COMPARACIÓN DE LAS DERIVADAS DE ORDEN NO ENTERO SEGÚN LOUVILLE Y MARSHOUT

JUDITH DEL SOCORRO BUCHELI TIMANÁ
JESÚS GONZALO SOTELO MACÍAS

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2006

COMPARACIÓN DE LAS DERIVADAS DE ORDEN NO ENTERO SEGÚN LOUVILLE Y MARSHOUT

JUDITH DEL SOCORRO BUCHELI TIMANÁ
JESÚS GONZALO SOTELO MACÍAS

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad de trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de licenciado(a) en educación especialidad Matemáticas

Director
Ph.D FRANCISCO ENRÍQUEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2006

COMPARACIÓN DE LAS DERIVADAS DE ORDEN NO ENTERO SEGÚN LOUVILLE Y MARSHOUT

JUDITH DEL SOCORRO BUCHELI TIMANÁ
JESÚS GONZALO SOTELO MACÍAS

DOCUMENTO DEL TRABAJO DE GRADO, REALIZADO EN EL GRUPO DE INVESTIGACIÓN “G.E.D.I. EN FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS”

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2006

Nota de aceptación

Director

Ph.D Francisco Enríquez

Comité evaluador

Esp. Alex Montes

Mg. Jhon Jairo Pérez

Fecha de sustentación: Popayán, 2 de Marzo 2007

Este triunfo a Dios, a la Universidad nuestros mas sinceros agradecimientos, a nuestro querido director Francisco Enríquez, quien con su apoyo y paciencia hizo posible la culminación de este trabajo, a los profesores Jhon Jairo Pérez y Alex Montes por sus oportunos consejos y aportes bibliográficos, a nuestra familia porque nos dieron la oportunidad de dar este gran paso, y agradecemos de todo corazón a todos nuestros amigos en especial a Paulo Navia por sus inagotables sugerencias.

A Dios y a la Santísima Virgen por darme todo lo que tengo, a mis padres, a Martha y Luz Gómez porque sin su ayuda y paciencia no hubiera salido adelante, a mis hermanos y sobrinos por brindarme su amistad, a mi esposo por creer en mi y a mi adorada hija.

Judith

A Dios por iluminar mi camino, a mi Papá que donde quiera que esté me ha llenado de bendiciones y a mis hermanos por su apoyo incondicional

Jesús

Índice general

Introducción

Una de las herramientas del cálculo que posee numerosas aplicaciones, es la derivada. No obstante para el análisis moderno, la definición clásica de derivada resulta insuficiente. Por ejemplo, es sabido que ciertos problemas de la mecánica clásica pueden resolverse de manera sencilla mediante el uso de determinados “agregados” integrales, conocidos como operadores de derivación fraccionaria según Louville. Tal es el caso del problema de la braquistocrona (curva de descenso mínimo). De esta manera, determinadas ramas de la matemática exigen la introducción de ciertas “generalizaciones”del concepto habitual de diferenciación. Reviste particular interés la extensión del concepto de derivadas para órdenes no enteros. Existen distintas modificaciones del concepto de derivada que responden a órdenes no enteros de diferenciación. Uno de tales modelos lo constituyen los arriba mencionados operadores integrales de Riemman-Louville.

Por otra parte diferentes generalizaciones del orden de diferenciación conllevan a espacios de funciones en escencia distintos. Esto es, dichos modelos son por lo general, no equivalentes.

Dentro de estos modelos de diferenciación no entera, son de especial interés las llamadas derivadas según Marshout, toda vez que ellas se expresan mediante integrales impropias de naturaleza sencilla. Es conocido que los modelos “Louville-Marshout”son no equivalentes.

El presente trabajo aborda dos modelos distintos de derivada fraccionaria: Las derivadas según Louville y Marshout respectivamente, estudiando condiciones que garanticen la coincidencia de ellas.

Para su estudio se exige el conocimiento de temas específicos del análisis matemático, tales como la convergencia uniforme de integrales impropias dependientes de un parámetro, funciones absolutamente continuas y espacios Lp, entre otros.

El presente trabajo está dividido en tres capítulos. El primer capítulo incluye una muy breve reseña histórica sobre el surgimiento y evolución de la idea de derivada no entera. En particular se discute la solución al problema de la braquistocrona y su relación con las derivadas de orden no entero. El segundo capítulo se dedica al estudio de las derivadas fraccionarias de Riemman-Louville y algunas propiedades. En el tercer capítulo se presenta la definición formal de la derivada según Marshout y se discuten ciertas condiciones suficientes para la coincidencia de los modelos de Louville y Marshout (ver teorema 19). Es en este capítulo donde se alcanza el objetivo fundamental del presente trabajo.

A la fecha de presentación del trabajo, no se conoce en la bibliografía de nuestra región, fuente alguna con temática escencialmente similar a la aquí expuesta. El trabajo fue expuesto como ponencia en marcos del XII Encuentro Regional de Matemáticas realizado en la ciudad de Pereira del 11 al 15 de Septiembre de 2006.

El grupo de desarrollo investigativo en análisis desarrolla el proyecto "Caracterización de los espacios de Lipschitz con ayuda de derivadas de orden no entero de la integral de Poisson."El presente trabajo se enmarca en la temática propia de dicho proyecto.

Notaciones

$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^n$	$\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}$
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{N}_0$	conjunto de enteros no negativos
p.c.t.	para casi todo
$C'(A)$	espacio de funciones continuamente diferenciables en $A \subset \mathbb{R}$
$AC([a, b])$	espacio de funciones absolutamente continuas en el segmento [a,b]
$Lp(E)$	espacio de funciones p-Lebesgue integrables en $E \subset \mathbb{R}^n$
$H^\lambda(\Omega)$	clase Hölder en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con parámetro λ
$I^\alpha\varphi$	integral de orden α según Louville de la función φ
$D^\alpha\varphi$	derivada de orden α según Louville de la función φ
$\mathbb{D}^\alpha\varphi$	derivada de orden α según Marshout de la función φ
Q	operador de reflexión
$[\,\cdot\,]$	parte entera
$\{\cdot\}$	parte fraccionaria
τ_h	operador de desplazamiento con paso h
π	operador de dilatación
$p.f. \int f(x)dx$	parte finita de la integral $\int f(x)dx$
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	número combinatorio $(k, n \in \mathbb{N}_0)$
$\square$	culminación de una demostración
	En lo que respecta a la teoría de la medida, consideramos sólamente la medida e integral de Lebesgue.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Breve reseña histórica de la diferenciación fraccionaria

Los intentos por extender el concepto de derivada $\dfrac{d^p f(x)}{dx^p}$ a órdenes no enteros se remontan a la época del surgimiento del cálculo. Leonard Euler en 1738 observó que al cálculo de $\dfrac{d^p f(x)}{dx^p}$ se le podría dar sentido para p no enteros. Más adelante en el tratado de S.F. Lacroix (1820) se retoma la idea de derivada y se cita la fórmula explícita para el cálculo de $\dfrac{d^{1/2}x^\alpha}{dx^{1/2}}$. Luego Jean Baptiste Joseph Fourier propuso usar la igualdad

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(tx - t\lambda + \frac{p\pi}{2})dt$$

para definir las derivadas de orden no entero.

Estos episodios pertenecen a la prehistoria de la integrodiferenciación y la historia propiamente dicha se debería considerar a partir de los trabajos de Niels Henrik Abel (1823-1826) y J. Louville relacionados con el problema de la tautocrona, el cual consiste en lo siguiente: se tienen dos puntos A y B en el plano a distinta altura y se debe determinar la curva para la cual el tiempo que toma un cuerpo pesado en recorrer la trayectoria desde A hasta B, es el mínimo. La única fuerza actuante, es la gravedad (ver figura 1.1).

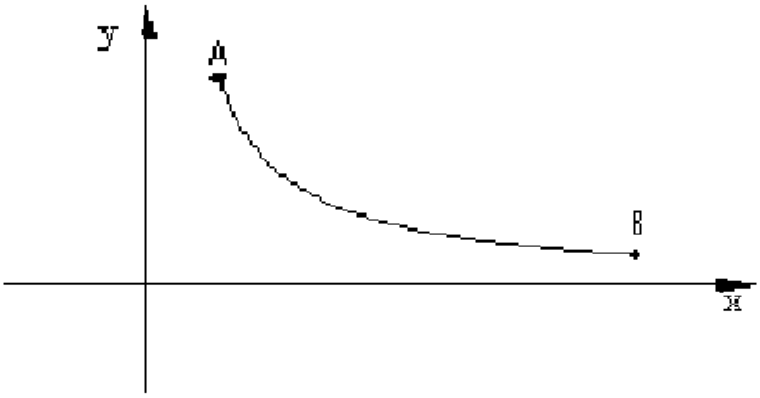

Figura 1.1: problema de la tautocrona

Para resolver el problema de la tautocrona se toman los puntos en el plano cartesiano $A = (0,0), B = (x, f(x))$. Sea S la curva que los une y $M(x,y)$ un punto ubicado sobre S (ver figura 1.2).

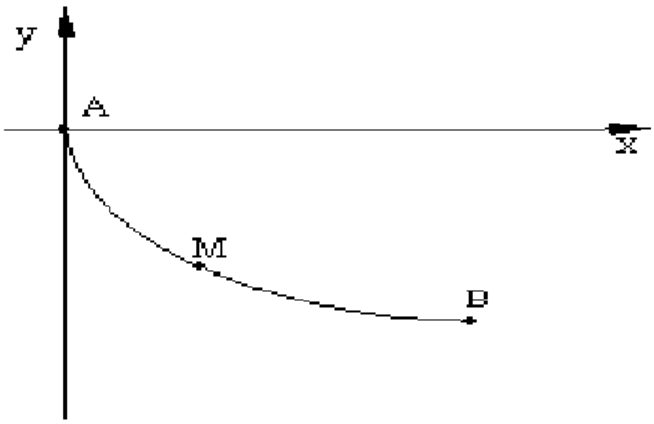

Figura 1.2: tautocrona

Ahora, se sabe que la velocidad v que adquiere un cuerpo cuando se desplaza sobre la curva S es:

$$v = \sqrt{2gy}$$

donde g es la constante gravitacional y y es la altura; además, el diferencial del tiempo

dT para que un punto $M(x,y)$ recorra un diferencial de arco está dado por:

$$dT = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

y el tiempo total es:

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^x \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{y}}dx.$$

Entonces, lo que se pretende determinar es dónde la función $T(x)$ alcanza su mínimo, lo cual conduce a una ecuación integral de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \quad x > a, \qquad (*)$$

llamada ecuación integral de Abel.

Para el problema de la tautocrona $\alpha = 1/2$, f es una función conocida, φ incógnita y la solución de $(*)$ es:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

En 1832-1837 aparace una serie de trabajos de J. Louville que lo convirtieron en el fundador de lo que ahora se conoce como la teoría de la integrodiferenciación fraccionaria. Estos trabajos se basan en la fórmula de diferenciación de la función potencial y se refiere a funciones $f(x)$ que se representan en la forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{a_k x},$$

donde C_k es constante $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Puede definirse entonces,

$$D^p f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} C_k a_k^p e^{a_k x}, \quad \forall p \in \mathbb{C}.$$

En este mismo trabajo Louville deduce no muy rigurosamente la fórmula:

$$D^p f(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty \varphi(x+t) t^{p-1} dt, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad (Re(p) > 0)$$

llamada actualmente (sin el factor $(-1)^p$) derivada fraccionaria según Louville.

Junto a los trabajos de Louville están los trabajos de Riemann realizados en 1847, que conllevan a la siguiente construcción de integral fraccionaria:

$$I^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \qquad x > 0.$$

En 1867 A. K. Grünwald y en 1868 A. V. Letnikov desarrollan un método de integrodiferenciación basado en la generalización de la fórmula de Riemann

$$f^n(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\Delta_h^n f)(x)}{h^n},$$

donde $(\Delta_h^1 f)(x) = f(x) - f(x-h)$, al caso de α no entero

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}.$$

Casi a comienzos del siglo XX aparece un trabajo importante de J. Hadamard (1892) quien usa la idea de diferenciar término a término la serie de Taylor de una función analítica f:

$$(D^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-a)} C_k (z - z_k)^{k-\alpha}, \qquad C_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Especialmente se debe comentar el trabajo de A. Marshout (1927) en el que se introduce una nueva forma de derivación fraccionaria:

$$(D^\alpha f)(x) = C \int_0^\infty \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt, \qquad \alpha > 0 \qquad (1)$$

donde C es constante.

Esta forma coincide con la definición de Louville

$$(D^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n-1}}, \qquad n = [\alpha] + 1, \qquad (2)$$

para funciones "suficientemente buenas".

1.2. Conceptos básicos

En esta sección presentamos algunos conceptos que nos serán útiles para el desarrollo de este trabajo.

1.2.1. Funciones uniformemente continuas

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. f es **uniformemente continua** en $[a,b]$, si $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\forall\, x, y \in [a,b]$ tal que $|x-y| < \delta$ se cumple que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

1.2.2. Funciones de variación acotada

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. f es **de variación acotada** en $[a,b]$, si $\forall$ partición $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$, del segmento $[a,b]$,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty.$$

1.2.3. Funciones absolutamente continuas

Definición 1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. f es* ***absolutamente continua*** *en $[a,b]$, (y se simboliza $f \in AC([a,b])$, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que para cualquier sistema finito de intervalos, disyuntos dos a dos $(a_k, b_k) \subset [a,b]$, $k = 1, ..., n$ tal que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, se cumple la desigualdad $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$.*

Observaciones 1.

1. *Si $f \in AC([a,b])$, entonces p.c.t. $x \in [a,b]$, $\exists\, f'(x)$ y además $f' \in L_1([a,b])$ (ver def 5).*

2. *Si* $f \in AC([a,b])$ *y* $f'(x) = 0$ *p.c.t.* $x \in [a,b]$, *entonces* $f(x) = c$*; donde* c *es constante.*

3. $\varphi \in AC([a,b])$ *si y solo si*

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \qquad f \in L_1([a,b]) \tag{1.1}$$

4. *Si* $f \in L_1([a,b])$*, entonces,* $\varphi'(x) = f(x)$ *p.c.t.* $x \in [a,b]$*, donde* φ *se determina mediante (1.1)*

5. *Toda función* AC *es continua. El recíproco es falso.*

Ejemplos.

1. $\varphi(x) = e^x$, es absolutamente continua en $[0,1]$

2. La función

$$f(x) = \begin{cases} x cos(\frac{\pi}{2x}) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

   es continua en $[0,1]$ pero no es absolutamente continua en dicho segmento.

1.2.4. Módulo de continuidad de una función

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se llama **módulo de continuidad de** f y se denota $w(\delta; f; X)$ la función

$$w(\delta; f; X) = \sup\{f(y) - f(x),\ x, y \in X,\ |x - y| \leq \delta\}.$$

Intuitivamente el módulo de continuidad describe el mayor incremento de la función f sobre un segmento de longitud δ.

1.2.5. Integrales dependientes de parámetro

Definición 2. *Supongamos que* $Y \subset \mathbb{R}$, $\varphi : Y \to \mathbb{R}$, $\psi : Y \to \mathbb{R}$ *con* $\varphi(y) \leq \psi(y)$ *y la función* $f(x,y)$ *está definida en el conjunto*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in Y, x \in [\varphi(y), \psi(y)]\right\}. \tag{1.2}$$

Si existe la integral finita

$$\phi(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx. \tag{1.3}$$

Entonces ella se llama ***integral dependiente de parámetro****, donde* y *es el parámetro.*

Supongamos que $Y = [\alpha, \beta]$, las funciones φ, ψ son continuas en dicho segmento y $\varphi(y) \leq \psi(y)$ con $y \in [\alpha, \beta]$. Designemos por $\overline{G}$ al conjunto

$$\overline{G} = \{(x,y); \alpha \leq y \leq \beta, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}. \tag{1.4}$$

Teorema 1. *Sea* $P = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \quad \alpha \leq y \leq \beta\}$, *si* $f(x,y) \in C'(P)$, *entonces*

$$\phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

es derivable en $[\alpha, \beta]$ *y*

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx.$$

Demostración. Ver [6], página 304. □

Teorema 2. *Si*

1. $f(x,y) \in C'(P)$
2. $\overline{G} \subset P$, *(ver 1.4).*
3. φ *y* $\psi \in C'([\alpha, \beta])$ *y cumplen con la definición 2*

entonces (1.3) es derivable en $[\alpha, \beta]$ *y*

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx - f(\varphi(y), y) \frac{d\varphi(y)}{dy} + f(\psi(y), y) \frac{d\psi(y)}{dy}.$$

Demostración. Sea la función

$$F(y,u,v) = \int_u^v f(x,y)dx,$$

$a \leq u \leq b$, $a \leq v \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$.

Como $f(x,y) \in C'(P)$, entonces por Teorema 1 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ existe y es

$$\frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx \tag{1.5}$$

Demostremos su continuidad. Sean

$$a \leq u \leq b,\ a \leq v \leq b,\ \alpha \leq y \leq \beta,\ \ a \leq u + \Delta u \leq b,$$

$$a \leq v + \Delta v \leq b,\ \alpha \leq y + \Delta y \leq \beta.$$

Entonces,

$$\Delta \frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y} = \frac{\partial F(y+\Delta y, u+\Delta u, v+\Delta v)}{\partial y} - \frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y},$$

y

$$\begin{aligned} \left| \Delta \frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y} \right| &= \left| \int_{u+\Delta u}^{v+\Delta v} \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} dx - \int_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx \right| \\ &\leq \left| \int_u^v \left[\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right] dx \right| + \left| \int_{u+\Delta u}^{u} \frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial y} dx \right| \\ &+ \left| \int_v^{v+\Delta v} \frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial y} dx \right|. \end{aligned}$$

Como la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ está definida en el rectángulo P, las integrales escritas tienen sentido para los argumentos elegidos y para

$$|v-u| \leq b-a.$$

De la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}$ se tiene su acotación en P, es decir, $\exists\ M > 0 : \forall (x,y) \in P$ se tiene que:

$$\left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \leq M.$$

Ahora el **módulo de continuidad** de la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ en P es:

$$w\left(\Delta y; \frac{\partial f}{\partial y}; P \right) = \sup \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad y, \Delta y + y \in P,\ \ |y + \Delta y - y| \leq \Delta y \right\}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \left| \Delta \frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y} \right| &\leq w\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y} \right) \left| \int_u^v dx \right| + M \left| \int_{u+\Delta u}^{u} dx \right| + M \left| \int_v^{v+\Delta v} dx \right| \\ &\leq (b-a) w\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y} \right) + M|\Delta u| + M|\Delta v|. \end{aligned}$$

De donde,

$$\lim_{\sqrt{\Delta y^2 + \Delta u^2 + \Delta v^2} \to 0} \left(\Delta \frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y} \right) = 0$$

Es decir, que $\frac{\Delta F}{\Delta y}$ es continua en el conjunto

$$\{(y, u, v) : c \leq y \leq d,\ a \leq u \leq b,\ a \leq v \leq b\}.$$

Y las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial u}$ y $\frac{\partial F}{\partial v}$ son continuas en este conjunto con $\frac{\partial F(y,u,v)}{\partial u} = -f(u, y)$, $\frac{\partial F(y,u,v)}{\partial v} = f(v, y)$. Ahora, la relación que existe entre Φ y F es:

$$\Phi(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y)).$$

Y como las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, existen y son continuas, entonces:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy}.$$

Sustituyendo las expresiones para las derivadas parciales en (1.5) y suponiendo que: $u = \varphi(y)$ y $v = \psi(y)$ se tiene:

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx - f[\varphi(y), y]\frac{d\varphi(y)}{dy} + f[\psi(y), y]\frac{d\psi(y)}{dy}.$$

$\square$

Observación 1. *El teorema 1 es un caso particular del teorema 2.*

1.2.6. Integrales de Euler

Definición 3. *Sean $p, q \in \mathbb{R}^+$. Se llama **función Beta** a la integral:*

$$\mathcal{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx.$$

Definición 4. *Sea $s \in \mathbb{R}^+$. Se llama **función Gamma** a la integral:*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Algunas Propiedades de las funciones Beta y Gamma

1. Tenemos que

$$\mathcal{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx.$$

Sea $x = \dfrac{1}{1+t}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(p,q) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t}\right)^{p-1}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{q-1}\frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt \end{aligned}$$

2. Si $p,q \in \mathbb{R}^+,$ entonces $\mathcal{B}(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

3. Si $n \in \mathbb{N},$ entonces $\Gamma(n+1) = n!$

4. Si $p \in \mathbb{R}^+,$ entonces $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

5. Si $p \in \mathbb{R}^+,$ entonces $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{sen(p\pi)}$.

1.2.7. Algunos conceptos de los espacios Lp

En esta sección consideramos a $E \subset \mathbb{R}^n,$ medible según Lebesgue.

Definición 5. *Sean $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que $f \in Lp(E)$, $1 \leq p < +\infty$ si*

1. f es medible en E.

2. Es finita la expresión:

$$\int_E |f(x)|^p \, dx.$$

Es decir

$$Lp(E) := \left\{ f : E \longrightarrow \mathbb{R} : f \;\; medible \;\; y \quad \int_E |f(x)|^p \, dx < \infty \;\; c.t.p. \;\; en \;\; E \right\}.$$

Si $p = \infty$

$$L_\infty(E) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} : f \;\; medible \;\; y \;\; existe \;\; C \geq 0 \;\; tal \;\; que \;\; |f(x)| < C \;\; c.t.p. \;\; en \;\; E\}.$$

Observación 2. *$L_p(E)$ es un espacio normado con la norma definida por*

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad para \;\; 1 \leq p < +\infty.$$

Si $p = \infty$

$$\|f\|_{L_\infty(E)} = Inf\,\{C \geq 0 : |f(x)| < C \;\; c.t.p. \;\; en \;\; E\}.$$

Lema 1. *Sea* $E \subset \mathbb{R}$, $f \in L_p(E)$, $1 \leq p < \infty$. *Entonces*

$$\|f(x+h) - f(x)\|_{L_p(E)} \longrightarrow 0; \quad h \to 0.$$

Teorema 3. *Sea* $E \subset \mathbb{R}$, $F \in L_1(E)$, $|f(x+h)| \leq F(x)$ *y* $\lim_{h\to 0} f(x,h)$ *existe en c.t.p. de E. Entonces,*

$$\lim_{h\to 0} \int_E f(x,h)dx = \int_E \lim_{h\to 0} f(x,h)dx.$$

1.2.8. Teorema de Fubinni

Sea $f \in L_1(E \times F)$ donde $E \subset \mathbb{R}^m$, $F \subset \mathbb{R}^n$, con E y F conjuntos medibles; entonces

1. $f(x,y)$ es integrable en F como función de y, p.c.t. $x \in E$.
2. $\int_F f(x,y)dy$ es integrable en E como función de x.
3. $f(x,y)$ es integrable en E como función de x, p.c.t. $y \in F$.
4. $\int_E f(x,y)dx$ es integrable en F como función de y y además son válidas las igualdades

$$\int_E \left(\int_F f(x,y)dy \right) dx = \int_F \left(\int_E f(x,y)dx \right) dy = \iint_{E\times F} f(x,y)dxdy. \tag{1.6}$$

Consecuencia:

Si al menos una de las integrales

$$\int_E \left(\int_F |f(x,y)|\, dy \right) dx, \qquad \int_F \left(\int_E |f(x,y)|\, dx \right) dy$$

es finita, entonces existen las tres integrales de (1.6) y además (1.6) es válida.

1.2.9. Desigualdad de Hölder

Teorema 4. ***(Desigualdad de Hölder)***: *Sea* $E \subset \mathbb{R}^n$. *Sea* $1 \leq p \leq +\infty$ *y* q *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Sea* $f \in Lp(E)$ *y* $g \in Lq(E)$ *entonces* $fg \in L_1(E)$ *y es válida la desigualdad*

$$\int_E |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_q(E)}.$$

Observación 3. *Para* $p = 1$ *se considera* $q = \infty$.

Definición 6. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\Omega \neq \emptyset$. *Se dice que* f *pertenece a la clase* ***Hölder*** *en* Ω *con parámetro* $\lambda > 0$ *y se denota* $f \in H^{\lambda}(\Omega)$, *si existe* $C > 0$ *tal que para todo* $x, y \in \Omega$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|^{\lambda}.$$

Definición 7. *Se dice que* f *es* ***localmente Hölder*** *con parámetro* $\lambda > 0$ *en* $\mathbb{R}$ *si* $\forall\ \Omega \subset \mathbb{R}, \quad f \in H^{\lambda}(\Omega)$.

Mostremos a continuación una función de la clase $H^{\lambda}([a,b])$ y otra que no pertenece a dicha clase. **Ejemplos.**

1. Sea $f(x) = x^2$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\lambda = 1$. Debemos demostrar que $|x^2 - y^2| \leq C\,|x - y|$. En efecto, puesto que, $|x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| \leq |x+y|\,|x-y|$ y como $x, y \in [a,b]$. Entonces, $a \leq x \leq b$ y $a \leq y \leq b$. De donde $2a \leq x + y \leq 2b$ luego, $|x^2 - y^2| \leq 2\,|b|\,|x-y|$ por tanto, $f(x) = x^2 \in H^{\lambda}([a,b])$, con parámetro $\lambda = 1$.

2. Sea $f(x) = \ln x$, $[a,b] = [0,1]$. Probemos, que $f \notin H^{\frac{1}{2}}((0{,}1])$
   Para ello tomamos $x = e^{-n} \in [0,1]$ y $y = e^{-2n} \in [0,1]$. Así $f(x) = -n$, y $f(y) = -2n$. Verifiquemos, que $\forall\ C > 0$, C constante, $|-n + 2n| > C\,|e^{-n} - e^{-2n}|^{\frac{1}{2}}$; para n lo suficientemente grande, es decir $n^2 > C(e^{-n} - e^{-2n})$ o lo que es lo mismo, $n^2e^{2n} > C(e^n - 1)$. Puesto que $Ce^n > C(e^n - 1)$, es suficiente probar, que $n^2e^{2n} > Ce^n$. Se tiene que para un $C \in \mathbb{R}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2e^n > C$, entonces, $n^2e^n > C(e^n - 1)$. Por tanto $f(x) = \ln x \notin H^{\frac{1}{2}}((0,1])$.

1.2.10. Desigualdad generalizada de Minkowsky

Sea $1 \leq p \leq \infty$, $f \in Lp(E)$, $y \in F \subseteq \mathbb{R}^m$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, entonces

$$\left\| \int_F f(x,y)dy \right\|_{Lp(E)} \leq \int_F \|f(x,y)\|_{Lp(E)}\, dy.$$

(Es decir, la norma de la integral no excede la integral de la norma).

Capítulo 2

Derivadas de orden no entero según Louville

En este capítulo presentamos las definiciones fundamentales de las integrales y derivadas fraccionarias. Es conveniente definir en primera instancia las integrales fraccionarias y luego inroducir la noción de derivada fraccionaria como la operación inversa a la integración fraccionaria.

2.1. Integrales de orden no entero según Louville

Definición 8. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y la función $\varphi \in L_1([a,b])$. Si las integrales*

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,\ x > a$$

$$(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt,\ x < b$$

*existen y son finitas, entonces, ellas se llaman **Integrales de Orden α según Louville** de la función φ en $[a,b]$, por la izquierda y derecha respectivamente. Estas integrales se acostumbran llamar Integrales de Riemman-Louville.*

De esta manera la Integral de orden α es la construcción ya conocida a través de la ecuación de Abel (ver pág 3).

Ejemplo.

1. Calculemos la integral fraccionaria de orden 1/2, para $f(x) = x$ en $[a,b] = [0,1]$.

$$I_{0+}^{1/2}x = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x \frac{t}{(x-t)^{1/2}}dt.$$

Haciendo la sustitución $s = \dfrac{t}{x}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} I_{0+}^{1/2}x &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 sx^2x^{-1/2}(1-s)^{-1/2}ds = \frac{x^{3/2}}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 s(1-s)^{-1/2}ds \\ &= \mathcal{B}(2,1/2)\frac{x^{3/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

2.2. Relación entre I_{a+}^{α} e I_{b-}^{α} en $[a,b]$

Para determinar la relación que existe entre los operadores de integración en el segmento, es necesario conocer el operador de reflexión.

Definición 9. *Sean $a,b,x \in \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se llama **operador de reflexión** en el segmento $[a,b]$ y se denota "Q"a la operación que cumple:*

$$(Q\varphi)(x) := \varphi(a+b-x),\ \forall x \in [a,b].$$

donde $x = \frac{b-a}{2}$ es el eje de reflexión.
Para $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ "Q" es:

$$(Q\varphi)(x,y) := \varphi(a+b-x, a+b-y),\ \forall x,y \in [a,b]\times[a,b].$$

Apliquemos el operador de reflexión a las siguientes funciones y miremos sus gráficas.

1. Sea $\varphi(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Entonces,
   $(Q\varphi)(x) = Q(x^2) = (1+0-x)^2 = (1-x)^2$.
   siendo $x = 1/2$ el eje de reflexión.

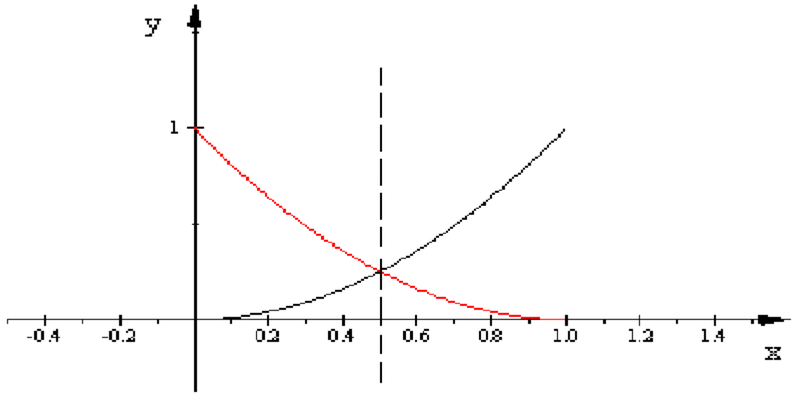

Figura 2.1: $Q(x^2)$

2. Observemos el caso de una función definida a trozos:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

En este caso

$$(Qh)(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ (6-x)^2 - 1 & \text{si} \quad 4 < x \leq 6. \end{cases}$$

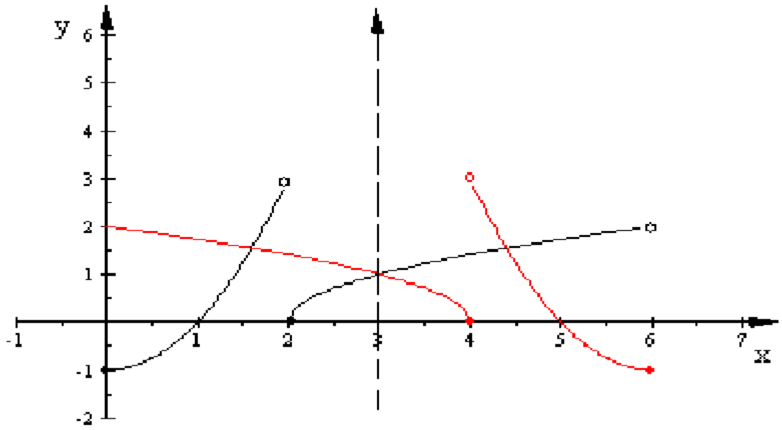

Figura 2.2: $(Qh)(x)$

3. Consideremos Q para funciones de varias variables

   Sea $g(x,y) = x^2 + y^2$ en $[0,1] \times [0,1]$.

   Entonces

   $(Qg)(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$.

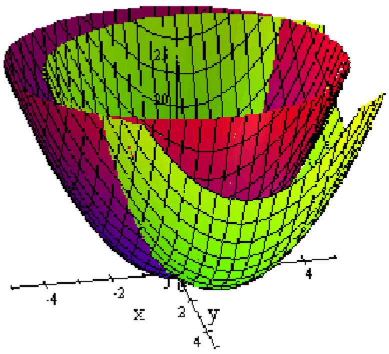

Figura 2.3: $(Qg)(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$

Observación 4. *Si designamos por Q^n la composicion del operador Q consigo mismo es decir $Q^n = \underbrace{Q \circ Q \circ \cdots \circ Q}_{n-veces}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces es fácil probar por inducción, que*

$$Q^n = \begin{cases} I \quad si \quad n \quad es\ par \\ Q \quad si \quad n \quad es\ impar. \end{cases}$$

Teorema 5. *Sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) \in L_1([a,b])$, Q el operador de reflexión. Entonces se cumple que*

$$QI^{\alpha}_{a+}\varphi = I^{\alpha}_{b-}Q\varphi.$$

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned} (QI^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) &= Q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{a+b-x} \frac{\varphi(t)}{(a+b-x-t)^{1-\alpha}}dt. \end{aligned}$$

Sea $\tau = a + b - t$. Entonces

$$(QI^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(a+b-\tau)}{(\tau-x)^{1-\alpha}}d\tau = (I^{\alpha}_{b-}Q\varphi)(x).$$

□

Teorema 6. *(Fórmula de Integración Por Partes) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y las funciones $\varphi \in Lp([a,b])$ y $\psi \in Lq([a,b])$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leq 1 + \alpha$, $p \geq 1, q \geq 1$. Entonces se cumple*

$$\int_a^b \varphi(x)(I^{\alpha}_{a+}\psi)(x)dx = \int_a^b \psi(x)(I^{\alpha}_{b-}\varphi)(x)dx.$$

Demostración. Por definición tenemos

$$\int_a^b \varphi(x)(I^{\alpha}_{a+}\psi)(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \varphi(x)\left(\int_a^x \frac{\psi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right)dx.$$

Ahora para calcular mas fácilmente la integral se intercambia el orden de integración lo cual es válido por el Teorema de Fubinni (ver sección 1.2.6.). Para esto, sea $\tau = \dfrac{x-t}{x-a}$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)(I^{\alpha}_{a+}\psi)(x)dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \varphi(x)\left(\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\psi(x-\tau(x-a))(x-a)^{\alpha}d\tau\right)dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (x-a)^{\alpha}\varphi(x)\left(\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\psi(x-\tau(x-a))d\tau\right)dx.\end{aligned}$$

Sea $y = x - a$. Entonces

$$\int_a^b \varphi(x)(I^{\alpha}_{a+}\psi)(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{b-a} y^{\alpha}\varphi(a+y)\left(\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\psi(y+a-y\tau)d\tau\right)dy.$$

Sin perdida de generalidad, tomemos $[a,b] = [0,1]$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)(I^{\alpha}_{a+}\psi)(x)dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 y^{\alpha}\varphi(y)\left(\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\psi(y-y\tau)d\tau\right)dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(\int_0^1 y^{\alpha}\varphi(y)\tau^{\alpha-1}\psi(y-y\tau)d\tau\right)dy\end{aligned}$$

Verifiquemos que en verdad puede aplicarse la consecuencia del Teorema de Fubinni es decir que:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left| y^\alpha \varphi(y) \tau^{\alpha-1} \psi(y - y\tau) \right| d\tau \right) dy < +\infty.$$

Sea

$$A = \int_0^1 y^\alpha \left| \varphi(y) \right| \left(\int_0^1 \tau^{\alpha-1} \left| \psi(y - y\tau) \right| d\tau \right) dy. \tag{2.1}$$

Analicemos la convergencia de la integral interna de (2.1) usando la desigualdad de Hölder (ver sección 1.2.9). Debemos demostrar que

$$\left\| \psi(y - \tau y) \right\|_{Lq([0,1])} < +\infty, \tag{2.2}$$

y que

$$\left\| \tau^{\alpha-1} \right\|_{Lq'([0,1])} < +\infty, \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \tag{2.3}$$

Demostremos (2.2). Por hipótesis tenemos que $\psi \in Lq([0,1])$. Sea $m = y - \tau y$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \psi(y - \tau y) \right|^q d\tau &= \int_0^y \frac{\left| \psi(m) \right|^q}{y} dm \\ &= \frac{1}{y} \int_0^y \left| \psi(m) \right|^q dm \leq \frac{1}{y} \int_0^1 \left| \psi(m) \right|^q dm, \end{aligned}$$

puesto que $0 < y < 1$. Ahora

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{y} \int_0^1 \left| \psi(m) \right|^q dm \right)^{1/q} &= \frac{1}{y^{1/q}} \left(\int_0^1 \left| \psi(m) \right|^q dm \right)^{1/q} \\ &= \frac{1}{y^{1/q}} \left\| \psi \right\|_{Lq([0,1])}, \end{aligned}$$

entonces

$$\left(\int_0^1 \left| \psi(y - \tau y) \right|^q d\tau \right)^{1/q} \leq y^{(-1/q)} \left\| \psi \right\|_{Lq([0,1])} < +\infty.$$

Por tanto $\psi(y - \tau y) \in Lq([0,1])$.

Ahora demostremos (2.3), es decir que

$$\left(\int_0^1 \left| \tau^{\alpha-1} \right|^{q'} d\tau \right)^{1/q'} < +\infty, \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Observemos que la integral $\int_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{q'(1-\alpha)}}$ converge cuando $1-\alpha < \frac{1}{q'}$, es decir $1-\frac{1}{q'} < \alpha$ de donde $q \geq \frac{1}{\alpha}$. Como $0<\alpha\leq 1$ entonces $\frac{1}{\alpha}\geq 1$. Luego para $q > \frac{1}{\alpha} \geq 1$ tenemos que

$$I = \int_0^1 (\tau^{\alpha-1})^{q'} d\tau < +\infty$$

En conclusión:

1. Si $0<\alpha\leq 1$ entonces $\frac{1}{\alpha}\geq 1$ con $q>\frac{1}{\alpha}$ la integral I converge.

2. Si $\alpha > 1$ entonces I converge.

Por tanto, $\tau^{\alpha-1} \in Lq'([0,1])$

Ahora analicemos la convergencia de la integral externa de (2.1).

1. Sea $0<\alpha<1$. Entonces

$$\begin{aligned} A &\leq \int_0^1 y^{\alpha} |\varphi(y)| \, y^{-1/q} \left\|\tau^{\alpha-1}\right\|_{Lq'([0,1])} \|\psi\|_{Lq([0,1])} \, dy \\ &= \left\|\tau^{\alpha-1}\right\|_{Lq'([0,1])} \|\psi\|_{Lq([0,1])} \int_0^1 y^{(\alpha-1/q)} |\varphi(y)| \, dy \end{aligned}$$

   Como $\varphi \in Lp([0,1])$, entonces para la convergencia de $\int_0^1 y^{(\alpha-1/q)} |\varphi(y)| \, dy$ es necesario que $y^{(\alpha-1/q)} \in Lp'([0,1])$. En efecto

$$\int_0^1 \frac{dy}{y^{(1/q-\alpha)p'}} \quad \text{converge si} \quad \left(\frac{1}{q}-\alpha\right)p' < 1.$$

   Luego $\dfrac{1}{q}-\alpha < \dfrac{1}{p'}$, es decir $\dfrac{1}{q}-\alpha < 1-\dfrac{1}{p}$ de donde $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p} < 1+\alpha$.

2. Si $\alpha>1$, $C = \int_0^1 \tau^{\alpha-1} |\psi(y-y\tau)| \, d\tau > 0$. Entonces

$$A \leq C \int_0^1 y^{\alpha} |\varphi(y)| \, dy \leq C \|\varphi\|_{Lp([0,1])} \|y^{\alpha}\|_{Lp'([0,1])},$$

   ya que $\int_0^1 y^{\alpha p'} dy$ converge.

La convergencia de (2.1) en el caso $q = +\infty$ lo estudiaremos de la siguiente manera.

Sea $\quad \varphi \in Lp([0,1]), \quad \psi \in L_\infty([0,1]), \quad \dfrac{1}{p} < 1 + \alpha, \quad p \geq 1, \quad \alpha > 0.$

Demostremos que

$$A = \int_0^1 y^\alpha \left|\varphi(y)\right| \left(\int_0^1 \tau^{\alpha-1} \left|\psi(y - \tau y)\right| d\tau\right) dy < \infty. \tag{2.4}$$

Para ello analicemos primero la convergencia de la integral interna de (2.4).

Como $\quad \psi \in L_\infty([0,1]) \quad$ entonces ψ es acotado.

$$\|\psi\|_{L_\infty([0,1])} = M.$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \tau^{\alpha-1} \left|\psi(y - \tau y)\right| d\tau \leq \int_0^1 \tau^{\alpha-1} M d\tau = M \int_0^1 \tau^{\alpha-1} d\tau.$$

Ahora $\displaystyle\int_0^1 \tau^{\alpha-1} d\tau$ converge ya que para $\alpha > 0$ se tiene que $1 - \alpha < 1$.

Analicemos la convergencia de la integral externa de (2.4).

$$\int_0^1 y^\alpha \left|\varphi(y)\right| k dy, \quad \text{con} \quad k = M \int_0^1 \tau^{\alpha-1} d\tau.$$

Por hipótesis se tiene que $\varphi \in Lp([0,1])$. Es fácil demostrar que $y^\alpha \in Lp'([0,1])$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. En efecto,

$$\int_0^1 \left|y^\alpha\right|^{p'} dy = \int_0^1 y^{\alpha p'} dy, \quad \text{converge si } -\alpha p' < 1$$

entonces $\quad -\alpha < \dfrac{1}{p'}, \quad$ es decir $\quad -\alpha < 1 - \dfrac{1}{p} \quad$ de donde $\quad \dfrac{1}{p} < 1 + \alpha\;$ y por tanto,

$$\int_0^1 y^\alpha \left|\varphi(y)\right| dy \leq \|y^\alpha\|_{Lp'([0,1])} \|\varphi(y)\|_{Lp([0,1])} < \infty$$

Finalmente.

$$A = \int_0^1 y^\alpha \left|\varphi(y)\right| \left(\int_0^1 \tau^{\alpha-1} \left|\psi(y - \tau y)\right| dt\right) dy < \infty$$

La convergencia de A permite realizar el cambio en el orden de integración. Así,

$$\int_a^b \varphi(x)(I_{a+}^\alpha \psi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(x) \left(\int_a^x \frac{\psi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt\right) dx$$

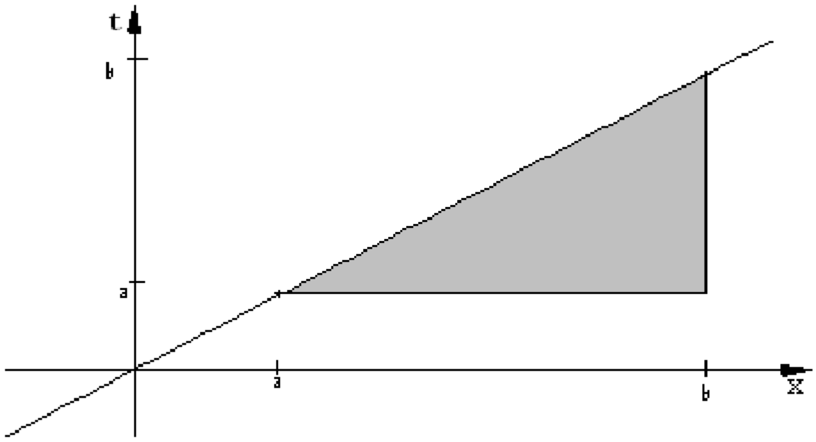

Figura 2.4: región de integración

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)(I_{a+}^{\alpha}\psi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \psi(t)\left(\int_t^b \frac{\varphi(x)}{(x-t)^{1-\alpha}}dx\right)dt\\ &= \int_a^b \psi(x)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt\right)dx = \int_a^b \psi(x)(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x)dx.\end{aligned}$$

□

Teorema 7. ***(Propiedad de Semigrupo)*** *Sean $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y la función $\varphi \in L_1([a,b])$. Entonces*

$$\text{(i)}\quad I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi$$
$$\text{(ii)}\quad I_{b-}^{\alpha}I_{b-}^{\beta}\varphi = I_{b-}^{\alpha+\beta}\varphi$$

Demostración. (i) Por definición tenemos

$$\begin{aligned}(I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}}d\tau\right)dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}\left(\int_a^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}}d\tau\right)dt.\end{aligned}$$

Para calcular la integral se intercambia el orden de integración, lo cual es válido por el teorema de Fubinni (ver sección 1.2.8). Luego,

$$(I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \varphi(\tau)\left(\int_\tau^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}}\right)d\tau.$$

Sea $s = \dfrac{t-\tau}{x-\tau}$, de donde $t = s(x-\tau)+\tau$ y $(x-t) = (x-\tau)(1-s)$. Por ello

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}\varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \varphi(\tau)\left(\int_0^1 \frac{x-\tau}{[(x-\tau)(1-s)]^{1-\alpha}[s(x-\tau)]^{1-\beta}}ds\right)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \varphi(\tau)\left(\int_0^1 \frac{s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}}ds\right)d\tau \\
&= \frac{\mathcal{B}(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-(\alpha+\beta)}}d\tau \\
&= I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi(x)
\end{aligned}$$

De la misma manera se demuestra (ii). □

2.3. Derivadas de orden no entero según Louville en el segmento $[a,b]$

Definición 10. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ y la función $f \in L_1([a,b])$ (ver def 5). Si las integrales*

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt, \quad x > a. \tag{2.5}$$

$$(D^{\alpha}_{b-}f)(x) := \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt, \quad x < b. \tag{2.6}$$

existen y son finitas, entonces ellas se llaman ***derivadas de orden*** α ***según Louville*** *de la función f en [a,b], por la izquierda y derecha respectivamente.*

Definamos la función auxiliar de f como:

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt$$

y estudiemos la relación entre las derivadas de orden α y la ecuación de Abel mediante las siguientes observaciones, lemas y teoremas.

Observaciones 2.

1. *Si φ la solución de la ecuación de Abel, es decir*

$$\varphi(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{ds} \int_a^s \frac{f(t)}{(s-t)^\alpha} dt.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_a^x \varphi(s) ds &= \int_a^x \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{ds} \int_a^s \frac{f(t)}{(s-t)^\alpha} dt \right] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt - \int_a^a \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \\ &= f_{1-\alpha}(x). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f'_{1-\alpha}(x) &= \frac{df_{1-\alpha}(x)}{dx} \\ &= \frac{d}{dx} \int_a^x \varphi(s) ds \\ &= \varphi(x) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|\, dx &= \int_a^b \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_a^x \left| \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \right| dt \right) dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \left(\int_a^x |f(t)|\, (x-t)^{-\alpha} dt \right) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \left(\int_t^b |f(t)|\, (x-t)^{-\alpha} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b |f(t)|\, \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Bigg|_{x=t}^{x=b} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^b |f(t)|\, (b-t)^{1-\alpha} dt \\ &\leq (b-a)^{1-\alpha} \int_a^b |f(t)|\, dt \end{aligned}$$

Lo que nos permite afirmar que si $f \in L_1([a,b])$ entonces $f_{1-\alpha} \in L_1([a,b])$

Teorema 8. *Para que la ecuación de Abel $(*)$ con $0 < \alpha < 1$, tenga solución en $L_1([a,b])$, es necesario y suficiente que:*

$$f_{1-\alpha} \in AC([a,b]) \quad y \quad f_{1-\alpha}(a) = 0. \tag{2.7}$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que la ecuación de Abel $(*)$ tiene solución, es decir $\varphi \in L_1([a,b])$. Pero por la observación 1, $\varphi = f'_{1-\alpha}$, es decir $f'_{1-\alpha} \in L_1([a,b])$. Luego $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y

$$f_{1-\alpha}(a) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^a \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt = 0.$$

$\Longleftarrow$) Supongamos que $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y que $f_{1-\alpha}(a) = 0$. En general, tenemos que si $f \in AC([a,b])$ entonces $f' \in L_1([a,b])$, es decir, si $f'_{1-\alpha} \in L_1([a,b])$ tenemos que $f'_{1-\alpha} = \varphi$ por observación 2. Por lo tanto como $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ entonces $f'_{1-\alpha} = \varphi \in L_1([a,b])$. Probemos que $\varphi = f'_{1-\alpha}$ es solución de la ecuación de Abel. Reemplazando en la ecuación de Abel, tenemos

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^\alpha} dt = g(x)$$

Ahora, demostremos que $g(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in [a,b]$. Teniendo en cuenta que $f'_{1-\alpha}$ es solución de (2.8), tenemos que

$$\begin{aligned} f'_{1-\alpha}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha} dt \\ &= g'_{1-\alpha}(x). \end{aligned}$$

Entonces $g_{1-\alpha}$ es la antiderivada de una función $L_1([a,b])$, por tanto $g_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y por hipótesis tenemos que $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$, luego $f_{1-\alpha}(x) - g_{1-\alpha}(x) = c$ p.c.t. $x \in [a,b]$, y al evaluar en $x = a$, tenemos entonces que $f_{1-\alpha}(a) - g_{1-\alpha}(a) = 0$. Luego $c = 0$. Por tanto $f_{1-\alpha}(x) = g_{1-\alpha}(x)$, p.c.t. $x \in [a,b]$.

Ahora por definición de función auxiliar

$$(f-g)_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(f-g)(t)}{(x-t)^\alpha} dt = 0$$

Luego por la unicidad de la ecuación homogenea $(f-g)(x) = 0$, por tanto $f(x) = g(x)$ p.c.t. $x \in [a,b]$.

$\square$

Lema 2. *Si $f \in AC([a,b])$, entonces, $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y además*

$$f_{1-\alpha}(x) := \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha} dt \right]. \tag{2.8}$$

Demostración. Reemplazando con base en (1.1) la función

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds$$

en la función auxiliar obtenemos

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int_a^t f'(s)ds. \qquad (2.9)$$

Ya que

$$\begin{aligned} f_{1-\alpha}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_a^x (x-t)^{-\alpha} \left(f(a) + \int_a^t f'(s)ds \right) dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[f(a) \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \left(\int_a^t f'(s)ds \right) dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[f(a) \left(-\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \Bigg|_{y=a}^{t=x} + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \left(\int_a^t f'(s)ds \right) dt \right] \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \left(\int_a^t f'(s)ds \right) dt \end{aligned}$$

Ahora

$$\frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} \in AC([a,b]), \quad \text{ya que}$$

$$(x-a)^{1-\alpha} = (1-\alpha) \int_a^x (t-a)^{-\alpha} dt$$

Demostremos que

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \left(\int_a^t f'(s)ds \right) dt \in AC([a,b])$$

para ello intercambiamos el orden de integración, lo cual es válido por el teorema de Fubinni, ya que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \left(\int_a^t f'(s)ds \right) dt \right| &\leq \int_a^x \left(|x-t|^{-\alpha} \int_a^b |f'(s)|ds \right) dt \\ &\leq \int_a^x |x-t|^{-\alpha} \left(\int_a^b |f'(s)|ds \right) dt \\ &= \|f'\|_{L_1([a,b])} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} < \infty \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}\left(\int_a^t f'(s)ds\right)dt &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \left(\int_s^x (x-t)^{-\alpha}dt\right) f'(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_a^x (x-s)^{1-\alpha} f'(s)ds \qquad (2.10)\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \left(\int_s^x (t-s)^{-\alpha}dt\right) f'(s)ds
\end{aligned}$$

Intercambiando nuevamente el orden de integración

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \left(\int_s^x (t-s)^{-\alpha}dt\right) f'(s)ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \left(\int_a^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds\right)dt \qquad (2.11)\\
&= \int_a^x \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds\right)dt\\
&= \int_a^x f'_{1-\alpha}(t)dt
\end{aligned}$$

Y como $f \in AC([a,b])$ entonces $f' \in L_1([a,b])$, luego $f'_{1-\alpha} \in L_1([a,b])$.
Por tanto

$$\int_a^x f'_{1-\alpha} \in AC([a,b])$$

En consecuencia $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$. Ahora cambiando s por t en la ecuación 2.10 y reemplazando en la ecuación 2.9, obtenemos

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha}dt\right]$$

□

Consecuencia. Si $f \in AC([a,b])$, entonces, la ecuación de Abel es soluble para $0<\alpha<1$ en $L_1([a,b])$ y además su solución puede representarse en la forma:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{\alpha}}ds\right].$$

Demostración. En efecto, como $f \in AC([a,b])$ entonces por el Lema (2), $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$, además

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha}dt\right]$$

Pero

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{f(a)(1-\alpha)}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{d}{dx} \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha} dt \right]
\end{aligned}$$

Por (2.11), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha} dt &= (1-\alpha) \int_a^x \left(\int_t^x \frac{f'(t)}{(s-t)^{\alpha}} ds \right) dt \\
&= (1-\alpha) \int_a^x \left(\int_a^s \frac{f'(t)}{(s-t)^{\alpha}} dt \right) ds.
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha} dt &= (1-\alpha) \frac{d}{dx} \int_a^x \left(\int_a^s \frac{f'(t)}{(s-t)^{\alpha}} dt \right) ds \\
&= (1-\alpha) \int_a^s \frac{f'(t)}{(s-t)^{\alpha}} dt \bigg|_{s=x} = (1-\alpha) \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt
\end{aligned}$$

Luego

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{\alpha}} ds \right]$$

□

Teorema 9. *Sea* $0 < \alpha < 1, \ f \in AC([a,b])$ *entonces se cumple que*

1. $D^{\alpha}_{a+} f$ *y* $D^{\alpha}_{b-} f$ *existen en c.t.p.*

2. *Estas derivadas también pueden escribirse en la forma*

$$(D^{\alpha}_{a+} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \right],$$

$$(D^{\alpha}_{b-} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_x^b \frac{f'(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt \right].$$

3. *Si* $1 \leq r < 1/\alpha, \ D^{\alpha}_{a+} f$ *y* $D^{\alpha}_{b-} f \in L_r([a,b])$

Demostración. 1. Se deduce del Lema (2).

2. Se obtiene al aplicar la consecuencia del Lema (2).

3. Por (2)

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right], \quad x > a.$$

Demostremos que

$$\left\|(x-a)^{-\alpha}f(a) + \int_a^x (x-t)^{-\alpha}f'(t)dt\right\|_{L_r([a,b])} < \infty$$

Pero

$$\begin{aligned}\left\|(x-a)^{-\alpha}f(a) + \int_a^x (x-t)^{-\alpha}f'(t)dt\right\|_{L_r([a,b])} &\leq \|(x-a)^{-\alpha}\|_{L_r([a,b])}|f(a)| \\ &+ \left\|\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f'(t)dt\right\|_{L_r([a,b])}\end{aligned}$$

Ahora

$$\|(x-a)^{-\alpha}\|_{L_r([a,b])} = \left(\int_a^b (x-a)^{-\alpha r}dx\right)^{\frac{1}{r}} \;\; y \;\; \int_a^b (x-a)^{-\alpha r}dx \text{ converge para } \alpha r < 1.$$

Luego

$$|f(a)|\|(x-a)^{-\alpha}\|_{L_r([a,b])} < \infty \quad \text{para} \quad r < \frac{1}{\alpha}$$

comprobemos que

$$\left\|\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f'(t)dt\right\|_{L_{r,x}([a,b])} < \infty$$

como

$$\left|\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f'(t)dt\right| \leq \int_a^b |x-t|^{-\alpha}|f'(t)|dt$$

entonces

$$\left\|\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f'(t)dt\right\|_{L_{r,x}([a,b])} \leq \left\|\int_a^b (x-t)^{-\alpha}f'(t)dt\right\|_{L_{r,x}([a,b])}$$

y por la desigualdad generalizada de Minkowsky

$$\left\|\int_a^b (x-t)^{-\alpha}f'(t)dt\right\|_{L_{r,x}([a,b])} \leq \int_a^b \|(x-t)^{-\alpha}\|_{L_{r,x}([a,b])}|f'(t)|dt.$$

Ahora mostremos que

$$\|(x-t)^{-\alpha}\|_{L_{r,x}([a,b])} < \infty.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b |x-t|^{-\alpha r}dx\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_a^t |x-t|^{-\alpha r}dx + \int_t^b |x-t|^{-\alpha r}dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(-\int_a^t (t-x)^{-\alpha r}d(t-x) + \int_t^b (x-t)^{-\alpha r}d(x-t)\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\left[(x-t)^{1-\alpha r}\Big|_{x=t}^{x=b} - (t-x)^{1-\alpha r}\Big|_{x=a}^{x=t}\right]\frac{1}{1-\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{1}{(1-\alpha r)^{\frac{1}{r}}}\left[(b-t)^{1-\alpha r} + (t-a)^{1-\alpha r}\right]^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{r} - \alpha > 0$, entonces $1 - \alpha r > 0$, luego

$$(b-t)^{1-\alpha r} \leq (b-a)^{1-\alpha r} \quad \text{y} \quad (t-a)^{1-\alpha r} \leq (b-a)^{1-\alpha r} \quad \text{si} \quad a \leq t \leq b$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b |x-t|^{-\alpha r}dx\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \frac{1}{(1-\alpha r)^{\frac{1}{r}}}\left[(b-a)^{1-\alpha r} + (b-a)^{1-\alpha r}\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{r}}(b-a)^{\frac{1}{r}-\alpha}}{(1-\alpha r)^{\frac{1}{r}}} = M.
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_a^b \|(x-t)^{-\alpha}\|_{L_{r,x}([a,b])}|f'(t)|dt \leq M\int_a^b |f'(t)|dt$$

y como $f \in AC([a,b])$, entonces $f' \in L_1([a,b])$ por tanto

$$\left\|\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f'(t)dt\right\|_{L_{r,x}([a,b])} < \infty.$$

En consecuencia

$$\left\|(x-a)^{-\alpha}f(a) + \int_a^x (x-t)^{-\alpha}f'(t)dt\right\|_{L_{r,x}([a,b])} < \infty.$$

$\square$

Ejemplos. Calculemos las derivadas de orden α no entero de las siguientes funciones

1. Sea $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}$. Entonces

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

Sea $\quad \tau = \dfrac{t-a}{x-a}$. Luego $x-(x-a)\tau - a = x-t$, $\quad$ de donde $(x-a)(1-\tau) = x-t$, y por tanto

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{a+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{[\tau(x-a)]^{\alpha-1}(x-a)}{[(x-a)(1-\tau)]^{\alpha}}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\mathcal{B}(\alpha,1-\alpha) = 0.\end{aligned}$$

2. Observemos el caso más general, sea $f(x) = (x-a)^{-\mu}$ $\quad$ con $\quad 0 < \mu < 1$, $\quad \alpha + \mu < 1$.

   Entonces,
$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{(t-a)^{-\mu}}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$
   Bajo la misma sustitución $\tau = \dfrac{t-a}{x-a}$ y aplicando el mismo proceso anterior tenemos
$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)}\frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}.$$

Observación 5. *El ejemplo 1 indica que la función $(x-a)^{\alpha-1}$ juega para la diferenciación no entera el mismo papel que la función constante para la diferenciación habitual.*

Hasta el momento hemos definido D^{α} unicamente para $0 < \alpha < 1$. En cambio, I^{α} la definimos $\forall \alpha > 0$. Para extender la operación D^{α}, $\forall \alpha > 0$ damos la siguiente definición:

Definición 11. *Sea $\quad \alpha \in \mathbb{Z}^{+}$, se llama derivada de orden α a:*

$$D^{\alpha}_{a+} := \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad y \quad D^{\alpha}_{b-} := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, ...$$

entendiendo estas derivadas como la derivada habitual.

Definición 12. *Sea $\quad \alpha \in (\mathbb{R}^{+} - \mathbb{Z})$ con $\quad \alpha > 1$, $[\alpha]$ la parte entera de α y $\quad \{\alpha\}$ la parte fraccionaria de α, $\quad 0 \leq \{\alpha\} < 1$, $\quad$ así $\quad \alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. Definimos las derivadas de orden α mediante las fórmulas:*

$$D^{\alpha}_{a+}f := \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{a+}f := \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f, \tag{2.12}$$

$$D^{\alpha}_{b-}f := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{b-}f := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{b-}f. \tag{2.13}$$

De esta manera:

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \qquad (i)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad \textit{donde} \qquad n = [\alpha]+1. \qquad (ii)$$

Observación 6. *Para que (i) y (ii) existan, es suficiente que*

$$\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} \in AC^{[\alpha]}[a,b]; \quad n = [\alpha]+1 \qquad (iii)$$

donde $AC^{[\alpha]}([a,b])$ *es la clase de funciones continuamente diferenciables en* $[a,b]$ *hasta el orden* $n-1$*, con* $f^{n-1} \in AC([a,b])$*. Es claro que* $AC^1([a,b]) \equiv AC([a,b])$ *y la clase* $AC^n([a,b])$ *consta (ver 1.1) de funciones que se representan mediante una integral n-múltiple de Lebesgue de una función sumable, reemplazando en (1.1) la constante* C *por un polinomio de grado* $n-1$*. Ahora, para que (iii) se cumpla es suficiente que* $f \in AC^{[\alpha]}([a,b])$*.*

2.4. Integrales de orden no entero según Louville en todo el eje real

Las integrales fraccionarias definidas en el segmento finito $[a,b]$, pueden llevarse a los casos del semieje y a todo el eje. Debido al índice variable de integración, la **definición 10** es aplicable en los semiejes (a,∞) y $(-\infty,b)$.

Definición 13. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *y la función* $\varphi \in L_1(0,\infty)$*. Si la integral*

$$(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \qquad 0 < x < \infty$$

*existe y es finita, ella se llama **integral fraccionaria de orden** α **según Louville** de la función* φ *en el semieje positivo.*

Definición 14. *Sea* $\alpha > 0$ *y la función* $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. *Si las integrales:*

$$(I_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$(I_-^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

existen y son finitas, entonces, ellas se llaman ***integrales fraccionarias de orden*** α ***según Louville*** *de la función* φ *en todo el eje real por la izquierda y derecha respectivamente.*

Ellas también pueden escribirse en la forma:

$$(I_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} t_+^{\alpha-1} \varphi(x-t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} \varphi(x-t) dt$$

donde $t_+^{\alpha-1} = \begin{cases} t^{\alpha-1}, & \text{si} \quad t > 0 \\ 0, & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$

En efecto,

$$(I_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt$$

Sea $x - t = \tau$, entonces

$$\begin{aligned} (I_+^\alpha \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} \tau^{\alpha-1} \varphi(x-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{0} 0 \varphi(x-\tau) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} \tau^{\alpha-1} \varphi(x-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{0} \tau_+^{\alpha-1} \varphi(x-\tau) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} \tau_+^{\alpha-1} \varphi(x-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_+^{\alpha-1} \varphi(x-\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} t_+^{\alpha-1} \varphi(x-t) dt \end{aligned}$$

Y de la misma manera

$$(I_-^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} t_-^{\alpha-1} \varphi(x-t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} \varphi(x+t) dt$$

donde $t_-^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t > 0 \\ |t|^{\alpha-1}, & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$

Ejemplos. Calculemos las integrales de orden α para las funciones exponencial y potencial.

1. Sea $\varphi(x) = e^{-x}$ $\quad$ *con* $\quad 0 < \alpha < 1$. Tenemos:

$$I_-^{\alpha} e^{-x} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-(x+t)} dt = \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt = e^{-x}.$$

2. Sea $\varphi(x) = x^{-\mu}$, con $\mu > 0$. Entonces:

$$I_-^{\alpha} x^{-\mu} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (x+t)^{-\mu} dt.$$

La sustitución $t = vx$ da

$$\begin{aligned} I_-^{\alpha} x^{-\mu} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} v^{\alpha-1} x^{\alpha-1} x^{-\mu} (1+v)^{-\mu} x dv \\ &= \frac{x^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} v^{\alpha-1} (1+v)^{-\mu} dv = \frac{x^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{B}(\alpha, \mu-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\alpha) x^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(\mu)} x^{\alpha-\mu}. \end{aligned}$$

Para determinar para qué tipo de funciones las integrales fraccionarias en el eje existen, demostramos el siguiente teorema.

Teorema 10. *Sea* $0 < \alpha < 1$, $\varphi \in Lp(\mathbb{R})$, $\quad 1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$, *entonces las integrales* $I_+^{\alpha}\varphi$ *y* $I_-^{\alpha}\varphi$ *existen.*

En el caso general la demostración se sale de los objetivos del presente trabajo (ver [11]). Presentamos la demostración para el caso particular cuando $\varphi \in L_{\infty}(\mathbb{R})$.

Demostración. Por definición tenemos

$$\begin{aligned} (I_+^{\alpha}\varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \varphi(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 t^{\alpha-1} \varphi(x-t) dt + \int_1^{\infty} t^{\alpha-1} \varphi(x-t) dt \right). \end{aligned}$$

Mostremos que

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} \varphi(x-t) dt \quad \text{converge.}$$

En el caso particular de que $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$, entonces por la desigualdad de Minkowsky (ver sección 1.2.10)

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^1 t^{\alpha-1}\varphi(x-t)dt \right\|_{L_\infty([0,1])} &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} \|\varphi(x-t)\|_{L_\infty([0,1])}\, dt \\ &\leq N \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \quad \text{con} \quad N = \|\varphi(x-t)\|_{L_\infty([0,1])}.\end{aligned}$$

y esta integral converge si $1-\alpha<1$, esto es $\alpha>0$. Por tanto p.c.t. $x \in [0,1]$,

$$\left\| \int_0^1 t^{\alpha-1}\varphi(x-t)dt \right\|_{L_\infty([0,1])} < \infty.$$

Ahora miremos que

$$\int_1^\infty t^{\alpha-1}\varphi(x-t)dt \quad \text{converge.}$$

Como por hipótesis $\varphi \in Lp(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \frac{1}{\alpha}$; entonces, para aplicar la desigualdad de Hölder (ver sección 1.2.9), es decir

$$\int_1^\infty t^{\alpha-1}\varphi(x-t)dt \leq \|\varphi(x-t)\|_{Lp([1,+\infty])} \left\|t^{\alpha-1}\right\|_{Lp'([1,+\infty])},$$

falta demostrar que $t^{\alpha-1} \in Lp'([1,\infty])$, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
Ahora,

$$\int_1^\infty |t^{\alpha-1}|^{p'}dt = \int_1^\infty \frac{dt}{t^{p'(1-\alpha)}},$$

y esta integral converge si $p'(1-\alpha)>1$ luego $1-\alpha>\frac{1}{p'}$, $p<\frac{1}{\alpha}$. Por tanto,

$$\int_1^\infty t^{\alpha-1}\varphi(x-t)dt$$

converge para $1 \leq p \leq \frac{1}{\alpha}$. En conclusión,

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}\varphi(x-t)dt \quad \text{converge.}$$

$\square$

2.5. Relación entre I_+^α e I_-^α en el eje real

La relación que existe entre los operadores $I_+^\alpha \varphi$ y $I_-^\alpha \varphi$, es similar a la que dimos para el segmento, solo que en este caso además del operador de reflexión recurrimos a los operadores de desplazamiento y dilatación.

Definición 15. *Sean $x \in \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Llamamos **Operador de Reflexión** en el eje y se denota "Q"a la operación que cumple:* $(Q\varphi)(x) := \varphi(-x)$.

Ejemplos. Apliquemos el operador de reflexión a las siguientes funciones:

1. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to [0, 3]$, tal que $\varphi(x) = x^3$. Entonces $Qx^3 = -x^3$

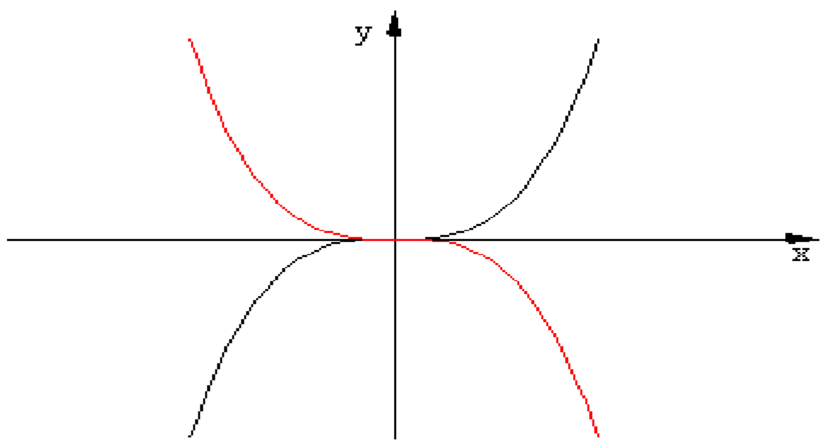

Figura 2.5: $Qx^3 = -x^3$

2. Sea

$$(\varphi)(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ 1, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ (x-3)^2, & \text{si} \quad x \geq 3. \end{cases} \tag{2.14}$$

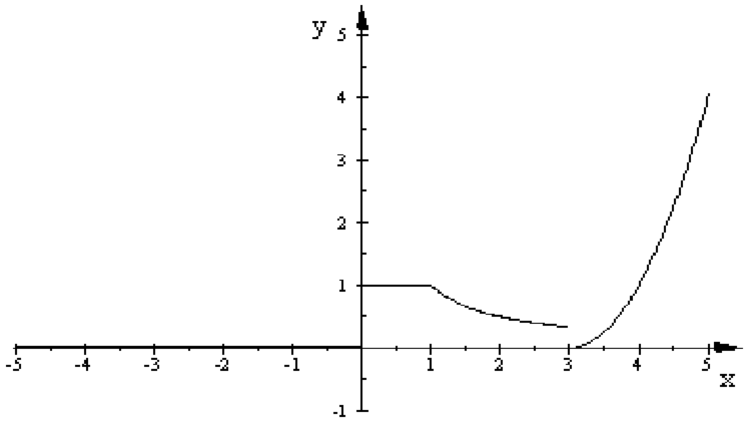

Figura 2.6: $(\varphi)(x)$

Aplicando a $\varphi(x)$ el operador de reflexión obtenemos:

$$(Q\varphi)(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x > 0 \\ 1, & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{x}, & \text{si} \quad -3 < x < -1 \\ (-x-3)^2, & \text{si} \quad x \geq -3 \end{cases}$$

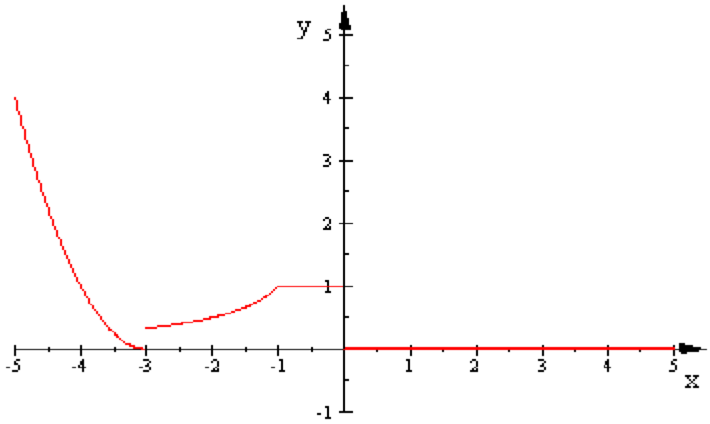

Figura 2.7: $(Q\varphi)(x)$

Definición 16. *Sean $x, h \in \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Llamamos* ***Operador de Desplazamiento*** *en el eje y se denota "τ_h" a la operación: $(\tau_h\varphi)(x) := \varphi(x-h)$.*

Ejemplos. Apliquemos el operador de desplazamiento a la función (2.14), para el caso $h = 1$. Se tiene

$$(\tau\varphi)(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 1 \\ 1, & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{si} \quad 2 < x < 4 \\ (x-4)^2, & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

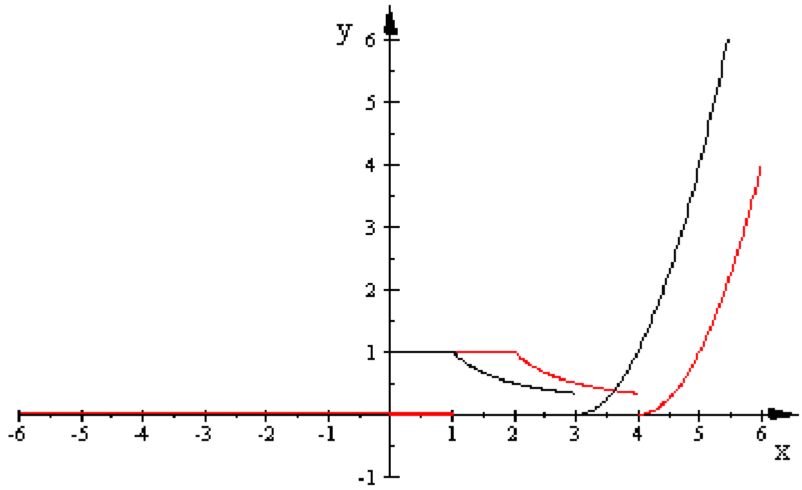

Figura 2.8: $(\tau\varphi)(x)$

Definición 17. *Sea* $x \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Llamamos* ***Operador de Dilatación*** *en el eje y se denota "*Π_ρ*" a la operación* $(\Pi_\rho\varphi)(x) := \varphi(\rho x)$.

Ejemplo: Nuevamente utilicemos la función (2.14) para aplicarle el operador de dilatación, para el caso $\rho = 1/2$. Se tiene

$$(\Pi_\rho\varphi)(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ 1, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{x}, & \text{si} \quad 2 < x < 6 \\ \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2, & \text{si} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

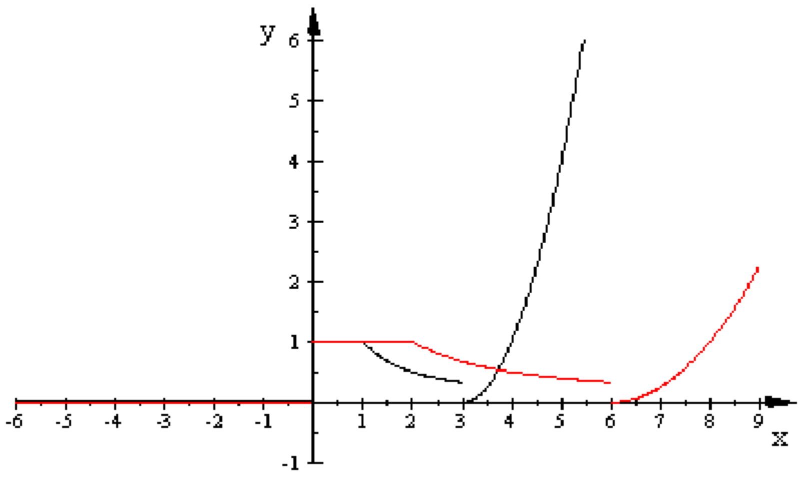

Figura 2.9: $(\Pi_\rho \varphi)(x)$

Teorema 11. *Sean* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, Q *el operador de reflexión en el eje. Entonces se cumple que:*

$$QI_+^\alpha \varphi = I_-^\alpha Q\varphi \qquad (i)$$

$$QI_-^\alpha \varphi = I_+^\alpha Q\varphi \qquad (ii).$$

Demostración. (i) Por definición,

$$(QI_+^\alpha \varphi)(x) = Q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{-x} \frac{\varphi(t)}{(-x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Sea $\tau = -t$. Entonces,

$$(QI_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty} \frac{\varphi(-\tau)}{(\tau-x)^{1-\alpha}}d\tau = (I_-^\alpha Q\varphi)(x).$$

Por tanto,

$$(QI_+^\alpha \varphi)(x) = (I_-^\alpha Q\varphi)(x),$$

Análogamente se demuestra (ii). □

Teorema 12. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, τ_h *el operador de desplazamiento. Entonces son válidas las relaciones:*

$$\tau_h I_+^\alpha \varphi = I_+^\alpha \tau_h \varphi \qquad (i)$$

$$\tau_h I_-^\alpha \varphi = I_-^\alpha \tau_h \varphi \qquad (ii)$$

Demostración. (i) Por definición,

$$(\tau_h I_+^\alpha \varphi)(x) = \tau_h \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x-h} \frac{\varphi(t)}{(x-h-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Sea $\quad y = t + h$. Entonces,

$$(\tau_h I_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(y-h)}{(x-h-y+h)^{1-\alpha}} dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(y-h)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy = (I_+^\alpha \tau_h \varphi)(x).$$

Análogamente se demuestra (ii). □

Teorema 13. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi \in L_1(\mathbb{R}), \quad \Pi_\rho$ *el operador de dilatación. Entonces son válidas las relaciones:*

$$\Pi_\rho I_+^\alpha \varphi = \rho^\alpha I_+^\alpha \Pi_\rho \varphi \qquad (i)$$

$$\Pi_\rho I_-^\alpha \varphi = \rho^\alpha I_-^\alpha \Pi_\rho \varphi \qquad (ii)$$

Demostración. (i) Por definición,

$$(\Pi_\rho I_+^\alpha \varphi)(x) = \Pi_\rho \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\rho x} \frac{\varphi(t)}{(\rho x - t)^{1-\alpha}} dt$$

Sea $\quad \tau = \dfrac{t}{\rho}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\Pi_\rho I_+^\alpha \varphi)(x) &= \frac{\rho}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(\rho\tau)}{(\rho x - \rho\tau)^{1-\alpha}} d\tau \\
&= \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(\rho\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = \rho^\alpha (I_+^\alpha \Pi_\rho \varphi)(x).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$(\Pi_\rho I_+^\alpha \varphi)(x) = \rho^\alpha (I_+^\alpha \Pi_\rho \varphi)(x).$$

□

Análogamente se demuestra (ii).

Este teorema es válido incluso en el semieje. Las demostraciones de los teoremas 12 y 13 que se enuncian a continuación requieren, para el caso general, de un aparato matemático más complejo (teoría de operadores, derivadas truncadas, entre otros, ver [11], teorema 6,2). Nosotros desarrollamos la demostración para funciones lo "suficientemente buenas"; precisamente suponemos que es posible aplicar el teorema de Fubinni.

Teorema 14. ***(Propiedad de Semigrupo)*** *Sean* $\varphi \in Lp(\mathbb{R})$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha + \beta < 1/p$. *Entonces:*

$$I_+^\alpha I_+^\beta \varphi = I_+^{\alpha+\beta}\varphi \qquad (i)$$

$$I_-^\alpha I_-^\beta \varphi = I_-^{\alpha+\beta}\varphi \qquad (ii)$$

Demostración. (i) Por definición,

$$(I_+^\alpha I_+^\beta \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}\left(\int_{-\infty}^{t} \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}}d\tau\right)dt$$

Para calcular la integral, intercambiamos el orden de integración, lo cual es válido por el teorema de Fubinni (ver sección 1.2.8)

$$(I_+^\alpha I_+^\beta \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{x}\left(\varphi(\tau)\int_{\tau}^{x} \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}}dt\right)d\tau.$$

Sea $s = \dfrac{t-\tau}{x-\tau}$. Entonces $ds = \dfrac{dt}{(x-\tau)}$ y $x - t = (x-\tau)(1-s)$.
Luego,

$$\begin{aligned}
(I_+^\alpha I_+^\beta \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int_{-\infty}^{x}\varphi(\tau)\left(\int_0^1 \frac{(x-\tau)ds}{[(x-\tau)(1-s)]^{1-\alpha}\,[s(x-\tau)]^{1-\beta}}\right)d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int_{-\infty}^{x}\varphi(\tau)\left(\int_0^1 \frac{(x-\tau)ds}{(x-\tau)^{2-(\alpha+\beta)}(1-s)^{1-\alpha}s^{1-\beta}}\right)d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int_{-\infty}^{x}\varphi(\tau)\left(\int_0^1 \frac{s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds}{(x-\tau)^{1-(\alpha+\beta)}}\right)d\tau\right].
\end{aligned}$$

Aplicando propiedades de las funciones Beta y Gamma, se obtiene,

$$(I_+^\alpha I_+^\beta \varphi)(x) = \frac{\mathcal{B}(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-(\alpha+\beta)}}d\tau = (I_+^{\alpha+\beta}\varphi)(x).$$

Análogamente se demuestra (ii). □

Teorema 15. ***(Fórmula de integración por partes)*** *Sean* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in Lp(\mathbb{R})$ *y* $\psi \in Lr(\mathbb{R})$ *con* $p > 1$, $r > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \alpha$. *Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(I_-^\alpha \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(I_+^\alpha \varphi)(x)dx.$$

Demostración. Se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(I_-^\alpha \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{\psi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \right) dx$$

Para calcular esta integral intercambiamos el orden de integración, lo cual es válido por el teorema de Fubinni.

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(I_-^\alpha \psi)(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} \frac{\varphi(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) I_+^\alpha \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Cambiando t por x

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(I_-^\alpha \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(I_+^\alpha \varphi)(x)dx.$$

□

Este teorema se cumple incluso en el semieje para $I_0^\alpha \varphi$.

Como ya definimos las integrales fraccionarias en todo el eje, entonces en la siguiente sección nos ocuparemos de la definición de las derivadas.

2.6. Derivadas de orden no entero según Louville en todo el eje real

Definición 18. *Sean* $0 < \alpha < 1$ *y* $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. *Si las integrales*

$$(D_+^\alpha \varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$(D_{-}^{\alpha}\varphi)(x) := \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^{\infty}\frac{\varphi(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

existen y son finitas, entonces ellas se llaman ***Derivadas de orden*** α ***según Louville*** *en todo el eje por izquierda y derecha respectivamente.*

Definición 19. *Sea* $\alpha \in (\mathbb{R}^{+} - \mathbb{Z})$, $\alpha \geq 1$, $n = [\alpha] + 1$. *Si las integrales*

$$(D_{+}^{\alpha}\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^{\infty} t^{n-\alpha-1}\varphi(x-t)dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$(D_{-}^{\alpha}\varphi)(x) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^{\infty} t^{n-\alpha-1}\varphi(x+t)dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

existen y son finitas, entonces, ella se llama ***Derivadas de orden*** α ***según Louville*** *en todo el eje. Si* α *es entero, entonces, por definición*

$$(D_{+}^{\alpha}\varphi)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}(\varphi(x)); \qquad \alpha = 1, 2, ...$$

$$(D_{-}^{\alpha}\varphi)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}(\varphi(x)); \qquad \alpha = 1, 2, ...$$

Definición 20. *Sea* $\alpha > 0$ $n = [\alpha] + 1$. *Si la integral*

$$(D_{0+}^{\alpha})\varphi(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt, \qquad x > 0$$

existe y es finita, entonces, ella se llaman ***Derivada de orden*** α ***según Louville*** *en el semieje positivo.*

Ejemplo. Calculemos la derivada fraccionaria de la función exponencial.
Sea $\varphi(x) = e^{-x}$,$0 < \alpha < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} D_{-}^{\alpha}e^{-x} &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} t^{-\alpha}e^{-(x+t)}dt \\ &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}(e^{-x})\int_0^{\infty} t^{-\alpha}e^{-t}dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}e^{-x}\Gamma(1-\alpha) = e^{-x} \end{aligned}$$

Por tanto $D_{-}^{\alpha}e^{-x} = e^{-x}$.

Capítulo 3

Derivadas de orden no entero según Marshout

Las derivadas de orden no entero según Louville pueden llevarse a otra forma la cual en el eje resulta ser en ciertos casos mas cómoda. Por el momento suponemos que la función $f(x)$ es lo "suficientemente buena". Por ejemplo que $f(x)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$, la integral de la derivada fraccionaria según Louville converge uniformemente en todo el eje real y que se cumplan las hipótesis de los teoremas de Fubinni y fundamental del cálculo, entre otros. Entonces,

$$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Sea $\tau = x - t$. Entonces

$$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{f(x-t)}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f'(x-t)}{t^\alpha} dt$$

Puesto que

$$t^{-\alpha} = \alpha \int_t^\infty \xi^{-1-\alpha} d\xi,$$

se tiene que:

$$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \alpha \left(\int_t^\infty \xi^{-1-\alpha} d\xi \right) f'(x-t) dt.$$

Calculamos la integral usando el teorema de Fubinni:

$$(D_+^\alpha f)(x) \quad = \quad \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \xi^{-1-\alpha} \left(\int_0^\xi f'(x-t)dt \right) d\xi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x)-f(x-\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi.$$

La sustitución $t = x - \xi$. nos da

$$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt.$$

Hemos obtenido entonces otra expresión para $(D_+^\alpha f)(x)$.

Definición 21. *Sea* $0 < \alpha < 1$. *Si las integrales*

$$(\mathbb{D}_+^\alpha f)(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \tag{3.1}$$

$$(\mathbb{D}_-^\alpha f)(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^\infty \frac{f(x)-f(t)}{(t-x)^{1+\alpha}} dt \tag{3.2}$$

existen y son finitas, entonces, ellas se llaman ***derivadas de orden*** α ***según Marshout*** *de la función* f *en todo el eje real, por la izquierda y derecha respectivamente.*

Aunque las construcciones (3.1) y (3.2) se obtuvieron a partir de D^α, ellas son (como se mostrará más adelante) cualitativamente distintas. El ejemplo siguiente ilustra este hecho.

Ejemplo. Calculemos las derivadas según Marshout $\mathbb{D}_+^\alpha \varphi$ y Louville $D_+^\alpha \varphi$ para la función constante. Sea $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_+^\alpha c &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{c-c}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{0}{(x-t)^{1+\alpha}} dt = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$D_+^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{c}{(x-t)^\alpha} dt.$$

Y esta integral diverge, luego $D_+^\alpha c$ no existe.

Las integrales (3.1) y (3.2) están definidas por ejemplo, para funciones que son localmente Hölder de orden $\lambda > \alpha$, (ver sección 1.2.9) y que sean acotadas en el infinito. En efecto

$$\begin{aligned}(\mathbb{D}_{+}^{\alpha}f)(x) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{x-\epsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{x-\epsilon}^{x}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt\end{aligned}$$

Ahora

$$\left|\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{x-\epsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt\right| \le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{x-\epsilon}\frac{|f(x)-f(t)|}{(x-t)^{1+\alpha}}dt \le 2M\int_{-\infty}^{x-\epsilon}\frac{dt}{(x-t)^{1+\alpha}}$$

y esta integral converge para $1+\alpha > 1,\ \alpha > 0$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{x-\epsilon}^{x}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\right|dt &\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{x-\epsilon}^{x}\frac{|f(x)-f(t)|}{(x-t)^{1+\alpha}}dt \\ &\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{x-\epsilon}^{x}\frac{C\,|(x-t)|^{\lambda}}{(x-t)^{1+\alpha}}dt \\ &= \frac{C\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{x-\epsilon}^{x}\frac{dt}{(x-t)^{1+\alpha-\lambda}}\end{aligned}$$

y esta integral converge para $1-(\lambda-\alpha) < 1$.

Es natural plantear la siguiente pregunta: puede afirmarse que $D^{\alpha}f \equiv \mathbb{D}^{\alpha}f$ no solamente para funciones “suficientemente buenas” sino también para todas las funciones para las cuales $D^{\alpha}f$ y $\mathbb{D}^{\alpha}f$ existen p.c.t. $x \in \mathbb{R}$ y si existe $D^{\alpha}f$ entonces existe $\mathbb{D}^{\alpha}f$ y viceversa.? A la segunda pregunta podemos dar una respuesta inmediatamente negativa ya que en el caso de $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{D}^{\alpha}f$ existe, sin embargo $D^{\alpha}f$ no existe. En general si $f(x)$ es localmente Hölder de orden $\lambda > \alpha$ y no decrece en el infinito, tendiendo por ejemplo a una constante o más aun creciendo no más rápido que $|x|^{\alpha-\epsilon}$ entonces $\mathbb{D}^{\alpha}f$ existe, lo que no podemos decir de $D^{\alpha}f$; para la existencia de la cual necesitamos un mejor comportamiento de f en el infinito. La respuesta a la primera pregunta es más complicada y la abordamos al final del trabajo.

Por otra parte la relación que existe entre las derivadas fraccionarias según Marshout (3.1) y (3.2) es análoga a la que existe entre las derivadas según Louville, teniendo en cuenta los operadores de Reflexión (Q), desplazamiento (τ_h) y dilatación (Π_ρ). Miremos los sigientes teoremas:

Teorema 16. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, Q *operador de reflexión. Entonces*

$$Q\mathbb{D}_+^\alpha \varphi = \mathbb{D}_-^\alpha Q\varphi \qquad (i)$$

$$Q\mathbb{D}_-^\alpha \varphi = \mathbb{D}_+^\alpha Q\varphi \qquad (ii)$$

Demostración. Probemos (i), (ii) se prueba de manera similar.
Tenemos:

$$(Q\mathbb{D}_+^\alpha \varphi)(x) = Q\left(\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(x)-\varphi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt\right) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{-x}\frac{\varphi(-x)-\varphi(t)}{(-x-t)^{1+\alpha}}dt.$$

Sea $\tau = -t$. Entonces:

$$(Q\mathbb{D}_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(-x)-\varphi(-\tau)}{(\tau-x)^{1+\alpha}}d\tau = (\mathbb{D}_-^\alpha Q\varphi)(x).$$

Por tanto,

$$(Q\mathbb{D}_+^\alpha \varphi)(x) = (\mathbb{D}_-^\alpha Q\varphi)(x).$$

□

Teorema 17. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, τ_h *operador de desplazamiento. Entonces:*

$$\tau_h\mathbb{D}_+^\alpha \varphi = \mathbb{D}_+^\alpha \tau_h\varphi \qquad (i)$$

$$\tau_h\mathbb{D}_-^\alpha \varphi = \mathbb{D}_-^\alpha \tau_h\varphi \qquad (ii)$$

Demostración. Probemos (i), (ii) se prueba de manera similar.
Tenemos:

$$(\tau_h\mathbb{D}_+^\alpha \varphi)(x) = \tau_h\left(\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(x)-\varphi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt\right) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{x-h}\frac{\varphi(x-h)-\varphi(t)}{(x-h-t)^{1+\alpha}}dt.$$

Sea $y = t + h$. Entonces

$$(\tau_h\mathbb{D}_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(x-h)-\varphi(y-h)}{(x-y)^{1+\alpha}}dy = (\mathbb{D}_+^\alpha \tau_h\varphi)(x).$$

Por tanto

$$(\tau_h \mathbb{D}_+^\alpha \varphi)(x) = (\mathbb{D}_+^\alpha \tau_h \varphi)(x).$$

$\square$

Teorema 18. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\quad \varphi \in L_1(\mathbb{R})$, $\quad \Pi_\rho$ *operador de dilatación. Entonces*

$$\Pi_\rho \mathbb{D}_+^\alpha \varphi = \rho^{-\alpha} \mathbb{D}_+^\alpha \Pi_\rho \varphi \qquad (i)$$

$$\Pi_\rho \mathbb{D}_-^\alpha \varphi = \rho^{-\alpha} \mathbb{D}_-^\alpha \Pi_\rho \varphi \qquad (ii)$$

Demostración. Demostremos (i), (ii) se demuestra análogamente

Tenemos:

$$(\Pi_\rho \mathbb{D}_+^\alpha \varphi)(x) = \Pi_\rho \left(\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(x) - \varphi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \right) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{\rho x} \frac{\varphi(\rho x) - \varphi(t)}{(\rho x - t)^{1+\alpha}} dt.$$

Sea $\quad \tau = \frac{t}{\rho}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\Pi_\rho \mathbb{D}_+^\alpha \varphi)(x) &= \frac{\rho}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(\rho x) - \varphi(\rho \tau)}{(\rho x - \rho \tau)^{1+\alpha}} d\tau \\
&= \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(\rho x) - \varphi(\rho \tau)}{(x - \tau)^{1+\alpha}} d\tau = \rho^{-\alpha} (\mathbb{D}_+^\alpha \Pi_\rho \varphi)(x).
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\Pi_\rho \mathbb{D}_+^\alpha \varphi = \rho^{-\alpha} \mathbb{D}_+^\alpha \Pi_\rho \varphi.$$

$\square$

Por otra parte, para definir la derivada fraccionaria según Marshout en el semieje, realizamos formalmente el siguiente procedimiento a partir de la derivada de orden no entero según Louville.

$$(D_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \qquad x > 0.$$

Sea $\tau = x - t$. Entonces,

$$(D_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \tau^{-\alpha} f(x - \tau) d\tau \qquad x > 0.$$

Sea

$$F(\tau, x) = \tau^{-\alpha} f(x-\tau), \qquad \varphi(x) = \int_0^x F(\tau, x) d\tau.$$

Según el teorema (2),

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dx} &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} F(\tau, x) d\tau - F(0, x) \frac{\partial}{\partial x} 0 + F(x, x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} F(\tau, x) d\tau + F(x, x) \\
&= \int_0^x \tau^{-\alpha} f'(x-\tau) d\tau + x^{-\alpha} f(x-x) = \frac{f(0)}{x^\alpha} + \int_0^x \tau^{-\alpha} f'(x-\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Luego,

$$(D_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(0)}{x^\alpha} + \int_0^x \tau^{-\alpha} f'(x-\tau) d\tau \right].$$

Como

$$\tau^{-\alpha} = \alpha \int_\tau^x \xi^{-1-\alpha} d\xi + \frac{1}{x^\alpha},$$

entonces

$$\begin{aligned}
(D_{0+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(0)}{x^\alpha} + \int_0^x f'(x-\tau) \left(\alpha \int_\tau^x \xi^{-1-\alpha} d\xi + \frac{1}{x^\alpha} \right) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(0)}{x^\alpha} + \int_0^x \frac{f'(x-\tau)}{x^\alpha} d\tau + \alpha \int_0^x f'(x-\tau) \left(\int_\tau^x \xi^{-1-\alpha} d\xi \right) d\tau \right].
\end{aligned}$$

Para calcular la integral intercabiamos el orden de integración lo cual se justifica por el teorema de Fubinni:

$$(D_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(0)}{x^\alpha} + \int_0^x \frac{f'(x-\tau)}{x^\alpha} d\tau + \alpha \int_0^x \xi^{-1-\alpha} \left(\int_0^\xi f'(x-\tau) d\tau \right) d\tau \right].$$

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\begin{aligned}
(D_{0+}^\alpha f)(x) &= \frac{f(0) + f(x) - f(0)}{x^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x) - f(x-\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi \\
&= \frac{f(x)}{x^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x) - f(x-\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi
\end{aligned}$$

La anterior fórmula nos sirve de punto de partida para la siguiente definición.

Definición 22. *Sea* $0 < \alpha < 1$. *Si la integral*

$$(\mathbb{D}_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{f(x)}{x^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt$$

*existe y es finita, entonces, ella se llama **derivada de orden** α **según Marshout** en el semieje positivo.*

En la siguiente sección presentamos ciertos aspectos técnicos auxiliares, necesarios para definir la derivada fraccionaria según Marshout en el segmento y así establecer la comparación con la derivada según Louville.

3.1. Integral en el sentido finito según Hadamard

Si comparamos las derivadas fraccionarias según Marshout en el eje

$$(\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} f)(x) := \frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x \mp t) - f(x)}{t^{1+\alpha}} dt,$$

con las integrales fraccionarias según Louville en el eje

$$(I_{\pm}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x \mp t)}{t^{1-\alpha}} dt \qquad \alpha > 0$$

Observamos que formalmente la derivada se obtiene de la integral cambiando α por $-\alpha$ y cabe anotar que la diferencia, presente en el numerador de la expresión subintegral garantiza en determinados casos, la convergencia de la integral.
Así, la derivada según Marshout está relacionada con aspectos de integrales divergentes tales como:

3.1.1. Propiedad de Hadamard

Definición 23. *Sea* $\varphi \in L_1([\epsilon, A])$ *y* $0 < \epsilon < t < A$. *Se dice que* φ *posee la propiedad de Hadamard en el punto* $t = 0$, *si existen constantes* a_k, b *y* $\lambda > 0$ *tales que:*

$$\int_{\epsilon}^{A} \varphi(t) dt = \sum_{k=1}^{N} a_k \epsilon^{-\lambda k} + b \ln \frac{1}{\epsilon} + J_0(\epsilon),$$

donde $\lim\limits_{\epsilon\to 0} J_0(\epsilon)$ *existe y es finito. Por definición,*

$$p.f. \int_0^A \varphi(t)dt := \lim_{\epsilon\to 0} J_0(\epsilon). \tag{3.3}$$

donde el límite (3.3) se llama parte finita en el sentido de Hadamard de la integral divergente

$$\int_0^A \varphi(t)dt.$$

Ejemplos. Consideremos una integral convergente y otra divergente.

1. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Verifiquemos si la función $f(x)$ posee la propiedad de Hadamard, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} &= \ln x|_\epsilon^1 \\ &= \ln(1) - \ln(\epsilon) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\end{aligned}$$

   siendo $a_k = 0,\ k = 1, 2, ...N,\ b = 1$ y $J_0(\epsilon) = 0$. Luego

$$p.f. \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0}(0) = 0$$

2. Sea $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Verifiquemos si la función $\varphi(x)$ posee la propiedad de Hadamard; tenemos:

$$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_\epsilon^1 = 2 - 2\epsilon^{\frac{1}{2}}$$

   donde $a_1 = -2,\ a_k = 0,\ k = 2, ..., N,\ b = 0$ y $J_0(\epsilon) = 2$. Luego

$$p.f. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0}(2) = 2$$

3.1.2. Diferencias finitas de orden superior y la derivada según Marshout de orden $\alpha > 1$

La definición de derivada fraccionaria según Marshout para $0 < \alpha < 1$ (ver def 21), podemos extenderlas al caso $\alpha \geq 1$. Uno de los mecanismos para dicha extensión es

$$\mathbb{D}_+^\alpha f(x) := \frac{d^n}{dx^n}\mathbb{D}_+^{\{\alpha\}} f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f^n(x) - f^n(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad con\ n = [\alpha].$$

Otra forma es pasando de la diferencia de orden $l = 1$, a la diferencia de orden $l > 1$. En este caso, necesitamos definir las diferencias finitas de orden superior. Precisamente, tiene lugar el lema siguiente.

Lema 3. *Sean* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^+$, *E el operador identidad, es decir,* $E(f(x)) = f(x)$, τ_h *el operador de desplazamiento (ver def 16). Entonces, es válida la fórmula:*

$$(\Delta_h^l f)(x) := (E - \tau_h)^l f(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k f(x - kh) \tag{3.4}$$

$\Delta_h^l f(x)$ *es la* ***diferencia finita de orden*** l *de la función* f, *con paso* h *y centro en el punto* x. *Aquí,*

$$(\Delta_h^l f)(x) := \Delta_h(\Delta^{l-1} f)(x)$$

y Δ_h^k *indica la composición del operador* Δ_h k *veces consigo mismo.*

Demostración. Usemos inducción respecto a l.
Para $l = 1$. Se tiene $(\Delta_h^1 f)(x) = f(x) - f(x - h)$
Para $l = 2$. Se tiene

$$\begin{aligned}
(\Delta_h^2 f)(x) &= f(x) - f(x-h) - f(x-h) + f(x-2h) \\
&= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h) = Ef(x) - 2\tau_h f(x) + \tau_{2h} f(x) \\
&= (E - 2\tau_h + \tau_{2h}) f(x) = (E - \tau_h)^2 f(x).
\end{aligned}$$

Aquí hemos utiizado la relación $\tau_{nh} f = \tau_h^n f$ la cual se demuestra fácilmente por inducción.
Para $l = 3$ se tiene:

$$\begin{aligned}
(\Delta_h^3 f)(x) &= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h) - f(x-h) + 2f(x-2h) - f(x-3h) \\
&= f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h) \\
&= Ef(x) - 3\tau_h f(x) + 3\tau_{2h} f(x) - \tau_{3h} f(x) \\
&= (E - 3\tau_h + 3\tau_{2h} - \tau_{3h}) f(x) = (E - \tau_h)^3 f(x)
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que la ecuación (3.4) se cumple para $l = n$, es decir

$$(\Delta_h^n f)(x) = (E - \tau_h)^n f = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x - kh)$$

y demostremos que la ecuación es válida para $l = n + 1$, esto es

$$(\Delta_h^{n+1} f)(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k f(x - kh).$$

Observemos que

$$(\Delta_h^{n+1} f)(x) = \Delta_h^1 (\Delta_h^n f(x)).$$

Por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
(\Delta_h^{n+1} f)(x) &= \Delta_h^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x - kh) \right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \Delta_h^1 (f(x - kh)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left[f(x - kh) - f(x - (k+1)h) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x - kh) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k f(x - (k+1)h) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x - kh) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k C_n^{k-1} f(x - kh) \\
&= (-1)^0 C_n^0 f(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k f(x - kh) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k C_n^{k-1} f(x - kh) \\
&= (-1)^0 C_n^0 f(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (C_n^k + C_n^{k-1}) f(x - kh) + (-1)^{n+1} C_n^n f(x + (n+1)h) \\
&= (-1)^0 C_n^0 f(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{n+1}^k f(x - kh) + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} f(x + (n+1)h).
\end{aligned}$$

Luego, por principio de inducción matemática, se tiene entonces que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\Delta_h^{n+1} f)(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_k^{n+1} f(x - kh).$$

$\square$

Ahora estudiemos la diferencia finita de la función potencial $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$ y $h = 1$. Tenemos:

$$\Delta_1^l |x|^\alpha = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k |x - k|^\alpha.$$

Evaluando la anterior igualdad para $x = 0$, tenemos

$$\Delta_1^l |0|^\alpha = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k |-k|^\alpha = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k |-k|^\alpha = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k k^\alpha .$$

La expresión

$$\sum_{k=0}^{l} (-1)^{k-1} C_l^k k^\alpha = -A_l(\alpha)$$

será útil más adelante.

Regresando a la derivada fraccionaria introducimos $\forall \alpha > 0$, la construcción:

$$\int_0^\infty \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt$$

La integral converge para $l > \alpha$ para funciones "suficientemente buenas".

Ahora, para $0 < \alpha < 1$, es válida la fórmula:

$$\int_0^\infty \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt = A_l(\alpha) \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Y tenemos que

$$(\mathbb{D}_+^\alpha f)(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

Luego por comparación formalmente decimos que

$$(\mathbb{D}_\pm^\alpha f)(x) := \frac{-1}{\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)} \int_0^\infty \frac{(\Delta_{\pm t}^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad 0 < \alpha < l$$

Sabemos que para $\alpha \in \mathbb{N}$, $\Gamma(-\alpha)$ no está definida, pero puede dársele sentido a $\Gamma(-\alpha)A_l(\alpha)$ a través de funciones especiales, como por ejemplo la función

$$\kappa(\alpha, l) := \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{(1-t)^{l-1}}{\ln(\frac{1}{t})^\alpha}$$

Es decir

$$\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha) = -\kappa(\alpha, l), \quad \alpha = 1, 2, ..., l-1$$

3.2. Funciones representables mediante integrales fraccionarias en el segmento [a,b]

En esta sección damos una descripción de las funciones que son integrables fraccionariamente según Louville en el segmento [a,b], siguiendo un procedimiento similar al realizado en el inicio de este capítulo, cuando definimos la derivada de orden no entero según Marshout en el eje para $f \in AC([a,b]),\ 0 < \alpha < 1$. En este caso, (ver Lema 9).

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right].$$

Si $f(x)$ es una función diferenciable,

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x (x-t)^{-\alpha}d[f(t)-f(x)]\right].$$

Haciendo $u = (x-t)^{-\alpha}, \quad dv = d[f(t)-f(x)]$ y aplicando integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{a+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + [(x-t)^{-\alpha}(f(t)-f(x))]\Big|_a^x - \alpha\int_a^x \frac{f(t)-f(x)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt\right\}\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \lim_{t\to x}\left(\frac{f(t)-f(x)}{(x-t)^{\alpha}}\right) - \frac{f(a)-f(x)}{(x-a)^{\alpha}} + \alpha\int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}} + \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{(x-t)^{\alpha}} + \alpha\int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt\right]\end{aligned}$$

Ahora, si suponemos que $f \in C'$ entonces $\lim_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{(x-t)^{\alpha}} = 0$, y podemos definir la derivada de Marshout en el segmento así:

Definición 24. *Sea $0<\alpha<1$ y f definida en $[a,b]$. Si las integrales*

$$(\mathbb{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) := \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt \tag{3.5}$$

$$(\mathbb{D}^{\alpha}_{b-}f)(x) := \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(b-x)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^b \frac{f(x)-f(t)}{(t-x)^{1+\alpha}}dt \tag{3.6}$$

existen y son finitas, entonces ellas se llaman ***derivadas de orden no entero según Marshout*** *en el segmento* $[a, b]$ *de la función* f *por izquierda y derecha respectivamente.*

A la definición anterior puede llegarse de otra forma redefiniendo la función f así:

$$f^*(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [a, b] \end{cases}$$

y aplicando a $f^*(x)$ la definición de derivada fraccionaria según Marshout en todo el eje (ver def 21):

$$\begin{aligned}
(\mathbb{D}_+^\alpha f^*)(x) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{f^*(x) - f^*(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt, \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_{-\infty}^{a} \frac{f(x)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt + \int_{a}^{x} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \right) \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left(f(x) \left[\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\alpha} - \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{\alpha(x-t)^\alpha} \right] + \int_{a}^{x} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \right) \\
&= \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt, \qquad a < x < b
\end{aligned}$$

Las derivadas según Marshout en el segmento $[a, b]$, además de estar definidas para funciones suaves, están definidas por ejemplo para $f \in H([a, b])$, (ver def 1.2.9).
Las integrales de las ecuaciones (3.5) y (3.6) las entedemos por lo general como condicionalmente convergentes. En correspondencia con esto introducimos la derivada fraccionaria truncada.

$$\mathbb{D}_{a+,\epsilon}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(x)}{(x-a)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \Psi_\epsilon(x). \tag{3.7}$$

donde

$$\Psi_\epsilon(x) := \int_{a}^{x-\epsilon} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt, \qquad \epsilon > 0. \tag{3.8}$$

Esta escritura significa que $a + \epsilon \leq x \leq b$.
Para introducir $\Psi_\epsilon(x)$ cuando $a \leq x \leq a + \epsilon$ se necesita redefinir la función $f(t)$ para $t < a$. Aquí son posibles dos casos.

1. Introducir $\Psi\epsilon(x)$ mediante (3.8) considerando que $f(x)$ se anula fuera del segmento $[a,b]$, entonces

$$\Psi_\epsilon(x) = f(x)\int_a^{x-\epsilon}(x-t)^{-1-\alpha}dt = \frac{f(x)}{\alpha}\left[\frac{1}{\epsilon^\alpha} - \frac{1}{(x-a)^\alpha}\right], \quad a \le x \le a+\epsilon \quad (3.9)$$

2. $\Psi_\epsilon(x) \equiv 0$ para $a \le x \le a+\epsilon$.

Así para funciones "no muy buenas", la derivada de orden no entero según Marshout se define como:

$$\mathbb{D}^\alpha_{a+}f(x) := \lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{D}^\alpha_{a+,\epsilon} f = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\epsilon\to 0}\Psi_\epsilon(x),$$

Después de haber definido las derivadas de orden no entero según Louville y Marshout observemos para qué tipo de funciones las dos derivadas coinciden. Ante todo verifiquemos que el operador de derivación fraccionaria es en verdad el inverso izquierdo del operador de integración fraccionaria en términos de los espacios Lp. Precisamente son válidos los siguientes teoremas (los cuales se encuentran por ejemplo en [11]).
El siguiente resultado es de carácter fundamental en el presente trabajo, ya que proporciona condiciones suficientes para la coincidencia de las construcciones de Louville y Marshout. Para su demostración necesitamos las siguientes definiciones y propiedades.

Definición 25. *Sea* $t \in \mathbb{R}$

1.

$$\mathcal{K}(t) = \frac{sen(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{t^\alpha_+ - (t-1)^\alpha_+}{t}\right) \quad (3.10)$$

Aquí, $t^\alpha_+ = \begin{cases} t^\alpha, & si \quad t>0 \\ 0, & si \quad t<0 \end{cases}$

2.

$$k(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} t^{\alpha-1}, & si \quad 0<t<1 \\ t^{\alpha-1} - (t-1)^{\alpha-1}, & si \quad t>1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Propiedades.

1.

$$\int_0^t k(s)ds = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} t\mathcal{K}(t), \quad t > 0 \tag{3.12}$$

Demostración. Tenemos que

$$\mathcal{K}(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}, & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ \frac{t^{\alpha}-(t-1)^{\alpha}}{t}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}, & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} \tag{3.13}$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} t\,\mathcal{K}(t) &= \begin{cases} \frac{t^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}, & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ \frac{t^{\alpha}-(t-1)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}, & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \frac{t^{\alpha}}{\alpha}, & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ \frac{t^{\alpha}-(t-1)^{\alpha}}{\alpha}, & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \int_0^t s^{\alpha-1}ds, & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ \int_0^t [s^{\alpha-1} - (s-1)^{\alpha-1}ds, & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} \\ &= \int_0^t k(s)ds, \quad t > 0. \end{aligned}$$

□

2.

$$\int_0^\infty \mathcal{K}(t)dt = 1 \tag{3.14}$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t) &= \frac{sen(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{t_+^{\alpha} - (t-1)_+^{\alpha}}{t}\right) \\ &= \frac{sen(\alpha\pi)}{\pi} \begin{cases} t^{\alpha}, & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ \frac{t^{\alpha}-(t-1)^{\alpha}}{t}, & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{\pi}{sen(\alpha\pi)} \int_0^\infty \mathcal{K}(t)dt = \int_0^1 t^{\alpha-1}dt + \int_1^\infty \frac{t^{\alpha} - (t-1)^{\alpha}}{t}dt \tag{3.15}$$

Calculemos

$$\int_1^\infty \frac{t^\alpha - (t-1)^\alpha}{t} dt$$

Como

$$\alpha \int_0^1 (t-x)^{\alpha-1} dx = -(t-x)^\alpha \Big|_{x=0}^{x=1} = t^\alpha - (t-1)^\alpha$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{t^\alpha - (t-1)^\alpha}{t} dt &= \alpha \int_1^\infty \frac{1}{t} \left(\int_0^1 (t-x)^{\alpha-1} dx \right) dt \\
&= \alpha \int_0^1 \left(\int_1^\infty t^{-1}(t-x)^{\alpha-1} dt \right) dx
\end{aligned}$$

Sea $t = \frac{x}{u}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{t^\alpha - (t-1)^\alpha}{t} dt &= \alpha \int_0^1 \left(\int_x^0 (ux^{-1})(xu^{-1} - x)^{\alpha-1}(-xu^{-2}) du \right) dx \\
&= \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} \left(\int_0^x u^{-1}(u^{-1})^{\alpha-1}(1-u)^{\alpha-1} du \right) dx \\
&= \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} \left(\int_0^x u^{-\alpha}(1-u)^{\alpha-1} du \right) dx \\
&= \alpha \int_0^1 \left(\int_u^1 x^{\alpha-1} dx \right) u^{-\alpha}(1-u)^{\alpha-1} du \\
&= \int_0^1 \left(x^\alpha \big|_{x=u}^{x=1} \right) u^{-\alpha}(1-u)^{\alpha-1} du \\
&= \int_0^1 (1-u^\alpha) u^{-\alpha}(1-u)^{\alpha-1} du \\
&= \int_0^1 (u^{-\alpha} - 1)(1-u)^{\alpha-1} du \\
&= \int_0^1 u^{(1-\alpha)-1}(1-u)^{\alpha-1} du - \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} du \\
&= \beta(1-\alpha, \alpha) + \frac{(1-u)^\alpha}{\alpha} \Bigg|_{u=0}^{u=1} = \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \\
&= \frac{\pi}{sen(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

Reemplazando

$$\int_1^\infty \frac{t_+^\alpha - (t-1)_+^\alpha}{t} dt \quad \text{en (3.15) tenemos}$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{sen(\alpha\pi)}\int_0^\infty \mathcal{K}(t)dt &= \left.\frac{t^\alpha}{\alpha}\right|_{t=0}^{t=1} + \frac{\pi}{sen(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\pi}{sen(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha}\\ &= \frac{\pi}{sen(\alpha\pi)}\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_0^\infty \mathcal{K}(t)dt = 1$$

$\square$

Teorema 19. *Sea* $0 < \alpha < 1$, $f = I^\alpha_{a+}\varphi$, $\varphi \in Lp([a,b])$, $-\infty < a < b \leq +\infty$ *y* $1 \leq p < +\infty$. *Entonces*

$$\mathbb{D}^\alpha_{a+}f = \lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{D}^\alpha_{a+,\epsilon}f = \varphi.$$

Demostración. Como $f = I^\alpha_{a+}\varphi$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds$$

Haciendo la sustitución $y = x - s$, tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} y^{\alpha-1}\varphi(x-y)dy \quad \text{y}$$

$$f(x-t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{x-a} (y-t)^{\alpha-1}\varphi(x-y)dy.$$

Utilizando (3.11) tenemos

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1} = \begin{cases} t^{\alpha-1}k(\frac{y}{t}), & \text{si} \quad y < t\\ t^{\alpha-1}k(\frac{y}{t}) + \frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si} \quad y > t\end{cases}$$

Ahora

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\int_0^t t^{\alpha-1}k(\frac{y}{t})\varphi(x-y)dy + \int_t^{x-a}\left(t^{\alpha-1}k(\frac{y}{t}) + \frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\varphi(x-y)dy\right]\\ &= t^{\alpha-1}\left[\int_0^{x-a} k(\frac{y}{t})\varphi(x-y)dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{x-a}(y-t)^{\alpha-1}\varphi(x-y)dy\right]\\ &= t^{\alpha-1}\int_0^{x-a} k(\frac{y}{t})\varphi(x-y)dy + f(x-t)\end{aligned}$$

Luego

$$f(x) - f(x-t) = t^{\alpha-1}\int_0^{x-a} k\left(\frac{y}{t}\right)\varphi(x-y)dy$$

Sea $x-t=\tau$. Entonces

$$f(x)-f(\tau)=(x-\tau)^{\alpha-1}\int_0^{x-a}k\left(\frac{y}{x-\tau}\right)\varphi(x-y)dy$$

Cambiando τ por t

$$f(x)-f(t)=(x-t)^{\alpha-1}\int_0^{x-a}k\left(\frac{y}{x-t}\right)\varphi(x-y)dy$$

Ahora supongamos que $a+\epsilon\leq x\leq b$, en este caso

$$\Psi_\epsilon(x)=\int_a^{x-\epsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Psi_\epsilon(x) &= \int_a^{x-\epsilon}(x-t)^{-2}\left[\int_0^{x-a}k\left(\frac{y}{x-t}\right)\varphi(x-y)dy\right]\\ &= \int_a^{x-\epsilon}\left(\int_0^{x-a}k\left(\frac{y}{x-t}\right)\varphi(x-y)dy\right)\frac{dt}{(x-t)^2}\\ &= \int_0^{x-a}\int_a^{x-\epsilon}k\left(\frac{y}{x-t}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x-t}\right)\frac{\varphi((x-y))}{y}dy\end{aligned}$$

Sea $\frac{y}{x-t}=s$. Entonces

$$\Psi_\epsilon(x)=\int_0^{x-a}\left(\int_{\frac{y}{x-a}}^{\frac{y}{\epsilon}}k(s)ds\right)\frac{\varphi(x-y)}{y}dy$$

Por (3.12), tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\frac{y}{x-a}}^{\frac{y}{\epsilon}}k(s)ds &= \int_{\frac{y}{x-a}}^{0}k(s)ds+\int_0^{\frac{y}{\epsilon}}k(s)ds=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\left[-\frac{y}{x-a}\mathcal{K}\left(\frac{y}{x-a}\right)+\frac{y}{\epsilon}\mathcal{K}\left(\frac{y}{\epsilon}\right)\right]\\ &= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\left[\frac{y}{\epsilon}\mathcal{K}\left(\frac{y}{\epsilon}\right)-\left(\frac{y}{x-a}\right)\mathcal{K}\left(\frac{y}{x-a}\right)\right]\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Psi_\epsilon(x)=\int_0^{x-a}\varphi(x-y)\left[\frac{1}{\epsilon}\mathcal{K}\left(\frac{y}{\epsilon}\right)-\frac{1}{x-a}\mathcal{K}\left(\frac{y}{x-a}\right)\right]dy$$

Por (3.13)

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Psi_\epsilon(x)=\int_0^{x-a}\frac{1}{\epsilon}\mathcal{K}\left(\frac{y}{\epsilon}\right)\varphi(x-y)dy-\int_0^{x-a}\frac{y^{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}\varphi(x-y)dy\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}$$

Sea $u = \frac{y}{\epsilon}$. Entonces

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Psi_\epsilon(x) = \int_0^{\frac{x-a}{\epsilon}} \mathcal{K}(u)\varphi(x-\epsilon u)du - \frac{1}{(x-a)^\alpha\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} y^{\alpha-1}\varphi(x-y)dy$$

Como

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} y^{\alpha-1}\varphi(x-y)dy$$

Y cambiando u por y

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Psi_\epsilon(x) = \int_0^{\frac{x-a}{\epsilon}} \mathcal{K}(y)\varphi(x-\epsilon y)dy - \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\Gamma(1-\alpha)}$$

Entonces

$$\int_0^{\frac{x-a}{\epsilon}} \mathcal{K}(y)\varphi(x-\epsilon y)dy = \Psi_\epsilon(x)\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\Gamma(1-\alpha)} = \mathbb{D}^\alpha_{a+,\epsilon}f$$

Por tanto

$$(\mathbb{D}^\alpha_{a+,\epsilon}f)(x) = \int_0^{\frac{x-a}{\epsilon}} \mathcal{K}(y)\varphi(x-\epsilon y)dy$$

Ahora por (3.14)

$$(\mathbb{D}^\alpha_{a+,\epsilon}f)(x) - \varphi(x) = \int_0^{\frac{x-a}{\epsilon}} \mathcal{K}(y)\varphi(x-\epsilon y)dy - \varphi(x)\int_0^\infty \mathcal{K}(y)dy, \quad x \in [a+\epsilon, b]$$

Para los valores de $a \leq x \leq a+\epsilon$ de acuerdo con (3.9)

$$\begin{aligned}(\mathbb{D}^\alpha_{a+,\epsilon}f)(x) &= \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{f(x)}{\alpha}\left[\frac{1}{\epsilon^\alpha} - \frac{1}{(x-a)^\alpha}\right] \\ &= \frac{f(x)}{\epsilon^\alpha\Gamma(1-\alpha)}\end{aligned}$$

Ahora

$$(\mathbb{D}^\alpha_{a+,\epsilon}f)(x) - \varphi(x) = \frac{1}{\epsilon^\alpha\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt$$

Sea $\tau = x - t + a$. Entonces

$$(\mathbb{D}^\alpha_{a+,\epsilon}f)(x) - \varphi(x) = \frac{sin(\alpha\pi)}{\pi\epsilon^\alpha}\int_a^x (\tau-a)^{\alpha-1}\varphi(a+x-\tau)d\tau$$

Cambiando τ por t

$$(\mathbb{D}^\alpha_{a+,\epsilon}f)(x) - \varphi(x) = \frac{sin(\alpha\pi)}{\pi\epsilon^\alpha}\int_a^x \frac{\varphi(x-t+a)}{(t-a)^{1-\alpha}}dt$$

Utilizando la desigualdad Generalizada de Minkowsky

$$\|\mathbb{D}^{\alpha}_{a+,\epsilon}f-\varphi\|_{L_p([a,b])}\leq\int_0^{\infty}\mathcal{K}(y)\|\varphi(x-\epsilon y)-\varphi(x)\|_{L_p([a,b])}+\frac{1}{\epsilon^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)}\|f\|_{L_p([a,a+\epsilon])}.$$

Aquí el primer término de la parte derecha tiende a 0 debido al teorema (3) y al lema (1). Y para el segundo término tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\|f\|_{L_p([a,a+\epsilon])}}{\epsilon^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} &\leq \frac{sen(\alpha\pi)}{\pi\epsilon^{\alpha}}\int_a^{a+\epsilon}\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}\left(\int_t^{a+\epsilon}|\varphi(x-t+a)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq a\|\varphi\|_{L_p([a,a+\epsilon])}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

□

Consecuencia. Si $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi,\ \varphi\in L_1([a,b])$, entonces,

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x)\equiv(\mathbb{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)=\varphi(x)$$

es decir, la derivada según Louville y Marshout coinciden p.c.t. $x\in\mathbb{R}$.

Demostración. En efecto, por el teorema (8)

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x)=\varphi(x).$$

Y por el teorema (19)

$$(\mathbb{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)=\varphi(x).$$

□

Observación 7. *De la misma manera se obtiene el teorema (19) y la consecuenia para la* $\mathbb{D}^{\alpha}_{b-}f(x)$

Ahora como la continuidad absoluta de $f(x)$ es suficiente para que $f\in I^{\alpha}(L_1)$. (ver consecuencia Lema 2), entonces se tiene que las derivadas según Louville y Marshout coinciden c.t.p. para funciones absolutamente continuas. Retomando la primera pregunta formulada en la página 35, en conclusión podemos observar que la diferencia entre $D^{\alpha}f$ y $\mathbb{D}^{\alpha}f$ está intimamente ligada con la pregunta de la inversión de los operadores integrables, es decir qué variante es más natural entre

$$\mathbb{D}^\alpha_\pm I^\alpha_\pm \varphi \equiv \varphi \text{ y } D^\alpha_\pm I^\alpha_\pm \varphi \equiv \varphi?$$

Si $\varphi \in Lp$ entonces la primera variante funcionaría $\forall\ p$ tal que $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$. En cambio para la segunda solo para $p = 1$. De esta manera las derivadas fraccionarias según Marshout permiten mayor libertad para f en el infinito, es decir en este sentido son más naturales en el eje que las derivadas según Louville.
Las diferencias discutidas para $(D^\alpha_\pm f)$ y $\mathbb{D}^\alpha_\pm f$, que están relacionadas para el comportamiento en el infinito, no existen en el caso del segmento [a,b].

Ejemplos.

1. Miremos una función para la cual las derivadas según Louville y Marshout coinciden. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in [a,b], \quad a > 0 \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [a,b] \end{cases}$$

Calculemos la derivada según Louville de orden $\alpha \in (0,1)$.

$$\begin{aligned} (D^\alpha_+ f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t}{(x-t)^\alpha} dt \end{aligned}$$

Sea $\tau = \frac{x-t}{x}$. Entonces

$$\begin{aligned} (D^\alpha_+ f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 (\tau x)^{-\alpha} x(1-\tau) x d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} x^{2-\alpha} \int_0^1 \tau^{-\alpha}(1-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} x^{2-\alpha} \beta(1-\alpha, 2) \\ &= \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \end{aligned}$$

Para la derivada según Marshout, tenemos:

$$(\mathbb{D}^\alpha_+ f)(x) = \frac{x}{\Gamma(1-\alpha) x^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{x+t}{(x-t)^{1+\alpha}} dt$$

Sea $\tau = \frac{x-t}{x}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{D}^{\alpha}_{+}f)(x) &= \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (\tau x)^{-\alpha} x d\tau \\
&= \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} x^{1-\alpha}\int_0^1 \tau^{-\alpha} d\tau \\
&= \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}
\end{aligned}
$$

2. Miremos una función para la cual las derivadas según Louville y Marshout no coinciden. Sea $f(x) = x^{\alpha-1},\ 0 < \alpha < 1$. Calculemos la derivada según Louville:

$$D^{\alpha}_{-}x^{\alpha-1} = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} t^{-\alpha}(x+t)^{\alpha-1}dt.$$

Sea $t = vx$. Entonces,

$$D^{\alpha}_{-}x^{\alpha-1} = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} (vx)^{-\alpha}(x+vx)^{\alpha-1}xdv = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} v^{-\alpha}(1+v)^{\alpha-1}dv$$

Pero ésta integral diverge. Luego $D^{\alpha}_{-}x^{\alpha-1}$ no existe, para $0 < \alpha < 1$.

Para la derivada según Marshout tenemos:

$$\mathbb{D}^{\alpha}_{-}x^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} - (x+t)^{\alpha-1}}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Sea $t = vx,\ v > 0$. Entonces,

$$\mathbb{D}^{\alpha}_{-}x^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\left[\frac{x^{\alpha-1} - (x+vx)^{\alpha-1}}{(vx)^{1+\alpha}}\right]xdv = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-1}\int_0^{\infty}\frac{1-(1+v)^{\alpha-1}}{v^{1+\alpha}}dv.$$

Probemos la convergencia de:

$$\int_0^{\infty}\frac{1-(1+v)^{\alpha-1}}{v^{1+\alpha}}dv = \int_0^{1}\frac{1-(1+v)^{\alpha-1}}{v^{1+\alpha}}dv + \int_1^{\infty}\frac{1-(1+v)^{\alpha-1}}{v^{1+\alpha}}dv.$$

Consideremos

$$I_1 = \int_0^{1}\frac{1-(1+v)^{\alpha-1}}{v^{1+\alpha}}dv.$$

Sea la función:

$$\varphi(v) = 1 - (1+v)^{\alpha-1} - (1-\alpha)v,\ \ v \geq 0.$$

Con ayuda del criterio de la segunda derivada acotaremos esta función. Puesto que

$$\varphi'(v) = -(\alpha-1)(1+v)^{\alpha-2} - (1-\alpha).$$

$\varphi'(v) = 0$, cuando $v = 0$.

Ahora calculemos la segunda derivada de $\varphi(v)$

$$\varphi''(v) = (\alpha-2)(1-\alpha)(1+v)^{\alpha-3}.$$

Evaluando en el punto crítico tenemos:

$$\varphi''(0) = (\alpha-2)(1-\alpha).$$

Como $0 < \alpha < 1$, entonces

$$(\alpha-2)(1-\alpha) < 0$$

Luego,

$$\varphi''(0) < 0.$$

Por tanto $\varphi(0) = 0$ es un máximo para la funciòn $\varphi(v)$, por tanto $\varphi(v) \leq 0, \ \ \forall v > 0$. Así,

$$1 - (1+v)^{\alpha-1} - (1-\alpha)v \leq 0,$$

es decir,

$$1 - (1+v)^{\alpha-1} \leq (1-\alpha)v,$$

de donde

$$\frac{1-(1+v)^{\alpha-1}}{v^{\alpha+1}} \leq \frac{(1-\alpha)v}{v^{\alpha+1}}, \ \ v > 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{1-(1+v)^{\alpha-1}}{v^{1+\alpha}}dv \leq \int_0^1 \frac{(1-\alpha)v}{v^{1+\alpha}}dv = (1-\alpha)\int_0^1 v^{-\alpha}dv.$$

Es decir,

$$\int_0^1 \frac{1-(1+v)^{\alpha-1}}{v^{1+\alpha}}dv$$

converge.

Ahora consideremos la integral:

$$\int_1^\infty \frac{1-(1+v)^{\alpha-1}}{v^{1+\alpha}}dv.$$

Analicemos su convergencia

Puesto que

$$\left|1 - \frac{1}{(1+v)^{1-\alpha}}\right| \;\leq\; |1| + \left|\frac{1}{(1+v)^{1-\alpha}}\right| \leq 1 + 1 = 2,$$

se tiene que

$$\frac{\left|1 - \frac{1}{(1+v)^{1-\alpha}}\right|}{v^{1+\alpha}} \leq \frac{2}{v^{1+\alpha}}.$$

Luego,

$$\int_1^\infty \left|\frac{1-(1+v)^{\alpha-1}}{v^{1+\alpha}}\right| dv \;\leq\; \int_1^\infty \frac{2}{v^{1+\alpha}} dv$$

Y ésta integral converge para $\alpha > 0$. Por lo tanto

$$\int_1^\infty \frac{1-(1+v)^{\alpha-1}}{v^{1+\alpha}} dv$$

converge absolutamente, para $\alpha > 0$. Luego $\mathbb{D}_{-}^{\alpha} x^{\alpha-1}$ existe.

En conclusión las derivadas según Louville y Marshout para la función $x^{\alpha-1}$ son diferentes.

Bibliografía

[1] APOSTOL, T. *Análisis Matemático*. Editorial Reverté, Colombia S.A. 1998.

[2] APOSTOL, T. *Cálculus*. Volumen I. Editorial Reverté, Colombia S.A. 1998.

[3] BURENKOV, V.I. *Espacios Funcionales. Desigualdades Integrales Fundamentales, relacionadas con los Espacios Lp*. Editorial U.D.N. Moscú, 1989, 94 p.p.

[4] BURENKOV, V.I. *Espacios Funcionales. Espacios Lp*. Editorial U.D.N. Moscú, 1987.

[5] DEMIDOVICH, V.P. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Naunka, Moscú,1990.

[6] ENRÍQUEZ, Francisco. *Caracterización de Espacios con orden no entero de diferenciación, en términos de Prolongaciones Armónicas.*Tesis de maestría. Universidad de Rusia de la Amistad de los Pueblos. Moscú,1992.

[7] KOLMOGOROV, A.N. FOMIN,S.V. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Editorial Nauka. Moscú, 1989.

[6] KUDRIAVTSEV, L.D.*Curso de Análisis Matemático*. Tomos I y II. Editorial Mir, Moscú,1983.

[9] NATANSON, I.P. *Teoría de las Funciones de Variable Real*. Editorial Nauka, Moscú, 1960.

[10] RUDIN, W. *Principios de Análisis Matemático*. 3^a Edición. Editorial McGraw. Hill, México,1980.

[11] SAMKO, S,G, KILVAS, A.A. MARICHEV, O.I. *Integrales y Derivadas de Orden Fraccionario y Algunas Aplicaciones*. Editorial Nauka y técnica, Minsk, 1987.

[12] Materiales del proyecto *Caracterización de los espacios de Lipschitz con ayuda de derivadas de orden no entero de la integral de Poisson* (inscrito en el sistema de investigaciones de la Vicerrectoría de Investigación de Unicauca, con código 1402).