

**PROPUESTA METODOLÓGICA REFERIDA AL PENSAMIENTO VARIACIONAL
DESARROLLADA EN UN ENTORNO VIRTUAL DE APRENDIZAJE**

**LUISA FERNANDA AYALA MUÑOZ
ALIRIO GONZALEZ RIVERA
DEISY YAMILE RUIZ ROSERO
YULY ANDREA VÁSQUEZ QUINAYÁS**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
POPAYÁN, CAUCA**

2006

**PROPUESTA METODOLÓGICA REFERIDA AL PENSAMIENTO VARIACIONAL
DESARROLLADA EN UN ENTORNO VIRTUAL DE APRENDIZAJE**

LUISA FERNANDA AYALA MUÑOZ

ALIRIO GONZALEZ RIVERA

DEISY YAMILE RUIZ ROSERO

YULY ANDREA VÁSQUEZ QUINAYÁS

Seminario de Investigación presentado como requisito para optar al título de
Licenciados en Educación, Especialidad en Matemáticas

DIRECTOR:

Magíster. ÁNGEL HERNÁN ZÚÑIGA SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2006

Nota de Aceptación

Director: _____

Magíster Ángel Hernán Zúñiga Solarte

Jurado: _____

Magíster Yilton Riascos Forero

Jurado: _____

Magíster Reinaldo Velasco Mosquera

Fecha de Sustentación: Popayán, 19 de octubre de 2006

Dedicamos este trabajo de investigación:

*A Dios creador del universo y dueño de
nuestra vida por iluminarnos y guiarnos
por el buen sendero.*

*A nuestros padres, por el apoyo
incondicional dado a lo largo de la
carrera, ya que sin ellos nunca
hubiésemos podido hacer realidad este
sueño y culminar esta tesis con éxito*

AGRADECIMIENTOS

Al Magíster Ángel Hernán Zúñiga, por su constante y valiosa colaboración durante la carrera y en el desarrollo de nuestro trabajo de investigación.

Magíster Yilton Riascos Forero y Magíster Reinaldo Velasco Mosquera, miembros del comité de evaluación, por sus aportes y orientaciones.

Al grupo E-LANE por darnos la oportunidad y respaldo para ejecutar y llevar a cabo el proyecto de investigación.

Al grupo de profesores pertenecientes al seminario de Educación Matemática, por sus sugerencias y contribuciones a lo largo del proyecto.

A nuestros padres, familiares y amigos por su apoyo permanente y constante motivación durante el transcurso de nuestra carrera.

A la Universidad del Cauca y a todos los profesores del departamento de Matemáticas, quienes hicieron realidad nuestro sueño.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	VI
CONTENIDO	VII
GLOSARIO	X
RESUMEN	XIV
PRESENTACIÓN	XVI
1. CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	1
1.1 PROCESO DE CONSTRUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN	1
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	3
1.3 OBJETIVOS	5
2. ELEMENTOS BASE PARA LA CONCEPCIÓN Y ELABORACIÓN DE LA PROPUESTA METODOLÓGICA	8
2.1 PENSAMIENTO VARIACIONAL	8
2.1.1 La variación y el cambio en la historia de las matemáticas	8
2.1.2 Tratamiento de la variación y el cambio en el currículo de matemáticas	14
2.1.3 Pensamiento Variacional; modelación y transformación de fenómenos de cambio	17
2.2 ENTORNO VIRTUAL DE APRENDIZAJE	21
2.2.1 Características de un EVA	22
2.2.2 Efectos potenciales de un EVA	24
2.2.3 Elementos funcionales básicos del EVA	28
2.2.4 Características del sujeto	30
2.3 REFERENTE TEÓRICO PEDAGÓGICO	32
2.3.1 La Teoría Constructivista de Piaget	33
2.3.2 La Teoría Constructivista de Vygotsky	35
2.3.3 Aprendizaje Significativo	37

2.4 ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA	40
2.5 CONTENIDOS MATEMÁTICOS	42
2.6 SITUACIÓN PROBLEMA	44
2.7 EVALUACIÓN	45
2.8 PROCESO DE SISTEMATIZACIÓN	46
3. CONSTRUCCIÓN DE LA ESTRATEGIA METODOLÓGICA	48
4. PROPUESTA DE PASOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UNA GUÍA METODOLÓGICA	54
5. RESULTADOS	62
6. CONCLUSIONES GENERALES	69
7. RECOMENDACIONES	72
8. BIBLIOGRAFÍA	74
9. ANEXOS	77

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A: PRIMERA EXPERIMENTACIÓN EN EL EVA UNICAUCA	77
ANEXO B: TERCERA EXPERIMENTACIÓN EN EL EVA UNICAUCA	78
ANEXO C: EVA UNICAUCA COMO DIARIO DE CAMPO.	79
ANEXO D: PRUEBA PILOTO A LA GUÍA METODOLÓGICA	80
ANEXO E: CONFORMACIÓN DE GRUPOS	81
ANEXO F: ORIENTACIONES PARA EL DESARROLLO DE TAREAS	82
ANEXO G: FORMATO DE LA GUÍA METODOLÓGICA EN EL EVA UNICAUCA	83
ANEXO H: PARTICIPACIÓN EN LOS FOROS	84
ANEXO I: REGISTRO DE TAREA	85
ANEXO J: REGISTRO Y ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD	87
ANEXO K: GUÍA METODOLÓGICA	88

GLOSARIO

Applets: lo podríamos traducir como "Aplicaciones". Se trata de pequeñas aplicaciones escritas en el lenguaje de programación JAVA y que se difunden a través de la red de Internet. Ofrece información gráfica y a veces interactúa con el usuario, típicamente carece de sesión y tiene privilegios de seguridad restringidos. Un applet normalmente lleva a cabo una función muy específica que carece de uso independiente.

Chat: voz inglesa que significa charla; verbo, charlar. Servicio de Internet que les permite a los usuarios comunicarse sincrónicamente.

Educación Matemática: campo de desarrollo, innovación e investigación que reflexiona sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

E_LANE: cuya sigla en inglés proviene de European and Latin-American New Education, es una iniciativa de instituciones europeas y latinoamericanas, financiada por la Comisión Europea dentro del Programa @lis (Alianza Sociedad de la Información) en la línea de demostración en educación electrónica. Es propósito de E-LANE promover un ambiente integrado de aprendizaje en el marco de la sociedad de la información, en niveles de formación tanto académico como no académico.

E-Learning: se puede definir como el uso de las tecnologías multimedia para desarrollar y mejorar nuevas estrategias de aprendizaje. En concreto, supone la utilización de herramientas informáticas, tales como CD-ROMs, Internet o dispositivos móviles para llevar a cabo una labor docente.

E-Mail (correo electrónico): sistema de mensajería informática electrónica. Un sistema para enviar y recibir mensajes entre los usuarios conectados a la Internet.

Estándares Curriculares: un estándar en educación especifica lo mínimo que el estudiante debe saber y ser capaz de hacer para el ejercicio de la ciudadanía trabajo y la realización personal. El estándar es una meta y una medida; es una descripción de lo que el estudiante debe lograr en una determinada área, grado o nivel; expresa lo que debe hacerse y lo bien que debe hacerse.

EVA- UNICAUCA: plataforma que ha sido desarrollada en el marco del proyecto E_LANE, puesta al servicio de la comunidad académica de la Universidad del Cauca como apoyo a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Filtro de Ideas: son preguntas orientadoras (¿Para qué lo hago? ¿Con qué finalidad? ¿Cómo argumentar y analizar? ¿Cómo hacerlo?), que conducen hacia el planteamiento de un problema de investigación.

Formación On- Line: también denominada educación virtual e-learning, formación por Internet donde estamos ante una forma de enseñanza a distancia con el uso predominante de Internet como medio tecnológico. Se lleva a cabo a través de las llamadas plataformas de difusión del conocimiento.

Formato de Textos: Existen una gran variedad de formatos para crear archivos textuales, todo depende del *software* utilizado. Algunos de estos formatos son de simple almacenamiento del texto (txt), otros permiten establecer la tipografía, estilos y apariencia de párrafos, páginas, etc. (doc), algunos aseguran la integridad del contenido y la presentación del documento tal y como ha sido guardado (PDF). Incluso hay *softwares* específicos que sirven para la edición y maquetación de documentos largos y complejos (zip).

Interfaz: es uno de los componentes más importantes de cualquier sistema computacional, pues funciona como el vínculo entre el humano y la máquina. La interfaz de usuario es un conjunto de protocolos y técnicas para el intercambio de información entre una aplicación computacional y el usuario.

Juicios descriptivos: son aquellos enunciados que determinan relaciones y comparan circunstancias, objetos o fenómenos, con el fin de delinear algo de tal manera que dé cabal idea de lo tratado.

Lineamientos Curriculares: son orientaciones para que las instituciones, desde sus PEI, asuman la elaboración de sus propios currículos. Se estructurarán por ejes problémicos y a través de competencias, de manera que permitan un aprendizaje significativo, que vincule lo aprendido con el medio circundante, local, nacional y global.

Matriz del Marco Lógico: es una herramienta basada en resultados para la conceptualización, diseño, ejecución, seguimiento y evaluación de proyectos. Sirve para estructurar el proceso de planificación de proyectos y comunicar información esencial sobre el proyecto a los involucrados de forma eficiente en un formato fácil de leer.

PEI (Proyecto Educativo Institucional): es la estrategia del plantel educativo que contiene: los principios y fines del establecimiento, los recursos docentes, la estrategia pedagógica, el reglamento para docentes y estudiantes, el sistema de gestión, los recursos didácticos disponibles y necesarios.

Pestaña: Submenú dentro de un software informático.

Plugin: es un software que interactúa con otro programa para aportarle una función o utilidad muy específica. Este programa adicional es ejecutado por la aplicación principal. Los plugins típicos tienen la función de reproducir determinados formatos de gráficos, reproducir datos multimedia, codificar/decodificar e-mail, filtrar imágenes de programas gráficos, etc.

Porlet: no es nada más que un contenedor configurable, y usualmente interactivo, de información que se incluye en la estructura del portal. En cierta forma

podríamos interpretarlo como una página Web dentro de una página Web, cuyo contenido es autónomo pero que utiliza parámetros generales de configuración del portal.

REDUMAC (Red de aprendizaje en Educación Matemática del Cauca): es una iniciativa en la cual confluyen tres grupos de investigación de la Universidad del Cauca (Grupo de Algebra, Teoría de Números y Aplicaciones ERM, Grupo de Ingeniería Telemática y Grupo de Educación Matemática- Unicauca). Plantea como propósito conformar y consolidar una red de aprendizaje, soportada en las tecnologías de la información y la comunicación, que contribuya a mejorar la Educación Matemática en los niveles básico y medio, en las comunidades educativas de municipios del Departamento del Cauca.

Software: todos los componentes intangibles de un computadora, es decir, al conjunto de programas y procedimientos necesarios para hacer posible la realización de una tarea específica, en contraposición a los componentes físicos del sistema.

Software libre: es el software que, una vez obtenido, puede ser usado, copiado, estudiado, modificado y redistribuido libremente. El software libre suele estar disponible gratuitamente en Internet, o a precio de distribución a través de otros medios.

TICs: Se denomina así (en forma simplificada) a las Tecnologías de la Información y de la Comunicación, son aquellas tecnologías que permiten transmitir, procesar y difundir información de manera instantánea. Permiten actuar sobre la información y generar mayor conocimiento.

RESUMEN

Este trabajo de investigación busca concebir y elaborar una propuesta metodológica referida al Pensamiento Variacional desarrollada en un Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA) y dirigida a docentes de matemáticas en educación media; presentada como una nueva alternativa para la enseñanza y aprendizaje de la matemática mediante la incorporación de recursos computacionales.

La construcción de la propuesta metodológica se realiza a través de tres fases, en las que se conceptualizan los elementos alrededor de los cuales se va a construir la estrategia, se realiza la búsqueda de recursos computacionales, se seleccionan los contenidos relacionados con variación y cambio y finalmente se integran en una estructura que puede ser desarrollada en un Entorno Virtual de Aprendizaje y que obedece a las necesidades de la población a la que va dirigida.

Como producto de la investigación se recomiendan algunos pasos a seguir en la elaboración de una guía metodológica. De otro lado se ilustra una guía metodológica para docentes de matemáticas, la cual proporciona una descripción de los elementos necesarios para una efectiva acción formativa en un EVA.

Su estructura gira alrededor del estudio de procesos de variación y cambio mediante el desarrollo de situaciones problema y el uso de recursos computacionales interactivos.

Sobre los elementos involucrados en la investigación se puede establecer que: los diferentes sistemas de representación tienen en el Pensamiento Variacional su mayor expresión, en la medida que todo proceso de variación y cambio puede ser estudiado desde un punto de vista gráfico, algebraico, simbólico o mediante su interrelación. El Entorno Virtual de Aprendizaje como medio de interacción posibilita la creación de nuevas estrategias educativas donde la innovación y la

incorporación de recursos dinámicos sean los principales componentes. La guía metodológica es una propuesta que busca diseñar nuevas acciones educativas complementarias a las ya existentes mediante la fusión e integración de la pedagogía y la tecnología bajo un propósito formativo.

PRESENTACIÓN

Los procesos educativos continuamente han sido objeto de modificaciones buscando dar al estudiante una formación integral y de calidad. En la actualidad el currículo de matemáticas se direcciona hacia el desarrollo del pensamiento matemático tratando de superar el enfoque rígido con el que siempre se ha trabajado la enseñanza de ésta, el objetivo ahora es relacionar conceptos y procedimientos que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones de la cotidianidad o de otras ciencias. Las posibilidades que brindan las tecnologías computacionales, como herramientas que facilitan al estudiante la manipulación de objetos matemáticos en diferentes sistemas de representación permiten experimentar otras maneras de abordar los conceptos matemáticos.

Con el surgimiento de los Entornos Virtuales de Aprendizaje, como un nuevo espacio de interacción permanente que facilita el flujo de conocimientos, el trabajo colaborativo, el aprendizaje autónomo y la utilización de diferentes recursos; se abren espacios para implementar propuestas metodológicas que propicien una enseñanza dinámica, a partir del uso de imágenes, recursos interactivos y el planteamiento de situaciones significativas para los estudiantes.

Los procesos de variación y cambio constituyen uno de los aspectos de gran riqueza en el contexto escolar, su estudio con mediación de tecnologías gráficas y algebraicas permite abordar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, específicamente el estudio de funciones reales, desde ambientes dinámicos donde es posible integrar lo pedagógico y lo tecnológico. Se busca entonces desarrollar los contenidos matemáticos a partir del planteamiento de situaciones problema, de tal modo que permitan al estudiante explorar, construir estructuras, plantear preguntas, reflexionar y analizar modelos.

El objetivo fundamental de este trabajo de investigación consiste en la concepción y construcción de una propuesta metodológica referida al estudio de procesos de

variación y cambio para ser desarrollada en un Entorno Virtual de Aprendizaje. Esta propuesta es dirigida a docentes de matemática que se desempeñen en educación media. Para lograr tal fin se plantea y fundamenta una estrategia metodológica que se hace palpable a través de una guía metodológica, compuesta de un referente teórico que contiene una base pedagógica, tecnológica y curricular, objetivos de estudio, situaciones problema que se resuelven mediante el uso de applets, evaluación y seguimiento de las situaciones problema; donde se dan pautas para determinar el alcance de los propósitos formativos de la situación, mas no se define un esquema formal que de cuenta del alcance de los conceptos matemáticos abordados.

La propuesta metodológica es novedosa en cuanto busca trascender la manera tradicional de abordar un concepto matemático, evoca la implementación de recursos que permiten la manipulación de los objetos matemáticos, además es desarrollada en un espacio que posibilita las interrelaciones humanas y brinda al docente nuevos escenarios y herramientas para la innovación en su labor. De otro lado contribuye a nuestra formación, en la medida que se adquieren elementos conceptuales para diseñar estrategias metodológicas utilizando los recursos tecnológicos existentes.

Para efectos del trabajo de investigación se realiza una apropiación conceptual sobre los elementos base en la construcción de la propuesta metodológica; articulando una estrategia que incorpora recursos tecnológicos y contenidos matemáticos alrededor de lo conceptualizado. Como parte de la estrategia se diseñan situaciones problema que abordan: Funciones de Variable Real, Función Seno, Integral y Derivada, en diferentes contextos; las cuales se someten a pruebas de experimentación en el EVA Unicauca. Finalmente se construye una guía metodológica que involucra todos los elementos propuestos en la estrategia. El capítulo uno tiene la descripción de los elementos que fundamentan y justifican el problema de investigación; se ubica al lector en aquellos aspectos básicos que den cuenta del problema de investigación, al mismo tiempo, se muestran los

argumentos que dan validez a la labor que va a ser ejecutada finalmente se muestran las metas establecidas y los procesos mediante los cuales serán alcanzadas.

El capítulo dos contiene la fundamentación teórica de los elementos sobre las cuales gira la propuesta metodológica. Se hace un estudio de los procesos de variación y cambio a la luz de la historia de la matemática, pasando por el Currículo de Matemáticas de Colombia, hasta llegar a una aproximación conceptual de Pensamiento Variacional. El Entorno Virtual de Aprendizaje es presentado desde sus características, su relación con el ámbito educativo a partir de sus efectos potenciales y las funciones de cada participante. Se esboza un referente teórico pedagógico enfatizado en el constructivismo y el modelo pedagógico del aprendizaje significativo. Se realiza una aproximación conceptual acerca de la definición y organización de una estrategia de enseñanza, caracterización de situaciones problema, así mismo se retoman instrumentos para la evaluación dentro de un entorno virtual y alrededor de procesos de variación y cambio. Finalmente se describen los contenidos matemáticos a trabajar y el diseño para el proceso de sistematización.

El capítulo tres se da a conocer la estrategia metodológica haciendo la descripción de cada uno de los elementos incorporados.

El capítulo cuatro plantea una serie de pasos que orientan en la construcción de una guía metodológica, ejemplificados a partir de la experiencia llevada a cabo en éste proyecto de investigación.

El capítulo cinco presenta los resultados obtenidos durante el proceso de investigación. Se da a conocer la lectura y registro de la experiencia llevada a cabo durante la experimentación de la propuesta metodológica en el EVA Unicauca. Finalmente se da a conocer el producto de la estrategia metodológica que se materializa a través de una guía metodológica.

1. CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 PROCESO DE CONSTRUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

El seminario especial de exploración orientado por el Magíster Ángel Hernán Zúñiga (miembro del grupo de investigación en Educación Matemática de la Universidad del Cauca) en el año 2004 y cuyo objetivo plantea la formación inicial para la investigación en educación matemática, permitió caracterizar éste campo, como un campo de investigación y de innovación. Además hizo posible diferenciar un problema de investigación de un problema cotidiano, diferenciación que facilitó la formulación y planteamiento de un problema de investigación pertinente a la Educación Matemática. Tal pertinencia es alcanzada con la aplicación de una estrategia metodológica, desarrollada a través de herramientas como el filtro de ideas, los juicios descriptivos y la matriz del marco lógico. El producto de su aplicación condujo a la formulación y planteamiento de un problema orientado hacia el desarrollo del Pensamiento Variacional con la incorporación de Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs) en el aula.

Conocido y considerado el proyecto de investigación REDUMAC como un nuevo espacio de interacción para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que se interesa por la incorporación de TICs en el aula, se reformula el problema para referirse al Pensamiento Variacional a través de un Entorno Virtual de Aprendizaje, entendiéndose que éste, es también un espacio que fomenta la construcción y el flujo de conocimientos, experiencias educativas, el trabajo y aprendizaje colaborativo, la divulgación e intercambio de resultados de iniciativa individual o colectiva.

De otro lado, la participación en el curso virtual “formación de formadores” ofrecido por el proyecto E_LANE (European and Latin-American New Education), dio

pautas de cómo dirigir cursos virtuales y qué elementos (materiales didácticos, cómo evaluar, cómo diseñar lecciones, espacios, recursos, etc.) utilizar en el diseño de estos cursos; además permitió identificar una variedad de elementos didácticos y pedagógicos a tener en cuenta para el trabajo en un EVA. Estos aportes permitieron determinar que, alrededor del problema de investigación, es posible construir un esquema metodológico que lleve a concebir y elaborar una propuesta metodológica referida al Pensamiento Variacional, desarrollada en un Entorno Virtual de Aprendizaje y dirigida a docentes de matemáticas en educación media.

La realización del presente trabajo satisface uno de los requerimientos para optar al título de Licenciado en Educación con Especialidad en Matemáticas de la Universidad del Cauca, en la modalidad de trabajo de investigación, incorporado al proyecto E-LANE y orientado por el Magíster Ángel Hernán Zúñiga.

El desarrollo de este plan de trabajo contribuye a nuestra formación, en la medida que se adquieren elementos para construir estrategias metodológicas utilizando los recursos existentes en nuestro medio. Entre estos recursos, los EVA abren espacios a nuevas experiencias matemáticas, en las que se puedan manipular los objetos dentro de un ambiente de interacción y exploración.

Se identifica que el EVA es un espacio de interacción permanente asíncrono o sincrónico que posibilita las interrelaciones humanas, además, promueve el flujo de conocimientos, el trabajo colaborativo y la divulgación de resultados; de ahí el interés por concebir y elaborar una estrategia metodológica dirigida a docentes de matemáticas, a desarrollar en este espacio, democratizando la formación puesto que se colocan experiencias educativas en un entorno virtual de libre acceso.

El proceso de renovación curricular inducida por Lineamientos Curriculares (MEN, 1998)¹ para el área de matemáticas, hace necesario cambiar la presentación de contenidos, de tal modo, que facilite la participación del estudiante en la

¹ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie Lineamientos Curriculares, Santa fe de Bogota, Julio 1998.

construcción de su conocimiento; las Tecnologías de la Información y de las Comunicaciones (TICs) se han convertido en la herramienta ideal para alcanzar este fin. Este trabajo de grado, contribuye al ofrecer una propuesta metodológica referida al Pensamiento Variacional, incentivando procesos de análisis, exploración y modelación de situaciones problema de la matemática, otras ciencias y la vida cotidiana. Los procesos de variación y cambio hacen una aproximación a la fenomenología en cualquier ciencia a través de objetos matemáticos, siendo el concepto de función uno de sus principales objetos de reflexión, que aparece con mayor énfasis en los contenidos de la educación media.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La ineludible perspectiva de la entrada al nuevo milenio, impone una reformulación de lo que se enseña, del cómo, para qué y dónde; es por esto que la Educación Matemática debe responder a las necesidades actuales y del futuro para dar cabida a herramientas tecnológicas y hacer grandes esfuerzos para buscar la mejor manera de utilizarlas². Las Nuevas Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TICs) posibilitan la creación de un nuevo espacio social-virtual para las interrelaciones humanas, este nuevo entorno, se está desarrollando en el área de educación, porque posibilitan nuevos procesos de aprendizaje³, proporcionan un ambiente que promueve actitudes de investigación y exploración, otorgan una direccionalidad al proceso de construcción del conocimiento, facilitan hacer uso de la matemática para transmitir significados, explicar o ilustrar fenómenos y predecir resultados, es una puerta de entrada al pensamiento matemático que implica explorar, descubrir, conjeturar, buscar ejemplos, hacer deducciones, mediante redes modernas de comunicaciones⁴. Por este motivo se

² COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Nuevas tecnologías y Currículo de Matemáticas. Serie Lineamientos curriculares, Santa fe de Bogota, Febrero 1999. p. 17.

³ BELLO, Rafael Emilio. Educación Virtual: Aulas Sin Paredes. Comunidades Virtuales de aprendizaje. s. / . 2006. <http://www.educar.org/articulos/educacionvirtual.asp>

⁴ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Op. Cit., p.29-37.

hace necesario adaptar la escuela y la formación al nuevo espacio social, para crear nuevos escenarios, instrumentos y métodos para los procesos educativos con el fin de lograr un mejoramiento tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas.

Se busca entonces diseñar acciones educativas, complementarias a las ya existentes, puesto que no basta con enseñar a hacer cálculos matemáticos o introducir conocimientos básicos sino que se hace necesario implementar una escuela que permita al estudiante interactuar con un nuevo socio cognitivo para construir significados mediante la comparación, visualización, transformación y manipulación de elementos matemáticos, dentro de este contexto los procesos de variación y cambio constituyen uno de los aspectos de gran riqueza a explorar ya que se desarrolla la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas⁵.

En este sentido el docente se enfrenta a nuevos retos entre los que se plantea crear situaciones problemáticas que permitan al alumno explorar problemas, construir estructuras, plantear preguntas, reflexionar sobre modelos y al mismo tiempo propiciar gradualmente la adquisición de niveles superiores de abstracción y generalización⁶, lo cual propone superar la enseñanza de contenidos fragmentados y compartimentalizados para lograr una interrelación entre conceptos y procedimientos que conduzcan al análisis, reflexión y modelación de situaciones⁷.

El desarrollo de pensamientos a través de situaciones problema y las tecnologías en el aula, son elementos que inducen a la construcción de estrategias metodológicas para la enseñanza, en el sentido que no es la tecnología en sí

⁵ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Serie documentos Santa fe de Bogotá, Abril 2004. p.17.

⁶ ----- Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas. Op. Cit., p.17.

⁷ Ibíd., p.17.

misma el objeto central, sino el pensamiento matemático que puedan desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología⁸. Aunque en los últimos años se ha trabajado en el tema, éste se encuentra en una fase incipiente debido a la falta de un marco teórico adecuado sobre el sistema de enseñanza en entornos virtuales, así como una metodología, soporte y guía en la conducción del aprendizaje. En la actualidad los Entornos Virtuales de Aprendizaje se están convirtiendo en un medio para hallar y proponer, a través del diálogo de saberes y del esfuerzo colectivo, alternativas de solución a una problemática común que lleven a innovar y transformar el estado de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues constituyen un espacio de interacción permanente de una comunidad que comparte propósitos, intereses y propuestas comunes que cohesionan, dinamizan y promueven su desarrollo personal y colectivo, por tanto los entornos virtuales pueden ser pensados como nuevos ambientes de enseñanza.

En este orden de ideas se busca con el trabajo de grado, responder al siguiente interrogante: **¿Qué elementos son necesarios en la concepción y elaboración de una propuesta metodológica referida al Pensamiento Variacional, desarrollada en un Entorno Virtual de Aprendizaje y dirigida a docentes de matemáticas en educación media?**

1.3 OBJETIVOS

Objetivo General:

Concebir y elaborar una propuesta metodológica referida al Pensamiento Variacional, desarrollada en un Entorno Virtual de Aprendizaje y dirigida a docentes de matemáticas en educación media.

Objetivos Específicos:

1. Determinar algunas estrategias referidas al Pensamiento Variacional en educación media, pertinentes a un Entorno Virtual de Aprendizaje.

⁸. COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Serie memorias. Santa fe de Bogotá, Enero 2002, p.64.

2. Formular y desarrollar una estrategia metodológica haciendo uso de un Entorno Virtual de Aprendizaje, en la enseñanza de contenidos que impliquen situaciones de variación y cambio.
3. Elaborar una guía que implemente la estrategia metodológica seleccionada en la enseñanza de contenidos que involucren situaciones de variación y cambio y que tenga en cuenta los requerimientos tecnológicos y metodológicos de un Entorno Virtual de Aprendizaje.

1.4 METODOLOGÍA DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

El esquema metodológico presentado a continuación, se elabora con el objeto de dar respuesta al problema formulado en modalidad de trabajo de investigación y con la finalidad de ser ejecutado durante la realización permanente de éste, cumpliendo los propósitos establecidos en cada una de las siguientes fases:

Fase 1

Propósito: estudio conceptual de materiales pedagógicos, didácticos, tecnológicos y curriculares con el fin de determinar y formular una estrategia metodológica referida al Pensamiento Variacional y desarrollada en un Entorno Virtual de Aprendizaje.

- Realizar una revisión bibliográfica con el objeto de obtener elementos conceptuales que permitan determinar y formular estrategias referidas al Pensamiento Variacional y al conocimiento del Entorno Virtual de Aprendizaje.
- Buscar recursos computacionales o virtuales como soporte en el desarrollo de contenidos que involucren situaciones de variación y cambio.
- Selección de los recursos tecnológicos a utilizar en la guía y argumentación de la estrategia metodológica.
- Esbozar criterios para la selección de contenidos que involucren situaciones de variación y cambio para el diseño de las actividades a desarrollar en la guía.

Fase 2

Propósito: exploración del EVA mediante el desarrollo de pruebas iniciales de las actividades a proponer en la guía, con el objeto de plantear alternativas metodológicas que permitan modelar situaciones de variación y cambio en el entorno virtual.

- Explorar los servicios que ofrece el Entorno Virtual de Aprendizaje.
- Utilizar el entorno, mediante la organización de actividades que incorporen recursos virtuales o computacionales en la formulación de situaciones problema, donde se involucre variación y cambio.
- Ejecutar pruebas piloto a las actividades experimentales elaboradas para verificar su funcionalidad en el EVA.
- Sistematizar las pruebas piloto.

Fase 3

Propósito: elaboración de una guía desarrollando una estrategia metodológica que incorporen recursos computacionales y virtuales en la enseñanza de contenidos que involucren situaciones de variación y cambio. Ejecución de la propuesta mediante una prueba piloto en el EVA.

- Definir el marco estructural de la guía para su desarrollo en un Entorno Virtual de Aprendizaje.
- Desarrollar de cada uno de los elementos involucrados en la estructura de la guía (planteamiento de objetivos, fundamentación y conceptualización, actividades, recursos, tiempo, evaluación).
- Validar la guía a través de una prueba piloto a docentes en el Entorno Virtual de Aprendizaje, EVA.

2. ELEMENTOS BASE PARA LA CONCEPCIÓN Y ELABORACIÓN DE LA PROPUESTA METODOLÓGICA

A continuación se dan a conocer los elementos teóricos alrededor de los cuales se realiza la fundamentación de la propuesta metodológica.

2.1 PENSAMIENTO VARIACIONAL

Del Pensamiento Variacional se hace una caracterización desde la variación y el cambio en las matemáticas, su noción en las diferentes culturas, el lugar que ocupa dentro del currículo de matemáticas hasta llegar a su concepción, diferenciando en él elementos que promueven su desarrollo, obedeciendo a procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Para ello se toma como referente el documento Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales del Ministerio de Educación Nacional.⁹

2.1.1 La variación y el cambio en la historia de las matemáticas¹⁰: el mundo dinámico y cambiante en el cual se ha dado la evolución del hombre ha despertado en él el interés y la sensibilidad por comprender fenómenos cambiantes presentes en su entorno.

Las matemáticas son un producto del quehacer humano. La observación de fenómenos naturales tales como la sucesión del día y la noche y su relación con el cambio en la posición del sol, la luna y las estrellas; el vínculo entre la posición de astros y los procesos de producción agrícola, entre otros, tuvo un papel importante en el momento de pensar en desarrollar una teoría que organizara, explicara y sustentara dichas apreciaciones.

⁹ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Op. Cit., p.1-28

¹⁰ *Ibid.*, p.1-10

El proceso de variación y cambio estuvo estrechamente ligado al desarrollo de las diferentes civilizaciones, éstas plantearon múltiples interpretaciones acerca de los fenómenos, logrando avances que serían la base para llegar a una teoría exacta de deducción e inferencia lógica basada en definiciones, axiomas, postulados y reglas que transformaron elementos primitivos en relaciones y teoremas más complejos, manejados en la actualidad.

La matemática se ocupa del estudio de las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades, operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades desconocidas. Es una ciencia que ha llevado a cabo un proceso de muchísimo tiempo para estar estructurada y organizada. En el pasado las matemáticas eran consideradas como la ciencia de la cantidad, referida a las magnitudes (como en la geometría), a los números (como en la aritmética), o a la generalización de ambos (como en el álgebra). Hacia mediados del siglo XIX las matemáticas se empezaron a considerar como la ciencia de las relaciones, o como la ciencia que produce condiciones necesarias.

Trataremos la evolución de los conceptos e ideas matemáticas siguiendo su desarrollo histórico. En realidad, las matemáticas son tan antiguas como la propia humanidad. Las encontramos en los diseños prehistóricos de cerámica, tejidos y en las pinturas antiquísimas (donde se pueden encontrar evidencias del sentido geométrico y del interés en figuras geométricas). También los sistemas de cálculo primitivos estaban basados en el uso de los dedos de una o dos manos.

Las primeras referencias de matemáticas avanzadas y organizadas datan del tercer milenio a.C., en Babilonia y Egipto.

La civilización Babilónica (5000 a.C.) avanzó en lo que se denomina álgebra retórica, las ecuaciones cuadráticas, cúbicas, bicuadráticas y de varios tipos con dos incógnitas. Estas matemáticas estaban dominadas por la aritmética, con cierto interés en medidas y cálculos geométricos y sin mención de conceptos matemáticos como los axiomas o las demostraciones.

Con el tiempo, los babilonios desarrollaron unas matemáticas más sofisticadas que les permitieron encontrar las raíces positivas de cualquier ecuación de segundo grado. Fueron incluso capaces de encontrar las raíces de algunas ecuaciones de tercer grado, y resolvieron problemas más complicados utilizando el teorema de Pitágoras. Los babilonios compilaron una gran cantidad de tablas, incluyendo tablas de multiplicar y de dividir, tablas de cuadrados y tablas de interés compuesto. Además, calcularon no sólo la suma de progresiones aritméticas y de algunas geométricas, sino también de sucesiones de cuadrados.

La civilización Egipcia (3100 – 322 a.C.) logró avances en el campo algebraico, en la solución verbal de ecuaciones lineales lograron la estimación empírica de la duración de un año y fueron capaces de resolver problemas aritméticos con fracciones, así como problemas algebraicos elementales.

Los primeros libros egipcios, escritos hacia el año 1800 a.C., muestran un sistema de numeración decimal con distintos símbolos para las sucesivas potencias de 10 (1, 10, 100...), similar al sistema utilizado por los romanos. Los números se representaban escribiendo el símbolo del 1 tantas veces como unidades tenía el número dado, el símbolo del 10 tantas veces como decenas había en el número, y así sucesivamente.

En geometría encontraron las reglas correctas para calcular el área de triángulos, rectángulos y trapecios, y el volumen de figuras como ortoedros, cilindros y, por supuesto, pirámides.

La civilización Griega (2800 a.C. – 600 d.C.) tomó elementos de las matemáticas de los babilonios y de los egipcios. La innovación más importante fue la invención de las matemáticas abstractas basadas en una estructura lógica de definiciones, axiomas y demostraciones. Según los cronistas griegos, este avance comenzó en el siglo VI a.C. con Tales de Mileto y Pitágoras de Samos. Este último enseñó la importancia del estudio de los números para poder entender el mundo.

Esta civilización impulsó la transformación de las matemáticas en una ciencia deductiva, inventaron procesos geométricos para llegar a la solución de problemas algebraicos, y lograron cierta geometría algebraica, en la que las construcciones geométricas tenían la misma función que las operaciones algebraicas.

Aunque las ideas de cambio o cantidad no eran ajenas a los griegos, pues consideraron problemas sobre el movimiento, continuidad o infinito, se destacó que estos no fueron estudiados desde un punto de vista cuantitativo.

Las primeras relaciones funcionales fueron ligadas a procesos astronómicos, en forma tabulada a partir de interpolaciones generalmente lineales. Por otro lado el uso de proporciones, la disociación entre número y magnitud, el carácter geométrico y los problemas debido al simbolismo, fueron obstáculos conceptuales en las aproximaciones cuantitativas y cualitativas en el estudio de fenómenos de cambio.

En la Edad Media se introdujeron algunas abreviaturas para las incógnitas, se incrementó el número de funciones, entre ellas las trigonométricas, se perfeccionó la tabulación de funciones. También se preocupó por el estudio de las cosas sujetas al cambio y en particular al movimiento, es así como se inicia el estudio cuantitativo de fenómenos, apareciendo conceptos como: cantidad variable, velocidad instantánea, aceleración. Todos ellos ligados a la idea de función.

Desde el siglo XV hasta el XVII con los trabajos de Tartaglia, Cardan, Vieta, Galileo, Descartes, Wallis, Newton y Leibniz, se inicia el florecimiento en el estudio de procesos de variación y cambio. De igual manera el nacimiento de la geometría analítica, el cálculo infinitesimal y el uso del álgebra simbólica, se da un gran avance en el estudio de las funciones y la aparición del término función.

Las leyes entre magnitudes establecidas por Galileo, son auténticas relaciones funcionales que dieron pie al concepto de función. La extensión del concepto de número, la configuración de los números reales, la aparición de los números complejos y el álgebra simbólica, permitió considerar a las funciones como

relaciones entre conjuntos de números y representar las funciones por medio de fórmulas.

Con los trabajos de Newton, en el desarrollo de funciones en series infinitas de potencias, se hizo posible la representación analítica de la mayoría de las funciones. Logró la interpretación geométrica-cinemática de los conceptos del análisis matemático. Presentó la diferenciación y la integración como problemas del cálculo infinitesimal.

Leibnitz en un escrito de 1673, introdujo el término función, refiriéndose a un problema del cálculo de ordenadas a partir de cierta propiedad de las tangentes. En los siglos XVIII y XIX con los trabajos de Bernoulli, Euler, Lagrange, Fourier y Dirichlet, se consolida el álgebra simbólica y la noción de función como representación de procesos de variación y cambio.

Euler dió la notación $f(x)$, al igual que definió: constante, variable y función, función como una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y números o cantidades constantes. Aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y otras ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. Euler escribió textos sobre cálculo, mecánica y álgebra que se convirtieron en modelos a seguir para otros autores interesados en estas disciplinas. Sin embargo, el éxito de Euler y de otros matemáticos para resolver problemas tanto matemáticos como físicos utilizando el cálculo sólo sirvió para acentuar la falta de un desarrollo adecuado y justificado de las ideas básicas del cálculo.

Fourier logró representar por medio de funciones analíticas, funciones arbitrarias; así cualquier función podía ser representada por una serie de Fourier. Pero es hacia 1830 con el desarrollo de la teoría de funciones de variable compleja (Cauchy, Riemann, Weierstras) y el posterior desarrollo de la teoría de conjuntos, que se plantea: dados dos conjuntos A y B, una función de A en B es una ley que

a cada elemento x de A hace corresponder un solo elemento y de B ; perdiéndose la idea de variación, continuidad y dependencia.

A comienzos del siglo XX surge la teoría de funciones de una variable, teoría de aproximación de funciones, pero es el llamado análisis funcional, construido a través de los trabajos de Hilbert, Riesz y Banach, el hecho importante para la matemática moderna. Se establece que en el análisis clásico la variable es una magnitud o número y en el análisis funcional se considera como variable la función misma.

A pesar de la importancia que han tenido estos problemas, un hecho que Hilbert no pudo imaginar fue la invención de la computadora digital programable, primordial en las matemáticas del futuro. Aunque los orígenes de las computadoras fueron las calculadoras de relojería de Pascal y Leibniz en el siglo XVII, fue Charles Babbage quien, en la Inglaterra del siglo XIX, diseñó una máquina capaz de realizar operaciones matemáticas. Este avance ha dado un gran impulso a ciertas ramas de las matemáticas, como el análisis numérico y las matemáticas finitas, generando nuevas áreas de investigación matemática. Se ha convertido en una poderosa herramienta en campos tan diversos como la teoría de números, las ecuaciones diferenciales y el álgebra abstracta. Además, la computadora digital ha permitido encontrar la solución a varios problemas matemáticos que no se habían podido resolver anteriormente, como el problema topológico de los cuatro colores propuesto a mediados del siglo XIX.

Hoy en día las herramientas computacionales, que están provistas de un sistema de álgebra simbólica ejecutable, permiten observar, explorar, conjeturar, representar, modelar y simular situaciones de variación y cambio, a partir de la interacción entre sistemas de representación.

El conocimiento matemático del mundo moderno está avanzando más rápido que nunca. Teorías que eran completamente distintas se han reunido para formar

teorías más completas y abstractas. Aunque la mayoría de los problemas más importantes han sido resueltos, otros como las hipótesis de Riemann siguen sin solución. Al mismo tiempo siguen apareciendo nuevos y estimulantes problemas. Parece que incluso las matemáticas más abstractas están encontrando aplicación.

2.1.2 Tratamiento de la variación y el cambio en el currículo de matemáticas¹¹: hace ya varios años, se viene desarrollando en el campo de la Educación Matemática trabajos necesarios para generar una re-estructuración en los programas de matemática, buscando re-organizarlos, re-orientarlos y actualizarlos de acuerdo a los avances dentro del panorama general de la investigación que se adelanta en el terreno de la didáctica de las matemáticas y su articulación con las nuevas tecnologías computacionales e informáticas.

Las matemáticas constituyen y ofrecen un conjunto amplio de conocimientos y de procedimientos: análisis, modelación, cálculo, medición y estimación del mundo natural y social, que permite establecer relaciones entre los más diversos aspectos de la realidad. Nacen de la necesidad de resolver determinados problemas prácticos y se sustentan por su capacidad para tratar, explicar, predecir, modelar situaciones reales y dar consistencia y rigor a los conocimientos científicos. Les caracteriza la naturaleza lógico-deductiva de su versión acabada, el tipo de razonamientos que utilizan y la fuerte cohesión interna dentro de cada campo y entre unos campos y otros. Su estructura, por otra parte, lejos de ser rígida, se halla en continua evolución, tanto por la incorporación de nuevos conocimientos como por su constante interrelación con otros campos.

Participar en el conocimiento matemático consiste, más que en obtener resultados finales de esta ciencia, en el dominio de su "forma de hacer". La adquisición del conocimiento matemático, de "ese saber hacer matemáticas" para poder valerse

¹¹ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Op. Cit., p.11-16.

de ellas, es un proceso lento, laborioso, cuyo comienzo debe ser una prolongada actividad sobre elementos concretos, con objeto de crear instituciones que son un paso previo al proceso de formalización. Por ello es indudable que aunque los aspectos conceptuales están presentes en la actividad matemática, no son los únicos elementos que actúan en su desarrollo.

Preguntémonos por el lugar que ocupa la variación y el cambio dentro del currículo de matemáticas, es decir por su desarrollo y su ubicación en el dominio de un campo conceptual, donde se involucren conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas.

En la vida práctica y el mundo científico, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.

En la renovación curricular de matemáticas, se concibió el conocimiento como proceso y conjunto de experiencias durante toda la vida, transferibles a otras situaciones y presentes en diferentes contextos; los conocimientos se deben actualizar permanentemente; Se posiciona al estudiante como centro del proceso y el maestro su orientador.

En el Marco General del Programa para estudio de la matemática en educación básica, referente a los sistemas analíticos, hay un reconocimiento explícito del estudio de situaciones de cambio, a través de la modelación de situaciones provenientes de la vida real, de otras ciencias y de las mismas matemáticas, la que se desarrolla mediante el estudio de situaciones contextualizadas a través de

funciones numéricas, el análisis cualitativo y cuantitativo de las gráficas, traducción entre representaciones simbólicas, algebraicas, gráficas, pictóricas, entre otros.

Entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran: los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano, las representaciones pictóricas, la instruccional, la mecánica, las fórmulas y las expresiones analíticas.

La tabla constituye una herramienta necesaria para la comprensión de la variable, ayudando a la escritura de las expresiones algebraicas o fórmulas para describir la variación o el cambio; por último, el estudio de los patrones que incluyen escenarios de la vida práctica como fotografía ó escenarios geométricos o numéricos en matemáticas, conforman otra herramienta necesaria para el estudio de la variación.

Es importante tener en cuenta el análisis cualitativo de las gráficas, el estudio de situaciones contextualizadas relacionadas con funciones y traducción entre representaciones. Los modelos más simples de función encapsulan modelos de variación como la proporcionalidad y todas sus aplicaciones.

En el proceso de construcción participativa de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1997)¹², se incorporan nuevos elementos provenientes de las investigaciones en el campo de la educación o didáctica de la matemática. Fundamentalmente en los Lineamientos Curriculares, se plantea como propósito central de la Educación Matemática de los niveles de básica y media contribuir al desarrollo del pensamiento matemático a partir del trabajo con situaciones problemáticas provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias o de las mismas matemáticas.

¹² COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Citado por COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Op. Cit p.13.

2.1.3 Pensamiento Variacional; modelación y transformación de fenómenos de cambio¹³: el pensamiento variacional es conceptualizado como la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas.

La intención de profundizar en el aprendizaje y manejo de funciones como modelo de situaciones de cambio, identificar fenómenos, describir, interpretar, predecir sus consecuencias, cuantificar y modelar, todos estos relacionados a una situación de la vida diaria, que involucre de manera explícita la consideración del tiempo, hacen parte del desarrollo del pensamiento variacional. En busca de este desarrollo se deben plantear actividades como situaciones problema que puedan ser trabajadas en diferentes niveles de escolaridad y que no necesariamente siguen una secuencia lineal de contenidos, donde el estudiante identifique fenómenos de cambio, sea capaz de modelarlos y transformarlos.

La modelación relacionada con sistemas de representaciones integra: símbolos, signos, figuras, gráficas y construcciones geométricas. Éstos expresan el concepto y suscriben en sí mismos el modelo con el cual es posible interpretar y predecir comportamientos de fenómenos físicos. La modelación es la representación de un objeto matemático que está vinculado a una situación real. También significa construir una representación de algo.

Cuando se modelan situaciones reales u otras que se enmarcan en el proceso cognitivo de la adquisición del concepto de función, se pretende que el estudiante, al aproximarse a fenómenos reales, analice y describa elementos matemáticos tanto simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos. En el proceso de modelación se produce la distinción de variables y la relación entre las variables, las cuales a su vez impulsan la construcción de otros registros de representación.

¹³ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Op. Cit., p.17-25.

Se consideran dos formas de modelación de situaciones en las que interviene el tiempo. La primera cuando se considera el tiempo como una magnitud continua, donde éste fluye de manera ininterrumpida y cuyo modelo general de estudio es el de funciones de variable real. La otra forma de modelar una situación en la que interviene el tiempo será cuando se observa la situación en instantes espaciados de tiempo. El modelo general para el estudio de éstas es el de las sucesiones (función de variable entera).

Es importante abordar la modelación como un proceso que conduce al concepto de función y de su aplicación en diferentes escenarios. “A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo”.

El concepto de función responde a diferentes definiciones y etapas históricas. Las definiciones han sido modificadas entre otras razones por los avances tecnológicos, que se han promovido en la enseñanza de la matemática (calculadoras gráficas, paquete de programación de instrucción interactiva, entre otros). La definición dada en términos de variables señala que: “cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda”. Muy distinta a la ofrecida en términos de conjunto de pares ordenados: “una función es un conjunto de pares ordenados de elementos tales que ningunos dos pares ordenados tiene el mismo primer elemento. El conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados se llama dominio y el conjunto de los segundos elementos rango de la función”.

Otra definición como una regla de correspondencia se explica de la siguiente manera: “una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada valor de x de cierto subconjunto D de A un elemento determinado de manera única $f(x)$ de B ”. El concepto pasó por

diferentes etapas históricas, de las cuales fue recogiendo elementos matemáticos tales como: cantidad, variable y constante. Las funciones en el contexto de los números reales, son llamadas funciones reales de variable real, o numéricas y es en ellas en las que mejor encaja el término variable. Por tal motivo se relaciona el estudio de funciones con el Pensamiento Variacional.

Descripción e interpretación de situaciones de variación y cambio desde un punto de vista cualitativo, se refiere a identificar, describir (verbal o escrito), magnitudes presentes en la situación y prever las consecuencias que tendrán en el transcurso del tiempo.

Cualitativamente se pueden representar de las siguientes formas:

Escrita: el estudiante debe ser capaz de describir con sus propias palabras lo que está sucediendo en la situación de cambio, al igual que las conclusiones que se deduzcan de sus observaciones.

Pictórico: esta representación se realiza a través de dibujos y gráficas de los diferentes momentos de la situación, mostrando lo que el estudiante finalmente ha entendido.

Modelos físicos: se recrean las situaciones a través de maquetas con movimientos para lograr un entendimiento mas concreto.

Cuantitativamente se pueden representar de las siguientes formas:

Representación geométrica: las magnitudes involucradas en la situación se asocian con longitudes de segmentos reconociéndose propiedades comunes del comportamiento algebraico y continuidad.

Representación tabular: cuando se elaboran diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación de cambio. Con esta representación se

puede hacer un estudio de los datos numéricos para encontrar patrones de regularidad y establecer expresiones algebraicas.

Representación algebraica: permite establecer información sobre el comportamiento de las variables y lograr una comprensión del fenómeno. Se basa en establecer expresiones algebraicas que generalicen la situación de cambio.

Representación gráfica: se hace la representación correspondiente a la situación en un plano cartesiano. Es necesario que el estudiante dé sentido a los objetos de estudio, que pueda analizar y describir las diferentes representaciones para poder entender el fenómeno de variación.

Con la aparición de las tecnologías computacionales, se amplían las posibilidades de representación de los fenómenos de variación y de poder pasar de un sistema de representación a otro, ya sea entre cualitativos, cuantitativos, de cualitativos a cuantitativos y viceversa. En la actualidad los instrumentos computacionales incorporan sistemas de representación que presentan características novedosas: son sistemas ejecutables de representación, virtualmente ejecutan funciones cognitivas y hacen posible un campo de experimentación.

La revolución tecnológica desarrollada en este nuevo siglo ha traído consigo nuevos elementos que están penetrando y modificando el tejido y las bases de nuestra sociedad, consecuencia de esto encontramos que las TICs y particularmente la red de Internet vienen influenciando en todos los ámbitos de desarrollo y progreso social.

Los sistemas educativos no pueden ignorar esta realidad tecnológica, puesto que se trata de un nuevo medio de comunicación llamado a desempeñar un papel importante en la sociedad de la información, que proporciona materiales, recursos, información y comunicación para enriquecer los procesos educativos; al igual que una herramienta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje.

2.2 ENTORNO VIRTUAL DE APRENDIZAJE

El Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA) es otro elemento teórico requerido para realizar la propuesta metodológica referida al Pensamiento Variacional; percibido el EVA como un instrumento de mediación educativa, en donde se puede aplicar y reforzar técnicas de enseñanza y aprendizaje usando de forma eficiente los recursos tecnológicos disponibles. El EVA es un espacio de interacción permanente que promueve el flujo de conocimientos y experiencias educativas ampliando la posibilidad de poder adquirir mayor creatividad, sentido crítico y reflexivo para crear procesos integrados e integrales en las diferentes situaciones de aprendizaje.

Definir un EVA no es sencillo, sin embargo se pueden proporcionar características que permitan establecer su especificidad, tales como: el EVA es un espacio de información, un espacio social, un espacio que se representa explícitamente, un espacio en donde los usuarios no son solamente participantes sino también actores, un espacio que no se restringe para la educación a distancia, un espacio que integra múltiples herramientas y que se traslapa con el entorno físico.

En términos educativos, surge la inquietud sobre si un EVA mejorará la calidad de la educación. Frente a esto se realiza una descripción de los efectos potenciales que un entorno ofrece: son medios que no tienen efectos específicos pero ofrecen alternativas, fomentan las interacciones sociales, permiten un acceso ilimitado a la información, promueven el aprendizaje colaborativo, donde es fundamental la calidad del material con el que se trabaja, son espacios para la innovación. Dicha caracterización y descripción de los efectos potenciales se logra a partir de traducción, estudio y análisis de la Conferencia: Virtual Learning Environments¹⁴

Un EVA no se debe confundir con cualquier sitio Web que proporciona actividades educativas o con sistemas que incorporen realidad virtual, este ofrece mucho más

¹⁴ DILLENBOURG, Pierre. "Learning in the New Millennium: Building New Education Strategies for Schools". Virtual Learning Environments. University of Geneva. EUN Conference 2000. p. 1-27.

que páginas Web estáticas. Se debe diferenciar de un campus virtual el cual proporciona cursos universitarios mientras que el EVA puede incluso abarcar planes de estudio pequeños. Aunque hay una gran variedad de entornos, la meta no es definir cuales de estos merecen el nivel de EVA, sino describir sus características:

2.2.1 Características de un EVA¹⁵

Un EVA es un espacio de información: tiene como componente esencial la información, la cual puede ser presentada en diferentes formatos: DOC (Microsoft Word), XLS (Microsoft Excel), XML, PDF, HTML, RTF, TXT ANSI, MCW, WRI, WPD, WK4, WPS, SAM, RFT, WSD, hipertexto, enlaces. En estos espacios se busca dar a la información una configuración atractiva para el usuario, por tanto se hace referencia a la arquitectura de la información en vez de la estructura; que se refiere a cómo se organiza.

La información almacenada es el centro de reflexión de estos espacios, guiada bajo propósitos de formación, alrededor de la cual se debe generar interacción entre los usuarios, producciones, críticas, reflexiones, etc.

Un EVA es un espacio social: un sistema de páginas Web no constituyen un EVA a menos que haya interacción social sobre o alrededor de la información, ya sea de manera sincrónica (cuando se coincide en el espacio y en el tiempo), asincrónica o mediante comunicación indirecta (compartir objetos). Lo característico de un EVA comparado con cualquier espacio de información son los espacios diseñados para la interacción: foro, cafetería, Chat, etc y en la medida en que los usuarios encuentren intereses comunes, el espacio llega a ser intrínsecamente social.

El espacio virtual se representa explícitamente: la representación del EVA abarca desde el texto en interfases (diseño de presentación en pantalla para

¹⁵ DILLENBOURG, Pierre. "Learning in the New Millennium: Building New Education Strategies for Schools". Virtual Learning Environments. Op Cit., p. 1-12

interactuar y comunicar información) hasta la reproducción de las gráficas más complejas en tercera dimensión. La razón fundamental para usar las representaciones de las gráficas en tercera dimensión es la motivación, influenciando el trabajo de los estudiantes. Sin embargo, la cuestión clave no es la representación por sí misma, sino lo que ellos hacen realmente con esa representación.

Existe una variedad de mecanismos mediante los cuales el espacio virtual tiene un impacto en las interacciones para el aprendizaje, por eso el tema principal de su diseño debe responder a las preguntas: ¿qué información se debe considerar para alcanzar los propósitos? o ¿cuál es la relación estructural entre la representación espacial y el espacio para la información?

Los usuarios no son solamente participantes, sino también actores: lo más específico en un EVA es la instalación de actividades en las cuales los estudiantes construyen y comparten ideas abiertamente, donde no solamente crean textos y páginas Web, sino que dan una dinámica al EVA al gestionar y proponer nuevos espacios de interacción.

La noción de actividad de aprendizaje en un EVA se refiere a algo más que un curso, está ligada a la noción de proyecto, así lo que potencialmente ofrece un EVA puede ser descrito como elaboración de los estudiantes, quienes se convierten en miembros y contribuidores del espacio social y de la información.

Un EVA no está restringido a la educación a distancia: la educación soportada en páginas Web, se asocia a menudo con la educación a distancia, pero también puede ser usada como soporte en el aprendizaje presencial.

En la escuela primaria y secundaria, las actividades apoyadas en Internet se utilizan para enriquecer el aprendizaje presencial, no para sustituirlo y con el objetivo de renovar los métodos de enseñanza.

Un EVA integra múltiples herramientas: foros, chat, espacio para depositar textos, cafetería, entre otros, son herramientas con las que se cuenta y que soportan múltiples funciones: información, comunicación, colaboración y manipulación. Estos recursos deben ser trabajados bajo una integración técnica y pedagógica, por ejemplo cuando se utiliza un software como soporte de una estrategia pedagógica orientado por un propósito educativo; la integración técnica soporta la pedagógica.

Un EVA es un espacio que se traslapa con el entorno físico: un EVA integra no solamente una variedad de recursos tecnológicos, sino también herramientas físicas que se pueden encontrar en un salón de clases, por ejemplo recursos de aprendizaje no computarizados (libros, instrumentos), interacciones que no son mediadas por computadores (conferencias, discusiones en grupo, escritos), actividades no mediadas por equipos tecnológicos (dinámicas de grupo). Establecer dónde termina el entorno físico y dónde inicia el virtual es un asunto filosófico complejo, de ahí que, no se pretende trazar un límite entre los objetos físicos y virtuales, sino completarlos.

2.2.2 Efectos potenciales de un EVA¹⁶: un EVA por sus características hace inferir que contiene elementos potenciales que contribuyen a mejorar la calidad de la educación. Sin embargo, todo depende del uso eficiente que se haga de ellos. Estos entornos tienen algunos efectos potenciales que se reseñan a continuación:

Los medios no tienen efectos específicos, pero ofrecen posibilidades: puede parecer trivial decir que un medio no tiene ningún efecto en general, pero la historia de la tecnología en la educación, demuestra que toda tecnología (televisión, computadoras, hipertexto, multimedia, Internet, realidad virtual,...) genera expectativas con respecto a los efectos que por sí misma produce.

Así por ejemplo: la efectividad de un curso virtual usualmente está limitada al contexto pedagógico donde se desarrolle, al escenario pedagógico en el cuál se

¹⁶ DILLENBOURG, Pierre. "Learning in the New Millennium: Building New Education Strategies for Schools". Virtual Learning. Environments. Op.Cit. p.13-27.

integre, al grado de compromiso del profesor, a la disponibilidad de tiempo y la infraestructura técnica.

La tecnología por sí sola no cambia el modelo tradicional de enseñanza, su efecto es potencial en el sentido en que se incorporen estas herramientas a nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje.

Las interacciones sociales: los EVA se apoyan en la interacción social de muchas maneras: sincrónica, asincrónica, texto, video, audio. A continuación se muestra que el desafío pedagógico no sólo se limita a la interacción cara a cara, sino a explorar qué tan eficientes son las nuevas funcionalidades de la comunicación en un EVA.

- **Los lugares virtuales definen el contexto conversacional de tal modo que implícitamente transmiten la comunicación:** el contexto social donde ocurren las interacciones tiene un impacto fuerte en la manera como el estudiante participa, inclusive mayor que las características tecnológicas. La variable dominante no es la sincronización sino el contrato de la comunicación, a menudo implícito entre los interlocutores. El escenario implícito de las reglas de comunicación es una de las posibilidades sociales de los lugares virtuales, así por ejemplo, los estudiantes no cuentan con las mismas reglas para la conversación en un café que en una oficina.
- **Para ser eficaz las interacciones virtuales no tienen que imitar la comunicación cara a cara:** los diseños del espacio virtual no intentan necesariamente imitar el espacio físico, buscan crear nuevas posibilidades. En el mismo sentido, el modo más relevante de la comunicación no es necesariamente el que imita conversaciones cara a cara. Así por ejemplo, los usuarios pueden participar en múltiples conversaciones paralelas, donde el profesor interactúa con varios estudiantes situados en diferentes lugares virtuales, cada lugar manteniendo su propio contexto de conversación. El

desafío es entender estas posibilidades e integrarlas donde son pedagógicamente relevantes.

- **Comunicación no verbal:** la especificidad de un EVA es que, más allá de los mensajes de texto, voz o vídeo, los usuarios pueden comunicarse de otras maneras: cambiando objetos, moviéndose en el espacio, suprimiendo y agregando objetos en la interfaz.
- **Construcción de comunidades virtuales:** cuando se interactúa recíprocamente en cierto medio, se construye progresivamente una comunidad. La idea de comunidad en un EVA no surge porque los grupos utilicen la comunicación electrónica, es necesario además de la interacción, compartir metas, experiencias, y todo lo del medio.

El surgimiento de una comunidad educativa está relacionado con la cultura, tomada aquí en su dimensión cognoscitiva. Por tanto, un EVA no debe ser un lugar donde el estudiante absorba la cultura, sino sitios donde se construye una nueva cultura o se encuentra por lo menos la posibilidad de ampliar la ya existente.

Hay comunidades de profesores que buscan su desarrollo a través de un funcionamiento colectivo, o pretenden integrar directivos, profesores, coordinadores y padres de familia con el fin de romper las barreras que se crean alrededor de la escuela.

El acceso ilimitado de información: la Web permite a los usuarios tener acceso a una gran cantidad de información, pero frente a ella surgen inquietudes tales como: la validez de la información, su posible desbordamiento, la información que contradice los valores morales y éticos de los profesores y la ausencia de una estructura para ella. Sin embargo, no se debe ocultar el hecho de que este acceso es una nueva oportunidad para conocer varias fuentes de información, su eficiencia dependerá de la manera como el diseñador explote estas oportunidades, así por ejemplo se puede hacer una preselección de la información

o enseñar a los estudiantes cómo buscar la información y a la vez ser críticos frente a ella.

El aprendizaje colaborativo, no es una fórmula: un EVA proporciona todas las posibilidades para un aprendizaje colaborativo, éste será efectivo si los miembros del grupo emplean actividades productivas, es decir cuando se expresan en términos de conceptos y no simplemente de respuestas, cuando discuten sobre el significado de términos y representaciones.

En un EVA se puede regular el proceso colaborativo para favorecer la aparición de interacciones productivas mediante:

- **Una colaboración estructurada**, donde el tutor propone algunas actividades a desarrollar con el objeto de incentivar al análisis, crítica y reflexión acerca de lo que se está haciendo.
- **Interacciones reguladas**, para precisar elementos de la discusión y controlar que todos participen.

¿Con que trabajar, es lo que importa?: en vista de las múltiples herramientas con las que se puede trabajar en un EVA, es necesario preguntarse acerca de la calidad y potencialidad de estos recursos frente una situación de aprendizaje en estos ambientes. Por ejemplo, al seleccionar un software como soporte para una actividad de aprendizaje no solamente se debe tener en cuenta el hecho de que éste sea de libre distribución, fácil de instalar y de manipular, sino también el efecto que produce en el aprendizaje, al cómo trabajar con mis estudiantes, cuál es su desempeño y cuánto tiempo se podrá ahorrar.

El espacio virtual, es un espacio para la información: aunque no podemos predecir cómo un EVA influye en la eficiencia del aprendizaje, un punto importante a considerar es que, para los profesores éste es un espacio abierto, donde se pueden intentar nuevos acercamientos.

El efecto principal del EVA en los sistemas educativos es poder revitalizar la enseñanza por fuera de la Web. Así, Harasim (1999) referenciado por Dillenbourg¹⁷, divulgó que los profesores quienes trabajaron un tiempo para la universidad virtual, cambiaron su estilo de enseñanza, incluyendo prácticas de aprendizaje colaborativo, viéndose menos como proveedores de conocimiento y más como facilitadores de este.

Aprovechar las posibilidades que brinda el EVA como instrumento mediador en procesos de aprendizaje y enseñanza requiere de una estrategia metodológica que integre el aspecto tecnológico y pedagógico, bajo la orientación de propósitos de formación establecidos.

2.2.3 Elementos funcionales básicos del EVA¹⁸: como bien se ha dicho, los entornos virtuales son espacios diseñados para la información y por tanto cada uno de los espacios que lo componen son herramientas fundamentales de comunicación para la acción docente. A continuación se hará una descripción de la plataforma EVA de la Universidad del Cauca y los elementos funcionales que se pueden encontrar en ella.

La plataforma EVA de la universidad del Cauca¹⁹, ha sido desarrollada en el marco del proyecto E-LANE, (European and Latin-American New Education), iniciativa de instituciones europeas y latinoamericanas, financiada por la Comisión Europea dentro del Programa @lis (Alianza Sociedad de la Información) en la línea de demostración en educación electrónica. El propósito de E-LANE es promover un ambiente integrado de aprendizaje en el marco de la sociedad de la información, en niveles de formación tanto académico como no académico. El proyecto propone el desarrollo de una plataforma de e-learning mediante la integración de aplicaciones consolidadas de software libre, el diseño de una metodología

¹⁷ BELLOT, Andreu y SANGRÁ, Albert. Introducción a la Formación On-Line. Universidad Oberta de Cataluña. s./l. p. 7-8 y 14-16.

¹⁸ DILLENBOURG, Pierre. "Learning in the New Millennium: Building New Education Strategies for Schools". Op. Cit., p. 27

¹⁹ Proyecto E-LANE. Plataforma EVA (Entorno Virtual de Aprendizaje) de la Universidad del Cauca. Popayán, Colombia. 2006. <http://eva.unicauca.edu.co/>

innovadora de aprendizaje orientada y soportada en dicha plataforma, y la integración de contenidos de cursos de las más prestigiosas instituciones educativas en Europa y Latinoamérica, con el objetivo de proporcionar a la sociedad hispano-hablante material educacional de excelente calidad a bajo costo. El EVA-UNICAUCA trabaja con un sistema que permite manipular y organizar la información concerniente al desarrollo del curso. Este manejo se hace desde dos enfoques:

En un primer enfoque se incluye todo lo relacionado con el material educativo y la forma como se trabajará de acuerdo a una estrategia planteada, alrededor de la cuál se hará la acción formativa; espacios que solo pueden ser administrados por el tutor. El entorno virtual ofrece una serie de sitios para estos fines:

- Un espacio denominado “**documentos**” donde es posible depositar toda clase de textos en diferentes formatos (Word, html, zip), que serán utilizados como referencia.
- Un “**panel de control**” que permite al docente administrar una serie de espacios destinados a la comunicación no formal entre los participantes así como la conformación de grupos de trabajo. Estos espacios son:
 - ✓ **Foros** (proponer los temas): en vista de que la comunicación es parte esencial en los EVA, este es el ámbito de relación social del grupo y se pueden tratar tanto cuestiones espontáneas relacionadas con el contenido del curso como intervenciones de tipo personal y de opinión.
 - ✓ **Subgrupos** (administrar miembros, editar las propiedades del grupo, etc.): admite crear pequeñas sociedades de estudiantes a los que se asigna una determinada labor y para quienes se crea una página adicional que permite comunicar de manera concreta lo relativo a cada grupo: noticias, foros, información del subgrupo, calendario.
 - ✓ **Noticias** (información): espacio destinado a la comunicación directa con los estudiantes, tiene por objeto informar, recordar, dar indicaciones y pautas sobre la metodología a llevar a cabo para desarrollar los temas.

- ✓ **Asignaciones:** espacio dirigido hacia la asignación de tareas previstas dentro del plan de trabajo de la acción formativa.
- ✓ **Evaluaciones:** sitio que almacena las tareas enviadas por los estudiantes y que permite llevar un control sobre la entrega de éstas.
- ✓ Existen otros espacios: calendario, FAQ, almacenamiento de archivos, materiales de aprendizaje.

El segundo enfoque, se dirige hacia los espacios a los que tienen acceso los estudiantes, son parte de la estrategia de comunicación proporcionada por los entornos virtuales y que es función del tutor poner en juego para lograr un verdadero aprendizaje. Estos espacios son:

- **Documentos:** espacio donde se encuentran la bibliografía que se utilizará como guía para el curso. Este espacio permite descargar los archivos.
- **Foros:** espacio diseñado para plantear todo tipo de inquietudes, opiniones e interrogantes frente a determinado tema.
- **Noticias:** espacio de información frente a la dinámica y actividades del curso.
- **Asignaciones:** espacio para depositar actividades realizadas por cada estudiante, una opción para poder conocer su desempeño dentro del curso.
- **Planificación, calendario:** espacio de recordatorio que permite tener en pantalla el plan de trabajo a desarrollar con fechas y horas establecidas.

2.2.4 Características del sujeto²⁰: para efectos de la propuesta metodológica es indispensable definir y esbozar el papel que desempeñan los actores involucrados en la acción formativa en un Entorno Virtual de Aprendizaje.

El rol del estudiante: en la formación on-line, independientemente del nivel al que nos dirijamos, se debe comprobar que los estudiantes disponen de las aptitudes y habilidades necesarias para seguir el proceso de aprendizaje atendiendo al modelo propuesto y proveer las posibles acciones para solventar distancias entre lo que esperamos de ellos y lo que pueden o creen aportar.

²⁰ BELLOT, Andreu y SANGRÁ, Albert. Introducción a la Formación On-Line Op. Cit., p.10-13.

Aprender mediante un EVA implica seguir un proceso pedagógico centrado en el aprendizaje del estudiante, donde él debe asumir un rol activo y autónomo con tendencia al autoaprendizaje, es decir donde él participa, investiga, propone, discute, pregunta, critica, analiza, reflexiona y sintetiza.

El rol del formador: el papel del formador dentro de un EVA está dirigido a ser un guía facilitador, orientador o mediador del aprendizaje de los estudiantes, con lo que garantiza una formación personalizada.

El formador no solamente debe conocer la materia, sobre la que se realiza la formación sino que también es necesario que sea conciente de las peculiaridades propias de la formación no presencial, es decir éste junto con otros elementos facilita la formación de estudiantes críticos, de pensamiento creativo, dentro de un entorno de aprendizaje colaborativo.

El formador debe ser capaz de cambiar sus estrategias de comunicación, pues es distinto comunicarse con un auditorio presencial que hacerlo con un auditorio virtual, el canal y las estrategias a utilizar son diferentes. La comunicación verbal dependerá de la calidad de las comunicaciones y de la fluidez del orador; mientras que la comunicación no verbal debe ser muy explícita y precisa de tal forma que no dé lugar a confusión a la hora de ser leída por los estudiantes.

Nuestra capacidad de comunicar de una manera directa y ágil determinará en gran medida el éxito de la acción formativa, por ello hay que tener en cuenta algunas recomendaciones para la redacción de los mensajes:

- Los títulos de los mensajes deben contener la idea principal del texto.
- Procurar que el trato sea lo menos distante posible, el tono usado debe ser familiar y directo.
- No enviar mensajes excesivamente largos.
- Si un mensaje no se puede sintetizar, lo mejor es adjuntarlo en un fichero de texto.

- Dar una respuesta lo mas rápida posible a la recepción de mensajes, o informar que se ha leído el mensaje y se esta preparando la respuesta mas adecuada.
- Resaltar los aportes interesantes de un estudiante y aprovechar algunos mensajes de respuesta para formular otros.

Es necesaria la figura del formador bien preparado temáticamente y dispuesto a utilizar las estrategias didácticas más adecuadas para poder facilitar el progreso cualitativo y cuantitativo de diferentes estudiantes, para lo cual el formador debe diseñar:

- Tareas de orientación, motivación y seguimiento que le permitan tomar iniciativas de comunicación que favorezcan la continuidad de una relación personalizada y valorar los éxitos y las dificultades que haya encontrado el estudiante.
- Tareas de resolución de dudas sobre contenidos y procedimientos de la acción formativa.
- Tareas de evaluación que permitan conocer el grado de progreso demostrado por cada estudiante.
- Tareas que favorezcan el trabajo colaborativo tanto en espacios formales como no formales.

2.3 REFERENTE TEÓRICO PEDAGÓGICO

Como referente teórico para la construcción de la propuesta metodológica se consideran los acercamientos cognitivos del constructivismo Piagetiano, los acercamientos socioculturales desarrollados a partir de la obra de Vygotsky y el modelo pedagógico y metodológico del aprendizaje significativo, de las cuales se han tomado los aspectos más relevantes que a nuestro criterio pueden garantizar y encaminar hacia un verdadero proceso de aprendizaje, teniendo en cuenta lo que se pretende alcanzar con la estrategia y las necesidades y características del espacio donde se va a ser ejecutada.

“El constructivismo básicamente plantea que el individuo—tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos— no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano”²¹.

Esta corriente pedagógica fomenta la conversación y la interacción entre los estudiantes, estimula la capacidad de pensar, expresar e integrar diversos puntos de vista; alienta la búsqueda de la comprensión a través del análisis y la reflexión. El conocimiento se construye a medida que el aprendiz va descubriendo el sentido de sus experiencias. “La enseñanza incorpora problemas del mundo real y contextos auténticos que fomentan la colaboración, otorgando al alumno un alto grado de control del proceso de aprendizaje”. (Miller y Miller, 2000)²².

A continuación se muestran algunos apartes de las teorías constructivistas de Piaget y Vygotsky tomadas del artículo correspondiente a la “fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas”²³:

2.3.1 La Teoría Constructivista de Piaget²⁴: para Piaget, el aprendizaje consiste en el pasaje de un estado de menor conocimiento a un estado de mayor conocimiento. Postula la existencia de una serie de organizaciones internas de la experiencia y de la información previa del sujeto (sus estructuras cognitivas), que son cada vez mas poderosas y permiten integrar la información de modos crecientemente complejos (componente estructuralista).

²¹ CARRETERO, Mario. Constructivismo y Educación. Copyright Aique. Grupo Editor S. A. Buenos Aires, Argentina, 1997. p.39-71.

²² MILLER, S.M. y MILLER, K.L. “Theoretical and Practical Considerations in the Design of Web-Based Instruction” Citado por Henao A. Octavio. La Enseñanza Virtual en la Educación Superior. ICFES. Bogotá, D.C. Colombia, 2002.p. 22.

²³ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Op. Cit., p.40-56.

²⁴ *Ibid.*, p. 40-48.

Los progresos en la adquisición del conocimiento resultan, en realidad, de una construcción en la que el sujeto es responsable directo de su aprendizaje (componente interaccionista).

Al señalar el lugar de la actividad como factor determinante del incremento en los conocimientos, Piaget recuerda que la maduración y la influencia social no son ajenas a este proceso (componente Constructivista).

Piaget definió a la escuela como un entorno que debe estimular y favorecer el proceso de autoconstrucción (Armella y Waldegg)²⁵. El profesor convertido en un mediador entre los conocimientos y el aprendizaje, debe facilitar el descubrimiento de nociones y la elaboración del saber y del saber-hacer, más que presentarlos bajo una forma preestablecida.

De la concepción heredada del modelo Piagetiano, el desarrollo cognitivo se refiere a aprender a pensar y a valorar los aspectos operativos del pensamiento (procesos internos, operaciones mentales), a hacer experimentar al niño, a favorecer la manipulación con el fin de hacer surgir leyes generales, sin embargo esta teoría minimiza el papel de la cultura en la cognición ya que su preocupación son los procesos internos que tienen lugar en el sujeto, lo social es un factor esencial del desarrollo, sin el cual este no ocurre. Pero sus estudios sobre sujetos toma lo social como constante para ocuparse de cómo integra el sujeto su experiencia para producir conocimientos; desestima el papel de los sistemas de representación (lenguaje, memoria,...) y no es una teoría de la construcción escolar.

En definitiva: un recorrido por la teoría de Piaget resulta imprescindible para cualquier profesor que pretenda conocer cómo evoluciona la mente de sus alumnos. Sin embargo, es importante señalar que no es una teoría educativa,

²⁵ ARMELLA, L. y WALDEGG, G. Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas. Citado por: COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas, Op. Cit., p. 47.

sino psicológica y epistemológica. Por lo tanto, las implicaciones educativas que pueden desprenderse de ella no son tan obvias como puede parecer a primera vista. Es decir, las investigaciones Piagetianas no han indagado en cómo se comporta el niño en condiciones de aprendizaje escolar, sino cómo van evolucionando sus esquemas y su conocimiento a lo largo de diferentes edades.

El aprendizaje es una actividad solitaria, donde el individuo aprende al margen de su contexto social. Por supuesto, a la hora de los parabienes teóricos se concede un papel a la cultura y a la interacción social, pero no se especifica cómo interactúan con el desarrollo cognitivo y el aprendizaje. Ciertamente, en las elaboraciones teóricas tampoco se concede un lugar a una unidad de análisis que permite estudiar las relaciones entre lo social y lo individual.

2.3.2 La Teoría Constructivista de Vygotsky²⁶: una de las contribuciones esenciales de Vygotsky ha sido la de concebir al sujeto como un ser eminentemente social y al conocimiento mismo como un producto social.

En palabras de Vygotsky, un proceso interpersonal se ha transformado en otro intrapersonal. En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a escala social, y más tarde, a escala individual; primero, entre personas (interpsicológica), y después, en el interior del propio niño (intrapsicológica).

El desarrollo cognitivo se concibe como la apropiación, por parte del individuo, de las actividades humanas depositadas en el mundo de la cultura. El mundo social influye en el sujeto a través de otros sujetos, de los objetos socioculturales, de las prácticas que han sido creadas por generaciones anteriores. Dos componentes tienen un papel primordial en este proceso:

- **Los sistemas semióticos de representación:** para Vygotsky, el desarrollo de las funciones mentales superiores (la memoria, el lenguaje, la conciencia) solo es posible a través de los sistemas semióticos (la escritura, los números, el habla) ya que es necesario el recurso de un sistema semiótico de

²⁶ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Op. Cit., p.48-52.

representación para pensar en las representaciones mentales de la persona (Armella y Waldegg, 2002)²⁷.

- **La interacción social:** el desarrollo cognitivo resulta de una doble formación, primero externa y después interna, en un movimiento que va de lo social a lo individual (Armella y Waldegg, 2002)²⁸.

Otro de los conceptos esenciales en la obra de Vygotsky es el de la zona de desarrollo próximo. Según sus propios términos, “no es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con un compañero más capaz; lo que un niño puede hacer hoy en colaboración con otro, lo podrá hacer sólo mañana, de esta manera favorecer las adquisiciones en el niño significa para el adulto llevar a cabo una transición de la actividad tutelar a la actividad autónoma. Para hacer esto debe ajustar las condiciones de instrucción, no a las capacidades actuales del niño sino a su potencial de progreso.

La contribución de Vygotsky ha significado para las posiciones constructivistas que el aprendizaje no sea considerado como una actividad individual, sino más bien social. Se ha comprobado cómo el alumno aprende de forma más eficaz cuando lo hace en un contexto de colaboración e intercambio con sus compañeros. Igualmente, se han precisado algunos de los mecanismos de carácter social que estimulan y favorecen el aprendizaje, como son las discusiones en grupo y el poder de la argumentación en la discrepancia entre estudiantes que poseen distintos grados de conocimiento sobre un tema.

En definitiva, el constructivismo sólo es una orientación general, tanto en psicología como en educación, y que no supone la formulación de unos principios muy definidos que puedan aplicarse a todos los contenidos y a todas las

²⁷ ARMELLA, L. y WALDEGG, G. Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas. Op. Cit., p.49.

²⁸ Ibid., p. 49.

situaciones educativas. Si bien el constructivismo recoge las conclusiones de numerosas investigaciones que muestran la importancia de los propios esquemas de conocimiento, sin embargo no todo el conocimiento que maneja un individuo procede de una reelaboración de dichos esquemas. Es decir, en el constructivismo se mantiene una postura completamente racionalista sobre el aprendizaje, olvidándose que el aprendizaje asociativo también es un tipo de aprendizaje y que, dependiendo de la tarea y de los objetivos que se pretenda conseguir, puede ser más eficaz y adecuado que el aprendizaje por reestructuración.

2.3.3 Aprendizaje Significativo: el aprender no puede reducirse a comprender, sino que debe incluir también organización de la práctica y adquisición de información no significativa para el estudiante.

David Ausubel y otros (Ausubel 1963; Novak 1968 y Hanesian 1978)²⁹ formularon una teoría de aprendizaje que ha mostrado grandes promesas para la discusión sobre la práctica educativa. La idea primaria es que el aprendizaje del nuevo conocimiento depende de lo que ya se sabe. En otras palabras, construir el conocimiento comienza con una observación y reconocimiento de eventos y objetos a través de los conceptos que ya se poseen. Para aprender significativamente, las personas deben relacionar el nuevo conocimiento con los conceptos relevantes que ya se conocen. El nuevo conocimiento debe interactuar con la estructura de conocimiento existente.

Otra idea clave de la teoría de Ausubel es que los conceptos tienen diferente profundidad. Quiere decir que los conceptos pueden ir de lo más general a lo más específico.

El material instruccional que se utilice, deberá pues estar diseñado para superar el conocimiento memorístico tradicional de las aulas y lograr un aprendizaje más integrador, comprensivo y autónomo. La práctica del aprendizaje comprensivo

²⁹ CARRETERO, Mario. Op. Cit., p. 39-71.

arranca de una muy concreta propuesta: partir siempre de lo que el estudiante tiene, conoce, respecto de aquello que se pretende aprender.

Para Ausubel, lo fundamental del aprendizaje significativo como proceso consiste en que los pensamientos, expresados simbólicamente de modo no arbitrario y objetivo, se unen con los conocimientos ya existentes en el sujeto. Este proceso, pues, es un proceso activo y personal.

Ausubel distingue tres tipos de aprendizaje significativo³⁰:

- **Aprendizaje de representaciones:** es el aprendizaje más elemental del cual dependen los demás tipos de aprendizaje. Consiste en la atribución de significados a determinados símbolos, al respecto Ausubel dice: "Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el estudiante cualquier significado al que sus referentes aludan".
- **Aprendizaje de conceptos:** en este los conceptos se definen como "objetos, eventos, situaciones o propiedades que posee atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos", partiendo de ello se puede afirmar que en cierta forma también es un aprendizaje de representaciones.

Los conceptos son adquiridos a través de los procesos de formación y asimilación. En la formación de conceptos, los atributos de criterio (características) del concepto se adquieren a través de la experiencia directa, en sucesivas etapas de formulación y prueba de hipótesis.

- **Aprendizaje de proposiciones:** este tipo de aprendizaje va más allá de la simple asimilación de lo que representan las palabras, combinadas o aisladas, puesto que exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones.

³⁰ DELGADO, Palomino. Teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel. Argentina.1997.
<http://www.monografias.com/trabajos6/apsi/apsi.shtml>

El aprendizaje de proposiciones implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego estas se combinan de tal forma que la idea resultante sea más que la simple suma de los significados de cada palabra, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva.

Para Ausubel, aprender es sinónimo de comprender. Por ello, lo que se comprenda será lo que se aprenderá y recordará mejor porque quedará integrado en nuestra estructura de conocimiento. Por tanto, resulta fundamental para el profesor no solo conocer las representaciones que poseen los estudiantes sobre lo que se les va a enseñar, sino también analizar el proceso de interacción entre el conocimiento nuevo y el que ya poseen. De esta manera, no es tan importante el producto final que emite el estudiante como el proceso que lo lleva a dar una determinada respuesta (Carretero, 1997)³¹.

En el proceso de orientación del aprendizaje, es de vital importancia conocer la estructura cognitiva del estudiante; no sólo se trata de saber la cantidad de información que posee, sino cuales son los conceptos y proposiciones que maneja así como de su grado de estabilidad. Este proceso tiene lugar si el educando tiene en su estructura cognitiva conceptos, estos son: ideas, proposiciones estables y definidas, con los cuales la nueva información puede interactuar.

Sin embargo el aprendizaje significativo conduce a una enseñanza personalizada, desaprovechando los conocimientos que se pueden producir mediante una integración social, además la teoría de Ausubel presta especial atención al aprendizaje verbal y específicamente, al aprendizaje de conceptos, centrando el proceso de aprendizaje significativo en averiguar qué sabe el estudiante sobre el tema, en qué lenguaje se expresa, qué realmente quiere decir su lenguaje y qué disposición tiene el niño para el aprendizaje, es la base de esta forma de trabajo.

³¹ CARRETERO, Mario. Op. Cit. p.39- 71.

2.4 ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA

Las estrategias de enseñanza se pueden definir como los procedimientos o recursos utilizados por el formador para promover aprendizajes significativos, estas son usadas intencional y flexiblemente³².

El desarrollo de un curso virtual debe tener en cuenta los siguientes aspectos (Miller y Miller, 2000)³³:

- **La orientación o enfoque teórico:** actualmente la enseñanza virtual está orientada principalmente por dos corrientes teóricas:
 - ✓ Teoría del procesamiento de información: ésta corriente utiliza la metáfora del cerebro como un computador, y estudia los seres humanos como procesadores de información. Su enfoque es la descripción de estructuras y procesos mentales que explican representaciones del conocimiento.
 - ✓ El constructivismo: el diseño de ambientes virtuales para la instrucción con un enfoque constructivista supone cierta comprensión de cómo se elaboran o construyen significados y conceptos en la mente. Esta corriente comporta diversas visiones acerca de cómo ocurre el aprendizaje. No obstante, toda propuesta didáctica de índole constructivista debe incorporar los siguientes componentes: colaboración, perspectivas diversas, y contextos auténticos. La colaboración es el proceso mediante el cual se construyen significados, y representa un elemento esencial en el enfoque constructivista. Esta corriente pedagógica fomenta la conversación y la interacción entre los alumnos; estimula la capacidad de expresar, discutir, e integrar diversos puntos de vista; alienta la búsqueda de la comprensión a través del análisis y la reflexión.

El conocimiento se construye a medida que el aprendiz va descubriendo el sentido de sus experiencias. La enseñanza incorpora problemas del mundo

³² DÍAZ, Frida. HERNÁNDEZ, Gerardo. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Mc Graw Hill. México, Julio 1998. p.70 -112

³³ MILLER, S.M. y MILLER, K.L. "Theoretical and Practical Considerations in the Design of Web-Based Instruction". Op. Cit.,p.20- 27.

real y contextos auténticos que fomentan la colaboración, otorgando al alumno un alto grado de control del proceso de aprendizaje.

- **Las metas y objetivos de aprendizaje:** este factor está estrechamente relacionado con el contenido, el enfoque teórico de la enseñanza, las características del alumno, y los recursos tecnológicos. La estructura de un curso debe reflejar sus objetivos. Según el paradigma objetivista, la meta del aprendizaje es la adquisición de conocimientos. Desde una perspectiva constructivista la meta del aprendizaje es la construcción de conocimientos significativos. Aquí el valor agregado que ofrece la Red es una estructura que permite a los alumnos expresar sus comprensiones a medida que se desarrollan
- **Los contenidos:** la teoría y los contenidos están estrechamente relacionados. La orientación teórica que posea el diseñador, o la perspectiva psicopedagógica en la cual se fundamente el diseño del curso, influyen en la estructura del contenido de varias formas. Los métodos de enseñanza basados en la teoría del procesamiento de información utilizan la estructura de la Red para representar el contenido organizándolo en forma no-lineal y asociativa, tratando de replicar la estructura conceptual de los expertos. Así mismo, se adoptan ciertas estrategias de presentación del contenido, por ejemplo enseñando explícitamente la estructura de los contenidos por medio de organizadores gráficos, diagramas, etc.

El constructivismo busca presentar el contenido en contextos más auténticos, utilizando estudios de casos o problemas del mundo real. Los alumnos abordan un tema de tal manera que les resulte significativo, y van construyendo estructuras conceptuales a su propio ritmo. La capacidad de integrar los contenidos que se presentan organizados en forma asociativa y no-lineal difiere entre los estudiantes. Por lo tanto, la ubicación, frecuencia, y consistencia de los hiperenlaces es un aspecto determinante en una experiencia de aprendizaje significativo.

- **Características del alumno:** para lograr una instrucción exitosa es necesario tener en cuenta las características del alumno. Aunque este principio es válido para cualquier medio o estrategia de enseñanza, tiene implicaciones muy particulares para la instrucción en la Red. Los diseñadores de cursos virtuales deben atender a las siguientes condiciones del alumno: características cognitivas, motivación, conocimientos, y contexto social. Dos problemas que limitan el uso efectivo de un ambiente hipertextual son: el control sin restricciones de la navegación por parte del alumno, y la incapacidad de los alumnos para integrar significativamente la información no estructurada.
- **La capacidad tecnológica:** el futuro de la educación virtual estará configurado por los avances en las comunicaciones, en Internet, y en la tecnología de redes. A través de la Red se podrá disponer de servicios integrados de teléfono, televisión, radio, e Internet. Todos estos cambios determinarán la forma, el contenido, y las condiciones logísticas de la enseñanza virtual. La disponibilidad de estas tecnologías permitirá a los diseñadores de instrucción ofrecer ambientes y experiencias de aprendizaje fundamentados en los mejores principios pedagógicos.

2.5 CONTENIDOS MATEMÁTICOS

Los contenidos a trabajar en la propuesta metodológica están sujetos a desarrollar procesos de variación y cambio mediante la comparación, transformación, visualización y manipulación de expresiones algebraicas y funcionales combinando representaciones a través del uso de recursos computacionales.

Considerando que los procesos de variación y cambio se encuentran presentes en educación básica y media, para la selección de los contenidos a desarrollar en la propuesta metodológica, se debe tener en cuenta:

- Los recursos tecnológicos disponibles en la red, de libre acceso y que permitan la manipulación de los objetos matemáticos.

- Los propósitos establecidos por estándares curriculares para los grados 10 y 11, referidas al Pensamiento Variacional, sistemas algebraicos y analíticos son los siguientes³⁴:
 - ✓ Modelar situaciones de variación periódica haciendo uso de las funciones trigonométricas.
 - ✓ Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales.
 - ✓ Interpretar la noción de derivada como razón de cambio y desarrollar métodos para hallar la derivada de funciones básicas.

- Los temas a trabajar en la educación media y la forma como pueden ser abordados:
 - ✓ Funciones trigonométricas: determinar las regiones del plano en las que una función toma valores positivos y negativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función trigonométrica, el dominio y el rango de la función y establecer relaciones entre una función trigonométrica y sus propiedades.
 - ✓ Funciones reales: determinar la relación entre la gráfica y la ecuación de la función, utilizar las gráficas para determinar sus propiedades y aplicar el estudio de funciones reales en economía y biología.
 - ✓ Derivadas de funciones: identificar el concepto geométrico de la derivada, abordado desde la construcción de una recta tangente dado un punto sobre una curva. Aplicaciones de la derivada en física y economía como razón de cambio.
 - ✓ Integral definida: encontrar las propiedades de la integral definida, calcular el área de las regiones limitadas por curvas y el volumen de sólidos de revolución, aplicaciones en cinemática y trabajo.

³⁴ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Calidad. Santa fe de Bogotá, 1999. p.20-21.

2.6 SITUACIÓN PROBLEMA

“La situación problema constituye el punto de partida de las situaciones didácticas. Definida como una situación didáctica fundamental que pone en juego, como instrumento implícito, los conocimientos que el estudiante debe aprender.

La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características:

- Debe involucrar implícitamente los conceptos que el estudiante va a aprender durante la acción formativa.
- Representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez debe ser accesible a él.
- Permitir al estudiante utilizar conocimientos anteriores.
- Ofrecer una resistencia suficiente para llevar al estudiante a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones.
- Contener su propia validación.

La resolución de la situación problema supone una serie de interacciones simétricas entre los estudiantes y de interacciones asimétricas entre los estudiantes y el profesor, pero también supone la superación de un conflicto cognitivo interno del sujeto entre sus conocimientos anteriores y los que resuelven la situación planteada”³⁵.

La estructura que enmarca las situaciones problema es la propuesta por el proyecto de aula³⁶, definido como un instrumento de planificación didáctica del aula y un factor de integración que articula los componentes curriculares de un aula y utiliza la investigación como un medio de indagación y búsqueda.

³⁵ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Op. Cit., p.56-57.

³⁶CERDA G, Hugo. El Proyecto de Aula: El Aula como un Sistema de Investigación y Construcción de Conocimientos. Colección Mesa Redonda, Bogotá D.C. 2001. p.49- 57.

2.7 EVALUACIÓN

La evaluación tiene como finalidad identificar los conocimientos y habilidades del estudiante al iniciar una acción formativa, con el propósito de establecer su nivel conceptual con relación a los objetivos de aprendizaje propuestos, comprobar la adquisición de conocimientos durante y al finalizar la acción formativa de tal manera que sea posible realizar un seguimiento del proceso.

Para realizar la evaluación en términos de Pensamiento Variacional se debe tener en cuenta los siguientes indicadores de logro³⁷:

- Detectar, reproducir y extender patrones o esquemas que se repiten en varias situaciones y analizar situaciones de cambio en varios contextos.
- Representar y analizar funciones utilizando para ello tablas, expresiones orales, expresiones algebraicas, ecuaciones, gráficas, haciendo traducciones entre estas representaciones.
- Formular conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa y usar el recurso tecnológico para comprender dicho comportamiento.
- Interpretar gráficos que describen diversas situaciones.

La evaluación en un EVA debe planificarse de tal manera que permita³⁸:

- Establecer qué queremos evaluar, es decir, seleccionar algunos aprendizajes para comprobar con respecto a los mismos el grado de adquisición por parte de los estudiantes.
- Establecer qué queremos conseguir con la evaluación, es decir, si queremos comprobar la efectividad de los recursos y el plan de aprendizaje propuesto o el progreso de la actividad en relación con los resultados obtenidos.
- Establecer cuándo realizaremos la evaluación con el propósito de fijar su importancia y su finalidad.

³⁷ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Op. Cit., p. 31-32.

³⁸ BELLOT, Andreu y SANGRÁ, Albert. Introducción a la Formación On lline Op. Cit., p. 35-38.

- Establecer cómo vamos a realizar la evaluación, definiendo instrumentos para este fin.
- Establecer qué decisiones o acciones se derivan de la evaluación.

2.8 PROCESO DE SISTEMATIZACIÓN³⁹

La sistematización es la lectura y registro de procesos de innovación orientados con criterios derivados de la investigación en educación; implica la construcción de categorías de análisis, la recolección de datos, el registro de la experiencia haciendo uso de técnicas proporcionadas por la investigación.

Diseño del proceso de sistematización:

- **Delimitación del campo temático (estudio):** implica reconocer el contexto, la temática, los actores involucrados en la experiencia a ser sistematizada.
- **Definición caso de estudio:** permite conocer la experiencia que va a ser sistematizada, cuáles aspectos de esta práctica resultan ser importantes para la sistematización, cuáles se van a configurar en problema de estudio y a partir de las cuáles se va a construir el objetivo de la sistematización. Para esto juegan un papel fundamental las preguntas directrices que contribuyen a decantar el objeto de estudio: qué queremos resaltar, qué se quiere comunicar a los otros, qué aspectos de la experiencia innovadora resultan significativos, qué actividades han sido significativas para los estudiantes involucrados.
- **Diseño metodológico:** incluye elementos que se requieren en las etapas previas a la toma de registros, la recolección de la información y determinación de los recursos con los que se cuenta:

Desprejuiciamiento: tiene que ver con el hecho de hacer explícitos los prejuicios que nos acompañan en nuestra valoración de la práctica educativa,

³⁹ OROZCO C, Juan Carlos. Videoconferencia: Sistematización de Experiencias Educativas. Documento de Estudio de Circulación Restringida. MEN-CINDE. Bogotá Colombia 2003.

para tener una mirada mas subjetiva frente a la experiencia que queremos sistematizar.

Instrumentos de registro:

- ✓ Notas de campo: registros escritos tomados durante las experiencias educativas y observaciones puntuales sobre los acontecimientos, están limitadas en la medida que no se toman de manera sistemática y organizada, además de estar sesgadas por la mirada del investigador.
 - ✓ Diario de campo: registro que se hace cuando termina la experiencia de aula reconociendo elementos significativos y haciendo una reflexión a propósitos de los mismos. La limitación es el sesgo que le introduce al docente.
 - ✓ Cuestionarios, entrevista y notas de los estudiantes.
 - ✓ Registros de la conducta no verbal: video y grabación.
-
- **Organización de registros:** se puede hacer durante el proceso de investigación acompañado de reflexiones, a partir de un orden cronológico o mediante un trabajo de precategorización donde se establecen aspectos comunes y regularidades que permiten instaurar hilos conductores.
 - **Organización de resultados:** es posible hacerlo a través de una descripción, fiel testimonio de la experiencia sin juicios de valor; este es un texto narrativo con los momentos relevantes de la vivencia con expresiones espontáneas; o mediante una interpretación.
 - **Socialización de los resultados:** realizar un relato con los aspectos significativos y los logros obtenidos, artículos con los hallazgos y ponencias donde se revele la experiencia.

3. CONSTRUCCIÓN DE LA ESTRATEGIA METODOLÓGICA

Una vez conceptualizados los componentes de la propuesta metodológica se construye y fundamenta una estructura que los integre y fusione bajo un propósito formativo, llegando a configurar una estrategia metodológica para la enseñanza en Entornos Virtuales de Aprendizaje.

Teniendo en cuenta que en la base de una enseñanza de tipo escolar se pone en relación tres elementos, para plantear la estrategia metodológica que oriente en la construcción de la guía metodológica, se hizo necesario recurrir a la triada didáctica, donde se interrelaciona al docente y a los estudiantes alrededor del saber.

De acuerdo a las intenciones planteadas en el proyecto de investigación se articula una estrategia metodológica que define los procedimientos, y recursos utilizados por el formador, orientada hacia un aprendizaje autónomo, colaborativo y significativo. La estrategia metodológica asocia los siguientes componentes:

Un **enfoque teórico pedagógico** que reúne las teorías constructivistas de Piaget y Vygotsky y el modelo pedagógico del aprendizaje significativo de las cuales se extraen algunos aspectos teniendo en cuenta las características del espacio mediador y lo que se pretende alcanzar con la estrategia metodológica.

En términos generales, de los planteamientos constructivistas se resalta: el sujeto como responsable directo de su aprendizaje, el profesor como mediador entre los conocimientos y el aprendizaje, el conocimiento como un producto social, los sistemas semióticos de representación sin los cuales no es posible plasmar las representaciones mentales de las personas, la interacción social donde el desarrollo cognitivo resulta de una doble formación en un movimiento que va de lo

social a lo individual. De otro lado para aprender significativamente se deben relacionar el nuevo conocimiento con los conceptos que ya se poseen.

El **Pensamiento Variacional**⁴⁰ es otro elemento alrededor del cual gira la estrategia metodológica. Partiendo que éste es uno de los conocimientos básicos que contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, además puede ser estudiado a partir del planteamiento, modelación y resolución de situaciones de variación y cambio extraídas de contextos de la vida diaria, de las ciencias y las mismas matemáticas.

Desarrollar el pensamiento variacional implica realizar el estudio de funciones numéricas desde un enfoque crítico y analítico, buscando relacionar el objeto matemático con la situación planteada para interpretar, predecir consecuencias, conjeturar y sacar conclusiones. En busca de su desarrollo se deben plantear actividades como situaciones problema que pueden ser trabajadas en diferentes niveles de escolaridad y que no siguen una secuencia lineal de contenidos, donde el estudiante identifique, modele y transforme fenómenos de cambio.

Con el estudio de fenómenos de cambio encaminados hacia la adquisición del concepto de función, es primordial que el estudiante de sentido a los objetos de estudio, que pueda analizar y describir las diferentes representaciones para poder entender el fenómeno de variación. Un recurso disponible que favorece el cambio de un sistema de representación a otro son los applets, estos ofrecen información gráfica, ejecutan animaciones interactivas, cálculos inmediatos entre otras tareas.

El **Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA)**⁴¹ es un elemento fundamental para la estrategia ya que es el componente mediador en el proceso de aprendizaje, por tanto se hace necesario tener en cuenta sus características y funcionalidades.

⁴⁰ COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Op. Cit., p.11-25.

⁴¹ DILLENBOURG, Pierre. "Learning in the New Millennium: Building New Education Strategies for Schools". Op. Cit., p. 1 -27

Un EVA, como herramienta, nos permite encaminar y controlar una forma de actividad externa, acción que depende de la forma en que tecnológica y pedagógicamente está constituida para operar durante el proceso de aprendizaje; un EVA regula la propia actividad de quien usa la herramienta modificando sus marcos de pensamiento a partir de situaciones específicas derivadas de la propia estructura de acción tecnológica, desde donde inclusive, se pueden seguir generando otras formas de pensar y actuar.

Un EVA debe ser considerado no solo como un instrumento de mediación que propone una estructura de acción específica para aprender y, desde donde, cada estudiante pone en juego estrategias para el aprendizaje mediado tecnológicamente. En ese sentido, las tecnologías que participan en un proceso educativo pueden considerarse, como sistemas de actuación (acción externa), pero también, como fuente para la generación de nuevos modelos cognitivos o marcos de pensamiento (representación interna).

El EVA, va a ser el punto de encuentro entre el formador y el estudiante o el grupo de estudiantes. Este debe disponer de los recursos necesarios para el aprendizaje desde la planificación de la guía y los contenidos básicos hasta las herramientas y espacios de comunicación necesarios para garantizar un aprendizaje de calidad. Un EVA debe ser ágil y de fácil uso para los estudiantes, de tal manera que no añada un esfuerzo adicional.

Para efectos de la estrategia es indispensable definir y esbozar las **características de los sujetos** involucrados en una acción formativa, En particular para esta estrategia metodológica, se hace necesario definir el papel que desempeñan el formador y el estudiante o grupo de estudiantes, teniendo en cuenta las características del Entorno Virtual de Aprendizaje.

Los **contenidos matemáticos** son los elementos tangibles que permiten proyectar los alcances de la estrategia. Su selección está sujeta a los recursos computacionales disponibles y a desarrollar procesos de variación y cambio.

Para ubicarse en los contenidos que se trabajan en Educación Media se hace necesario revisar Estándares Curriculares en la parte relacionada con Pensamiento Variacional, sistemas algebraicos y analíticos; al igual que la forma como éstos pueden ser desarrollados.

Otro componente en la construcción de la estrategia metodológica es definir **propósitos formativos** a alcanzar con las actividades de aprendizaje. Estos se establecen teniendo en cuenta las orientaciones dadas por Lineamientos Curriculares de Matemáticas y bajo la intención de contribuir al desarrollo del Pensamiento Variacional.

Se considera alcanzar en términos generales los siguientes propósitos de formación:

- Analizar diversas situaciones de cambio a través de funciones, expresando estas inicialmente en forma verbal, luego simbólicamente. Interpretándolas y representándolas en forma gráfica, tabular, o mediante expresiones algebraicas.
- Comprender contenidos matemáticos a través del tratamiento y resolución de problemas, aplicando modelos matemáticos e interpretando situaciones.
- Identificar fenómenos en los que se encuentre variación y cambio para lograr representarlos matemáticamente.
- Hacer uso de Applets para comprender y conjeturar frente al comportamiento de una gráfica, de acuerdo al fenómeno que representa.

Dentro de la estrategia el componente que pone en juego la actividad cognitiva de los estudiantes tiene que ver con las actividades de aprendizaje que se proponen para el desarrollo de los contenidos. La **Propuesta para el desarrollo de las situaciones de aprendizaje** de esta estrategia se hace a través del planteamiento de situaciones problema, relacionadas con la variación y el cambio en el contexto matemático y de otras ciencias (física, economía, biología), las cuales están mediadas a través del espacio y los recursos computacionales seleccionados.

Se establecen los siguientes parámetros para el desarrollo de las situaciones problema a partir de la conceptualización realizada sobre Pensamiento Variacional⁴²:

- Se propone la observación, descripción y análisis cualitativo del fenómeno presente en la situación problema. Con lo que se espera que el estudiante haga una descripción de la variación, formule conjeturas y haga predicciones.
- Esbozar las gráficas que se espera obtener de la situación problema en el plano cartesiano, a través del uso de applets, relacionando las variables involucradas. Su visualización hace posible el estudio dinámico de la variación y posibilita abordar los aspectos de la dependencia de las variables, proporcionando un rango más amplio que el expresado mediante el álgebra simbólica; además de posibilitar diferentes técnicas de razonamiento.
- De acuerdo con la descripción cualitativa y cuantitativa de la relación entre las variables que hacen parte de la situación, intentar formular expresiones algebraicas que establezcan su mejor relación.

Finalmente, con el objetivo de dar cuenta de la eficacia de la situación problema y de la metodología utilizada durante la acción formativa, se plantean las **orientaciones para la evaluación**. La evaluación debe diseñarse de tal manera que sea formativa, continua y flexible, con el propósito de producir y recoger la información necesaria sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje

De igual manera, la evaluación debe traducirse en decisiones de adecuación de la acción formativa, es decir, se debe revisar si los objetivos planteados son adecuados a las características del grupo, si los recursos proporcionados y las actividades planteadas contribuyen a facilitar el aprendizaje y si la acción docente ha sido la adecuada. La evaluación de los estudiantes puede ofrecernos indicadores claros sobre la calidad de la acción formativa y sobre cómo mejorarla.

⁴² COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Op. Cit., p.17-21.

Un proceso que da cuenta de la ejecución de la estrategia metodológica es la sistematización, la cual permite rescatar aspectos significativos, analizarlos y esbozar posibles soluciones a los problemas presentados durante la experiencia.

4. PROPUESTA DE PASOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UNA GUÍA METODOLÓGICA

La construcción de la guía metodológica referida a Pensamiento Variacional y desarrollada en un Entorno Virtual de Aprendizaje, requirió enfrentarse a una serie de procesos que condujeron a establecer una metodología de trabajo. Ésta metodología involucró una fase de exploración y experimentación con la participación de estudiantes de educación media y pregrado, así como docentes en educación media y de la Universidad del Cauca, miembros del Seminario de Educación Matemática.

El escenario de exploración y experimentación con la guía metodológica fue la plataforma virtual EVA, de la Universidad del Cauca. Para recoger la experiencia llevada a cabo se efectuó un proceso de sistematización del cuál se extrae una síntesis que encierra los siguientes pasos:

1. Conceptualizar sobre el saber que se pondrá en juego y el instrumento mediador para el desarrollo de una guía

La fundamentación conceptual del saber se puede hacer desde un punto de vista histórico y curricular, con el objetivo de hacer un recorrido de la manera como se ha estudiado y cómo se ha incorporado en la educación. Por su parte para conocer el elemento mediador es necesario efectuar una caracterización que ayude a establecer su especificidad y lo que éste ofrece.

En el caso de la fundamentación para la guía metodológica referida a Pensamiento Variacional, se dió la necesidad de enfocarse hacia el estudio de un saber matemático escolarizado desarrollado para el nivel de educación media, donde existen diferentes conocimientos básicos tales como pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos,

pensamiento métrico y sistemas de medida, pensamiento aleatorio y sistema de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicas y analíticos donde se privilegia el estudio de procesos de variación y cambio. Como elemento mediador se hace uso de un Entorno Virtual de Aprendizaje a partir de conocer sus particularidades y efectos potenciales para ser aplicados en el campo educativo.

2. Efectuar la selección de los contenidos y recursos a utilizar en la elaboración de una guía metodológica

La escogencia de los contenidos a trabajar debe estar ligada al proceso de conceptualización sobre el saber realizado en el primer paso, además es necesario que vaya a la par con estándares y procesos de aprendizaje propuestos en el currículo escolar. Por ejemplo, la selección de los contenidos relacionados con procesos de variación y cambio se hizo de acuerdo a lo propuesto por estándares curriculares para el grado décimo y once, en lo referido a pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos que permitieran la modelación de situaciones de variación y cambio en el contexto matemático y de otras ciencias.

Los recursos por su parte deben facilitar el desarrollo de los contenidos a trabajar. De esta manera para el estudio y tratamiento de situaciones de variación y cambio, se requieren recursos computacionales que ofrezcan información gráfica, sean interactivos, de libre acceso y ejecutables.

3. Definir y organizar una estrategia metodológica que permita visualizar los elementos necesarios para la elaboración de una guía

Direccionándose hacia la estructuración de la estrategia metodológica es importante hacer una aproximación conceptual de lo que es una estrategia metodológica y la manera adecuada de organizarla buscando adquirir elementos conceptuales que den pautas para su elaboración. Algunas preguntas orientadoras que pueden ayudar en la organización de la estrategia son: ¿qué se espera obtener?, ¿cómo lograrlo?, ¿hacia donde se orienta el modelo?, ¿qué se busca desarrollar en el individuo con esta metodología?, ¿mediante qué

recursos?, que permiten fijar los alcances, los pasos a seguir, los medios y los recursos a utilizar.

Metodológicamente es elemental especificar el enfoque que se va a dar a la estrategia es decir, si la estrategia se compromete a validar el contenido o si su diseño es una propuesta esencialmente teórica.

Por ejemplo, las preguntas orientadoras condujeron a articular la estrategia para la guía metodológica referida a pensamiento variacional con un referente teórico pedagógico que responde el cómo hacerlo; un referente teórico conceptual que incorpora Pensamiento Variacional y Entorno Virtual de Aprendizaje que indican hacia donde se orienta el modelo y con qué recursos cuento; las características de los sujetos, los contenidos matemáticos y los propósitos formativos que señalan qué se busca desarrollar en el individuo; una propuesta para el desarrollo de las actividades de aprendizaje que apunta hacia el cómo lograrlo; finalmente algunas orientaciones para la evaluación que revela el qué se espera obtener.

4. Fundamentación teórica y conceptual de los elementos que estructuran la estrategia

Una vez articulada la estrategia es fundamental retomar cada uno de los componentes y enriquecerlos con aquellos conceptos y procedimientos pertinentes a los propósitos establecidos para la guía.

5. Elaboración de actividades de aprendizaje para una guía

La forma de poner en relación los conceptos y procedimientos es mediante las actividades de aprendizaje, por lo tanto es indispensable para su elaboración poner en práctica los diferentes procesos de razonamiento, resolución de problemas, comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Ambientar las actividades de tal forma que permitan salir de los ejercicios convencionales y orienten en la construcción del conocimiento. Por ejemplo se pueden crear situaciones problema en diferentes contextos

(matemático, de otras ciencias y de la vida diaria) alrededor de un contenido matemático, utilizando recursos computacionales ejecutables como herramienta para la solución de una serie de interrogantes que van desarrollando la situación, ponen en juego los conocimientos y permiten la construcción de otros conocimientos.

6. Experimentación y exploración del componente mediador poniendo en juego las actividades de aprendizaje

Lo que se busca en esta sección es conocer el desempeño y funcionalidad del componente mediador para prever la forma de actuar dentro de este ambiente durante una acción formativa, de igual manera conocer sus limitaciones y potencialidades. Así mismo se pretende con la experimentación identificar si la estructura y el tratamiento de los contenidos proporcionados en las actividades es el adecuado.

Una vez diseñadas las actividades de aprendizaje se debe iniciar el proceso de exploración y experimentación del componente mediador estableciendo su finalidad y realizando la planeación metodológica a seguir durante este proceso.

Por ejemplo una vez elaboradas cinco situaciones de aprendizaje relacionadas con procesos de variación y cambio, se inició una exploración y experimentación en el EVA Unicauca con dichas situaciones, para ello fue concedido con autonomía para su administración, el espacio matemática escolar. Fue importante precisar que la experimentación buscaba el pulimiento de las situaciones más no una validación en términos del desarrollo del Pensamiento Variacional.

La planificación de la experimentación se hizo a través de un diseño metodológico consecuente con el rol de un formador dentro de un entorno virtual, esto implicó la gestión de las actividades mediante noticias para informar sobre los pasos a seguir durante el desarrollo de las situaciones, el tratamiento de los temas propuestos por medio de foros, la organización y asignación de tareas y la creación de pequeñas sociedades de estudiantes.

La primera experimentación se llevó a cabo al interior del grupo de investigación y se programó con la finalidad de observar la funcionalidad de las situaciones de aprendizaje en el EVA, limitaciones o ventajas en el manejo y ejecutabilidad de los applets dentro del EVA, así como examinar la claridad y pertinencia de los interrogantes que componen las situaciones problema. Para esto se ubicó la situación referida a la función seno (Ver anexo A) en la pestaña “Documentos”, su desarrollo implicó la elaboración de una noticia de invitación y gestión de la situación, donde se establecieron los elementos metodológicos y pasos a seguir. Además a la par con el desarrollo de la situación se abrió el foro “Actividad de prueba” donde se manifestaron inquietudes y apreciaciones.

Para la segunda experiencia, pensando en la población a la cual estaban dirigidas las situaciones, se vinculó un grupo de docentes que hacen parte del Seminario de Educación Matemática y algunos estudiantes de pregrado. Se consideró que los docentes podían dar apreciaciones sobre los elementos y propósitos que plantea cada situación desde sus conocimientos y experiencias. De otro lado los estudiantes haciendo parte de la ejecución de la situación problema permitieron determinar la claridad, pertinencia y grado de dificultad de las preguntas planteadas en cada actividad, además de estimar el tiempo necesario para su realización. Como metodología para el desarrollo de las situaciones se envió un correo electrónico a todos los miembros, indicándoles la manera de ingresar al EVA, la tarea correspondiente y los lugares donde encontraría la información necesaria para su realización.

La baja participación hizo visible un fenómeno presente en la educación virtual y que cada vez más se ratifica. Por tal motivo, se dió la necesidad de reorganizar la experimentación anterior y como nueva metodología de participación se optó por crear subgrupos de trabajo y subir el conjunto de actividades de la situación problema al porlet “Asignaciones” (ver anexo B). Se enviaron correos electrónicos con el objetivo de motivar a los miembros del grupo a intervenir en el desarrollo de las situaciones e informar sobre la nueva metodología.

Para recoger los registros de los procesos llevados a cabo durante las experimentaciones en el EVA Unicauca y hacer su análisis correspondiente, se recurrió a un proceso de sistematización que permitió rescatar aspectos significativos y esbozar posibles soluciones a los problemas presentados.

El Entorno Virtual de Aprendizaje fue utilizado como diario de campo ya que en él se guardaron los registros de los procesos llevados a cabo durante la experimentación (las anotaciones hechas en los foros, registros de tareas y correos electrónicos), asimismo la realización de entrevistas no estructuradas dejaron conocer las inquietudes e impresiones de los participantes (Ver anexo C).

De esta manera se elaboraron los ajustes convenientes y se dió inicio a la fase final del proyecto de investigación con la materialización de la estrategia metodológica a través de la guía.

7. Definición y organización de la guía metodológica

Para la concepción de la guía se debe tener en cuenta en primera instancia a quién esta dirigida, esto permite definir el enfoque que se le va a dar. Por ejemplo se identifica que si la guía es dirigida a estudiantes esta debe contener las actividades de aprendizaje con sus respectivas orientaciones mientras que si es para docentes ésta debe estar fundamentada y ser descriptiva en la totalidad de sus componentes. También es necesario reconocer que la guía como la materialización de una estrategia metodológica se compromete a involucrar la totalidad de los elementos esbozados en ella.

Como consecuencia de lo estructurado en la estrategia metodológica referida al Pensamiento Variacional y lo conceptualizado sobre el diseño de instrucción para el aprendizaje en red, se diseñó la guía metodológica con los siguientes apartados: presentación, objetivos de estudio, referente teórico pedagógico, referente teórico conceptual, elementos funcionales básicos del EVA, conocimientos previos y ejes temáticos, esquema de las situaciones problema, situaciones de aprendizaje, finalmente evaluación y seguimiento de las situaciones

8. Enriquecimiento teórico y conceptual de los componentes de la guía

Es primordial tomar cada componente y argumentarlo con lo estipulado en la estrategia de acuerdo con el enfoque y las necesidades de los usuarios potenciales. Se recomienda que la guía sea suficientemente descriptiva de tal modo que brinde la información y orientaciones necesarias para su uso.

9. Validación de la guía utilizando el elemento mediador

Una vez elaborada la guía, es indispensable realizar su validación con el objetivo de identificar y dar solución a las posibles dificultades que se presenten durante su desarrollo con los usuarios y en el escenario para el que fue diseñada. La validación puede ser efectuada a través de una prueba piloto estableciendo previamente sus objetivos y la manera como será ejecutada.

Posterior al desarrollo de cada uno de los elementos involucrados en la guía metodológica referida a Pensamiento Variacional, se inició el proceso de su validación en el espacio matemática escolar. Por objetivo se formuló la realización de una prueba piloto para examinar su organización, contenido y pertinencia de las actividades hacia el desarrollo de procesos de variación y cambio.

La fase piloto se desarrolló con la participación de 28 estudiantes, como estrategia de trabajo se diseñó el estudio de la guía desde dos enfoques, uno referido a la forma como se abordan las situaciones problema planteadas y el otro a la estructura general que se le ha dado a la guía, por lo que se conformaron dos grupos que abordaran estas temáticas (Ver anexo D)

La asignación de tareas se gestiona a través del Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA UNICAUCA); todo este proceso se lleva a cabo haciendo uso de los servicios y forma de comunicación que ofrece el EVA; asignación de tareas, noticias, foros y correos electrónicos (Ver anexo E y F).

10. Formato de edición para la guía

La edición de un documento es tan importante como su contenido, de ahí que es

fundamental presentar la guía en un formato que sea atractivo y llamativo para el usuario, la incorporación de imágenes y colores pueden ser de gran ayuda.

Desde la experiencia que se ha venido ilustrando, se busca dar a la guía el formato que soporta la plataforma EVA acogiendo la sugerencia realizada por los integrantes del proyecto E-LANE. De esta forma se realizó una capacitación sobre el manejo del editor de texto XMLmind XML Editor, primer paso para la generación de los contenidos para e-learning. Una vez editada la guía por capítulos, se buscó la manera de mejorar su parte visual seleccionando y ubicando imágenes, resaltando partes del texto y colocando color a los títulos, posteriormente se realizó la generación de la guía en formato HTML para verificar su contenido. Finalmente el personal técnico se encargó de generar un paquete SCORM con el contenido de la guía para subirlo a la plataforma, ésta se encuentra en la página: <http://eva.unicauca.edu.co>, al interior del curso matemática escolar (ver anexo G).

Con el conjunto de pasos mostrados de manera general, fruto de la experiencia en la construcción y articulación de una guía metodológica para ser desarrollada en una plataforma virtual, se logra establecer un modelo para la construcción de cualquier guía metodológica.

5. RESULTADOS

Del proceso de conceptualización efectuado sobre Pensamiento Variacional y Entorno Virtual de Aprendizaje, se logro puntualizar aspectos de gran importancia para la construcción de la estrategia, de los cuales se destaca:

- Los procesos de variación y cambio se ven relacionados con las matemáticas cuando modelan situaciones, éstos en el contexto escolar incluyen desde la perspectiva de lineamientos curriculares su estudio en contextos como el sociocultural, de otras ciencias y las matemáticas.
- El pensamiento es un conjunto de procesos cognitivos, todos ligados entre sí.
- El pensamiento variacional son las acciones cognitivas con objetos de variación y cambio, este caso el objeto es la función vista como representante de fenómenos de variación y cambio, la cual puede ser abordada desde diferentes sistemas de representación
- La noción de función como herramienta de conocimiento es necesaria para enlazar patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio.
- Se identifico que la modelación permite llegar a la fenomenología en cualquier ciencia, con objetos matemáticos.
- Los EVA como una herramienta mediadora de conocimientos permiten interrelacionar los objetos matemáticos y los objetos concretos.
- En todo EVA debe haber interacción con un propósito formativo. Debe haber interacción de conocimientos y no sólo interacción humana.
- Aprovechar los recursos tecnológicos que tengan mejores niveles de representación del medio físico y usar herramientas que faciliten el aprendizaje.
- Desarrollo de competencias en la enseñanza personalizada favoreciendo la colaboración y cooperación entre estudiantes.

La construcción de la estrategia arrojó como resultado una estructura que se describe a continuación:

- El referente teórico pedagógico establecido para la estrategia responde a las características de un aprendizaje mediado a través de un Entorno Virtual de Aprendizaje y al desarrollo cognitivo del estudiante durante el proceso de aprendizaje. La conceptualización del saber involucrado en la estrategia permitió establecer los contenidos matemáticos, los objetivos de aprendizaje y algunas orientaciones para la evaluación en términos formativos, ligados a lo propuesto en Lineamientos Curriculares de Matemáticas. De igual manera la caracterización del EVA condujo a establecer el papel que desempeña el docente y los estudiantes, así como la planificación de la evaluación en términos de la gestión de la acción formativa.
- Dentro de la estrategia el componente que pone en juego la actividad cognitiva de los estudiantes tiene que ver con las actividades de aprendizaje que se proponen para el desarrollo de los contenidos, éstas actividades se proponen mediante el estudio de situaciones problema que tienen como componente implícita procesos de variación y cambio, su resolución involucra el uso de applets (recursos computacionales apropiados según los criterios de selección establecidos) y buscan modelar problemas provenientes de las matemáticas, de física, economía y biología a través de una secuencia lineal de interrogantes.
- Pensando en el usuario potencial de la estrategia se decidió respaldar cada situación problema con la metodología y estructura del proyecto de aula como herramienta de planificación didáctica, con el objetivo de darle un estilo argumentativo. Es así como para cada situación de aprendizaje se definió: un referente teórico general, propósitos de formación, una metodología para su desarrollo, materiales, procedimientos esperados e indicadores de valoración, situación problema y manejo de applets. Este último elemento fue incorporado

como consecuencia de un primer proceso de experimentación con las situaciones de aprendizaje en la plataforma EVA Unicauca.

La sistematización sobre la exploración y experimentación con las cinco situaciones problema en el EVA Unicauca, permitió extraer reflexiones en términos de la gestión para la acción formativa y en relación con el contenido de cada situación. Con respecto a la gestión se tiene que:

- En la comunicación con los estudiantes se debe buscar que el título de la noticia sea imperativo, convocante y sugestivo. Además, es necesario tener en cuenta que el objetivo de la noticia es informar qué se propone hacer y dónde se debe hacer la gestión de la situación.
- Para el desarrollo de las situaciones es indispensable fijar intervalos de tiempo que definan fechas de entrega para las asignaciones. De igual manera el tiempo para desarrollar las actividades que conforman las situaciones problema debe ser estimado con el fin de que puedan ser trabajadas en diferentes sesiones.
- Resulta fundamental tener en cuenta el navegador y el sistema operativo necesarios para la ejecución de los recursos computacionales que se utilicen.
- Se presentaron dificultades en la participación ya que en la segunda experiencia se obtuvo en el foro dos intervenciones por parte de los estudiantes y ninguna por parte de los docentes (ver anexo H).
- Para dar solución a una de las actividades se utilizó una herramienta similar a la sugerida en la situación, debido a que el applet no pudo ser ejecutado.
- El EVA como diario de campo permitió depositar los escritos (fichas bibliográficas: tipo resumen, conceptual, textual; ensayos; referencias bibliográficas), producto de las discusiones y de la conceptualización que se llevó a cabo en la primera fase del proyecto; también se utilizó el Porlet foros para debatir el desarrollo de algunos temas.
- Para modificar un archivo depositado en el EVA se debe realizar los cambios al documento por fuera del entorno y renombrarlo.

- Se encontró que es necesario conocer la interfaz que maneja el grupo de estudiantes, para hacer una descripción exacta de las tareas y noticias que se asignan.

En relación a los contenidos se obtiene que:

- Abordar un concepto a partir de una situación problema es una estrategia significativa en el aprendizaje de los estudiantes y trabajar la situación problema por medio de una serie de interrogantes conduce a formar personas autónomas, orientadas a la investigación.
- El recurso computacional es apropiado a los conceptos que se abordan. Sin embargo, existe la necesidad de hacer una descripción de su funcionalidad.
- En uno de los registros sobre la situación problema 1 “La función Seno” se sugiere trabajar con un mayor número de ángulos para extraer conclusiones confiables. Igualmente, se recomienda el uso de otra herramienta para el registro de datos, en este caso Microsoft Office Excel.
- Es necesario ser más descriptivos y ambientar el planteamiento de cada situación problema. De igual forma las preguntas que la acompañan deben ser más puntuales, por ejemplo es necesario establecer unidades para los valores de las funciones de tal modo que permitan extraer una conclusión real de la situación.

De los registros obtenidos de la prueba piloto realizada a la guía metodológica se interpreta y concluye lo siguiente:

Respecto a la forma como se aborda las situaciones problema:

- En general, los registros dan cuenta de un desarrollo satisfactorio de la tarea asignada puesto que las respuestas son las esperadas (ver anexo I)
- Se da la necesidad de especificar o reformular algunos interrogantes con el objetivo de lograr un mayor análisis en las respuestas dadas por los estudiantes. Por ejemplo en la situación problema 1 (ver anexo J).
- Con la ejecución de la prueba se logra estimar que el tiempo necesario para el desarrollo de cada actividad es aproximadamente de dos horas.

- En cuanto al manejo y ejecutabilidad de los applets no se presenta mayor dificultad, por el contrario se convierten en una herramienta útil para dinamizar procesos de aprendizaje.
- Resulta novedoso e interesante abordar un concepto matemático a partir de una situación problema. Puesto que no se trabaja con resultados inmediatos sino que el conocimiento y la posterior respuesta son producto de una construcción por parte del estudiante.
- La gestión de la tarea en el EVA fue explícita ya que los participantes no presentaron dificultades en el momento de realizar su gestión.

Respecto a la revisión de la estructura de la guía:

- Encontramos mensajes positivos sobre la propuesta metodológica que resaltan aspectos como el dinamismo que proporcionan las actividades mediante la utilización de applets.
- Se logra establecer que las diferentes situaciones problema abordadas en la guía permiten el desarrollo de procesos de variación y cambio, ya que de una manera clara y concisa se orienta al estudiante a deducir el concepto.
- La estructura de la guía contiene los elementos necesarios para orientar al docente hacia la implementación de una nueva estrategia de enseñanza.
- Nuevamente se encuentran dificultades con la participación de los usuarios, aunque en relación con la experiencia anterior se obtuvo mayor respuesta.

Finalmente, el producto que recoge todo el proceso llevado a cabo durante la investigación, es una guía metodológica referida al Pensamiento Variacional, desarrollada en un Entorno Virtual de Aprendizaje y dirigida a docentes de educación media. Consecuencia de la estrategia metodológica esbozada, la guía se concibe de la siguiente forma: (ver anexo K)

- La guía se introduce con una presentación que busca ubicar al usuario sobre el contenido y la importancia de los elementos que hacen parte de ella.

- Los objetivos de estudio que recogen en términos generales las metas a alcanzar con la implementación de la guía.
- El referente teórico pedagógico que busca proporcionar una base pedagógica indispensable en todo proceso de enseñanza, se describe la teoría constructivista y el modelo pedagógico del aprendizaje significativo, desarrollados en la estrategia metodológica.
- El referente teórico conceptual donde se hace una descripción de los elementos esenciales alrededor de los cuales se construyó la estrategia metodológica, o sea Pensamiento Variacional, Situación Problema y Entorno Virtual de Aprendizaje, que son el eje central de la guía.
- Con el objetivo de orientar al usuario en la exploración de los servicios y recursos que soporta la plataforma EVA se detallan los elementos funcionales básicos que lo integran.
- Para las actividades de aprendizaje, elementos sustanciales de la guía, se diseñó una estructura instruccional similar a la planteada para proyectos de aula proporcionando un referente teórico general del contenido matemático a trabajar, unos propósitos de formación, una metodología de trabajo y gestión con los estudiantes, los materiales o recursos necesarios para el desarrollo de las actividades, unos procesos esperados e indicadores de valoración y el instrumento central de la guía es decir la situación problema y los actividades que la componen.
- Concientes de que la evaluación es un aspecto esencial en todo proceso de enseñanza y que el docente es autónomo en este quehacer, se establecen parámetros que pueden contribuir en su diseño y ejecución.
- Alrededor de cada contenido matemático a desarrollar en la guía se han establecido los conocimientos previos y ejes temáticos, con esto se pretende dar al docente un panorama sobre los conceptos matemáticos que involucra cada situación de aprendizaje.
- En la guía se presentan cinco situaciones de aprendizaje que abordan contenidos matemáticos relacionados con la función seno, funciones de variable real, derivada de funciones e integral definida. La solución de cada

situación problema implica el desarrollo de tres o cuatro actividades orientadas hacia la construcción del concepto, presentadas de forma interrogativa y que requieren de la manipulación de los applets proporcionados.

Después de un trabajo dispendioso de edición y generación del contenido, la guía finalmente adquiere un formato hipertextual que permitió depositarla en el portlet materiales de aprendizaje del espacio matemática escolar, instalado en la plataforma EVA de la Universidad del Cauca, <http://eva.unicauca.edu.co>. De igual manera la monografía elaborada en este proyecto de investigación se puede encontrar en la URL: <ftp://jano.unicauca.edu.co/proyectos/E-LANE/EducMat/>

6. CONCLUSIONES GENERALES

Del proceso de conceptualización y construcción de la estrategia, pasando por las pruebas piloto de las situaciones de aprendizaje hasta llegar a la sistematización y finalmente a la elaboración de la guía metodológica, se recogen las siguientes conclusiones:

- La formulación y desarrollo del proyecto contribuye a nuestra formación como Licenciados en Educación, en la medida que se adquieren elementos para construir estrategias metodológicas, explorar nuevas herramientas y utilizar nuevos espacios para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- La propuesta metodológica pretende abordar la matemática desde un punto de vista crítico, reflexivo y argumentativo, puesto que las actividades de aprendizaje buscan la construcción de conocimientos a través de situaciones problema.
- La elaboración de la propuesta metodológica hace explícita la necesidad de explorar recursos tecnológicos que están en el medio, para ponerlos en correspondencia con unos propósitos formativos, haciendo la matemática más agradable, dinámica y significativa.
- Los diferentes sistemas de representación tienen en el pensamiento variacional su mayor expresión, en la medida que todo proceso de variación y cambio puede ser estudiado desde un punto de vista gráfico, algebraico, simbólico o mediante su interrelación.
- Las situaciones de variación y cambio se encuentran inmersas en diferentes contextos permitiendo ser estudiadas a partir de procesos generales; tales

como la resolución y planteamiento de problemas, razonamiento, comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

- La incorporación de nuevas tecnologías al ámbito escolar amplía y provee posibilidades de observación y experimentación con los objetos matemáticos.
- De la conceptualización realizada sobre Entorno Virtual de Aprendizaje se llega a que no es posible plantear una definición formal de éste, sin embargo puede ser descrito mediante sus características y efectos en el ambiente educativo.
- La gestión formativa realizada en un EVA debe obedecer a una estrategia previamente estructurada que responda tanto a las necesidades tecnológicas como pedagógicas, encaminadas hacia una formación de calidad.
- Los EVA como medio de interacción posibilitan la creación de nuevas estrategias educativas donde la innovación y la incorporación de recursos dinámicos sean los principales componentes.
- Al plantear una estrategia metodológica con fines educativos es indispensable tener en cuenta un referente pedagógico que oriente los procesos de aprendizaje, el aspecto curricular que se pretende desarrollar para hacer la selección de los contenidos y formular los objetivos de aprendizaje, el espacio mediador en la acción formativa para definir los recursos y el rol de los participantes. De igual manera es primordial precisar cómo deben ser las actividades de aprendizaje y qué metodología utilizar para su desarrollo. Finalmente es necesario establecer parámetros que den cuenta de la adquisición de conocimientos.
- Una guía metodológica debe ser explícita y precisa. Es la respuesta a una estrategia y debe recoger la totalidad de los elementos propuestos en ella.

- La guía metodológica es una propuesta que busca diseñar nuevas acciones educativas complementarias a las ya existentes mediante la fusión e integración de la pedagogía y la tecnología bajo un propósito formativo.
- El entorno virtual es un factor determinante en el momento de realizar las actividades, puesto que es un espacio que ofrece diferentes alternativas para la creación de estrategias de enseñanza, pero también puede convertirse en una barrera si el usuario no tiene familiaridad alguna con él
- El desconocimiento que los estudiantes tienen de los applets, requiere que las actividades propuestas tengan un manual de su funcionalidad y en algunos casos las preguntas tengan aclaraciones o sugerencias. Sacrificar un poco de tiempo en el conocimiento básico de los applets hará más lento el aprendizaje, pero una vez conocido, se agilizan muchos procesos y el aprendizaje es mucho más profundo y significativo.
- En situaciones problema desarrolladas a partir de interrogantes, los estudiantes tienen la posibilidad de explorar los applets y determinar su utilidad dentro de la solución, colocando en juego sus conocimientos, revisando ideas y aclarando conceptos.
- Aunque una de las características del entorno virtual es que es un espacio abierto, es conveniente temporalizar las actividades para el buen desarrollo de estas.
- Se considera que este tipo de experiencias pueden ser más enriquecedoras en la medida en que haya mayor compromiso y disposición de los participantes.

7. RECOMENDACIONES

Considerando que es fundamental en la labor docente innovar en los procesos educativos, buscar nuevos escenarios para la enseñanza y el aprendizaje que faciliten la adquisición de conocimientos y utilizar todos aquellos recursos disponibles, de tal modo que respondan a las necesidades e intereses de los estudiantes, se hacen las siguientes recomendaciones:

- La evaluación es un problema abierto de la educación virtual e indispensable en la concepción de una estrategia metodológica, por tanto realizar investigaciones con miras a la planificación de la evaluación en este tipo de espacios contribuye a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- La estructura de la propuesta metodológica ha sido planificada con el objetivo de ser reestructurada, permitiendo su aplicabilidad en el desarrollo de otros pensamientos matemáticos u otras áreas del conocimiento.
- Situados en un contexto tecnológico en constante evolución donde el docente no cuenta con el material apropiado para su labor que incorpore dichos avances, se propone la guía metodológica como un instrumento para continuar con el cambio y la innovación que requiere la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Los Entornos Virtuales son una herramienta novedosa por lo que es fundamental darla a conocer e involucrar a la comunidad educativa en su uso mediante la creación de espacios para el intercambio de experiencias, retroalimentación y construcción de propuestas en colaboración con otros.
- Reconociendo la importancia de la Educación Virtual y los nuevos espacios de interacción existentes en la Universidad del Cauca sería idóneo unir esfuerzos

para lograr que los cursos de matemáticas sean mediados a través del EVA UNICAUCA.

- Propiciar espacios de reflexión para los estudiantes, donde se incentive a plantear y formular preguntas de investigación, teniendo en cuenta sus intereses y necesidades.

8. BIBLIOGRAFÍA

BELLOT, Andreu y SANGRÁ, Albert. Introducción a la Formación On-Line. Universidad Oberta de Cataluña.

CARRETERO, Mario. Constructivismo y Educación. Copyright Aique. Grupo Editor S. A. Buenos Aires, Argentina, 1997.

CERDA G, Hugo. El Proyecto de Aula: El Aula como un Sistema de Investigación y Construcción de Conocimientos. Colección Mesa Redonda, Bogotá D.C. 2001.

DÍAZ, Frida y HERNÁNDEZ, Gerardo. Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. Mc Graw Hill. México, Julio 1998.

DILLENBOURG, Pierre. "Learning in the New Millennium: Building New Education Strategies for Schools". Virtual Learning Environments. University of Geneva. EUN Conference 2000.

HENAO A., Octavio. La Enseñanza Virtual en la Educación Superior. ICFES. Bogotá, D.C. Colombia, 2002.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Calidad. Santa fe de Bogotá, 1999.

----- Estrategia MEN- ASCOFADE: Formación de Formadores en Estándares de Competencias Básicas y Ciudadanas. Revolución educativa Colombia aprende. Colombia, Junio 2005.

----- Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie Lineamientos Curriculares, Santa fe de Bogotá, Julio 1998.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas. Serie Lineamientos Curriculares, Santa fe de Bogotá, Febrero 1999.

----- Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Serie Documentos Santa fe de Bogotá, Abril 2004.

----- Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Serie Memorias. Santa fe de Bogotá, Enero 2002.

OROZCO C, Juan Carlos. Sistematización de Experiencias Educativas. Documento de Estudio de Circulación Restringida. MEN-CINDE. Bogotá Colombia 2003.

Páginas Web

BELLO, Rafael Emilio. Educación Virtual: Aulas Sin Paredes. Comunidades Virtuales de aprendizaje. s./l. 2006

<http://www.educar.org/articulos/educacionvirtual.asp>

CALDERÓN, Juan F. Gráficos de Funciones. Madrid, España. 2004
<http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1/software/FUNGRAPH.EXE>

COMUÑAS B. Rubén. Matemáticas de Bachillerato. Murcia, España. 2005
<http://www.aulademate.com/>

COMUÑAS B. Rubén. Matemáticas de Bachillerato. Aplicación Interactiva: Derivadas y Aplicaciones. Murcia, España. 2005

<http://www.aulademate.com/contentid-29.html>

<http://www.aulademate.com/contentid-30.html>

<http://www.aulademate.com/contentid-31.html>

<http://www.aulademate.com/contentid-32.html>

DELGADO, Palomino. Teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel. Argentina. 1997. <http://www.monografias.com/trabajos6/apsi/apsi.shtml>

FRANCO G, Ángel. Medida de la Constante Elástica de un Muelle. País Vasco. 2006
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/muelle/muelle.htm#Procedimiento%20estático>

FREUDENTHAL INSTITUTO. Jugar con Funciones. Holanda. 2004
<http://www.fi.uu.nl/en/es/welcome.xml>

IES Inc. (International Education Software). Manipula Math with JAVA. Japón. 2003 <http://www.ies.co.jp/math/java/index.html>

----- Derivative of Exponential Functions. Japón. 2003

http://www.ies.co.jp/math/java/calc/e_diff/e_diff.html

----- The Derivative of the Sine. Japón. 2003

<http://www.ies.co.jp/math/java/calc/difsin2/difsin2.html>

----- Derivative of $y=x^2$. Japón .2003

http://www.ies.co.jp/math/java/calc/x_diff/x_diff.html

----- Second Derivative of $y=x^n$. Japón. 2003

http://www.ies.co.jp/math/java/calc/x_2nd/x_2nd.html

----- The graph of $y=a \sin b (x-c)$. Japón. 2003

<http://www.ies.co.jp/math/java/trig/ABCsinX/ABCsinX.html>

----- Second Derivative of $y=x^n$. Japón. 2003

<http://www.ies.co.jp/math/java/trig/graphSinX/graphSinX.html>

-----Sine Box. Japón. 2003 <http://www.ies.co.jp/math/java/trig/sinBox/sinBox.html>

LAGARES R, Jordi. Definición del problema del cálculo Integral. España. 2006
<http://www.xtec.es/~jlagares/integral.esp/inte50.htm>

Proyecto E-LANE. Plataforma EVA (Entorno Virtual de Aprendizaje) de la Universidad del Cauca. Popayán, Colombia. 2006. <http://eva.unicauca.edu.co/>

9. ANEXOS

ANEXO A: Primera experimentación en el EVA Unicauca

The screenshot shows a web browser window with the following details:

- Browser Title:** EVA - Entorno Virtual de Aprendizaje - Universidad del Cauca - Mozilla Firefox
- Address Bar:** <http://eva.unicauca.edu.co/dotln/classes/maticas/educacionmatematica/matematicaescolar22005/one-community?>
- Page Header:** Bienvenido/a, Yuly Andrea Vásquez Quinayás | 6 Miembros en línea | Su Cuenta | Salir
- Breadcrumbs:** Main Site » dotLRN » Asignaturas » Matemáticas » Educacion Matematica » Matemática Escolar
- Page Title:** Matemática Escolar
- Navigation Menu:** Mi portal | **Matemática Escolar en el EVA** | Calendario | documentos | Participantes | Panel de control
- Noticias Section:**
 - Title:** EN BUSCA DEL DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES - 2006-05-22 00:00:00-05
 - Text:** Estimados compañeros de lucha, en busca del desarrollo de nuestras actividades iniciales para la construcción de la guía, los invito a participar activamente en la ejecución y reflexión de la actividad de prueba propuesta en la sección de asignaciones, con el nombre de "actividad de prueba sobre la función seno"
 - Text:** Para enviar el desarrollo de la tarea, les propongo que la guarden como un archivo de word en documentos, en tareas, en la carpeta titulada "actividad de prueba".
 - Text:** Además la creación del foro "actividad de prueba" es con el propósito de reflexionar, proponer, analizar y sugerir el planteamiento y desarrollo de cada uno de los puntos propuestos en la actividad.
 - Text:** Hasta pronto y buena suerte.
 - Text:** Contributed by [Deisy Yamile Ruiz Rosero](#)
 - Link:** [Agregar una Noticia](#)
- Equipo docente Section:**
 - Title:** Equipo docente
 - Text:** Profesores:
 - List:**
 - [Luisa Fernanda Ayala Muñoz \(layala@unicauca.edu.co\)](mailto:layala@unicauca.edu.co)
 - [Alirio González Rivera \(alirio10@latinmail.com\)](mailto:alirio10@latinmail.com)
 - [Deisy Yamile Ruiz Rosero \(druiz@unicauca.edu.co\)](mailto:druiz@unicauca.edu.co)
 - [Yuly Andrea Vásquez Quinayás \(andreira0703@hotmail.com\)](mailto:andreira0703@hotmail.com)
 - Link:** [Lista de miembros](#)
- Foros Section:**
 - Title:** Foros
 - List:**
 - [Cafetería](#)
 - [Elementos conceptuales](#)
 - [Entorno Virtual de Aprendizaje](#)
 - [Estrategias Metodológicas para EVA](#)
 - [Exploración del EVA](#)
 - [INQUIETUDES SOBRE LAS ACTIVIDADES](#)
 - [Pensamiento Variacional](#)
 - [Propuesta para la elaboración de guías](#)
 - [actividad de prueba](#)
- Planificación Section:**
 - Title:** Planificación
 - Text:** Cita desde 22 mayo 2006 hasta 21 junio. Citas en un periodo de 30 días
- Subgrupos Section:**
 - Title:** Subgrupos

At the bottom left of the browser window, the word "Listo" is visible.

ANEXO B: Tercera experimentación en el EVA Unicauca

The screenshot shows a web browser window with the address bar displaying the URL: <http://eva.unicauca.edu.co/dotln/classes/maticas/educacionmatematica/maticaescolar22005/one-community?>

Noticias

ACERCA DEL DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES.... - 2006-05-22 00:00:00-05

Para el desarrollo de las actividades se ha establecido una nueva metodología:

1. Se ha asignado a cada estudiante un grupo y una actividad específica a ser desarrollada en el transcurso de las próximas semanas del 3 al 22 de abril.
2. La información sobre el grupo al que perteneces la puedes encontrar en el porlet subgrupos, en la pestaña información del subgrupo (es probable que debas clicar más de un grupo). Adicionalmente en este porlet encontrarás una noticia que te guiará sobre la actividad que vas a desarrollar, la forma cómo y donde debes subir tu respuesta.

Hasta pronto y éxitos.

Contributed by [Yuly Andrea Vásquez Quinayás](#)

[Agregar una Noticia](#)

Subgrupos

- Subgrupos:
 - [Grupo 5 \(Alta\)](#)
 - [Grupo 2 \(Alta\)](#)
 - [Grupo 4 \(Alta\)](#)
 - [Grupo 1 \(Alta\)](#)
 - [Grupo 3 \(Alta\)](#)

Asignaciones

- Puede [activar un aviso](#) para Asignaciones.
- **Tareas**
[Agregar Tarea](#)

Nombre	Fecha de Entrega				
ACTIVIDAD 1 (53 Kb - Microsoft Word)	30 abril 2006 11:55 PM	Subir Solución	Administración de Grupos		
ACTIVIDAD 2 (73 Kb - Microsoft Word)	30 abril 2006 11:55 PM	Subir Solución	Administración de Grupos		
ACTIVIDAD 3 (55 Kb - Microsoft Word)	30 abril 2006 11:55 PM	Subir Solución	Administración de Grupos		
ACTIVIDAD 4 (51 Kb - Microsoft Word)	30 abril 2006 11:55 PM	Subir Solución	Administración de Grupos		
ACTIVIDAD 5 (61 Kb - Microsoft Word)	30 abril 2006 11:55 PM	Subir Solución	Administración de Grupos		

- **Proyectos**
[Agregar Proyecto](#)

Nombre	Fecha de Entrega
No hay asignaciones	

- **Exámenes**

Listo

ANEXO C: EVA Unicauca como diario de campo.

The screenshot shows the EVA - Entorno Virtual de Aprendizaje web interface. The browser title is "EVA - Entorno Virtual de Aprendizaje - Universidad del Cauca - Mozilla Firefox". The address bar shows the URL: <http://eva.unicauca.edu.co/dotlrn/classes/maticas/educacionmatematica/matematicaescolar22005/one-community?>

The page header includes the Universidad del Cauca logo and the text "EVA - Entorno Virtual de Aprendizaje" with the date "Domingo, 21 de Mayo de 2006".

The main content area is titled "Matemática Escolar" and includes a navigation menu with buttons for "Mi portal", "Matemática Escolar en el EVA", "Calendario", "documentos", "Participantes", and "Panel de control".

The "Documentos" section contains a table of folders with the following data:

Nombre	Tamaño	Tipo	Última Modificación
Tareas	2 archivos	Folder	02/03/06 16:35
Exámenes	0 archivos	Folder	18/10/05 09:30
Apuntes	4 archivos	Folder	31/01/06 10:28
Notas	0 archivos	Folder	18/10/05 09:30
Proyectos	14 archivos	Folder	27/04/06 10:27
Actividades Completas	5 archivos	Folder	29/03/06 10:45
Documentos compartidos de Matemática Escolar	15 archivos	Folder	08/05/06 17:15
ESTRATEGIA METODOLÓGICA	2 archivos	Folder	06/04/06 12:43
Ensayos	6 archivos	Folder	03/12/05 08:53
Evolución	20 archivos	Folder	04/04/06 09:20
Presentaciones	3 archivos	Folder	30/01/06 12:02
Recursos computacionales	6 archivos	Folder	02/02/06 10:45
Unicauca Virtual, taller febrero del 2006	1 archivos	Folder	03/03/06 10:47
fichas	17 archivos	Folder	03/11/05 22:43

The status bar at the bottom of the browser window shows "Listo".

ANEXO D: Prueba piloto a la guía metodológica

The screenshot shows a Microsoft Internet Explorer browser window displaying the EVA (Entorno Virtual de Aprendizaje) website. The browser's address bar shows the URL: http://www.eva.unicauca.edu.co/dotlrn/classes/matematicas/educacionmatematica/matematicaescolar22005/one-community?page_num=0. The page title is "EVA - Entorno Virtual de Aprendizaje - Universidad del Cauca - Microsoft Internet Explorer".

The website content includes a navigation menu with the following items: [Mi portal](#), [Matemática Escolar en el EVA](#), [Calendario](#), [documentos](#), [Participantes](#), and [Panel de control](#).

The main content area is titled "Matemática Escolar" and contains several sections:

- Noticias**: A section with a sub-header "INICIO FASE PILOTO - 2006-07-19 00:00:00-05". The text reads: "Apreciados estudiantes reciban un cordial saludo y una calurosa bienvenida a la fase experimental de la guía metodológica referida a pensamiento variacional donde esperamos contar con su activa participación." It continues: "Como metodología de trabajo se han creado dos grupos. Los integrantes del grupo uno se encargarán de desarrollar las situaciones problema mientras los del grupo dos, tendrán la tarea de revisar la estructura de la guía. Cada grupo tiene acceso a un portal donde encontrará información detallada sobre su quehacer." It concludes with: "Nuevamente Bienvenidos y Éxitos Esperamos contar con sus valiosos aportes." and "Contributed by [Yuly Andrea Vásquez Quinayás](#)". There is a link "Agregar una Noticia" at the bottom of this section.
- Equipo docente**: A section titled "Profesores:" with a list of names and email addresses:
 - [Luisa Fernanda Ayala Muñoz \(layala@unicauca.edu.co\)](mailto:layala@unicauca.edu.co)
 - [Alirio González Rivera \(alirio10@latinmail.com\)](mailto:alirio10@latinmail.com)
 - [Deisy Yamile Ruiz Rosero \(druiz@unicauca.edu.co\)](mailto:druiz@unicauca.edu.co)
 - [Yuly Andrea Vásquez Quinayás \(andreita0703@hotmail.com\)](mailto:andreita0703@hotmail.com)There is a link "Lista de miembros" below the list.
- Subgrupos**: A section titled "Subgrupos:" with a list of subgroups:
 - GRUPO 1 (Alta)
 - GRUPO 2 (Alta)
- Asignaciones**: A section with a list of tasks:
 - Puede [activar un aviso](#) para Asignaciones.
 - Tareas
- Foros**: A section with a sub-header "Temáticas sobre el desarrollo de las situaciones..." (partially visible).

The browser's status bar at the bottom shows "Listo", "EVA - Entorno Virtual ...", "Internet", "ES", and "02:38 p.m."

ANEXO E: Conformación de grupos

The screenshot shows a web browser window with the URL http://www.eva.unicauca.edu.co/dotlrn/classes/matematicas/educacionmatematica/matematicaescolar22005/grupo113/one-community?page_num=0. The page header includes the Universidad del Cauca logo and the EVA logo, with the date "Miércoles, 19 de Julio de 2006". The user is logged in as "Bienvenido/a, Deisy Yamile Ruiz Rosero" with "1 Miembro en línea" and "Su Cuenta | Salir" options.

The breadcrumb trail is: [Main Site](#) > [dotLRN](#) > [Asignaturas](#) > [Matematicas](#) > [Educacion Matematica](#) > [Matemática Escolar](#) > [GRUPO 1](#)

GRUPO 1

Navigation tabs: [Mi portal](#) | [Subgrupo](#) | [Información del subgrupo](#) | [Calendario](#) | [Archivos](#) | [Panel de control](#)

NOTICIAS

ASIGNACIÓN DE SUBGRUPOS... - 2006-06-29 00:00:00-05

Queridos participantes, como estrategia de trabajo se ha asignado a cada estudiante un subgrupo. Para identificar del cual haces parte haz click sobre "SITUACIÓN PROBLEMA #", busca tu nombre y la actividad que te corresponde en el portlet "INFORMACIÓN DE SUBGRUPO".

Adicionalmente, en el portlet "NOTICIAS" encontrarás información detallada sobre el desarrollo de la tarea.

Contributed by [Deisy Yamile Ruiz Rosero](#)

[Agregar una Noticia](#)

SUBGRUPOS

- Subgrupos:
 - [SITUACIÓN PROBLEMA 1 \(Alta\)](#)
 - [SITUACIÓN PROBLEMA 2 \(Alta\)](#)
 - [SITUACIÓN PROBLEMA 3 \(Alta\)](#)
 - [SITUACIÓN PROBLEMA 4 \(Alta\)](#)
 - [SITUACIÓN PROBLEMA 5 \(Alta\)](#)

INFORMACIÓN DE SUBGRUPO

Conformado por estudiantes que desarrollaran la situación problema.

FOROS

Sin Foros

System tray: Internet, ES, 02:46 p.m.

ANEXO F: Orientaciones para el desarrollo de tareas

The screenshot shows a Microsoft Internet Explorer browser window displaying a virtual learning environment (EVA) page. The browser's address bar shows the URL: http://www.eva.unicauca.edu.co/dotlrn/classes/matematicas/educacionmatematica/matematicaescolar22005/grupo214/one-community?page_num=0. The page content includes a navigation menu with 'Mi portal', 'Subgrupo', 'Información del subgrupo', 'Calendario', 'Archivos', and 'Panel de control'. The main content area is titled 'GRUPO 2' and features a 'NOTICIAS' section with the heading 'ORIENTACIONES PARA EL DESARROLLO DE LA TAREA... - 2006-07-04 00:00:00-05'. The text in this section provides instructions for students and teachers regarding the task, including details about the assignment's purpose, where to find the materials, and how to submit the work. A 'SUBGRUPOS' section indicates 'Sin Subgrupos', and an 'INFORMACIÓN DE SUBGRUPO' section states 'Conformado por estudiantes que se encargaran de revisar la parte metodológica o instruccional de la guía'. The browser's status bar at the bottom shows 'Listo' and the system clock at '02:47 p.m.'.

EVA - Entorno Virtual de Aprendizaje - Universidad del Cauca - Microsoft Internet Explorer

Archivo Edición Ver Favoritos Herramientas Ayuda

Atrás Búsqueda Favoritos

Dirección http://www.eva.unicauca.edu.co/dotlrn/classes/matematicas/educacionmatematica/matematicaescolar22005/grupo214/one-community?page_num=0 Vencidos

Google Search 34 blocked Check AutoLink AutoFill Options

Bienvenido/a, Deisy Yamile Ruiz Rosero 1 Miembro en línea Su Cuenta Salir

Main Site » dotLRN » Asignaturas » Matematicas » Educacion Matematica » Matemática Escolar » GRUPO 2

GRUPO 2

Mi portal Subgrupo Información del subgrupo Calendario Archivos Panel de control

NOTICIAS

ORIENTACIONES PARA EL DESARROLLO DE LA TAREA... - 2006-07-04 00:00:00-05

Queridos profesores, el propósito de la tarea que se les ha asignado es revisar y analizar la estructura y contenido de la guía que se ha propuesto, para ello se plantean algunas preguntas que orientarán su trabajo.

El archivo con el que deben trabajar, se encuentra en la página Matemática Escolar; para tener acceso a ella, haz click sobre el icono "Matemática Escolar" ubicado en la parte superior de la página, subrayado y de color azul.

Busca el porlet "Asignaciones" y haz click sobre el archivo "GUÍA METODOLÓGICA", para tener acceso al documento con el que se va a trabajar y pulsa sobre el icono "ver tarea" que se encuentra frente al archivo representado por una lupa para conocer los interrogantes que forman parte de la tarea asignada.

Desarrolla tu actividad en un documento en word, nombrando el archivo así: nombre_guía, posteriormente, sube el archivo al porlet "ASIGNACIONES" en "Enviar Respuesta", ubicado al lado de "GUÍA METODOLÓGICA".

En caso de alguna inquietud...
» [Leer más...](#)

SUBGRUPOS

Sin Subgrupos

INFORMACIÓN DE SUBGRUPO

Conformado por estudiantes que se encargaran de revisar la parte metodológica o instruccional de la guía

Listo EVA - Entorno Virtual ... Internet 02:47 p.m.

ANEXO G: Formato de la guía metodológica en el EVA Unicauca

The screenshot shows a Mozilla Firefox browser window with the title 'Guia metodologica para docentes de matematicas - Mozilla Firefox'. The address bar contains the URL: <http://eva.unicauca.edu.co/dotlrn/classes/matematicas/educacionmatematica/matematicaescolar22005/lorsm/delivery/?man/>. The page content includes a green sidebar with a 'Course Index' menu and a main content area with the following text:

Bienvenido a Guia metodologica para docentes de matematicas

Sus estadisticas

Usted ha visto este curso 0 Número de Veces que ha sido cubierto 13.59 % del contenido.

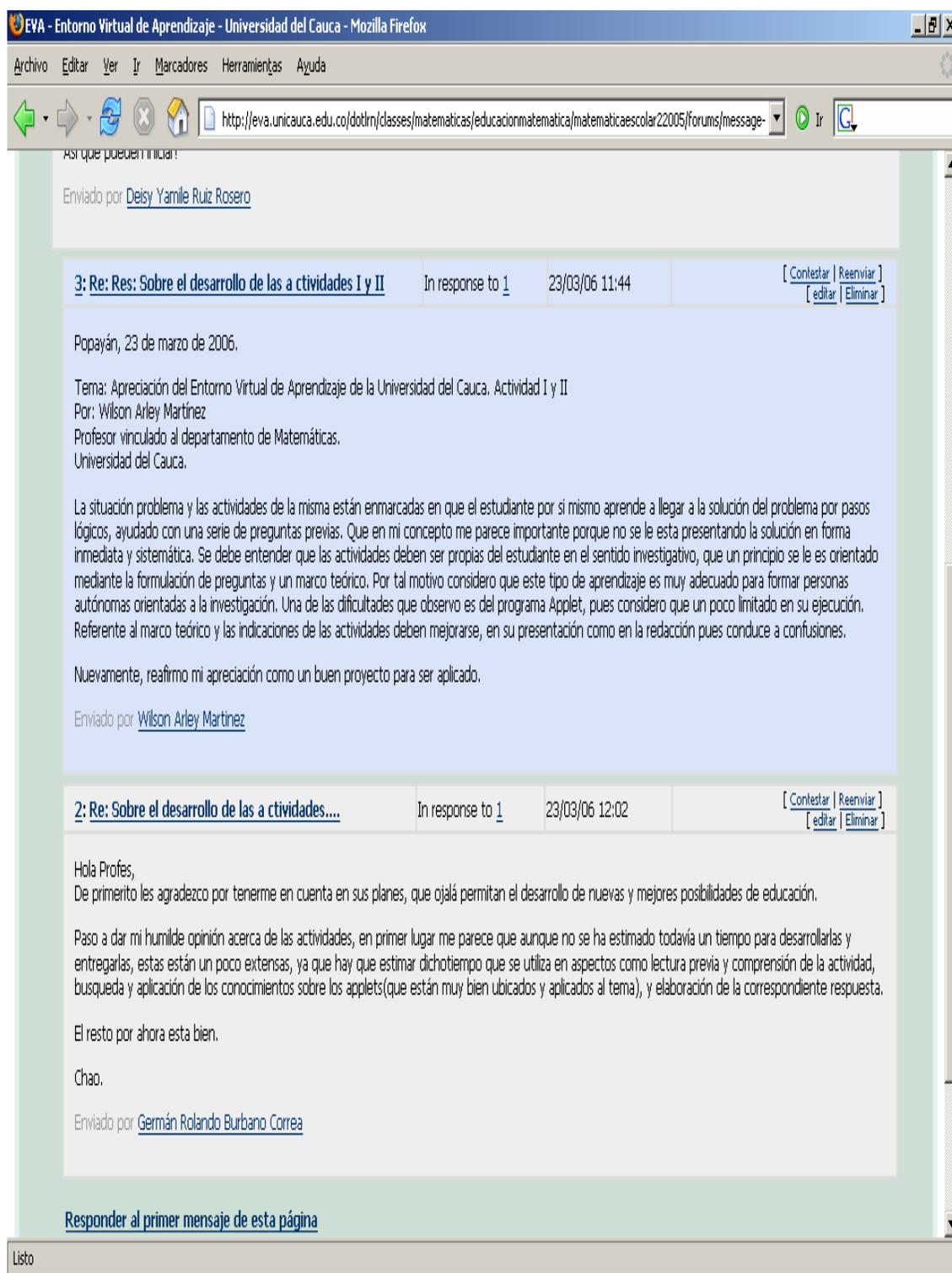
La última página que vió fue: [REFERENTE TEORICO PEDAGOGICO](#)

Haga Click en el menu a su izquierda para visualizar el material del curso.

The sidebar menu includes: Salir del Curso (regresar a .LRN), Course Index, Indice de contenidos, BIENVENIDOS, PRESENTACION, OBJETIVOS DE ESTUDIO, REFERENTE TEORICO PEDAGO, REFERENTE TEORICO CONCEP, ELEMENTOS FUNCIONALES BA, CONOCIMIENTOS PREVIOS Y, ESQUEMA DE LA SITUACION P, SITUACIONES DE APRENDIZA, and EVALUACION Y SEGUIMIENTO.

The taskbar at the bottom shows the system tray with the time 02:01 p.m. and several open applications, including 'trabajodegrado correcc...' and 'Guia metodologica par...'.

ANEXO H: Participación en los foros



The screenshot shows a Mozilla Firefox browser window with the address bar displaying the URL: <http://eva.unicauca.edu.co/dotm/classes/matematicas/educacionmatematica/matematicaescolar22005/forums/message->

At the top of the forum page, it says "Así que pueden iniciar:" followed by "Enviado por [Deisy Yamile Ruiz Rosero](#)".

The first message in the thread is:

3: Re: Res: Sobre el desarrollo de las actividades I y II In response to [1](#) 23/03/06 11:44 [Contestar] [Reenviar] [editar] [Eliminar]

Popayán, 23 de marzo de 2006.

Tema: Apreciación del Entorno Virtual de Aprendizaje de la Universidad del Cauca. Actividad I y II
Por: Wilson Arley Martínez
Profesor vinculado al departamento de Matemáticas.
Universidad del Cauca.

La situación problema y las actividades de la misma están enmarcadas en que el estudiante por sí mismo aprende a llegar a la solución del problema por pasos lógicos, ayudado con una serie de preguntas previas. Que en mi concepto me parece importante porque no se le está presentando la solución en forma inmediata y sistemática. Se debe entender que las actividades deben ser propias del estudiante en el sentido investigativo, que un principio se le es orientado mediante la formulación de preguntas y un marco teórico. Por tal motivo considero que este tipo de aprendizaje es muy adecuado para formar personas autónomas orientadas a la investigación. Una de las dificultades que observo es del programa Applet, pues considero que un poco limitado en su ejecución. Referente al marco teórico y las indicaciones de las actividades deben mejorarse, en su presentación como en la redacción pues conduce a confusiones.

Nuevamente, reafirmo mi apreciación como un buen proyecto para ser aplicado.

Enviado por [Wilson Arley Martínez](#)

The second message in the thread is:

2: Re: Sobre el desarrollo de las actividades.... In response to [1](#) 23/03/06 12:02 [Contestar] [Reenviar] [editar] [Eliminar]

Hola Profes,

De primero les agradezco por tenerme en cuenta en sus planes, que ojalá permitan el desarrollo de nuevas y mejores posibilidades de educación.

Paso a dar mi humilde opinión acerca de las actividades, en primer lugar me parece que aunque no se ha estimado todavía un tiempo para desarrollarlas y entregarlas, estas están un poco extensas, ya que hay que estimar dicho tiempo que se utiliza en aspectos como lectura previa y comprensión de la actividad, búsqueda y aplicación de los conocimientos sobre los applets (que están muy bien ubicados y aplicados al tema), y elaboración de la correspondiente respuesta.

El resto por ahora está bien.

Chao.

Enviado por [Germán Rolando Burbano Correa](#)

At the bottom of the forum page, there is a link: [Responder al primer mensaje de esta página](#)

The browser status bar at the bottom shows "Listo".

ANEXO I: Registro de tarea

SITUACIÓN PROBLEMA

En la ciudad de Pamplona, vive una pareja de esposos Helena y Héctor, quienes administran un negocio de helados de fruta y un cultivo de bacterias, respectivamente, además en sus tiempos libres organizan basares para ayudar a su comunidad.

ACTIVIDAD 1: Utilidad de la heladería

Helena fabrica helados a un costo de 0.5 dólares cada uno y ha logrado establecer que si los vende a x dólares cada uno, podrá vender aproximadamente $5-x$ helados al día. ¿Cuál será la utilidad diaria de Helena?

1. En términos de economía, establece qué es ingreso y qué es costo.
Ingreso: dinero que se recibe por una venta
Costo: valor que tiene un producto para su venta
2. ¿Qué cantidades están presentes en la situación? ¿Cuáles varían y cuales permanecen constantes? ¿Con qué clase de función se relaciona cada una de las cantidades?
Las cantidades son: costo, precio de ventas, ventas.
Constantes: costo
Varían: precio de ventas, ventas
Función costo: constante
Función precio de venta: lineal
Función ventas: lineal
3. Relacionando las cantidades presentes en la situación, ¿qué operación involucra encontrar la función ingreso? describa cómo será esta función.
Ingreso = $(5-x) \cdot x$, donde x = precio de venta
La función ingreso es una función cuadrática.
4. Utilice el applet: <http://www.fi.uu.nl/en/es/welcome.xml> y presione la pestaña función f para graficar la primera cantidad y la pestaña función g para graficar la segunda cantidad de la función ingreso. Presione operaciones y encuentre la función ingresos y responda:
 - a. ¿Qué clase de función se obtiene y cuál es su ecuación?
Rta: se obtiene una función cuadrática y su ecuación es $I(x) = -x^2 + 5x$
 - b. ¿Posee un máximo o un mínimo? Si existe, ¿qué significado tiene en la situación? posee un máximo, que en esta situación significa el mayor ingreso obtenido.
 - c. ¿A medida que aumenta el precio de los helados, siempre obtengo buenos ingresos? No, porque si se aumenta demasiado el precio de los helados, se disminuyen los ingresos.
 - d. ¿Si disminuyo el precio de los helados siempre obtengo buenos ingresos? No siempre.

- e. ¿Cuál es el mayor precio, para obtener un mayor ingreso? Entre 2 y 3 dólares. Más exactamente 2.5
5. Relacionando las cantidades presentes en la situación ¿Qué operación involucra encontrar la función costo total? En palabras describa cómo es esta función. Una multiplicación, suponiendo que se vendieron todos los helados, la función costo total es una función lineal.
6. Utilice el applet <http://www.fi.uu.nl/en/es/welcome.xml> y presione la pestaña función f para graficar la primera cantidad y la pestaña función g para graficar la segunda cantidad de la función costo total. Presione operaciones y encuentre la función costo total y responda:
- ¿Qué clase de función es y cuál es su ecuación? función lineal y su ecuación es $C(x) = (5-x) \cdot 0.5$
 - ¿Posee un máximo o un mínimo? no
 - ¿A medida que aumenta el precio de los helados, obtengo buenos costos? No
7. La utilidad del negocio de Helena está dado por:
 Utilidad = Ingresos – Costos, es decir, $U(x) = (5-x) \cdot (x-0.5)$
 Justifique la ecuación de la función utilidad. Utilice el applet para encontrar la función utilidad y responda: utilidad=ingresos-costos
 Ingresos = $(5-x) \cdot x$
 Costos = $(5-x) \cdot 0.5$
- ¿Qué clase de función es? Es una función cuadrática.
 - ¿Qué representa la variación de x? x representa como varia el precio de venta de los helados
 - A medida que aumenta el precio, ¿Qué esta pasando con la utilidad de Helena? Disminuye
 - ¿A qué precio debe vender los helados para obtener un máximo de utilidad? Alrededor de 3 dólares.
 - ¿Qué significan en la situación los puntos de intersección de la función utilidad con las gráficas de f y g en el eje x? significan que si vende los helados a precio de costo, no tiene utilidad y si vende los helados a 5 dólares o más, no obtiene utilidad u obtiene perdidas.

ANEXO J: Registro y análisis de una actividad

Actividad 1: analizar la variación de 12 ángulos entre 0 y 90 grados y responder frente a los siguientes interrogantes:

- a. En los triángulos que se obtienen, ¿cuál es el valor de la hipotenusa?

Rta: 1

Comentario: hace falta la justificación, para conocer la forma cómo el estudiante está entendiendo y desarrollando la actividad.

Reformulación: en los triángulos que se obtienen, ¿cuál es el valor de la hipotenusa? ¿Por qué?

- b. ¿Que observa en relación al ángulo dado y al triángulo que se forma? ¿Qué clases de ángulos son?

Rta: los triángulos que se forman son rectángulos, y a medida que crece el valor crece el rectángulo. Los ángulos son agudos.

Comentario: la forma como se plantea la respuesta evidencia que la pregunta no es clara y es necesario ser más específico para lograr el efecto que se quiere producir con dicho interrogante.

Reformulación: ¿Que cambio observa en los lados del triángulo que se forma a medida que el ángulo dado varía? ¿Qué clases de ángulos son?

ANEXO K: Guía Metodológica

PRESENTACIÓN

La enseñanza de la matemática, ha sido una constante histórica en todos los pueblos, que como el nuestro la ha valorado como una actividad humana fundamental que contribuye a la formación del individuo integral.

La necesidad de concebir la matemática, como una disciplina dinámica y la influencia permanente de las tecnologías en el sistema educativo, sugieren la puesta en práctica de estrategias metodológicas de enseñanza, donde el profesor deja de ser un depositario absoluto del saber matemático para convertirse en un orientador del proceso formativo. El docente se enfrenta a nuevos retos entre los que se plantea crear situaciones problemáticas que faciliten al estudiante explorar problemas, construir estructuras, plantear preguntas, reflexionar sobre modelos y generalizar.

Se busca entonces diseñar nuevas acciones educativas, complementarias a las ya existentes, que permitan al estudiante interactuar con un nuevo socio cognitivo para construir significados mediante la comparación, visualización, transformación y manipulación de elementos matemáticos, dentro de este contexto los procesos de variación y cambio constituyen uno de los aspectos de gran riqueza a explorar pues desarrollan la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa.

Los recursos computacionales amplían las posibilidades de representación de los fenómenos de variación y cambio, ofrecen medios alternativos de expresión matemática y formas innovadoras de manipulación de objetos matemáticos, posibilitando nuevas alternativas para la solución de un problema. Los Entornos Virtuales de Aprendizaje como instrumentos de mediación educativa, abren espacios para aplicar estrategias de enseñanza y aprendizaje, usando de forma eficiente recursos computacionales.

Fusionar e integrar la pedagogía con la tecnología bajo un propósito formativo se convierte en un reto que requiere definir una estructura metodológica que enmarque un enfoque pedagógico e instruccional para el docente, orientado hacia un aprendizaje autónomo, colaborativo y significativo. En este sentido se ha diseñado una guía metodológica que recoge los aspectos mencionados anteriormente.

Esta guía se compone de objetivos de estudio, referente teórico pedagógico, referente teórico conceptual, elementos funcionales básicos de un Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA), esquema de la situación problema, evaluación y seguimiento de las actividades, conocimientos previos y ejes temáticos, finalmente situaciones de aprendizaje; con el objetivo de proporcionar al docente una descripción de los elementos necesarios para el buen desarrollo de una acción

formativa en un EVA y enfocada hacia el estudio de procesos de variación y cambio.

En la guía se propone una serie de situaciones problema alrededor del concepto de funciones trigonométricas, funciones reales, derivada e integral en contextos de la matemática y de otras ciencias, que llevarán a descubrir y construir conocimientos a partir de la exploración, visualización y experimentación que los recursos computacionales facilitan.

La forma de abordar las situaciones es llamativa puesto que permite trabajar los conceptos a través de sistemas de representación donde es posible manipular el objeto matemático, descubrir invariantes, extraer conjeturas y conclusiones.

Estamos seguros que tanto estudiantes como docentes encontrarán en esta guía recursos didácticos e interactivos que ayudan a estudiar con agrado y provecho, procesos de variación y cambio.

OBJETIVOS DE ESTUDIO

- ✓ Desarrollar la capacidad argumentativa, interpretativa y de análisis a través de situaciones problema que involucren variación y cambio.
- ✓ Utilizar recursos computacionales (applets), que dinamicen el aprendizaje de los estudiantes, en un ambiente colaborativo, participativo y autónomo.
- ✓ Abordar la representación y el significado de contenidos matemáticos a partir de situaciones problema que permiten mediante su desarrollo la visualización e indagación.

REFERENTE TEÓRICO PEDAGÓGICO

Como referente teórico para la estrategia metodológica se consideran las teorías constructivistas de Piaget y Vygotsky, el modelo pedagógico y metodológico del aprendizaje significativo, de las cuales se han tomado los aspectos más relevantes que a nuestro criterio pueden garantizar y encaminar hacia un verdadero proceso de aprendizaje, teniendo en cuenta las necesidades y características del espacio donde se va a ejecutar la estrategia.

El Constructivismo: básicamente plantea que el individuo—tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos— no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano.⁴³

⁴³ CARRETERO, Mario. Op. Cit., p.39-71.

En la Teoría Constructivista de Piaget⁴⁴ se postula la existencia de una serie de organizaciones internas de la experiencia y de la información previa del sujeto (sus estructuras cognitivas), que son cada vez más poderosas y permite integrar la información de modos crecientemente complejos (componente estructuralista).

Los progresos en la adquisición del conocimiento resultan, en realidad, de una construcción en la que el sujeto es responsable directo de su aprendizaje (componente interaccionista).

De la concepción heredada del modelo Piagetiano, el desarrollo cognitivo se refiere a aprender a pensar y a valorar los aspectos operativos del pensamiento (procesos internos, operaciones mentales), a hacer experimentar al niño, a favorecer la manipulación con el fin de hacer surgir leyes generales. El profesor convertido en un mediador entre los conocimientos y el aprendizaje, debe facilitar el descubrimiento de nociones y la elaboración del saber y del saber-hacer, más que presentarlos bajo una forma preestablecida.

El aprendizaje es una actividad solitaria, donde el individuo aprende al margen de su contexto social. Por supuesto, a la hora de los parabienes teóricos se concede un papel a la cultura y a la interacción social, pero no se especifica cómo interactúa con el desarrollo cognitivo y el aprendizaje. Ciertamente, en las elaboraciones teóricas tampoco se concede un lugar a una unidad de análisis que permite estudiar las relaciones entre lo social y lo individual.

En la Teoría Constructivista de Vygotsky⁴⁵ una de las contribuciones esenciales de Vygotsky ha sido la de concebir al sujeto como un ser eminentemente social y al conocimiento mismo como un producto social.

El mundo social influye en el sujeto a través de otros sujetos, de los objetos socioculturales, de las prácticas que han sido creadas por generaciones anteriores. Dos componentes tienen un papel primordial en este proceso:

- ✓ Los sistemas semióticos de representación: es necesario el recurso de un sistema semiótico de representación (la escritura, los números, el habla) para pensar en las representaciones mentales de la persona (la memoria, el lenguaje, la conciencia).
- ✓ La interacción social: el desarrollo cognitivo resulta de una doble formación, primero externa (escala social) y después interna (escala individual), en un movimiento que va de lo social a lo individual.

Se ha comprobado cómo el estudiante aprende de forma más eficaz cuando lo hace en un contexto de colaboración e intercambio con sus compañeros. Igualmente, se han precisado algunos de los mecanismos de carácter social que

⁴⁴ MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Op. Cit., p.44-48.

⁴⁵ *Ibíd.*, p.48-52.

estimulan y favorecen el aprendizaje, como son las discusiones en grupo y el poder de la argumentación en la discrepancia entre estudiantes que poseen distintos grados de conocimiento sobre un tema.

Aprendizaje Significativo: en éste construir el conocimiento comienza con una observación y reconocimiento de eventos y objetos a través de los conceptos que ya se poseen. Para aprender significativamente, las personas deben relacionar el nuevo conocimiento con los conceptos relevantes que ya se conocen. El nuevo conocimiento debe interactuar con la estructura de conocimiento existente.

El material instruccional que se utilice, deberá pues estar diseñado para superar el conocimiento memorístico tradicional de las aulas y lograr un aprendizaje más integrador, comprensivo y autónomo. La práctica del aprendizaje comprensivo arranca de una muy concreta propuesta: partir siempre de lo que el estudiante tiene y conoce, respecto de aquello que se pretende aprender. Ausubel distingue tres tipos de aprendizaje significativo⁴⁶:

- ✓ El aprendizaje de representaciones, consiste en la atribución de significados a determinados símbolos, al respecto Ausubel dice: "Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el estudiante cualquier significado al que sus referentes aludan".
- ✓ Aprendizaje de conceptos, en este los conceptos se definen como "objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo". En la formación de conceptos, las características de estos se adquieren a través de la experiencia directa, en sucesivas etapas de formulación y prueba de hipótesis.
- ✓ Aprendizaje de proposiciones, implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego estas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva.

El aprender no puede reducirse a comprender, sino que debe incluir también organización de la práctica y adquisición de información no significativa para el estudiante. Resulta fundamental para el docente no sólo conocer las representaciones que tienen los estudiantes sobre lo que se les va a enseñar, sino también analizar el proceso de interacción entre el conocimiento nuevo y el que ya poseen. De esta manera, no es tan importante el producto final que emite el estudiante como el proceso que lo lleva a dar una determinada respuesta.

⁴⁶ DELGADO, Palomino. Teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel. Op.Cit. <http://www.monografias.com/trabajos6/apsi/apsi.shtml>.

REFERENTE TEÓRICO CONCEPTUAL

En este apartado se conceptualiza sobre los ejes centrales de la guía, a saber: Pensamiento Variacional, situación problema y Entorno Virtual de Aprendizaje, donde cada uno de ellos desarrolla una función y al ser integrados bajo un propósito de formación se encaminan hacia la creación de nuevas estrategias para el aprendizaje de las matemáticas.

Pensamiento Variacional⁴⁷: referente a los sistemas analíticos, hay un reconocimiento explícito del estudio de situaciones de cambio, a través de la modelación de situaciones provenientes de la vida real, de otras ciencias y de las mismas matemáticas, la que se desarrolla mediante el estudio de situaciones contextualizadas a través de funciones, el análisis cualitativo y cuantitativo de las gráficas, traducción entre representaciones, etc.

El lugar que ocupa la variación y el cambio dentro del currículo de matemáticas, se ubica en el dominio de un campo conceptual, donde se involucren conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas, en el que la variación se encuentre como sustrato de ellas.

Es decir, lo que se quiere es desarrollar una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos; conceptualizándose el Pensamiento Variacional como la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas.

Situación problema⁴⁸: La situación problema constituye el punto de partida de las situaciones didácticas. Definida como una situación didáctica fundamental que pone en juego, como instrumento implícito, los conocimientos que el estudiante debe aprender. La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características: debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender, debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez debe ser accesible a él, debe permitir al estudiante utilizar conocimientos anteriores, debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al educando a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones, debe contener su propia validación.

La resolución de la situación problema supone una serie de interacciones simétricas entre los estudiantes y de interacciones asimétricas entre los estudiantes y el profesor, pero también supone la superación de un conflicto

⁴⁷COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Op. Cit., p.11-25.

⁴⁸ -----Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Op. Cit., p.56-57.

cognitivo interno del sujeto entre sus conocimientos anteriores y los que resuelven la situación planteada.

La situación problema debe ser real en la mente del estudiante y debe permitirle descubrir y explorar regularidades, esquematizar y visualizar conceptos matemáticos, induciéndolo a interactuar con otros estudiantes y el profesor; para negociar, intervenir, discutir, cooperar y evaluar.

Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA)⁴⁹: el EVA es otro elemento conceptual percibido como un instrumento de mediación educativa, en donde se pueden aplicar y reforzar técnicas de enseñanza y aprendizaje usando de forma eficiente los recursos tecnológicos disponibles. Son espacios de interacción permanente que promueven el flujo de conocimientos y experiencias educativas ampliando la posibilidad de tener o adquirir mayor creatividad, sentido crítico y reflexivo para crear procesos integrados e integrales en las diferentes situaciones de aprendizaje.

Un EVA, como una herramienta, nos permite encaminar y controlar una forma de actividad externa, acción que depende de la forma en que tecnológica y pedagógicamente esta constituida para operar durante el proceso de aprendizaje.

El EVA, va a ser el punto de encuentro entre el formador y el estudiante o el grupo de estudiantes. Este debe disponer de los recursos necesarios para el aprendizaje desde la planificación de la guía y los contenidos básicos hasta las herramientas y espacios de comunicación necesarios para garantizar un aprendizaje de calidad. Un EVA debe ser ágil y de fácil uso para los estudiantes, de tal manera que no añada un esfuerzo adicional.

Un EVA tiene como componente esencial la información alrededor de la cual debe haber interacción social ya sea asincrónico o sincrónica; donde el estudiante es protagonista de su propio aprendizaje construyendo y compartiendo ideas abiertamente. Integra una variedad de recursos que soportan múltiples funciones: información, comunicación, colaboración, aprendizaje y manipulación; su representación abarca desde textos hasta la producción de gráficos mas complejos en 3D. Cabe resaltar que la cuestión clave no es la representación por si misma, sino lo que hacen los estudiantes con esta representación.

Aprender mediante un EVA implica seguir un proceso pedagógico centrado en el aprendizaje del estudiante, donde él debe asumir un rol activo y autónomo con tendencia al autoaprendizaje, es decir donde él participa, investiga, propone, discute, pregunta, critica, analiza, reflexiona y sintetiza.

⁴⁹ DILLENBOURG, Pierre. "Learning in the New Millennium: Building New Education Strategies for Schools". Op. Cit., p. 1-27.

El papel del formador dentro de un EVA está dirigido a ser un guía facilitador, orientador o mediador del aprendizaje de los estudiantes, con lo que garantiza una formación personalizada.

El formador no solamente debe conocer la materia, sobre la que se realiza la formación sino que también es necesario que sea conciente de las peculiaridades propias de la formación no presencial. Además debe ser capaz de cambiar sus estrategias de comunicación no verbal, explicitar y precisar la información de tal forma que no de lugar a confusión a la hora de ser leída por los estudiantes.

Nuestra capacidad de comunicar de una manera directa y ágil determinará en gran medida el éxito de la acción formativa, por ello hay que tener en cuenta algunas recomendaciones para la redacción de los mensajes: los títulos de los mensajes deben contener la idea principal del texto, procurar que el trato sea lo menos distante posible, el tono usado debe ser familiar y directo, no enviar mensajes excesivamente largos, si un mensaje no se puede sintetizar, lo mejor es adjuntarlo en un fichero de texto, dar una respuesta lo más rápida posible a la recepción de mensajes, o informar que se ha leído el mensaje y se está preparando la respuesta mas adecuada, resaltar los aportes interesantes de un estudiante y aprovechar algunos mensajes de respuesta para formular otros.

Es necesaria la figura del formador bien preparado temáticamente y dispuesto a utilizar las estrategias didácticas más adecuadas para poder facilitar el progreso cualitativo y cuantitativo de diferentes estudiantes, para lo cual el formador debe diseñar: tareas de orientación, motivación y seguimiento que le permitan tomar iniciativas de comunicación que favorezcan la continuidad de una relación personalizada y valorar los éxitos y las dificultades que haya encontrado el estudiante, tareas de resolución de dudas sobre contenidos y procedimientos de la acción formativa, tareas de evaluación que permitan conocer el grado de progreso demostrado por cada estudiante, tareas que favorezcan el trabajo colaborativo tanto en espacios formales como no formales.

ELEMENTOS FUNCIONALES BÁSICOS DE UN EVA

Los entornos virtuales son espacios diseñados para la información y por tanto cada uno de los espacios que lo componen son herramientas fundamentales de comunicación para la acción docente. A continuación se hará una breve descripción de los elementos funcionales que puedes encontrar en él.

El entorno virtual trabaja con un sistema que permite manipular y organizar la información concerniente al desarrollo del curso. Los espacios a los que tienen acceso estudiantes y docentes, son parte de la estrategia de comunicación que proporcionan los EVA.

Estos espacios son:

- ✓ Un espacio denominado “**documentos**” donde es posible depositar toda clase de textos en diferentes formatos (Word, html, zip), utilizados como referencia en la acción formativa.
- ✓ Un “**panel de control**” que permite al docente administrar los espacios destinados a la comunicación no formal entre los participantes. Estos son:
 - **Foros:** este es el ámbito de relación social del grupo y se pueden tratar tanto cuestiones espontáneas relacionadas con el contenido del curso como intervenciones de tipo personal y de opinión.
 - **Grupos** (administrar miembros, editar las propiedades del grupo, etc.): admite crear pequeñas sociedades de estudiantes a los que se asigna una determinada labor y para quienes se crea una página adicional que permite comunicar de manera concreta lo relativo a cada grupo: noticias, foros, información del subgrupo, calendario.
 - **Noticias** (información): espacio destinado a la comunicación directa con los estudiantes, tiene por objeto informar, recordar, dar indicaciones y pautas sobre la metodología a llevar a cabo para desarrollar los temas.
 - **Asignaciones** espacio dirigido hacia la asignación de tareas previstas dentro del plan de trabajo de la acción formativa.
 - **Planificación, calendario:** espacio de recordatorio que permite tener en pantalla el plan de trabajo a desarrollar con fechas y horas establecidas.
 - **Evaluaciones** sitio que almacena las tareas enviadas por los estudiantes y que permite llevar un control sobre la entrega de éstas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS Y EJES TEMÁTICOS

Para el planteamiento y desarrollo de cada situación problema es necesario tener en cuenta: los contenidos matemáticos previos que permiten iniciar el estudio de otros que presentan una mayor complejidad y los nuevos contenidos matemáticos, necesarios para direccionar las actividades que hacen parte de la situación problema, que serán el centro de la actividad cognitiva del estudiante durante su desarrollo.

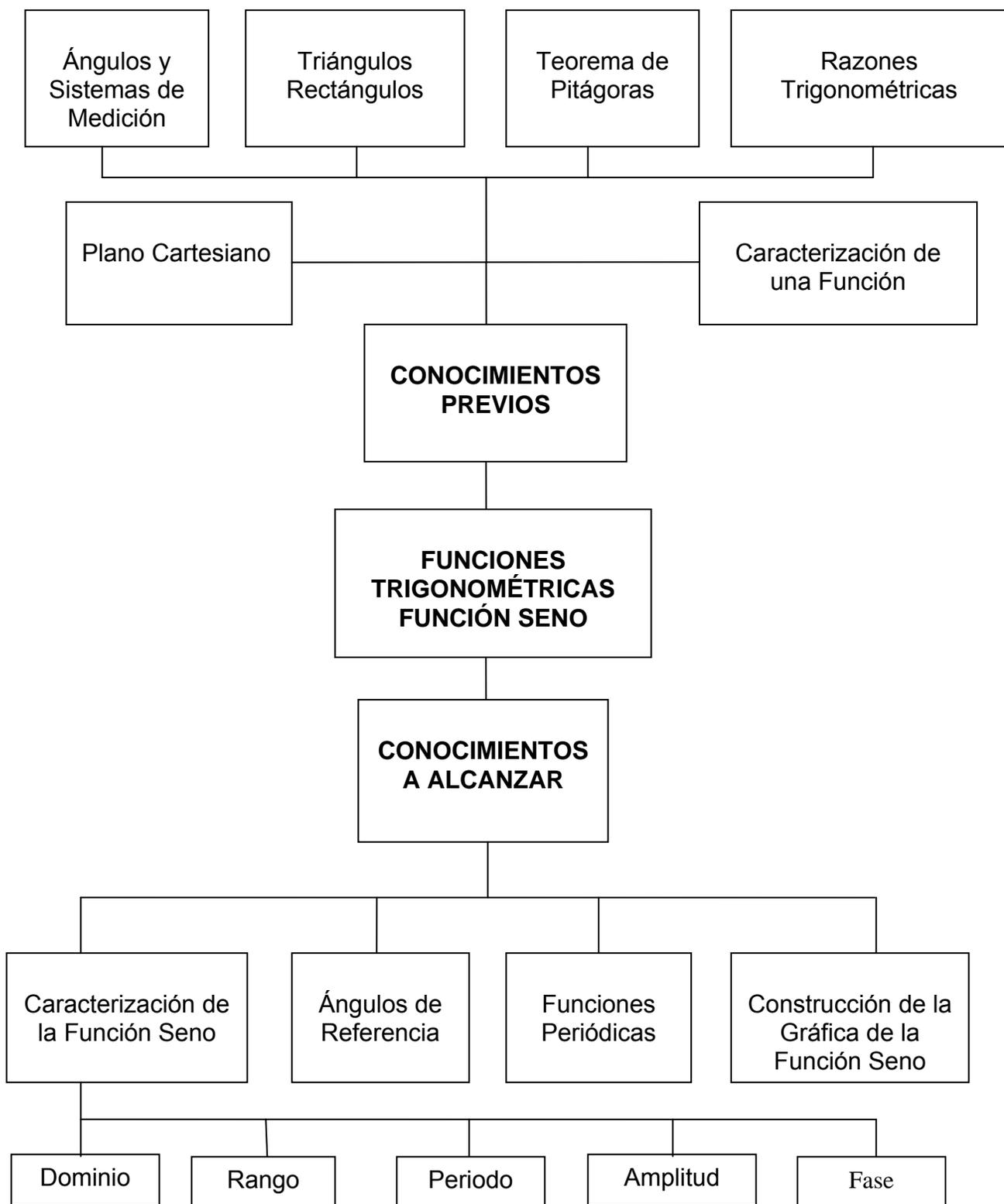
Los contenidos abordados con cada situación problema son:

- Funciones Trigonométricas: Función Seno
- Funciones de Variable Real
- Derivada
- Integral Definida

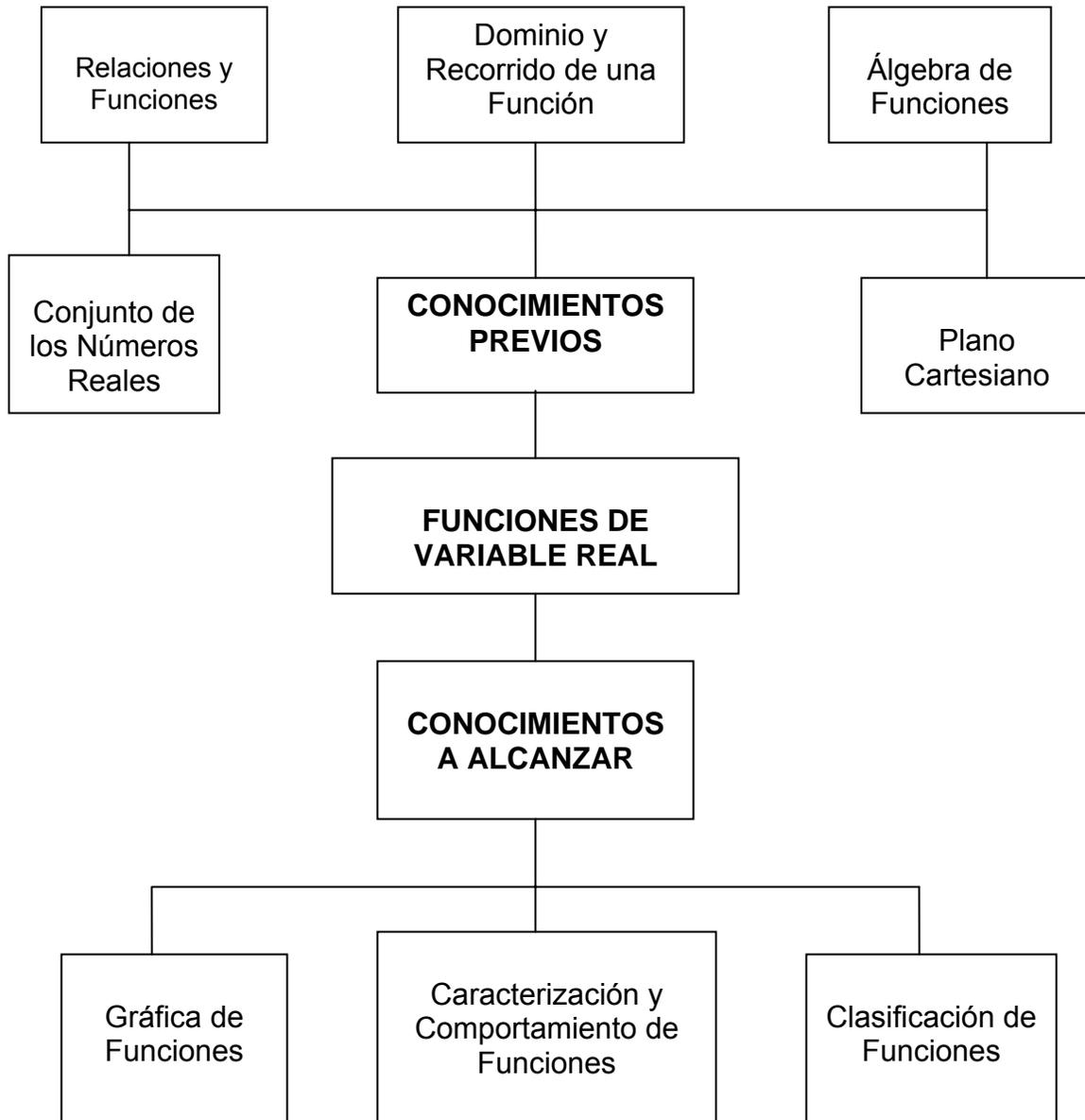
A continuación se muestra el esquema de contenidos que se ha diseñado alrededor de cada situación problema, donde se tiene como elemento central un

contenido matemático específico a partir del cual se plantean conocimientos previos y conocimientos a alcanzar mediante la resolución de la situación problema.

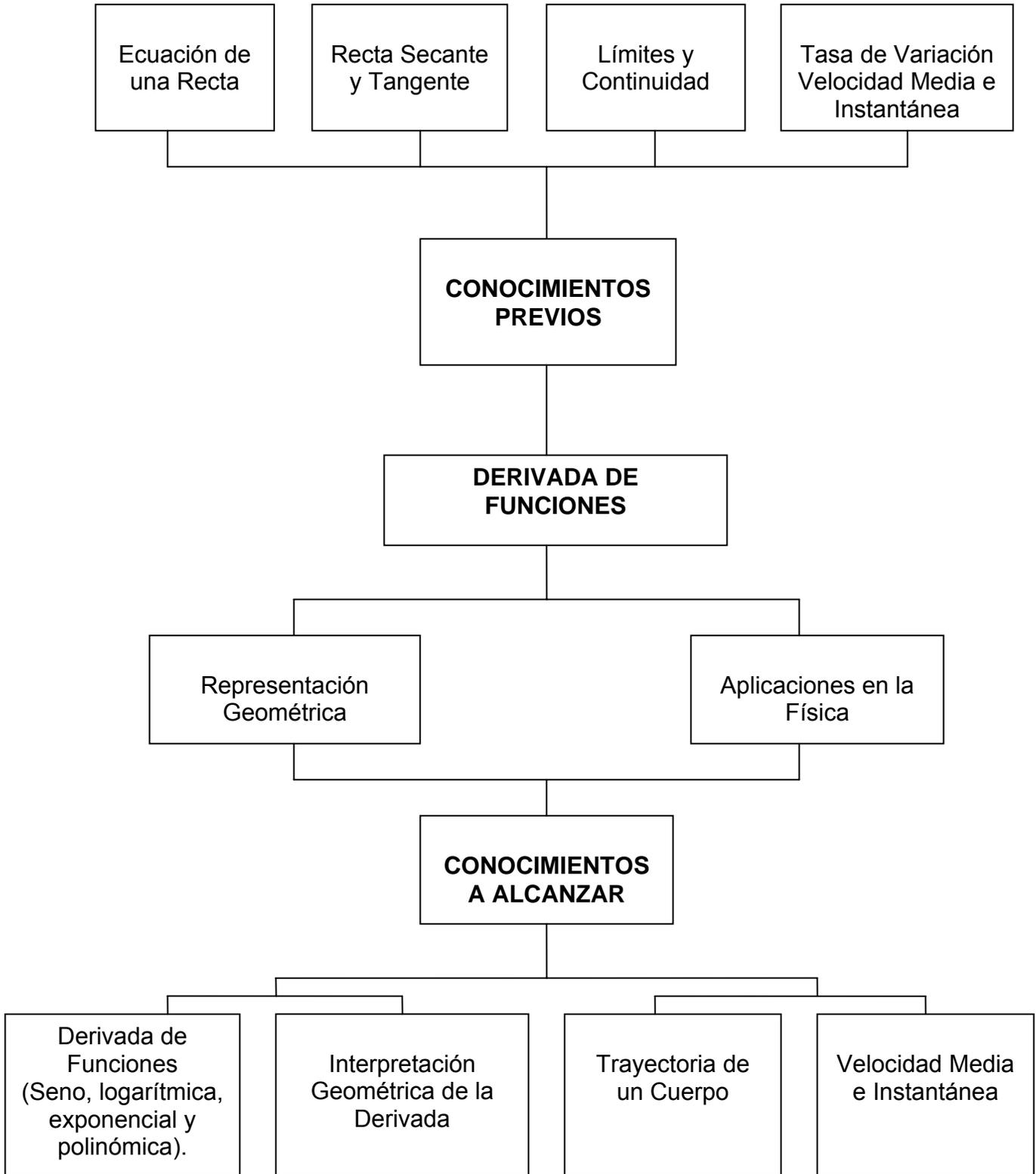
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: FUNCIÓN SENO



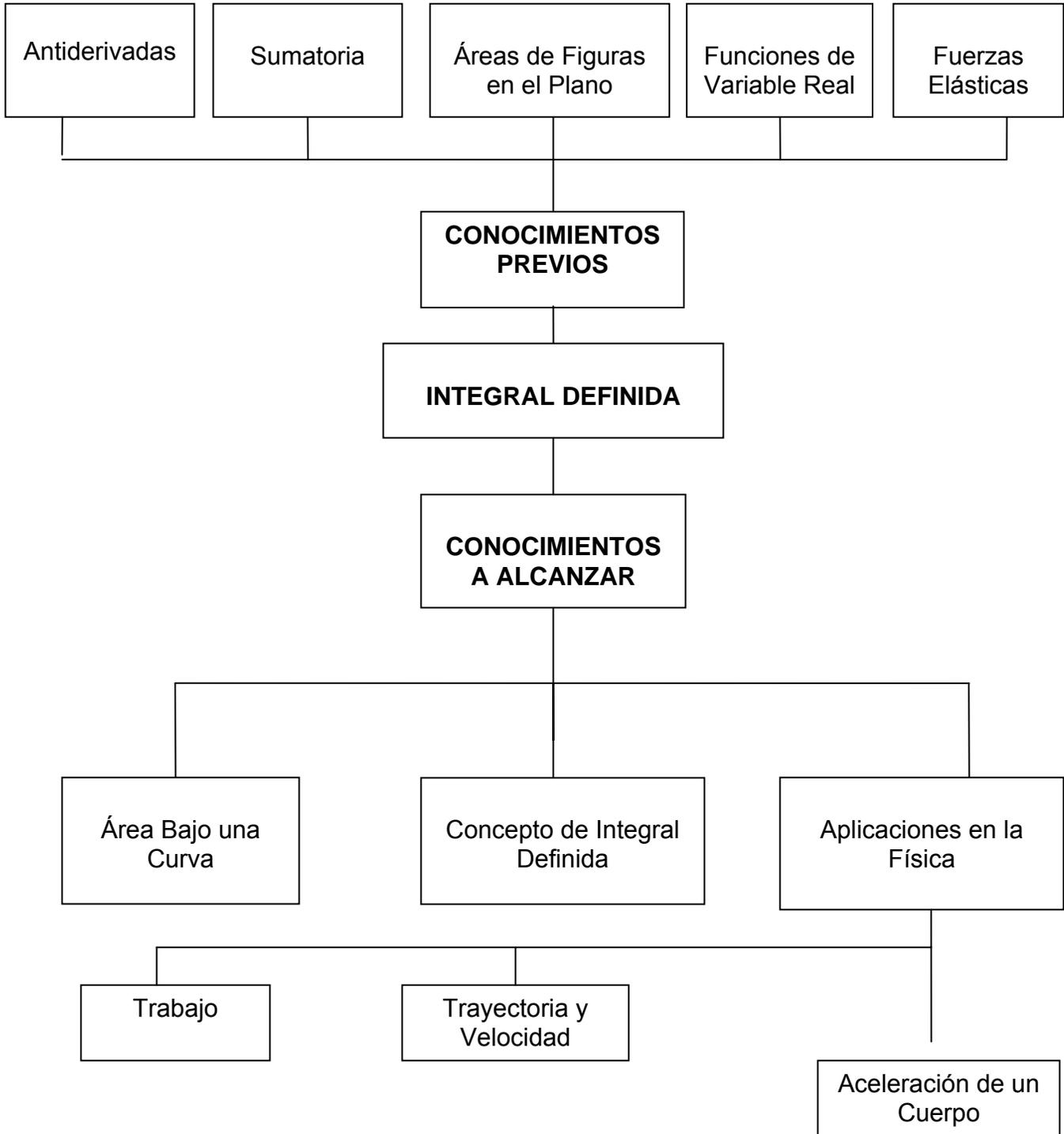
FUNCIONES DE VARIABLE REAL



DERIVADA DE FUNCIONES



INTEGRAL DEFINIDA



ESQUEMA DE LA SITUACIÓN PROBLEMA

Para el desarrollo de estas situaciones se toma como referente el esquema planteado por el MEN para el proyecto de aula⁵⁰, el cual se adecua teniendo en cuenta los propósitos formativos y el lugar donde se ejecutarán las situaciones problema.

El proyecto de aula es considerado como una propuesta teórica-práctica investigativa con propósitos definidos y conformada por diversas actividades de carácter pedagógico, teniendo como referente los estándares básicos y ciudadanos, en el marco del plan de estudios y el PEI.

La estructura diseñada es la siguiente:

Referente teórico general: es una descripción acerca del concepto matemático a desarrollar en cada situación problema; se inicia haciendo un esbozo del concepto que se va a trabajar debido a que los conceptos matemáticos pueden ser abordados desde diferentes concepciones. Seguidamente se muestra la aplicabilidad en los diferentes contextos (sociocultural y de otras ciencias) y dominios matemáticos (métrico, espacial, geométrico, aleatorio, numérico y variacional), donde el concepto toma mayor relevancia.

Se destaca los sistemas de representación (enunciados verbales, representación tabular, gráficas de tipo cartesiano, representación pictórica, fórmulas, expresiones analíticas e icónicas), como herramientas necesarias para el estudio de procesos de variación y cambio, resaltando su importancia y determinando cuáles de ellos serán útiles en la resolución de cada situación problema.

Así mismo se dan a conocer las habilidades y capacidades intelectuales que el estudiante puede apropiarse a lo largo del proceso, también se enuncian los conocimientos previos que son necesarios para iniciar el estudio de los conceptos.

Propósitos de formación: con miras al fortalecimiento y desarrollo del Pensamiento Variacional, se plantean los objetivos que se pretende alcanzar con cada situación problema.

El desarrollo del Pensamiento Variacional implica trabajar con situaciones de Variación y Cambio, donde además de expresar dicha variación en términos matemáticos, se hace necesario incentivar a la observación, registro e interpretación de los resultados dependiendo del contexto que se maneje.

⁵⁰ MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL .Estrategia MEN- ASCOFADE: Formación de formadores en estándares de competencias básicas y ciudadanas. Revolución educativa Colombia aprende. Colombia, Junio 2005, p.47-72.

Situación problema: cada uno de los conceptos que se proyecta trabajar es abordado mediante el planteamiento de una situación problema definida como un espacio de interrogantes que posibilita, tanto la conceptualización como la simbolización y aplicación significativa de los conceptos para plantear y resolver problemas de tipo matemático.

Dentro de la actividad intelectual se dan una serie de fases o procesos, empezando por una pregunta específica sin respuesta inmediata, esta pregunta orientada será luego el problema a resolver. La producción del estudiante parte de los datos suministrados en el problema, confronta la información y selecciona las operaciones que conducen a las respuestas frente a los espacios de interrogación.

Metodología: se indica la finalidad de cada una de las actividades que componen la situación problema, el contexto donde se define, momentos de trabajo y gestión con los estudiantes.

Materiales: se enuncian los recursos necesarios para la ejecución de las actividades. El recurso mediador para el desarrollo de las situaciones problema que se ha introducido en esta propuesta, es una herramienta que puede ejecutar animaciones interactivas, cálculos inmediatos u otras tareas sencillas. Los applets Java están escritos en el lenguaje de programación Java y diseñados para que su ejecución se realice dentro de una página Web.

Procedimientos esperados e indicadores de valoración: en esta parte se describen los procedimientos y actitudes que se espera que el estudiante ponga en juego en el momento de abordar las actividades que hacen parte de la situación problema. Igualmente se establecen ciertos parámetros que dan cuenta del alcance de los propósitos de formación.

Actividades de aprendizaje: para la consecución de los propósitos formativos planteados se propone abordar situaciones problema relacionadas con la variación y el cambio en el contexto matemático y de otras ciencias (física, economía, biología). Cada situación problema contiene diferentes actividades compuestas de interrogantes que se solucionan a partir de la manipulación de applets, de los cuales se hace una descripción de su manejo y funcionalidad.

Con el desarrollo de las actividades se propone la observación, descripción y análisis cualitativo del fenómeno presente en la situación problema. Con lo que se espera que el estudiante, al esbozar las gráficas, haga una descripción de la variación, formule conjeturas y haga predicciones relacionando las variables involucradas. De igual manera con la descripción cualitativa y cuantitativa de la relación entre las variables que hacen parte de la situación, se busca que los estudiantes formulen expresiones algebraicas que establezcan su mejor relación.

SITUACIONES DE APRENDIZAJE

Situación problema 1: Función Seno

Referente teórico general

Existen dos acercamientos comunes al estudio de las funciones trigonométricas. Uno de ellos se define en términos del cociente de dos lados de un triángulo rectángulo, de esta manera tenemos las razones trigonométricas las cuales son definidas solo cuando el ángulo es agudo; en el otro, se utiliza un círculo unitario para definir las funciones, donde el ángulo puede ser cualquier número real; estas funciones se definen en términos de un punto del lado terminal de un ángulo en posición normal.

En la situación problema se plantea el estudio de la función seno, a partir de la variación de un ángulo en posición normal sobre un círculo unitario, determinando de manera única un punto sobre dicho círculo; con lo cual se busca determinar el comportamiento y características generales de la función.

Las funciones trigonométricas se encuentran en diferentes contextos y dominios de la matemática escolar: métrico, geométrico, aleatorio y variacional y las relaciones entre éstos, en lo métrico pueden darse en el momento de requerir grados de precisión específicos; en lo geométrico están determinadas por la simetría; en lo variacional generalmente las reglas se expresan a través de fórmulas y ecuaciones algebraicas; pero también encuentran aplicabilidad en otras ciencias tales como: navegación, astronomía, topografía, aviación, la teoría de la proyección estereográfica y en la geodesia, en biología, física, economía e ingeniería donde es muy común encontrarse con fenómenos periódicos, fenómenos que se idealizan para su análisis en un modelo matemático que involucra funciones periódicas, en medicina por ejemplo un dispositivo electrónico muy utilizado en clínicas y hospitales es el visoscopio, el cual da la información gráfica del ritmo cardiaco del paciente, la representación que aparece en la pantalla modela la frecuencia cardiaca, ésta puede ser ajustada por una función periódica la cual a su vez se puede expresar en términos de las funciones seno y coseno.

Es pertinente en el momento de abordar una función trigonométrica mostrar diferentes representaciones de la misma, llevando a identificar semejanzas y diferencias, generar cambios en sus propiedades o características tras la modificación de los datos iniciales en un ejercicio; con el objetivo de obtener con esto mayor comprensión acerca del significado de función dando sentido a las ideas y construyendo soluciones significativas.

La representación es una herramienta indispensable en el estudio de las funciones trigonométricas, puesto que el objeto matemático solo se puede definir en términos de su representación. Los tipos de representación de las funciones trigonométricas en la educación media incluye desde el dibujo (lápiz y papel), pasando por las representaciones icónicas, hasta gráficas más sofisticadas en 3D

tratadas tecnológicamente. En las representaciones gráficas se destaca su importancia en cuanto se realiza un estudio detallado de propiedades y diversificaciones en el momento de interactuar con dichos objetos matemáticos.

Con la representación tabular se puede hacer un estudio de los datos numéricos para encontrar patrones de regularidad y establecer expresiones algebraicas, además es una herramienta necesaria para la comprensión del comportamiento de variables, ayudando a la escritura de expresiones o fórmulas para describir la variación y el cambio.

Con el estudio matemático de las funciones trigonométricas los estudiantes podrán abordar el concepto a partir del análisis. Es decir se busca que el estudiante adquiera las nociones básicas para que reflexione sobre ellas y esboce su propia representación del concepto, alcance destrezas y habilidades intelectuales al estar ejercitando su pensamiento crítico y analítico acerca de los objetos que le son presentados.

En los primeros niveles educativos el estudio se puede iniciar con identificar el ángulo como giros, aberturas, inclinaciones en situaciones dinámicas y estáticas; manejar el concepto y características generales de una función; realizar correctamente los cálculos de las relaciones trigonométricas de cualquier ángulo o interpretación de problemas que se trabajan mediante la resolución de triángulos rectángulos.

Propósitos de formación

- ✓ Identificar patrones de variación entre los elementos matemáticos involucrados en la situación problema.
- ✓ Analizar y describir la relación entre la representación algebraica y la gráfica de la función trigonométrica.
- ✓ Reconocer las características de la gráfica de la función seno (dominio, rango, crecimiento, decrecimiento, valores positivos y negativos) en relación con la situación que se presenta.

Metodología

La situación problema está compuesta de tres actividades que permiten conceptualizar la función seno, construir su representación gráfica y establecer su generalización. Para enfrentar la situación problema se propone desarrollar las actividades, compuestas por una serie de interrogantes que deben ser resueltos en forma secuencial, tomando el tiempo necesario para abordar cada una de ellas en diferentes sesiones de trabajo y así dar lugar a un completo proceso de análisis, reflexión y comprensión del tema. Para cada actividad se ha estimado un tiempo de 2 horas.

La situación problema es apropiada para estudiantes de grado décimo de educación media. El trabajo se puede realizar en parejas, lo cual favorece la discusión, formulación y puesta en ejecución de planes de acción. Este es un

aspecto importante para favorecer el trabajo colaborativo, la interacción y reflexión durante el proceso. Similarmente con el planteamiento de interrogantes en cada actividad se pretende crear un conflicto cognitivo en el estudiante, de tal modo que sea a través de la interacción la manera como logre despejar sus dudas.

La primera actividad propuesta, busca guiar en la conceptualización de la función seno a partir del estudio de los triángulos rectángulos que se forman con la variación del ángulo en posición normal y la ayuda del applet “**Sine Function box**”, el cual muestra el barrido que hace un ángulo dado y la respectiva coordenada en y , con el fin de identificar y sistematizar la relación existente entre el cateto y la hipotenusa.

En vista de que la gráfica de una función trigonométrica es concebida como un conjunto de puntos en el plano sin llegar a hacer un análisis e interpretación de la relación existente entre sus componentes, se pretende a partir de la construcción identificar la relación entre la variación del ángulo y el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa del triángulo rectángulo que se origina. Para lo cual se propone el uso del applet “**Graph of $y = \sin x$** ” que muestra el proceso de graficación de la función seno.

Mediante el proceso de observación y análisis se tiene como propósito reconocer las características de la función, además de establecer la ecuación que representa la gráfica.

En la tercera actividad se busca la generalización del proceso llevado a cabo, mediante el planteamiento de la ecuación general y el reconocimiento de cada uno de sus componentes con su respectivo papel en la ecuación. Para esta actividad se propone como herramienta el applet “**The graph of $y=a \sin b(x-c)$** ” que facilita visualizar los cambios que experimenta la ecuación al variar sus componentes.

Materiales

- Equipo computacional con software Java
- Acceso al EVA
- Guía de actividades
- Cuaderno de anotaciones

Procedimientos esperados e indicadores de valoración

En la primera actividad, se tiene como propósito guiar e involucrar al estudiante en la construcción de la función seno utilizando conceptos que previamente conoce; razones trigonométricas, clases de ángulos y características de la circunferencia, mediante la experimentación y análisis. Se espera que los estudiantes identifiquen elementos constantes, logren plantear las relaciones entre los elementos que varían, además de inferir acerca del comportamiento de las variables y su efecto en la función.

Se busca con la segunda actividad, que el estudiante visualice y relacione el efecto que produce la variación del ángulo en el trazo de la gráfica de la función, para posteriormente llegar a identificar características de ésta. Se espera que los estudiantes logren acotar el rango de la función, así como determinar que el dominio esta dado por todos los números reales y que la función tiene un período de 2π radianes,

La tercera actividad tiene como finalidad establecer los componentes generales para la función seno, así como también identificar los efectos que produce la variación de estos en la gráfica de la función. Se espera que los estudiantes relacionen el comportamiento de la gráfica con el cambio que se produce en la ecuación, teniendo en cuenta la variable o variables que producen dicho cambio, de tal modo que se introduzcan los conceptos de amplitud, fase, período, incluso la forma de plantear la ecuación.

Manejo de applets

Para el desarrollo de la situación problema, se han propuesto varias actividades que se apoyan en el uso de applets. A continuación se hace una descripción de su funcionalidad:

Applet 1: Sine function box

Determina el estudio de la definición de la función seno a partir de un círculo unitario con centro en el origen. Te permite realizar el barrido de diferentes ángulos, al introducir un valor en la caja de edición “x” y al presionar el botón “Start”. El applet te muestra el recorrido del ángulo y el valor de la coordenada en y.

Applet 2: The graph of $y = \sin x$

Te permite observar la posición de la coordenada en y al variar los ángulos y a la vez la trayectoria que describe dicha variación. Si haces uso del botón “draw” puedes ver el proceso ininterrumpidamente; con el botón “+” lo haces paso a paso y con “angle = 0” comienzas de nuevo.

Applet 3: Graph of $y = a \sin (bx+c)$

Muestra la gráfica de la función seno y dá la posibilidad de variar su amplitud, período y fase. Esto lo puedes hacer trasladando las barras que se encuentran en los botones a, b y c respectivamente. El botón “Transform” te ilustra el cambio que experimenta la función $y = \sin x$ al variar uno o varios de sus coeficientes, el botón “ $y = \sin x$ ”, te muestra la función estándar, los botones “—”, “++” permiten acercar o alejar la imagen.

Situación problema

En la clase de matemáticas, a Juanito se le dan los siguientes elementos: un círculo de radio 1 dm, un plano cartesiano y ángulos entre 0 y 360 grados, con la intención de que construya, analice e interprete la relación del cateto opuesto y la

hipotenusa a partir de los triángulos rectángulos que se producen por la variación de la posición del radio, describiendo el recorrido que produce dicha variación.

Actividad 1: La función seno a partir del círculo unitario

Juanito piensa inicialmente ubicar el círculo de radio 1 dm en el plano cartesiano de tal manera que coincidan el centro del círculo con el origen del plano y el radio con el eje positivo X. A partir de ahí varía la posición del radio, generando con ello diferentes ángulos en posición normal y triángulos rectángulos. Experimenta con Juanito y ayúdale a describir el comportamiento del triángulo rectángulo generado por la variación del radio.

- 1) Reconoce y familiarízate con el recurso computacional, haz click sobre el siguiente enlace: <http://www.ies.co.jp/math/java/trig/sinBox/sinBox.html>
- 2) Analiza la variación de 12 ángulos entre 0 y 90 grados y responde frente a los siguientes interrogantes:
 - a. En los triángulos que se obtienen, ¿cuál es el valor de la hipotenusa? ¿Por qué?
 - b. ¿Qué cambio observas en los lados del triángulo que se forma a medida que el ángulo dado varía? ¿Qué clase de ángulos son?
 - c. Completa la siguiente tabla con los valores que varían en la relación entre ángulos y catetos de los triángulos que se forman.

Ángulo	Cateto
Ángulo 1	
....	
Ángulo 12	

- d. ¿Entre qué valores presenta variación la coordenada en y? ¿Qué signo toma ésta coordenada?
 - e. ¿Cómo es la variación de la coordenada en y a medida que el ángulo aumenta?
 - f. ¿Cuál es la relación entre el cateto opuesto del triángulo obtenido y la coordenada en y? ¿Por qué?
 - g. Establece la relación matemática entre los valores registrados en la tabla. Argumenta tu afirmación.
- 3) Ahora considera 12 ángulos entre 90 y 180 grados:
 - a. ¿Qué clase de ángulos son? ¿Por qué?
 - b. ¿Qué relación se puede establecer entre el ángulo dado, el ángulo complementario y el triángulo que se forma?
 - c. ¿Entre que valores presenta variación la coordenada en y? ¿Qué signo toma la coordenada?

- d. ¿Qué hacer para encontrar la relación de la coordenada en y con el cateto opuesto del triángulo obtenido?
- e. ¿La relación matemática hallada (punto g de la actividad anterior) se continúa cumpliendo?
- f. Teniendo en cuenta el proceso llevado a cabo anteriormente y a partir de la comparación entre los valores que proporciona el applet para ángulos entre $0 - 90$ y $90 - 180$ grados. ¿Qué puedes concluir?
- g. A partir del análisis hecho anteriormente ¿qué conclusiones infieres para: el valor de los ángulos mayores de 180 grados, el signo de y en cada uno de los cuadrantes, los triángulos que se forman, la variación de y ?
- h. ¿Para qué ángulos es productivo seguir realizando este análisis? ¿Por qué?
- i. ¿Qué sucede si trabajo con ángulos negativos? ¿Qué puedes concluir?

Actividad 2: Gráfica de la función seno

Juanito luego de experimentar con los triángulos formados por la variación de la posición del radio, encontró que y es igual al seno del ángulo y decide estudiar el comportamiento de su trayectoria en cada cuadrante. Analiza con Juanito escribe tus propias conclusiones.

- 1) Reconoce y familiarízate con la herramienta computacional haciendo click en el siguiente enlace:
<http://www.ies.co.jp/math/java/trig/graphSinx/graphSinX.html>
- 2) Observa y describe la relación que existe entre la posición del radio y el trazo que define la variación de y .
- 3) Teniendo en cuenta la gráfica obtenida, indaga acerca de:
 - a. Los valores máximos y mínimos que toma la función.
 - b. Su comportamiento en cada cuadrante; similitudes y diferencias.
 - c. Características generales de la función. (dominio, rango, período)
 - d. La ecuación de la función.
- 4) Describe cómo es la gráfica de la función seno para ángulos de valor negativo.

Actividad 3: Generalización de la gráfica de la función seno.

Juanito descubre que la trayectoria de la función puede sufrir ciertas modificaciones que no alteran su naturaleza, sino sus características (amplitud, fase, período). Experimenta las variaciones que sufre la función y concluye.

- 1) Reconoce y familiarízate con la herramienta computacional, haciendo click en el siguiente enlace: <http://www.ies.co.jp/math/java/trig/ABCsinX/ABCsinX.html>
- 2) A partir de la manipulación del applet, reflexiona acerca de:
 - a. Lo que sucede cuando las variables a , b y c toman los valores 1 , 1 y 0 respectivamente.
 - b. Si la variables b y c toman los valores 1 y 0 respectivamente y a toma valores en el intervalo $(0,1)$ ó mayores que 1 .
 - c. Si la variables a y c toman los valores 1 y 0 respectivamente y b toma valores en el intervalo $(0,1)$ ó mayores que 1 .

- d. Si las variables a y b toman los valores 1 y 1 respectivamente y c toma valores entre -90 y 90 grados
- e. ¿Cuál es el efecto que produce en la gráfica la variación de a , b ó c ?

Situación problema 2: Funciones Reales

Referente teórico general

La idea de función de variable real es importante no solo en matemáticas, sino en cualquier ciencia que desee establecer nexos entre sus objetos de estudio, pues es una de las mejores formas de poner en correspondencia una cantidad con otra. El concepto de función definido como: sean X y Y dos conjuntos de números reales. Una función real f de una variable real x de X a Y , notada $f: X \rightarrow Y$ es una relación que asigna a cada número x de X un único número y de Y . El conjunto X se llama dominio de f . El número y , se denomina la imagen de x por f y se denota por $f(x)$. El recorrido de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X .

La situación problema aborda el concepto de función real mediante la relación de cantidades que describe cierto comportamiento y a partir del cual se busca predecir resultados, dicho proceso es llevado a cabo a través de la representación gráfica de las funciones involucradas.

Las funciones reales se encuentran en diferentes contextos y dominios de la matemática escolar: geométrico, aleatorio, variacional y en las relaciones entre estos, en lo geométrico se identifican características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana; en lo aleatorio se describen tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas mientras en lo variacional, se analizan las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones.

Generalmente se hace uso de las funciones reales al utilizar subconjuntos de los números reales, para hacer correspondencias numéricas por ejemplo, cuando se va al mercado o a cualquier centro comercial, siempre se relaciona un conjunto de determinados objetos o productos alimenticios, con el costo en pesos para así saber cuánto podemos comprar; si lo llevamos al plano cartesiano, podemos escribir esta correspondencia en una ecuación de función " x " como el precio y la cantidad de producto como " y ". Por tanto las funciones son de gran utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, economía, estadística, ingeniería, medicina, química, física, astronomía, geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables.

Es pertinente en el momento de abordar el tema de función de variable real mostrar diferentes representaciones de la misma función llevando a identificar semejanzas y diferencias, en sus propiedades o características. Obteniéndose así mayor comprensión acerca del significado de función, conduciendo al desarrollo cognitivo de forma apropiada y con ello lograr que el aprendizaje sea de forma estructurada y progresiva.

En las representaciones gráficas se destaca su importancia en cuanto se realiza un estudio detallado de propiedades y modificaciones en los elementos básicos de las funciones (dominio, rango, amplitud, concavidad, puntos de inflexión, entre otros) en el momento de interactuar con dichos objetos matemáticos.

Con el estudio matemático de las funciones de variable real se busca que el estudiante reflexione sobre conocimientos básicos y llegue a su propia forma de conocimiento, además de adquirir destrezas y habilidades intelectuales a partir de la manipulación de objetos matemáticos que le son presentados.

En los primeros niveles educativos el estudio se puede iniciar con la introducción al concepto de función, en donde el estudiante identifique la relación entre los elementos de los conjuntos que intervienen en dicho concepto y la denominación para cada conjunto; mostrar al estudiante el por qué de la denominación de función real, a partir de la ubicación de las características del concepto en el dominio de los números reales; finalmente presentar una clasificación y caracterización de los tipos de funciones reales con las que el estudiante puede trabajar.

Propósitos de formación

- ✓ Resolver situaciones de cambio a través de funciones y expresar dichas funciones inicialmente en forma simbólica y posteriormente representarlas en forma gráfica.
- ✓ Representar, analizar e interpretar funciones utilizando gráficos que describen una situación.

Metodología

Esta situación problema se trabaja a través de tres actividades de las cuales dos pertenecen al contexto económico y la otra al contexto de la biología. Para enfrentar la situación problema se propone desarrollar las actividades, compuestas por una serie de interrogantes, que deben ser resueltos en forma secuencial, tomando el tiempo necesario para abordar cada una de ellas en diferentes sesiones de trabajo y así dar lugar a un completo proceso de análisis, reflexión y comprensión del tema. Para cada actividad se ha estimado un tiempo de 2 horas.

La situación problema está diseñada para estudiantes de grado undécimo de educación media. El trabajo puede efectuarse en parejas buscando que a través de la interacción entre los estudiantes y de estos con el recurso computacional, se dé un aprendizaje colaborativo favorecido por la discusión, comparación y argumentación de conocimientos previos, posterior formulación y puesta en ejecución de planes de acción.

En la actividad uno, a partir de la información que proporciona la situación y el uso del applet "**jugando con funciones**" que permite graficar en un mismo plano dos funciones, contrastarlas y realizar operaciones básicas entre ellas, se modela la función utilidad.

En la segunda actividad el análisis de la función exponencial, se realiza a través de la variación y la comparación entre los distintos valores que toma la ecuación general dependiendo de la información proporcionada en la situación. El uso del applet “**gráfica de varias funciones**” que representa cuatro funciones en un mismo plano, permite analizar lo que sucede con la gráfica al cambiar el valor de sus constantes.

En la última actividad se realiza el estudio en algunos puntos de la función $P(x)=3x+2x^{3/2}+5$ a través del uso del applet “**representación gráfica de una función**”, el cual permite visualizar el comportamiento que experimenta la variable dependiente y , además obtener los datos necesarios para el desarrollo de la situación de forma mas rápida.

Materiales

- Equipo computacional con software Java
- Acceso al EVA
- Guía de actividades
- Cuaderno de anotaciones

Procedimientos esperados e indicadores de valoración

En la primera actividad se busca que el estudiante relacione la información suministrada en la situación, para deducir nuevas funciones a partir de las iniciales. Además que analice el comportamiento de las funciones involucradas en el desarrollo de la actividad y sea capaz de darle un significado apropiado dentro del contexto que ha sido planteada.

En la segunda actividad se pretende que el estudiante identifique la variación de los coeficientes que hacen parte de la función exponencial, a través de su representación gráfica para establecer características que le permitan reconocer la función y su comportamiento.

La última actividad tiene como objetivo visualizar y determinar el comportamiento de la gráfica en diferentes puntos de tal manera que el estudiante extraiga información acerca de las variables involucradas y pueda predecir algunos resultados.

Manejo de applets

Para el desarrollo de la situación problema se han formulado tres actividades para ser trabajadas con la ayuda de applets. Se hace una breve presentación de las características de éstos, con el fin de orientar sobre su funcionalidad.

Applet 1: Jugar con funciones

La intención de este applet es facilitar la visualización de varias funciones estándar (lineal, cuadrática, polinómica,...) también te permite crear nuevas funciones y gráficos aplicando diferentes operaciones a las funciones estándar.

Al ingresar en el applet encuentras varias ventanas: Algebra de puntos, Cinco en fila, Cintas con números, Estimar, Entre otras. Debes dirigir la atención a la ventana denominada “*jugar con funciones*” y hacer click en ella.

Seguidamente encuentras una nueva ventana en donde al hacer click en “*Iniciar Jugar con Funciones*” se abre el plugin. Realizando dicha instrucción tienes acceso directo al applet con el cual se desarrolla la actividad.

En la parte superior del applet encuentras varios botones con las siguientes funcionalidades:

- *Función f*: En este botón puedes escoger la primera función estándar (lineal, cuadrática, polinómica,...) y su correspondiente gráfica estará de color rojo
- *Función g*: En este botón puedes escoger la segunda función estándar (lineal, cuadrática, polinómica...), donde el gráfico será de color azul.
- *Operaciones*: En este botón puedes escoger una operación para aplicar a la función f o las funciones f y g . El gráfico del resultado tiene color verde y mantiene la dependencia de los parámetros en las funciones de f y g .
- En el botón “*Paneles de control*” encuentras para cada función una ventana donde puedes modificar los elementos en su correspondiente ecuación, es decir ahí se generan los cambios en la pendiente y el intercepto.
- *Opciones*: este botón te permite visualizar los valores de todas las funciones, puedes hacer click en él y modificar una tabla de valores para las funciones además de aproximar puntos de intersección de gráficos.
- El botón “*Ventana*” te permite cambiar los parámetros del eje x , y del eje y .

Applet 2: Representación gráfica de varias funciones

Te permite visualizar las gráficas de las funciones que se trabajan en un mismo plano cartesiano, logrando con ello contrastar la variación que sufre una función al modificar algunos de sus valores. Este se compone de dos secciones: una denominada “*cómo insertar operaciones y funciones*”, donde se te informa como debe ser el formato de las funciones en el momento de ser ejecutadas en el applet; la otra sección es “*gráfica de varias funciones*”, donde encuentras cuatro cajas de edición (“ $f_1(x)=$ ”, “ $f_2(x)=$ ”, “ $f_3(x)=$ ”, “ $f_4(x)=$ ”), dentro de las cuales puedes escribir la función que necesites trabajar y el botón “*gráfica*” que te permite visualizarlas (cuando se requiera solo visualizar 1, 2 ó 3 funciones las demás cajas de edición deben estar en blanco). Cambiando los valores de las cajas de edición “ $X_{mín}$, $X_{máx}$, $Y_{mín}$, $Y_{máx}$ ” y luego dando click en “*Zoom in*” puedes delimitar el valor que toman los ejes coordenados.

Applet 3: Representación gráfica de una función

Te permite representar gráficamente una función y está compuesto de dos secciones: en la sección “*Cómo insertar operaciones y funciones*” puedes encontrar el formato para digitar las operaciones y funciones que necesites, en la sección “*representación gráfica*” encuentras la caja de edición “ $f(x)=$ ” donde puedes escribir la función requerida y el botón “*gráfica*” que te permite visualizarla. Cambiando los valores de las cajas de edición “ $X_{mín}$, $X_{máx}$, $Y_{mín}$, $Y_{máx}$ ” y luego

dando click en “Zoom in” puedes delimitar el valor que toman los ejes coordenados. La caja de edición “x=” te facilita encontrar el valor de la ordenada y al mismo tiempo te muestra su ubicación en la gráfica.

Situación problema

En la ciudad de Popayán, vive una pareja de esposos Helena y Héctor, quienes administran un negocio de helados de fruta y un cultivo de bacterias, respectivamente, además en sus tiempos libres organizan bazares para ayudar a su comunidad.

Actividad 1: Utilidad de la heladería

Helena fabrica helados a un costo de 0.5 dólares cada uno y ha logrado establecer que si los vende a x dólares cada uno, podrá vender aproximadamente $5-x$ helados al día. ¿Cuál será la utilidad diaria de Helena?

- 1) En términos de economía, establece qué es ingreso y qué es costo.
- 2) ¿Qué cantidades están presentes en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles permanecen constantes? ¿Con qué clase de función se relaciona cada una de las cantidades?
- 3) Relacionando las cantidades presentes en la situación, ¿qué operación involucra encontrar la función ingreso? Establece y describe cómo es ésta función.
- 4) Utiliza el applet: <http://www.fi.uu.nl/en/es/welcome.xml> y presiona la pestaña “función f ” para graficar la primera cantidad y la pestaña “función g ” para graficar la segunda cantidad. Presiona “operaciones” y encuentra la función ingresos y responde:
 - a. ¿Qué clase de función se obtiene y cuál es su ecuación?
 - b. ¿Posee un máximo o un mínimo? Si existe, ¿qué significado tiene en la situación?
 - c. ¿A medida que aumenta el precio de los helados, siempre obtienes buenos ingresos? ¿Por qué?
 - d. ¿Si disminuyes el precio de los helados siempre consigues buenos ingresos? ¿Por qué?
 - e. ¿Cuál es el mayor precio, para alcanzar un mayor ingreso?
- 5) Relacionando las cantidades presentes en la situación ¿Qué operación involucra encontrar la función costo total? Establece y describe cómo es esta función.
- 6) Utiliza el applet <http://www.fi.uu.nl/en/es/welcome.xml> y presiona la pestaña “función f ” para graficar la primera cantidad y la pestaña “función g ” para graficar la segunda cantidad. Presiona “operaciones” y encuentra la función costo total y responde:
 - a. ¿Qué clase de función es y cuál es su ecuación? ¿Por qué?
 - b. ¿Posee un máximo o un mínimo? ¿Por qué?
 - c. ¿A medida que aumenta el precio de los helados, obtienes buenos costos?
- 7) La utilidad del negocio de Helena está dado por la ecuación:

Utilidad = Ingresos – Costos, es decir, $U(x) = (5-x).(x-0.5)$ ¿Por qué $U(x)$ representa la función utilidad? Utiliza el applet para encontrar la función utilidad y responde:

- a. ¿Qué clase de función es?
- b. ¿Qué representa la variación de x ?
- c. A medida que aumenta el precio, ¿Qué está pasando con la utilidad de Helena?
- d. ¿A qué precio debe vender los helados para obtener un máximo de utilidad?
- e. ¿Qué significan en la situación los puntos de intersección de la función utilidad con las gráficas de f y g en el eje x ?

Actividad 2: Cultivo de bacterias

Héctor ha determinado que el número de bacterias de un cultivo crece en forma exponencial, es decir, que el número de bacterias presentes en el momento x está dado por una función de la forma $F(x) = Qe^{kx}$, donde Q es la cantidad inicial, k la tasa de crecimiento y x el tiempo en horas. Analiza lo que ocurre en el cultivo para un número inicial de bacterias y una tasa de crecimiento dada.

- 1) Suponga que en cierto cultivo se encuentra inicialmente una bacteria y que crece a una tasa de 0.06. Analiza qué ocurre en el cultivo para ello utiliza el applet <http://www.aulademate.com/contentid-32.html>, escribe en la primera caja de edición la función $f(x)$ y deja las otras cajas de edición en blanco.
 - a. ¿Cómo es la función exponencial? ¿Qué puedes inferir del cultivo de bacterias?
 - b. ¿Se puede obtener un máximo de bacterias a medida que transcurre las horas?
 - c. ¿Cuál es el mínimo de bacterias que puede tener el cultivo?
- 2) Ahora la tasa de crecimiento es de 0.09 y el cultivo inicial es el mismo. Utiliza la segunda caja de edición para escribir la nueva función $f(x)$, sin borrar la función de la primera caja de edición.
 - a. ¿Cómo es la nueva función exponencial con respecto a la primera?
 - b. ¿En qué afecta al cultivo el aumento de la tasa de crecimiento?
 - c. ¿Qué características encuentras entre los dos cultivos de bacterias?
- 3) Utiliza las dos cajas restantes de edición del applet y aumenta la tasa de crecimiento del cultivo.
 - a. ¿Qué puedes inferir del cultivo?
 - b. ¿El número inicial de bacterias se afecta con el aumento de la tasa de crecimiento?
 - c. ¿Qué puedes concluir de las gráficas?
- 4) Utiliza las cuatro cajas de edición del applet para encontrar la función de crecimiento del cultivo, si el número de bacterias iniciales aumentan y la tasa de crecimiento permanece constante.
 - a. ¿Qué cambios sufre el cultivo?
 - b. ¿A medida que transcurre el tiempo qué está pasando con el cultivo?
 - c. ¿Qué inferencias puedes extraer?

- 5) Asegúrate de dejar en blanco las cajas de edición y supón que la tasa de crecimiento es -0.06 y el número de bacterias iniciales es 1.
 - a. ¿Qué le sucede al cultivo a medida que transcurre el tiempo?
 - b. ¿En algún momento el cultivo se extinguirá? ¿Por qué?
 - c. Edita la función del numeral 1 en otra caja de edición y encuentra similitudes y diferencias entre los dos cultivos.

Actividad 3: Concurrencia al bazar

Héctor y Helena organizan un bazar y calculan que en x horas, después de que se inicie habrá una población de $P(x)=3x+2x^{3/2}+5$ personas. Analiza la concurrencia al evento.

Utiliza el applet <http://www.aulademate.com/contentid-29.html>, edita la función $P(x)$ y responde:

- 1) ¿Con cuántas personas se inicia el evento?
- 2) A medida que transcurre el día, ¿Qué está pasando con el número de personas?
- 3) Entre 1 y 2 horas, ¿Cuántas personas han asistido al bazar?
- 4) Entre 2 y 3 horas, ¿Cuántas personas han asistido al bazar?
- 5) Si la capacidad del lugar es de 49 personas, ¿Al cabo de cuatro horas se habrá llenado el lugar?
- 6) Si se disminuye la capacidad del lugar, ¿Qué ocurre con la variable tiempo?

Situación problema 3: La Derivada en su Representación Geométrica

Referente teórico general

El concepto de derivada se puede ver en muchos aspectos. Por ejemplo, cuando se refiere al gráfico de una función f en dos dimensiones, se considera la derivada como la pendiente de la tangente de la gráfica en el punto x . Se puede aproximar la pendiente de esta tangente como el límite de una secante. Con esta interpretación, pueden determinarse muchas propiedades geométricas de los gráficos de funciones, tales como concavidad o convexidad. La derivada usada para calcular pendientes, también sirve para determinar el ritmo de cambio de una variable con respecto a otra, lo que le confiere utilidad en una amplia variedad de situaciones. Por citar solo algunas, son ejemplos los ritmos de crecimiento de poblaciones, los ritmos de producción, los de flujo de un líquido, la velocidad y la aceleración.

La situación problema plantea el estudio de la derivada a partir de su representación geométrica en la función seno, exponencial, logarítmica y polinómica.

La derivada se encuentra en diferentes contextos y dominios de la matemática escolar: variacional, métrico y espacial. En lo variacional se encuentra la interpretación de la noción de derivada como razón de cambio y desarrollo de métodos para hallar la derivada de funciones básicas; en lo métrico permite

formular y resolver problemas que involucran medición para atributos tales como velocidad y densidad; en cuanto a lo espacial, se refiere a identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana. Pero también se encuentra en las ciencias experimentales tales como: física, economía, biología y química.

La representación es una herramienta importante en el estudio de la derivada puesto que permite ver el efecto que produce este concepto al ser aplicado a funciones. Los tipos de representación utilizados para el estudio de la derivada son: el simbólico y geométrico

Con el estudio de la derivada se aborda desde otras perspectivas el concepto de pendiente, además se hace uso de la observación y la exploración para abstraer las características generales de determinadas funciones, respaldados sobre cierto manejo conceptual que les permitirá argumentar y sostener sus respuestas. Los conocimientos previos necesarios para desarrollar la situación problema son: la recta tangente, secante, ecuación de la recta, pendiente, conocer y manejar el plano cartesiano.

Propósitos de formación

- ✓ Iniciar al estudiante en el desarrollo de su capacidad argumentativa, a partir de las representaciones que toma el concepto logrando un contraste entre lo teórico y lo gráfico.
- ✓ Promover el estudio de situaciones que conduzcan a procesos de análisis, interpretación y generalización de un concepto.

Metodología

La situación problema está compuesta de tres actividades que buscan establecer los cambios que se produce a partir de su análisis gráfico también se busca orientar al estudiante hacia la generalización de una ecuación a partir de sus características. Esto se pretende llevar a cabo mediante la observación, exploración y análisis de los recursos computacionales disponibles.

Para enfrentar la situación problema se propone desarrollar las actividades dadas, las cuales están compuestas por una serie de interrogantes que deben ser resueltas en forma secuencial de acuerdo a lo experimentado en el applet. Es importante tomar el tiempo necesario para abordar cada una de las actividades en diferentes sesiones de trabajo y así dar lugar a un completo proceso de análisis, reflexión y comprensión del tema. Se ha estimado que el tiempo necesario para el desarrollo de cada actividad es de 2 horas.

La situación problema está diseñada para estudiantes de grado undécimo de educación media, se recomienda desarrollarla individualmente, ya que uno de los objetivos es determinar la capacidad de argumentación y el manejo de conceptos previos.

La primera actividad se plantea con el objetivo de identificar las características de las funciones exponencial y logarítmica, al igual que las de su derivada. Contrastar cada función con su correspondiente derivada para lograr una conceptualización que complemente lo algorítmico con lo gráfico.

En la segunda actividad, se da al estudiante varias opciones para responder a un interrogante, con el objeto de promover la observación y análisis de los elementos presentes en ésta, se espera además que el estudiante utilice sus conocimientos previos para elegir la respuesta y argumentar el por qué de la elección entre las diferentes opciones. Finalmente, mediante el proceso de argumentación se pretende guiar al estudiante hacia conclusiones que le permitan conceptualizar la derivada de la función seno.

En la tercera actividad, se tiene como finalidad realizar un contraste entre las características de la función polinómica y los cambios en ésta, producto del proceso de la primera y segunda derivada para llegar desde lo particular al concepto general de la derivada para la función polinómica.

Materiales

- Equipo computacional con software Java
- Acceso al EVA
- Guía de actividades
- Cuaderno de anotaciones

Procedimientos esperados e indicadores de valoración

En la primera actividad, se espera que utilicen conceptos como: dominio, rango, criterios para determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento; empleen el algoritmo de la derivada de la función exponencial y logarítmica para determinar la relación entre $f(x)$ y $f'(x)$, igualmente se pretende que previamente reconozcan el comportamiento de estas funciones.

La variación en el incremento, tiene por objetivo llevar a que el estudiante haga uso del cálculo de la derivada planteado mediante el proceso del límite y de los conocimientos que tiene respecto a las rectas tangentes y secantes.

En cuanto a la segunda actividad, se espera determinar la capacidad de argumentación del estudiante, de tal manera que identifique los elementos que surgen en la construcción de la función seno a partir de un círculo unitario, reconozca las características de funciones como la cuadrática, seno, coseno e intervalos de crecimiento y decrecimiento y por medio de las conclusiones extraídas refleje el nivel de abstracción alcanzado.

En la tercera actividad se busca reconocer los cambios que se producen al derivar una función polinómica, estableciendo la regla general para este tipo de funciones. También continuar con el fortalecimiento sobre el análisis de funciones, identificando modelos de funciones constantes, lineales, cuadráticas y cúbicas,

haciendo uso del concepto de pendiente e intercepto; elementos necesarios para la formulación de una ecuación lineal.

Manejo de applets

Para el desarrollo de la situación problema, se han propuesto varias actividades apoyadas en el uso de applets. A continuación se hace una descripción de su funcionamiento y manejo:

Applet 1: Derivada de la función exponencial

Aborda la definición de la derivada de una función mediante el concepto geométrico a partir de la línea tangente a la curva, con las siguientes funcionalidades:

- El applet te muestra simultáneamente dos planos cartesianos donde se ilustra con color verde la gráfica correspondiente a la función y con color azul la gráfica correspondiente a su derivada obtenida a partir de desplazar el punto amarillo, sobre dicha gráfica.
- El botón “*click $f(x)$ to choose*” te permite determinar el tipo de función que se desea trabajar: función exponencial y/o función logarítmica.
- El botón “--” lo utilizas para acercar o alejar la imagen.
- “*Change dx*” te muestra dos botones “+”, “--” que dan la opción de cambiar el incremento en x .

Applet 2: Derivada de la función seno

Muestra la trayectoria que describe un segmento que representa la variación $\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)$ en una circunferencia unitaria. Contiene botones tales como:

- “*Draw*” te muestra el recorrido hecho por el segmento durante un período.
- Los botones “+” o “--”, te permiten la variación del segmento alrededor de la circunferencia.
- Los botones “*incre +*”, “*incre --*”, establecen la variación de $\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)$.
- La caja “*graph*” te muestra la trayectoria del segmento que representa la variación $\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)$.

Applet 3: Derivada de $y=x^2$

Muestra una figura que determina la recta tangente a la gráfica en un punto x , donde la pendiente de la recta tangente es la derivada. Se trabaja con funciones polinómicas de segundo, tercer y cuarto grado. Tienen las siguientes funcionalidades:

- El applet te ejemplifica simultáneamente dos planos cartesianos donde se ilustra con color verde la gráfica correspondiente a la función y con color azul la gráfica correspondiente a su derivada obtenida a partir de desplazar el punto amarillo, sobre dicha gráfica.
- El botón “*click $f(x)$ to choose*” te permite escoger la función polinómica con la que deseas trabajar.
- El botón “--” o “++”, lo utilizas para acercar o alejar la imagen.

- El botón “+” o “--”, determina el incremento en x .

Applet 4: Segunda derivada de $y=x^n$

Muestra una figura que determina las rectas tangentes a la gráfica en un punto x , donde la pendiente de cada recta tangente es la primera y segunda derivada respectivamente. Trabaja con funciones polinómicas de segundo, tercer y cuarto grado. Funciona de la siguiente manera:

- El applet te muestra simultáneamente tres planos cartesianos donde se ilustra con color verde la gráfica correspondiente a la función, con color azul la gráfica correspondiente a su primera derivada obtenida a partir de desplazar el punto amarillo sobre dicha gráfica y con color rojo la gráfica perteneciente a la segunda derivada, generada a partir de desplazar el punto rojo sobre la gráfica de la primera derivada.
- El botón “*click $f(x)$ to choose*” te permite escoger la función polinómica con la que deseas trabajar.
- El botón “--” o “++”, lo utilizas para acercar o alejar la imagen.

Situación problema

Un estudiante quiere establecer los cambios que se generan al derivar una función (seno, exponencial, logarítmica y polinómica) mediante el análisis de su correspondiente gráfica. Plantea qué se debe tener en cuenta para identificar estos cambios y concluye de acuerdo a lo observado.

Actividad 1: Derivada de la función exponencial

A partir de la observación de la gráfica $f(x)=\exp(x)$ y la información que ahí se ofrece, explora el comportamiento de las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$, a través del movimiento o desplazamiento del punto a lo largo de la función inicial y la trayectoria que describe su proyección.

- 1) Reconoce y familiarízate con el recurso computacional, haz click sobre el siguiente enlace: http://www.ies.co.jp/math/java/calc/e_diff/e_diff.html
- 2) Describe los elementos de las funciones $f(x)$ y $f'(x)$, (dominio, rango, intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores mínimos y máximos)
- 3) ¿Qué relación existe entre $f(x)$ y $f'(x)$? ¿Por qué?
- 4) Al trabajar con el incremento dx , ¿cuáles son las consecuencias de que su valor aumente o disminuya?
- 5) De acuerdo a las anteriores apreciaciones, ¿qué conceptos matemáticos puedes identificar dentro del proceso?
- 6) Realiza un proceso similar para la función logarítmica.

Actividad 2: Derivada de la función seno

Con la ayuda del applet, observa y decide frente a las respuestas dadas por algunos estudiantes acerca de la trayectoria que describe el segmento en la circunferencia unitaria y el gráfico que se describe en la trayectoria; elige la opción

que consideras correcta y susténtala, igualmente determina los motivos para descartar las demás opciones.

- 1) Reconoce y familiarízate con el recurso computacional, haz click sobre el siguiente enlace: <http://www.ies.co.jp/math/java/calc/difsin2/difsin2.html>
- 2) La trayectoria que describe el segmento en la circunferencia unitaria hace referencia a:
 - a. La variación que surge al realizar cambios en el ángulo.
 - b. La medida del ángulo de variación en radianes.
 - c. La razón de cambio que experimenta la función seno al variar el ángulo.
 - d. La longitud de arco a lo largo del movimiento en la circunferencia de mayor tamaño.
- 3) El gráfico que se describe en la trayectoria corresponde a :
 - a. Una curva que en el intervalo entre 0° Y 180° decrece; entre 180° y 360° crece.
 - b. Sucesión de parábolas que decrecen y crecen cada 360° .
 - c. La función de la cual se analiza la derivada.
 - d. La función coseno.
- 4) ¿Qué conclusiones puedes extraer?

Actividad 3: Derivada de la función polinómica

Realiza el análisis sobre el comportamiento, las variables, y las gráficas a partir de las modificaciones que sufren las diferentes funciones polinómicas a través del proceso de derivación.

- 1) Reconoce y familiarízate con el recurso computacional, haz click sobre el siguiente enlace: http://www.ies.co.jp/math/java/calc/x_diff/x_diff.html
- 2) Dada la ecuación $y=x^2$, interpreta a partir de su gráfica dominio, rango, intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores mínimos y máximos.
- 3) Haz uso del applet, para obtener un esbozo de la gráfica de la derivada de la función inicial. A partir de ahí, realiza una descripción en términos matemáticos de la gráfica obtenida y un acercamiento a la ecuación de dicha función.
- 4) Realiza variaciones en dx. ¿Qué sucede cuando toma el máximo valor permitido y cuando toma el mínimo? ¿En qué medida afecta el planteamiento de la ecuación?
- 5) Complementa la actividad anterior, observando la gráfica que el applet proporciona al desplazar el punto rojo sobre la derivada de la ecuación $y=x^2$.
- 6) Reconoce y familiarízate con el recurso computacional, haz click sobre el siguiente enlace: http://www.ies.co.jp/math/java/calc/x_2nd/x_2nd.html
 - a. Identifica su dominio, rango, crecimiento o decrecimiento.
 - b. ¿Qué clase de función es ésta? ¿Puedes plantear su ecuación?
 - c. ¿Cuál es la relación matemática entre estas dos gráficas?
- 7) Realiza un proceso similar para las demás ecuaciones propuestas en el applet.

$$y = \frac{1}{3}(x^3 - x) ; y = \frac{1}{4}(x^2 - 4)(x^2 - 1).$$

- 8) De acuerdo a lo observado durante el desarrollo de esta actividad con las diferentes ecuaciones ¿cuál es el efecto que produce la derivada en las funciones polinómicas?
- 9) Establece una regla general para derivar funciones de grado n .

Situación problema 4: Aplicación de la Derivada

Referente teórico general

El concepto de derivada se puede ver en muchos aspectos. Por ejemplo, cuando se refiere al gráfico de una función f en dos dimensiones, se considera la derivada como la pendiente de la tangente de la gráfica en el punto x . Se puede aproximar la pendiente de esta tangente como el límite de una secante. Con esta interpretación, pueden determinarse muchas propiedades geométricas de los gráficos de funciones, tales como concavidad o convexidad.

La derivada usada para calcular pendientes, también sirve para determinar el ritmo de cambio de una variable con respecto a otra, lo que le confiere utilidad en una amplia variedad de situaciones. Se necesita estudiar variaciones de la función en intervalos cada vez más pequeños para llegar a entender el concepto de variación instantánea o referida a un punto, es decir el de derivada en un punto.

La situación problema se desarrolla en el campo de la física utilizando la derivada como la tasa instantánea para determinar el espacio recorrido en determinado tiempo. La derivada se aborda desde el concepto de pendiente y límite.

La derivada se encuentra en diferentes contextos y dominios de la matemática escolar: variacional, métrico y espacial. En lo variacional se encuentra la interpretación de la noción de derivada como razón de cambio y desarrollo de métodos para hallar la derivada de funciones básicas; en lo métrico permite formular y resolver problemas que involucran medición para atributos tales como velocidad y densidad; en cuanto a lo espacial, se refiere a identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana. Pero también se encuentra en las ciencias experimentales tales como: física, economía, biología y química.

La representación es una herramienta importante en el estudio de la derivada puesto que permite trabajar el concepto a partir del comportamiento de las rectas secantes en un punto determinado de la trayectoria. Para dicho estudio se hace uso de la representación geométrica y gráfica.

En los niveles de educación básica y media es indispensable conocer y manejar el plano cartesiano, el concepto de pendiente, recta tangente, secante, ecuación de la recta, límite de una función y nociones de cinemática.

Propósitos de formación

- ✓ Comprender contenidos matemáticos para el tratamiento y resolución de problemas del mundo real aplicando modelos matemáticos y describiendo variaciones representadas en gráficas.
- ✓ Interpretar la pendiente en situaciones de variación.
- ✓ Interpretar la noción de derivada como tasa de variación instantánea.

Metodología

La situación problema se trabaja a través de cuatro actividades: trayectoria del cuerpo en un tiempo dado, aproximación de la velocidad instantánea mediante la velocidad media, la velocidad instantánea como la pendiente de la recta tangente, la velocidad instantánea y el concepto de derivada; las cuales tienen aplicabilidad en el contexto de la física.

Para enfrentar la situación problema se propone desarrollar las actividades dadas, las cuales están compuestas por una serie de interrogantes que deben ser resueltos en forma secuencial, tomando el tiempo necesario para abordar cada uno de ellos en diferentes sesiones de trabajo y así dar lugar a un completo proceso de análisis, reflexión y comprensión del tema. Se ha estimado para el desarrollo de cada actividad un tiempo de 2 horas.

Las actividades propuestas son adecuadas para estudiantes de grado undécimo de educación media. El trabajo se puede realizar en parejas favoreciendo la discusión, formulación y ejecución de planes de acción para resolver el problema. De esta manera se fortalece el trabajo colaborativo, la interacción y el análisis durante el desarrollo de toda la situación.

La primera actividad tiene como objetivo familiarizar al estudiante con la trayectoria que describe el esquiador en un intervalo de tiempo dado, reconociendo la importancia, que dada una curva plana y un punto fijo sobre ella, existen puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste, bien sea a la derecha o a la izquierda. El applet “**representación gráfica de una función**”, permite obtener las coordenadas de determinados puntos en la gráfica logrando predecir lo que está pasando en un intervalo de tiempo con respecto a la trayectoria que sigue el esquiador.

En la segunda actividad se busca un acercamiento intuitivo de la velocidad instantánea mediante la aproximación de la velocidad media, estableciendo la relación existente entre las rectas secantes y la trayectoria del esquiador. Para esta actividad se requiere de la utilización del applet “**definición de derivada**”, donde se puede visualizar la recta secante y la tangente a un punto dado de la trayectoria del esquiador; de esta manera es posible variar los valores de la secante para encontrar la velocidad media en cada uno de los tiempos dados.

En la tercera actividad se retoma el estudio hecho con las rectas secantes para relacionar la velocidad instantánea como la pendiente de la recta tangente a la

trayectoria del esquiador en un punto dado y establecer la definición de la derivada de una función en un punto. Mediante el applet “**definición de derivada**” utilizado en la segunda actividad se logra establecer la relación entre las rectas secantes y la recta tangente, con el propósito de llegar a una definición formal del concepto de derivada.

El propósito de la cuarta actividad es constatar o verificar los resultados encontrados en la actividad 3, para ello se hace uso del applet “**Derivada**” el cual muestra la gráfica de la trayectoria del esquiador y la gráfica de la función derivada, igualmente al dar un valor sobre la trayectoria del esquiador se puede obtener el valor de la derivada y la recta tangente en ese punto.

Materiales

- Equipo computacional con software Java
- Acceso al EVA
- Guía de actividades
- Cuaderno de anotaciones

Procedimientos esperados e indicadores de valoración

En la primera actividad el estudiante después de familiarizarse con la trayectoria que describe el esquiador en un intervalo de tiempo dado, debe relacionar el sistema de coordenadas en el cual va a trabajar y reconocer las cantidades que varían y las que permanecen constantes. También se espera, que dado un punto fijo sobre la trayectoria del cuerpo, identifique que existen puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste, bien sea a la derecha o a la izquierda y que extienda esta noción para cualquier otro punto de la trayectoria.

En la segunda actividad se busca que el estudiante relacione el concepto de velocidad media con la recta secante a un punto fijo de la trayectoria del esquiador y al generalizar este proceso para distintas rectas secantes, logre un acercamiento intuitivo de la velocidad instantánea en dicho punto.

En la tercera actividad se espera lograr un acercamiento a la pendiente de la recta tangente a un punto dado de la trayectoria, estableciendo la relación de esta con la velocidad instantánea a partir del estudio realizado con las rectas secantes.

En la cuarta actividad se busca que el estudiante relacione el concepto de velocidad instantánea con el concepto de derivada de una función en un punto dado, en diferentes instantes de tiempo. De otro lado, que reflexione sobre el concepto de recta tangente a una curva.

Manejo de los applets

Para el desarrollo de la situación problema se proponen varias actividades que se apoyan en el uso de applets. A continuación se describe su funcionalidad:

Applet 1: Representación gráfica de una función

Permite representar gráficamente una función y está compuesto de dos secciones: en la sección *“Cómo insertar operaciones y funciones”* puedes encontrar el formato para digitar las operaciones y funciones que necesites, en la sección *“representación gráfica”* encuentras la caja de edición *“f(x)=”* donde puedes escribir la función requerida y el botón *“gráfica”* que te permite visualizarla. Cambiando los valores de las cajas de edición *“Xmín, Xmáx, Ymín, Ymáx”* y luego dando click en *“Zoom in”* puedes delimitar el valor que toman los ejes coordenados. La caja de edición *“x=”* permite encontrar el valor de la ordenada y al mismo tiempo muestra su ubicación en la gráfica.

Applet 2: Definición de derivada

Este applet permite visualizar la recta secante y la recta tangente a una curva. Está compuesto de dos secciones: en la sección *“Cómo insertar operaciones y funciones”* puedes encontrar el formato para digitar las operaciones y funciones que necesites, en la sección *“Definición de derivada”* encuentras la caja de edición *“f(x)=”* donde puedes escribir la función requerida y el botón *“Secante_Tangente”* que te permite visualizarla. Cambiando los valores de las cajas de edición *“Xmín, Xmáx, Ymín, Ymáx”* y luego dando click en *“Zoom in”* puedes delimitar el valor que toman los ejes coordenados.

Finalmente encuentras la caja de edición denominada *“tangent at x=”* ahí puedes dar el valor donde quieres encontrar la recta tangente y la caja de edición *“secant to x=”* en la que puedes dar un valor para obtener la recta secante que pasa por el punto donde corta la recta tangente a la curva. Para cada valor dado en estas cajas el applet te permite visualizar su correspondiente gráfica.

Applet 3: Derivada de una función

Permite visualizar la gráfica de una función y la gráfica de su correspondiente derivada, además de obtener el valor de la derivada en un punto.

Está compuesto de dos secciones: en la sección *“Cómo insertar operaciones y funciones”* puedes encontrar el formato para digitar las operaciones y funciones que necesites y la sección *“Derivada”* hallaras la caja de edición *“f(x)=”* donde puedes escribir la función requerida y el botón *“derivada”* que te permite visualizar la gráfica de la función y su derivada. Cambiando los valores de las cajas de edición *“Xmín, Xmáx, Ymín, Ymáx”* y luego dando click en *“Zoom in”* puedes delimitar el valor que toman los ejes coordenados. Por otra parte en la caja de edición *“x=”* al colocar un valor, el applet te proporciona la correspondiente coordenada en y para la función, como para su derivada, además de dar la respectiva ubicación.

Situación problema

En los juegos olímpicos de invierno, un esquiador con una velocidad inicial, se desliza por una montaña. Gracias a un sofisticado equipo electrónico su entrenador puede visualizar la ecuación de la trayectoria que describe el esquiador

en determinado tiempo, la cual esta dada por la expresión matemática: $f(t) = t^3 - 3t^2 + 1$.

El entrenador ha logrado establecer que si al cabo de 1, 2 y 3 segundos la suma algebraica de las velocidades es 6 m/s, el esquiador ganará la medalla de oro. Con tus conocimientos matemáticos, ayuda a determinar si en realidad el esquiador ganará.

Actividad 1: Trayectoria del esquiador en un tiempo dado

El entrenador comienza a relacionar y estudiar la trayectoria que describe el esquiador en un plano cartesiano. Realiza el análisis de comportamiento de la trayectoria mediante la relación que hay entre el desplazamiento y el tiempo transcurrido.

- 1) Reconoce y familiarízate con el recurso computacional, haz click sobre el siguiente enlace: <http://www.aulademate.com/contentid-29.html>
- 2) Busca la función polinómica $Y = X^3 - 3X^2 + 1$, coloca Xmín en -5 y luego haz click en "Zoom in". Observa que la función en el applet es $Y = X^3 - 3X^2 + 1$ ¿Se puede asegurar que esta función polinómica es igual a $Y = t^3 - 3t^2 + 1$? ¿Por qué?
- 3) ¿Qué representa en términos del problema el eje x y el eje y?
- 4) ¿Cuáles son las magnitudes variables en el problema?
- 5) En el intervalo de tiempo $[0,4]$, a medida que t aumenta ¿qué puedes decir acerca de la trayectoria del esquiador?
- 6) Considerando a $t=1$, ¿cuál es su imagen?, ¿es única?, ¿por qué?
- 7) Considera los tiempos $t_1 = 1+0.5$, $t_2 = 1+0.4$, $t_3 = 1+0.3$, $t_4 = 1+0.2$, $t_5 = 1+0.1$ (ten en cuenta que $1+0.5=1.5$) y responde:
 - a. En los tiempos dados ¿qué es lo que cambia y qué se mantiene constante? ¿cómo pueden representarse esos tiempos? ¿cuál es la imagen de cada uno de los tiempos? ¿cómo es la representación matemática de las imágenes? Registra lo observado en la siguiente tabla:

Tiempo	Imagen
t_1	
....	
t_5	

- b. ¿La variación del tiempo se acerca a un punto en particular?, ¿cuál es ese punto?
- c. ¿Puedes asegurar que la imagen de cada uno de los tiempos corresponde a un punto de la trayectoria del esquiador? ¿Por qué?
- d. Se pueden tomar otros tiempos aún mas próximos a $t=1$, ¿por qué? Dá algunos ejemplos.
- e. ¿Qué puedes decir de la trayectoria del esquiador en cada uno de los tiempos?

- f. Si tomas los tiempos $t=2$ y $t=3$ ¿puedes elegir tiempos cercanos a ellos? ¿Cómo será entonces la representación matemática de dichos tiempos y de sus imágenes?
- 8) Observa que el proceso anterior se realiza por el lado derecho de $t=1$, ¿se puede realizar por el lado izquierdo? ¿por qué? ¿cómo serán los valores?

Actividad 2: Aproximación de la velocidad instantánea mediante la velocidad media.

El entrenador desea tener una aproximación de la velocidad instantánea del esquiador en cada uno de los tiempos dados mediante la aplicación del concepto de velocidad media. ¿El entrenador estará cerca de verificar si el esquiador ganará la medalla?

- 1) Reconoce y familiarízate con el recurso computacional, haz click sobre el siguiente enlace: <http://www.aulaemate.com/contentid-30.html>
- 2) Como el objetivo es encontrar la velocidad instantánea en $t=1$, asegúrate de buscar la función polinómica $Y= X^3-3X^2+1$, con “ $X_{\text{mín}} = -5$ ” y “ $\text{tangent at } X = 1$ ”. Edita en “secant to X” el valor $1+h$ con $h=0.9$ y responde:
 - a. ¿Qué ecuación tiene la recta secante?
 - b. ¿Qué coordenadas tienen los puntos de intersección de la secante con la trayectoria del cuerpo?
 - c. Recuerda el concepto de velocidad media y relaciónalo con la ecuación de la recta secante, ¿cuál será entonces la velocidad media en este intervalo de tiempo?
- 3) Edita en “secant to X” los valores $1+h$, variando h de forma decreciente en el intervalo $[0,1]$ y responde:
 - a. ¿Qué valores cambian y cuáles permanecen constantes?
 - b. Establece la velocidad media para 6 tiempos distintos y explica lo que sucede. Registra los datos obtenidos en la siguiente tabla:

Tiempo transcurrido	Espacio recorrido	Velocidad media
t_1		
...		
t_6		

- c. Teniendo en cuenta que los tiempos son de la forma $1+h$ y que su imagen es $f(1+h)$ ¿cómo es la representación matemática del tiempo transcurrido, del espacio recorrido y de la velocidad media? Establece la velocidad media a través de una ecuación general.
- 4) ¿Puedes trazar más rectas secantes, de tal forma que pasen por el punto dado y por puntos aún más cercanos a él? ¿por qué? Si es posible trazarlas ¿qué le sucede a la secante si se continúa con este proceso?
- 5) ¿Puedes trazar secantes por el lado izquierdo del punto fijo? ¿qué ocurre?

- 6) ¿Puedes asegurar que para un intervalo de tiempo muy cercano al punto $t=1$, el valor de la velocidad media se acerca al valor de la velocidad instantánea? ¿por qué?
- 7) Finalmente puedes inferir ¿cuál es la velocidad instantánea en el tiempo $t=1$, $t=2$, $t=3$? ¿la suma de estas velocidades se aproxima al valor esperado?

Actividad 3: La velocidad instantánea como la pendiente de la recta tangente.

Continuando con el proceso del entrenador para hallar la velocidad instantánea, comprueba si éste acierta en el momento de definir el ganador de las olimpiadas.

- 1) Reconoce y familiarízate con el recurso computacional, haz click sobre el siguiente enlace: <http://www.aulademate.com/contentid-30.html>.
- 2) Busca la función polinómica $Y= X^3-3X^2+1$ y haz $t=1$, “ $X_{\text{mín}}= -5$ ”, “tangent at $X=1$ ” y “secant to $X=1+h$ ” con $0 \leq h \leq 1$. Empieza a variar h en forma decreciente y establece qué diferencias y qué similitudes encuentras entre la línea roja y las diferentes secantes que se originan.
- 3) ¿Tiene alguna relación la línea roja con la variación de las rectas secantes? ¿por qué?
- 4) ¿Qué nombre recibe la línea roja y por qué?
- 5) Observa que se ha relacionado la secante con las velocidades medias; de igual forma, ¿puedes relacionar la línea roja con la velocidad instantánea?, ¿Qué debes entonces conocer de la línea roja? (Sugerencia: toma valores para h muy cercanos a cero)
- 6) ¿Puedes asegurar que el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero es la velocidad instantánea? ¿Por qué?
- 7) En el punto 3c de la actividad anterior estableciste la ecuación general de la velocidad media, utilízala para deducir la velocidad instantánea.
- 8) Ahora estas en disposición de encontrar la velocidad instantánea en $t=1$ segundos ¿cuál es?
- 9) Analiza todo el proceso anterior para deducir la velocidad instantánea en $t=2$ segundos y $t=3$ segundos.
- 10) ¿Qué conclusiones puedes sacar de todo el proceso realizado durante el desarrollo de las tres actividades anteriores?
- 11) Finalmente ¿el esquiador ganó la medalla de oro?

Actividad 4: La velocidad instantánea y el concepto de Derivada.

El entrenador encuentra otro aparato electrónico que muestra la variación de la velocidad instantánea en cada punto, permitiendo verificar los resultados obtenidos. Revisa el recurso computacional y determina si el aparato encontrado es confiable.

- 1) Reconoce y familiarízate con el recurso computacional, haz click sobre el siguiente enlace: <http://www.aulademate.com/contentid-31.html>
- 2) Busca la función polinómica $Y= X^3-3X^2+1$, haz “ $X_{\text{mín}}= -10$ ”. Encuentra la velocidad instantánea en $t=1$, $t=2$, $t=3$ y responde:

- a. ¿Qué está pasando con la velocidad instantánea?
 - b. ¿Cuál es el valor de la pendiente de las rectas tangentes a la trayectoria del cuerpo en cada instante de tiempo dado? ¿cuál será la ecuación de cada recta tangente?
 - c. ¿Qué relación encuentras entre la velocidad instantánea en un punto con la grafica de la función $Y= f'(x)$?
 - d. ¿Puedes asegurar que la velocidad instantánea en cada uno de los puntos de la trayectoria define una ecuación? ¿Qué ecuación tiene? (Sugerencia: haz uso de la barra ubicada al lado de la variable x).
- 3) Encuentra la velocidad instantánea en $t=2$ y responde:
- a. El concepto que conoces de recta tangente a un punto, ¿sigue siendo válido en este caso? ¿por qué?
 - b. ¿Existen otros instantes de tiempo, en los cuales se manifieste lo ocurrido? ¿Cuáles?

Situación problema 5: Aplicaciones del Concepto de Integral

Referente teórico general

La integración junto con la diferenciación son los dos temas centrales del cálculo. Mientras que la derivada en un punto proporciona información local como la pendiente de una curva o la velocidad de un móvil en un instante, la integral definida suministra información global como el área bajo una curva o el espacio recorrido por un móvil conocida su velocidad. Esta última permite reconstruir funciones conociendo sus derivadas.

El estudio de la integral se puede iniciar a partir de la inscripción de un número determinado de rectángulos bajo una curva, la suma de área de cada rectángulo es una aproximación del área bajo la curva y conforme el número de rectángulos tiende a infinito nos aproximamos más al área exacta de la región.

La situación problema se apoya en la noción de integración aplicada en el desarrollo de ambientes pertenecientes al contexto de la física, donde la integral permite hallar la trayectoria dada, la velocidad en un intervalo de tiempo y el trabajo realizado al ejercer una fuerza sobre un resorte.

La integral se encuentra en diferentes contextos y dominios de la matemática escolar: espacial, variacional y en las relaciones entre éstos, en lo espacial se plantea usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y de otras ciencias y en lo variacional se emplean técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. Sus aplicaciones son difíciles de cuantificar porque toda la matemática moderna, de una u otra forma, ha recibido su influencia y las diferentes partes del andamiaje matemático interactúan constantemente con las ciencias naturales y la tecnología moderna.

Las diferentes representaciones (algorítmica, icónica, gráfica: en dos y tres dimensiones) que se dan a la noción de integral han sido tratadas de una forma

aislada. Para propiciar el enlace entre éstas, identificamos teóricamente una condición necesaria que se refiere a la existencia de situaciones problema a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, en estrecha relación.

Con el estudio de la integral los educandos aprenden a diseñar estrategias para calcular áreas y volúmenes de funciones, analizar la relación entre las expresiones algebraicas y las gráficas para formular y resolver problemas en cualquier ciencia. Para abordar este tema se requieren conocimientos básicos en áreas de figuras planas, trazo de gráficas, integral definida, cinemática y movimiento armónico simple.

Propósitos de formación

- ✓ Incentivar al análisis crítico y a la capacidad de adquirir nuevos conocimientos a partir de la exploración de recursos computacionales.
- ✓ Utilizar la integral como herramienta para comprender, interpretar y resolver situaciones concretas.
- ✓ Inducir a procesos de generalización a través del planteamiento e interpretación de una situación problema.

Metodología

La situación problema se trabaja a través de tres actividades de las cuales una pertenece al contexto de la matemática y las dos restantes al contexto de la física.

Para enfrentar la situación problema se propone desarrollar las actividades dadas, las cuales están compuestas por una serie de interrogantes que deben ser resueltos en forma secuencial, de acuerdo a lo experimentado en el applet.

Es importante tener el tiempo necesario para abordar cada una de las actividades en diferentes sesiones de trabajo y así dar lugar a un completo proceso de análisis, reflexión y comprensión del tema. Se ha estimado para el desarrollo de cada actividad un tiempo de 2 horas.

En la situación problema se busca presentar al estudiante la integral definida como un elemento útil a tener en cuenta en el planteamiento de estrategias para la solución. De igual manera se pretende ilustrar la importancia del por qué, para qué y dónde aplicarla.

Las actividades propuestas para resolver esta situación, presentan niveles de complejidad apropiados para estudiantes de grado once de educación media.

El trabajo puede ser desarrollado en parejas, con el fin de ganar capacidad de argumentación frente al tema a partir de la interacción y discusión sobre la puesta en ejecución de estrategias para dar solución al problema planteado.

La primera actividad da lugar a que los estudiantes se enfrenten a situaciones donde reconozcan la importancia y necesidad del manejo que se debe dar a la integral definida en cada situación. Para ello se hace uso del applet “**Definición**

de la integral definida” el cual proporciona una serie de actividades básicas para la introducción al tema.

En la segunda actividad se plantea un problema de las ciencias naturales específicamente de la física, mediante la cual se busca trasladar el análisis matemático al contexto físico, donde cada elemento matemático cobra diferentes significados; por ejemplo identificando la trayectoria en términos de las características de la gráfica de una función, utilizando la integral definida para determinar el desplazamiento de un objeto en un intervalo de tiempo.

La tercera actividad, se plantea a través del applet **“medida de la constante elástica de un muelle”**, donde se hace la simulación de una práctica de laboratorio, cuya finalidad es hallar la constante de elasticidad a partir de la variación de pesos y su respectiva elongación. Posteriormente mostrar otro contexto donde aplicar la integral definida, para determinar el trabajo realizado por un resorte al efectuar cierto desplazamiento.

Materiales

- Equipo computacional con software Java
- Acceso al EVA
- Guía de actividades
- Cuaderno de anotaciones

Procedimientos esperados e indicadores de valoración

En la primera actividad se espera que el estudiante mediante la descripción hecha sobre el método que utiliza para resolver cada una de las situaciones, aplique conocimientos adquiridos sobre áreas de figuras y luego generalice este proceso por medio de la noción de integral definida, también que haga uso de aproximaciones para dar su respuesta.

Para la segunda actividad, el estudiante debe aplicar conocimientos sobre cinemática del movimiento, es decir utilizar conceptos de velocidad, aceleración, desplazamiento, así como también identificar el efecto que produce la derivada y la integral en cada uno de estos términos.

Para la tercera actividad, se tiene por objetivo lograr que el estudiante aplique la definición de recta pendiente para describir el comportamiento del sistema masa-resorte y a partir de ahí deduzca leyes generales utilizadas en física tales como la ley de Hooke. Finalmente mediante el análisis de la situación establezca que a partir de la aplicabilidad de la integral se puede calcular el trabajo realizado al ejercer una fuerza.

Manejo de los applets

La situación problema será abordada mediante el desarrollo de tres actividades que se apoyan en el uso de applets. Se hará una breve presentación de las características de éstos, con el fin de orientar acerca de su funcionalidad.

Applet 1: Definición del problema del cálculo integral

Este applet trabaja el concepto de integral definida a partir del cálculo de área bajo una curva mediante la suma de áreas de rectángulos. Este es un programa que ayuda a comprender los conceptos ligados con la integral definida.

Es importante tener en cuenta que la información que sale en la parte inferior de la pantalla es la que te dice como debes actuar. Básicamente, para avanzar debes hacer click en la parte derecha del applet, donde aparecen las gráficas.

El programa formula preguntas constantemente a las que debes responder en el cuadro de edición que aparece al lado izquierdo. Para confirmar tú respuesta haz click sobre la gráfica; siempre ofrece dos oportunidades de responder, si no respondes correctamente el programa muestra la solución. Al dar la respuesta, es necesario que lo hagas con 2 cifras decimales de tal forma que el último sea redondeado.

Applet 2: Representador de funciones

Permite visualizar las gráficas de funciones que describe la trayectoria de la función dada. Para digitar funciones en $f(x)$ o $g(x)$ necesitas escribir o digitar el signo "*" que significa multiplicación entre una constante y una variable. En este applet encuentras una serie de botones con las siguientes funcionalidades:

En Menú:

- La opción para graficar la función $f(x)$, primera derivada $f'(x)$, segunda derivada $f''(x)$ y recta tangente a $f(x)$
- Los intervalos de crecimiento, decrecimiento, convexidad y concavidad de la función dada.
- El cálculo y la visualización de la integral definida de $f(x)$ y $g(x)$, así como el área entre $f(x)$ y $g(x)$.
- El valor del volumen $f(x)$ y de $g(x)$ en determinado intervalo.
- Los puntos singulares como: cero corte, corte entre $f(x)$ y $g(x)$, máximos, mínimos y puntos de inflexión.

En Borrar. suprimes de la pantalla las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

También puedes delimitar el valor que toman los ejes coordenados en las cajas de edición ubicadas en la parte derecha del applet.

Applet 3: Medida de la constante elástica de un muelle

En este applet se simulan dos prácticas que son habituales en un laboratorio de Física. La medida de la constante elástica de un muelle por los procedimientos estático y dinámico.

Este programa interactivo genera el valor del comportamiento de la constante de elasticidad de un resorte. Realizando los siguientes pasos:

- Cuelga en el extremo libre del resorte una determinada masa para ello se arrastra la masa con el puntero del ratón hasta el extremo libre del resorte.
- Coloca las masas una debajo de la otra, simultáneamente encuentras un par de datos (x, F) situado a la izquierda del applet. En esta parte se trasforma el peso F expresado en dinas a newton (N) y la deformación x en centímetros se expresa en metros.
- Cuando tengas suficientes datos pulsa el botón “Gráfica”, donde encuentras el valor de la pendiente.
- Cada vez que pulses el botón “Nuevo”, el applet reinicia su aplicación.

Situación problema

En el laboratorio de física, se ha encontrado la ecuación de velocidad de un cuerpo que se desliza por cierta superficie. Mediante diferentes experimentaciones se encuentra que la ecuación de la trayectoria que describe el cuerpo es $f(t) = t^2 + t$, utiliza una argumentación matemática para determinar si la trayectoria encontrada por los físicos mediante la experimentación es correcta.

De igual manera, ayuda a determinar la constante de elasticidad, haciendo uso de un modelo matemático que permita calcular el trabajo realizado al ejercer esta fuerza en un sistema de resortes.

Actividad 1: Introducción a la integral

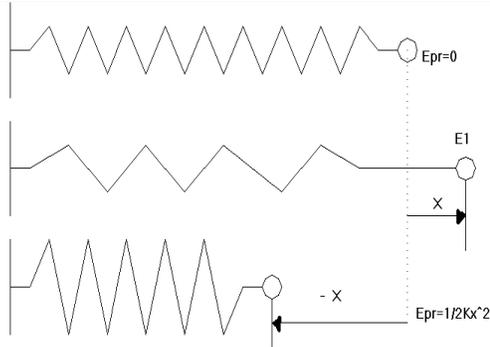
- 1) Reconoce y familiarízate con el recurso computacional, haz click sobre el siguiente enlace: <http://www.xtec.es/~jlaqares/integral.esp/inte50.htm>
- 2) Describe qué método utilizas para resolver cada situación.
- 3) ¿Existe un método matemático general que permita hallar la solución? Plantea dicho método.

Actividad 2: Desplazamiento de un cuerpo

Un cuerpo que se mueve con una velocidad $V(t)=2t+1$ donde $V(t)$ representa la velocidad en m/seg. en t minutos. Utiliza el applet “[Gráficos de funciones](#)” para describir la trayectoria de la función dada.

- 1) Escribe la función polinómica $f(x)=2x+1$ y graficala, ¿se puede asegurar que $V(t)$ y $f(x)$ representan una misma función? ¿Por qué?
- 2) Halla los intervalos en donde la velocidad es positiva y negativa (analiza, qué elementos del applet permiten identificar esta característica de la gráfica)
- 3) ¿Qué representan estos valores en la situación?
- 4) ¿Cómo hallar la distancia total recorrida en un intervalo de tiempo?
- 5) ¿Puedes utilizar el applet para calcular esta distancia? ¿Cómo? Calcula la distancia total recorrida por el móvil en un intervalo de tiempo entre $[0,1]$ minutos.
- 6) ¿Cuál es la trayectoria que describe el cuerpo?, ¿es igual a la experimental?
- 7) Al variar la velocidad ¿qué ocurre con la trayectoria y la aceleración del cuerpo?
- 8) ¿Puedes obtener a partir de $V(t)$ la aceleración? Determínala para un intervalo de tiempo entre $[0,2]$ minutos

Actividad 3: Trabajo realizado por un resorte



- 1) Determina el comportamiento de la constante de elasticidad de un resorte, a partir de la variación de 6 masas y la elongación que se produce. Para esto, utiliza como herramienta el siguiente applet: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/muelle/muelle.htm#Procedimiento%20estático>
- 2) De la información dada en la parte inicial del applet, ¿qué ley de la física, permite relacionar la fuerza necesaria para estirar un resorte y su elongación? ¿qué nombre recibe? ¿Cuál es su ecuación?
- 3) Ve al applet, realiza el procedimiento indicado y observa la gráfica obtenida.
 - a. En la pareja de datos ubicados al lado izquierdo ¿qué representan cada uno? ¿cómo se obtienen?
 - b. ¿Qué clase de gráfica se obtiene? (lineal, cuadrática, cúbica, constante, etc.)
 - c. Con respecto a los ejes coordenados, ¿qué representan y qué valores toma cada uno?
 - d. ¿Cuál es la interpretación de la pendiente en la ley de Hooke? Plantea la ecuación de acuerdo a los datos obtenidos.
- 4) Uno de los conceptos fundamentales de la física es el trabajo, ¿mediante qué relación puedes hallar el trabajo de una fuerza aplicada? ¿Cuáles son sus unidades de medida?
- 5) Según la función obtenida en el procedimiento anterior, determina el trabajo realizado al estirar un resorte desde 0 cm. hasta 10 cm. de longitud. Para ello utiliza el applet que se encuentra en esta dirección: [Gráficos de funciones](#) y explora las herramientas: menú, borrar y opciones
 - a. Escribe la función $f(x)$ de esta forma: $f(x) = k \cdot x$ y gráficala (Sugerencia: el valor de $Y_{\text{máx}}$ puede estar en 60 y $X_{\text{máx}}$ en 20).
 - b. Para hallar el trabajo de una fuerza aplicada, ¿cuál elemento del menú debes utilizar? ¿Por qué?
 - c. Relaciona el área obtenida en la gráfica con lo planteado en esta actividad.

EVALUACIÓN Y SEGUIMIENTO DE LAS SITUACIONES PROBLEMA

Ante la necesidad de establecer para el Entorno Virtual de Aprendizaje qué queremos evaluar, se ha diseñado para cada actividad indicadores de valoración y procedimientos esperados, que permiten guiar al docente hacia la consecución de

los propósitos formativos. Al iniciar una acción formativa se considera importante realizar una evaluación de diagnóstico que permita establecer conocimientos previos necesarios para determinar el nivel individual y grupal con relación a los propósitos planteados.

El diseño de cada situación problema trae consigo interrogantes que permiten identificar el nivel de conocimientos que tiene cada estudiante. Los registros obtenidos en cada sesión de trabajo son fundamentales para este fin.

Una parte fundamental en un entorno virtual es la interacción, de esta forma antes de iniciar la acción formativa se puede proponer un foro, en el cual se discuta y reflexione acerca de los conceptos que son necesarios para afrontar la situación problema. Durante el desarrollo de la actividad, el foro puede ser utilizado para aclarar inquietudes de orden conceptual, metodológico y tecnológico.

Otro momento en la evaluación es comprobar la adquisición de aprendizajes durante la acción formativa, esta se logra establecer con base en los propósitos de formación, al rigor y manejo conceptual que el estudiante refleje en los registros sobre el desarrollo de cada uno de los interrogantes planteados en la situación problema.

Además de la evaluación de los estudiantes, una acción formativa debe incluir la evaluación de toda la actividad, de los recursos utilizados y de la acción docente, que permitan valorar los resultados del aprendizaje demostrado por los estudiantes, en relación con la efectividad de todos los elementos que interviene en ella. Un mecanismo que permite recoger esta experiencia e interpretar el proceso llevado a cabo es la sistematización.