder ya que el número cromático de  $G$  es  $k$ .
2. Si una  $(k-1)$ -coloración propia de  $G - a$  asigna colores distintos a los extremos de  $a$ , se puede mantener dicha coloración tras agregar  $a$ , lo cual no puede ser porque el número cromático de  $G$  es  $k$ .  $\square$

**Nota:** Aunque  $G$  no sea  $k$ -crítico, si  $G$  tiene un vértice  $v$  o una arista  $a$  tal que  $\chi(G - v) < \chi(G) = k$  o  $\chi(G - a) < \chi(G) = k$ , entonces la parte correspondiente de la proposición anterior se aplica a  $v$  o a  $a$  según sea el caso.

**Definición 2.11.7.** Un grafo  $G = (V, A)$  sin vértices aislados es un **grafo crítico** si

$$\chi(G - a) < \chi(G) = k,$$

para toda arista  $a$  de  $G$ .

**Proposición 2.11.8.** Sean  $G = (V_G, A_G)$  y  $H = (V_H, A_H)$  dos grafos, con  $V_G \cap V_H = \emptyset$ . Si  $G$  y  $H$  son críticos, entonces  $G \cup H$  es crítico.

*Demostración:* Si  $a \in A_G$ , entonces

$$\begin{aligned} \chi((G \cup H) - a) &= \chi((G - a) \cup H), \\ &= \chi(G - a) + \chi(H), \text{ por } \mathbf{Proposición 2.2.2}, \\ &< \chi(G) + \chi(H), \text{ porque } G \text{ es crítico}, \\ &= \chi(G \cup H), \text{ por } \mathbf{Proposición 2.2.2}. \end{aligned}$$

De forma análoga se demuestra para el caso en que  $a \in A_H$ .

Si  $a = \{v, w\} \in A_{G \cup H}$ , donde  $v \in V_G$  y  $w \in V_H$ , según la proposición anterior hay  $k$ -coloraciones propias de  $G$  y de  $H$  en las cuales los colores asignados a  $v$  y a  $w$ , respectivamente, no son asignados a ningún otro vértice en el grafo correspondiente y donde los otros  $k-1$  colores aparecen en  $N_G(v)$  y  $N_G(w)$ .

En consecuencia, para la arista  $a = \{v, w\}$ ,  $\chi(G \cup H - \{v, w\}) < \chi(G \cup H)$ , debido a que el color de  $w$  se puede asignar a  $v$  o viceversa.

Por lo tanto, para todo  $a = \{v, w\} \in A(G \cup H)$  se tiene

$$\chi((G \cup H) - a) < \chi(G \cup H). \quad \square$$

### 3 PRINCIPIO DEL PALOMAR Y TEOREMA DE RAMSEY

En este capítulo se tratan dos teoremas de existencia: el Principio del Palomar y el Teorema de Ramsey, el cual se puede considerar como una generalización de la siguiente observación llamada el Principio del Palomar: al clasificar  $k$  objetos en  $m$  casillas y  $k > m$ , entonces en alguna casilla necesariamente hay más de un objeto. Más aún, dado un número  $h$ , existe un número  $M$  tal que si se clasifican  $M$  objetos en  $k$  casillas, siempre hay una casilla con al menos  $h$  objetos. El Teorema de Ramsey generaliza este principio al considerar no solamente la clasificación de los elementos de un conjunto dado, sino la clasificación de sus subconjuntos que tienen exactamente dos elementos, o en términos generales, la clasificación de los subconjuntos que tienen  $n$  elementos.

Se analizan las versiones informal, general e infinita para el Principio del Palomar y el Teorema de Ramsey y se incluyen algunas aplicaciones en el campo de las Matemáticas, entre ellas el Teorema de Erdős-Szekeres, el Lema de Dilworth, el Lema y Teorema de Schur, Teorema de Sperner y Teorema de Van der Waerden, entre otras.

#### 3.1 Versiones del Principio del Palomar

**Definición 3.1.1.** Si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos se define una **relación**  $R$  desde  $A$  hacia  $B$  o de  $A$  en  $B$  escrita  $R : A \longrightarrow B$ , como un subconjunto de la colección  $A \times B$  de pares ordenados  $(a, b)$  con  $a \in A$  y  $b \in B$ . Un **diagrama dirigido** de la relación  $R$  es una descripción de  $R$  en la que cada par ordenado  $(a, b) \in R$  se representa por una flecha desde  $a$  hasta  $b$ .

**Definición 3.1.2.** El **dominio** de  $R$  es el conjunto de los  $a \in A$  para los cuales existe un  $b \in B$  con  $(a, b) \in R$ ; el **rango** es el conjunto de los  $b \in B$  para los cuales existe  $a \in A$  tal que  $(a, b) \in R$ . Si  $(a, b) \in R$ , entonces  $a$  está relacionado con  $b$  mediante  $R$ .

**Definición 3.1.3.** Para cada  $a \in A$ , la **imagen** de  $a$  mediante la relación  $R$  es  $R(a) = \{b \in B : (a, b) \in R\}$ , el conjunto de elementos con los cuales está relacionado  $a$ . Para cada  $b \in B$  la **preimagen** de  $b$  mediante la relación  $R$  es  $R^{-1}(b) = \{a \in A : (a, b) \in R\}$ , el conjunto de elementos relacionados con  $b$ . La **relación recíproca** de  $R$  es  $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$ .

**Nota:** Es importante recordar que en términos de diagrama dirigido de  $R$ ,  $|R|$  es el número de flechas en la relación  $R$ , y  $|R(a)|$  es el número de flechas que salen de  $a$ . Similarmente,  $|R^{-1}(b)|$  es el número de flechas que llegan a  $b$ .

**Definición 3.1.4.** Una **función**  $f$  de  $A$  hacia  $B$ , escrita  $f : A \longrightarrow B$ , es una relación de  $A$  hacia  $B$  para la cual vale la siguiente condición:

Para cada  $a \in A$  existe un único  $b \in B$  con  $(a, b) \in f$ , el conjunto  $B$  es el **codominio** de  $f$ . Si  $(a, b) \in f$ , entonces se dice que  $f$  aplica  $a$  en  $b$ , y se escribe  $f(a) = b$ .

Si  $f$  es una biyección, entonces su recíproca  $f^{-1}$  se llama la **inversa** de  $f$ . Las biyecciones son las únicas funciones cuyas relaciones recíprocas también son funciones.

**Teorema 3.1.5. (Principio del Palomar).** *Sea  $R$  una relación de  $A$  en  $B$ , donde  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos no vacíos. Las siguientes cuatro afirmaciones son válidas:*

- (1) *Existe  $a \in A$  con  $|R(a)| \geq |R|/|A|$ .*
- (2) *Existe  $a \in A$  con  $|R(a)| \leq |R|/|A|$ .*
- (3) *Existe  $b \in B$  con  $|R^{-1}(b)| \geq |R|/|B|$ .*
- (4) *Existe  $b \in B$  con  $|R^{-1}(b)| \leq |R|/|B|$ .*

Para todo  $a \in A$ , el cociente  $|R(a)|/|A|$  es el **valor promedio de  $R(a)$** . Así que (1) dice que existe un  $a \in A$  con al menos  $|R|/|A|$  flechas saliendo de él, y (2) asegura que existe  $a \in A$  con a lo sumo  $|R|/|A|$  saliendo de él. Similarmente, (3) establece que existe  $b \in B$  con al menos  $|R|/|B|$  flechas apuntando a él, mientras que (4) establece que existe  $b \in B$  con a lo sumo  $|R|/|B|$  flechas apuntando a él.

*Demostración [6]:* Para probar (1) por contradicción se asume que

$$|R(a)| < |R|/|A|,$$

para todo  $a \in A$ . Entonces

$$|R| = \sum_{a \in A} |R(a)| < \sum_{a \in A} \frac{|R|}{|A|} = |A| \cdot \frac{|R|}{|A|} = |R|, \text{ debido a que } \sum_{a \in A} 1 = |A|.$$

Luego,  $|R| < |R|$  lo cual es un absurdo. Por lo tanto la hipótesis de que  $|R(a)| < |R|/|A|$  para todo  $a \in A$  es falsa. Luego existe un  $a \in A$  con  $|R(a)| \geq |R|/|A|$ .

Para probar (2) se reemplaza “<” por “>” en el argumento anterior. Finalmente (3) y (4) se siguen de (1) y (2) considerando la relación recíproca  $R^{-1} : B \rightarrow A$  y notando que  $|R^{-1}| = |R|$ .  $\square$

**Ejemplo.** Sean  $A_1, A_2, \dots, A_{50}$ , cincuenta subconjuntos de un conjunto  $S$  con 100 elementos, y cada  $A_i$  contiene 40 elementos de  $S$ . ¿Se puede probar que existe un elemento de  $S$  el cual está contenido en varios de los  $A_i$ ?

Definir una relación  $R$  de  $\{A_1, A_2, \dots, A_{50}\}$  en  $S$  tomando  $(A_i, s) \in R$  si y sólo si  $s \in A_i$ . Se sigue del **Teorema 3.1.5-(3)** que existe  $s \in S$  con al menos

$$|R^{-1}(s)| \geq |R|/|S| = \frac{40 \times 50}{100} = 20,$$



20 flechas apuntando a él.

**De manera informal se enuncia el principio del palomar así:**

Al tener un conjunto con  $n$  objetos que son distribuidos en  $k$  cajas, entonces:

$n > k \implies$  al menos hay una caja con al menos 2 objetos.

$n > 2k \implies$  al menos hay una caja con al menos 3 objetos.

$n > rk \implies$  al menos hay una caja con al menos  $r + 1$  objetos,  $r \in \mathbb{Z}^+$ .

**Ejemplos.**

- (i) Si se pregunta a cada integrante de un grupo de 15 personas, que día de la semana cumple años, se tiene que al menos tres de ellos nacieron el mismo día de la semana.
- (ii) Si se tiran dos dados doce veces, entonces al menos en dos de esas tiradas se obtiene la misma suma de puntuaciones.
- (iii) Si  $X$  es un conjunto arbitrario de 16 números enteros, entonces hay al menos 4 elementos de  $X$  con el mismo resto módulo 5 (la diferencia de cada dos de ellos es un múltiplo de 5).

**Verificación de (iii):** La congruencia módulo  $m$  clasifica a los enteros en  $m$  clases de equivalencia. Las clases residuales módulo  $m$  son:  $\{[0], [1], \dots, [m - 1]\}$ . Así, los  $n = 16$  números enteros de  $X$  serán distribuidos en  $k = 5$  cajas (clases) tal que dos enteros están en una misma caja si poseen el mismo resto en la división por 5. Como  $16 > 3(5)$ , el principio del palomar versión informal nos dice que existe al menos una caja con al menos 4 números enteros.

**¿Qué dice el principio del palomar sobre funciones?**

Si  $f : A \longrightarrow B$  es una función, entonces  $|f| = |A|$ , así  $|f| / |A| = 1$ ; luego (1) y (2) del teorema anterior no ofrecen información. Sin embargo, (3) y (4) resultan importantes y se reestablecen aquí en el contexto de funciones.

**Teorema 3.1.6 (Principio del Palomar: versión general para funciones).** *Sea  $f$  una función de  $A$  en  $B$ , donde  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos no vacíos. Las siguientes dos afirmaciones son válidas:*

- (1) *Existe  $b \in B$  con  $|f^{-1}(b)| \geq |A| / |B|$ .*
- (2) *Existe  $b \in B$  con  $|f^{-1}(b)| \leq |A| / |B|$ .*

*Demostración [6]:* Es un caso particular del **Teorema 3.1.5**, específicamente de los numerales (3) y (4).  $\square$

El siguiente teorema es una generalización del teorema anterior.

**Teorema 3.1.7.** *Si  $f : A \longrightarrow B$  es una función de un conjunto finito no vacío  $A$  en un conjunto con  $b$  elementos  $B = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$ , entonces las dos siguientes afirmaciones son válidas:*

- (1) Si  $|A| = a_1 + a_2 + \dots + a_b - b + 1$ , entonces existe  $B_i$  con  $|f^{-1}(B_i)| \geq a_i$ , para  $1 \leq i \leq b$ .
- (2) Si  $|A| = a_1 + a_2 + \dots + a_b - b + 1$ , entonces existe  $B_i$  con  $|f^{-1}(B_i)| \leq a_i$ , para  $1 \leq i \leq b$ .

*Demostración* [6]:

- (1) Si no existe un  $B_i$ , tal que  $|f^{-1}(B_i)| \geq a_i$ , para  $1 \leq i \leq b$ , entonces

$$|A| = \sum_{i=1}^b |f^{-1}(B_i)| \leq \sum_{i=1}^b (a_i - 1) = \sum_{i=1}^b a_i - b,$$

lo cual es una contradicción.

- (2) Si no existe un  $B_i$ , tal que  $|f^{-1}(B_i)| \leq a_i$ , para  $1 \leq i \leq b$ , entonces

$$|A| = \sum_{i=1}^b |f^{-1}(B_i)| \geq \sum_{i=1}^b (a_i + 1) = \sum_{i=1}^b a_i + b,$$

lo cual es una contradicción.  $\square$

**Teorema 3.1.8. (Caso especial del Principio del Palomar para funciones).** Si  $f : A \rightarrow B$  es una función y  $|A| = |B| + 1$ , entonces existe  $b \in B$  con  $|f^{-1}(b)| \geq 2$ . En otras palabras,  $f(a_1) = f(a_2)$  para algunos  $a_1, a_2 \in A$ .

*Demostración:*

$$|f^{-1}(b)| = \frac{|A|}{|B|} = \frac{|B| + 1}{|B|} > 1. \quad \square$$

**De manera informal el principio del palomar para funciones se enuncia así:** Si se tienen  $k + 1$  objetos que están contenidos en  $k$  cajas, entonces hay al menos una caja con al menos 2 objetos.

**Ejemplo** [9]: Si  $S$  es un conjunto finito de números naturales, entonces hay un subconjunto  $T$  de  $S$  tal que la suma de todos sus elementos es un múltiplo de  $|S|$ .

**Verificación:** Si  $n = |S|$ ; lo que se busca es una suma congruente con cero modulo  $n$ . Un primer intento será establecer la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \wp(S) &\longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} \\ T &\longrightarrow \varphi(T) = \left( \sum_{a \in T} a \right) \text{ mód } n, \end{aligned}$$

donde  $\wp(S)$  es el conjunto de partes de  $S$ . Como  $|\wp(S)| = 2^n$  y  $2^n > n$  para  $n \geq 1$ , el principio del palomar nos dice que hay al menos dos subconjuntos  $T_1$  y  $T_2$  de  $S$  tales que

$$\sum_{a \in T_1} a \equiv \sum_{b \in T_2} b \pmod{n},$$

y por tanto

$$\sum_{a \in T_1} a - \sum_{b \in T_2} b \equiv 0 \pmod{n}.$$

Pero esto no garantiza que  $(a - b) \in S$  para  $a \in T_1$  y  $b \in T_2$ . Luego, no se puede deducir de esta manera lo que se quería demostrar en forma completa. En cambio si  $T_1 \subseteq T_2$  ó  $T_2 \subseteq T_1$ , se puede comprobar que sí. Lo que se debe hacer es ordenar los elementos de  $S$ , de menor a mayor, esto es

$$S = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}.$$

Luego, se consideran los subconjuntos:

$$\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \dots, S$$

y la función que devuelve los valores módulo  $n$  de cada suma:

$$a_1, (a_1 + a_2), (a_1 + a_2 + a_3), \dots$$

Esto es:

$$\begin{aligned} \varphi' : \{1, 2, \dots, n\} &\longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \\ i &\longrightarrow \varphi'(i) = \left( \sum_{k=1}^i a_k \right) \pmod{n} \end{aligned}$$

Si existe un  $i$  con  $\varphi'(i) = 0$  se habrá terminado; y por tanto el conjunto buscado será  $T = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\}$ . Si por el contrario, no existe tal  $i$  entonces la aplicación sólo tomará valores en  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ ; y por el principio del palomar existen  $i < j$  tales que  $\varphi'(i) = \varphi'(j)$ , esto es,

$$\sum_{k=1}^i a_k \equiv \sum_{k=1}^j a_k \pmod{n},$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase  $i < j$ , por lo tanto el conjunto buscado será  $T = \{a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j\}$ .

**Teorema 3.1.9 (Principio de Dirichlet: Principio del Palomar en versión de particiones).** Sean  $a_1, a_2, \dots, a_k$  números enteros no negativos y sea  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k - k + 1$ . Si  $|X| \geq n$  y  $X = A_1 \cup \dots \cup A_k$  es una descomposición de  $X$  como unión de subconjuntos disyuntos y no vacíos, entonces para algún  $i$  tal que  $1 \leq i \leq k$  se tiene  $|A_i| \geq a_i$ .

*Demostración* [13]: Si se supone por reducción al absurdo que  $|A_i| < a_i$  para todo  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ), entonces  $|A_i| \leq a_i - 1$  y por tanto

$$|X| = |A_1| + \dots + |A_k| \leq (a_1 - 1) + \dots + (a_k - 1) = n - 1,$$

en contradicción con la hipótesis  $|X| \geq n$ .  $\square$

En las versiones anteriores del principio del palomar se ha asumido que el dominio y el codominio son conjuntos finitos. Si el dominio es infinito numerable, entonces resulta el principio del palomar infinito.

**Teorema 3.1.10. (Principio del Palomar infinito).** *Si  $f : A \longrightarrow B$  es una función de un conjunto contablemente infinito  $A$  en un conjunto finito no vacío  $B$ , entonces existe  $b \in B$  con  $f^{-1}(b)$  contablemente infinito.*

*Demostración:* Si se supone que para todo  $b \in B$ ,  $f^{-1}(b)$  es contablemente finito, entonces

$$\sum_{b \in B} |f^{-1}(b)| < |A|,$$

lo cual es una contradicción, ya que como  $f$  es una función de  $A$  en  $B$ ,

$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)|.$$

Por lo tanto la suposición de que para todo  $b \in B$ ,  $f^{-1}(b)$  es contablemente finito es falsa. Y en consecuencia, existe un  $b \in B$  con  $f^{-1}(b)$  contablemente infinito.  $\square$

**Versión infinita informal del principio del palomar.** Si se tiene un conjunto  $X$  infinito y se distribuyen sus elementos en un número finito de cajas, entonces hay una caja que contiene infinitos elementos.

## 3.2 Aplicaciones del Principio del Palomar

En esta sección se aplica el principio a dos tipos de estructuras matemáticas: sucesiones y órdenes parciales. El objetivo es demostrar que sucesiones arbitrarias y órdenes parciales contienen subestructuras no aleatorias.

**Definición 3.2.1** Una relación  $R$  de  $X$  en  $X$  o de  $X$  hacia  $X$  es **reflexiva** si  $(a, a) \in R$  para todo  $a \in X$ ; **simétrica** si  $(b, a) \in R$ , entonces  $(a, b) \in R$ ; **antisimétrica** si  $(a, b) \in R$  y  $(b, a) \in R$  implica  $a = b$ ; **transitiva** si  $(a, b) \in R$  y  $(b, c) \in R$ , entonces  $(a, c) \in R$ , para todo  $a, b, c \in X$ .

Un **orden parcial**  $R$  sobre  $X$  es una relación  $R$  de  $X$  en  $X$  que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se denota un orden parcial mediante  $\leq_X$ , y se escribe  $a \leq b$  cuando  $(a, b) \in R$ . Dos elementos  $a, b \in X$  son **comparables** si  $a \leq b$  o  $b \leq a$  y son **incomparables** si no son comparables.

**Definición 3.2.2.** Una **sucesión finita** de números reales es una función cuyo dominio es el conjunto  $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$  y el codominio es el conjunto de números reales.

Los números en el rango de la sucesión se llaman elementos de la misma.

Si el  $k$ -ésimo término está dado por  $a(k)$ , entonces  $a(k)$  se denota  $a_k$ . Una **sucesión infinita** de números reales es una función cuyo dominio es el conjunto  $\mathbb{N}$  y el codominio es el conjunto  $\mathbb{R}$ .

Por **ejemplo**, la función  $a(k) = k^2$  define la sucesión infinita  $S = \{1, 4, 9, \dots\}$  y  $S = \{2, 3, \sqrt{3}, \pi\}$  es una sucesión finita de números reales con cuatro términos.

Una sucesión (finita o infinita) es **creciente** o **estrictamente creciente** si  $a_i < a_j$  para todo  $i < j$ ; **decreciente** o **estrictamente decreciente** si  $a_i > a_j$  para todo  $i < j$ ; **monotónicamente creciente** si  $a_i \leq a_j$  para todo  $i < j$ ; **monotónicamente decreciente** si  $a_i \geq a_j$  para todo  $i < j$ ; **monótona** si es monotónicamente creciente o monotónicamente decreciente.

Así, la sucesión  $\{1, 1, 0, -1\}$  es monotónicamente decreciente y la sucesión  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  es estrictamente creciente.

Una sucesión  $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  es una **subsucesión** de  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  si existe una función uno a uno que va de los subíndices de la subsucesión a los subíndices de la sucesión  $f : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , para la cual  $f(i) < f(j)$  siempre que  $i < j$ ,  $b_i = a_{f(i)}$  para todo  $i \in \mathbb{N}_m$ .

Por **ejemplo**:  $\{-2, 2, \sqrt{2}\}$  es una subsucesión de  $\{1, 4, -2, 3, 15, 2, \sqrt{2}\}$ .

### 3.2.1 Teorema de Erdős-Szekeres

**Teorema 3.2.3. (Erdős-Szekeres).** *Si  $m, n \in \mathbb{N}$ , entonces cualquier sucesión*

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}\},$$

*de  $mn+1$  números reales contiene una subsucesión monotónicamente creciente de  $m+1$  términos o una subsucesión monotónicamente decreciente de  $n+1$  términos (o ambas).*

*Demostración* [6]: Si  $S$  es una sucesión de  $mn+1$  términos que no contiene una subsucesión monotónicamente creciente de  $m+1$  términos, ni una subsucesión monotónicamente decreciente de  $n+1$  términos. Entonces se define la función  $f : \mathbb{N}_{mn+1} \rightarrow \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$  mediante  $f(t) = (x_t, y_t)$ , donde  $x_t$  es el máximo número de términos en una subsucesión monotónicamente creciente de  $S$  comenzando con  $a_t$ , donde  $x_t \leq m$  (por la suposición inicial) y  $y_t$  es el máximo número de términos en una subsucesión monotónicamente decreciente de  $S$  comenzando con  $a_t$ , donde  $y_t \leq n$  (por la suposición inicial).

Por el principio del palomar existen  $j, k \in \{1, 2, \dots, mn+1\}$ ,  $j < k$ , con  $f(j) = f(k)$ . Se sigue que si  $a_j \leq a_k$ , entonces  $x_j > x_k$ , mientras que si  $a_j \geq a_k$ , entonces  $y_j > y_k$ . Ambas desigualdades contradicen  $f(j) = f(k)$ . Por lo tanto, la suposición inicial es falsa, y  $S$  contiene una subsucesión monotónicamente creciente de  $m+1$  términos o una subsucesión monotónicamente decreciente de  $n+1$  términos.  $\square$

**Ejemplo.** Tomando  $m = 4$  y  $n = 2$ , el teorema de Erdős-Szekeres garantiza que una sucesión  $S$  de  $mn+1 = 9$  números reales contiene una subsucesión monótona creciente de 5 términos o una subsucesión monótona decreciente de

tres términos o ambas. Si los nueve términos de  $S$  son distintos, entonces las subsucesiones serán: estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Así,

$$S_1 = \{2, 3, 5, -1, 0, 15, -60, -11, 4\}$$

contiene la subsucesión decreciente  $a_3 = \{2, -1, -60\}$  entre otras. y

$$S_2 = \{2, 3, 5, -1, 0, 15, -60, -11, 17\}$$

contiene la subsucesión creciente  $a_5 = \{2, 3, 5, 15, 17\}$  y la subsucesión decreciente  $a_3 = \{2, -1, -60\}$ , entre otras.

El número  $mn+1$  en el teorema anterior es el mejor posible ya que existe una sucesión de  $mn$  números reales que no contiene una subsucesión monotónicamente creciente de  $m+1$  términos ni una subsucesión monotónicamente decreciente de  $n+1$  términos. A continuación se muestra la existencia de tal sucesión concatenando  $n$  sucesiones, cada una de  $m$  términos crecientes de la siguiente forma: para cada  $j \in \mathbb{N}_n$ , sea  $S_j = \{a_{1j}, \dots, a_{mj}\}$  una sucesión monotónicamente creciente de  $m$  números reales, donde cada elemento de  $S_j$  es mayor que cada elemento de  $S_k$  siempre que  $j < k$ . Así, la sucesión

$$S = \{a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}\}$$

no contiene una subsucesión monótona de la longitud deseada.

**Corolario 3.2.4.** *Si se tiene  $n^2 + 1$  números reales,  $n + 1$  de ellos forman una sucesión monótona.*

*Demostración:* Es un caso particular del teorema anterior con  $m = n$ .  $\square$

**Ejemplo:** Dados  $n^2 + 1$  puntos distintos en  $\mathbb{R}^2$ . Probar que hay una subsucesión de  $n + 1$  puntos

$$(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$$

para la cual

$$\begin{aligned} x_1 &\leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+1}, \\ y_1 &\geq y_2 \geq \dots \geq y_{n+1}, \end{aligned}$$

o una subsucesión de  $n + 1$  puntos para la cual

$$\begin{aligned} x_1 &\leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+1}, \\ y_1 &\leq y_2 \leq \dots \leq y_{n+1}. \end{aligned}$$

**Verificación:** Si se ordenan los  $n^2 + 1$  puntos en  $\mathbb{R}^2$  de tal forma que su escogencia se hace de izquierda a derecha en el plano tomando como referencia el eje  $x$ . Así, se obtiene una sucesión de puntos para la cual las coordenadas  $x$  forman una sucesión creciente de  $n^2 + 1$  números reales y sus respectivas

coordenadas en el eje  $y$  forman una sucesión de  $n^2 + 1$  números reales, la cual por el colorario anterior tiene una subsucesión de longitud  $n + 1$  creciente o decreciente.

El lema de Dilworth, presentado en la siguiente sección, generaliza el teorema de Erdős-Szekeres a conjuntos parcialmente ordenados; es decir, conjuntos en los cuales dos elementos pueden ser o no ser comparables.

### 3.2.2 Lema de Dilworth

**Definición 3.2.5.** Un **orden total** (o un orden lineal) sobre un conjunto  $X$  es un orden parcial  $\leq_X$  donde todo par de elementos de  $X$  son comparables.

Por ejemplo, la relación menor o igual usual es un orden lineal sobre el conjunto  $\mathbb{N}$ .

Si  $\leq_X$  es un orden parcial sobre  $X$  y  $Y$  es un subconjunto de  $X$  en el cual todo par de elementos son comparables, entonces  $Y$  es **una cadena** (de  $X$ ). Si ningún par de elementos distintos de  $Y$  son comparables, entonces  $Y$  es **una anticadena** (de  $X$ ). El número de elementos que conforman una cadena o una anticadena se denomina **tamaño**. La **longitud** de  $\leq_X$  es el máximo número de elementos de una cadena de  $X$  y el **ancho** de  $\leq_X$  es el máximo número de elementos de una anticadena.

De un orden parcial  $\leq_X$  surge un grafo orientado donde el conjunto de vértices es el conjunto  $X$  y las aristas orientadas son todas las parejas de  $\leq_X$  que no indican reflexividad, ni transitividad.

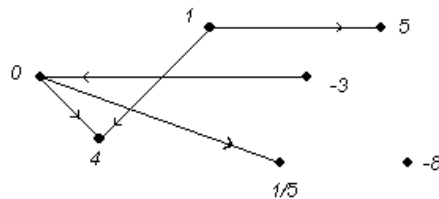
La **Figura 3.1** es el grafo orientado que representa las parejas

$$(1, 5), (1, 4), (-3, 0), (0, 4), \left(0, \frac{1}{5}\right)$$

que pertenece al orden parcial

$$\leq_X := \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 5), (1, 4), (5, 5), (-3, -3), (-3, 0), (-3, 4) \\ (-3, \frac{1}{5}), (0, 0), (0, 4), (0, \frac{1}{5}), (4, 4), (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}), (-8, -8) \end{array} \right\}$$

definido sobre el conjunto  $X = \{1, 5, -3, 0, 4, \frac{1}{5}, -8\}$ . La longitud y el ancho de  $\leq_X$  son ambos 3; por ejemplo,  $\{-3, 0, 4\}$  es una cadena de longitud 3 y  $\{1, -3, -8\}$  es una anticadena de ancho 3.

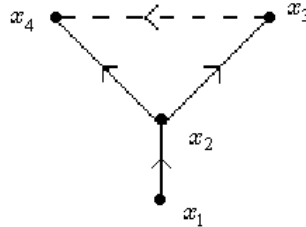


**Figura 3.1** Un orden parcial de ancho 3 y longitud 3

La longitud y el ancho de un orden parcial en un conjunto  $X$  están relacionados con el cardinal del conjunto por medio del siguiente resultado de R. P. Dilworth.

**Lema 3.2.6. (Dilworth).** *En cualquier orden parcial sobre un conjunto  $X$  de  $mn + 1$  elementos, existe una cadena de longitud  $m + 1$  o una anticadena de ancho  $n + 1$ .*

*Demostración* [6]: Si se supone que no hay una cadena de longitud  $m + 1$ , entonces se puede definir una función  $f : X \rightarrow \{1, \dots, m\}$  con  $f(x)$  igual al máximo número de elementos en una cadena terminando en el elemento  $x$ . Por el Principio del palomar **Teorema 3.1.6-(1)**, algunos  $n + 1$  elementos de  $X$  tienen la misma imagen bajo  $f$ . Por la definición de  $f$ , esos elementos son incomparables, ya que si al menos dos elementos  $x, y$  de estos fueran comparables se tendría una cadena de longitud  $m + 1$  para algunos de esos elementos (ver **Figura 3.2** en donde si  $x_3$  y  $x_4$  fueran comparables  $f(x_4) = 4$ ). Por lo tanto, ellos forman una anticadena de tamaño  $n + 1$ .  $\square$



**Figura 3.2.**

Si se considera de nuevo el orden parcial de la **Figura 3.1**, en el cual

$$|X| = 7 = 2 \cdot 3 + 1,$$

entonces el Lema de Dilworth garantiza una cadena de  $2 + 1$  elementos (la cual se puede observar en el ejemplo) o una anticadena de  $3 + 1$  elementos. Se nota la similitud entre el Lema de Dilworth y el **Teorema 3.2.3** de Erdős-Szekeres. En cada caso, las hipótesis conciernen a un conjunto de  $mn + 1$  elementos y la conclusión a subconjuntos de tamaños  $m + 1$  y  $n + 1$ . Estas similitudes no son coincidencia. En efecto, el teorema de Erdős - Szekeres puede probarse como un corolario del Lema de Dilworth como sigue.

Sea  $S = \{a_1, \dots, a_{mn+1}\}$  una sucesión de  $mn + 1$  números reales y  $\leq_S$  un orden parcial definido sobre  $S$  tomando  $a_i \leq_S a_j$ , si con el orden usual en los reales  $a_i \leq a_j$  y  $i \leq j$ . El Lema de Dilworth garantiza una cadena de  $m + 1$  elementos (correspondiendo a una subsucesión monotónicamente creciente de  $m + 1$  términos) o una anticadena de  $n + 1$  elementos (correspondiendo a una subsucesión monotónicamente decreciente de  $n + 1$  términos).



**Ejemplo:** Sean  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{mn+1}$ ,  $mn + 1$  enteros. Probar que se pueden seleccionar  $m + 1$  de estos enteros ninguno de los cuales divide al otro, o  $n + 1$  de ellos cada uno de los cuales divide al siguiente.

Se puede probar que la relación “**divide a**” es una relación de orden parcial, ya que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Aplicando el lema de Dilworth se obtiene el resultado esperado.

El Lema de Dilworth es equivalente al siguiente teorema:

**Teorema 3.2.7.** *Sea  $X$  un conjunto y sea  $\leq_X$  un orden parcial sobre  $X$  con longitud  $l$  y ancho  $w$ . Si  $|X| = s$ , entonces  $s \leq lw$ .*

*Demostración* [6]: Si se supone lo contrario, es decir que  $s \geq lw + 1$ , entonces por el Lema de Dilworth, existe una cadena de longitud  $l + 1$  o una anticadena de tamaño  $w + 1$ . Este resultado contradice la definición de  $l$  o la de  $w$ .  $\square$

**Observación:** La prueba anterior muestra que el **Teorema 3.2.7** se sigue del Lema de Dilworth. También se puede ver que el Lema de Dilworth se sigue del **Teorema 3.2.7**. Esto es, si se supone que no existen cadenas de longitud  $m + 1$ , ni anticadenas de ancho  $n + 1$ ; entonces se pueden encontrar cadenas de longitud  $m$  (a lo sumo) y anticadenas de ancho  $n$  (a lo sumo), por el **Teorema 3.2.7**  $|X| \leq mn$ , lo cual es contradictorio porque  $|X| = mn + 1$ .

Se utiliza la desigualdad establecida en el **Teorema 3.2.7** para investigar la colección  $X(t)$  de los subconjuntos del conjunto de  $t$  elementos  $\mathbb{N}_t$ , ordenados por inclusión. Claramente el cardinal de  $X(t)$  es  $2^t$ . Además,  $l = t + 1$ , porque cualquier cadena de longitud máxima parte con el conjunto vacío y adiciona un elemento hasta que  $\mathbb{N}_t$  se agota. ¿Qué es  $w$ ? Esta pregunta se responde por el teorema de Sperner, pero por ahora se puede observar que la desigualdad de Dilworth entrega  $2^t \leq (t + 1)w$  estableciendo que  $w \geq \frac{2^t}{t+1}$ .

**Teorema 3.2.8. (Teorema de Dilworth).** *Si  $\leq_X$  es un orden parcial sobre un conjunto finito  $X$ , con longitud  $l$  y ancho  $w$ , entonces  $X$  puede ser particionado en  $l$  anticadenas o  $w$  cadenas.*

*Demostración:* Se prueba que  $X$  puede ser particionado en  $l$  anticadenas, para lo cual se define la función

$$f : X \longrightarrow \{1, \dots, l\},$$

tomando  $f(x)$  como el máximo número de elementos en una cadena terminando en el elemento  $x$ . La preimagen de cada  $y \in \{1, \dots, l\}$  es una anticadena, como las preimágenes son disjuntas se concluye que  $X$  es particionado en  $l$  anticadenas.

Para mostrar que  $X$  puede ser particionado en  $w$  cadenas, sea  $H$  una anticadena con  $w$  elementos  $h_1, h_2, \dots, h_w$  y sea cada  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq w$ , una cadena con el máximo número de elementos que contenga el elemento  $h_i$  de tal forma que  $P_i \cap P_j = \emptyset$ , para cada  $1 \leq i < j \leq w$ . Como  $P_i \subseteq X$ , entonces

$$\bigcup_{i=1}^w P_i \subseteq X.$$

Cada elemento  $r$  de  $X$  pertenece al menos a una cadena de la relación de orden parcial, por lo tanto  $r \in P_i$  para algún  $i$ , ya que si  $r \notin P_i$  para todo  $i$ , entonces  $H \cup \{r\}$  sería una anticadena con  $w + 1$  elementos, lo cual no es posible.  $\square$

Considerando la **Figura 3.1** de nuevo, se encuentra que  $X$  puede ser particionado en cuatro cadenas:

$$\left\{-3, 0, \frac{1}{5}\right\}, \{1, 4\}, \{5\}, \{-8\},$$

y en tres anticadenas:

$$\{5, 0\}, \{1, -3, -8\}, \left\{4, \frac{1}{5}\right\},$$

la última partición la justifica el teorema anterior.

**Teorema 3.2.9. (Versión infinita del Lema de Dilworth).** *Un orden parcial sobre  $\mathbb{N}$  entrega una cadena infinita o una anticadena infinita.*

*Demostración:* Si se supone que no existe una cadena infinita, entonces no existen cadenas o existe al menos una cadena de longitud  $m$ . Si se dá el primer caso se tiene una anticadena de longitud infinita. Si se dá el segundo se define la función

$$f : X \longrightarrow \{1, 2, \dots, m\},$$

con  $f(x)$  igual al máximo número de elementos en una cadena terminando en  $x$ . Por el principio del palomar infinito, existen infinitos elementos de  $X$  que tienen la misma imagen bajo  $f$  y por la definición de  $f$  esos elementos son incomparables, ya que si lo fueran se tendría una cadena de longitud  $m + 1$  para alguno de estos elementos, lo cual no es posible. Por lo tanto los elementos que tienen la misma imagen bajo  $f$  forman una anticadena infinita.  $\square$

### 3.2.3 Teorema de Sperner

Sea el conjunto  $\mathbb{N}_t = \{1, 2, 3, \dots, t\}$  y  $X(t)$  la colección de subconjuntos del conjunto  $\mathbb{N}_t$ , y sea  $\subseteq$  el orden parcial contenencia sobre  $X(t)$ . Por ejemplo, si  $t = 4$ , entonces  $X(4)$  consiste de 16 elementos:

$$\begin{aligned} &\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \\ &\{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

La cardinalidad de  $X(t)$  es  $2^t$ . Algunos ejemplos de contenencia son:

$$\{1, 3\} \subseteq \{1, 3, 4\}, \emptyset \subseteq \{1\} \text{ y } \{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}.$$

¿Cuál es la longitud y el ancho de  $\subseteq$ ? La longitud es  $l = t + 1$ , porque la cadena mas larga inicia con  $\emptyset$  e incluye un nuevo elemento en cada paso hasta que todos los  $t$  elementos estén incluidos. El ancho  $w$  de  $\subseteq$  es el objeto del

teorema de Sperner. Se recuerda que una anticadena de  $X(t)$  es una colección de subconjuntos de  $\mathbb{N}_t$  ninguno de los cuales contiene a otro.

Sperner probó el siguiente teorema en 1928.

**Teorema 3.2.10. (Sperner).** *La cardinalidad  $m$  de una anticadena  $A$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}_t$  satisface  $m \leq \binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}$ . Por lo tanto, como los  $\binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}$  subconjuntos de tamaño  $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor$  forman una anticadena, el ancho de  $\subseteq$  es*

$$w = \binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}.$$

*Demostración [6]:* Sea  $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ , y sea  $|A_i| = \alpha_i$ , para cada  $i \in \mathbb{N}_m$ . Para cada  $A_i$  hay  $\alpha_i!(t - \alpha_i)!$  cadenas de longitud  $t + 1$  que contienen a  $A_i$ . Tales cadenas comienzan con el conjunto vacío, agregan un elemento a la vez hasta que  $A_i$  se agota, luego agregan un elemento a la vez hasta que el complemento de  $A_i$  se agota, o lo que es igual  $\alpha_i!$  es el número de subconjuntos de  $A_i$  y  $(t - \alpha_i)!$  es el número de conjuntos que contienen a  $A_i$ . Esas cadenas son diferentes y hay  $t!$  cadenas de longitud  $t + 1$  juntas, ya que  $\emptyset$  ofrece  $t$  posibilidades de contención en los conjuntos de un elemento, y los conjuntos de un elemento tienen  $t - 1$  posibilidades de contención en los conjuntos de dos elementos, así sucesivamente hasta los conjuntos de  $t - 1$  elementos que tienen una posibilidad de contención en el conjunto  $\mathbb{N}_t$ . Entonces,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i!(t - \alpha_i)! \leq t!.$$

Dividiendo esta desigualdad por  $t!$  se obtiene:

$$\sum_{i=1}^m \binom{t}{\alpha_i}^{-1} \leq 1,$$

y reconociendo que  $\binom{t}{k}$  es máximo cuando  $k = \lfloor t/2 \rfloor$ , se obtiene:

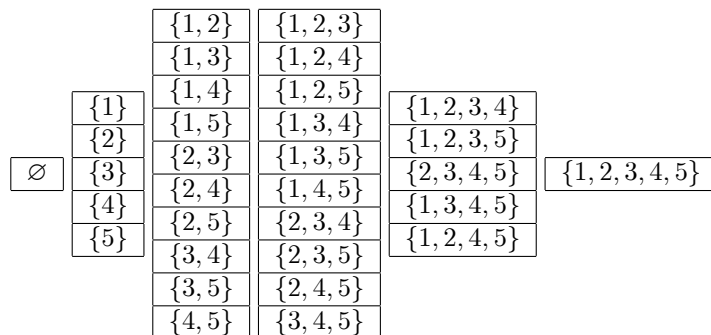
$$m \binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^{-1} \leq \sum_{i=1}^m \binom{t}{\alpha_i}^{-1} \leq 1 \quad (3.1)$$

Por lo tanto,

$$m \leq \binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}. \quad \square$$

¿Cuáles son las posibles anticadenas de  $\mathbb{N}_t$  con  $\binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}$  elementos? La igualdad en (3.1) puede obtenerse únicamente si  $\binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^{-1} = \binom{t}{\alpha_i}^{-1}$  para cada  $\alpha_i$ . Si  $t$  es par, esto obliga a que  $\alpha_i = \frac{t}{2}$ . Si  $t$  es impar, entonces todos los elementos de la anticadena son de tamaño  $\frac{t-1}{2}$  o son todos de tamaño  $\frac{t+1}{2}$ .

**Ejemplo:** Los elementos de  $X(5)$  son todos los subconjuntos del conjunto  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , los cuales se presentan organizados en columnas según el número de elementos:



La relación de contención se puede observar de manera horizontal, escogiendo un elemento apropiado de cada columna empezando por el elemento  $\emptyset$ , así se obtienen cadenas de longitud 6. Las columnas forman anticadenas ya que entre los elementos pertenecientes a ellas no se da la relación de contención.

Se observa que es posible encontrar  $\alpha_1!(t - \alpha_1)! = 2!(5 - 2)! = 12$  cadenas que contengan al conjunto  $\{1, 2\}$ .

Por el Teorema de Sperner hay una anticadena de longitud

$$w = \binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} = \binom{5}{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor} = \binom{5}{2} = 10.$$

### 3.3 Versiones del Teorema de Ramsey

El teorema de Ramsey se origina por el interés de Frank Plumpton Ramsey (nacido en 1903, Cambridge) en buscar una solución al problema de encontrar un método mecánico para decidir si una proposición matemática arbitraria puede ser probada dentro de una teoría o no. La teoría de Ramsey fué iniciada por Erdős y Szekeres en 1933 y tiempo después descubrieron la conexión con los trabajos de Ramsey.

Lo que interesa en esta teoría es colorear aristas en una familia de grafos completos  $K_n$ , sin restricciones sobre vecindades, es decir si las aristas tienen un vértice en común. Aquí un  **$q$ -subconjunto** de  $S$  es un subconjunto con  $q$  elementos del conjunto  $S$ .

El aspecto que motivó a indagar sobre algunas aplicaciones del teorema de Ramsey, que es la base de la teoría de Ramsey, es resaltar la importancia de conocer e investigar la utilidad que tienen los resultados ya conocidos de una teoría matemática dentro de otras teorías, mostrando el poder conceptual que tiene para la solución de algunos problemas matemáticos, su íntima relación con la teoría de grafos y la combinatoria, dentro de ella las relaciones binarias y el principio de palomar.

**Definición 3.3.1.** Una **coloración de las aristas de un grafo**  $G$  con  $k$  colores es una función  $f : A_G \rightarrow C$ , siendo  $C$  un conjunto de  $k$  elementos

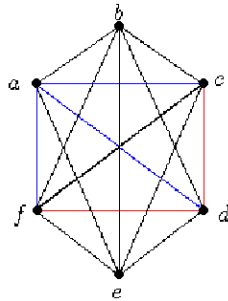
(no se impone ninguna restricción sobre los colores de aristas con un extremo común). Un grafo coloreado se dice **monocromático** si todas sus aristas son del mismo color. La existencia de los números de Ramsey nos permite enunciar el siguiente resultado, cuya prueba se sigue de la versión general que se presenta más adelante.

**Teorema 3.3.2. (Teorema de Ramsey: versión de grafos).** *Dados enteros positivos  $p, q$  existe un entero mínimo  $n$  tal que si un grafo completo tiene al menos ese número de vértices entonces, para cualquier coloración de sus aristas con dos colores (rojo o azul) es posible encontrar un subgrafo  $K_p$  de color rojo o un subgrafo  $K_q$  de color azul.*

El número  $n$  se denomina **número de Ramsey** y se denota  $R(p, q)$ .

**Ejemplo:** En cualquier colección de seis enteros distintos o bien tres de ellos son primos relativos entre sí o bien tres de ellos no son primos relativos entre sí.

**Verificación:** Se considera a  $K_6$ , cuyas aristas se colorean con dos colores, azul (primos relativos) y rojo (no primos relativos). Se quiere probar que siempre se encuentra un  $K_3$  rojo o un  $K_3$  azul en cualquier coloración posible de  $K_6$ . En otras palabras se prueba que  $R(3, 3) = 6$ .



**Figura 3.3**

Se nombra el conjunto de vértices que representan 6 enteros distintos por  $\{a, b, c, d, e, f\}$  y se fija uno de ellos, por ejemplo  $a$ , al que llegan cinco aristas en total y que se deben distribuir en dos colores, al vértice  $a$  deben llegar al menos tres aristas azules o bien al menos tres aristas rojas. Si se supone que se tiene el primer caso y que las aristas azules se unen por ejemplo con los vértices  $c, d, y f$ , y si alguna de las aristas entre estos vértices fuera azul, se tendría ya un triángulo azul. Si no fuera así, lo que se tendría sería un triángulo rojo con vértices  $c, d$  y  $f$ . De ahí que  $R(3, 3) \leq 6$ .

Si se parte de un  $K_5$  no es posible concluir lo mismo. A continuación se muestra una coloración para un  $K_5$  con la relación primos relativos y no primos relativos en la cual no existe un triángulo monocromático rojo ni un triángulo monocromático azul. De ahí que  $R(3, 3) \geq 6$  y por lo tanto  $R(3, 3) = 6$ .

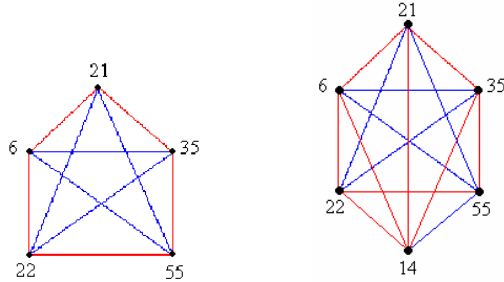


Figura 3.4

En general se puede considerar un número  $t \geq 2$  de colores, y plantear el problema:

dados enteros  $p_1, p_2, \dots, p_t$ , encontrar el mínimo entero  $n = R(p_1, p_2, \dots, p_t)$  para el que cualquier coloración con  $t$  colores de las aristas del grafo completo  $K_n$  contenga un subgrafo completo  $K_{p_i}$  monocromático de color  $i$ , para algún  $i = 1, 2, \dots, t$ .

**Teorema 3.3.3. (Ramsey: versión conjuntista).** *Dados los enteros positivos  $p_1, p_2, \dots, p_t$ , existe un entero mínimo  $n = R(p_1, p_2, \dots, p_t)$  tal que si un conjunto  $S$  tiene  $n$  (o más) elementos y se colorean todos sus subconjuntos de dos elementos con  $t$  colores, entonces existe un  $p_i$ -subconjunto de  $S$  tal que todos sus subconjuntos de dos elementos tienen color  $i$ .*

Se pueden estudiar situaciones todavía más generales. Por ejemplo, el teorema de Ramsey sigue siendo cierto, cambiando los subconjuntos de tamaño dos por subconjuntos de tamaño  $r$ . La notación ahora sería  $R(p_1, p_2, \dots, p_t; r)$  y lo que se denotaba como  $R(p_1, p_2, \dots, p_t)$  debería ser escrito como

$$R(p_1, p_2, \dots, p_t; 2).$$

En términos de coloración de grafos para  $r > 2$  se consideran hipergrafos, que son grafos en los cuales una arista conecta más de dos vértices.

### 3.3.1 El principio del palomar a partir del número de Ramsey.

**Teorema 3.3.4.** *Si  $m, n$  son enteros positivos, entonces*

$$R(m, n; 1) = m + n - 1.$$

*Demostración [8]:* Si se supone que  $m \geq n$  se tiene que

$$m > n - 1 \text{ y } (m + n - 1) > (n - 1)2.$$

Luego por el **Teorema 3.1.5**, versión informal existe al menos una caja (color) con al menos  $n$  objetos. De modo que si se tiene un conjunto con  $m + n - 1$

elementos y se colorean con dos colores, rojo y azul, entonces al menos  $m$  llevan el color rojo o bien al menos  $n$  el azul.  $\square$

**Teorema 3.3.5.** Si  $t$  es un entero positivo, entonces

$$R(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_t; 1) = t + 1.$$

*Demostración* [8]: Sea  $t$  un entero positivo, como  $t+1 > (1)t$  por el principio del palomar del **Teorema 3.1.8**  $t+1$  es el mínimo entero que permite asegurar que si se distribuye ese número de objetos en  $t$  cajas al menos una de ellas contiene dos o más objetos. De modo que si se tiene un conjunto con  $t+1$  elementos y se colorean con  $t$  colores, entonces al menos dos elementos llevan el mismo color.  $\square$

### 3.4 Demostración del Teorema de Ramsey

De la definición del número de Ramsey  $R(p, q; r)$  se sigue que:

1.  $R(p, q; r) = R(q, p; r)$ .
2.  $r \leq p$  y  $r \leq q$ .
3.  $R(p, q; r) \geq \max\{p, q\}$ .

Lo anterior permite observar que para cualquier  $r$  y  $q \geq r$  es cierto que  $R(r, q; r) = q$ .

**Teorema 3.4.1. (Ramsey: versión general finita).** *Dados los enteros  $p_1, p_2, \dots, p_t, r$  existe un entero positivo mínimo  $R(p_1, p_2, \dots, p_t; r)$  tal que si un conjunto  $S$  tiene al menos ese número de elementos y se colorean todos sus subconjuntos de  $r$  elementos con  $t$  colores, entonces existe un  $p_i$ -subconjunto de  $S$  tal que todos sus subconjuntos de  $r$  elementos tienen color  $i$ .*

*Demostración* [6]: (Sólo se presenta la prueba para  $t = 2$ ). Se procede por inducción sobre  $r$ . Por el teorema 3.3.4 se tiene para  $r = 1$  que

$$R(p, q; 1) = p + q - 1.$$

Así, se supone que el teorema es cierto para  $r - 1$  y se desea mostrar que para el entero  $R(p, q; r)$  es también cierto.

1. Para cualquier  $r$  y  $p \geq r$  es cierto que  $R(p, r; r) = p$  y de forma similar  $R(r, q; r) = q$  para  $q \geq r$ .

Por lo cual se usa inducción sobre  $p$  y  $q$ , a partir de **(1)**. Así, es posible definir

$$p_1 = R(p-1, q; r) \text{ y } q_1 = R(p, q-1; r).$$

Sea  $S$  un conjunto con  $n$  elementos, donde

$$n \geq 1 + R(p_1, q_1; r-1), \quad (3.2)$$

y los subconjuntos de  $r$  elementos de  $S$  se colorean con dos colores, rojo y azul. Sea  $a$  un elemento arbitrario de  $S$  y se considera una coloración de todos los subconjuntos con  $r-1$  elementos de  $S' = S - \{a\}$  asignándole a  $X \subseteq S'$  el color de  $X \cup \{a\}$ .  $S'$  tiene  $n-1$  elementos, entonces por hipótesis de inducción y la desigualdad **(3.2)**,  $S'$  contiene algún subconjunto  $A$  con  $p_1$  elementos, tal que todos sus subconjuntos con  $r-1$  elementos son de color rojo o  $S'$  contiene algún subconjunto  $B$  con  $q_1$  elementos, tal que todos sus subconjuntos con  $r-1$  elementos son de color azul.

Sin pérdida de generalidad, se supone que la primera situación ocurre. Como  $A$  tiene  $p_1$  elementos y

$$p_1 = R(p-1, q; r),$$

hay dos posibilidades: la primera es que  $A$  tiene un subconjunto de  $q$  elementos, con todos sus subconjuntos de  $r$  elementos de color azul, así se tiene un subconjunto de  $S$  con todos sus  $r$ -subconjuntos de color azul. La otra posibilidad es que  $A$  tiene un subconjunto  $A'$  de  $p-1$  elementos con todos sus  $r$ -subconjuntos rojos. El conjunto  $A' \cup \{a\}$  también tiene ésta propiedad, porque si solamente se consideran los elementos de  $A' \subseteq A$  ya está garantizado, pero si se consideran los subconjuntos que contienen a  $\{a\}$  estos tienen un subconjunto  $X$  con  $r-1$  elementos de  $A' \subseteq A$ , luego como  $X$  es de color rojo el subconjunto  $X \cup \{a\}$  fué pintado de color rojo. Esto demuestra el teorema y además:

$$R(p, q; r) \geq R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1. \quad (3.3)$$

Un caso especial de **(3.3)** ocurre cuando se hace la coloración de las aristas con  $r=2$  y utilizando el hecho de que  $R(p, q; 1) = p + q - 1$ , se tiene que:

$$R(p, q; 2) \geq R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2). \quad \square$$

En su trabajo original, Ramsey probó primero la versión de su teorema para conjuntos infinitos.

**Teorema 3.4.2.** *Si  $G = (V_G, A_G)$  es un grafo infinito numerable, entonces  $G$  contiene un subgrafo completo infinito o un conjunto infinito de vértices independientes.*

*Demostración* [13]: Sea  $F = \{v \in V_G : gr(v) < \infty\}$  el conjunto de los vértices con grado finito.

Se consideran dos casos:



i)  $F$  es infinito.

Sean  $u_1, u_2, \dots$  los vértices con grado finito en el grafo  $G$ . Se construye inductivamente una nueva sucesión de vértices, así: sea  $v_1 = u_1$ , como  $v_2$  el primer  $u_i$  no adyacente a  $v_1$ , y como  $v_3$  se toma el primer vértice  $u_i$  no adyacente a  $v_1$  ni a  $v_2$  y así sucesivamente. En general si ya se han elegido los vértices  $v_1, \dots, v_k$ , entonces como  $v_{k+1}$  se toma el primer  $u_i$  no adyacente a ninguno de los vértices  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Esto siempre es posible, ya que los vértices  $u_1, u_2, \dots$  son de grado finito, mientras que los  $u_i$  son infinitos y además son de grado finito. Los vértices  $v_i$  así construídos constituyen un conjunto infinito independiente.

ii)  $F$  es finito.

En este caso  $V_1 = V_G - F$  debe ser infinito. Sea  $u_1$  un elemento cualquiera de  $V_1$  y sea  $U_1$  el conjunto formado por los vértices de  $V_1$  adyacentes a  $u_1$ . Es claro que  $|U_1| = \infty$ , ya que  $gr(u_1) = \infty$  y fuera de  $V_1$  hay sólo un número finito de vértices. Ahora se define  $V_2$  como el conjunto de elementos de  $U_1$  que son adyacentes a infinitos vértices de  $U_1$ . Si  $|V_2| < \infty$ , entonces se puede aplicar al subgrafo de  $G$  generado por  $U_1 - V_2$  el razonamiento que se hizo para el caso i), de lo cual resulta un conjunto independiente infinito. Por el contrario, si  $|V_2| = \infty$  se escoje  $u_2 \in V_2$  y se repite el proceso definiendo  $U_2$  como el conjunto de vértices de  $V_2$  adyacentes a  $u_2$ , etc. Si este proceso se detiene al encontrar algún  $V_n$  finito, entonces existe un conjunto infinito independiente. Si por el contrario el proceso no se detiene, entonces la sucesión  $u_1, u_2, \dots$  genera un subgrafo infinito completo.  $\square$

**Teorema 3.4.3. (Ramsey: versión infinita).** *Dado un conjunto  $A$  infinito numerable, si se colorean los  $k$ -subconjuntos de  $A$  con  $r$  colores, entonces existe un subconjunto infinito  $B$  de  $A$  tal que los  $k$ -subconjuntos de  $B$  son todos monocromáticos.*

El teorema anterior dice que si  $K$  es un grafo completo con un conjunto infinito numerable de vértices, entonces para cualquier coloración de sus aristas con dos colores existe un subgrafo completo (con un número infinito de vértices) monocromático. Es interesante señalar que el resultado no es cierto si el conjunto de los vértices es no numerable. Así, si el grafo completo tiene como vértices los números reales y se colorean sus aristas con dos colores, entonces no existe necesariamente un subgrafo completo monocromático cuyos vértices sean un subconjunto no numerable de los reales.

**Teorema 3.4.4. (Ramsey: versión infinita para grafos).** *Si las aristas de un grafo completo con una infinidad numerable de vértices se colorean con  $r$  colores, entonces existe un subgrafo completo infinito y monocromático.*

*Demostración* [13]: Por inducción en  $r$ , se tiene: para  $r = 1$  es claro, y para  $r = 2$  es el **Teorema 3.4.2**. Ahora si se supone que el resultado es cierto para un  $r > 2$ . Dado un grafo completo infinito numerable, en el cual las aristas se colorean con los colores  $1, 2, \dots, r + 1$ , por la hipótesis inductiva

existe un subgrafo completo infinito con las aristas de un mismo color  $i$  para algún  $i = 1, \dots, r - 1$ , o un subgrafo completo infinito con las aristas coloreadas con los colores  $r$  y  $r + 1$ , el cual a su vez por el **Teorema 3.4.2** debe tener un subgrafo completo infinito monocromático.  $\square$

**Teorema 3.4.5. (Cota probabilística de Erdős para  $R(m, m)$ ).** Para todo número natural  $m \geq 3$  se tiene que

$$R(m, m) > 2^{\frac{m}{2}}.$$

*Demostración* [8]: Se presentan a continuación argumentos no constructivos y de tipo probabilístico de Erdős.

El número  $R(k, k)$ , se denota mediante  $R_k$ .

1. Se colorean aleatoriamente las aristas  $\{i, j\}$  de un grafo completo  $K_n$  con dos colores.
2. Ahora se considera el espacio de probabilidad cuyos elementos son las coloraciones de las aristas de  $K_n$  con dos colores y cuyas probabilidades vienen dadas por:

$$\begin{aligned} P(\text{colorear } \{i, j\} \text{ de rojo}) &= \frac{1}{2}, \\ P(\text{colorear } \{i, j\} \text{ de azul}) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. El color de cada arista  $\{i, j\}$  del grafo es independiente del color de las demás. Como se tiene  $\binom{n}{2}$  aristas del grafo  $K_n$ , hay entonces  $2^{\binom{n}{2}}$  posibles coloraciones.
4. La probabilidad de tener una coloración particular es:

$$2^{-\binom{n}{2}}.$$

5. Sea  $S$  un conjunto de  $k$  vértices del grafo y sea  $E_s$  el suceso: “ $S$  es monocromático”; es decir, las aristas que unen vértices de  $S$  son todas del mismo color.  $S$  tiene  $k$  vértices y sus  $\binom{k}{2}$  aristas son monocromáticas, por tanto se tiene una coloración de  $K_n$  en la que  $S$  es monocromático, entonces quedan  $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$  aristas por pintar, es decir se tiene  $2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$  coloraciones, con probabilidad

$$\frac{2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = 2^{-\binom{k}{2}}.$$

6. Así que

$$\begin{aligned} P(E_s) &= P(S \text{ monocromático rojo}) + P(S \text{ monocromático azul}) \\ &= 2^{-\binom{k}{2}} + 2^{-\binom{k}{2}} = 2^{1 - \binom{k}{2}} \end{aligned}$$

7. Ahora si  $E_k$  denota el suceso " $K_k$  es monocromático"; su probabilidad es:

$$\begin{aligned} P(E_k) &\leq \sum_{\substack{S \subset V_{K_n}, \\ |S|=k}} P(E_S) = \# \{S \subset V_{K_n} : S \text{ con } k \text{ vértices}\} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \\ &= \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \end{aligned}$$

8. Si  $n$  es tal que  $P(E_k) < 1$ , se tiene alguna coloración en la que no hay algún  $K_k$  monocromático. Y en esas condiciones, necesariamente el número de Ramsey  $R_k$  debe ser mayor que  $n$ . Es decir se tiene que:

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

de lo cual

$$\binom{n}{k} < 2^{\binom{k}{2}-1}.$$

i) Como  $R_k > n$  se tiene que,

$$\binom{R_k}{k} \geq 2^{\binom{k}{2}-1}.$$

ii) Utilizando la estimación  $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \leq \frac{m^n}{n!} \leq \frac{m^n}{n^{\frac{n}{2}}}$ , se puede reescribir la cota para  $R_k$  (si  $k \geq 4$ )

$$\begin{aligned} 2^{\binom{k}{2}-1} &\leq \binom{R_k}{k} \leq \frac{(R_k)^k}{k^{\frac{k}{2}}}, \\ 2^{\binom{k}{2}-1} \cdot k^{\frac{k}{2}} &\leq (R_k)^k, \\ (R_k)^k &\geq k^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}-1} \geq 2^{\frac{k^2}{2}}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$(R_k) \geq 2^{\frac{k}{2}}. \quad \square$$

Decidir si el siguiente límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (R_k)^{\frac{1}{k}}$$

existe es uno de los grandes problemas que permanecen sin resolver en este campo.

De la anterior desigualdad se tiene que:

i)

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (R_k)^{\frac{1}{k}} \geq \sqrt{2}$$

ii) Ahora se utiliza una cota superior en el caso particular de  $m = n = k$  (ver **Teorema 4.3.2**)

$$R(k, k) \leq \binom{k+k-2}{k-1} = \binom{2(k-1)}{k-1}.$$

Además

$$\binom{2(k-1)}{k-1} \leq 2^{2(k-1)},$$

por la igualdad  $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{n} = 2^{2n}$ .

Así

$$R(k, k) \leq 4^{(k-1)},$$

de donde

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (R_k)^{\frac{1}{k}} \leq 4.$$

iii) Resumiendo se tiene que:

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (R_k)^{\frac{1}{k}} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (R_k)^{\frac{1}{k}} \leq 4.$$

## 3.5 Aplicaciones del Teorema de Ramsey

### 3.5.1 Aplicación a Sucesiones

**Proposición 3.5.1.** *Dada una lista ordenada de 5 números reales distintos, al menos 3 de ellos en el mismo orden forman una sucesión monótona creciente o decreciente.*

*Demostración [8]:* Sea  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  un conjunto de 5 números reales en un cierto orden. Supóngase que  $x_1 \leq x_2$  (un argumento similar vale para el caso contrario). Si  $x_2 \leq x_3$ , se ha terminado. Si no es así, es porque o bien  $x_1 \leq x_3 \leq x_2$  o bien  $x_3 \leq x_1$ . En el primer caso, con el cuarto punto se tiene ya una sucesión monótona. En el segundo caso, si  $x_4$  está por debajo de  $x_3$  o por encima de  $x_2$ , entonces se tiene ya la sucesión. Sólo queda la posibilidad de que  $x_3 \leq x_4 \leq x_2$ , pero el quinto punto determina la sucesión monótona de tres puntos.

Es claro que si se tienen mas de 5 términos en una sucesión la proposición es verdadera.  $\square$

**Teorema 3.5.2.** *Para cada entero  $k > 3$ , existe un mínimo entero  $M(k)$  con la siguiente propiedad: para cualquier sucesión con al menos  $M(k)$  números reales hay  $k$  de ellos que forman una subsucesión monótona.*

*Demostración:* Se tiene que una sucesión es creciente si todas sus subsucesiones de tres elementos son crecientes (similarmente para decreciente). Con tres números reales se pueden encontrar los siguientes casos:

- a) Forman una sucesión creciente:  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ .
- b) Forman una sucesión decreciente  $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ .
- c)  $x_1 \leq x_2$  y  $x_2 \geq x_3$ .
- d)  $x_1 \geq x_2$  y  $x_2 \leq x_3$ .

Luego, las subsucesiones de tres elementos de una sucesión se puede colorear con los colores  $a, b, c$  y  $d$ . Así, dada una sucesión de  $R(k, k, k, k; 3)$  números reales, por la definición del número  $R(k, k, k, k; 3)$  se debe tener una sucesión monocromática de  $k$  números en alguno de los cuatro colores.

Si  $k \geq 5$  se descartan los colores  $c$  y  $d$  como se vió en la proposición anterior, y si los colores son  $a$  o  $b$  se encuentra por lo tanto una subsucesión monótona de longitud  $k$ .  $\square$

**Corolario 3.5.3.** *Dados los números enteros  $m, n > 3$ , existe un mínimo entero  $L(m, n)$  con la siguiente propiedad: para cualquier sucesión con al menos  $L(m, n)$  números reales hay  $m$  de ellos que forman una subsucesión monótona o  $n$  de ellos que forman una subsucesión monótona.*

*Demostración:* Por el teorema anterior existen los enteros  $M(m)$  y un  $M(n)$  tales que  $M(m) \leq R(m, m, m, m; 3) = R_1$  y  $M(n) \leq R(n, n, n, n; 3) = R_2$ .

Si se supone  $m \geq n$ , se tiene que existe una subsucesión de longitud  $m$  creciente o decreciente para una sucesión con  $R_1$  términos. Así,

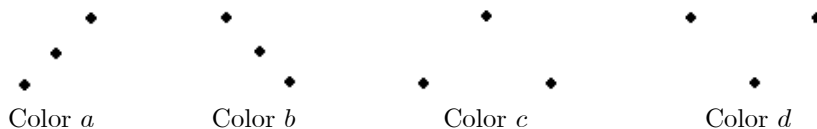
$$L(m, n) = M(m).$$

Ahora si la sucesión con  $R_1$  términos tiene dos subsucesiones: una creciente de longitud  $m$  y otra decreciente de longitud  $m$ , se puede encontrar una subsucesión creciente de longitud  $m$  y una decreciente de longitud  $n$  o una subsucesión creciente de longitud  $n$  y una decreciente de longitud  $m$ . Así,  $L(m, n) = M(m)$ .  $\square$

### 3.5.2 Versión infinita del Teorema de Erdős-Szekeres

**Teorema 3.5.4. (Bolzano).** *Cualquier sucesión infinita  $S = \{a_1, a_2, \dots\}$  de números reales contiene una subsucesión monótona infinita.*

*Demostración [8]:* Sea  $A$  una sucesión infinita de números reales. Los 3-subconjuntos de la sucesión se colorean con 4 colores dependiendo de la disposición de los tres números, como en el **Teorema 3.5.2** y de acuerdo con el siguiente esquema:



El teorema de Ramsey en versión infinita **Teorema 3.4.8** garantiza que existe un  $B$  subconjunto de  $A$  infinito monocromático. Por la **Proposición 3.5.1** se tiene que  $B$  sólo puede ser pintado con los colores  $a$  o  $b$ , es decir corresponden a una sucesión creciente o decreciente.  $\square$

**Corolario 3.5.5.** *Si  $S$  es un conjunto infinito en  $\mathbb{R}^2$ , entonces existe un  $A \subseteq S$  infinito tal que, o bien  $A$  está contenido en una recta o bien cada tres puntos de  $A$  son no colineales.*

### 3.5.3 Aplicación a Teoría de Grupos

Aquí es importante recordar que, por definición, un semigrupo finito es un conjunto finito en el cual se define una operación binaria asociativa, que será llamada producto. Además, un elemento  $e$  del semigrupo es idempotente si cumple  $e * e = e$ .

**Teorema 3.5.6.** *Todo semigrupo finito debe tener un elemento idempotente.*

*Demostración [8]:* Sean  $a$  un elemento cualquiera del semigrupo y  $a^t$  el producto ( $t$  veces) del elemento  $a$ . Si  $n$ , es el número de elementos del conjunto (orden del semigrupo) y

$$N = R(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_n; 2),$$

entonces se considera el grafo completo  $K_N$  con sus vértices numerados y la coloración de sus aristas con  $n$  colores (cada color es un elemento del semigrupo) de la siguiente forma.

La arista que une los vértices  $i$  y  $j$ , donde  $i < j$  se colorea con  $a^{j-i}$ . El hecho que se trabaje en un semigrupo garantiza que cualquier potencia de un elemento pertenece al semigrupo.

El teorema de Ramsey garantiza que debe haber un triángulo monocromático, esto es, debe existir  $i, j, k$ ; donde  $i < j < k$  y tales que

$$a^{j-i} = a^{k-i} = a^{k-j}.$$

Si se denota  $e = a^{j-i}$ , teniendo en cuenta que:  $a^{k-j} * a^{j-i} = a^{k-i}$ , se observa que  $e * e = e$ . Así, éste es el elemento idempotente que se buscaba.  $\square$

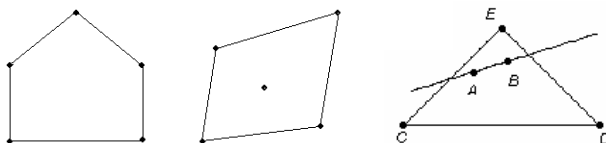
### 3.5.4 Aplicación Geométrica

Se dice que un conjunto de puntos del plano está en **posición genérica** si no hay tres de ellos alineados.

**Proposición 3.5.7.(Erdős - Szekeres).** *Para cada entero  $m \geq 3$  existe un mínimo entero  $N_m$  con la siguiente propiedad: para cualquier conjunto de*

$n$  puntos del plano en posición genérica con  $n \geq N_m$  hay  $m$  de ellos que son los vértices de un polígono convexo.

*Demostración* [13]: Es claro que  $N_3 = 3$ , ya que todos los triángulos son convexos.  $N_4$  debe ser mayor que cuatro, ya que cuatro puntos dispuestos de modo que uno de ellos sea interior al triángulo determinado por los otros tres no son los vértices de un cuadrilátero convexo. Se prueba que  $N_4 = 5$ . En efecto, la envolvente convexa de un conjunto de 5 puntos en posición genérica es un pentágono, un cuadrilátero o un triángulo. En los dos primeros casos, tomando cuatro vértices de la envolvente convexa ya se tendría el cuadrilátero convexo. En el tercer caso dos de los puntos ( $A$  y  $B$ ) son interiores al triángulo determinado por los otros tres ( $C$ ,  $D$  y  $E$ ). La recta  $AB$  deja en un mismo semiplano a dos de los vértices del triángulo ( $C$  y  $D$ ) y en el semiplano opuesto al vértice restante. Es fácil ver entonces que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son los vértices de un cuadrilátero convexo.



Ahora, se prueba que si  $n$  puntos están en posición genérica y cada cuatro cualesquiera de ellos son los vértices de un cuadrilátero convexo, entonces los  $n$  puntos son los vértices de un  $n$ -ágono convexo. Para esto, sean  $P_1, \dots, P_m$  los vértices de la envolvente convexa, numerados en el orden en que aparecen al recorrer su perímetro en uno de los posibles sentidos. Si  $m < n$ , entonces alguno de los puntos dados es interior a la envolvente convexa y por lo tanto a alguno de los triángulos  $P_1P_2P_3, P_1P_3P_4, \dots, P_1P_{m-1}P_m$ . Pero entonces se tienen cuatro puntos tales que uno de ellos es interior al triángulo determinado por los otros tres, y no son vértices de un cuadrilátero convexo contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto  $n = m$ , como se quería probar. En otras palabras, un polígono es convexo si todos sus cuadriláteros lo son.

Sean ahora  $m \geq 4$  y  $n \geq R(m, 5; 4)$ . Dado un conjunto  $X$  de  $n$  puntos del plano en posición genérica, se colorean los subconjuntos de 4 elementos de  $X$  de la siguiente manera: si forman un cuadrilátero convexo; se colorean con el color  $A$ , y si no forman un cuadrilátero convexo; se colorean con el color  $B$ . En virtud de la definición de  $R(m, 5; 4)$  existen dos posibilidades:

- a) Hay un subconjunto de  $X$  de  $m$  puntos tal que todos sus subconjuntos de 4 puntos son de color  $A$ . En éste caso los  $m$  puntos son vértices de un  $m$ -ágono convexo, como se probó anteriormente.
- b) Hay un subconjunto de  $X$  de 5 puntos tal que todos sus subconjuntos de 4 puntos son de color  $B$ . Pero esto es imposible, pues ya se probó que un pentágono contiene al menos un cuadrilátero convexo ( $N_4 = 5$ ).

En consecuencia  $R(m, 5; 4)$  satisface la propiedad deseada. Por tanto hay un mínimo entero  $N_m \leq R(m, 5; 4)$  con esta propiedad.  $\square$

Los únicos **números de Erdős - Szekeres**  $N_m$  conocidos son  $N_3 = 3$ ,  $N_4 = 5$  y  $N_5 = 9$ . Se ha conjeturado que  $N_m = 2^{m-2} + 1$ .

### 3.5.5 Aplicación a Teoría de Números

**Lema 3.5.8. (Schur).** *Dado un entero positivo  $m$ , existe un entero  $S(m)$  tal que, si  $N \geq S(m)$  y se colorea el conjunto  $M = \{1, 2, \dots, N\}$  con  $m$  colores, existen tres números  $x, y, z \in M$  con el mismo color tales que  $x + y = z$ .*

*Demostración [8]: Sean*

$$S(m) = R(\underbrace{3, 3, 3, \dots, 3}_m; 2) - 1,$$

y  $M$  un conjunto con cardinal  $N \geq S(m)$ . Colorear con  $m$  colores los elementos de  $M$  y considerar el grafo completo  $K_{N+1}$  con vértices en  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ . Es claro que para cualquier arista  $\{i, j\}$  de  $K_{N+1}$ , el valor  $|i - j| \in M$ . Así, la coloración de  $M$  permite colorear las aristas de  $K_{N+1}$  de la siguiente forma:

$$\text{color de } \{i, j\} = \text{color de } |i - j|, \text{ en la coloración de } M,$$

como

$$N \geq S(m) = R(3, 3, \dots, 3; 2) - 1,$$

se tiene que

$$N + 1 \geq R(3, 3, \dots, 3; 2).$$

Y así, para el grafo  $K_{N+1}$ , existirá un triángulo monocromático, es decir se tendrá vértices  $i > j > k$  tales que,

$$\text{color de } \{i, j\} = \text{color de } \{j, k\} = \text{color de } \{i, k\}.$$

Luego,

$$\text{color de } \underbrace{|i - j|}_x = \text{color de } \underbrace{|j - k|}_y = \text{color de } \underbrace{|i - k|}_z.$$

Por lo tanto, se prueba que  $x + y = z$ , reemplazando cada valor y teniendo en cuenta que  $i > j > k$

$$(i - j) + (j - k) = i - j + j - k = i - k = z. \quad \square$$

Los enteros  $S(m)$  son llamados los **números de Schur**. Se puede deducir que  $S(1) = 2$  ( $1 + 1 = 2$ ),  $S(2) = 5$ ,  $S(3) = 14$  y  $S(4) = 45$ . Además se conoce que  $160 \leq S(5) \leq 315$ .



**Ejemplo:** Para  $m = 2$  en el lema de Schur se tiene que  $S(2) = 5$ , las posibles coloraciones del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  con dos colores, se presentan a continuación, donde se señala una posibilidad para los números  $x, y$  del lema anterior:

$$\begin{array}{lll}
\{1\}, \{\underline{2}, \underline{3}, 4, 5\} & \{\underline{1}, 2\}, \{3, 4, 5\} & \{\underline{2}, 4\}, \{1, 3, 5\} \\
\{2\}, \{\underline{1}, \underline{3}, 4, 5\} & \{1, 3\}, \{\underline{2}, 4, 5\} & \{2, 5\}, \{\underline{1}, \underline{3}, 4\} \\
\{3\}, \{\underline{1}, 2, \underline{4}, 5\} & \{1, 4\}, \{\underline{2}, \underline{3}, 5\} & \{3, 4\}, \{\underline{1}, 2, 5\} \\
\{4\}, \{\underline{1}, \underline{2}, 3, 5\} & \{1, 5\}, \{\underline{2}, 3, 4\} & \{3, 5\}, \{1, \underline{2}, 4\} \\
\{5\}, \{\underline{1}, \underline{2}, 3, 4\} & \{2, 3\}, \{\underline{1}, \underline{4}, 5\} & \{4, 5\}, \{\underline{1}, \underline{2}, 3\}
\end{array}$$

**Teorema 3.5.9. (Schur).** *Dado un entero  $m$ , existe un entero  $N(m)$  tal que, si  $p$  es un primo suficientemente grande,  $p \geq N(m)$ , entonces la ecuación  $a^m + b^m = c^m$  tiene solución no trivial en  $\mathbb{Z}_p$ .*

*Demostración [8]:* Sea

$$p \geq N(m) = R(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_m; 2),$$

un primo.

Considerar el grupo multiplicativo  $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$  y todos sus subconjuntos de la forma:

$$H_j = \{ja^m : a = 1, 2, \dots, p-1\} \subseteq \mathbb{Z}_p^* \quad \text{donde } 1 \leq j \leq p-1.$$

Los subconjuntos  $H_j$  son disjuntos o iguales. En efecto, si dos de ellos, por ejemplo  $H_j$  y  $H_k$ , con  $j \neq k$  tuvieran un elemento en común, entonces

$$jc^m = kd^m$$

para ciertos  $c, d$  en  $\mathbb{Z}_p^*$ . Es decir, que

$$j = kd^m c^{-m}.$$

Así

$$\begin{aligned}
H_j &= \{ja^m : a = 1, 2, \dots, p-1\} = \{kd^m c^{-m} a^m : a = 1, 2, \dots, p-1\} \\
&= \{k(dc^{-1}a)^m : a = 1, 2, \dots, p-1\} = H_k.
\end{aligned}$$

Además es claro que

$$\bigcup_{j=1}^{p-1} H_j = \mathbb{Z}_p^*.$$

Ahora, se estima cuántos elementos tiene  $H_j$ . En principio tiene  $p-1$  elementos, pero algunos pueden repetirse.

Si dos elementos de  $H_j$  son iguales es porque para ciertos elementos

$$a, b \in \{1, 2, \dots, p-1\} \implies ja^m = jb^m,$$

entonces

$$a^m = b^m.$$

Es decir, se quiere contar cuántas potencias  $m$ -ésimas iguales pueden aparecer para un  $b$  fijo, o lo que es lo mismo cuantos elementos  $a$  hay tales que

$$(ab^{-1})^m = 1.$$

Pero la ecuación

$$x^m - 1 = 0,$$

tiene a lo más  $m$  raíces en  $\mathbb{Z}_p^*$ , entonces hay a lo sumo  $m$  potencias repetidas para cada elemento de  $H_j$ . Sea  $m_i$  el número de potencias repetidas del  $i$ -ésimo elemento de  $H_j$ , con  $1 \leq i \leq |H_j|$ . Así se tiene que:

$$p - 1 = m_1 + m_2 + \dots + m_{|H_j|} \leq m |H_j|,$$

luego

$$|H_j| \geq \frac{p-1}{m}.$$

Por lo tanto:

$$\left| \bigcup_{j=1}^{p-1} H_j \right| = |\mathbb{Z}_p^*| = p - 1 \leq m |H_j|.$$

Se puede afirmar que hay a lo sumo  $m$  de los  $H_j$  que son disjuntos y cuya unión sea todo  $\mathbb{Z}_p^*$ . para mostrar esta afirmación, se supone que hay  $k$  de los  $H_j$  disjuntos, esto es

$$|H_1| + |H_2| + \dots + |H_k| = \left| \bigcup_{i=1}^k H_i \right| = p - 1$$

Como  $|H_j| \geq \frac{p-1}{m}$ , entonces

$$|H_1| + |H_2| + \dots + |H_k| \geq k \cdot \left( \frac{p-1}{m} \right),$$

de ahí que  $p - 1 \geq k \cdot \left( \frac{p-1}{m} \right)$ . Por lo tanto  $k \leq m$ .

Ahora, se utilizan los subconjuntos  $H_j$  (distintos), como colores, con los cuales se colorea el conjunto  $\{1, 2, \dots, p - 1\}$  dependiendo del  $H_j$  al que pertenezcan. El primo  $p$  es lo suficientemente grande para que el lema anterior garantice que existen  $x, y, z \in H_j$  para cierto  $j$  tales que  $x + y = z$ . Esto es,  $ja^m + jb^m = jc^m$  y por tanto,  $a^m + b^m = c^m$  para  $a, b, c \in \mathbb{Z}_p^*$ .  $\square$

**Ejemplo:** Por el teorema anterior dado  $m = 2$ , existe el entero  $N(2) = 6$ , tal que la ecuación  $a^2 + b^2 = c^2$  tiene solución no trivial en  $\mathbb{Z}_7$ .

**Verificación:** Se consideran los conjuntos  $H_j = \{ja^2 : a \in \mathbb{Z}_7^*\}$ ,  $1 \leq i \leq 6$  :

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{1a^2 : a \in \mathbb{Z}_7^*\} = \{1, 4, 2, 2, 4, 1\} = \{1, 2, 4\} \\
H_2 &= \{2a^2 : a \in \mathbb{Z}_7^*\} = \{2, 1, 4, 4, 1, 2\} = \{1, 2, 4\} \\
H_3 &= \{3a^2 : a \in \mathbb{Z}_7^*\} = \{3, 5, 6, 6, 5, 3\} = \{3, 5, 6\} \\
H_4 &= \{4a^2 : a \in \mathbb{Z}_7^*\} = \{4, 2, 1, 1, 2, 4\} = \{1, 2, 4\} \\
H_5 &= \{5a^2 : a \in \mathbb{Z}_7^*\} = \{5, 6, 3, 3, 6, 5\} = \{3, 5, 6\} \\
H_6 &= \{6a^2 : a \in \mathbb{Z}_7^*\} = \{6, 3, 5, 5, 3, 6\} = \{3, 5, 6\}
\end{aligned}$$

De los anteriores conjuntos los  $H_j$  distintos son

$$H_1 = \{1, 2, 4\} \quad \text{y} \quad H_3 = \{3, 5, 6\},$$

en  $H_1$  se tiene que  $x = 4, y = 4$  y  $z = 1$  es solución a la ecuación  $a^2 + b^2 = c^2$ , lo que se quería verificar.

Otra excelente aplicación del Teorema de Ramsey consiste en el siguiente resultado, cuya demostración no está al alcance de este trabajo (ver [6]).

**Teorema 3.5.10.(Van der Waerden).** *Para todo par de enteros  $l$  y  $r$ , existe un menor entero  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  y se colorea el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  con  $r$  colores, entonces el conjunto tiene una progresión aritmética monocromática de longitud  $l$ :*

$$a, a + d, \dots, a + (l - 1)d, \text{ donde } d \in \mathbb{N}$$

**Observación:** Si en el teorema se considera  $l = 3$  y  $r = 2$  con  $n = 8$ , es posible tener una coloración del conjunto  $\{1, 2, \dots, 8\}$  tal que no se encuentra una progresión aritmética monocromática de longitud 3, por ejemplo la coloración:  $\{2, 3, 6, 7\}$ ,  $\{1, 4, 5, 8\}$ , de ahí que  $n_0 \geq 9$  para  $l = 3$  y  $r = 2$ .

Los números  $n_0$  se denotan  $W(r, l)$  y se llaman **números de Van der Waerden**. A continuación se presenta una tabla con algunos números representativos:

$\begin{matrix} r \\ l \end{matrix}$	2	3	4
3	9	27	76
4	35		
5	178		

## 4 NÚMEROS DE RAMSEY

Dos conceptos básicos de la teoría de grafos: el número de clique y el número de independencia, se utilizan para hallar algunos números de Ramsey y cotas para algunos de ellos, objetivo central de este capítulo. Para este fin se describen conceptos y propiedades de  $(m, n)$ -grafos y números  $e(m, n)$ .

### 4.1 Interpretación del número $R(3, 3)$

Al considerar la siguiente pregunta: ¿Cuál es el número de personas que se requiere en una reunión de tal forma que se pueda asegurar que se tiene entre ellas un grupo de tres personas en el cual todas se conocen mutuamente, o un grupo de tres personas en el cual ninguna se conoce mutuamente?, se puede observar que una herramienta matemática útil para este tipo de problemas (además de muchas otras) es la rama de la combinatoria conocida como teoría de grafos. Al usar la teoría de grafos para responder a esta pregunta se puede pensar en un grafo completo con  $n$  vértices que representan a las  $n$  personas, y la arista entre cualquier par de vértices representa la relación (conocerse) entre estas dos personas.

Con este fin se puede colorear de azul cada arista del grafo si las dos personas unidas por esta arista se conocen la una a la otra, y rojo si no se conocen mutuamente. Así, la pregunta anterior se replantea de la siguiente manera: para cualquier coloración rojo-azul de un grafo completo ¿cuántos vértices debe tener este grafo de tal forma que en él se pueda asegurar la existencia de un triángulo rojo o un triángulo azul? Claramente, si se tienen tres vértices es posible tener un triángulo monocromático, sin embargo es posible encontrar personas  $A$  y  $B$  conociéndose mutuamente, y ambas no conociendo a  $C$ . Es decir, existe una coloración del grafo completo  $K_3$  que no garantiza la existencia de un triángulo monocromático. Por lo tanto la respuesta a la pregunta no es 3. Así,  $R(3, 3) > 3$ .

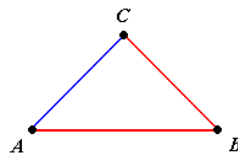
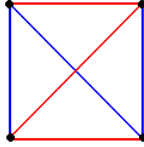


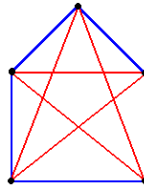
Figura 4.1. Una coloración de  $K_3$  sin triángulos monocromáticos.

Ahora se desea examinar el grafo completo con cuatro vértices. ¿Será posible colorear las aristas de éste grafo de tal forma que no haya un triángulo rojo ni uno azul? En efecto, la siguiente figura muestra una posible solución. Luego,  $R(3, 3) > 4$ .



**Figura 4.2.** Una coloración de  $K_4$  sin triángulos monocromáticos.

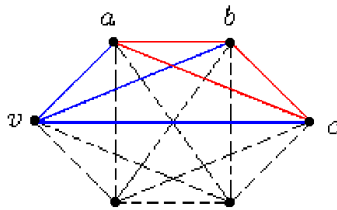
Un grafo con cinco vértices requiere más consideraciones, pero es posible dar una coloración de este grafo, tal que no contenga triángulos. Por lo tanto  $R(3, 3) > 5$ .



**Figura 4.3.** Una coloración de  $K_5$  sin triángulos monocromáticos.

Al tratar de encontrar de manera semejante una coloración para el grafo completo de 6 vértices se tienen muchas dificultades. Usando ensayo y error parece imposible encontrar una coloración libre de triángulos. La verificación del ejemplo del **Teorema 3.3.2** muestra que no existe tal coloración. Y tal prueba se presenta de nuevo aquí.

En un grafo completo con 6 vértices, se escoge uno de los vértices y se le llama  $v$ , cada vértice tiene 5 aristas adyacentes a él. No importa cómo sean coloreadas las aristas adyacentes a  $v$ , se puede asegurar que al menos tres de ellas tienen el mismo color. Asumiendo que estas tres aristas son azules, y etiquetando los tres vértices extremos de ellas como  $a$ ,  $b$  y  $c$ , se examinan las aristas  $\{a, b\}$ ,  $\{b, c\}$  y  $\{c, a\}$ . Si cualquiera de las tres aristas es azul (por ejemplo  $\{a, b\}$ ), entonces esa arista forma un triángulo azul con las dos aristas adyacentes a  $v$  ( $\{v, a\}$   $\{v, b\}$ ). Pero si ninguna de las aristas  $\{a, b\}$ ,  $\{b, c\}$  y  $\{c, a\}$  son azules, entonces todas tres deben ser rojas y se tendrá un triángulo rojo. Por supuesto el mismo argumento puede ser aplicado si las tres aristas tomadas inicialmente son rojas.



**Figura 4.4.**  $K_6$  contiene al menos un triángulo monocromático.

Lo anterior se puede interpretar así: es imposible tener una coloración con dos colores (azul, rojo) del grafo completo con 6 vértices donde no incluya en alguna parte un triángulo rojo o un triángulo azul, o en el contexto de la reunión de personas mencionado anteriormente, es posible encontrar un trío donde todos ellos se conozcan entre sí o todos sean extraños. Problemas como éste son la base de la rama de las matemáticas conocida como Teoría de Ramsey.

Uno de los principales teoremas de la Teoría de Ramsey puede enunciarse informalmente como “El desorden absoluto es imposible”, o en otras palabras: si se tiene casualmente una estructura desorganizada es posible asegurar que alguna parte de ella está ordenada. Una de las formas usuales de mirar la teoría de Ramsey es en el contexto de la teoría de grafos. Se examinan las coloraciones de los grafos y se trata de determinar qué condiciones se aplican. La pregunta es: ¿qué tan grandes pueden ser los grafos para que contengan o no ciertas subestructuras?

De acuerdo a lo inmediatamente anterior, la pregunta ¿cuál es el mínimo número de vértices que se requiere en un grafo completo 2-coloreado para garantizar la existencia de un triángulo rojo o azul?, se interpreta en la terminología de la Teoría de Ramsey así: ¿cuál es el valor de  $R(3, 3)$ ?, de lo visto anteriormente la respuesta es  $R(3, 3) = 6$ . ¿Cuál es el valor de  $R(3, 4)$ ?, es decir, qué tan grande debe ser un grafo completo para garantizar la existencia de un triángulo rojo o un grafo completo de 4 vértices azul? En general, lo que se pretende conocer es *el número más pequeño de vértices,  $R(x, y)$ , de un grafo  $K_{R(x, y)}$  tal que para cualquier coloración con dos colores (rojo, azul), el grafo contenga un  $K_x$  rojo o un  $K_y$  azul.*

Un procedimiento general para encontrar solución a estos problemas es un programa de computador que examina todas las posibles combinaciones. Pero el número de cómputos incluidos crece tanto que calcular  $R(5, 5)$  por este método tomaría probablemente varios cientos de años de tiempo computacional. Ante tal dificultad, en este capítulo se recurre a definiciones, propiedades y teoremas dentro de la teoría de grafos y se examinan técnicas que se utilizan para encontrar algunos números de Ramsey y cotas para estos.

## 4.2 $(m, n)$ – grafos

**Lema 4.2.1.** *Sea  $G = (V, A)$  un grafo. Si  $X \subseteq V$ , entonces para el subgrafo  $\langle X \rangle_G$  de  $G$  se tiene:*

$$\alpha(\langle X \rangle_G) \leq \alpha(G) \quad \text{y} \quad \omega(\langle X \rangle_G) \leq \omega(G).$$

*Demostración:* Por contradicción, supongase que  $\alpha(\langle X \rangle_G) > \alpha(G)$ . Sea  $B$  un conjunto independiente en  $G$  tal que  $|B| = \alpha(G)$  y sea  $U$  es un conjunto independiente en  $\langle X \rangle_G$  tal que  $|U| = \alpha(\langle X \rangle_G)$ . Como  $U$  es un conjunto de vértices de un subgrafo inducido de  $G$  se tiene que  $U$  es también un conjunto

independiente en  $G$ . Así, por la suposición inicial  $|U| > |B|$  lo cual no es posible, por definición de  $\alpha(G)$ .

Luego,  $\alpha(\langle X \rangle_G) \leq \alpha(G)$ .

Ahora, si se supone que  $\omega(\langle X \rangle_G) > \omega(G)$ , la contradicción es clara ya que  $\langle X \rangle_G \subseteq G$ .

Así,  $\omega(\langle X \rangle_G) \leq \omega(G)$ .  $\square$

**Lema 4.2.2.** *Si  $G$  es un grafo, entonces*

$$\alpha(G) = \omega(\overline{G}) \quad \text{y} \quad \omega(G) = \alpha(\overline{G}).$$

*Demostración:* Sea  $G$  un grafo en el cual

$$\alpha(G) = n \quad \text{y} \quad \omega(\overline{G}) = m.$$

Si  $\omega(\overline{G}) = m$ , entonces existe un  $K_m \subseteq \overline{G}$ . Ya que,  $\overline{K_m}$  es un subgrafo inducido en  $G$  por el **Lema 4.2.1**, se tiene:

$$\alpha(\overline{K_m}) \leq \alpha(G).$$

Luego

$$m \leq n. \tag{4.1}$$

Si  $\alpha(G) = n$ , entonces existe un conjunto  $U$  independiente con  $|U| = n$ , tal que

$$\langle U \rangle_G = (U, \emptyset) \quad \text{y} \quad \langle U \rangle_{\overline{G}} = K_{|U|}.$$

Luego, por el **Lema 4.2.1**  $\omega(\langle U \rangle_{\overline{G}}) \leq \omega(\overline{G}) = m$ . Así

$$n \leq m. \tag{4.2}$$

De (4.1) y (4.2) se tiene que  $m = n$  y a su vez  $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ .

De manera similar se prueba que  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ .  $\square$

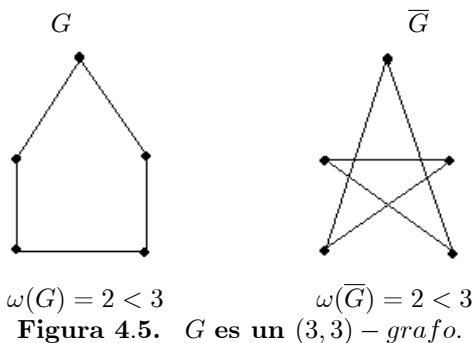
**Definición 4.2.3.** Sean  $m$  y  $n$  números naturales mayores o iguales que 2. Un grafo  $G$  se llama un  $(m, n)$  – grafo si

$$\omega(G) < m \quad \text{y} \quad \alpha(G) < n,$$

o equivalentemente, un grafo  $G$  es un  $(m, n)$  – grafo si

$$\omega(G) < m \quad \text{y} \quad \omega(\overline{G}) < n,$$

esto es, si  $G$  no contiene un grafo completo  $K_m$  y  $\overline{G}$  no contiene un grafo completo  $K_n$ .

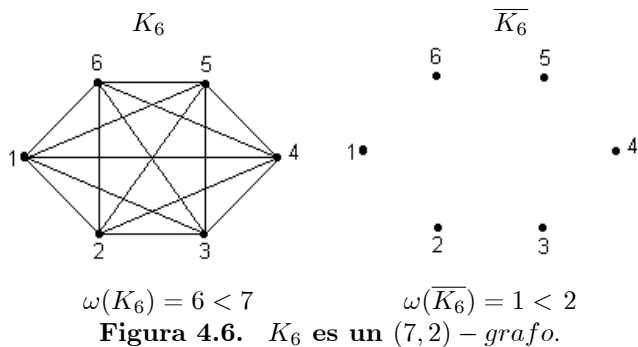


**Lema 4.2.4.** *Un grafo completo  $K_m$  es un  $(m + 1, 2)$  - grafo.*  
*Demostración:* Para un grafo completo  $K_m$  se tiene:

$$\omega(K_m) = m < m + 1 \quad \text{y} \quad \omega(\overline{K_m}) = 1 < 2.$$

Así, por la definición anterior el grafo completo  $K_m$  es un  $(m + 1, 2)$  - grafo.  $\square$

La siguiente figura ilustra el lema anterior.



El siguiente teorema enuncia las propiedades principales de los  $(m, n)$  - grafos.

**Teorema 4.2.5.** *Si  $G$  es un  $(m, n)$  - grafo, se tiene:*

1.  $G$  es un  $(m, n)$  - grafo si y sólo si  $\overline{G}$  es un  $(n, m)$  - grafo.
2. Si  $G$  es un  $(m, n)$  - grafo, entonces  $G$  es también un  $(m_1, n_1)$  - grafo para todo  $m_1 \geq m$  y todo  $n_1 \geq n$ .
3. Si  $G = (V, A)$  es un  $(m, n)$  - grafo y  $X \subseteq V$ , entonces también  $\langle X \rangle_G$  es un  $(m, n)$  - grafo.



*Demostración:*

1. Si  $G$  es un  $(m, n)$  – *grafo*, por el **Lema 4.2.2**

$$\omega(\overline{G}) = \alpha(G) < n \quad \text{y} \quad \alpha(\overline{G}) = \omega(G) < m.$$

Por lo tanto  $\overline{G}$  es un  $(n, m)$  – *grafo*.

2. Si  $G$  es un  $(m, n)$  – *grafo*, por la **Definición 4.2.3**

$$\omega(G) < m \quad \text{y} \quad \alpha(G) < n.$$

Si  $m_1 \geq m$  y  $n_1 \geq n$ , entonces

$$\omega(G) < m_1 \quad \text{y} \quad \alpha(G) < n_1,$$

y por la **Definición 4.2.3**  $G$  es un  $(m_1, n_1)$  – *grafo*.

3. Si  $G$  es un  $(m, n)$  – *grafo*, por la **Definición 4.2.3**

$$\omega(G) < m \quad \text{y} \quad \alpha(G) < n.$$

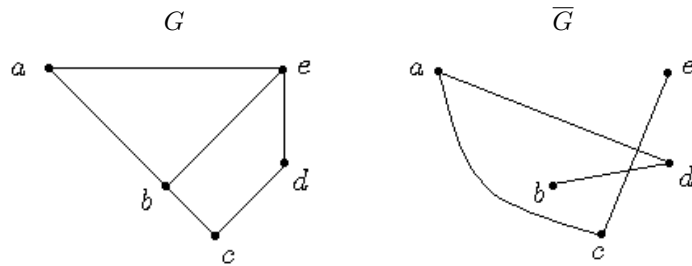
Sea  $X \subseteq G$ , entonces por el **Lema 4.2.1**

$$\omega(\langle X \rangle_G) \leq \omega(G) < m \quad \text{y} \quad \alpha(\langle X \rangle_G) \leq \alpha(G) < n.$$

Por lo tanto  $\langle X \rangle_G$  es un  $(m, n)$  – *grafo*.  $\square$

Los siguientes ejemplos ilustran el teorema anterior:

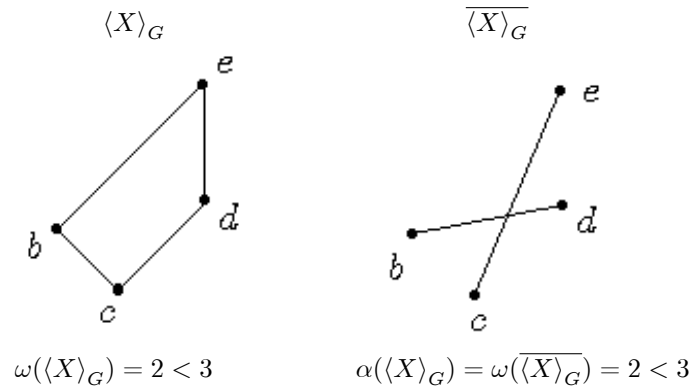
- i) El grafo  $G$  de la **Figura 4.7** es un  $(4, 3)$  – *grafo* y por lo tanto  $\overline{G}$  es un  $(3, 4)$  – *grafo*.
- ii) El grafo  $G$  de la **Figura 4.7** es un  $(4, 3)$  – *grafo*, pero también es un  $(5, 6)$  – *grafo*.



$$\omega(G) = 3 < 4 \quad \text{y} \quad \alpha(G) = 2 < 3 \quad \omega(\overline{G}) = 2 < 3 \quad \text{y} \quad \alpha(\overline{G}) = 3 < 4$$

**Figura 4.7.**

iii) La siguiente figura muestra un subgrafo inducido del grafo  $G$  de la **Figura 4.7** que es un  $(3, 3)$  - grafo y por consiguiente un  $(4, 3)$  - grafo.

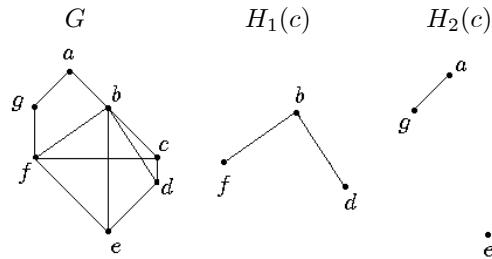


**Figura 4.8.**

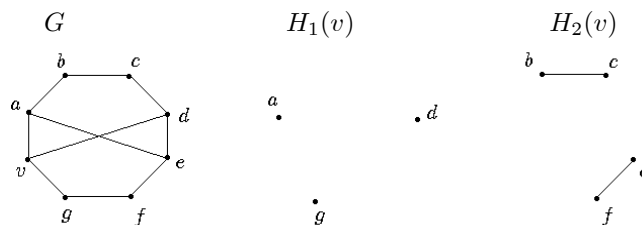
**Definición 4.2.6.** Sean  $G = (V, A)$  un grafo,  $v \in V$  un vértice de  $G$  y  $X$  el conjunto de vértices adyacentes a  $v$ , esto es  $X = N_G(v)$ . Se denota por  $H_1(v)$  al **subgrafo de  $G$  inducido por  $X$** , es decir  $H_1(v) = \langle X \rangle_G$ .

Sea  $Y$  el máximo conjunto de vértices de  $G$  independiente a  $v$  y distintos de  $v$ , esto es  $Y = N_{\overline{G}}(v)$ . Se denota por  $H_2(v)$  al **subgrafo de  $G$  inducido por  $Y$** , es decir  $H_2(v) = \langle Y \rangle_G$ .

Cuando no exista ambigüedad se escribe  $H_1$  en lugar de  $H_1(v)$  y  $H_2$  en lugar de  $H_2(v)$ . Las siguientes figuras ilustran la definición anterior.



**Figura 4.9.**



**Figura 4.10.**

**Lema 4.2.7.** Si  $G = (V, A)$  es un  $(m, n)$  – grafo, entonces para todo vértice  $v \in V$ ,  $H_1$  es un  $(m - 1, n)$  – grafo y  $H_2$  es un  $(m, n - 1)$  – grafo.

*Demostración* [10]: Sean  $v \in V$  y  $H_1$  el subgrafo inducido por los vértices que son adyacentes a  $v$  como se definió anteriormente.

Por la definición de subgrafo inducido cualquier conjunto de vértices independiente en  $H_1$  debe ser también independiente en  $G$ . Debido a que  $G$  es un  $(m, n)$  – grafo, se tiene que

$$\alpha(H_1) \leq \alpha(G) < n.$$

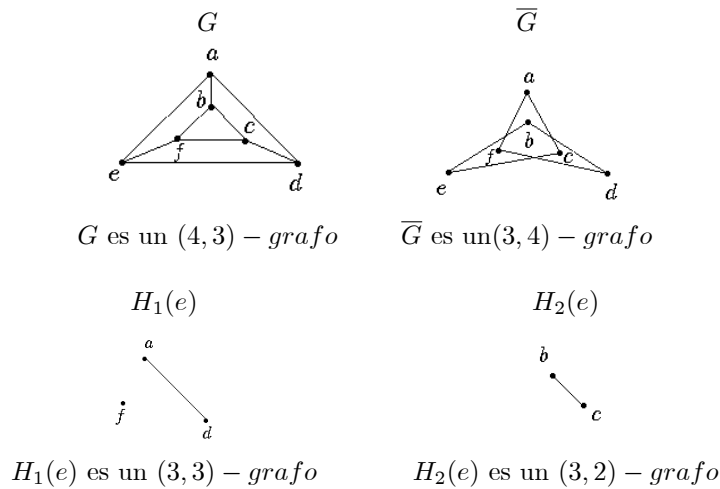
Considerando los números de clique se tiene la siguiente relación: si  $H_1$  contiene un subgrafo completo con  $k$  vértices, entonces el grafo formado por estos vértices y el vértice  $v$  elegido es un subgrafo completo con  $k + 1$  vértices, ya que  $v$  tiene una arista para cada vértice en  $H_1$ . Así:

$$k + 1 < \omega(G) < m \quad \text{y} \quad \omega(H_1) \leq \omega(G) - 1 < m - 1,$$

por lo tanto  $H_1$  es un  $(m - 1, n)$  – grafo.

Para mostrar que  $H_2$  es un  $(m, n - 1)$  – grafo, primero se observa que el número de clique de  $H_2$  no puede ser más grande que el número de clique de  $G$ , ya que  $H_2 \subset G$  y  $\omega(H_2) \leq \omega(G)$ . Además cualquier conjunto independiente en  $G$  al cual pertenece  $v$  y con  $n - 1$  vértices, llega a ser un conjunto independiente con a lo sumo  $n - 2$  vértices en  $H_2$ , ya que para obtener  $H_2$ , a  $G$  se le ha quitado el vértice  $v$  el cual no es adyacente a ningún vértice de  $H_2$ . Así,  $\alpha(H_2) < n - 1$ , por tanto  $H_2$  es un  $(m, n - 1)$  – grafo.  $\square$

La siguiente figura ilustra el lema anterior.



**Figura 4.11.**

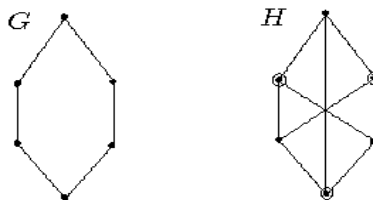
**Definición 4.2.8.** Un número natural  $p$  tiene la **propiedad**  $(m, n)$  si no existen  $(m, n)$  – *grafos* con  $p$  vértices.

**Observaciones:**

- i) Si  $p$  tiene la propiedad  $(m, n)$ , entonces  $p + 1$  tiene la propiedad  $(m, n)$ .
- ii) Si  $p$  tiene la propiedad  $(m, n)$ , entonces  $p + k$  tiene la propiedad  $(m, n)$ , donde  $k \in \mathbb{N}$
- iii) Si  $p$  no tiene la propiedad  $(m, n)$ , entonces  $p - 1$  no tiene la propiedad. Por tanto al fijar  $m$  y  $n$ , dos situaciones pueden ocurrir: que exista un número con la propiedad  $(m, n)$  o que existan  $(m, n)$  – *grafos* de orden arbitrariamente grande.

Se demostrará en el **Lema 4.2.10** y en el **Teorema 4.2.11** que la segunda situación no ocurre, exhibiendo para todo par  $m, n$  un número con la propiedad  $(m, n)$ .

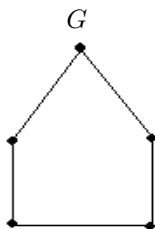
**Ejemplo:** 6 tiene la propiedad  $(3, 3)$ , es decir: no existen  $(3, 3)$  – *grafos* con 6 vértices. La siguiente figura muestra la construcción de dos grafos con 6 vértices, los cuales no son  $(3, 3)$  – *grafos*. Al intentar construir otros grafos con 6 vértices, no es posible que estos sean  $(3, 3)$  – *grafos*.



$$\omega(G) < 3 \text{ y } \alpha(G) = \omega(\overline{G}) \not< 3 \quad \omega(H) < 3 \text{ y } \alpha(H) = \omega(\overline{H}) \not< 3$$

**Figura 4.12.**

**Ejemplo:** En el siguiente  $(3, 3)$  – *grafo* es posible observar que 5 no tiene la propiedad  $(3, 3)$ .



$$\omega(G) = 2 < 3 \text{ y } \alpha(G) = 2 < 3$$

**Figura 4.13.**

**Lema 4.2.9.**  $p$  tiene la propiedad  $(m, n)$  si y sólo si  $p$  tiene la propiedad  $(n, m)$ .

*Demostración* [7]: Del **Teorema 4.2.5 (1)** se tiene que:  $G$  es un  $(m, n)$  – grafo si y sólo si  $\overline{G}$  es un  $(n, m)$  – grafo. Por tanto, si no existen  $(m, n)$  – grafos con  $p$  vértices, entonces no existen  $(n, m)$  – grafos con  $p$  vértices. Por lo tanto  $p$  tiene la propiedad  $(n, m)$ .  $\square$

**Lema 4.2.10.** Todo  $m \geq 2$  tiene la propiedad  $(m, 2)$ .

*Demostración* [7]: Sea  $G = (V_G, A_G)$  un grafo con  $m$  vértices. Si  $\omega(\overline{G}) < 2$ , entonces  $A_{\overline{G}} = \emptyset$  y por tanto  $G$  es un grafo completo  $K_m$  y  $\omega(G) = m$ . Lo cual significa que  $\omega(G) \not< m$  y  $\alpha(G) < 2$ , esto quiere decir que no existen  $(m, 2)$  – grafos con  $m$  vértices. Por tanto  $m \geq 2$  tiene la propiedad  $(m, 2)$ .  $\square$

**Teorema 4.2.11.** Para todo par de números naturales  $m, n \geq 2$ , el número  $\binom{m+n-2}{m-1}$  tiene la propiedad  $(m, n)$ .

*Demostración* [7]: La demostración se hace por inducción sobre  $m+n$ . Se toma como base de inducción el caso  $m+n=4$  (esto es,  $m=n=2$ ). De acuerdo con el lema anterior, el número  $\binom{2}{1} = 2$  tiene la propiedad  $(2, 2)$ .

Ahora, se toma  $m \geq 2$  y  $n \geq 2$  tal que  $m+n > 4$ . Si  $m=2$  o  $n=2$ , la validez del teorema está garantizado por el **Lema 4.2.10**. Resta examinar el caso en el cual  $m > 2$  y  $n > 2$ .

Se admite como hipótesis de inducción que los números

$$m' = \binom{m-1+n-2}{m-2} \quad \text{y} \quad n' = \binom{m+n-3}{m-1},$$

tienen respectivamente, las propiedades  $(m-1, n)$  y  $(m, n-1)$ .

Ahora, de acuerdo con la identidad  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ , se tiene que:

$$\binom{m-1+n-2}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2} = \binom{m+n-2}{m-1} \quad (4.3)$$

$$m' + n' = \binom{m+n-2}{m-1}.$$

Luego, basta mostrar que  $m' + n'$  tiene la propiedad  $(m, n)$ . Sea  $G = (V_G, A_G)$  un grafo de orden  $m' + n'$  y  $v$  un vértice de  $G$ . Sean los subgrafos  $H_1(v)$  y  $H_2(v)$  y las siguientes alternativas:

1.  $|V_{H_1}| \geq m'$ . En este caso, por hipótesis de inducción,  $H_1$  no puede ser un  $(m-1, n)$  – grafo y de acuerdo con el **Lema 4.2.7**  $G$  no es un  $(m, n)$  – grafo.
2.  $|V_{H_1}| < m'$ . Como

$$|V_{H_1}| + |V_{H_2}| = |V_G| - 1 \quad \text{y} \quad |V_G| = m' + n',$$

así

$$|V_{H_1}| + |V_{H_2}| = m' + n' - 1 < |V_{H_2}| + m',$$

entonces  $|V_{H_2}| > n' - 1$ , y se tiene  $|V_{H_2}| \geq n'$ . Por hipótesis de inducción  $H_2$  no es un  $(m, n - 1)$ -grafo y de acuerdo con el **Lema 4.2.7**  $G$  no es un  $(m, n)$ -grafo.

De los casos 1 y 2 se sigue que no existen  $(m, n)$ -grafos con  $m' + n'$  vértices, como se quería demostrar.  $\square$

### 4.3 Números de Ramsey en términos de $(m, n)$ -grafos

Demostrada la existencia de números con la propiedad  $(m, n)$  para todo  $m \geq 2$  y todo  $n \geq 2$  se puede formular la siguiente definición.

**Definición 4.3.1.** Para todo par de números naturales  $m, n \geq 2$  se denota por  $R(m, n)$  al menor número natural  $R$  dotado de la propiedad  $(m, n)$ .  $R(m, n)$  se llama el **número de Ramsey** de parámetros  $m$  y  $n$ .

De esta definición se desprende que  $R(m, n) > k$  si y sólo si existe un  $(m, n)$ -grafo con  $k$  vértices.

Esta definición ofrece otra interpretación para los números de Ramsey, ya que al inicio de este capítulo los números de Ramsey se interpretaron en términos de 2-coloraciones. La relación entre estas dos interpretaciones es que: todos los grafos con al menos  $R(m, n)$  vértices o más deben contener un clique con  $m$  vértices o un conjunto independiente con  $n$  vértices que corresponden a un  $K_m$  o un  $K_n$  monocromático en un grafo completo con  $R(m, n)$  vértices, 2-coloreado.

**Lema 4.3.2.**  $R(m, n) = R(n, m)$ .

*Demostración* [7]: Debido a que  $R(n, m)$  tiene la propiedad  $(n, m)$ , la demostración es consecuencia inmediata del **Lema 4.2.9**.

En términos de coloración se puede ver que  $R(n, m)$  es simétrico en  $n$  y  $m$  al intercambiar las aristas azules y rojas, así se tiene que

$$R(n, m) = R(n, m). \quad \square$$

**Lema 4.3.3.**  $R(2, m) = m$ , para todo  $m \geq 2$ .

*Demostración* [10]: Un  $(2, m)$ -grafo es un grafo que no contiene un grafo completo  $K_2$ , ya que un grafo completo  $K_2$  es una arista, luego un  $(2, m)$ -grafo consiste completamente de vértices aislados. Tan pronto como se tenga  $m$  de estos vértices, se tiene un conjunto independiente con  $m$  vértices, es decir no existen  $(2, m)$ -grafos con  $m$  vértices. Por lo tanto,  $R(2, m) = m$ .  $\square$

**Observaciones [7]:**

- i) Los grafos completos de orden  $m - 1$  son los únicos  $(m, 2)$  - grafos con  $m - 1$  vértices, ya que

$$\omega(K_{m-1}) = m - 1 < m \quad \text{y} \quad \omega(\overline{K_{m-1}}) = 1 < 2,$$

entonces  $K_{m-1}$  es un  $(m, 2)$  - grafo. Como no es posible eliminar una arista  $a$  de  $K_{m-1}$  de tal forma que  $\alpha(K_{m-1} - a) < 2$ , se concluye que los grafos  $K_{m-1}$  son los únicos  $(m, 2)$  - grafos con  $m - 1$  vértices.

- ii) Los grafos nulos de orden  $n - 1$  son los únicos  $(2, n)$  - grafos con  $n - 1$  vértices.

**Teorema 4.3.4.**  $R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$ .

*Demostración:* Es consecuencia inmediata del **Teorema 4.2.11** y la **Definición 4.3.1**.  $\square$

Desafortunadamente la desigualdad es en general estricta y el problema de determinar el valor exacto de  $R(m, n)$  no es fácil. La siguiente tabla contiene los valores correspondientes a la cota superior  $\binom{m+n-2}{m-1}$  de  $R(m, n)$ .

**TABLA:**  $R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$

$m \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	10	15	21	28	36	45	55
4		20	35	56	84	120	165	220
5			70	126	210	330	495	715
6				252	462	792	1287	2002
7					924	1716	3003	5005
8						3432	6435	11440
9							12870	24310
10								48620

$m \backslash n$	11	12	13	14	15
3	66	78	91	105	120
4	286	364	455	560	680
5	1001	1365	1820	2380	3060

$m \backslash n$	16	17	18	19	20	21
3	136	153	171	190	210	231

**Lema 4.3.5.** Si  $G = (V_G, A_G)$  es un  $(m, n)$ -grafo con  $p$  vértices, entonces para todo vértice  $v \in V$ , se tiene que

$$p - R(m, n - 1) \leq gr(v) \leq R(m - 1, n) - 1.$$

*Demostración* [10]: De la **Definición 4.2.6** se tienen los grafos  $H_1$  y  $H_2$ . Ya que  $H_1$  es un  $(m-1, n)$ -grafo, entonces

$$|V_{H_1}| < R(m-1, n),$$

así se tiene que  $gr(v) < R(m-1, n)$  para cualquier vértice  $v$  en  $H_1$  y en consecuencia para todo  $v$  de  $G$  (por definición de  $H_1$ ), así

$$gr(v) \leq R(m-1, n) - 1, \quad (4.4)$$

ya que  $H_2$  es un  $(m, n-1)$ -grafo.

Si  $\overline{gr}(v)$  es el grado de  $v$  en  $\overline{G}$ , entonces

$$\overline{gr}(v) < R(n-1, m),$$

ya que  $\overline{H_2}$  es un  $(n-1, m)$ -grafo. Así para todo  $v \in \overline{H_2}$  se tiene

$$\overline{gr}(v) < R(n-1, m) = R(m, n-1). \quad (4.5)$$

Debido a que para cada uno de los  $p$  vértices de  $G$ , excepto el mismo  $v$ , hay una arista entre ellos en  $G$  o en  $\overline{G}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} gr(v) + \overline{gr}(v) &= p - 1 \\ gr(v) &= p - 1 - \overline{gr}(v) > -R(m, n-1) + p - 1, \text{ por (4.5)} \\ gr(v) &> (p-1) - R(m, n-1). \end{aligned}$$

Y por tanto

$$gr(v) \geq p - R(m, n-1). \quad (4.6)$$

En consecuencia por las desigualdades (4.4) y (4.6) se tiene

$$p - R(m, n-1) \leq gr(v) \leq R(m-1, n) - 1. \quad \square$$

**Teorema 4.3.6.** *Si  $G$  es un  $(m, n)$ -grafo, entonces*

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$$

*y la desigualdad estricta se mantiene si  $R(m-1, n)$  y  $R(m, n-1)$  son pares.*

*Demostración* [10]: Del teorema anterior el mínimo grado debe ser menor o igual al máximo grado, es decir

$$p - R(m, n-1) \leq R(m-1, n) - 1,$$

así

$$p \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1.$$

Como  $G$  es un  $(m, n)$ -grafo con  $p$  vértices, esto implica que:

$$p \leq R(m, n) - 1,$$



por lo tanto

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1),$$

ya que, el número  $R(m-1, n)$  tiene la propiedad  $(m-1, n)$  y por observación (ii) de la **Definición 4.2.8** el número  $R(m-1, n) + R(m, n-1)$  también tiene la propiedad  $(m-1, n)$ .

De igual forma se deduce que el número  $R(m-1, n) + R(m, n-1)$  tiene la propiedad  $(m, n-1)$ , es decir no existen grafos con  $R(m-1, n) + R(m, n-1)$  vértices tales que  $\omega(G) < m$  y  $\alpha(G) < n$ , por lo tanto  $R(m-1, n) + R(m, n-1)$  tiene la propiedad  $(m, n)$ , como  $R(m, n)$  es el menor entero con la propiedad  $(m, n)$ , entonces

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1).$$

Ahora, si se supone que

$$R(m, n) = R(m-1, n) + R(m, n-1),$$

donde  $R(m-1, n)$  y  $R(m, n-1)$  son pares y  $G = (V, A)$  es un  $(m, n)$  - *grafo* con  $t$  vértices, donde

$$t = R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1. \quad (4.7)$$

Por el lema anterior

$$\begin{aligned} gr(v) &\geq t - R(m, n-1) \\ &= R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1 - R(m, n-1) \\ &= R(m-1, n) - 1. \end{aligned}$$

Así,

$$gr(v) \geq R(m-1, n) - 1;$$

pero

$$gr(v) \not\geq R(m-1, n) - 1$$

ya que por el lema anterior,  $gr(v) \leq R(m-1, n) - 1$ .

Por lo tanto para cada vértice  $v \in V$  se tiene

$$gr(v) = R(m-1, n) - 1.$$

Así,  $gr(v)$  es impar y por (4.7)  $t$  es impar. Pero esto no puede suceder, ya que por el **Corolario 1.1.4** en todo grafo hay un número par de vértices de grado impar y como todos los vértices de  $G$  son de grado impar, entonces  $t$  deber ser par lo cual es una contradicción, por tanto

$$R(m, n) < R(m-1, n) + R(m, n-1),$$

si  $R(m-1, n)$  y  $R(m, n-1)$  son números pares.  $\square$

**Teorema 4.3.7.**  $R(m, n) \geq R(m, k) + R(m, n - k + 1) - 1$ .

*Demostración* [10]: Sea  $G = (V_G, A_G)$  un grafo con componentes conexas  $G_1$  y  $G_2$ , donde  $G = G_1 + G_2$ . Por la definición de  $G$  se tiene que:

$$\omega(G) = \text{máx} \{ \omega(G_1), \omega(G_2) \},$$

y

$$\alpha(G) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2).$$

Ahora, si  $G_1$  es un  $(m, k)$ -grafo y  $G_2$  es un  $(m, n - k + 1)$ -grafo, entonces

$$|V_{G_1}| \leq R(m, k) - 1 \quad \text{y} \quad |V_{G_2}| \leq R(m, n - k + 1) - 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |V_G| &= |V_{G_2}| + |V_{G_1}| \\ &\leq R(m, k) - 1 + R(m, n - k + 1) - 1 \\ &= R(m, k) + R(m, n - k + 1) - 2. \end{aligned}$$

Así,

$$|V_G| \leq R(m, k) + R(m, n - k + 1) - 2.$$

Pero  $\omega(G) < m$ , ya que  $\omega(G_1) < m$  y  $\omega(G_2) < m$  y como

$$\alpha(G_1) \leq k - 1 \quad \text{y} \quad \alpha(G_2) \leq n - k + 1 - 1,$$

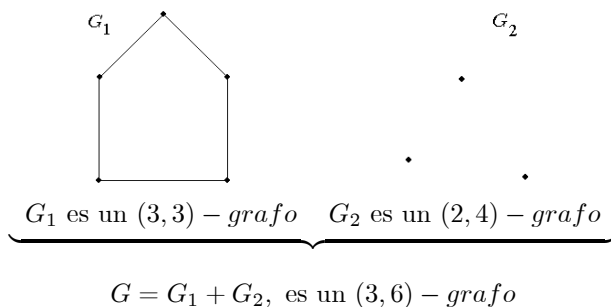
entonces

$$\alpha(G) \leq k - 1 + n - k = n - 1.$$

Así,  $G$  debe ser un  $(m, n)$ -grafo. De lo cual  $R(m, n) \geq |V_G| + 1$ , como  $|V_G|$  puede ser a lo sumo  $R(m, k) + R(m, n - k + 1) - 2$ , entonces

$$\begin{aligned} R(m, n) &\geq R(m, k) + R(m, n - k + 1) - 2 + 1 \\ R(m, n) &\geq R(m, k) + R(m, n - k + 1) - 1 \quad \square \end{aligned}$$

La siguiente figura ilustra que la suma de un  $(3, 3)$ -grafo y un  $(2, 4)$ -grafo es un  $(3, 6)$ -grafo



**Figura 4.14.**

## 4.4 Grafos cíclicos

En esta sección se van a construir  $(3, 3)$ -grafos,  $(3, 4)$ -grafos,  $(3, 5)$ -grafos y  $(4, 4)$ -grafos por medio de grafos cíclicos.

**Definición 4.4.1.** Sea  $p \geq 2$  un número natural y sea el grafo completo  $K_p$  con vértices  $1, 2, \dots, p$ . Para todo par de vértices  $x, y$  de  $K_p$ , se dice que los números  $|y - x|$  y  $p - |y - x|$  son los **pesos de la arista**  $\{x, y\}$  y el menor de los dos pesos es el **tamaño de la arista**  $\{x, y\}$ .

**Definición 4.4.2.** Sean  $s_1, s_2, \dots, s_k$  números naturales tales que

$$1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor,$$

con  $p \geq 2$ . Se dice que el subgrafo  $G$  del grafo completo  $K_p$  inducido por todas las aristas que tienen tamaño  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  es un **grafo cíclico** de orden  $p$  y **parámetros**  $s_1, s_2, \dots, s_k$ .

Se denota por  $W(G)$  al **conjunto de los pesos de las aristas de  $G$** . Esto es,

$$W(G) = \{s_1, p - s_1, s_2, p - s_2, \dots, s_k, p - s_k\}.$$

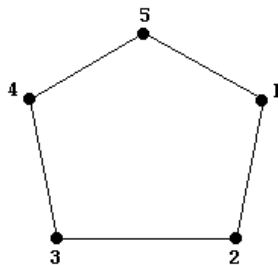


Figura 4.15. Grafo cíclico de orden 5 y parámetro 1.

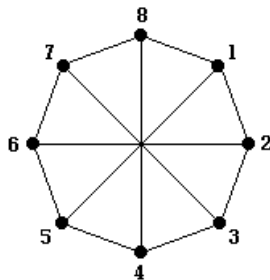


Figura 4.16. Grafo cíclico de orden 8 y parámetros 1 y 4.

Los grafos de las Figuras 4.15 y 4.16 tienen como conjunto de los pesos de las aristas a  $\{1, 4\}$  y  $\{1, 4, 7\}$  respectivamente.

**Nota:** Todos los grafos cíclicos de orden  $n$  y parámetro 1 son ciclos de orden  $n$ .

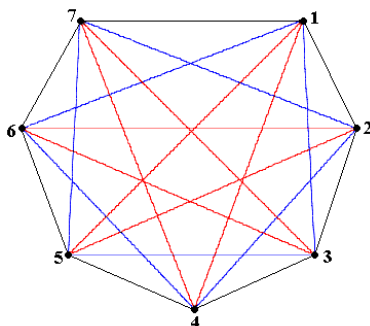


Figura 4.17. Grafo cíclico de orden 7 y parámetros 1,2,3.

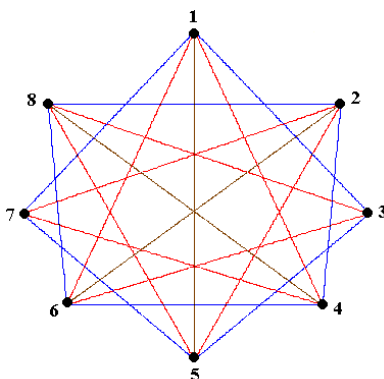


Figura 4.18. Grafo cíclico de orden 8 y parámetros 2,3,4.

Si  $G$  es un grafo cíclico de orden  $p$ , se puede ver que también  $\overline{G}$  es cíclico de orden  $p$  y  $W(\overline{G})$  es el **complemento de  $W(G)$**  en el conjunto  $\{1, 2, \dots, p-1\}$ .

**Definición 4.4.3.** Sean  $m$  y  $p$  enteros positivos y  $W$  un subconjunto de  $\{1, 2, \dots, p-1\}$ . Si  $w_1, w_2, \dots, w_m$  es una secuencia de elementos de  $W$ , los términos  $w_m$  y  $w_1$ ,  $w_1$  y  $w_2, \dots, w_{m-1}$  y  $w_m$  se dicen **términos adyacentes**.

**Una solución al problema  $(m, p, W)$**  es una secuencia  $w_1, w_2, \dots, w_m$  de elementos de  $W$  tal que  $w_1 + w_2 + \dots + w_m = p$  y  $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_m$ .

**Una solución al problema  $((m, p, W))$**  es una secuencia  $w_1, w_2, \dots, w_m$  de elementos de  $W$  tal que  $w_1 + w_2 + \dots + w_m = p$  y las sumas de términos adyacentes de la secuencia  $w_m + w_1, w_1 + w_2, w_2 + w_3, \dots, w_{m-1} + w_m$  están en  $W$ .

Es claro que si  $w_1, w_2, \dots, w_m$  es una solución al problema  $((m, p, W))$ , entonces alguna permutación de la secuencia  $w_1, w_2, \dots, w_m$  es solución al problema  $((m, p, W))$ .

**Lema 4.4.4.** *Sea  $G$  un grafo cíclico de orden  $p$ . Si  $G$  contiene un grafo completo  $K_m$ , entonces el problema  $((m, p, W))$  tiene solución.*

*Demostración [7]:* Sean  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$  los vértices de un subgrafo completo  $H$  de  $G$  y la secuencia de pesos

$$\begin{aligned} w_1 &= x_2 - x_1 \\ w_2 &= x_3 - x_2 \\ &\vdots \\ w_{m-1} &= x_m - x_{m-1} \\ w_m &= p - x_m + x_1, \end{aligned}$$

el objetivo es mostrar que  $w_1, w_2, \dots, w_{m-1}, w_m$  es una solución al problema  $((m, p, W))$ .

Se puede ver que

$$w_1 + w_2 + \dots + w_{m-1} + w_m = p.$$

También se tiene que  $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{m-1}, x_m\}$  y  $\{x_m, x_1\}$  son aristas de  $G$  y por lo tanto  $w_i \in W(G)$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Finalmente, como  $H$  es un grafo completo, se cumple que  $\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \dots, \{x_{m-1}, x_1\}$  y  $\{x_m, x_2\}$  son aristas de  $G$ . Por tanto los correspondientes pesos  $w_1 + w_2, \dots, w_{m-1} + w_m$  y  $w_m + w_1$  están en  $W(G)$ .  $\square$

El siguiente **ejemplo** ilustra el lema anterior: El grafo que se presenta en la **Figura 4.18** el cual es cíclico de orden 8 y parámetros 2, 3, 4, contiene un grafo completo  $K_4$  por tanto debe tener solución al problema  $((4, 8, W))$ . Los vértices del subgrafo completo  $K_4$  de  $G$  son  $\{8, 2, 4, 6\}$  y se organizan en el orden usual:  $2 < 4 < 6 < 8$ .

$$\begin{aligned} w_1 &= 4 - 2 = 2 \\ w_2 &= 6 - 4 = 2 \\ w_3 &= 8 - 6 = 2 \\ w_4 &= 8 - 8 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Así,  $\{2, 2, 2, 2\}$  es solución al problema  $((4, 8, W))$ . La siguiente observación es fundamental e importante en lo que sigue y hace alusión al contrarrecíproco del lema anterior.

**Observación:** Para mostrar que un grafo cíclico  $G$  de orden  $p$  no contiene un grafo completo  $K_m$  basta por lo tanto mostrar que el problema  $((m, p, W))$  no tiene solución.

**Teorema 4.4.5.** *El grafo cíclico de orden 5 y parámetro 1 es un  $(3, 3)$  – grafo. (Ver Figura 4.15).*

*Demostración [7]:* Sea  $G$  el grafo cíclico de orden 5 y parámetro 1.  $\overline{G}$  es cíclico de orden 5 y parámetro 2,

$$W = W(G) = \{1, 4\} \text{ y } \overline{W} = W(\overline{G}) = \{2, 3\}$$

Los problemas  $(3, 5, \{1, 4\})$  y  $(3, 5, \{2, 3\})$  no tienen solución y por tanto también los problemas  $((3, 5, \{1, 4\}))$  y  $((3, 5, \{2, 3\}))$  no tienen solución. Esto es  $G$  y  $\overline{G}$  no contienen un  $K_3$  y en consecuencia  $\omega(G) < 3$  y  $\alpha(G) < 3$ . Por lo tanto  $G$  es un  $(3, 3)$  – grafo  $\square$

**Teorema 4.4.6.** *El grafo cíclico de orden 8 y parámetros 1, 4 es un  $(3, 4)$  – grafo. (Ver Figura 4.16).*

*Demostración [7]:* Sea  $G$  el grafo cíclico de orden 8 y parámetros 1, 4. El conjunto de pesos de  $G$  es:

$$W = W(G) = \{1, 4, 7\}$$

y el conjunto de pesos de  $\overline{G}$

$$\overline{W} = W(\overline{G}) = \{2, 3, 5, 6\},$$

$G$  no contiene un grafo completo  $K_3$ , ya que el problema  $(3, 8, W)$  no tiene solución.  $\overline{G}$  no contiene un grafo completo  $K_4$  pues  $2, 2, 2, 2$  es la única solución al problema  $(4, 8, \overline{W})$  y la suma  $2+2=4$  de términos adyacentes de la secuencia no está en  $\overline{W}$ . Así, el problema  $((4, 8, \overline{W}))$  no tiene solución. En consecuencia  $\omega(G) < 3$  y  $\alpha(G) < 4$ . Por lo tanto  $G$  es un  $(3, 4)$  – grafo.  $\square$

**Lema 4.4.7.** *El problema  $(3, 13, W)$  con  $W = \{1, 5, 8, 12\}$  no tiene solución.*

*Demostración [7]:* Si  $w_1, w_2, w_3$  es solución al problema  $(3, 13, W)$ , entonces  $w_1 + w_2 \geq 2$  y por lo tanto  $w_3 \leq 13 - 2 = 11$ . Así,  $w_1, w_2, w_3$  es también solución al problema  $(3, 13, \{1, 5, 8\})$ . Pero el problema anterior no tiene solución, ya que se puede verificar que no existe una suma con tres sumandos que de 13 con los elementos del conjunto  $\{1, 5, 8\}$ .  $\square$

**Lema 4.4.8.**  *$2, 2, 2, 3, 4$  y  $2, 2, 3, 3, 3$  son las únicas soluciones del problema  $(5, 13, \overline{W})$  con*

$$\overline{W} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

*Demostración [7]:* Si  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$  es solución al problema  $(5, 13, \overline{W})$ , entonces  $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 8$  y por lo tanto  $w_5 \leq 13 - 8 = 5$ . Así,  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$  es también solución al problema  $(5, 13, \{2, 3, 4\})$ . Se puede comprobar que  $2, 2, 2, 3, 4$  y  $2, 2, 3, 3, 3$  son las únicas soluciones de éste último problema.  $\square$

**Teorema 4.4.9.** *El grafo cíclico de orden 13 y parámetros 1, 5 es un  $(3, 5)$  – grafo. (Ver Figura 4.19).*

*Demostración* [7]: Sea  $G$  un grafo cíclico de orden 13 y parámetros 1, 5,

$$W(G) = \{1, 5, 8, 12\}$$

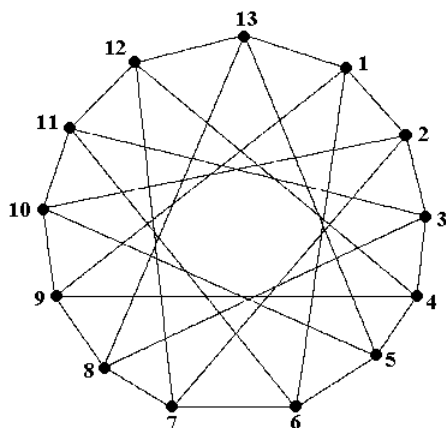
y

$$\overline{W} = W(\overline{G}) = \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11\}$$

conforme el **Lema 4.4.7**, el problema  $(3, 13, W)$  no tiene solución, y por lo tanto tampoco el problema  $((3, 13, W))$ . Así, de acuerdo con el **Lema 4.4.4**  $G$  no contiene un grafo completo  $K_3$ . Por lo tanto  $\omega(G) < 3$ .

Conforme al **Lema 4.4.8**, las únicas soluciones del problema  $(5, 13, \overline{W})$  son  $2, 2, 2, 3, 4$  y  $2, 2, 3, 3, 3$ . Además toda permutación de cualquiera de estas secuencias tiene un 2 adyacente a un 3. Pero la suma  $2 + 3 = 5$  no está en  $\overline{W}$  y por tanto el problema  $((5, 13, \overline{W}))$  no tiene solución. Se sigue que  $\overline{G}$  no contiene un grafo completo  $K_5$ . En consecuencia  $\alpha(G) < 5$ .

Por lo tanto,  $G$  es un  $(3, 5)$  - grafo.  $\square$



**Figura 4.19.**

**Lema 4.4.10.**  $1, 1, 2, 13$ ;  $1, 4, 4, 8$  y  $2, 2, 4, 9$  son las únicas soluciones al problema  $(4, 17, W)$  con

$$W = \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}.$$

*Demostración* [7]: Sean  $A$  y  $B$  los conjuntos  $\{1, 2, 4, 8, 9, 13\}$  y  $\{1, 2, 4\}$  respectivamente. Es posible ver que  $w_1, w_2, w_3, w_4$  es solución de  $(4, 17, W)$  si y sólo si también es solución de  $(4, 17, A)$ . Además, si  $w_1, w_2, w_3, w_4$  es solución de éste último, entonces  $w_3 < 8$ , ya que si

$$1 \leq w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq w_4 \leq 13 \text{ y } w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 17$$

se deduce que:

- i) Si  $w_4 = 13$ , entonces  $w_1 + w_2 + w_3 = 4$ , de lo cual  $w_3 < 8$ .
- ii) Si  $w_4 = 9$ , entonces  $w_1 + w_2 + w_3 = 8$ , de lo cual  $w_3 < 8$ .
- iii) Si  $w_4 = 8$ , entonces  $w_1 + w_2 + w_3 = 9$ , de lo cual  $w_3 < 8$ .
- iv) Si  $w_4 = 4$ , entonces  $w_1 + w_2 + w_3 = 13$ , de lo cual  $w_3 < 8$ .

Y por lo tanto se deducen los siguientes problemas:

- i)  $w_4 = 13$  y  $w_1, w_2, w_3$  es solución de  $(3, 4, B)$ .
- ii)  $w_4 = 9$  y  $w_1, w_2, w_3$  es solución de  $(3, 8, B)$ .
- iii)  $w_4 = 8$  y  $w_1, w_2, w_3$  es solución de  $(3, 9, B)$ .
- iv)  $w_4 = 4$  y  $w_1, w_2, w_3$  es solución de  $(3, 13, B)$ .

El problema **iv)** no tiene solución. Y las únicas soluciones de los problemas **i), ii)** y **iii)** son  $1, 1, 2$ ;  $2, 2, 4$  y  $1, 4, 4$  respectivamente. Por lo tanto  $1, 1, 2, 13$ ;  $1, 4, 4, 8$  y  $2, 2, 4, 9$  son las únicas soluciones al problema  $(4, 17, W)$ .  $\square$

**Lema 4.4.11.**  $3, 3, 5, 6$  es la única solución al problema  $(4, 17, \overline{W})$  con

$$\overline{W} = \{3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}.$$

*Demostración* [7]: Sea  $w_1, w_2, w_3, w_4$  una solución al problema  $(4, 17, \overline{W})$ . Si  $w_2 \geq 5$ , entonces  $w_2 + w_3 + w_4 \geq 15$  y por tanto

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 18 > 17.$$

En consecuencia  $w_1 = w_2 = 3$  y  $w_3, w_4$  es solución al problema

$$(2, 11, \{5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}).$$

Se tiene que  $5, 6$  es la única solución de éste último problema.

Por lo tanto  $3, 3, 5, 6$  es la única solución al problema  $(4, 17, \overline{W})$ .  $\square$

**Teorema 4.4.12.** *Un grafo cíclico  $G$  de orden 17 y parámetros  $1, 2, 4, 8$  es un  $(4, 4)$ -grafo. (Ver **Figura 4.20**).*

*Demostración* [7]: Sea  $G$  un grafo cíclico de orden 17 y parámetros  $1, 2, 4, 8$ ; y los conjuntos de pesos:  $W, \overline{W}$

$$\{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\} \text{ y } \{3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$$

respectivamente. Basta mostrar que los problemas  $((4, 17, W))$  y  $((4, 17, \overline{W}))$  no tienen solución.

Conforme el **Lema 4.4.10**,  $1, 1, 2, 13$ ;  $1, 4, 4, 8$  y  $2, 2, 4, 9$  son las únicas soluciones al problema  $(4, 17, W)$ . Toda permutación de la primera secuencia tiene un 1 adyacente a un 2 y su suma  $1 + 2 = 3$  no está en  $W$ . Toda



permutación de la segunda secuencia tiene un 1 adyacente a un 4 y  $1+4$  no está en  $W$ . Finalmente, toda permutación de  $2, 2, 4, 9$  tiene un 2 adyacente a un 4 y  $2+4$  no está en  $W$ . Así, el problema  $((4, 17, W))$  no tiene solución. Por lo tanto  $\omega(G) < 4$ .

Conforme el **Lema 4.4.11**,  $3, 3, 5, 6$  es la única solución al problema  $(4, 17, \overline{W})$ . Pero toda permutación de  $3, 3, 5, 6$  tiene un 3 adyacente a un 5 y la suma  $3+5$  no está en  $\overline{W}$ , por tanto el problema  $((4, 17, \overline{W}))$  no tiene solución. Luego  $\alpha(G) < 17$  y en consecuencia  $G$  es un  $(4, 4)$ -grafo.  $\square$

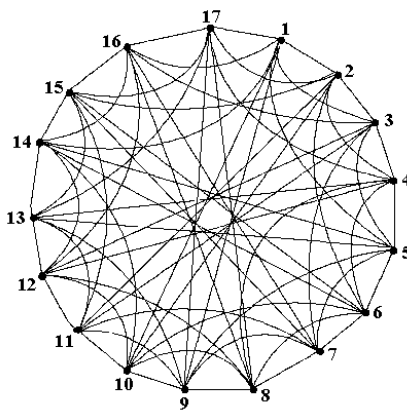


Figura 4.20.

#### 4.5 Los números $R(3, 3)$ , $R(3, 4)$ , $R(3, 5)$ y $R(4, 4)$

**Corolario 4.5.1.**  $R(3, 3) > 5$ ;  $R(3, 4) > 8$ ;  $R(3, 5) > 13$ ;  $R(4, 4) > 17$ .

*Demostración* [7]: Según la **Definición 4.3.1** las cotas son consecuencia inmediata de los **Teoremas 4.4.5, 4.4.6, 4.4.9 y 4.4.12**.  $\square$

**Definición 4.5.2.** Un  $(m, n)$ -grafo con  $p$  vértices, se llama **grafo extremo** si  $p = R(m, n) - 1$ .

Los cuatro grafos cíclicos examinados anteriormente fueron construidos por Greenwood y Gleason. Del siguiente teorema se puede inferir que estos son grafos extremos.

**Teorema 4.5.3.**  $R(3, 3) = 6$ ,  $R(3, 4) = 9$ ,  $R(3, 5) = 14$ ,  $R(4, 4) = 18$ .

*Demostración* [7]: De acuerdo con el **Teorema 4.3.6** se tiene:

$$\begin{aligned} R(3, 3) &\leq R(2, 3) + R(3, 2) = 3 + 3 = 6 \\ R(3, 4) &< R(2, 4) + R(3, 3) = 4 + 6 = 10 \longrightarrow R(3, 4) \leq 9 \\ R(3, 5) &\leq R(2, 5) + R(3, 4) = 5 + 9 = 14 \\ R(4, 4) &\leq R(3, 4) + R(4, 3) \leq 18 \end{aligned}$$

Así  $R(3, 3) \leq 6$ ,  $R(3, 4) \leq 9$ ,  $R(3, 5) \leq 14$ ,  $R(4, 4) \leq 18$ .  
y del **Corolario 4.4.13**,

$$R(3, 3) > 5, R(3, 4) > 8, R(3, 5) > 13, R(4, 4) > 17.$$

De donde se obtiene que

$$R(3, 3) = 6, R(3, 4) = 9, R(3, 5) = 14, R(4, 4) = 18. \quad \square$$

#### 4.6 El número $R(3, 6)$

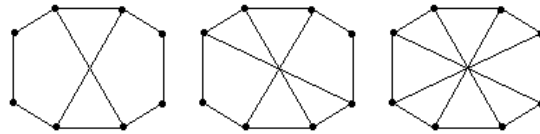
En un principio se hacen las siguientes consideraciones: Si  $G$  es un  $(m, n)$  – grafo con  $p$  vértices, se denota a  $G$  como un  $(m, n; p)$  – grafo. Si  $G$  es un  $(m, n; p)$  – grafo con  $q$  aristas se denota a  $G$  como un  $(m, n; p, q)$  – grafo.

Para calcular  $R(3, 6)$  se establecen propiedades estructurales de los  $(3, 3; 5)$  – grafos,  $(3, 4; 8)$  – grafos,  $(3, 5; 12)$  – grafos,  $(3, 5; 13)$  – grafos y  $(3, 5; 12, 20)$  – grafos.

**Lema 4.6.1.** Si  $G$  es un  $(3, 3; 5)$  – grafo, entonces  $G$  es un  $C_5$ .

*Demostración* [7]: Si  $G$  es un  $(3, 3; 5)$  – grafo, entonces de acuerdo con el **Lema 4.3.5**, todos los vértices de  $G$  tienen grado 2. Como  $|V_G| = 5$  y  $\omega(\overline{G}) < 3$ ,  $G$  debe ser conexo. Así,  $G$  es un ciclo de orden 5.  $\square$

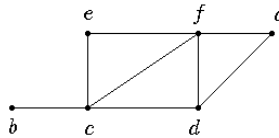
En seguida se muestra que todo  $(3, 4; 8)$  – grafo tiene 10 o más aristas. Kalbfleisch [7] demostró, analizando todas las posibles configuraciones de los  $(3, 4; 8)$  – grafos, que sólo existen tres clases de este tipo. Los grafos extremos de la **Figura 4.21** tienen 10, 11 y 12 aristas respectivamente.



**Figura 4.21.**

**Definición 4.6.2.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo y  $X, Y \subset V$ , se define el conjunto de aristas de  $G$  que tienen un extremo en  $X$  y el otro en  $Y$ , como:

$$\Delta G(X, Y) = X \Delta Y = \{\{x, y\} \in A : x \in X, y \in Y\}.$$



**Figura 4.22.**

El conjunto

$$\Delta G(\{a, b\}, \{c, d\}) = \{\{a, d\}, \{b, c\}\},$$

corresponde al grafo  $G$  de la figura anterior.

**Lema 4.6.3.** Si  $G = (V_G, A_G)$  es un  $(3, n)$ -grafo,  $v$  un vértice de  $G$ ,  $H_1$  y  $H_2$  los subgrafos  $H_1(v)$  y  $H_2(v)$  respectivamente, entonces

$$|A_G| = |A_{H_2}| + \sum_{x \in V_{H_1}} gr(x).$$

*Demostración* [7]: Conforme al **Lema 4.2.7**,  $H_1$  es un  $(2, n)$ -grafo y por lo tanto  $A_{H_1} = \emptyset$ . Resulta que toda arista de  $G$  o tiene exactamente un extremo en  $V_{H_1}$  o tiene ambos extremos en  $V_{H_2}$ , esto es,

$$A_G = \Delta G(V_{H_1}, V_G - V_{H_1}) \cup A_{H_2}$$

de modo que

$$|A_G| = |A_{H_2}| + \sum_{x \in V_{H_1}} gr(x). \quad \square$$

**Teorema 4.6.4.** Si  $G = (V_G, A_G)$  es un  $(3, 4; 8)$ -grafo, entonces  $|A_G| \geq 10$ .

*Demostración* [7]: Conforme el **Lema 4.3.5**,  $2 \leq gr(x) \leq 3$  para todo vértice  $x$  de  $G$ . Sea  $p_i$  el número de vértices de  $G$  que tienen grado  $i$ , donde  $i = 2, 3$ , lo que se pretende demostrar es que  $p_3 \geq 4$ .

En virtud del **Corolario 1.1.4**,  $p_3$  es par, luego basta mostrar que  $p_3 \neq 0$  y  $p_3 \neq 2$ .

Se supone inicialmente que  $p_3 = 0$ , entonces todo vértice  $x$  de  $G$  tiene grado 2. Así,  $H_2(x)$  es un  $(3, 3; 5)$ -grafo y por el **Teorema 4.6.1**,  $|A_{H_2}| = 5$ . Se sigue del **Lema 4.6.3**, que

$$|A_G| = 5 + (2 + 2) = 9.$$

Por otro lado, siendo  $p_3 = 0$  se tiene por el **Lema 1.1.3** que  $|A_G| = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8$ ; lo cual contradice lo anterior. Así,  $p_3 \neq 0$ . Al suponer ahora que  $p_3 = 2$  se tiene,  $|A_G| = 9$  por el **Lema 1.1.3**. Sea  $x$  un vértice de grado 2 en  $G$  adyacente a un vértice de grado 3. El subgrafo  $H_2$  es un  $(3, 3; 5)$ -grafo y por el **Lema 4.6.1**,  $|A_{H_2}| = 5$ . Se sigue del **Lema 4.6.3** que

$$|A_G| = 5 + (2 + 3) = 10,$$

que es una contradicción. Así, se concluye que  $p_3 \geq 4$  y por lo tanto que  $|A_G| \geq 10$ .  $\square$

**Lema 4.6.5.** Si  $G = (V_G, A_G)$  es un  $(3, 5; 12)$ -grafo, entonces  $|A_G| \geq 20$ .

*Demostración* [7]: Del **Lema 4.3.5** los vértices de  $G$  tienen grados 3 o 4. Sea  $P_i$  el número de vértices de  $G$  que tienen grado  $i$ , donde  $i = 3, 4$ , lo que se

pretende demostrar es que  $P_4 \geq 4$ . En virtud del **Corolario 1.1.4**,  $P_3$  es par y de la ecuación  $P_3 + P_4 = 12$ , se deduce que  $P_4$  es par. Resta mostrar por lo tanto que  $P_4 \neq 0$  y  $P_4 \neq 2$ .

Si se supone inicialmente que  $P_4 = 0$ , entonces por el **Lema 1.1.3** se tiene que  $|A_G| = \frac{3 \cdot 12}{2} = 18$ . Además para todo vértice  $x$  de  $G$ ,  $H_2$  es un  $(3, 4; 8)$  – grafo y por el **Teorema 4.6.4**,  $|A_{H_2}| \geq 10$ . Por otro lado, del **Lema 4.6.3** se tiene que  $|A_G| \geq 10 + 3 \cdot 3 = 19$ , lo cual es contradictorio.

Ahora, al suponer que  $P_4 = 2$ , se tiene que  $P_3 = 10$  y por el **Lema 1.1.3**  $|A_G| = \frac{(3 \cdot 10) + (4 \cdot 2)}{2} = 19$ . Sea  $x$  un vértice de grado 3 adyacente a un vértice de grado 4. El subgrafo  $H_2$  es un  $(3, 4; 8)$  – grafo y por el **Teorema 4.6.4**,  $|A_{H_2}| \geq 10$ . Se sigue del **Lema 4.6.3** que,

$$|A_G| \geq 10 + (3 + 3 + 4) = 20,$$

lo cual es contradictorio.

Así se concluye que  $P_4 \geq 4$ , lo que implica que  $P_3 \leq 12 - 4 = 8$ , y finalmente por el **Lema 1.1.3**  $|A_G| \geq \frac{16 + 24}{2} = 20$ .  $\square$

**Teorema 4.6.6.** Si  $G = (V_G, A_G)$  es un  $(3, 5; 13)$  – grafo, entonces  $|A_G| = 26$ .

*Demostración* [7]: De acuerdo con el **Lema 4.3.5** todos los vértices de  $G$  tienen grado 4 y por el **Lema 1.1.3**  $|A_G| = \frac{4 \cdot 13}{2} = 26$ .  $\square$

**Lema 4.6.7.** Si  $G = (V_G, A_G)$  es un  $(3, 5; 12, 20)$  – grafo y  $V_i$  es el conjunto de los vértices de  $G$  que tienen grado  $i$ , entonces

$$|V_3 \Delta V_3| = 8, |V_3 \Delta V_4| = 8 \text{ y } |V_4 \Delta V_4| = 4.$$

*Demostración* [7]: Se denota por

$$q_{ij} \text{ al número } |V_i \Delta V_j|.$$

Del **Lema 4.3.5** y del **Lema 1.1.3** se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3|V_3| + 4|V_4| = 40 \\ |V_3| + |V_4| = 12 \end{cases}$$

cuya solución es  $|V_3| = 8$  y  $|V_4| = 4$ .

Luego, sea  $x$  un vértice de  $V_3$  y  $a_i$  el número de vértices de  $H_1(x)$  que tienen grado  $i$  en  $G$ , donde  $i = 3, 4$ . Inicialmente se determina  $a_4$ .

De acuerdo con el **Lema 4.6.3**,

$$\sum_{y \in H_1} gr(y) = 3a_3 + 4a_4 = |A_G| - |A_{H_2}|,$$

donde  $H_2$  es el subgrafo  $H_2(x)$ .

Ahora,  $H_2$  es un  $(3, 4; 8)$  – grafo y por lo tanto  $|A_{H_2}| \geq 10$  (ver **Teorema 4.6.4**). Así,  $3a_3 + 4a_4 \leq 10$ , por otro lado  $a_3 + a_4 = gr(x) = 3$  de modo que

$(3a_3 + 3a_4) + a_4 \leq 10$ , así  $a_4 \leq 10 - 9 = 1$  es decir  $a_4 \leq 1$ . Con este resultado se puede acotar a  $q_{34}$ :

$$q_{34} = a_4 |V_3| \leq 8. \quad (4.8)$$

Como son cuatro los vértices que tienen grado 4 y todo grafo con cuatro vértices y 5 aristas contiene por lo menos un triángulo, se tiene que  $q_{44} \leq 4$ , ya que  $\omega(G) < 3$ . Considerando que

$$|A_G| = q_{44} + q_{34} + q_{33} \quad (4.9)$$

y por el **Lema 1.1.3** se tiene que:

$$\sum_{v \in V_G} gr(v) = 2q_{44} + 2q_{34} + 2q_{33},$$

pero

$$\sum_{v \in V_G} gr(v) = \sum_{w \in V_4} gr(w) + \sum_{s \in V_3} gr(s).$$

Si  $a \in V_3 \Delta V_4$ , entonces esta arista se cuenta una vez en  $\sum_{w \in V_4} gr(w)$  y una en  $\sum_{s \in V_3} gr(s)$ . Por lo tanto

$$\sum_{w \in V_4} gr(w) = 2q_{44} + q_{34}$$

Luego

$$4|V_4| = 2q_{44} + q_{34},$$

así,

$$16 = 2q_{44} + q_{34}. \quad (4.10)$$

Como  $q_{44} \leq 4$ , de (4.10) se tiene que  $q_{34} \geq 8$  y de (4.8) se concluye que  $q_{34} = 8$ . Así de (4.10)  $q_{44} = 4$ . Como  $|A_G| = 20$ , de la igualdad (4.9) se tiene que  $q_{33} = 8$ .  $\square$

La cota superior para  $R(3, 6)$ , establecida en el **Teorema 4.3.6**, no es suficiente para mostrar que  $R(3, 6) \leq 18$ . De hecho, de acuerdo con aquel resultado se tiene que

$$R(3, 6) < R(2, 6) + R(3, 5) = 6 + 14 = 20$$

Es por lo tanto necesario mostrar que no existen  $(3, 6; 18)$  - grafos.

**Lema 4.6.8.** Sean  $x_1, x_2$  vértices de un grafo  $G = (V_G, A_G)$  el cual es un  $(3, n; p, q)$  - grafo y sean los subgrafos  $H_{1i} = H_1(x_i)$  y  $H_{2i} = H_2(x_i)$ , donde  $i = 1, 2$ . Si  $x_1$  y  $x_2$  son adyacentes, entonces

$$|A_{H_{2i}}| \leq (n-1) \left( \frac{p}{2} - gr(x_i) \right)$$

para algún  $i$ .

*Demostración* [7]: De acuerdo con los **Lemas 4.3.3** y **4.3.5**,  $gr(y) \leq n - 1$  para todo  $y \in V_G$ . Por otro lado, como  $G$  no contiene triángulos y  $x_1$  es adyacente a  $x_2$ , se tiene  $V_{H_{11}} \cap V_{H_{12}} = \emptyset$ . Como  $V_{H_{11}}$  y  $V_{H_{12}}$  son disyuntos, al considerar ahora el número (entero no negativo)  $n - 1 - gr(y)$  asociado a cada vértice  $y$  de  $G$  se tiene que:

$$\sum_{y \in V_{H_{11}}} (n - 1 - gr(y)) + \sum_{y \in V_{H_{12}}} (n - 1 - gr(y)) \leq \sum_{y \in V_G} (n - 1 - gr(y)).$$

Más aún, como

$$|V_{H_{11}}| = gr(x_1), \quad |V_{H_{12}}| = gr(x_2) \quad \text{y} \quad \sum_{y \in V_G} gr(y) = 2q,$$

entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{y \in V_{H_{11}}} (n - 1) - \sum_{y \in V_{H_{11}}} gr(y) + \sum_{y \in V_{H_{12}}} (n - 1) - \sum_{y \in V_{H_{12}}} gr(y) \\ & \leq \sum_{y \in V_G} (n - 1) - \sum_{y \in V_G} gr(y) \end{aligned}$$

es igual a:

$$\begin{aligned} & \left[ (n - 1) \cdot gr(x_1) - \sum_{y \in V_{H_{11}}} gr(y) \right] + \left[ (n - 1) \cdot gr(x_2) - \sum_{y \in V_{H_{12}}} gr(y) \right] \\ & \leq (n - 1)p - 2q. \end{aligned}$$

Por tanto, si

$$(n - 1) \cdot gr(x_1) - \sum_{y \in V_{H_{11}}} (gr(y)) > \frac{(n - 1)p - 2q}{2},$$

entonces

$$(n - 1) \cdot gr(x_2) - \sum_{y \in V_{H_{12}}} gr(y) < \frac{(n - 1)p - 2q}{2}.$$

Luego, si

$$q - \sum_{y \in V_{H_{11}}} (gr(y)) > \frac{1}{2}(n - 1)p - (n - 1) \cdot gr(x_1),$$

entonces

$$\begin{aligned} q - \sum_{y \in V_{H_{12}}} (gr(y)) & < \frac{1}{2}(n - 1)p - (n - 1) \cdot gr(x_2) \\ & = (n - 1) \left( \frac{p}{2} - gr(x_2) \right). \end{aligned}$$

Pero, por el **Lema 4.6.3**, los primeros miembros de las desigualdades anteriores son exactamente iguales a  $|A_{H_{21}}|$  y  $|A_{H_{22}}|$  respectivamente, luego si

$$|A_{H_{21}}| > (n-1) \left( \frac{1}{2}p - gr(x_1) \right),$$

entonces

$$|A_{H_{22}}| < (n-1) \left( \frac{1}{2}p - gr(x_2) \right).$$

como se quería demostrar.  $\square$

**Lema 4.6.9.** *Si  $G = (V_G, A_G)$  es un  $(3, 6; 18)$  – grafo, entonces todos los vértices de  $G$  tienen grado 5.*

*Demostración* [7]: Por el **Lema 4.3.5** se tiene que  $4 \leq gr(x) \leq 5$  para todo  $x \in V_G$ . Para efectos de contradicción, se supone que  $G$  tiene un vértice  $v$  de grado 4 y se consideran los subgrafos  $H_1(v)$  y  $H_2(v)$ . Por el **Lema 4.2.7**, el subgrafo  $H_2$  es un  $(3, 5; 13)$  – grafo y por lo tanto conforme al **Teorema 4.6.6**,  $|A_{H_2}| = 26$ .

Ahora se consideran los siguientes casos para los vértices de  $H_1$ :

**Caso 1:** *No existen vértices en  $H_1$  con grado en  $G$  igual a 4.* En este caso por el **Lema 4.6.3**:

$$|A_G| = |A_{H_2}| + \sum_{w \in V_{H_1}} gr(w) = |A_{H_2}| + 5 \cdot |V_{H_1}| = 26 + 5 \cdot 4 = 46$$

y por el **Lema 1.1.3**:

$$|A_G| = \frac{1}{2} \sum_{w \in V_G} gr(w) \leq \frac{1}{2} (4 + 5 \cdot 17) < 45.$$

Luego, el **Caso 1** no puede ocurrir.

**Caso2:** *Existe por lo menos un vértice en  $V_{H_1}$  cuyo grado en  $G$  es 4.* Conforme al **Lema 4.6.8**, se puede suponer sin pérdida de generalidad que

$$|A_{H_2}| \leq (6-1) \left( \frac{18}{2} - 4 \right) = 25.$$

Lo que contradice el hecho que  $|A_{H_2}| = 26$ , establecido anteriormente. Por lo tanto no puede existir un vértice en  $G$  con grado 4.  $\square$

**Corolario 4.6.10.** *Si  $G$  es un  $(3, 6; 18)$  – grafo, entonces para todo  $v \in V_G$ ,  $H_2(v)$  es un  $(3, 5; 12, 20)$  – grafo.*

*Demostración* [7]: Sea  $G$  un  $(3, 6; 18)$  – grafo. Por el **Lema 4.2.7**  $H_2$  es un  $(3, 5)$  – grafo y por el lema anterior todos los vértices de  $G$  tienen grado 5; luego

$$|V_{H_2}| = |V_G| - |V_{H_1}| - 1 = 18 - 5 - 1 = 12.$$

Por el **Lema 1.1.3**:

$$|A_G| = \frac{1}{2} \sum_{w \in V_G} gr(w) = \frac{1}{2} \sum_{w \in V_G} 5 = \frac{1}{2}(18)(5) = 45,$$

luego, por el **Lema 4.6.3** se tiene:

$$|A_{H_2}| = |A_G| - \sum_{w \in V_{H_1}} gr(w) = 45 - 5 \cdot 5 = 20.$$

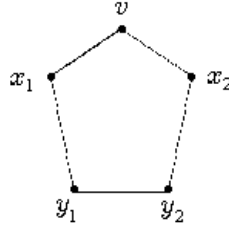
Por lo tanto,  $H_2(v)$  es un  $(3, 5; 12, 20)$  – *grafo*.  $\square$

Utilizando los resultados anteriores sobre la estructura de los  $(3, 5; 12, 20)$  – *grafos* y al calcular el número de pentágonos que debería contener un  $(3, 6; 18)$  – *grafo*, se muestra que **no existen grafos** que sean  $(3, 6; 18)$  – *grafos*.

**Teorema 4.6.11.**  $R(3, 6) \leq 18$ .

*Demostración* [7]: Sea  $G$  un  $(3, 6; 18)$  – *grafo* y así por el **Lema 4.6.9** todo vértice de  $G$  tiene grado 5. Ahora, si  $v \in V_G$ , entonces  $H_1(v)$  es un  $(2, 6; 5)$  – *grafo* y  $H_2(v)$  es un  $(3, 5; 12, 20)$  – *grafo*, por el **Lema 4.27** y el **Corolario 4.6.10** respectivamente.

Como  $H_1$  no tiene aristas, cada pentágono ( $C_5$ ) pasando por  $v$  debe tener una arista en  $H_2$ , dos aristas en  $V_{H_1} \Delta V_{H_2}$  y dos aristas en  $\{v\} \Delta V_{H_1}$ .



$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\in V_{H_1} \\ y_1, y_2 &\in V_{H_2} \end{aligned}$$

Por otro lado, para cada arista  $\{y_1, y_2\}$  de  $H_2$ , cada elección de un par  $\{x_1, y_1\}$ ,  $\{x_2, y_2\}$  de aristas de  $G$  con  $x_1$  y  $x_2$  en  $V_{H_1}$ , define un pentágono que pasa por  $v$  (se observa que  $G$  no contiene triángulos). Es claro que elecciones distintas de alguna de las tres aristas definen pentágonos distintos.

De acuerdo con el **Lema 4.3.5**, en  $H_2$  se tiene que  $3 \leq gr(y) \leq 4$  para todo  $y \in V_{H_2}$ . Sea  $Y_i$  el conjunto de los vértices de  $H_2$  que tienen grado  $i$  en  $H_2$ ,  $i = 3, 4$ .

Para contar a cuantos pentágonos pertenece una arista  $a = \{y_1, y_2\}$  que tiene sus extremos en  $H_2$ , se cuenta el número de aristas que salen de estos extremos



a los vértices de  $H_1$ . Como cada vértice de  $G$  tiene grado 5, el número de aristas que salen de  $y_1$  es:

$$5 - gr_{H_2}(y_1), \text{ donde } gr(y_1) \text{ se toma en } H_2$$

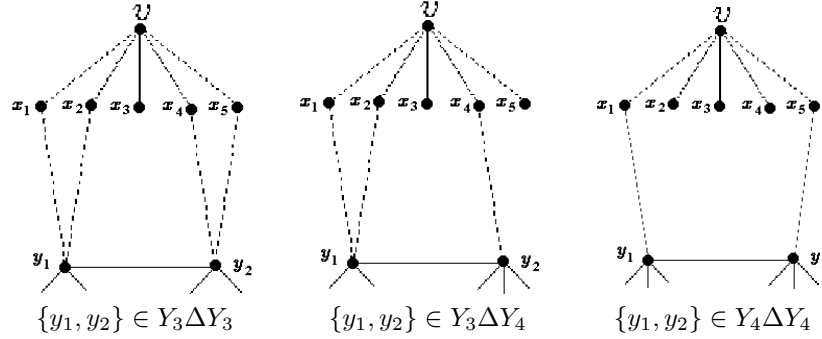
y el número de aristas que salen de  $y_2$  es:

$$5 - gr_{H_2}(y_2), \text{ donde } gr(y_2) \text{ se toma en } H_2.$$

Por lo tanto el número de pentágonos distintos a los cuales pertenece la arista  $a$  es:

$$(5 - gr_{H_2}(y_1))(5 - gr_{H_2}(y_2)).$$

Así, cada arista de  $Y_3\Delta Y_3$  pertenece a  $(5 - 3) \cdot (5 - 3)$  pentágonos; cada arista de  $Y_3\Delta Y_4$  pertenecen a  $(5 - 3) \cdot (5 - 4)$  pentágonos y cada arista de  $Y_4\Delta Y_4$  pertenecen a  $(5 - 4) \cdot (5 - 4)$  pentágonos.



Así, por el **Lema 4.6.7** el número de pentágonos que pasan por  $v$  es exactamente

$$4 \cdot |Y_3\Delta Y_3| + 2 \cdot |Y_3\Delta Y_4| + |Y_4\Delta Y_4| = 52,$$

Como cada pentágono pasa por 5 vértices, un sólo pentágono de  $G$  es contado 5 veces, por tanto  $G$  debe contener exactamente  $\frac{52 \cdot 18}{5}$  pentágonos, pero este número no es entero. Esto prueba que no existen  $(3, 6; 18)$  – grafos. Y por tanto  $R(3, 6) \leq 18$ .  $\square$

A continuación se presenta una construcción para obtener un  $(3, 6; 17)$  – grafo y así garantizar que  $R(3, 6) = 18$ . Sea  $E$  un grafo cíclico con vértices  $1, 2, \dots, 13$  y parámetros  $1, 5$ , por el **Teorema 4.4.9**  $E$  es un  $(3, 5)$  – grafo. Y sea  $F$  el grafo cíclico con vértices

$$a, b, 3, 4, 5, f, g, 8, 9, \dots, 13$$

y parámetros  $1, 5$  de acuerdo a la siguiente regla

$$1 \longrightarrow a, 2 \longrightarrow b, 3 \longrightarrow 3, \dots, 6 \longrightarrow f, 7 \longrightarrow g, 8 \longrightarrow 8, \dots, 13 \longrightarrow 13.$$

(Ver **Figura 4.23**).

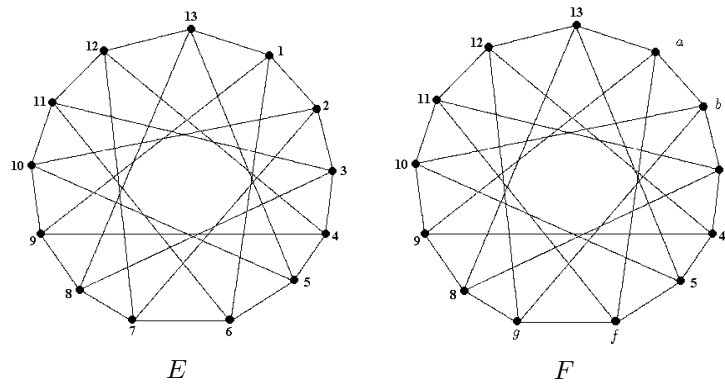


Figura 4.23.

De acuerdo con el **Teorema 4.4.9**,  $E$  y  $F$  son  $(3, 5)$  – grafos. Sea  $D$  el grafo de la siguiente figura.

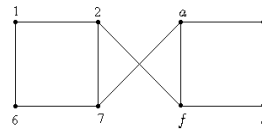


Figura 4.24.

Al considerar el grafo  $G = (V, A)$ , donde  $V = V_E \cup V_F \cup V_D$  y  $A = A_E \cup A_F \cup A_D$  (ver **Figura 4.25**) se obtiene el siguiente teorema.

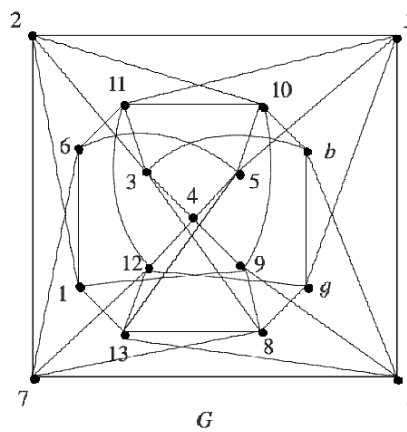


Figura 4.25.

**Teorema 4.6.12.** *El grafo  $G = (V, A)$ , donde  $V = V_E \cup V_F \cup V_D$  y  $A = A_E \cup A_F \cup A_D$  es un  $(3, 6; 17)$  – grafo.*

El grafo  $G$  de la figura anterior tiene 40 aristas e ilustra que el teorema es cierto. Así por la **Definición 4.3.1** y el teorema anterior se tiene que  $R(3, 6) \geq 18$ . Además por el **Teorema 4.6.11** se concluye que:

$$R(3, 6) = 18.$$

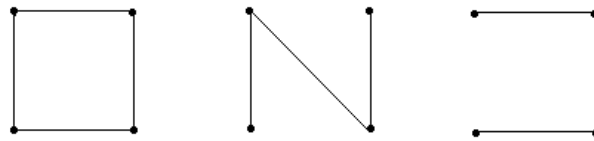
#### 4.7 Una cota superior de $R(3, 12)$

Para la cota superior  $R(3, 12) \leq 59$ , es necesario utilizar algunos conceptos y resultados referentes al número posible de aristas en un  $(m, n)$  – grafo con  $p$  vértices, los cuales se presentan a continuación. No se realiza la demostración de esta cota  $R(3, 12) \leq 59$ , pues es necesario métodos computacionales que no son el objetivo de este trabajo.

**Definición 4.7.1.** El número  $e(m, n, p)$  es el mínimo número de aristas posibles en un  $(m, n)$  – grafo con  $p$  vértices. Si no existen  $(m, n)$  – grafos con  $p$  vértices,  $e(m, n, p)$  se define como  $\infty$ .

Esta definición conduce a la siguiente relación con  $R(m, n)$ : para el valor más pequeño de  $p$  para el cual  $e(n, m, p) = \infty$ , se tiene que  $R(n, m) = p$ .

En particular como  $e(3, 3, 6) = \infty$ , entonces  $R(3, 3) = 6$ .



$(3, 3; 4, 4)$  – grafo       $(3, 3; 4, 3)$  – grafo       $(3, 3; 4, 2)$  – grafo

**Figura 4.26.** Posibles  $(3, 3, 4)$  – grafos

De la figura anterior se puede concluir que  $e(3, 3, 4) = 2$ .

A continuación se presentan valores triviales de  $e$  para pequeños valores de  $n$  y  $p$ .

- i) Para  $n > p$ ,  $e(m, n, p) = 0$ .
- ii) Si  $n = 1$ , entonces no existe un grafo de tal forma que  $\alpha(G) < 1$ , es decir  $e(m, n, p) = \infty$ .
- iii) Si  $n = 2$ , entonces no se puede tener un conjunto independiente de 2 elementos, luego todos los grafos deben ser completos si ellos existen. Si  $p \leq m - 1$  se tiene un grafo completo, el cual tiene  $\binom{p}{2}$  aristas, entonces  $e(m, n, p) = \binom{p}{2}$ . Si  $p > m - 1$  se tiene un grafo con  $p$  vértices sin cliques de orden  $m$ , lo cual es imposible, entonces  $e(m, n, p) = \infty$ .

iv) Similarmente para  $m = 2$ ; no se tienen aristas. Así, si  $p \leq n - 1$ , entonces que  $e(m, n, p) = 0$ . Si  $p \geq n$ , entonces  $e(m, n, p) = \infty$ .

**Teorema 4.7.2.**  $e(m, n, p) \leq e(m, n - l + 1, p - t) + e(m, l, t)$ .

*Demostración* [10]: Esta es similar a la demostración del **Teorema 4.3.7**. Si se examina la suma de un  $(m, n - l + 1; p - t)$  - grafo y un  $(m, l; t)$  - grafo se puede ver que el grafo suma debe ser un  $(m, n, p)$  - grafo con  $p$  vértices y por lo tanto

$$e(m, n, p) \leq e(m, n - l + 1, p - t) + e(m, l, t). \quad \square$$

**Lema 4.7.3.** Sea  $G$  es un grafo completo  $K_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor}$ . Si a  $G$  se le une un vértice  $v$ , de tal manera que no se formen cliques de orden 3, entonces el grafo bipartito completo  $K_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}$  tiene mayor número de aristas.

*Demostración:* Al unir el vértice  $v$  al grafo  $G$ , se observa que  $v$  no puede tener vecinos en ambas particiones del grafo bipartito completo  $K_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor}$ , ya que esto implica un triángulo. Así, para el nuevo grafo con el número máximo posible de aristas, debe haber una arista desde  $v$  a cada vértice en la partición más grande del grafo bipartito completo. Si  $p$  es par, entonces el grafo formado al adicionar el vértice  $v$  a la partición con el menor número de elementos, es decir  $\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$  vértices, tiene  $\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor + 1$  y  $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$  vértices respectivamente en sus particiones, obteniendo el grafo  $K_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$ . Si  $p$  es impar, se tiene que  $\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ , entonces el grafo formado al adicionar el vértice  $v$  a la partición con  $\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$  vértices, tiene  $\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor + 1$  y  $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$  vértices respectivamente en sus particiones, obteniendo el grafo  $K_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$ .  $\square$

Otra forma de demostración  $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ : El grafo que se forma al unir un vértice  $v$  al grafo  $K_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor}$  es un grafo bipartito con  $p$  vértices, por lo tanto con menor o igual número de aristas que el grafo completo  $K_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$ , debido a que el grafo completo  $K_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$  es un **grafo de Turán** (ver **Definición 2.11.3** y **Teorema 2.11.4**).

En efecto  $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , porque:

si  $p$  es par  $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor = \frac{p}{2}$ ,

si  $p$  es impar  $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor = \frac{p+1}{2}$ .  $\square$

**Teorema 4.7.4. (Turán-1941).** Existe un grafo  $G = (V, A)$  con  $|V| = p$  y  $|A| = s$  el cual no contiene un clique de orden  $k$  si y sólo si

$$0 \leq s \leq \binom{p}{2} - \frac{(q-1)p + (q+1)r}{2}$$

donde

$$p = q(k-1) + r, \quad 0 \leq r < k-1.$$

La igualdad

$$s = \binom{p}{2} - \frac{(q-1)p + (q+1)r}{2}$$

se obtiene si y sólo si

$$G = K_{q+1, \dots, q+1, q, \dots, q}$$

con  $r$  copias de  $q+1$  y  $k-1-r$  copias de  $q$ .

*Demostración* [10]: Aquí solamente se presenta una prueba para el caso en que  $k=3$ , ya que son de principal interés los grafos libres de triángulos. En este caso  $p = q(3-1) + r$ ,  $0 \leq r < 2$ . Luego si  $r=0$ , entonces  $p=2q$ , de ahí que  $q = \frac{p}{2}$ .

Así

$$\begin{aligned} 0 \leq s &\leq \binom{p}{2} - \frac{(\frac{p}{2}-1)p + (\frac{p}{2}+1)0}{2} \\ &= \frac{p(p-1)}{2} - \frac{(\frac{p}{2}-1)p}{2} \\ &= \frac{p^2-p}{2} - \frac{\frac{p^2}{2}-p}{2} \\ &= \frac{p^2}{4} = \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

si  $r=1$ , entonces  $p=2q+1$ , de ahí que  $q = \frac{p-1}{2}$ .

Así

$$\begin{aligned} 0 \leq s &\leq \binom{p}{2} - \frac{(\frac{p-1}{2}-1)p + (\frac{p-1}{2}+1)}{2} \\ &= \frac{p(p-1)}{2} - \frac{(\frac{p-1-2}{2})p + (\frac{p-1+2}{2})}{2} \\ &= \frac{p^2-1}{4} = \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

como  $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor = \frac{p}{2}$  si  $p$  es par y  $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor = \frac{p-1}{2}$  si  $p$  es impar, el teorema se reduce a  $s \leq \frac{p^2}{4}$  si  $p$  es par y  $s \leq \frac{p^2-1}{4}$  si  $p$  es impar, y la igualdad se mantiene si y sólo si  $G$  es el grafo completo bipartito  $K_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$ .

La prueba se hace por inducción sobre  $p$ . Para  $p=3$  se tiene  $s \leq 2$  y se puede ver que  $K_{1,2}$  es un grafo con 3 vértices, 2 aristas y sin triángulos. Para  $p=4$  se tiene que  $s \leq 4$  y se puede ver que  $K_{2,2}$  es el posible grafo más grande libre de triángulos con 4 vértices. Ahora, sea  $G$  un grafo con  $p$  vértices,  $s$  aristas y sin triángulos y se considera verdadero el teorema para  $|V| < p$ .

Por hipótesis de inducción se tiene que cada subgrafo inducido  $H$  de  $G$  con  $p-1$  vértices tiene a lo más  $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$  aristas. Primero, se asume que no hay subgrafos con el máximo número de aristas.

Se define la **densidad de aristas**  $d_G$  en un grafo  $G$  como el máximo número de aristas en  $G$  dividido por el número de aristas en el grafo completo con el mismo número de vértices, la cual puede ser vista como la probabilidad que una arista exista entre cualquier par de vértices. Esto nos dice que la densidad de aristas en  $H$  debe ser:

$$\begin{aligned} d_H &\leq \frac{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor - 1}{\binom{p-1}{2}} \\ &= \left( \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor - 1 \right) \left( \frac{2}{(p-1)(p-2)} \right). \end{aligned}$$

Si  $p$  es impar

$$\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor - 1 = \frac{(p-1)^2 - 4}{4}.$$

Si  $p$  es par

$$\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor - 1 = \frac{p^2 - 2p - 4}{4}.$$

Luego

$$\frac{p^2 - 2p - 4}{4} \leq \frac{(p-1)^2 - 4}{4},$$

de ahí que:

$$\begin{aligned} d_H &\leq \left( \frac{(p-1)^2 - 4}{4} \right) \left( \frac{2}{(p-1)(p-2)} \right) \\ &= \frac{p^2 - 2p - 3}{2(p-1)(p-2)}. \end{aligned}$$

$d_H$  es la probabilidad de que una arista exista entre cualquier par de vértices del grafo  $H$ , y  $d_G$  es la probabilidad de que una arista exista entre cualquier par de vértices del grafo  $G$ . Como  $V_G > V_H$ , así  $d_G \leq d_H$ , de lo cual

$$\frac{s}{\binom{p}{2}} \leq d_H \leq \frac{p^2 - 2p - 3}{2(p-1)(p-2)}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} s &\leq \binom{p}{2} \left[ \frac{p^2 - 2p - 3}{2(p-1)(p-2)} \right] \\ &= \left( \frac{p(p-1)}{2} \right) \left( \frac{p^2 - 2p - 3}{2(p-1)(p-2)} \right) \\ &= \frac{p(p^2 - 2p - 3)}{4(p-2)} \\ &< \frac{p(p^2 - 2p)}{4(p-2)} \\ &= \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

así

$$s \leq \frac{p^2}{4} = \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor, \quad (4.11)$$

Como

$$\frac{p^2}{4} \leq \frac{p^2}{4} - 1 < \frac{p^2 - 1}{4}$$

así

$$s < \frac{p^2 - 1}{4} = \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor. \quad (4.12)$$

Por (4.11) y (4.12)

$$s < \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$$

Para la segunda parte del teorema, se asume que hay un subgrafo con el máximo número de aristas. Por hipótesis de inducción esto es  $K_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor}$  y por el **Lema 4.7.3** al unirle el vértice  $v$  a la partición más grande, se tiene que el grafo así formado es  $K_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$  con  $p$  vértices.  $\square$

**Teorema 4.7.5.** *Sea  $G = (V_G, A_G)$  un grafo. Si  $G$  es un  $(3, n)$ -grafo con  $|V_G| = p$  y  $|A_G| = s$ , entonces*

$$ps \geq \sum_{i=0}^{n-1} \{e(3, n-1, p-i-1) + i^2\} v_i,$$

donde  $v_i$  es el número de vértices de grado  $i$ .

*Demostración* [10]: Al tener un  $(3, n)$ -grafo es posible escoger un vértice  $v$  y obtener los subgrafos  $H_1(v)$  y  $H_2(v)$  como en la **Definición 4.2.6**. El número total de aristas en  $G$  por el **Lema 4.6.3** es:

$$|A_G| = |A_{H_2}| + \sum_{x \in V_{H_1}} gr(x)$$

como  $V_{H_1} = N_G(v)$ , por la **Definición 1.1.6**

$$|A_G| = |A_{H_2}| + gr_2(v)$$

Ya que en  $H_1$  no existen triángulos entre  $v$  y sus vecinos, entonces

$$|V_{H_2}| = p - gr(v) - 1.$$

Como  $H_2$  es un  $(3, n-1)$ -grafo y  $e(3, n-1, p-gr(v)-1)$  es el número mínimo de aristas del grafo  $H_2$  se tiene que:

$$gr_2(v) + e(3, n-1, p-gr(v)-1) \leq s,$$

Al sumar esto sobre todos los vértices de  $G$ , se obtiene

$$\sum_{v \in V_G} [gr_2(v) + e(3, n - 1, p - gr(v) - 1)] \leq ps,$$

lo cual, usando el **Lema 1.1.7**, es equivalente a

$$\sum_{v \in V_G} [(gr(v))^2 + e(3, n - 1, p - gr(v) - 1)] \leq ps.$$

Ahora, si  $v_i$  es el número de vértices de grado  $i$ , entonces se puede sumar la desigualdad sobre los posibles grados para  $v$ , es decir  $gr(v) = i$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$  y se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \{i^2 + e(3, n - 1, p - i - 1)\}v_i \leq ps \quad \square$$

La demostración del siguiente teorema no se presenta en éste documento (ver [10]), sin embargo se prueban los resultados que se presentan a continuación, ya que son parte importante en el desarrollo de tal demostración.

**Teorema 4.7.6. (Radziszowski/Kreher 1988).** *Para  $k \geq 2$*

$$e(3, k + 1, p) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } p \leq k \\ p - k & , \text{ si } k < p \leq 2k \\ 3p - 5k & , \text{ si } 2k < p \leq \frac{5k}{2} \\ 5p - 10k & , \text{ si } \frac{5k}{2} < p < 3k \end{cases}$$

*Cuando  $p \geq \frac{5k}{2}$  se tiene que el grado mínimo en un  $(3, k + 1; p)$  - grafo es mayor o igual que 2.*

*Cuando  $p \geq 3k$ , se tiene que  $e(3, k + 1, p) \geq 5p - 10k$ , para todo  $k \geq 2$ .*

**Ejemplo:** El teorema anterior para  $k = 2$  dice:

$$e(3, 3, p) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } p \leq 2 \\ p - 2 & , \text{ si } 2 < p \leq 4 \\ 3p - 10 & , \text{ si } 4 < p \leq 5 \\ 5p - 20 & , \text{ si } 5 < p < 6 \end{cases}$$

*Cuando  $p \leq 5$  se tiene que el grado mínimo en un  $(3, 3; p)$  - grafo es mayor o igual que 2.*

*Cuando  $p \geq 6$ , se tiene que  $e(3, 3, p) \geq 10$ .*

**Verificación:**

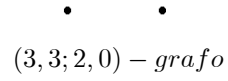
i) Si  $p = 1$ ,  $e(3, 3, 1) = 0$ .

•

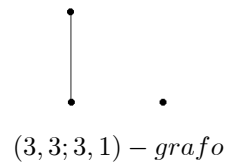
$(3, 3; 1, 0)$  - grafo



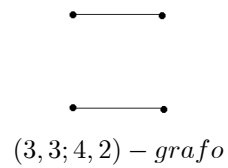
ii) Si  $p = 2$ ,  $e(3, 3, 2) = 0$ .



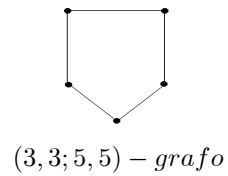
iii) Si  $p = 3$ ,  $e(3, 3, 3) = 1$ .



iv) Si  $p = 4$ ,  $e(3, 3, 4) = 2$ .

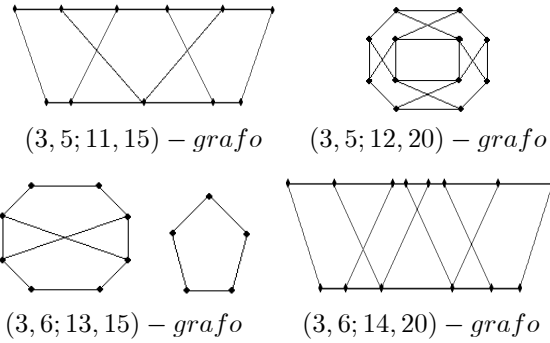
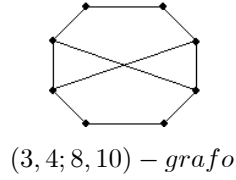


v) Si  $p = 5$ ,  $e(3, 3, 5) = 5$ .



vi) Si  $p = 6$ , entonces de acuerdo al teorema se tendría que  $e(3, 3, 5) \geq 10$ , como  $R(3, 3) = 6$ , así  $e(3, 3, 5) = \infty$ . Esto no contradice el teorema, porque este es cierto cuando se garantiza la existencia de los  $(3, k + 1; p) - \text{grafos}$ .

A continuación se presentan  $(3, k + 1; p, 5 - 10k) - \text{grafos}$  para  $k = 3, 4$  y  $5$



**Figura 4.27.**

**Lema 4.7.7.** Sea  $C_i$  un ciclo donde  $i$  es par,  $i \geq 4$ . Si  $H$  es un grafo formado con  $\frac{i}{2}$  aristas aisladas, entonces  $\alpha(H) = \alpha(C_i)$ .

*Demostración:* Es fácil observar que  $\alpha(C_i) = \frac{i}{2}$ . Como  $H$  está formado por aristas aisladas, por tanto cada una de ellas es una componente conexa de  $H$  (grafos completos  $G_j$  de orden 2, donde  $1 \leq j \leq \frac{i}{2}$ ). Luego

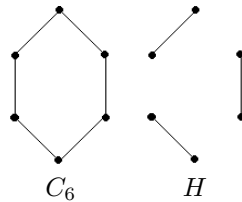
$$H = G_1 + G_2 + \dots + G_{\frac{i}{2}}$$

y

$$\alpha(H) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2) + \dots + \alpha\left(G_{\frac{i}{2}}\right)$$

ya que el número de independencia de cada una de estas componentes conexas es 1, se tiene que  $\alpha(H) = \frac{i}{2}$ .  $\square$

El grafo  $H$  se ilustra en la siguiente figura.



**Figura 4.28.**  $\alpha(C_6) = \alpha(H)$

**Lema 4.7.8.** Sea  $C_i$  un ciclo donde  $i$  es impar,  $i > 4$ . Si  $H$  es un grafo formado por componentes conexas: un pentágono y  $\frac{i-5}{2}$  aristas aisladas, entonces  $\alpha(H) = \alpha(C_i)$ .

*Demostración:* Es fácil observar que  $\alpha(C_i) = \frac{i-1}{2}$ . Como  $H$  está formado por un pentágono y  $\frac{i-5}{2}$  aristas aisladas (grafos completos  $G_j$  de orden 2, donde  $1 \leq j \leq \frac{i-5}{2}$ ). Luego

$$H = C_5 + G_1 + G_2 + \dots + G_{\frac{i-5}{2}}$$

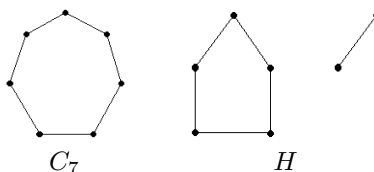
y

$$\alpha(H) = 2 + \alpha(G_1) + \alpha(G_2) + \dots + \alpha\left(G_{\frac{i-5}{2}}\right)$$

ya que el número de independencia de un pentágono es 2 y el número de independencia de cada  $G_i$  es 1, se tiene que

$$\alpha(H) = 2 + \frac{i-5}{2} = \frac{i-1}{2}. \quad \square$$

El grafo  $H$  se ilustra en la siguiente figura.



**Figura 4.29.**  $\alpha(C_7) = \alpha(H) = 3$

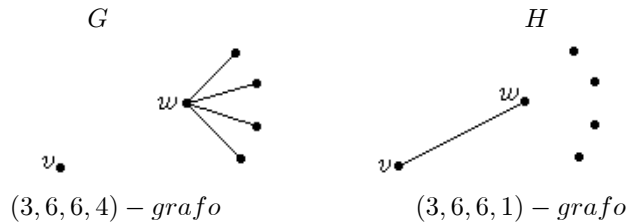
**Teorema 4.7.9.** Si  $G$  es un  $(3, k+1, p)$  - grafo con  $e(3, k+1, p)$  aristas y  $C$  es una componente conexas que es un ciclo, entonces  $C$  es un pentágono.

*Demostración* [10]: Sea  $C = C_i$  un ciclo componente conexas en  $G$  de longitud  $i$ , donde  $i \geq 4$ , ya que  $\omega(G) < 3$ . Para efectos de contradicción se supone  $i \neq 5$ , por los **Lemas 4.7.6** y **4.7.7**  $C_i$  puede ser reemplazado por un grafo  $H$  que tiene menos aristas que  $G$  y el mismo número de independencia, lo cual es una contradicción, pues  $G$  es minimal respecto a aristas. Por tanto  $C_i$  es un pentágono ya que al quitar al menos una arista del pentágono el grafo que obtenido tiene mayor número de independencia y por ser una componente conexas de  $G$ , el número de independencia de  $G$  crece.  $\square$

**Lema 4.7.10.** Si  $G$  es un  $(3, k+1, p)$  - grafo con  $e(3, k+1, p)$  aristas y  $G$  tiene un vértice aislado, entonces todos los vértices en  $G$  tienen grado menor que 2.

*Demostración* [10]: Si  $v$  es el vértice aislado de  $G$  y  $w$  es un vértice de grado  $\geq 2$ , se pueden eliminar todas las aristas que inciden sobre  $w$  y hacer adyacente  $v$  con  $w$ . El grafo  $H$  así formado tiene  $\omega(H) < 3$ , porque no se originan triángulos al formar  $H$  y  $\alpha(G) < k+1$ , ya que  $\alpha(G) = \alpha(H)$ , porque  $A = N_G(w) \cup \{v\}$

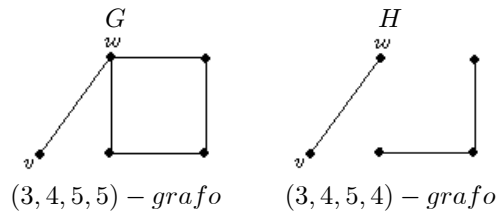
forma el único conjunto independiente en  $G$  que puede hacer distinto el número de independencia de  $H$  al de  $G$  y al considerar los elementos de  $N_G(w)$  en  $H$  se tiene que  $B = N_G(w) \cup \{w\}$  es un conjunto independiente en  $H$ , tal que  $|A| = |B|$ ; así  $\alpha(G) < k + 1$ . Por lo tanto  $H$  es un  $(3, k + 1, p)$  – grafo con menos aristas que  $G$ , lo cual es contradictorio, ya que  $G$  es minimal respecto a aristas. En consecuencia todos los vértices en  $G$  tiene grado menor que 2. Ver **Figura 4.30**.  $\square$



**Figura 4.30.**

**Lema 4.7.11.** Si  $G$  es un  $(3, k + 1, p)$  – grafo con  $e(3, k + 1, p)$  aristas, entonces todos los vértices de grado 1 son extremos finales de aristas aisladas.

*Demostración* [10]: Si  $w$  es un vértice de grado  $\geq 2$  el cual esta conectado a un vértice  $v$  de grado 1, entonces se pueden eliminar todas las otras aristas que inciden sobre  $w$ . El grafo  $H$  así formado tiene  $\omega(H) < 3$ , porque no se originan triángulos al formar  $H$  y  $\alpha(G) < k + 1$ , ya que  $\alpha(G) = \alpha(H)$ , porque  $A = N_G(w) \cup \{v\}$  forma el único conjunto independiente en  $G$  que puede hacer distinto el número de independencia de  $H$  al de  $G$  y al considerar los elementos de  $N_G(w)$  en  $H$  se tiene que  $B = N_G(w) \cup \{v\}$  es un conjunto independiente en  $H$ , tal que  $|A| = |B|$ ; así  $\alpha(G) < k + 1$ . Por lo tanto  $H$  es un  $(3, k + 1, p)$  – grafo con menos aristas que  $G$ , lo cual es contradictorio, ya que  $G$  es minimal respecto a aristas. En consecuencia todos los vértices de grado 1 en  $G$  son extremos finales de aristas aisladas. Ver **Figura 4.31**.  $\square$



**Figura 4.31.**

Los resultados de esta sección fueron utilizados para demostrar que: Si  $e(3, 12; 59) \neq \infty$ , entonces  $322 \leq e(3, 12; 59) \leq 324$  (Ver [10]). Debido a que este es un intervalo relativamente pequeño, fué factible investigar todos los grafos posibles. De esta manera se inició un proceso que terminó en la demostración de que  $R(3, 12) \leq 59$ .

## APÉNDICE

### A. El polinomio cromático

El polinomio cromático de un grafo  $G$  fué introducido en un intento por resolver el problema de los cuatro colores (ver apéndice B). Este polinomio es una función  $\chi(G; k)$  que a cada grafo  $G$  y a cada entero positivo  $k$  le asigna el número de  $k$ -coloraciones propias de  $G$ .

Hallar el número cromático de un grafo  $G$  es parte del problema general de encontrar los ceros de su polinomio cromático, porque el número cromático  $\chi(G)$  es el número natural más pequeño para el cual  $\chi(G; k) \neq 0$ .

**Definición A.1.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo con  $n$  vértices y sea  $k$  un número natural. El **polinomio cromático** de  $G$  es la función definida por:

$$\chi(G; k) = \sum_{i=1}^n m_i(G) k_{(i)}$$

donde  $m_i(G)$  denota el número de particiones cromáticas distintas de  $G$  en  $i$  clases cromáticas y  $k_{(i)}$  es el número natural

$$k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1).$$

**Proposición A.2.** Si  $G = (V, A)$  es un grafo y  $k$  es un número natural, entonces  $\chi(G; k)$  es el número de coloraciones propias de  $G$  con  $k$  colores.

*Demostración* [11]: Cualquier  $i$ -coloración propia de  $G$  con exactamente  $i$  colores induce una partición cromática de  $G$  que tiene  $i$  clases cromáticas y recíprocamente, a cada partición cromática de  $G$ , con  $k$  clases, se le puede asignar  $k$  colores de

$$k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1) \text{ formas distintas.}$$

Así, el número de  $k$ -coloraciones propias de  $G$  es:

$$\chi(G; k) = \sum_{i=1}^{|V_G|} m_i(G) k_{(i)}. \quad \square$$

**Observaciones:** Sea  $G$  un grafo con  $|V_G| = n$ .

- i) Siempre  $m_n(G) = 1$  y  $m_1(G) = 0$  a menos que  $G = \overline{K_n}$  en cuyo caso  $m_1(\overline{K_n}) = 1$ .

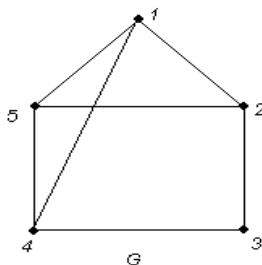
ii) El polinomio cromático del grafo completo  $K_n$  es

$$\chi(K_n; k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!},$$

ya que el grafo completo en  $K_n$  todos los vértices son adyacentes entre sí, entonces el número de particiones cromáticas es  $m_i(K_n) = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  y  $m_n(K_n) = 1$ . También se puede justificar este polinomio cromático así: dado cualquier vértice en el grafo completo  $K_n$ , existen  $k$  formas distintas de colorearlo; luego, para un segundo vértice se tienen  $(k-1)$  formas distintas de colorearlo, para el siguiente  $(k-2)$  formas distintas de colorearlo y así sucesivamente, el último vértice del grafo completo  $K_n$  se puede colorear de  $(k-n+1)$  formas distintas. Por lo tanto el grafo completo  $K_n$  se puede colorear con  $k$  colores de  $k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$  formas distintas.

iii) El polinomio cromático del grafo complemento de  $K_n$  es  $\chi(\overline{K_n}; k) = k^n$ , ya que ningún par de vértices del grafo  $\overline{K_n}$  está relacionado mediante una arista, cada vértice puede ser coloreado de  $k$  formas distintas. De ahí que existen  $k^n$  formas distintas de colorear al grafo  $\overline{K_n}$  con  $k$  colores.

A continuación se calcula el polinomio cromático del grafo  $G$  correspondiente a la siguiente figura.



En este grafo

$m_i(G)$	Particiones con $i$ clases
$m_1(G) = 0$	
$m_2(G) = 0$	
$m_3(G) = 2$	$\{\{1\}, \{3\}\}, \{\{2\}, \{4\}\}, \{\{5\}\}$ $\{\{3\}, \{5\}\}, \{\{2\}, \{4\}\}, \{\{1\}\}$
$m_4(G) = 3$	$\{\{2\}, \{4\}\}, \{\{1\}\}, \{\{3\}\}, \{\{5\}\}$ $\{\{3\}, \{5\}\}, \{\{2\}\}, \{\{4\}\}, \{\{1\}\}$ $\{\{1\}, \{3\}\}, \{\{2\}\}, \{\{4\}\}, \{\{5\}\}$
$m_5(G) = 1$	$\{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{4\}\}, \{\{5\}\}$

Así, el polinomio cromático del grafo  $G$  es:

$$\begin{aligned}\chi(G; k) &= \sum_{i=1}^5 m_i(G)k_{(i)} \\ &= 2k(k-1)(k-2) + 3k(k-1)(k-2)(k-3) \\ &\quad + k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) \\ &= k^5 - 7k^4 + 19k^3 - 23k^2 + 10k.\end{aligned}$$

$\chi(G) = 3$ , ya que 3 es el menor número natural  $k$  más pequeño para el cual  $\chi(G; k) \neq 0$ .

Si  $k = 3$ , se tiene que el número de coloraciones distintas que se pueden hacer con tres colores es 12.

**Proposición A.3.** Si  $G = (V, A)$  es un grafo con  $n$  vértices,  $q$  aristas y  $z$  componentes conexas  $G_1, G_2, \dots, G_z$ , entonces

1.  $\chi(G; k)$  tiene grado  $n$  y el coeficiente de  $k^n$  en  $\chi(G; k)$  es 1.
2. El término constante en  $\chi(G; k)$  es 0.
3.  $\chi(G; k) = \prod_{i=1}^z \chi(G_i; k)$ .
4. Los coeficientes de  $k, k^2, \dots, k^{z-1}$  en  $\chi(G; k)$  son todos 0.

*Demostración* [11]:

1. Como  $n$  es el número de vértices de  $G$ , entonces  $m_n(G) = 1$ ; es decir, el número de particiones cromáticas de  $G$  en  $n$  clases cromáticas es 1 y dado que:

$$\begin{aligned}\chi(G; k) &= \sum_{i=1}^n m_i(G)k_{(i)} \\ &= k_{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} m_i(G)k_{(i)} \\ &= k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1) + \sum_{i=1}^{n-1} m_i(G)k_{(i)},\end{aligned}$$

entonces se puede afirmar que  $\chi(G; k)$  tiene grado  $n$  y que el coeficiente de  $k^n$  en  $\chi(G; k)$  es 1.

2. Por definición de polinomio cromático de  $G$ :

$$\chi(G; k) = \sum_{i=1}^n m_i(G) k_{(i)}, \text{ donde } k_{(i)} = k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1),$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , de ahí que  $\chi(G) = 0$ , si  $k = 0$ . Por lo tanto, el término constante en  $\chi(G; k)$  es 0.

3. Se procede por inducción sobre el número de componentes conexas de  $G$ . Si  $G$  tiene una sola componente conexa, entonces por la **parte 2** de esta proposición el resultado se cumple. Se supone que el enunciado es cierto cuando el grafo tiene  $z-1$  componentes conexas y se demuestra que el enunciado se cumple para un grafo  $G$  que tiene  $z$  componentes conexas, a saber:  $G_1, G_2, \dots, G_z$ . Tomando  $H = G_1 + G_2 + \dots + G_{z-1}$ , por la **Proposición A.2**, para cualquier número natural  $k$ ,  $\chi(G; k)$ ,  $\chi(H; k)$  y  $\chi(G_z; k)$  corresponden al número de  $k$ -coloraciones de  $G$ ,  $H$  y  $G_z$  respectivamente. Como  $H$  y  $G_z$  no tienen vértices en común y  $G$  es la suma de  $H$  con  $G_z$ , entonces es posible colorear los vértices de  $H$  y  $G_z$  independientemente. Por tanto

$$\chi(G; k) = \chi(H; k) \cdot \chi(G_z; k). \quad (\text{A.1})$$

Por hipótesis de inducción

$$\chi(H; k) = \prod_{i=1}^{z-1} \chi(G_i; k), \quad (\text{A.2})$$

luego al sustituir (A.2) y (A.1) se tiene:

$$\chi(G; k) = \prod_{i=1}^z \chi(G_i; k).$$

4. Se procede por inducción sobre el número de componentes conexas de  $G$ . Si  $G$  tiene una componente conexa, entonces por la **parte 2** de esta proposición el resultado se cumple. Se supone que el resultado es cierto para todos los grafos con menos de  $z-1$  componentes conexas y se demuestra que el enunciado se cumple para un grafo  $G$  que tiene  $z$  componentes conexas.

Sea  $H = G_1 + G_2 + \dots + G_{z-1}$ , donde  $|V_H| = r$ , luego por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} \chi(H; k) &= k^r + a_{r-1}k^{r-1} + \dots + a_z k^z + a_{z-1}k^{z-1}, \\ a_i &\in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad z-1 \leq i \leq r-1 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

y si  $|V_{G_z}| = s$ , entonces

$$\begin{aligned} \chi(G_z; k) &= k^s + b_{s-1}k^{s-1} + \dots + b_2 k^2 + b_1 k^1, \\ b_i &\in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad 1 \leq i \leq s-1 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$



Por la **parte 3** de ésta proposición se obtiene,

$$\chi(G; k) = \chi(H; k) \cdot \chi(G_z; k)$$

Al sustituir en esta ecuación los polinomios de **(A, 3)** y **(A, 4)**, se obtiene:

$$\chi(G; k) = k^n + c_{n-1}k^{n-1} + \dots + c_{z-1}k^{z-1} + c_{z-2}k^{z-2} + \dots + c_2k^2 + c_1k^1$$

donde

$$c_{z-k} = \sum_{i=0}^{z-1} a_i b_{z-k-i} = 0,$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, z - 1$ .

Por lo tanto, todos los coeficientes de  $k, k^2, \dots, k^{z-1}$  son iguales a 0. Así,

$$\chi(G; k) = k^n + c_{n-1}k^{n-1} + \dots + c_z k^z. \quad \square$$

El cálculo del polinomio cromático de un grafo en la forma anterior es muy lento porque es necesario revisar demasiadas particiones. Una forma recursiva de calcular el polinomio cromático es la siguiente.

Sean  $G = (V, A)$  un grafo y  $a = \{i, j\} \in A$ . Se denota  $G^{(a)} = G - a$ , al grafo  $G^{(a)} = (V, A - \{a\})$ . Ahora, si  $N_{G^{(a)}}(i) \cap N_{G^{(a)}}(j) = \emptyset$ , entonces en el grafo  $G^{(a)}$  se identifican los extremos de  $a$ , es decir, se representan los vértices  $i, j$  en uno solo  $i = j$ , así se obtiene de  $G^{(a)}$  otro grafo que se denota por  $G_{(a)}$ , el cual tiene un vértice y una arista menos que  $G$ .

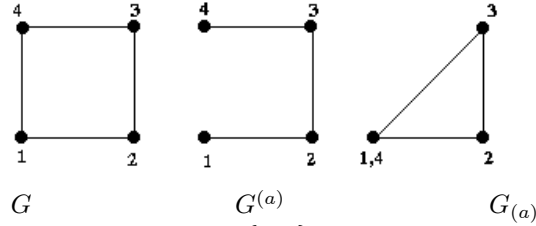
**Teorema A.4. (Recurrencia cromática).** *Sea  $G = (V, A)$  un grafo. Si se consideran los grafos  $G_{(a)}$  y  $G^{(a)}$  donde  $a = \{i, j\} \in A$ , entonces*

$$\chi(G; k) = \chi(G^{(a)}; k) - \chi(G_{(a)}; k).$$

*Demostración* [5]: Se considera el conjunto de las  $k$ -coloraciones propias de  $G$ . Si  $\mathcal{C}$  es una  $k$ -coloración propia de  $G^{(a)}$ , entonces  $\mathcal{C}(i) = \mathcal{C}(j)$  ó  $\mathcal{C}(i) \neq \mathcal{C}(j)$ ; luego se puede dividir el conjunto de  $k$ -coloraciones propias de  $G^{(a)}$  en dos conjuntos: aquellas  $k$ -coloraciones  $\mathcal{C}$  para las cuales  $\mathcal{C}(i) = \mathcal{C}(j)$  y aquellas  $k$ -coloraciones  $\mathcal{C}$  para las cuales  $\mathcal{C}(i) \neq \mathcal{C}(j)$ . El primer conjunto esta en correspondencia uno a uno con el conjunto de las  $k$ -coloraciones propias de  $G_{(a)}$  y el segundo está en correspondencia uno a uno con el conjunto de las  $k$ -coloraciones propias de  $G$ . Por lo tanto

$$\chi(G; k) = \chi(G^{(a)}; k) - \chi(G_{(a)}; k). \quad \square$$

La siguiente figura ilustra el teorema anterior.



$$\chi(G; k) = (k-1)^4 + (k-1) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2)$$

Figura A.1.

**Teorema A.5 (Whitney, 1933).** Si  $G = (V, A)$  es un grafo, el polinomio cromático  $\chi(G; k)$  tiene grado  $|V|$  y coeficientes enteros que alternan de signo, entonces el polinomio es mónico (el coeficiente de  $k^{|V|}$  es 1) y el segundo coeficiente es  $-|A|$ .

*Demostración* [5]: La demostración que el polinomio es mónico y tiene grado  $|V|$  se hizo en la **Proposición A.3-1**. Por inducción en  $|A| = t$  se demuestra que el segundo coeficiente del polinomio cromático es  $-t$ .

Sea  $G = (V, \emptyset)$  con  $n$  vértices, entonces

$$G = \overline{K_n} \quad \text{y} \quad \chi(\overline{K_n}; k) = k^n.$$

En consecuencia, el coeficiente de  $k^{n-1}$  en  $\chi(\overline{K_n}; k)$  es 0.

Supongase que el resultado se cumple para grafos con  $t-1$  aristas y que  $G$  es un grafo con  $t$  aristas. Sea  $a = \{i, j\} \in A$ , por el teorema anterior

$$\chi(G; k) = \chi(G^{(a)}; k) - \chi(G_{(a)}; k),$$

como  $G^{(a)}$  es el grafo que se obtiene de  $G$  al quitar la arista  $a$ , entonces  $G^{(a)}$  tiene  $t-1$  aristas; luego por hipótesis de inducción el coeficiente de  $k^{n-1}$  en  $\chi(G^{(a)}; k)$  es  $-(t-1)$ . Ahora, el grafo  $G_{(a)}$  tiene un vértice y una arista menos que  $G$ , de la **Proposición A.3-1** el coeficiente de  $k^{n-1}$  en  $\chi(G_{(a)}; k)$  es 1.

Es decir que los coeficientes de  $k^{n-1}$  en  $\chi(G^{(a)}; k)$  y en  $\chi(G_{(a)}; k)$  son  $-(t-1)$  y 1 respectivamente; además,

$$\chi(G; k) = \chi(G^{(a)}; k) - \chi(G_{(a)}; k).$$

De donde se concluye que el coeficiente de  $k^{n-1}$  en  $\chi(G; k)$  es  $t - |A|$ .  $\square$

**Proposición A.6.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo. Si  $G$  es conexo con  $|V| = n$  y  $|A| = n-1$ , entonces  $G$  es un árbol.

*Demostración* [11]: Supongase que  $G$  es un grafo conexo que no es un árbol, es decir  $G$  tiene al menos un ciclo  $C_m$ , con  $m < n$  vértices y por lo tanto  $m$  aristas. Como  $G$  tiene  $n$  vértices, entonces hay  $n-m$  vértices que no pertenecen a  $C_m$ , los cuales deben estar al menos formando una trayectoria  $T$  con  $n-m-1$

aristas. Así, se completan las  $n - 1$  aristas de  $G$ , pero esto implica que  $G$  es no conexo; lo cual es una contradicción, por lo tanto  $G$  es un árbol.  $\square$

**Proposición A.7.** *Sea  $G = (V, A)$  un grafo con  $|V| = n$ .  $G$  es un árbol, si y sólo si*

$$\chi(G; k) = k(k - 1)^{n-1}.$$

*Demostración* [11]:  $(\Rightarrow)$  Si  $G$  es un árbol y  $n = 2$ , entonces  $G = K_2$  de donde se tiene que  $\chi(G; k) = k(k - 1)$ .

Se supone que el resultado es cierto para todos los árboles con  $n - 1$  vértices y sea  $G$  es un árbol con  $n$  vértices. Como  $G$  es un árbol, entonces  $G$  tiene algún vértice  $i$  de grado 1, porque de lo contrario  $G$  tendría ciclos y no sería un árbol con  $n$  vértices. Sea  $a = \{i, j\}$  la arista de  $G$  con extremos  $i$  y  $j$ . Luego  $G^{(a)}$  tiene 2 componentes conexas; a saber, un vértice aislado y un árbol con  $n - 1$  vértices que corresponden al grafo  $G_{(a)}$ .

Al aplicar el **Teorema A.4** al grafo  $G$ , se tiene:

$$\chi(G; k) = \chi(G^{(a)}; k) - \chi(G_{(a)}; k),$$

ya que el vértice  $i$  y el árbol con  $n - 1$  vértices son componentes conexas de  $G^{(a)}$  y  $\chi(K_1; k) = k$ , por **Proposición A.3-3** se tiene:

$$\begin{aligned} \chi(G; k) &= k\chi(G_{(a)}; k) - \chi(G_{(a)}; k) \\ &= \chi(G_{(a)}; k) \cdot (k - 1) \\ &= k(k - 1)^{n-2} \cdot (k - 1) \\ &= k(k - 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\chi(G; k) = k(k - 1)^{n-1}$$

$(\Leftarrow)$  Supongase que  $G = (V, A)$  es un grafo con  $n$  vértices y que

$$\chi(G; k) = k(k - 1)^{n-1}.$$

Al expandir el polinomio

$$\begin{aligned} k(k - 1)^{n-1} &= k \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} k^{n-1-i} (-1)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} k^{n-i} (-1)^i, \end{aligned}$$

se encuentra que los coeficientes correspondientes a  $k^{n-1}$  y a  $k$  son  $-(n - 1)$  y 1 respectivamente; además, por el **Proposición A.3-4** el menor exponente en  $\chi(G; k)$  con coeficiente distinto de cero es igual al número de componentes conexas del grafo  $G$ ; como el menor exponente en  $\chi(G; k)$  es 1, se sigue que  $G$  es un grafo conexo. De otro lado, por el **Teorema A.5** aplicado a  $G$  se sigue

que el coeficiente de  $k^{n-1}$  en  $\chi(G; k)$  es igual a  $-|A|$ . Por tanto  $G$  tiene  $n - 1$  aristas.

Dado que un grafo conexo con  $n$  vértices es un árbol si y sólo si el tiene  $n - 1$  aristas (ver **Proposición A.6**), entonces se puede concluir que  $G$  es un árbol.  $\square$

**Proposición A.8.** *Si  $C_n$  es un ciclo con  $n \geq 3$  vértices, entonces*

$$\chi(C_n; k) = (k - 1)^n + (-1)^n(k - 1).$$

*Demostración [11]:* Si  $n = 3$ , entonces  $C_3 = K_3$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \chi(C_3; k) &= k(k - 1)(k - 2) \\ &= (k - 1)^3 + (-1)^3(k - 1). \end{aligned}$$

Ahora, se supone que el resultado es cierto para  $C_{n-1}$  y se prueba que se cumple para  $C_n$ . Sea  $a$  una arista de  $C_n$ , luego  $C_n^{(a)}$  es una trayectoria y  $C_{n(a)}$  es igual al ciclo  $C_{n-1}$ . Dado que una trayectoria en un grafo es un árbol, aplicando la **Proposición A.4** se tiene:

$$\begin{aligned} \chi(C_n; k) &= \chi(C_n^{(a)}; k) - \chi(C_{n-1}; k) \\ &= k(k - 1)^{n-1} - \chi(C_{n-1}; k), \text{ por } \mathbf{Proposición A.7} \\ &= k(k - 1)^{n-1} - [(k - 1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k - 1)^{n-1}] \\ &= (k - 1)^{n-1}(k - 1) - (-1)^{n-1}(k - 1) \\ &= (k - 1)^n + (-1)^n(k - 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\chi(C_n; k) = (k - 1)^n + (-1)^n(k - 1). \quad \square$$

## B. Teorema de los cuatro colores

El teorema de los cuatro colores está estrechamente relacionado con los **grafos planares**, es decir grafos para los cuales se puede obtener en el plano una representación de tal forma que ningún par de aristas se corten geométricamente.

En 1852 Francis Guthrie escribió a su hermano Frederick (discípulo del matemático Augustus de Morgan) una carta donde le hacía notar que todo mapa trazado sobre una hoja de papel podía colorearse usando cuatro colores solamente, de modo tal que los países con frontera común tuvieran diferente color. Francis preguntaba si sería posible demostrar matemáticamente éste hecho. Pasaron 124 años para que esta conjetura fuera demostrada. Los matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken probaron la veracidad de esta conjetura por medio de computadores en junio de 1976.

La demostración de Appel y Haken se basa en argumentos que surgieron de intentos por demostrar éste teorema, en especial el trabajo de Alfred Bray Kempe y los hallazgos de George D. Birkhoff y Heinrich Heesch. Estos argumentos se sistematizaron en un programa computarizado utilizando más de 1200 horas de computador, para verificar un conjunto inevitable de 1500 configuraciones reducibles necesario para la demostración del teorema.

A continuación se retoman y explican algunos aspectos fundamentales como definiciones, resultados y construcciones que intervinieron en la demostración de Appel y Haken.

**Definición B.1.** Una **curva de Jordan** en el plano es una curva continua que no se corta a sí misma y se dice **cerrada** si sus puntos extremos coinciden. La colección infinita de puntos del plano limitada por una curva de Jordan cerrada se llama **región**.

**Definición B.2.** Un **mapa** es una colección de regiones disjuntas donde cada par de regiones pueden compartir un punto o una curva de Jordan en común, llamada **frontera** y a estas regiones se les llama **regiones adyacentes**. Si la frontera no es una curva de Jordan cerrada, los extremos se llaman **vértices**.

Las tres figuras siguientes son mapas:

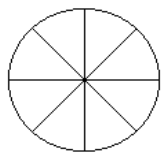


Figura B.1.

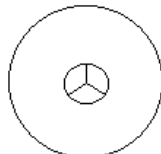


Figura B.2.

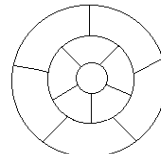


Figura B.3.

Las siguientes figuras no son mapas, porque la frontera debe separar regiones distintas y no se justifica la línea fronteriza dentro de la misma región.

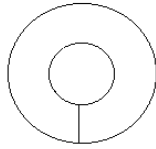


Figura B.4.

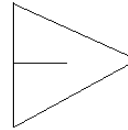


Figura B.5.

**Definición B.3.** La **región infinita circundante de un mapa** es la colección infinita de puntos externos a todas las regiones que conforman el mapa.

**Definición B.4.** Se dice que se ha **coloreado un mapa**  $M$ , si a cada región (incluyendo la región infinita que la circunda) se le ha asignado un color de tal forma que cada par de regiones adyacentes tengan colores diferentes.

**Observación:** Para que el teorema de los cuatro colores tenga sentido, los mapas deben estar formados por regiones en contacto, a estas regiones se les llaman **países**. Los países vecinos deben ser adyacentes a lo largo de una línea o lado común, ya que, si se consideraran como vecinos países que tuvieran solamente un punto en contacto, entonces el mapa de la **Figura B.1** necesitaría colores distintos para cada uno de sus 8 países. Debe entenderse que cada país es una sola región conexa, pues de lo contrario el mapa de la **Figura B.6**, donde el país  $E$  consta de 2 piezas separadas, exigiría 5 colores.

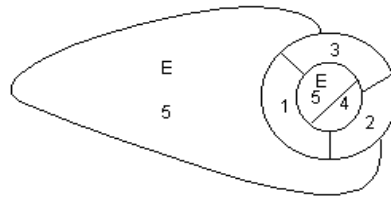


Figura B.6.

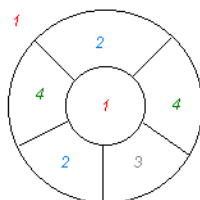
Surge, entonces una pregunta muy interesante que fué inicialmente formulada por Francis: ¿cuántos colores son suficientes para colorear cualquier mapa? El siguiente teorema ofrece la respuesta a esta pregunta.

**Teorema B.5. (Teorema de los cuatro colores).** *Cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa en el plano de tal modo que regiones adyacentes tengan colores distintos.*

Es decir, no existe un mapa que necesite cinco o más colores para colorearlo.

Es fácil ver que cuatro colores son necesarios, puesto que el mapa de la **Figura B.2** requiere cuatro colores, así tres colores no son suficientes para colorear cualquier mapa. Tampoco es difícil demostrar que cinco colores son suficientes, la dificultad está en mostrar que se requieren cuatro colores solamente.

De Morgan demostró que no es posible que cinco países estén situados de forma tal que cada uno de ellos sea adyacente a los otros cuatro. Este resultado le hizo creer que nunca se necesitarían cinco colores, y que la conjetura de los cuatro colores era verdadera, pero demostrar que en un mapa no pueden existir cinco países mutuamente adyacentes no prueba la conjetura de los cuatro colores, porque no es correcto suponer que el número de colores necesarios para un mapa es igual al máximo número de países mutuamente adyacentes del mapa, por ejemplo en el mapa de la **Figura B.7** nunca son mutuamente adyacentes más de tres países, a pesar de lo cual se necesitan cuatro colores, tres para el anillo exterior de países y uno para el país central.

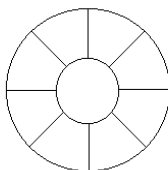


**Figura B.7.**

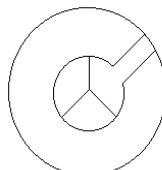
En el año 1879 el abogado y miembro de la Sociedad Londinense de Matemáticas Alfred Bray Kempe publicó una prueba de la conjetura de los cuatro colores. Desafortunadamente el artículo contenía un error, y 11 años más tarde Percy John Heawood mostró que el argumento en la demostración de Kempe, no era correcta. Sin embargo, es importante señalar que las ideas de Kempe son básicas en todo el desarrollo del problema a lo largo de los últimos 100 años, especialmente en la solución dada por Appel y Haken en 1976.

Kempe intentó demostrar la conjetura por el clásico método de reducción al absurdo; esto es, supuso que existía al menos un mapa que exigía cinco o más colores y procedió a mostrar que tal hipótesis conducía a una contradicción, para este fin introdujo la noción de mapa normal.

**Definición B.6.** Un **mapa** se dice **normal** si no hay más de tres países que tengan un punto en común y ninguna región (salvo la región infinita circundante) contiene otra región dentro de ella. Los mapas de las **Figuras B.1** y **B.2** no son normales, pero los mapas de la **Figura B.3**, **B.8** y **B.9** sí lo son.



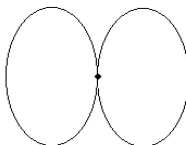
**Figura B.8.**



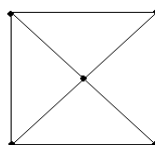
**Figura B.9.**

**Lema B.7.** *En un mapa normal a cada vértice concurren tres lados.*

*Demostración:* Por la **Definición B.6** se tiene que 2 países pueden tener un punto en común, pero por la **Observación** de la **Definición B.4** la gráfica de la **Figura B.10**, no se considera en el estudio del teorema de los cuatro colores, entonces sólo resta probar que si 3 países tienen un punto en común, a cada vértice concurren tres lados. Si se supone que a un vértice llegan 4 lados, entonces existirían cuatro regiones adyacentes, ya que los lados deben tener dos extremos (ver **Figura B.11**), pero esto contradice la definición de mapa normal. Por tanto en un mapa normal a cada vértice concurren tres lados.  $\square$



**Figura B.10.**



**Figura B.11.**

Al observar la relación entre los mapas de las **Figuras B.1** y **B.8** y también entre los de las **Figuras B.2** y **B.9**, se puede observar que a todo mapa que no sea normal se le puede asociar un mapa normal, el cual es más difícil (o igualmente difícil) de colorear. Por ejemplo, si es posible colorear el mapa de la **Figura B.8** con tres colores, entonces se puede colorear el de la **Figura B.1**, utilizando los mismos colores para cada sector, y descartando el centro. También, si es posible colorear el mapa de la **Figura B.9**, entonces el de la **Figura B.2** es aún más fácil de colorear. Es por eso que se estudian únicamente los mapas normales, ya que estos mapas son más difíciles de colorear, por tanto si se demostrara el teorema de los cuatro colores para mapas normales se tendría el teorema para todos los mapas.

Kempe observó que si hubiera un mapa pentacromático normal, entonces tendría que existir un mapa de ésta clase de número mínimo de países, un “mapa pentacromático normal y minimal”. Dicho de otra forma, todo mapa con menor número de países que el pentacromático minimal podría colorearse con cuatro colores o menos.



Así pues, para demostrar la conjetura de los cuatro colores es suficiente demostrar que un mapa normal, pentacromático y minimal, es imposible, esto es, que de postularse la existencia de un mapa normal y minimal que exija cinco colores se deduce una contradicción. Para tal fin, Kempe demostró en términos de lados que todo mapa normal, tiene por lo menos una región con menos de 6 lados (ver **Proposición B.8**). En otras palabras, es inevitable que todo mapa normal tenga una región con 2,3,4 ó 5 lados. Por lo tanto, Kempe demostró que en todo mapa normal existe al menos un país que tiene dos, tres, cuatro o cinco vecinos (no existe ningún mapa normal en el plano en el que todo país tenga seis o más países vecinos). Después razonó que si un mapa normal pentacromático minimal tiene un país fronterizo con menos de seis vecinos, entonces habría de existir un mapa normal de menor número de países que también sería pentacromático. Si su razonamiento hubiera sido totalmente correcto se hubiera llegado a una contradicción.

**Proposición B.8.** *Todo mapa normal contiene por lo menos una región con menos de 6 lados.*

*Demostración [3]:* Es necesario acudir a la famosa fórmula de Euler para mapas. Si  $V$  es el número de vértices,  $L$  el número de lados y  $R$  el número de regiones, entonces siempre se tiene  $V - L + R = 2$ .

Además, para todo mapa normal  $2L = 3V$ , porque en cada vértice se encuentran 3 lados, así que  $3V$  es el doble del número de lados, puesto que se ha contado cada lado dos veces.

Combinando las fórmulas  $V - L + R = 2$  y  $2L = 3V$ , se tiene

$$2L = 6R - 12. \tag{B.1}$$

Sea  $R_k$  el número de regiones que tienen exactamente  $k$  lados. Así  $k \cdot R_k$  es el número de lados que tienen  $R_k$  regiones y como siempre un lado hace parte de dos regiones, entonces

$$2L = 2R_2 + 3R_3 + 4R_4 + 5R_5 + \dots$$

y

$$R = R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + \dots$$

reemplazando en la ecuación (B.1):

$$(2R_2 + 3R_3 + 4R_4 + 5R_5 + \dots) = 6(R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + \dots) - 12$$

simplificando,

$$12 = 4R_2 + 3R_3 + 2R_4 + R_5 - R_7 - 2R_8 - \dots \tag{B.2}$$

Si no hubiera una región con menos de 6 lados, se tendría:

$$R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 0,$$

lo cual implicaría que

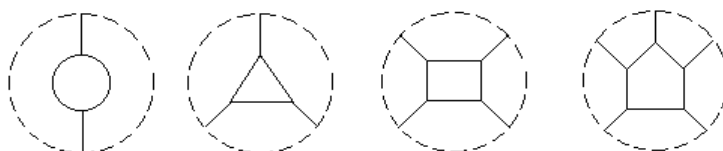
$$12 = -R_7 - 2R_8 - \dots$$

Lo cual es absurdo. En conclusión, debe existir una región con menos de 6 lados.  $\square$

**Definición B.9.** Una **configuración** es un arreglo o disposición de los países de un mapa.

**Definición B.10.** Un **conjunto de configuraciones** es **inevitable** si todo mapa normal contiene al menos uno de los miembros de este conjunto.

El siguiente conjunto de configuraciones responde a tener una región con 2, 3, 4 o 5 lados o lo mismo un país con 2, 3, 4 o 5 vecinos.



**Figura B.12.**

Kempe demostró que el conjunto de las cuatro configuraciones de la figura anterior es inevitable.

**Definición B.11.** Una **configuración** es **reducible** si no puede ser parte de ningún mapa minimal pentacromático.

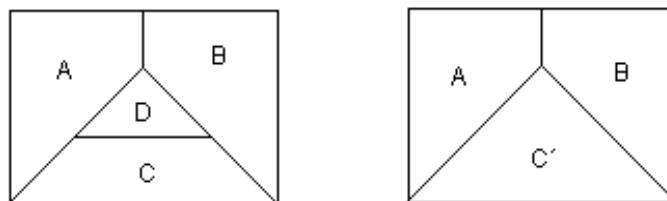
Kempe demostró que tres de sus cuatro configuraciones son reducibles, pero falló al querer demostrar que la configuración formada por un país con cinco vecinos era reducible.

En 1879 Kempe presentó una demostración de la conjetura de los cuatro colores. Se trató de una demostración por contradicción con los siguientes pasos.

1. Se supone la existencia de un mapa normal  $M$  que requiera cinco colores para ser coloreado. Además se supone que  $M$  es un mapa minimal, que requiere cinco colores. Es decir, todo mapa normal  $M'$  con menos regiones puede colorearse con cuatro colores.
2. Este mapa mínimo  $M$  contiene una región  $R$  con 2, 3, 4 ó 5 lados. Y se dice que la región  $R$  es inevitable.
3. Usando la región  $R$ , se demuestra que se puede reducir el mapa  $M$  a un mapa normal  $M'$  con menos regiones, tal que  $M'$  no es más fácil de colorear.

4. Puesto que  $M'$  es más pequeño (tiene menos regiones) que el mapa minimal  $M$ , se sigue que  $M'$  puede colorearse con cuatro colores.
5. Finalmente, se recupera el mapa original  $M$ , el cual también se puede colorear con cuatro colores.

**Prueba (de Kempe) de la imposibilidad de que un país,  $D$  con tres vecinos no pueden formar parte de un mapa minimal pentacromático.**



**Figura B.13.**

Se combina  $D$  con uno de sus vecinos, por ejemplo  $C$ , y se forma un nuevo país,  $C'$ . El nuevo mapa tiene menos países que el mapa minimal pentacromático de partida y por tanto, puede colorearse con cuatro colores. Ahora se les da a todos los países, exceptuando  $D$ , los colores que le corresponderían usando cuatro tintas para el mapa simplificado.  $D$  puede colorearse con la tinta no empleada para  $A, B$ , o  $C$ . Por consiguiente, el mapa primitivo puede colorearse con cuatro colores: no es un mapa minimal pentacromático. Un razonamiento parecido muestra que ningún país con dos y cuatro vecinos puede ser parte de un mapa minimal pentacromático (Ver [1]).

El método de Kempe para probar la conjetura de los cuatro colores puede describirse como el intento de hallar un conjunto inevitable de configuraciones reducibles. Sería suficiente hallar tal conjunto para demostrar la conjetura de los cuatro colores, porque ello probaría que todo mapa contiene una configuración que no puede formar parte de ningún mapa pentacromático minimal, y esto implica, como correctamente argumentó Kempe, que no puede existir absolutamente ningún mapa pentacromático. Al igual que Kempe, la forma que utilizaron Appel y Haken para abordar el problema ha sido construir un conjunto inevitable de configuraciones reducibles. Sin embargo, en vez de las cuatro configuraciones sencillas de Kempe, el conjunto de Appel y Haken está formado por unas 1500 configuraciones.

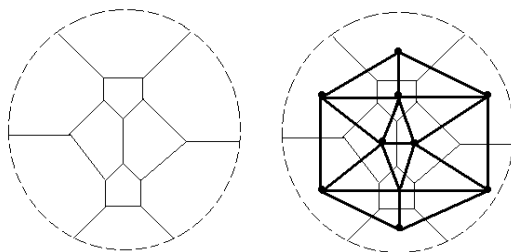
A continuación se nombran algunos trabajos que condujeron directamente a la demostración del teorema de los cuatro colores.

- i) En 1913, George D. Birkhoff mejoró la técnica de reducción de Kempe y mostró que configuraciones más grandes que las de Kempe eran reducibles.
- ii) Philip Franklin, con algunos resultados de Birkhoff, pudo demostrar que todo mapa que requiriese 5 colores debía tener como mínimo 22 países.
- iii) En 1936, Heinrich Heesch afirmó públicamente que la conjetura de los cuatro colores podría demostrarse hallando un conjunto inevitable de configuraciones reducibles. En 1950, estimó que el número de configuraciones reducibles del conjunto inevitable de Kempe no eran más de 10.000. Además utilizó un método muy conveniente para la demostración de configuraciones, comenzó por transformar el mapa original en su grafo dual (ver **Definición B.13**).
- iv) Karl Dürre (discípulo de Heesch), preparó un programa para comprobar reductibilidad.

**Definición B.12.** Un **grafo planar** es un grafo que puede ser representado en el plano de tal forma que ningún par de aristas se intercepten excepto en un vértice.

**Definición B.13** Un **grafo dual** es un grafo planar donde cada vértice del grafo representa un país y cada arista entre dos vértices debe atravesar la frontera común.

Es necesario recordar que para el teorema de los cuatro colores basta estudiar mapas normales. Así, todas las caras del grafo dual son triángulos y se dice que el grafo dual es una **triangulación**.



**Figura B.14.**

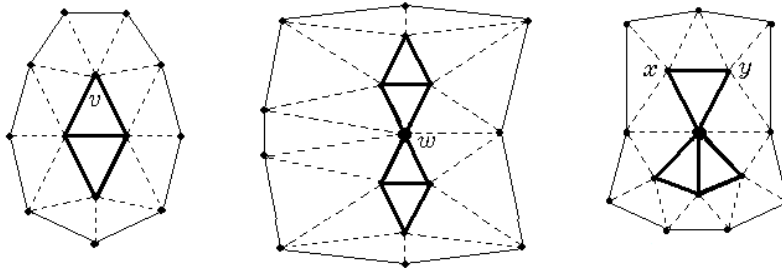
En términos de grafos duales, una **configuración** es una parte de una triangulación formada por un conjunto de vértices más todos los lados que los conectan.

El **circuito frontera** perimétrico está formado por todos los vértices adyacentes a la configuración. El circuito frontera juntamente con todos los lados que los unen, se llama **anillo de la configuración**. (El anillo del grafo dual

corresponde al anillo de países que limitan la configuración en el mapa primitivo). Las configuraciones suelen describirse por las longitudes de sus anillos: por ejemplo, una configuración se llama de anillo-seis cuando su circuito frontera exactamente consta de seis vértices.

- v) En 1960, Heesch introdujo un nuevo método para hallar conjuntos inevitables de configuraciones no necesariamente reducibles, llamado el **método de descarga**.
- vi) En 1970, Haken mejoró el método de descarga, identificando una posible demostración a la conjetura de los cuatro colores.
- vii) En 1972, Appel y Haken estudiaron el hecho de encontrar configuraciones con anillos de menos vértices, considerando los obstáculos observados por Heesch, ya que el problema de hallar un conjunto inevitable de configuraciones reducible era determinar si había o no posibilidad de hallar tal conjunto con configuraciones cuyo tamaño anular fuera lo bastante pequeño como para que el tiempo del ordenador requerido en la verificación de reductibilidad fuera razonable.

A continuación se ilustran los tres obstáculos de Heesch.



**Figura B.15.**

Estas disposiciones de vértices parecen figurar solamente en configuraciones cuya reductibilidad no es posible demostrar. Por ello Appel y Haken se sirvieron de estos obstáculos para reconocer posibles problemas en su demostración. En los grafos que aquí se muestran, las configuraciones son las disposiciones de vértices unidos por una línea continua gruesa. Las líneas continuas finas conectan los vértices del anillo de la configuración, o sea, de su frontera externa. Las líneas de puntos conectan los vértices de la configuración con los vértices del anillo. Cada una de estas configuraciones contiene uno de los obstáculos de reducción de Heesch: el vértice  $v$  tiene 4 vecinos en el anillo de la configuración; el vértice  $w$  tiene tres vecinos no consecutivos en el anillo de la configuración; los vértices  $x$  e  $y$  forman el llamado par colgante; es decir, estos vértices están unidos entre sí y a los vértices del anillo, pero sólo tienen un único vecino más en la configuración.

viii) A comienzos de 1975, Appel y Haken modificaron el programa para que fuera libre de obstáculos y el tamaño del conjunto inevitable se duplicó. Finalmente en junio de 1976, contruyeron un conjunto inevitable de 1500 configuraciones reducibles verificadas con ayuda del computador.

De esta manera Appel y Haken probaron la veracidad del teorema de los cuatro colores.

Finalmente, es conveniente destacar que:

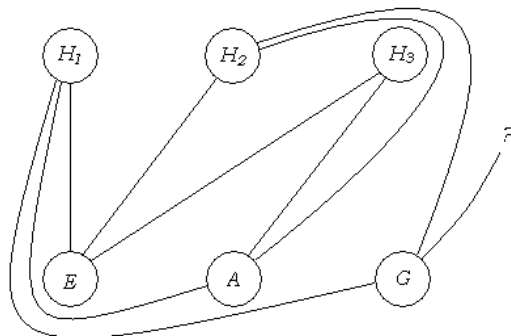
**“el Teorema de los Cuatro Colores para mapas es equivalente al Teorema de los Cuatro Colores para grafos planares (Teorema B.14)”.**

Es importante recordar que un grafo planar es un grafo que puede ser representado en el plano de tal forma que ningún par de aristas se intercepten excepto en un vértice.

**Teorema B.14.** *Si  $G$  es un grafo planar, entonces  $\chi(G) \leq 4$ .*

La equivalencia del teorema de los cuatro colores para grafos planares, se puede observar porque todo **grafo dual** de un mapa es un grafo planar y a todo grafo planar se le puede asociar un mapa. De Morgan demostró que en un mapa no pueden haber 5 países que sean adyacentes entre sí, esto en términos de grafos planares equivale a que el grafo completo  $K_5$  no es planar es decir que no se puede representar en el plano sin cortes de sus aristas. De Morgan creyó haber demostrado el teorema de los cuatro colores pero esto no fué correcto, ya que en grafos planares se tiene  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

Otro ejemplo de grafo no planar ya se conocía en 1917 mediante el siguiente enigma: se desea unir tres casas con tres servicios, pero sin que las 9 conexiones se toquen. ¿Es esto posible?, el grafo que representa esta situación es un grafo bipartito completo  $K_{3,3}$ . Así, la pregunta es: ¿El grafo  $K_{3,3}$  puede ser dibujado en el plano sin que se crucen las aristas?. La siguiente figura ilustra que esto no es posible.



**Figura B.16**

### C. Tabla Actualizada de Números de Ramsey

Radziszowski mantiene una lista actualizada de los mejores límites actuales para los números de Ramsey  $R(m, n)$ .

<http://mathworld.wolfram.com/RamseyNumber.html>.

$m$	$n$	$R(m, n)$	Referencia
3	3	6	Bosque verde y Gleason 1955
3	4	9	Bosque verde y Gleason 1955
3	5	14	Bosque verde y Gleason 1955
3	6	18	Buril y Yackel 1968
3	7	23	Kalbfleisch 1966
3	8	28	McKay y minuto 1992
3	9	36	Grinstead y Roberts 1982
3	10	[40, 43]	Exoo 1989c, Radziszowski y Kreher 1988
3	11	[46, 51]	Radziszowski y Kreher 1988
3	12	[52, 59]	Exoo 1993, Radziszowski y Kreher 1988, Exoo 1998, poco 2001
3	13	[59, 69]	Piwakowski 1996, Radziszowski y Kreher 1988
3	14	[66, 78]	Exoo (unpub.), Radziszowski y Kreher 1988
3	15	[73, 88]	Wang y Wang 1989, Radziszowski (unpub.), poco 2001
3	16	$\geq 79$	Wang y Wang 1989
3	17	$\geq 92$	Wang et al. 1994
3	18	$\geq 98$	Wang et al. 1994
3	19	$\geq 106$	Wang et al. 1994
3	20	$\geq 109$	Wang et al. 1994
3	21	$\geq 122$	Wang et al. 1994
3	22	$\geq 125$	Wang et al. 1994
3	23	$\geq 136$	Wang et al. 1994
3	26	$\geq 150$	
4	4	18	Bosque verde y Gleason 1955
4	5	25	McKay y Radziszowski 1995
4	6	[35, 41]	Exoo (unpub.), McKay y Radziszowski 1995
4	7	[49, 61]	Exoo 1989a, Mackey 1994
4	8	[56, 84]	Exoo 1998, Exoo 2002
4	9	[69, 115]	Radziszowski 1988, Mackey 1994

$m$	$n$	$R(m, n)$	Referencia
4	10	[80, 149]	Piwakowski 1996, Mackey 1994
4	11	[96, 191]	Piwakowski 1996, Spencer 1994
4	12	[128, 238]	Su et al. 1998, Spencer 1994
4	13	[133, 291]	Xu y Xie 2002
4	14	[141, 349]	Xu y Xie 2002
4	15	[153, 417]	Xu y Xie 2002
4	17	$\geq 182$	Luo et al. 2001
4	19	$\geq 198$	Luo et al. 2002
4	20	$\geq 230$	Su et al. 1999
4	21	$\geq 242$	Su et al. 1999
4	22	$\geq 282$	Su et al. 1999
5	5	[43, 49]	Exoo 1989b, McKay y Radziszowski 1995
5	6	[58, 87]	Exoo 1993, Walker 1971
5	7	[80, 143]	CET, Spencer 1994
5	8	[95, 216]	Piwakowski 1996, Spencer 1994
5	9	[121, 316]	Exoo 1998, Haanpää 2000
5	10	[141, 442]	Exoo 1998, Mackey 1994
5	11	$\geq 153$	Exoo 1998
5	12	$\geq 181$	Exoo 1998
5	13	$\geq 193$	Exoo 1998
5	14	$\geq 221$	Exoo 1998
5	15	$\geq 242$	Luo et al. 2001
5	16	$\geq 278$	Exoo 2002
5	17	$\geq 284$	Su et al. 1999
5	19	$\geq 338$	Luo et al. 2001
5	20	$\geq 380$	Luo et al. 2000
5	22	$\geq 422$	Luo et al. 2000
5	23	$\geq 434$	Luo et al. 2000
5	26	$\geq 464$	
6	6	[102, 165]	Kalbfleisch 1965, Mackey 1994
6	7	[111, 298]	Exoo 1998, Xu y Xie 2002
6	8	[127, 495]	Exoo 1998, Xu y Xie 2002
6	9	[153, 780]	Exoo 1998, Mackey 1994
6	10	[177, 1171]	Xu y Xie 2002
6	11	$\geq 253$	Xu y Xie 2002



$m$	$n$	$R(m, n)$	Referencia
6	12	$\geq 262$	Xu y Xie 2002
6	13	$\geq 278$	Xu y Xie 2002
6	14	$\geq 292$	Xu y Xie 2002
6	15	$\geq 374$	Su et al. 2002
6	16	$\geq 434$	Su et al. 2002
6	17	$\geq 548$	Su et al. 2002
6	18	$\geq 614$	Su et al. 2002
6	19	$\geq 710$	Su et al. 2002
6	20	$\geq 878$	Su et al. 2002
6	22	$\geq 1070$	Su et al. 2002
7	7	[205, 540]	Colina e Irving 1982, Giraud 1973
7	8	[216, 1031]	Xu y Xie 2002
7	9	[227, 1713]	Huang y Zhang 1998
7	10	[238, 2826]	Mackey 1994
7	11	$\geq 322$	Xu y Xie 2002
7	12	$\geq 416$	Xu y Xie 2002
7	13	$\geq 511$	Xu y Xie 2002
7	17	$\geq 628$	Xu y Xie 2002
7	18	$\geq 722$	Xu y Xie 2002
7	19	$\geq 908$	Su et al. 2002
7	21	$\geq 1214$	Su et al. 2002
8	8	[282, 1870]	Burling y Reyner 1972, Mackey 1994
8	9	[295, 3583]	Radziszowski 2002
8	10	[316, 6090]	Xu y Xie 2002, Huang y Zhang 1998
8	13	$\geq 635$	Xu y Xie 2002
8	15	$\geq 703$	Xu y Xie 2002
8	17	$\geq 737$	Xu y Xie 2002
8	18	$\geq 871$	Xu y Xie 2002
8	19	$\geq 1054$	Xu y Xie 2002
8	20	$\geq 1094$	Su et al. 2002
8	21	$\geq 1328$	Su et al. 2002
9	9	[565, 6588]	Esquilador 1986, Shi y Zheng 2001
9	10	[580, 12677]	Xu y Xie 2002
10	10	[798, 23556]	Esquilador 1986, Shi 2002
11	11	$\geq 1597$	Mathon 1987

$m$	$n$	$R(m, n)$	<b>Referencia</b>
12	12	$\geq 1637$	Xu y Xie 2002
13	13	$\geq 2257$	Mathon 1987
14	14	$\geq 2989$	Mathon 1987
15	15	$\geq 5485$	Mathon 1987
16	16	$\geq 5605$	Mathon 1987
17	17	$\geq 8917$	Luo et al. 2002
18	18	$\geq 11005$	Luo et al. 2002
19	19	$\geq 17885$	Luo et al. 2002

## CONCLUSIONES

1. Se recopiló y estudió información sobre Coloreado de Grafos y Teoría de Ramsey, finalizando con una organización y sistematización de los temas propuestos.
2. Se identificaron aplicaciones de la Teoría de Ramsey a: Sucesiones, Teoría de Grupos, Geometría y Teoría de Números.
3. Se analizaron problemas abiertos relacionados con la teoría de Ramsey: el cálculo de la números de Ramsey, los números de Erdos-Szekeres, los números de Schur y los números de Van der Waerden.
4. Frente a los objetivos trazados para este trabajo de grado, se encontró con la dificultad de argumentar la demostración del teorema de Van der Waerden, debido a que esta demostración requería nuevos conceptos no analizados dentro de este estudio; aunque se ilustró mediante un ejemplo.
5. La consecución y el estudio del contenido de éste documento manifiesta el desempeño y la constancia ante lo propuesto, resaltando el aporte académico en la sistematización y explicación detallada de éste material, la cual se refleja en la ampliación y elaboración de algunas demostraciones y en la ejemplificación de conceptos y teoremas.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] APPEL, Kenneth and HAKEN, Wolfgang. **The Solution of Four-Color-Map Problem**. Scientific American (1976), 108-120.
- [2] BOLLOBÁS, Béla. **Modern Graph Theory**. Springer Verlag. New York, 1998.
- [3] BRUCE, Edwars. **El Teorema de los Cuatro Colores**. Lecturas Matemáticas Sociedad Colombiana de Matemáticas, Vol II, No. 2 (1981), 135-145.
- [4] CHARTRAND, Gary. **Introductory Graph Theory**. Dover Publications, INC. New York, 1977.
- [5] DISSETT, Luis. **MLM 2070 Teoría de Grafos**. Página web: [http : //www.mat.puc.cl/~ldisett/mlm2070](http://www.mat.puc.cl/~ldisett/mlm2070).
- [6] ERICKSON, Martín. **Introduction to Combinatorics**. John Wiley Sons, New York, 1996.
- [7] FEOFILOFF, Pablo. **Sobre os Numeros de Ramsey**. Dissertacao mestrado. Ime, 1974.
- [8] FERNANDEZ Gallardo, Paulo y FERNÁNDEZ Pérez, José. **“El Desorden Absoluto es Imposible”**. **La Teoría de Ramsey**. La Gaceta, 1-23.
- [9] GALLARDO. **Principio del Palomar**. Versión preliminar. Pág. web: [http : //www.uam.es/persona\\_pdi/ciencias/gallardo/capitulo5.pdf](http://www.uam.es/persona_pdi/ciencias/gallardo/capitulo5.pdf). Nov. 2003.
- [10] LESSER, Alice S. **Theoretical and Computational Aspects of Ramsey Theory**. Página web: [http : //www.nada.kth.se/~md96-ale](http://www.nada.kth.se/~md96-ale). Abril, 2001.
- [11] MIRA, Jhon Jader. **Teoría Algebraica de Grafos, Coloramiento de Grafos**. Tesis Universidad de Antioquia, 1999.
- [12] MONTOYA Delgado, Luis Eduardo. **Teoría de Grafos Un Curso Introductorio**. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación. Instituto de Postgrados, Universidad del Cauca. Popayán, 1994.
- [13] NIETO, José H. **Teoría Combinatoria**. La Universidad de Zulia, Venezuela. Pág. web: [http : //www.mipagina.cantv.net/jhnieto/tc.pdf](http://www.mipagina.cantv.net/jhnieto/tc.pdf). Feb (1996), 85-93.
- [14] ROSEN, Kenneth. (Editor in Chief) **Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics**. CRC Press, 1999.

- [15] VAN LINT, J. H y WILSON, R.M. **A Course in Combinatorics.** Cambridge University Press, 1992.
- [16] WILSON, Robin. **Introducción a la Teoría de Grafos.** Versión española de Enrique García Camarero. Ed. Cast: Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1983.

## ÍNDICE

- algoritmo voraz o codicioso**, 28
- anticadena**, 55
  - tamaño de una, 55
- árbol**, 16
  - abarcador o de recubrimiento, 39
- arista(s)**, 10
  - extremos de una, 10
  - tamaño de una, 91
- bosque**, 16
- cadena**, 55
  - tamaño de una, 55
- camino**, 15
  - orientado, 35
- ciclo**, 16
- circuito frontera**, 132
- clase cromática**, 20
- clique**, 26
- coloración**,
  - de las aristas de un grafo, 60
  - de los vértices de un grafo, 20
  - óptima, 20
- componente conexa**, 16
- configuración**, 130, 132
  - anillo de la, 132
  - reducible, 130
- conjunto**
  - de configuraciones inevitable, 130
  - independiente, 20
  - separador o corte por vértices de un grafo, 38
- curva de Jordan**, 125
  - cerrada, 125
- densidad de aristas**, 110
- distancia entre vértices de un grafo**, 15
- etiquetado**, 19
- frontera**, 125
- función**, 47
  - codominio de una, 48
  - inversa de una, 48
- grafo simple**, 10
  - bipartito, 15
  - bipartito completo, 15

**grafo simple** (*continuación*)

- cíclico, 91
  - parámetros de un, 91
- complemento, 15
- completo, 15
- conexo, 16
- crítico, 46
- de Turán, 44
- dual, 132
- etiquetado, 19
- extremo, 97
- finito, 10
- infinito, 10
- $k$ -coloración propia de un, 20
- $k$ -coloreable, 20
  - en forma única, 21
  - maximal, 43
- $k$ -crítico o cromáticamente crítico, 32
- $k$ -cromático, 20
- $k$ -partito, 15
- $k$ -partito completo, 15
- $k$ -regular, 11
- máximo grado de un, 10
- mínimo grado de un, 11
- monocromático, 61
- nulo, 14
- orden de un, 10
- orientado, 35
- planar, 132
- producto cartesiano, 18
- que surge de eliminar una arista, 45
- que surge de eliminar un conjunto de vértices, 28
- que surge de eliminar un vértice, 27
- suma, 18
- tamaño de un, 10
- unión, 18

**lema de**

- Dilworth, 56
- Schur, 14

**longitud**

- de un camino, 15
  - orientado, 36
- de un orden parcial, 55

**mapa**, 125

- coloreado de un, 126

**mapa** (*continuación*)  
 normal, 124  
 vértices en un, 125

**método de descarga**, 133

$(m, n)$  – *grafo*, 78

**número(s)**  
 cromático, 20  
 de clique, 26  
 de Erdős - Szekeres, 72  
 de independencia, 20  
 de Ramsey, 61, 86  
 de Schur, 72  
 de Van der Waerden, 85  
 $e(m, n, p)$ , 107

**orden**  
 parcial, 52  
 ancho de un, 55  
 orden total u orden lineal, 55

**país**, 126

**pesos de la(s) arista(s)**, 91  
 conjunto de los, 91

**polinomio cromático**, 117

**posición genérica de puntos en el plano**, 70

**principio del palomar**, 48  
 de manera informal, 49  
 sobre funciones, 49  
 para funciones de manera informal, 50  
 versión infinita informal del, 52

**propiedad**  $(m, n)$ , 84

**proposición de**  
 Erdős - Szekeres, 70

**$q$ -subconjunto**, 60

**región(es)**, 125  
 infinita circundante de un mapa, 126  
 adyacentes, 125

**relación**, 47  
 antisimétrica, 52  
 elementos comparables en una, 52  
 elementos incomparables en una, 52  
 dominio de una, 47  
 imagen de un elemento mediante una, 47  
 preimagen de un elemento mediante una, 47  
 rango de una, 47  
 recíproca, 47  
 reflexiva, 52



**relación** (*continuación*)  
 simétrica, 52  
 transitiva, 52

**solución al problema**  
 $(m, p, W)$ , 92  
 $((m, p, W))$ , 92

**subgrafo**, 13  
 propio, 13  
 conexo maximal, 16  
 inducido, 29  
 $H_1$ , 82  
 $H_2$ , 82  
 orientado, 36  
 maximal sin ciclos, 35

**subsucesión**, 53

**sucesión**  
 creciente o estrictamente creciente, 53  
 decreciente o estrictamente decreciente, 53  
 finita, 52  
 infinita, 52  
 monotónicamente creciente, 53  
 monotónicamente decreciente, 53  
 monótona, 53

**teorema de**  
 Bolzano, 69  
 Brooks, 1941, 41  
 Caso especial del Principio del Palomar para funciones, 50  
 Cota probabilística de Erdős para  $R(m, m)$ , 66  
 Dilworth, 57  
 Erdős-Szekeres, 53  
 Gallay-Roy-Vitaver (1968, 1967 y 1962), 36  
 los cuatro colores, 122  
 Principio del Palomar, 48  
 Principio del Palomar: versión general para funciones, 49  
 Principio de Dirichlet: Principio del Palomar en versión de particiones, 51  
 Principio del Palomar infinito, 52  
 Radziszowski/Kreher 1988, 112  
 Ramsey: versión conjuntista, 62  
 Ramsey: versión de grafos, 61  
 Ramsey: versión general finita, 63  
 Ramsey: versión infinita, 65  
 Ramsey: versión infinita para grafos, 65  
 Recurrencia cromática, 121  
 Schur, 73  
 Sperner, 59

**teorema de** (*continuación*)  
Szekeres-Wilf, (1968), 33  
Turán-1941, 108  
Van der Waerden, 75  
Versión infinita del Lema de Dilworth, 58  
Welsh-Powell, (1967), 33  
Whitney, 1933, 122

**términos adyacentes**, 92

**trayectoria**  
cerrada de longitud  $l$ , 16  
de longitud  $l$ , 15  
orientada de longitud  $l$ , 36  
orientada cerrada o ciclo orientado de longitud  $l$ , 36

**triangulación**, 132

**vértice(s)**, 10  
adyacentes de un grafo, 10  
aislado, 2  
de corte, 38  
grado de un, 11  
segundo grado de un, 12  
vecindad de un, 11

**vértice-conectividad**, 38