LAS CONCEPCIONES DE NÚMERO REAL Y CONTINUIDAD EN TEXTOS MATEMÁTICOS ESCOLARES

DOLLY MARITZA COLLAZOS FERNÁNDEZ

MARTHA ALEXANDRA DÍAZ ORTIZ

MARIBEL MENESES MENESES

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

POPAYÁN

2007

LAS CONCEPCIONES DE NÚMERO REAL Y CONTINUIDAD EN TEXTOS MATEMÁTICOS ESCOLARES

DOLLY MARITZA COLLAZOS FERNÁNDEZ
MARTHA ALEXANDRA DÍAZ ORTIZ
MARIBEL MENESES MENESES

Seminario de Investigación presentado como requisito para optar al titulo de Licenciado en Educación, Especialidad Matemáticas

DIRECTORA:
GABRIELA INES ARBELÁEZ ROJAS

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2007

Nota de Aceptación

____

____

____

Directora:___________________________________

Gabriela Inés Arbeláez Rojas

Jurado:____________________________________

Magíster Ángel Hernán Zúñiga Solarte

Jurado:____________________________________

Especialista Mauricio Macías

Fecha de Sustentación: Popayán, 20 de Junio de 2007

El Señor da la sabiduría, y de su boca
viene el conocimiento y la inteligencia.
Por eso dedicamos este trabajo a Dios
por ser nuestra ayuda,
y nuestra más grande fortaleza.

A nuestros padres y familiares, por el apoyo
incondicional dado a lo largo de la carrera,
pues por su apoyo, fue posible hacer realidad
este sueño y culminar esta etapa de
nuestras vidas con éxito.

AGRADECIMIENTOS

A la profesora Gabriela Inés Arbeláez Rojas, por su valiosa colaboración y exigencia, en el desarrollo de este seminario de investigación.

Al Magíster Ángel Hernán Zúñiga Solarte y al Especialista Mauricio Macías, miembros del comité de evaluación, por sus aportes y orientaciones.

Al Grupo Educación Matemática, Línea Historia de las matemáticas, de la Universidad del Cauca y al Grupo de Historia de las Matemáticas, Universidad del Valle, por sus sugerencias y contribuciones a lo largo del proyecto.

A nuestros padres, familiares y amigos por su apoyo permanente y constante motivación durante el transcurso de nuestra carrera.

A la Universidad del Cauca y a todos los profesores del departamento de Matemáticas, quienes hicieron realidad nuestro sueño.

CONTENIDO

1. PRESENTACIÓN

Para alcanzar el objetivo de este seminario de grado; vamos a estudiar y caracterizar las nociones de número real y continuidad en textos matemáticos escolares; y nos vemos en la necesidad de aproximarnos a ciertos elementos conceptuales sobre $\mathbb{R}$ que vamos a exponer a continuación.

Solo hasta finales del siglo XIX, se podría afirmar que se instituyó de manera rigurosa el concepto de número real. En 1872 varios matemáticos, entre ellos, Richard Dedekind, George Cantor, Karl Weierstrass, lograron capturar la "esencia" de la continuidad de la recta construyendo los números reales a partir de los números racionales. Desde el punto de vista aritmético estos números no eran suficientes para estudiar los fenómenos de la recta, pues había puntos a los que no les correspondía una coordenada racional. Surge entonces la necesidad de crear nuevos números, los irracionales, que serían los encargados de completar ese dominio geométrico[1], y de esa manera establecer el conocido isomorfismo entre la recta y el conjunto de números reales.

El problema acerca del tipo de realidad de las magnitudes continuas planteó en la antigua Grecia ya serios interrogantes sobre el problema de la medida. Es decir, dadas dos magnitudes continuas, ¿sería siempre posible encontrar una medida común a ambas?, lo cual no era sino otra forma de preguntarse por la relación entre lo continuo y lo discreto. El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables[2], por parte de los pitagóricos, desembocó en el hecho de

---

[1] Dedekind en su artículo: *continuidad y números irracionales* (1872) expresa lo siguiente: "…La comparación del dominio $\mathbb{R}$ de números racionales con una línea recta ha conducido al reconocimiento de la existencia de huecos, de un cierto estado incompleto o de discontinuidad del primero, mientras que nosotros consideramos a la línea recta completa, sin huecos, o sea, continua".

[2] Si dos magnitudes tienen unidad de medida común, son conmensurables. En otras palabras, sean a y b dos magnitudes de la misma especie, se dice que pueden medirse ambas mediante una medida común, si existe una unidad c tal que: $a = rc$ y $b = sc$ donde $r, s \in \mathbb{Z}$. De lo contrario, se dice que estas dos magnitudes son inconmensurables, es decir, su razón es un irracional.

que en aquella cultura se abriría un abismo infranqueable entre estas dos categorías. También Zenón de Elea en cuatro de sus más famosas paradojas[3], puso en evidencia los problemas inherentes a las nociones de continuo espacio-temporales, que lo llevarían a negar la realidad del movimiento. No obstante la teoría de proporciones de Eudoxo, expuesta en el libro V de los **ELEMENTOS** de Euclides, logró darle una salida al problema de la medida; pero al costo de seguir manteniendo la separación insalvable entre lo continuo y lo discreto.[4]

Aunque a partir de este período la noción de continuidad se fue transformando y desarrollando al lado del concepto de número, en el siglo XIX se pudo finalmente cerrar esa brecha. Es decir se logró romper la separación entre teoría de magnitudes geométricas y aritméticas tal como fue concebida por los matemáticos y filósofos griegos.

Lo que se pretendía en este momento histórico (segunda mitad del siglo XIX) era dotar al análisis matemático de una base rigurosa, despojando sus conceptos de cualquier referente geométrico o físico. Para ello, matemáticos como los anteriormente mencionados, Cantor, Dedekind, Weierstrass se dieron a la tarea de construir los números reales sobre la base del conjunto de los números racionales, puesto que la aritmética era la única disciplina cuyos fundamentos se encontraban firmemente establecidos[5]. Para alcanzar tal propósito, Dedekind parte del concepto de cortadura sobre los números racionales, y Cantor del concepto de sucesión fundamental. Aunque

---

[3] Una de las paradojas es la de la *dicotomía* que aparece en el Libro VI de la **FÍSICA** de Aristóteles:
"No hay movimiento porque aquello que se mueve debe llegar a la mitad de su camino antes de llegar al final."

[4] El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables desembocó en el hecho de que no todas las magnitudes se podían ver como razones entre números. Este resultado llevó a una separación tajante de las matemáticas en dos ramas, -sin elementos comunes-; aritmética y geometría.

[5] Los números enteros estaban rigurosamente establecidos porque su fundamentación no requería ningún elemento extra matemático, y los números racionales habían sido construidos con base en los números enteros. Charles Meray hizo una construcción rigurosa de ellos en 1856.

aparentemente se adhieren a dos operaciones distintas (cortadura y convergencia)[6] ambos llegaron a la misma definición de número real.

En contraste con el desarrollo histórico del concepto de número real, en la escuela generalmente se presenta a la recta como un soporte de los números que progresivamente se va «completando» de la siguiente manera: en primaria se comienza con los números naturales y en bachillerato se acaba situando los números reales, que supuestamente no dejarían "huecos" en la recta. Aunque de manera formal $\mathbb{R}$ se presenta como el conjunto de puntos que agotan la recta geométrica o como la unión de los racionales e irracionales; estas definiciones y otras análogas se apoyan en la amplia difusión, coherencia y aplicación de la hoy clásica interpretación debida a Cantor y Dedekind, y que realmente fue sólo el punto de llegada de todo ese proceso histórico sobre el concepto de número, que tuvo su génesis en el pensamiento matemático y filosófico de la cultura griega.

Es así como este largo proceso y objetivación de $\mathbb{R}$ escapa generalmente a la escolaridad, ya que allí se presenta como un producto acabado, sin tener en cuenta todo el entramado conceptual que le circunda. Es decir, para alcanzar el concepto de número real, el ser humano ha tenido que sortear y llegar al fondo de nociones tan complicadas como las de infinito, infinitesimal, continuidad, convergencia, límite, entre otras.

La historia de las matemáticas nos brinda elementos importantes para validar la hipótesis de que el número real posee una inmensa riqueza conceptual. Esto lo podemos corroborar a través de su devenir histórico cuyos remotos inicios se

[6] Una cortadura es una partición de $\mathbb{Q}$ en dos subconjuntos (A_1, A_2) tal que cada número de A_1 es menor que todo número de A_2.
Una sucesión $\{x_n\}$ de números racionales, es una sucesión fundamental si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N > 0$, tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$, si $n, m \geq N$.

ubicarían en los albores del pensamiento matemático de la cultura griega y encontraríamos, si no su realización final[7], sí uno de sus momentos cruciales en la segunda mitad del siglo XIX cuando el continuo se constituye como objeto matemático. Es así como en estos veinticinco siglos de construcción del concepto de número real se han logrado conjugar y decantar nociones tan complejas como las de continuidad, límite, infinitesimal, infinito, y diferencial.

Aunque en cada momento histórico, se podrían ubicar unas ciertas concepciones sobre la noción de continuidad, es a partir de los desarrollos que se iniciaron con los trabajos de Bolzano y Cauchy alrededor de 1820, que se comienza a vislumbrar la necesidad imperativa de dotar a esta noción de una base rigurosa alejada de referentes geométricos o físicos. Finalmente hacia los años 1870 se construyeron los números reales tomando como base el conjunto de los números naturales con sus operaciones básicas y adicionando un elemento extra, sin el cual era imposible esta realización: la incorporación de los procesos infinitos actuales. Esta fue una obra colectiva en la que participaron matemáticos de la talla de Dedekind, Cantor, Weiersstrass, Meray, entre otros, quienes lograron erigir un conjunto numérico con las mismas propiedades de la recta geométrica; es decir un conjunto numérico $\mathbb{R}$ con la propiedad de la continuidad geométrica.

[7] Creemos que el concepto de número real no es un concepto acabado. Hay varios problemas que siguen vigentes.

INTRODUCCIÓN

Este seminario de grado, realizado en la estrategia de seminario de investigación, tiene como propósito analizar en algunos textos de matemáticas de grado once, las nociones de número real y continuidad, desde una perspectiva histórica, centrándose en la construcción de los números reales de Cantor y Dedekind, y en la objetivación de la continuidad.

Para el desarrollo de este seminario se consideraron tres etapas: la selección de los textos, algunos elementos histórico-epistemológicos de los conceptos de número real y continuidad, y los análisis de los textos.

La primera etapa esta centrada en la selección de los textos, teniendo en cuenta los textos más utilizados por los docentes del área de matemáticas de grado once, de las instituciones que llegan a una mayor población escolar de la ciudad de Popayán; además, se exponen los textos y colegios seleccionados para poder realizar el análisis.

En la segunda etapa, se encuentra el estudio de algunos elementos histórico-epistemológicos de los conceptos de número real y continuidad, donde se sintetiza los acontecimientos que a nuestro parecer han sido los más trascendentales para la construcción y objetivación de los reales, y la objetivación de la continuidad.

Para finalizar, en la tercera etapa se produjeron los análisis de los textos; aquellos a los cuales se les realizó la revisión, de acuerdo a los conceptos históricos estudiados.

El resultado de este seminario está dirigido a los docentes de matemáticas y se ofrece como una referencia metodológica, en la medida en que les pueda proporcionar criterios adicionales a la hora de elegir un texto guía para impartir todo el curso de matemáticas de grado 11, o bien una temática en particular.

2. JUSTIFICACIÓN

De esta manera, enfrentadas de un lado, a la gran complejidad que ofrece la noción de continuidad y número real, y por otro, interesadas en indagar por la manera en que este concepto se presenta en la educación media, hemos optado por trabajar impulsadas por estas dos motivaciones, realizando un análisis de estas concepciones en algunos textos guías de matemáticas de grado 11 de uso común en algunos colegios de Popayán.

Siendo un poco más explícitas, deseamos averiguar de qué manera se ponen en juego en estos textos, las relaciones entre número real y las nociones que lo engloban como las de continuo, continuidad, límite, infinito e infinitesimal. Para alcanzar tal propósito se pretende construir una rejilla de análisis que involucre las nociones anteriores y bajo la cual vamos a subsumir nuestro cuerpo de textos escolares de matemáticas.

Toda esta complejidad conceptual alrededor de una noción, y que generalmente se encuentra traslapada en una definición formal o axiomática hace que este concepto desde el punto de vista escolar sea muy difícil de comprender. Pero sabemos también que este es un concepto clave en la educación, puesto que sobre él va a edificarse prácticamente todo el edificio matemático.

Por otra parte, el texto guía en la clase de matemáticas se ha implementado de forma generalizada, cumpliendo al mismo tiempo varias funciones: informativa, organizativa, motivadora del aprendizaje, comunicativa, pedagógica, ideológica, orientadora, integradora y científica basada en la concepción, objetividad y actualización de una asignatura y en la adaptación al estudiante. Por otro lado es relevante para el estudiante, ya que es un instrumento de aprendizaje en un proceso activo. Es decir, se puede constituir en guía del profesor y el alumno, en material de consulta y aún más, en el mecanismo que usan las entidades a cargo de la Educación en Colombia para reglamentar los contenidos disciplínales.

En este sentido es importante indagar por la manera en que el concepto de número real se presenta en los textos matemáticos escolares. Es prioritario poner en evidencia estas concepciones, puesto que al jugar un papel tan preferente en el aula de clase, los docentes y la comunidad que trabaja en los procesos educativos, deben ser consientes de la manera como tales concepciones se introducen en los cursos de matemáticas. Es decir deseamos indagar si las nociones alrededor del número real que se recogen en un determinado texto, son por ejemplo axiomáticas, pero los ejemplos son de tipo intuitivo geométrico o físico. Si éstas son cercanas a la noción de infinitesimal, o si los criterios de convergencia según el continuo de Weirstrass son sólo una forma de sustentar la teoría, porque el libro maneja estos elementos muy al estilo del cálculo del siglo XVII (con un fuerte componente de índole físico).

Creemos que los docentes deben contar con herramientas epistemológicas para elegir un texto teniendo en cuenta la adopción de ciertas posturas propias, de acuerdo a unas concepciones sobre las matemáticas, y no sólo elegir un texto conforme a las imposiciones de unas cuantas editoriales e incluso a las imposiciones del mismo sistema Educativo Colombiano.

Pretendemos que este análisis sirva como instrumento de referencia a los docentes de matemáticas de algunos colegios de Popayán; en la medida en que puede proporcionarles criterios adicionales a la hora de elegir un texto guía para impartir todo el curso de matemáticas de grado 11, o bien una temática en particular. No olvidemos que el texto guía que se escoja será un potenciador de formación matemática (sólida o no), ya que este es el material mas empleado en el momento de decidir qué temas enseñar y cómo hacerlo.

3. OBJETIVOS

3.1. Objetivo general:

Caracterizar las nociones de número real y continuidad en algunos textos de matemáticas de uso común en el grado 11 en colegios de la ciudad de Popayán, para contribuir con un material de referencia que le sirva a los docentes en la escogencia del texto guía de matemáticas.

3.2. Objetivos específicos

1. Identificar una masa representativa de textos de matemáticas de grado 11 que circulen en ciertos colegios de Popayán.

2. Construir una rejilla de análisis a partir de los componentes aritméticos, topológicos, geométricos y algebraicos subyacentes al concepto de número real; componentes en los que se ha incorporado el estudio histórico – epistemológico de este concepto.

3. Analizar los textos teniendo en cuenta la rejilla analítica para caracterizar en ellos la riqueza conceptual de $\mathbb{R}$.

4. SELECCIÓN DE LOS TEXTOS

El número real posee una inmensa riqueza conceptual, con la que se han logrado conjugar y decantar nociones tan complejas como las de continuidad, límite, infinitesimal, infinito, y diferencial, convirtiéndose en un concepto fundamentador del cálculo, simultáneamente, es un tema curricular en la básica secundaria del sistema educativo colombiano, por lo cual, es pertinente indagar por la manera en que el concepto de número real se presenta en los textos matemáticos escolares, teniendo en cuenta que el texto hace parte del material didáctico que interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El texto guía, cumple funciones como: la de seleccionar y combinar datos; organizar y clasificar los elementos, los procesos y las actividades; motivar al aprendizaje a través de la mezcla de lenguajes textuales y gráficos comprensibles.

> El texto materializa los programas curriculares, ayuda a la organización administración del tiempo, presenta información verbal y gráfica estructurado pedagógicamente y propone actividades y ejercicios en sus páginas y fuera de ellas, que sirven para estimular y apoyar los procesos de pensamiento. Un texto bien realizado puede contribuir a facilitar y hacer más eficiente el trabajo del profesor y de los estudiantes y a mejorar la calidad de la educación.
> [Arb. Pág. 42]

Estando, conforme con el papel que juega el texto guía y su contribución para el buen desarrollo de la clase, es apropiado realizar un estudio de algunos textos matemáticos del grado once, debido a que en este grado se estudian nociones que utilizan el concepto de número real y continuidad.

De modo que, para realizar este estudio, fue necesario seleccionar algunos textos, tomando como criterio, aquellos que lleguen a una mayor población escolar. Por consiguiente, fue conveniente conocer que colegios tienen mayor cantidad de población escolar en la actualidad, considerando que los docentes de grado once del área de matemáticas de estas instituciones, serán quienes suministren la información acerca de los textos que utilizan como guía para la preparación de cada clase.

Por lo tanto, fue preciso conocer los datos de la Secretaría de Educación Municipal, sobre los colegios que actualmente se encuentran en funcionamiento en esta ciudad. Los datos suministrados muestran que existen 193 instituciones, de las cuales 55 tienen educación media no cíclica.

Debido al amplio número de instituciones escolares presentes en el municipio de Popayán, se tomo una muestra de acuerdo a los criterios de este trabajo, de manera que fueron seleccionadas 18 instituciones, en las cuales se indagó acerca de los textos guías que utilizan los docentes del grado once del área de matemáticas.

Así pues, las instituciones seleccionadas fueron:

COLEGIOS	**NÚMERO DE ESTUDIANTES GRADO ONCE**
Institución Educativa Francisco José de Caldas INEM	309
Champagnat	148
San Agustín	146
Instituto Técnico Industrial	144
Gabriela Mistral	142
Liceo Nacional Alejandro de Humboldt	131
Francisco Antonio de Ulloa	131
Metropolitano María Occidente	112
Real Colegio San Francisco de Asís	112
Nuestra Señora del Carmen	104

Institución Educativa José Eusebio Caro	97
Cesar Negret	76
Instituto Técnico Industrial Don Bosco	76
Seminario Menor Arquidiocesano	74
Cristo Rey	69
Nuestra Señora de Fátima	62
Comercial del Norte	62
Melvin Jones.	60

Vale la pena señalar, que no se consideraron las instituciones de programas cíclicos e instituciones ubicadas fuera del casco urbano.

Es de notar, que el INEM es el colegio con mayor número de estudiantes de grado once, con una población escolar de 309 estudiantes. Por el contrario las instituciones con menor número de estudiantes son: Alférez Real y Poblazon, que tienen una población escolar de 7 estudiantes.

Luego, para la selección de los textos, una vez obtenida la información requerida, teniendo en cuenta los más utilizados por los docentes de grado once de las instituciones ya seleccionadas, se hizo la siguiente clasificación y selección de los textos:

TEXTO	AUTOR	EDITORIAL	FRECUENCIA
Matemática Progresiva	Hernando Bedoya, Nelson Londoño.	Norma S.A. Segunda edición, 1988. Santa Fe de Bogotá, Colombia.	8
Introducción al Cálculo	Hugo Hernán Chávez López, Diana Constanza Salgado Ramírez, Juan de Jesús Romero Roa, Wilson Enrique Torres Sánchez.	Santillana, Bogotá, 2004.	7
Alfa11	Vladimir Moreno Gutiérrez, Mauricio	Norma S.A. Segunda edición 2002.	5

	Restrepo López.	Bogotá, Colombia.	
El Cálculo	Louis Leithold.	OXFORD University press. Séptima edición 1994.	5
Cálculo I	Ron Larson, Robert P. Hostetler and Bruce H. Edwards.	Mc Graw Hill. Octava edición. Volumen I. México 1999.	4
Conexiones Matemáticas 11	Mauricio Restrepo López.	Norma S.A. Bogotá, Colombia. 2006.	3
Matemática 6. Introducción al Cálculo	Edgar Obonaga G, Jorge A. Pérez A., Víctor E. Carom.	PIME LTDA. Cali, Colombia, 1984.	2
Matemáticas Prácticas	Alfredo Olmos Millán, Luís Carlos Martínez.	Voluntad, Sexta edición. Santa Fe de Bogotá, Colombia, 1987.	2
Elementos de Matemáticas	Julio A. Uribe, José Israel Berrio.	Bedout S.A. Medellín, 1989. Primera edición.	2
Dimensión Matemática 11	Nelson Londoño, Hugo Guarín.	Norma S.A. Colombia, Noviembre 1995.	1
Matemática una Propuesta Curricular	Julio A. Uribe Calao.	Bodout Editores S.A. Segunda edición. Medellín, Colombia 1996.	1
Matemáticas con Tecnología Aplicada 11	Mónica S. Dimaté, Luís P. Beltrán B, Benjamín P. Rodríguez.	Prentice Hall. Santa Fe de Bogotá. 1997. Sin edición.	1
Matemática Constructiva 11	Gustavo Centeno R., Nelson Jiménez R., Fernando Gonzáles, Marco F. Robayo.	Libros & Libres S.A. Santa Fe de Bogotá, 1994. Primera edición.	1
Matemáticas Universitarias	Carl B. Allendofer, Oakley, Cletus O.	Mc Graw-Hill. Santa Fe de Bogotá. 1990.	1
Supermat 11	Jesús Maria Ramos Gutiérrez, Ángela Julieta Peña Pinzor.	Voluntad Primera edición, 2000. Santa Fe de Bogotá, Colombia.	1
TOTAL			44

Nótese, que la Matemática Progresiva, es el texto más empleado por los profesores, siendo utilizado como guía por 8 docentes. Por el contrario, los textos: Matemáticas Universitarias y Supermat 11, entre otros, son los menos usados por los profesores, dado que a lo más un docente, recurre a ellos.

Los textos seleccionados fueron: Matemática Progresiva, Alfa 11, Introducción al Cálculo, El Cálculo y Cálculo I.

5. ALGUNOS ELEMENTOS HISTÓRICO - EPISTEMOLÓGICOS DE LOS CONCEPTOS DE NÚMERO REAL Y CONTINUIDAD

La historia de las matemáticas nos brinda elementos importantes para validar la hipótesis de que el número real posee una inmensa riqueza conceptual, pues para alcanzar este concepto, se ha tenido que sortear y llegar al fondo de nociones tan complicadas como las de infinito, infinitesimal, continuidad, convergencia, límite, entre otras, de ahí que se estudiarán ciertos aportes de algunos matemáticos que contribuyeron en la construcción de estas nociones, que se tendrán en cuenta para realizar el análisis de los textos.

Aunque el desarrollo de las matemáticas occidentales tiene sus inicios más remotos en Egipto y Mesopotamia, comenzaremos esta corta historiografía con los desarrollos matemáticos en la civilización griega. Es innegable que una de las herencias primordiales de esta cultura a las matemáticas occidentales es el concepto de demostración que no aparece explícitamente en ninguna cultura anterior. Se conoce por Aristóteles que los pitagóricos pusieron el énfasis en el número como concepto fundamental de las matemáticas, de ahí, que en el siglo VI a.C. la escuela pitagórica comienza con una idea abstracta de número[8] y de unidad. También en este periodo encontramos la aparición de las magnitudes inconmensurables[9], las cuales son magnitudes que no se pueden medir una con otra. En cierto sentido se puede decir que estos son los antecedentes de lo que hoy conocemos como números irracionales.

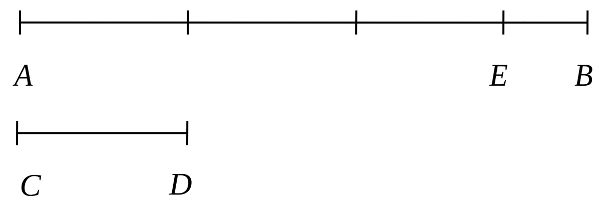
Para entender la definición de magnitud inconmensurable, es necesario conocer el concepto de magnitudes conmensurables; dos magnitudes son conmensurables si tienen una unidad de medida común, es decir sean a y b

[8] Los griegos solo concebían como números a los naturales, menos el cero y el uno.

[9] Aunque los primeros casos de magnitudes inconmensurables aparecen entre los años 450 y 430 a. C. una espesa niebla cubre el rostro de los primeros descubridores y la fecha exacta del suceso. Por el Teeteto de Platón sabemos que al rededor del año 430 a. C. ya Teodoro de Cirene conocía la existencia de magnitudes inconmensurables. [Rec. Pág. 45]

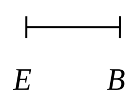
dos magnitudes de la misma especie, se dice que pueden medirse ambas mediante una medida común, si existe una unidad c tal que: $a = rc$ y $b = sc$. Esta definición se puede observar en los siguientes ejemplos:

Sean los segmentos AB y CD:



Primero se determina las veces que CD cabe en AB.

En este caso CD cabe 3 veces en AB y sobra EB. Luego se determina las veces que el excedente cabe en CD,

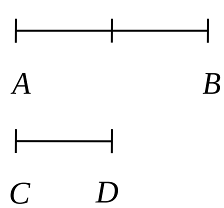


Obteniendo lo siguiente:

$$AB = 3CD + EB$$
$$CD = 2EB$$
$$AB = \left(\frac{7}{2}\right)CD$$

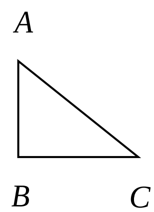
En este caso se obtiene un número racional.

De igual manera podemos obtener un número entero, como en el siguiente ejemplo:



$AB = 2CD$

Por el contrario, un ejemplo en donde es visible el concepto de magnitud inconmensurable, lo encontramos en la comparación de un lado de cualquier triangulo rectángulo isósceles con su hipotenusa.



Inconmensurabilidad demostrada por los griegos, basándose en la diferencia entre número par e impar:

> Sea $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, donde m, n son números primos entre si. Entonces $m^2 = 2n^2$, de donde sigue que m^2 es par, consecuentemente, m es par. Entonces n es impar. Sin embargo si m es par, entonces m^2 se divide por 4 y por consiguiente n^2 es par. Por tanto n también es par. La contradicción formal obtenida (n no puede ser a la vez par e impar) indica la falsedad de la suposición sobre la racionalidad de $\sqrt{2}$. [Rib. Pág. 53]

El descubrimiento de magnitudes inconmensurables causó la aparición de otras irracionalidades que no podían ser explicadas con base en los números y las relaciones entre ellos. De esta manera se quebrantaban sus soportes de razonamiento ya aceptados, negando así al número como esencia constitutiva de todo lo que existe.

El descubrimiento de dichas magnitudes originó en Grecia una separación entre las nociones de número y magnitud. A raíz de esto se suscitaron dos teorías, dadas a conocer por Aristóteles, una correspondiente a las magnitudes y otra que corresponde a los números. Lo cual establece las dicotomías entre:

aritmética-geometría, discreto-continuo, finito-infinito, contar-medir. En donde las magnitudes corresponden a la geometría, son continuas y pueden dividirse continuamente y los números corresponden a la aritmética, son discretos, se pueden dividir en una cantidad finita de partes y pueden ser contados.

Aristóteles concibe el número como pluralidad de unidades, y no concibe a la unidad como número:

> Uno es lo que mide una multiplicidad, y el número es una multiplicidad de medida. Por tanto, es evidente que el uno no es un número; pues la unidad de medida no es una multiplicidad de medidas, sino que ambas unidad de medida y uno son principios. [Blo. Pág. 173]

Del mismo modo, no concibe al cero como número, pues, no puede ser pensado como pluralidad de unidades, además en sus concepciones filosóficas griegas la nada no existe.

Otro elemento para Aristóteles es la continuidad, la cual concibe como una abstracción de algunos fenómenos sensibles, es decir es una característica de un objeto espacio-temporal.

De igual forma, Aristóteles acepta la existencia de un infinito potencial que se obtiene por adición de la unidad a un número determinado, igualmente existe un infinito potencial por división que se obtiene al dividir un segmento en segmentos que a su vez se pueden seguir dividiendo, es un infinito en proceso de crecimiento, sin final, inacabado y no se puede contar.

Por otra parte, no acepta el infinito actual[10], que se puede observar con la división de una magnitud en mitades consecutivas, en donde se puede llegar a un segmento de magnitud cero:

[10] Infinito Actual es el infinito como totalidad completa. Acabado, terminado en un todo y se puede contar.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{2^n}\right]=\{0\}$$

Aristóteles realiza un primer acercamiento conceptual de continuidad de fenómenos físicos en el libro **V de la Física,** este concebía la continuidad de la recta como:

> Lo continuo es aquello que es divisible en partes siempre divisibles.

Estas concepciones, al igual que otros estudios realizados por Aristóteles, se emplearon como referencia durante varios siglos. Por ejemplo en el libro de los **Elementos** de Euclides de Alejandría (alrededor del año 300 a.C.), parece ser, que se toma como base, parte de la filosofía aristotélica y algunas nociones de aritmética y geometría de la época.

Los **Elementos** están conformados por trece libros, el libro V se concentra en el estudio de las magnitudes, al parecer, esto lo hace teniendo en cuenta la teoría de las proporciones de Eudoxo.

Eudoxo (entre los años 400 – 347 a.C.), incorporó la teoría de proporciones, siendo la única forma para operar las magnitudes inconmensurables, la cual se soporta en la noción de razón:

> Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad. [Rec. Cap. 2. Pág. 49]

Igualmente define el criterio de proporcionalidad de la siguiente forma:

> Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con una cuarta, cuando tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y cuarta el múltiplo de la primera es

mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera, sea mayor, igual o menor que el de la cuarta. [Rec. Cap. 2. Pág. 50].

En la actualidad, la noción de razón se interpreta de la siguiente manera:

Sean A, B, C, D, magnitudes, se dice que A y B están en la misma razón que C y D simbólicamente $A : B = C : D$, cuando para todo entero m y n se tienen las implicaciones siguientes, según los tres únicos casos posibles:

I. Si $nA > mB$, entonces, $nC > mD$,

II. Si $nA = mB$, entonces, $nC = mD$,

III. Si $nA < mB$, entonces, $nC < mD$. [Rec. Cap. 2. Pág. 50].

Basándose en la noción de razón, dada por Eudoxo, Euclides realiza comparaciones entre magnitudes de cualquier tipo, aunque no contaba con la multiplicación y división de magnitudes, por lo cual no era claro lo que se conoce en la actualidad como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$; por ejemplo:

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ si y solo si $2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$

Por otra parte, Euclides en el libro VII estudia los números, en cuanto a las operaciones y razones entre números naturales y sus propiedades.

Euclides trabajo de manera independiente estas dos teorías debido a la naturaleza de estos conceptos. Ya que la magnitud es infinitamente divisible y continua y el número es finitamente divisible y discreto. En su libro X relaciona estos conceptos al exponer como las magnitudes inconmensurables se comportan como relaciones entre números.

Siglos más tarde, Simón Stevin (1548-1620) en el siglo XVII, reconoció la unidad como número, al poseer la misma característica de los números el ser divisible, Stevin razonaba diciendo que, “si el número está compuesto de unidades, la unidad también forma parte del número; como la parte debe ser de la misma naturaleza que el todo, la unidad es un número".

Contemporáneo a Stevin, Rene Descartes (1596-1650) no tiene en cuenta la dicotomía existente entre número y magnitud, debido a que introduce una magnitud a la cual llama unidad, para poder realizar operaciones como la multiplicación y división con magnitudes de la misma forma como se realizaban con los números.

Otros elementos, que sirvieron para fundamentar la noción de número real fue el uso de los indivisibles y cantidades evanescentes que también se conocen como infinitesimales.

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 – 1647) intento resolver el problema geométrico de la cuadratura[11] del círculo, aplicando el método de los indivisibles[12]. Estas concepciones contribuyeron al origen de las magnitudes infinitamente pequeñas como infinitésimos y a la noción de límite. Así pues, para medir longitudes, superficies y volúmenes se debe sumar infinidad de indivisibles.

Entre los siglos XVII y XVIII, Isaac Newton (1642 – 1727) con el estudio de series de potencia logró desarrollar el binomio de Newton, el cual empleó para el tratamiento algorítmico del problema de las cuadraturas. Para extender el universo de las curvas por cuadrar, parte de una cuadratura particular y determina la curva a la que pertenece esa cuadratura; para esto utiliza incrementos infinitamente pequeños llamados cantidades evanecentes, los

[11] Se dice que una superficie es cuadrable, si a partir de ella se puede conseguir geométricamente un cuadrado que tenga la misma área que ésta. Esto se realizaba solamente con regla y compás euclidianos.
[12] Los indivisibles son componentes cuya naturaleza depende de la dimensión de los objetos. Así, para las superficies los indivisibles serán las líneas; para los volúmenes, superficies, y en general, para objetos de dimensión *n*, serán los objetos de dimensión *n-1*. [Rec. Cap. 6. Pág. 30].

cuales cumplían la extraña ley de poder dividir, por ser diferentes de cero, y desaparecer a conveniencia por no incidir en el resultado.

Por otra parte, Gottfried Leibniz (1646 - 1716), también trabaja con infinitesimales, pero a diferencia de Newton lo hace de una forma más general.

1. Construyendo sucesiones en el mundo de las curvas.

2. Toma dos postulados propuestos por Pascal con los cuales puede pasar de lo discreto a lo continuo.

Leibniz admite la existencia de magnitudes infinitesimales como componentes de la totalidad, es decir acepta que todo lo continuo es divisible en partes que a su vez son siempre divisibles.

De esta manera, en lo expuesto hasta este momento, aun no se puede ver una rigorización de los fundamentos matemáticos, que permitieron alcanzar la objetivación de $\mathbb{R}$, esto se alcanzó posteriormente con estudios realizados por algunos matemáticos, de los cuales se hace referencia a continuación.

Bernhard Bolzano (1781 – 1848), no estaba conforme con el concepto de número, y fue el primero en tratar de fundamentar el infinito actual, en su obra **Paradojas del Infinito,** defendiendo la existencia de este. Así pues, en las matemáticas no se dio ningún otro acercamiento al concepto de infinito hasta el siglo XIX.

Por otro lado, Bolzano[13] dio una definición de continuidad:

[13] Las condiciones excepcionalmente desfavorables en las cuales vivió y trabajo Bolzano, fueron la causa de que casi todos sus trabajos vieran la luz solo después de su muerte. Sus resultados fundamentales fueron conocidos solo en los años 70 y obtuvieron reconocimiento desde los años 80. [Rib. Pág. 367]

Si x es algún valor, tal que la diferencia $f(x+w)-f(x)$ puede hacerse tan pequeña como determinada cantidad siempre que w pueda tomar valores tan pequeños como se quiera. [Russ. Pág. 162]

Esta definición se asemeja al concepto de continuidad que se conoce actualmente; pero sin el lenguaje matemático de los ε, δ.

Paralelo a Bolzano, Agustín Cauchy (1789 - 1857), buscó un rigor matemático, eximiendo de todo referente geométrico o físico sus demostraciones de análisis matemático. Un ejemplo de ello es el teorema del valor intermedio, propiedad concebida a priori de las curvas geométricas.

A continuación se presenta este teorema y su demostración, con algunos comentarios sobre las nociones y procedimientos que Cauchy utilizó.

Teorema: *Sea* $f(x)$ *una función real de la variable* x *que permanece continua respecto a esta variable entre los limites* $x=x_0$, $x=X$ *Si las dos cantidades* $f(x_0)$ *y* $f(X)$ *son de signos contrarios se podrá satisfacer a la ecuación*

(1) $$f(x)=0$$

para uno o varios valores reales de x, *comprendidos entre* x_0 *y* X .

Es de notar, que en el enunciado del teorema se pone como condición la necesidad de que la función sea continua. Cauchy dio una definición de función continua; definición que sigue amarrada a la continuidad Aristotélica:

Sea $f(x)$ una función de la variable x y supongamos que, para cada valor de x intermedio entre dos límites dados, esta función admite un valor único y finito. Si a partir de un valor de x comprendido entre esos límites, se atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α, la función misma recibirá como incremento la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ que dependerá al mismo tiempo de la variable α y del valor x. Dado esto, la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, una función continua de esta variable si, para cada valor de x intermedio entre estos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ decrece indefinidamente con el de α. En otras palabras, la función $f(x)$ permanecerá continua respecto de x entre los límites dados, si entre esos límites un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente de la función. [Gál. Pág. 90]

Esta definición se asemeja a la definición moderna de continuidad uniforme.

También, en el enunciado de este teorema Cauchy utiliza la noción de cantidad variable:

Llamamos cantidad variable aquella que recibe sucesivamente valores distintos unos de otros. [Gál. Pág. 51]

Aquí, Cauchy asume que la variable toma valores reales, pero hasta este momento, no se había demostrado la existencia de los números reales.

Demostración: *Sea* x *el mínimo de las cantidades* x_0 *y* X $h=X-x_0$ *y* $m\in\mathbb{Z}^+$ *Como de las dos cantidades* $f(x_0)$ *y* $f(X)$ *una es positiva y la otra negativa, si se forma la sucesión*

$$f(x_0), f\left(x_0+\frac{h}{m}\right), f\left(x_0+\frac{2h}{m}\right), \ldots, f\left(X-\frac{h}{m}\right), f(X)$$

Cauchy define esta sucesión de tal manera que le permita evaluar la función en cada punto.

Siguiendo con la demostración:

Comparando los términos entre sí, se da, una o varias veces que dos términos consecutivos serán de signos contrarios. Sean $f(x_1)$ *y* $f(X')$ *dos términos de esta especie, con* x_1 *el más pequeño de los dos valores correspondientes de* x. *Se tendrá evidentemente*

$$x_0 < x_1 < X' < X, \quad y$$

$$X'-x_1 = \frac{h}{m} = \frac{1}{m}(X-x_0).$$

Una vez determinados x_1 y X' como antes, será posible nuevamente encontrar entre ellos otros dos valores de x, x_2 y X'', que sustituidos en $f(x)$ den resultados de signos contrarios y que sean propios para verificar las condicione

$$x_1 < x_2 < X'' < X', \quad y$$

$$X'' - x_2 = \frac{1}{m}(X' - x_1) = \frac{1}{m^2}(X - x_0)$$

Al continuar así, se obtendrá una serie de valores crecientes de x, a saber,

(2) $x_0, x_1, x_2, \ldots,$

y una serie de valores decrecientes

(3) $X, X', X'', \ldots$

cuyas diferencias forman la sucesión

$$1 \cdot (X - x_0), \frac{1}{m}(X - x_0), \frac{1}{m^2}(X - x_0), \ldots = \left\{\frac{X - x_0}{m^n}\right\}$$

Por lo que acabarán de diferir unos a otros tan poco como se quiera, pues $\left\{\frac{X - x_0}{m^n}\right\}$ *es un infinitesimal.*

Para Cauchy un infinitesimal se define como:

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que descienden por debajo de cualquier número dado, esta variable deviene lo que se suele llamar un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene a cero por límite. [Cau. Pág. 76]

Volviendo a la demostración del valor intermedio:

Se debe concluir que los términos generales de las series (2) y (3) convergerán a un límite común, sea a este límite.

Es de notar, que el error se presenta cuando la serie converge a un número irracional, pues, los irracionales aun no eran reconocidos como números. Además, Cauchy esta usando el hecho de que una sucesión monótona y acotada es convergente, teorema que se satisface cuando un espacio completo, es decir asume la completitud de los números reales.

Cauchy estableció la convergencia de una serie:

> Para que una serie
>
> $$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$$
>
> Sea convergente, es necesario y suficiente que los valores crecientes de n hagan converger indefinidamente a la suma
>
> $$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, u_{n-1}$$
>
> hacia un límite fijo s, en otras palabras, es que, para los valores infinitamente grandes del número n, las sumas
>
> $$S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$$
>
> difieran del límite s, en cantidades infinitamente pequeñas. [Gál. Pág. 26]

Asimismo, Cauchy aplica la noción de límite, que estableció:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabara por diferir de este tan poco como se quiera, este último se llamará el límite de todos los demás. [Cau 94. Pág. 76]

Continuando con la demostración:

> *Puesto que la función $f(x)$ es continua desde $x = x_0$ hasta $x = X$, los términos generales de las siguientes sucesiones*
>
> $$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$$
>
> $$f(X), f(X'), f(X''), \ldots$$

convergen igualmente hacia el límite común $f(a)$; *y como al aproximarse a este límite serán siempre de signos contrarios, es claro que la cantidad* $f(a)$ *que es finita, no podrá ser diferente de cero. En consecuencia se verifica la ecuación*

(1) $f(x)=0$,

al atribuirle a la variable x *el valor particular* a *comprendido entre* x_0 *y* X. *En otras palabras,*

(4) $x=a$

será una raíz de la ecuación (1). [Gál. Pág. 23]

La demostración del valor intermedio desarrollada por Cauchy, no garantiza con rigor la existencia del valor x tal que $f(x)=0$ y en general no es posible la formulación rigurosa de un principio de continuidad, ni de las nociones de límite y convergencia, porque aún no se había alcanzado la objetivación de $\mathbb{R}$. Además, vale la pena señalar, que en esta demostración Cauchy no tiene herramientas conjuntistas.

En conclusión, el gran aporte de Cauchy fue tratar de llevar la continuidad a términos matemáticos, lo cual condujo a la necesidad de demostrar la existencia de los números reales.

De esta manera, hasta el siglo XIX se utilizaban propiedades de números reales, que no habían sido justificadas aritméticamente, por esta razón, para Richard Dedekind (1831 – 1916) considerar que solo con los elementos geométricos se podía llenar todo el calculo diferencial, era falta de un fundamento aritmético, debido a que en estos siglos se pretendía la rigurosidad de las matemáticas.

Dedekind se baso en la continuidad de la recta real, y en los “agujeros” que quedan en la recta si en esta solo se consideran los números racionales. Este publicó el libro “**Continuity and Irracional Number**”, en donde intentó explicar que lugar correspondía a los números irracionales en el dominio matemático con consideraciones de la continuidad. En este libro se encuentra la forma del número racional e irracional, sus notaciones decimales y como se podrían operar, muestra de una forma clara igualdades que no eran aceptadas en el mundo matemático hasta este tiempo, como $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ donde a,b no son cuadrados de ningún número real.

Para lograr todos estos resultados con elementos matemáticos, Dedekind realiza toda su construcción tomando la recta como un conglomerado de puntos y la analogía entre los números racionales y los puntos de una línea recta:

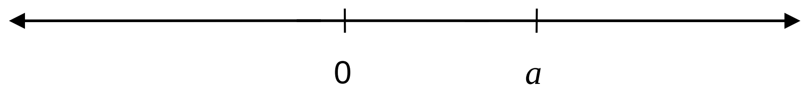
> Procurando seguir aritméticamente todos los fenómenos sobre la línea recta, el dominio de los números racionales es insuficiente y llega a ser absolutamente necesario que el instrumento $\mathbb{R}$, construido por la creación de los racionales, sea esencialmente perfeccionado con la creación de nuevos números, de manera que el dominio de los números llegue a ser completo, o, como podríamos decir alcance la misma continuidad que la línea recta. [New. Pág. 120].

Como el propósito de Dedekind era definir irracionales en términos racionales, advirtió que las propiedades de orden y densidad de los números racionales hacían posible utilizar las cortaduras para definir los reales.

Dedekind demostró que el conjunto de los números reales era en esencia el conjunto de todas las cortaduras sobre $\mathbb{Q}$. Para Dedekind, una cortadura es una partición de $\mathbb{Q}$ en dos subconjuntos (A_1, A_2) tal que cada número de A_1 es menor que todo número de A_2.

Obsérvese un ejemplo de cortadura:

Sean
$$A_1=\{a_1\in Q / a_1{}^2\leq 2\}$$
$$A_2=\{a_2\in Q / a_2{}^2 > 2\}$$
el número $a^2=2$ se representa en la línea recta:



Este número determina una partición de los números racionales en una clase anterior cuyos elementos son mayores que a y una clase posterior que contiene todos los números racionales restantes. Así $a^2 = 2$ se constituye en un elemento separador del conjunto de números racionales, es decir a sin ser un número racional produce una cortadura en los racionales, de esta manera esta cortadura define al número irracional $\sqrt{2}$.

Dedekind, con base en las propiedades ya existentes para racionales realiza una extensión de estas para los números reales, de la siguiente manera:

I. Si $\alpha > \beta$, y $\beta > \lambda$, entonces también $\alpha > \lambda$, diremos que el número β esta entre α y λ.

II. Si α, λ son dos números diferentes cualesquiera, entonces existen infinidad de números diferentes β entre α y λ.

III. Si α es un número definido cualquiera, entonces todos los números del sistema $\mathbb{R}$ son de dos clases $\mathbf{U_1}$ y $\mathbf{U_2}$ cada una de las cuales contiene infinitos números individuales; la primera clase $\mathbf{U_1}$ comprende todos los números α_1 que son menores que α, la segunda $\mathbf{U_2}$ comprende todos los números α_2 que son mayores que α; el número α puede asignarse a voluntad a la primera o a la segunda clase y es respectivamente el mayor y el menor. En cada caso la separación del sistema $\mathbb{R}$ en dos clases $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$ es tal que cada número del primer orden $\mathbf{U_1}$ es menor que cada número de la segunda clase $\mathbf{U_2}$, y decimos que esta separación esta producida por el número α

IV. Si el sistema $\mathbb{R}$ de todos los números reales se divide en dos clases $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, tales que cada número α_1 de la clase $\mathbf{U_1}$ es menor que cada número α_2 de la clase $\mathbf{U_2}$, entonces existe un solo número α que puede producir esta separación. [New. Pág. 125].

Cabe resaltar que en la IV propiedad esta inmersa la esencia de la continuidad[14] para Dedekind, esencia a la cual este le otorga un carácter de axioma, ya que es un principio indemostrable. De modo $\mathbb{R}$ que queda caracterizado como un cuerpo de números, dotado de un orden lineal continuo.

Para finalizar, George Cantor (1845 – 1918) inicia el proceso de objetivación de los reales, basándose en la definición de sucesión fundamental[15]. Asimismo, Cantor establece la existencia de un punto en la recta para cada sucesión fundamental:

> Los símbolos del sistema *B* sólo adquieren sentido cuando son puestos en correspondencia uno a uno con los puntos de la línea recta *A*. Ello no ofrece dificultades para los números racionales. En el caso de los irracionales, Cantor sabía que dado un punto sobre la línea, si éste no tiene una relación racional con la unidad entonces podría ser aproximado por una sucesión de puntos racionales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$ cada uno de los cuales corresponde a un elemento en A. La sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión fundamental que se aproxima tanto como se quiere al punto dado. Cantor expresaba esta condición como sigue: "La distancia del punto a ser determinado al origen *o* es igual a *b,* donde *b* es el número correspondiente a la sucesión $\{a_n\}$". Dado que a todo elemento de *A* tiene un único correspondiente en *B*[16]*,* la unicidad de la representación de los puntos de

[14] Si todos los puntos de una línea recta son de dos clases, de manera que cada punto de la primera clase esta a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un punto y únicamente uno que ocasiona la partición de todos los puntos en dos clases, separando la recta en dos porciones. [New. Pág. 121].

[15] La sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$ se llama una sucesión fundamental si existe un entero N tal que para cualquier valor positivo real ε, se cumple que: $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon,$ para todo m, y para todo $n < N$. Si una sucesión $\{a_n\}$ satisface la anterior condición entonces decía que la sucesión infinita $\{a_n\}$ tenía un límite definido b. Esta era estrictamente una convención para significar, no que la sucesión alcanza el límite actual b, o que se presumía que b fuese el límite, sino únicamente que cada una de tales sucesiones $\{a_n\}$ tenía asociado un símbolo definido b.
[Rec, Cap. 10.Pág 54].

[16] Un número racional p se identifica con la sucesión constante $\{p\}$ y además puede ser comparado con una sucesión $\{a_n\}$ asociada a b. De tal suerte que $p = b$, $p < b$ o $p > b$. El conjunto de estos nuevos símbolos es un nuevo sistema B que, al ser dotado de una estructura

> la recta en *B* está garantizada. Pero Cantor no pudo garantizar la correspondencia inversa: Que a cada elemento *b* de *B* le corresponda un punto de la recta. Para esto tuvo que invocar el siguiente axioma: A cada número le corresponde un punto en la línea recta, cuya coordenada es igual al número. [Rec, Cap. 10. Pág. 55].

Para poder seguir con la objetivación de $\mathbb{R}$**,** Cantor acepta la existencia del infinito actual, dado que considera que desechar el infinito actual seria negar la existencia de los números irracionales, que habían sido construidos con bases estables. De esta manera, Cantor logro un sistema numérico completo[17].

Así pues, Cantor y Dedekind relacionaron número y magnitud con un razonamiento lógico sobre la continuidad de la recta. Es decir, establecieron una relación entre los números reales y los puntos de la recta.

Como se pudo observar, la formalización de la noción de número real y continuidad se constituyo a través de varios siglos, y al mismo tiempo se puede ver que la falta de la representación de los reales, se esclarecería en la transformación matemática y en evidenciar esta construcción que cae bajo el concepto de continuidad como la respuesta a un problema histórico.

de cuerpo ordenado y puesto en correspondencia uno a uno con los puntos de la línea recta A, constituía para Cantor el conjunto de los números reales. [Rec, Cap. 10. Pág. 54].

[17] Un conjunto es completo si toda sucesión fundamental en el converge.

6. REJILLA ANALÍTICA

La rejilla constituye la lente con la que se observará el cuerpo de textos elegido para el análisis. Las nociones propuestas provienen del estudio histórico (capítulo precedente) de aquellos conceptos claves en el proceso de constitución de $\mathbb{R}$.

INFINITO

Es necesario observar que tipo de concepción de infinito emplean los textos, ya que como se mencionó en la parte histórica, no solo existe una concepción. Por otro lado, ver si al establecer las diferencias entre el infinito de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, estas permiten determinar que estos sistemas numéricos no son iguales. Por tanto, se consideraran los siguientes aspectos de esta noción:

- Concepciones.
- Diferencias que se mencionan entre el infinito de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

CONTINUIDAD

Es oportuno estudiar como los textos conciben la continuidad, es decir, si esta noción se relaciona con fenómenos físicos, si se da de forma intuitiva o simplemente se presenta la concepción usual de continuidad, y por otra parte, indagar como se presenta la discontinuidad, pues se puede ver en el anterior capítulo, que solo hasta después del siglo XVII se dio una caracterización matemática de lo discontinuo. De ahí, que con relación a esta noción, se va a estudiar:

- Noción y concepciones.
- Propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado.
- Caracterización de lo discontinuo.

NÚMERO REAL

Es preciso estudiar si en la presentación que realizan los textos del concepto de los números reales, se puede evidenciar la complejidad de está noción. De otro lado, ver si con las propiedades de $\mathbb{R}$, se pueden establecer las diferencias entre este sistema y los otros sistemas numéricos. Por ende, se analizaran estos aspectos:

Presentación del concepto:

- Representación numérica*:*
- Construcciones de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y las relaciones entre ellas.
- Representación geométrica.
- Conexión entre las representaciones.

- Propiedades de $\mathbb{R}$:
    - Presentación.
    - Diferencias algebraicas y topológicas entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$.

LÍMITES Y SUCESIONES

Revisar como se induce a las nociones de sucesiones y límite, sirve para comparar como se conciben estos conceptos después de la construcción de los números reales y de que manera se relacionan con este sistema numérico. Asimismo, aunque históricamente se trató de desligar de todo componente geométrico y físico, nociones como estas, se hace preciso considerar como en la actualidad, las representaciones geométricas se emplean para el estudio de las mismas. En consecuencia, con respecto a estas nociones, se observaran los siguientes aspectos:

- Definiciones, presentación y concepciones.

- Representaciones
- Propiedades.

7. ANÁLISIS DE LOS TEXTOS

7.1. Matemática Progresiva

Este texto está orientado hacia los estudiantes de grado once y es editado por **Norma.** Segunda edición, 1988. Los temas están organizados por capítulos, los cuales se dividen en subtemas. Al inicio de cada capítulo se realiza una introducción, donde da una visión muy corta de las temáticas que se van a desarrollar, resaltando el tema que considera significativo de cada capítulo. En algunas secciones se han incorporado comentarios históricos, sobre aportes que hicieron ciertos matemáticos de diversas épocas, referentes a los temas que se están desarrollando. Los ejemplos dan una idea a los estudiantes del procedimiento que se debe seguir para la resolución de ejercicios y contienen soluciones gráficas, analíticas y/o numéricas, que proporcionan una visión más amplia de las nociones matemáticas expuestas. Al finalizar cada subtema y cada capítulo, presenta una amplia serie de ejercicios de resolución algebraica, teórica y de aplicación, que invitan al estudiante a reflexionar en busca de una solución. Así mismo, al final de cada capítulo presenta un resumen de los temas vistos.

A continuación se presentará el análisis realizado al subtema 1.2 del capítulo1, al subtema 2.1 del capítulo 2 y al capítulo 3, en los cuales se exponen los temas pertinentes a este trabajo. Este análisis se realizará teniendo en cuenta el orden de las temáticas del texto, que en este estudio aparecen como subtítulos.

Conceptos básicos. Repaso

Repaso de Aritmética

El texto señala las características básicas de cada sistema numérico, presentando el sistema de los números naturales como $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,...\}$, y el de los números enteros como una extensión de los naturales, añadiendo el cero y los negativos, los cuales representa como $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\mathbb{Z}^{-}$; $\mathbb{Z}=\{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\ldots\}$**.** Además, menciona que estos conjuntos tienen las propiedades de: ser infinitos, no tienen un último elemento, los naturales tienen a 1 como primer elemento y los enteros no tienen primer elemento.

También en el texto se menciona que ambos son conjuntos discretos[18], ordenados por la relación "≤"[19], que no completan la recta, que son posibles las operaciones de adición, multiplicación y potenciación, en cada uno de estos sistemas numéricos, y la sustracción en los enteros.

A continuación, el texto define un número racional:

> Llamamos número racional a cada una de las clases de equivalencia que se obtienen al establecer la relación *ser equivalente a* en el conjunto **Fr** de las fracciones.
>
> $\frac{a}{b}$ es equivalente a $\frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$. $\quad \frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \longleftrightarrow ad = bc$

[Pág. 10]

Sería conveniente que el autor, antes de dar esta definición, que es poco usual para el nivel de escolaridad del texto, explicara la noción usual de número racional, dado que, esta permite que el lector probablemente logre captar con más facilidad el trasfondo de la noción de número racional en términos de clases de equivalencia; desde otra perspectiva, ver a los números racionales como clases de equivalencia, es verlos como conjuntos, donde los elementos de cada conjunto, son los múltiplos del número racional correspondiente, lo cual ayuda a visualizar la igualdad entre racionales.

---

[18] Se dice que un conjunto es Discreto cuando cada punto tiene un entorno que lo separa de los demás puntos.

[19] Un orden parcial en un conjunto S esta dotado por una relación ≤ definida para ciertos pares ordenados de elementos de S tales que se satisfacen las siguientes condiciones:
1. $a \le a$ para todos los $a \in S$ (ley reflexiva).
2. Si $a \le b$ y $b \le a$, entonces $a = b$ (ley antisimétrica).
3. Si $a \le b$ y $b \le c$, entonces $a \le c$ (ley transitiva). [Apó. Pág. 354]

Además, es conveniente señalar, que fueron los griegos mediante las razones entre magnitudes $a:b$, quienes dieron los primeros pasos de un largo recorrido que culminaría siglos mas tarde, en la representación $\frac{a}{b}$, no con esto se pretende decir que son un mismo proceso, ya que la razón es un procedimiento de comparación entre magnitudes, de ahí que, puede llegar a ser un proceso infinito, como en el caso de la comparación de magnitudes inconmensurables, a su vez la división $\frac{a}{b}$ también se presenta como un proceso, que contrariamente a la razón siempre se obtiene como resultado un número.

El texto, también designa a los racionales como $\mathbb{Q}$ y los disgrega así: $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^{+}\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}^{-}$, de una manera conjuntista. Además, menciona que este es un conjunto infinito, que no tiene ni primer, ni último elemento.

Igualmente, indica que $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso, ordenado y que se pueden realizar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división (con divisor diferente de cero) y la potenciación de base racional y exponente entero (excepto 0^0). Asimismo da la representación decimal de los números racionales definiendo a $\mathbb{Q}$ como el conjunto de las expresiones decimales periódicas.

Si $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, al trasformar la fracción $\frac{a}{b}$ a una expresión decimal, determinado el cociente entre a y b, puede ocurrir que $\frac{a}{b}$ sea de la forma:

$\frac{a}{b} = n, a_1\ a_2 \ldots a_k$, expresión decimal exacta.

$\frac{a}{b} = n, a_1\ a_2 \ldots a_k\ a_1\ a_2 \ldots a_k = n, \widehat{a_1\ a_2 \ldots a_k}$ expresión decimal periódica pura.

$\frac{a}{b} = n, b_1\ b_2 \ldots b_m\ \widehat{a_1\ a_2 \ldots a_k}$ expresión decimal periódica mixta.

Todo número racional se puede trasformar en una expresión decimal periódica.

Toda expresión decimal periódica se puede trasformar en un número racional, de la siguiente manera:

- **Expresión decimal exacta:**

$$n, a_1\ a_2 \ldots a_k = \frac{n\, a_1\ a_2 \ldots a_k}{10^k}$$

- **Expresión decimal periódica pura:**

$$n, \overparen{a_1\ a_2 \ldots a_k} = \frac{n\, a_1\ a_2 \ldots a_k - n}{10^k - 1}$$

- **Expresión decimal periódica mixta:**

$$n, b_1\ b_2 \ldots b_m \overparen{a_1\ a_2 \ldots a_k} = \frac{n\, b_1\ b_2 \ldots b_m\ a_1\ a_2 \ldots a_k - n\, b_1\ b_2 \ldots b_m}{(10^k - 1)\, 10^m}$$

[Pág. 11]

Es conveniente resaltar, que esta representación de los números racionales, dada por el texto no es rigurosa, pues aunque muestra como pasar de un fraccionario a un decimal y de un decimal a un fraccionario, no presenta el proceso riguroso en donde cada número racional se puede representar como una serie; por ejemplo: el número $\frac{1}{3}$ se puede representar como la serie,

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots$$

Como era de esperarse, el texto establece una diferencia entre los números racionales e irracionales, a través de las representaciones decimales infinitas periódicas y no periódicas. Pero no alude aspectos claves de estos sistemas numéricos, tal vez por que escapan de la escolaridad, o sea no alude que: $\mathbb{I}$ es un conjunto denso, que $\mathbb{I}$ es mas grande que $\mathbb{Q}$**,** es decir, que el infinito de $\mathbb{I}$ es mas grande que el infinito de $\mathbb{Q}$**,** no menciona que los elementos de $\mathbb{Q}$ se pueden contar, mientras que los elementos de $\mathbb{I}$ no, asimismo, no presenta el porqué $\mathbb{I}$ no completa la recta, es decir no solo esta compuesta por irracionales, lo cual se puede mostrar si se quita de la recta real el número 2 que pertenece a los racionales, entonces ese punto quedará sin la representación de un número real.

Por otro lado, el texto señala:

> Un número real, es un número que puede representarse mediante una expresión decimal de infinitas cifras. [Pág. 11]

Es verdad que un número real se puede representar con una expansión decimal infinita periódica o no periódica, pero es de notar, que el texto comete una imprecisión, al definir un número real mediante su representación.

Además, el texto representa los números reales como $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$; expresa como propiedades fundamentales de $\mathbb{R}$**,** que es un conjunto infinito, denso, ordenado por la relación $\leq$, no tiene ni primero ni último elemento y que es continuo, es decir que completa la recta geométrica, estableciendo de esta manera, que a cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto sobre la recta.

La propiedad de que $\mathbb{R}$ es un conjunto continuo, fue demostrada por Dedekind al establecer la IV propiedad de los números reales:

> Si el sistema $\mathbb{R}$ de todos los números reales se divide en dos clases $\mathbf{U_1}$**,** $\mathbf{U_2}$, tales que cada número α_1 de la clase $\mathbf{U_1}$ es menor que cada número α_2 de la clase $\mathbf{U_2}$**,** entonces existe un solo número α que puede producir esta separación. [New Pág. 125].

Asimismo, Cantor también realizo una construcción de los números reales, mostrando la propiedad de que $\mathbb{R}$ es un conjunto continuo, al demostrar que dado un punto de la recta le corresponde un número, al aproximar cada número irracional por una sucesión de puntos racionales que converge, pero no pudo demostrar la relación inversa, que a cada número le corresponde un punto de la recta, para lo cual invocó el siguiente axioma:

> A cada número le corresponde un punto en la línea recta, cuya coordenada es igual al número. [Rec Pág. 55].

Igualmente, en el texto se establece que en $\mathbb{R}$ se pueden realizar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división (con divisor diferente de cero), la potenciación de base real y exponente entero (excepto 0^0) y la radicación de radicando no negativo, dando las propiedades de las operaciones de potenciación y radicación.

Cabe mencionar, que con el concepto de cortadura de Richard Dedekind, fue posible definir todas las operaciones de manera rigurosa en los reales, pues antes se dificultaba realizar operaciones aritméticas con magnitudes que no podían expresarse exactamente. Por ejemplo no se podía demostrar la igualdad $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$, ya que debían ser extraídas las raíces de 2, 3 y 6, como ninguna de estas raíces podía ser extraída exactamente, sin importar con cuantas cifras decimales se efectuara este cálculo, nunca se podría verificar la igualdad $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$. Al contrario, con el concepto de cortadura se pudo demostrar esta igualdad, ya que, el resultado de estas operaciones se representa con la misma cortadura de los números reales.

Es de notar, que el texto establece que los elementos de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ tienen sucesor y antecesor, esta propiedad se debe a la forma como se generan, dado que, cada elemento en $\mathbb{N}$**,** se obtiene a partir de la unidad, sumando de forma sucesiva el uno al elemento antecesor, y de forma similar los elementos de $\mathbb{Z}$**,** se obtienen a partir de la unidad**,** al sumar o restar el uno de forma sucesiva a cada elemento ya generado, mientras que, en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ no se puede establecer cual es el sucesor y el antecesor de cada número, ya que son conjuntos densos, por consiguiente, estas propiedades que el texto presenta, permiten observar las diferencias que existen entre estos sistemas numéricos.

Desigualdades. Valor Absoluto. Funciones Reales.

Desigualdades. Intervalos

El texto realiza una presentación de la definición de desigualdad y presenta en un teorema las propiedades de desigualdad, de las cuales demuestra tres[20], y realiza algunos ejemplos, en donde reemplaza los valores de las variables por valores numéricos, de tal manera que se puede verificar la validez de las propiedades aplicadas, además especifica que propiedad utiliza.

Posteriormente, al iniciar la teoría de intervalos establece que existe una relación entre la recta y los números reales, al mencionar:

> Si sobre una recta elegimos un punto *O*, llamado origen, una unidad de medida de longitud y el sentido a derecha como positivo, decimos que la recta así formada es una recta metrizada o recta numérica, o que es un sistema de coordenadas de dimensión 1(figura 2.1).
>
> Toda longitud medida a partir de *O* y hacia la derecha es positiva y hacia la izquierda es negativa.
>
> 
>
>
> Figura 2.1
>
> A cada punto de la recta metrizada le asociamos un número real, que es la medida de la longitud desde el origen al punto, positiva o negativa si es a la derecha de *O* o a la izquierda de *O.*
>
> Recíprocamente, todo número real puede representarse en la recta metrizada con solo medir la distancia, a partir de *O*, equivalente al número.
>
> Identificamos cada punto con el número real correspondiente. Si *P* es el punto que corresponde al número real *x,* decimos que *x* es la abscisa de *P* y escribimos *P(x),* que se lee: "el punto *P* de abscisa *x*". [Pág. 62]

[20] 1. Si $a > b,$ entonces $a + c > b + c$ para todo real $c.$
2. Si $a > b \wedge c > 0,$ entonces $ac > bc.$
5. $a > b \wedge b > c,$ entonces $a > c.$ (propiedad transitiva). [Pág. 60]

Un poco mas adelante el texto, hace una representación gráfica de algunos puntos en la recta y menciona que:

> Con el convenio anterior, todo conjunto de puntos sobre la recta metrizada puede identificarse como un conjunto de números reales y recíprocamente. [Pág. 62]

Cabe notar, que la relación entre los puntos de la recta y los números reales que presenta el texto, es la biyección que estableció Dedekind en 1872, ya que da como característica, que si en la recta se tiene un punto de origen y una unidad de medida, a cada punto de la recta se le puede asociar un número real, recíprocamente a cada número real se le puede asociar un punto en la recta.

Además es de advertir, que al no realizar la representación geométrica de los números irracionales en la recta, el autor evade el problema de no establecer con certeza, la posición de cada uno de estos números, sin hacer referencia al problema de la representación de estos números por la forma decimal.

Sucesiones. Límites. Continuidad.

Sucesiones de Números Reales

El texto comienza esta sección realizando una inducción al concepto general de sucesiones con una serie de ejemplos de sucesiones sencillas, en donde muestra la forma que tiene cada término.

En el texto se enfatiza que una sucesión no es un conjunto de reales, sino un conjunto de parejas, que se representa (n, s_n), dejando en claro con esta notación que la sucesión es una función.

Asimismo, el texto da una amplia serie de ejemplos en donde se puede observar claramente la definición de sucesión. También presenta las definiciones usuales de sucesión monótona y sucesiones acotadas.

Límite de una Sucesión

Para introducir la definición de límite de una sucesión, el texto presenta una amplia serie de ejemplos, que representa geométricamente, en donde se puede observar el recorrido de la sucesión y su límite. Dando luego la definición de límite de una sucesión:

Definición 3.4 Límite de una sucesión

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ tiende a un límite L y se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L,$$

(se lee: límite de a_n cuando n tiende a ∞ es L)

si la diferencia entre a_n y L, en valor absoluto, es tan pequeña como se desee cuando n es muy grande.

Simbólicamente: $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ si $|a_n - L| < m$

donde m es una cantidad tan pequeña como queramos cuando n es muy grande.

[Pág. 112]

Este es el primer acercamiento a la definición de límite de una función, es oportuno señalar que esta definición se asemeja a la noción de límite de sucesión dada por Cauchy en 1821, en donde se utiliza el lenguaje un poco impreciso de “tan pequeño como se desee” y “muy grande”:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabará por diferir de este tan poco como se quiera, este último se llamará el límite de todos los demás. [Cau 94. Pág. 76]

Asimismo, el texto da un significado geométrico a la definición de límite de sucesión que presenta:

Geométricamente significa lo siguiente: si dibujamos en una recta metrizada el punto de abscisa L y alrededor del punto un intervalo abierto de amplitud 2m, todos los términos de la secuencia a partir de cierto n en adelante, estarán dentro de este intervalo (figura 3.5). Dicho intervalo se llama un entorno de L.

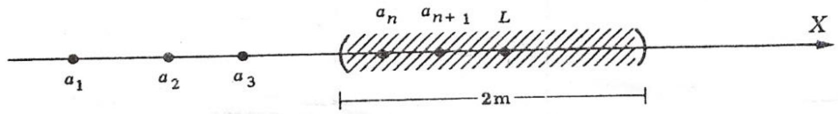


Figura 3.5

[Pág.113]

A este significado geométrico de la definición de límite de una sucesión que el texto da, le hace falta precisión, pues el autor intenta dar esta definición en términos de vecindad, sin explicar con anterioridad esta noción, por lo cual no es claro quien es $2m$.

Posteriormente, el texto da la definición usual de convergencia y divergencia de una sucesión y presenta algunos ejemplos de sucesiones sencillas, en donde muestra la convergencia o divergencia de estas, también demuestra la divergencia de una sucesión alterna, utilizando la definición de límite de una sucesión.

Por otro lado, aunque el texto presenta las definiciones de sucesión acotada y límite de una sucesión, el autor no hace referencia a la relación que existe entre estas nociones y la propiedad de completez de los números reales, esto es, una sucesión monótona y acotada es un conjunto de números reales que converge a un número real, y según el axioma de completez estas sucesiones poseen un supremo o un ínfimo.

Límite de una Función

Para introducir la definición de límite de una función, el texto realiza algunos ejemplos en donde halla el límite por aproximaciones, aplicando la noción de sucesión convergente.

Luego da una pequeña explicación de lo que significa que una variable se aproxime a un valor determinado y a continuación da la definición de límite de una función:

> ***Definición 3.6 Límite de una función.***
>
> Una función $y = f(x)$ tiende a un límite b, cuando x tiende a a y se escribe:
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$
>
> si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que
>
> $|f(x) - b| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$

[Pág.116]

Vale la pena señalar, que esta definición fue dada por Weirstrass entre los años 1.841 a 1.856, definición dada en términos de ε y δ, simbología que no pudo ser antes utilizada debido a que no existía una teoría de conjuntos.

Aunque el texto da la definición anterior, en términos de ε y δ, no realiza ningún ejemplo en donde se aplique esta definición, lo cual es necesario, pues mediante ciertos ejemplos o representaciones gráficas, se puede aclarar un poco esta definición, que aparentemente suele parecer complicada para el lector al estudiarla por primera vez.

Propiedades de los Límites. Algebra de Límites

El texto da el teorema de la Unicidad del Límite para funciones y sucesiones[21] , además, presenta algunos ejemplos de límites de funciones que no existen.

---

[21] Teorema. Unicidad del límite

De los ejemplos de límites de funciones que el texto presenta, se puede deducir un buen criterio sobre unicidad de límite:

- Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe, el valor de este límite puede obtenerse a partir de cualquier sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_n \to 0$, es decir: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n)$.
- Si dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ producen valores distintos en $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n)$ y $\lim\limits_{n \to \infty} f(b_n)$, entonces el límite no existe.

[Alfa 11. Pág.103]

Criterio, que es una alternativa para probar la no existencia del límite, pues, si se toman dos sucesiones que convergen a cero y se aplica el procedimiento dado en el criterio, y si los límites obtenidos son diferentes, se puede concluir que el límite no existe. Por otra parte, en el caso de que el límite exista, este criterio no sería útil, ya que, al hallar el límite con un cierto número de sucesiones que convergen a cero, no se puede garantizar la existencia del límite.

A continuación el texto presenta las propiedades de los límites mediante un teorema, las cuales no son demostradas, además realiza una amplia serie de ejemplos en donde muestra claramente la aplicación de estas propiedades.

Continuidad

El texto comienza dando como característica de la continuidad, que la gráfica de las funciones continuas no tienen agujeros y que pueden dibujarse en un solo trazo sin levantar el lápiz, esta definición intuitiva geométrica, data antes del siglo XVIII.

Además, presenta una gráfica de una función continua y posteriormente presenta la definición de continuidad puntual:

---

a) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L,$ entonces L es único.

b) Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente y $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L,$ entonces L es único. [Pág. 121]

Definición 3.7 Continuidad

Una función, $y = f(x)$, es continua en $x = a$, si se cumple que:

1. $f(a)$ está definida, y

2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si una función es continua en todos los puntos de su dominio, se dice que la función es continua.

[Pág.128]

Es de señalar, que para Cauchy no tenia sentido definir la continuidad de una función en un punto, pues, este de cierta manera aun estaba ligado a la tradición aristotélica, según el cual no se concibe a la recta como un conglomerado de puntos.

Luego, el texto explica cuando una función es discontinua, realizando una representación gráfica de una función a trozos, en la cual se puede observar un salto de esta función, enfatizando que no cumple las condiciones para ser continua. Además, presenta una serie de ejemplos de funciones continuas y discontinuas, probando la continuidad o discontinuidad mediante la definición.

Aunque el autor, solo presenta tres ejemplos de funciones sencillas, para la explicación de este tema, empleando la definición de continuidad y su representación gráfica, logra que el lector, evidencie la continuidad o discontinuidad de funciones en un punto.

Conclusiones del Texto Matemática Progresiva

1. Aunque el texto presenta como repaso los sistemas numéricos, realiza una buena presentación al exponer algunas de las propiedades topológicas y algebraicas de cada sistema numérico, incluso extendiéndose en los números racionales, al tener en cuenta su representación decimal.

2. Si bien, el texto establece la relación biyectiva que existe entre los números reales y la recta, dando como características el punto de origen y la unidad de medida, indicando la representación geométrica de los racionales, el autor no muestra la representación de los irracionales en la recta, evadiendo la dificultad que históricamente existió durante siglos de relacionar la recta y los números reales. Si se llegara a realizar la representación tanto de los racionales como de los irracionales en la recta, el lector podría observar, porqué el sistema de los números reales es continuo.

3. Se pueden observar diferencias entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, al mencionar que $\mathbb{R}$ es continuo, en las operaciones algebraicas al presentar la radicación para radicandos no negativos en $\mathbb{R}$**,** y al establecer las diferencias entre los números racionales e irracionales, a través de las representaciones decimales infinitas periódicas y no periódicas**.**

4. El texto le da relevancia al tema de sucesiones, debido al extenso desarrollo de este, presentando la definición usual de sucesión, en donde enfatiza que ésta es un caso particular de las funciones, asimismo, presenta las clases de sucesiones, y expone la divergencia o convergencia de estas, sustentando estas definiciones con ejemplos que son resueltos de forma algebraica, teórica y geométrica en el tema de límites.

5. Al abordar el tema de límites como lo hicieron los matemáticos del siglo XVI y XVII a través de aproximaciones, y como lo hizo Cauchy a través de sucesiones, el texto, ayuda al estudiante a apropiarse de manera intuitiva de la noción de límite, en vista de que, a través de aproximaciones el estudiante se apropia de la idea de que, el límite es un acercamiento de la función en cierto punto, por otro lado, al presentar límites de sucesiones, antes de límite de funciones esta partiendo de un caso particular a un general, teniendo en cuenta que en algunos casos, es más fácil ir de lo particular a lo general.

6. Al presentar la continuidad puntual con algunos ejemplos gráficos de funciones continuas, el texto le permite al lector acercarse de manera intuitiva a esta noción y al hacer la presentación rigurosa de este concepto, permite que adquiera una idea del concepto de continuidad puntual de una función.

7. El estudiante no va a poder observar en este texto, cómo se emplean los temas en resolución de problemas de aplicación, debido a que los ejemplos que expone para cada tema, son de tipo algebraico.

8. Este texto puede ser una buena referencia y un buen apoyo, para el estudio de los sistemas numéricos y el tema de sucesiones, debido a que hace una amplia y buena presentación de estos temas, dando las definiciones con un lenguaje apropiado para el nivel del curso al que está orientado. Además, en el caso de sucesiones, emplea una gran variedad de ejemplos para la introducción y el desarrollo de esta temática.

7.2. Introducción al Cálculo

Este texto esta orientado hacia los estudiantes de grado once y es editado por: **Santillana,** edición 2004. El texto esta distribuido por unidades, las cuales están subdivididas por temas. Al inicio de cada unidad se plantean los temas a estudiar y las aplicaciones que estos pueden tener en situaciones y temas de diversas áreas del conocimiento, e información y ejercicios orientados a revisar los prerrequisitos que se deben tener para el estudio de la unidad. En cada tema se encuentran algunos recuadros históricos de matemáticos que contribuyeron con el desarrollo de la teoría de cada tema, recuadros de problemas o ejercicios para consolidar los conceptos y los procedimientos, recuadros en donde se aclara el significado y el origen de términos matemáticos.

Los ejemplos que presenta el texto contienen soluciones gráficas, analíticas y/o numéricas, que proporcionan una visión más amplia de las nociones matemáticas expuestas y dan una idea a los estudiantes del procedimiento que se debe seguir para la resolución de ejercicios. Las actividades propuestas en cada tema son de resolución algebraica, teórica y de aplicación, que sirven para ejercitar y aplicar los conceptos y procedimientos estudiados, además al final de cada unidad propone actividades de refuerzo y actividades de aplicación a distintas disciplinas, que invitan al estudiante a resolver ejercicios y problemas en los que se comprende la utilidad de las matemáticas. También, al final de cada unidad dedica una página en donde presenta un resumen de los más importantes conceptos estudiados, una página para enseñar el manejo de la calculadora de acuerdo a cada tema y una página en donde muestra la forma de solucionar los problemas.

A continuación, se presentara el análisis realizado a las dos primeras páginas y a los temas 2 y 3 de la unidad 1 y a la unidad 3, en las cuales se exponen los temas pertinentes a este trabajo. Este análisis se realizará teniendo en cuenta el orden de las temáticas del texto, que en este estudio aparecen como subtítulos.

La Línea Recta. Números Reales

Al inicio de la unidad el texto realiza un breve comentario de la estructura de los reales:

> La estructuración del sistema de los números reales se puede enfocar de dos formas: una de ellas es el método usado por Dedekind, que introduce primero en forma axiomática el estudio de los números naturales, para extenderse luego a los números enteros, racionales, y con base en estos últimos definir los números reales. La otra forma define axiomáticamente el sistema de los números reales y, luego, demuestra que los números racionales, enteros y naturales son subconjuntos de los números reales. En esta unidad utilizaremos la última forma.
> [Pág. 8]

En este comentario, el texto menciona de una manera muy superficial, que Dedekind logró una estructura axiomática de los números reales, sin hacer referencia al largo proceso que conllevo llegar a esta estructuración.

Asimismo, el texto expone de manera resumida y elemental como se fueron ampliando los sistemas numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, de manera que se puedan resolver ecuaciones que son irresolubles en el sistema anterior. Por ejemplo, explica que los números naturales surgieron de la necesidad de contar y los números enteros de la necesidad de resolver ecuaciones de la forma $x+a=b$.

Además, presenta el conjunto de los números naturales como $\mathbb{N}$={1,2,3,...}, el de los enteros como $\mathbb{Z}$={...,-2,-1,0,1,2,...} y el de los números racionales como **$\mathbb{Q}$= { (a/b) / a,b$\in\mathbb{Z} \wedge$ b≠0 }**, y que estos se pueden representar como puntos que van llenando la recta geométrica, de manera que a cada punto le corresponde un número, mostrando que el dominio de los $\mathbb{N}$**,** $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$**,** no es suficiente para llenar la recta y que esta solo se completa con los reales. También, menciona que existe una relación biyectiva entre los puntos de la recta y los números reales, sin ahondar mucho en ello.

Por otra parte, el texto define el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ como el complemento de los números racionales, sin tener en cuenta su representación decimal, es decir no establece la diferencia que existe entre la representación decimal de los números racionales $\mathbb{Q}$ y la de los números irracionales $\mathbb{I}$, lo cual es necesario, debido a que las características decimales permiten observar e identificar de manera precisa la diferencia que existe entre un número racional e irracional.

Sistema de los Números Reales

En este tema, el texto presenta axiomáticamente al conjunto de los números reales como un conjunto que está dotado de las operaciones de suma y multiplicación y que satisface los axiomas: clausuratividad, conmutatividad, asociatividad, elemento neutro, elemento simétrico[22], distributividad,

[22] Elemento simétrico: Adición: $\forall a \in R, \exists -a$ (opuesto) $\in R,$ tal que $a+(-a)=0$
Multiplicación: $\forall a \in R,$ excepto el $0, \exists \frac{1}{a}$ (inverso) $\in R,$ tal que $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)=1$

dicotomía[23], reflexividad, simetría, transitividad, uniformidad respecto a la adición[24], uniformidad respecto a la multiplicación[25], y sustitución[26].

Aunque estas propiedades permiten ver la estructura que alcanzaron los números reales gracias a los matemáticos del siglo XIX, el texto comete una imprecisión al definir sólo con estas a $\mathbb{R}$, debido a que estas propiedades también las satisface $\mathbb{Q}$**,** tal vez sería conveniente que se mencionen propiedades que solamente se satisfacen en $\mathbb{R}$**,** por ejemplo que $\mathbb{R}$ es continuo.

El texto utiliza estos axiomas para demostrar algunas propiedades de $\mathbb{R}$, como la cancelativa, y para ejemplificar los métodos de demostración, proponiendo como ejercicio realizar la demostración de las otras propiedades.

Desigualdades. Inecuaciones

Orden de $\mathbb{R}$

El texto establece que los números reales son un conjunto ordenado, dando la definición usual y mostrando geométricamente en la recta lo que significa, además da las propiedades de orden: tricotomía[27], transitiva, monotonía de la adición y monotonía de la multiplicación[28].

---

[23] Dicotomía: $\forall a,b \in R, a = b \vee a \neq b$

[24] Uniformidad respecto a la adición: $a = b \Rightarrow a + c = b + c, \forall c \in R$

[25] Uniformidad respecto a la multiplicación: $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c, \forall c \in R$

[26] Sustitución: $\forall a,b \in R,$ si $a = b,$ entonces a puede ser sustituido por b en cualquier expresión sin que se altere el valor de la expresión. [Pág. 26]

[27] Tricotomía: Para dos números reales cualesquiera a y $b,$ uno y solo uno de los siguientes enunciados es verdadero: $a < b, a = b, a > b.$

[28]Monotonía de la adición: $a < b \Rightarrow a + c < b + c, \forall c \in R$

Monotonía de la multiplicación: $a < b \wedge c \in R^{+} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

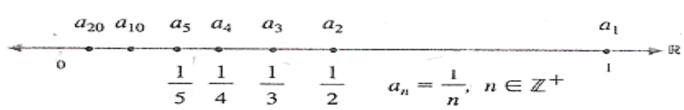
Teoría de Intervalos

El texto da la definición de intervalos de manera conjuntista y gráfica, sin presentar ejemplos que ilustren esta definición. Es de notar, que al presentar los intervalos como conjuntos, introdujo las operaciones de unión, intersección y diferencia entre conjuntos para poderlos operar. Además se puede señalar que en el tema de intervalos, el texto no da ningún ejemplo que permita visualizar esta definición.

En uno de los recuadros, el texto deja como investigación una de las propiedades mas relevantes del sistema de los números reales, la propiedad arquimediana.

Límites y Continuidad

En esta unidad, el texto empieza con un breve repaso, presentando la definición usual de sucesión de una manera formalista y hace la representación gráfica de un ejemplo sobre la recta de la siguiente manera:



[Pág. 79]

Luego, plantea una serie de ejercicios dando el n-ésimo término. Vale mencionar, que por la manera de presentar la sucesión mediante el n-ésimo término, no le permite al lector ver la sucesión como una función, debido a que no lo presenta en términos de función, es decir como $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$,

---

$a < b \wedge c \in R^- \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c.$ [Pág. 30] además, al no colocar puntos suspensivos entre a_5, a_{10} y a_{20}, podría interpretarse que entre ellos no hay mas términos.

Introducción a Límite

Mas adelante, el texto realiza una introducción resaltando la importancia del límite para desarrollar otros conceptos matemáticos, conjuntamente presenta una breve reseña histórica acerca del problema del área de un circulo que se intento resolver con el método de exhaustión y el problema del volumen de un sólido de revolución, que Cavalieri intento resolver con el método de los indivisibles. Además menciona que una de las herencias de Newton y Leibniz es el concepto de infinitesimal que modernamente son los límites iguales a cero.

Es de señalar que estos métodos y el concepto de infinitesimal son las primeras teorías de límites.

Exploración de Límites de Sucesiones con Calculadora

En esta parte, el texto expone algunos ejemplos de aproximaciones al límite de una sucesión con calculadora, realizando la representación gráfica de uno de estos, lo cual permite aproximar al estudiante al significado de convergencia de una sucesión.

Llama la atención la forma de obtener el límite por aproximaciones con calculadora que el texto presenta, ya que, se determina el límite de manera intuitiva, lo cual permite recordar las primeras consideraciones intuitivas y prácticas de la noción de límite mediante aproximaciones, que se realizaban manualmente.

Posteriormente, el texto da la definición del límite de una sucesión, y en las actividades que propone, el autor advierte que el procedimiento de hallar el límite de sucesiones con aproximaciones por la calculadora no es exacto, es decir que no siempre conduce a la respuesta correcta, ya que puede variar de acuerdo con el modelo de la calculadora. Pero aparte de esto, no aclara que existen límites que no pueden ser hallados mediante aproximaciones con calculadora, por ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

Pues, al hallar el límite de esta función en la calculadora, parece que su valor tiende a cero, es decir la calculadora da valores falsos, en realidad el límite de está función es $\frac{1}{6}$.

Límite de una Función

Posteriormente, el texto hace una aproximación a la idea de límite con ejemplos, y en algunos de estos relaciona el concepto de límite con problemas de aplicación.

Mas adelante, presenta otra definición no formal de límite de funciones:

Decir que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *significa que la diferencia entre* $f(x)$ *y* L *se puede hacer arbitrariamente pequeña con tal que* x *esté lo suficientemente cerca de* a *pero diferente de éste.* [Pág. 88]

Cabe señalar que esta definición intuitiva, de límite de una función que el texto presenta, se asemeja a la definición de límite de una sucesión dada por Cauchy en 1821:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabará por

> diferir de este tan poco como se quiera, este último se llamará el límite de todos los demás. [Cau 94. Pág. 76]

Es de notar, que el texto ofrece una breve reseña histórica de Agustín Cauchy, en donde comete una imprecisión al afirmar que la definición de límite en términos de ε y δ, es dada por Cauchy, lo cual no es cierto, ya que este no tenía los elementos epistemológicos necesarios para dar la definición de límite en estos términos. Asimismo, cabe aclarar que esta definición fue dada por Weirstrass alrededor de 1841 a 1856.

A continuación, el texto da un ejemplo detallado del límite de una función mediante aproximaciones que utiliza para introducir los términos ε y δ, y posteriormente, da la definición rigurosa del límite de una función.

Además, el texto hace el siguiente comentario histórico:

> Zenón de Elea anunció, en el siglo V a.C., una paradoja famosa: en una carrera entre Aquiles y una tortuga, que lleva al héroe una ventaja AB, Aquiles no alcanzará jamás a la tortuga, puesto que cuando él esté en B, la tortuga estará en C; después, cuando él llegue a C, la tortuga estará en D, y así sucesivamente; la distancia entre los dos personajes de esta fábula se hace infinitamente pequeña. [Pág. 89]

Esta paradoja sostiene que Aquiles nunca va alcanzar a la tortuga, es decir, es imposible alcanzar cualquier límite espacial en un tiempo finito, lo que alude a una imposibilidad de movimiento. No obstante, con la formalización del límite no se puede pretender dar una solución a la paradoja, si se tiene en cuenta que el resultado de los límites de las sucesiones que modelan este movimiento mostrará la imposibilidad de movimiento en la paradoja.

Además el texto, realiza una detallada representación gráfica, que ayuda a una mejor visualización de la definición de límite de una función. Luego realiza algunos ejercicios, con la representación gráfica, de como hallar el δ con un ε dado. Asimismo presenta ejemplos donde se aplica la definición rigurosa de límite de una función para un mayor manejo de este concepto.

Límites Laterales

El texto presenta la idea intuitiva de límites laterales, la cual ilustra con algunos ejemplos gráficos, como el de la función parte entera, más adelante, da la definición rigurosa de los límites laterales y hace su representación gráfica. A continuación da como ejemplo la función signo, esto lo hace para introducir el concepto de la no existencia del límite bilateral[29], y también utilizará posteriormente dicha función como ejemplo de discontinuidad.

Es de señalar que las funciones que el texto utiliza en este tema, son funciones discontinuas a trozos, esto se puede observar por su representación gráfica, además, aunque el texto no lo mencione, esto se podría interpretar como un primer acercamiento a la discontinuidad.

Calculo de Límites Aplicando sus Propiedades

Mas adelante, el texto expone las propiedades de los límites sin demostrarlas, y las ilustra con algunos ejemplos que requieren su aplicación, especificando en cada paso que propiedad utiliza. Es de notar que son ejemplos muy detallados, que permiten ver que al aplicar las propiedades, tal vez, sea más sencillo obtener el límite.

Posteriormente, al presentar el principio de sustitución[30] afirma que las funciones para las cuales se cumple este principio de sustitución directa se

---

[29] Teorema: $\underset{x \to a}{\text{lím}} f(x) = L$ si y solo si $\underset{x \to a^-}{\text{lím}} f(x) = L$ y $\underset{x \to a^+}{\text{lím}} f(x) = L$. [Pág. 94]

[30] Principio de Sustitución : $\underset{x \to a}{\text{lím}} f(x) = f(a)$. [Pág. 98]

llaman funciones continuas en el punto, de esta forma el texto hace un primer acercamiento a la noción de continuidad en un punto.

Continuidad

El texto hace una aproximación a la idea de continuidad, mediante algunos ejemplos gráficos de funciones continuas, dando como característica de las gráficas que estas se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel, es decir que la gráfica no tiene huecos. Similarmente da ejemplos gráficos de funciones no continuas, en donde hace la diferencia que al contrario de las anteriores su gráfica si presenta huecos. Además realiza el siguiente comentario:

> La idea de variación continua experimentada por una magnitud física trata de expresar que ese cambio o variación ha sido "suave", sin "saltos instantáneos" ni otras formas de violencia. Aun aceptando esa continuidad, esto no quiere decir que una variación continua no pueda ser tan rápida y violenta como para que sus efectos sean desastrosos, como los producidos por un tornado. [Pág. 113]

En este comentario el texto presenta la continuidad como característica de un objeto espacio temporal, que es la forma como Aristóteles (siglo V a.C.) concebía la idea de continuidad, ya que este solo consideraba la continuidad para fenómenos físicos.

A continuación el texto da una idea intuitiva de continuidad:

> Una función es continua en un punto cuando a pequeñas variaciones de la variable independiente corresponden pequeñas variaciones de la variable dependiente. [Pág. 113]

Es de observar que esta idea intuitiva que da el texto se asemeja a la definición de continuidad que dio Cauchy en 1821.

> Sea $f(x)$ una función de la variable x y supongamos que, para cada valor de x intermedio entre dos límites dados, esta función admite un valor único y finito. Si, a partir de un valor de x comprendido entre esos límites, se atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α, la función misma recibirá como incremento la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ que dependerá al mismo tiempo de la variable α y del valor x. Dado esto, la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, una función continua de esta variable si, para cada valor de x intermedio entre estos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ decrece indefinidamente con el de α. En otras palabras, la función $f(x)$ permanecerá continua respecto de x entre los límites dados, si entre esos límites un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente de la función. [Gál. Pág. 90]

Para Cauchy es necesario estudiar comportamientos alrededor de cada punto de la función, para poder comprender el comportamiento global, contrario a lo que se venía realizando, pues anteriormente se pretendía comprender la función tratándola como un todo.

Posteriormente, el texto introduce la definición moderna de función continua en un punto, mediante un ejemplo que permite visualizar este concepto, además, da la definición usual de continuidad en un intervalo.

Luego, el texto ilustra esta definición con ejemplos que representa gráficamente, además aclara que existen continuidades evitables y no evitables mediante ejemplos que gráficamente permiten ver el tipo de discontinuidad.

Cabe señalar, que al final de la unidad límites y continuidad, después de presentar una serie de actividades, expone en la pagina 124 la propiedad del valor intermedio, que es un teorema del cual Cauchy en 1821, en su libro de **Análisis** realizó su demostración sin referentes geométricos, asumiendo la existencia de los números reales, definiendo cantidad variable, función continua, convergencia de una serie y límite.

Este teorema el texto lo presenta como una propiedad, y realiza su representación gráfica. Asimismo menciona que esta es una manera de ver la continuidad de las funciones, al referirse que se puede trazar la gráfica sin levantar el lápiz del papel.

Se puede observar que en esta unidad el texto ofrece una amplia serie de ejemplos y actividades acordes al nivel de conocimiento de este curso.

Conclusiones del Texto Introducción al Cálculo

1. La única diferencia que se puede establecer entre los reales y los racionales es la continuidad de los reales, la cual es expuesta de forma intuitiva en el texto cuando esté muestra como cada sistema numérico va completando la recta numérica, pues aunque el texto presenta el conjunto de los números reales de forma axiomática, no tiene en cuenta que estos axiomas también los satisfacen los racionales.

2. El texto evade introducirse en nociones complejas como el axioma de completez de los números reales, esto se puede advertir desde la formalización de número real, pues aunque presenta de forma axiomática sus propiedades no hace referencia a esta propiedad.

3. Al abordar el tema de límites utilizando aproximaciones, el texto permite al lector adquirir una idea intuitiva de este concepto, y al aplicar en ejemplos la definición rigurosa permite que el lector adquiera un cierto manejo de la definición formal de límite.

4. Este texto aborda de distintas formas la continuidad, ya que hace referencia de la manera como Aristóteles concebía la continuidad al presentarla en un fenómeno físico, y además le da relevancia a la discontinuidad de una función al presentarla como una temática.

5. Un buen elemento que presenta el texto son los recuadros, de suerte que estos activen la curiosidad del lector, pues invitan al estudiante a reflexionar, profundizar e investigar, acerca de la información que contienen y por ende a las nociones correspondientes a estos.

6. Es destacable las actividades que propone el texto, pues realza la utilidad de las matemáticas, debido a que en estas actividades se puede observar la aplicación de las matemáticas en diversas áreas del conocimiento.

7. Este texto puede ser una buena referencia para los docentes en el tema de límites, pues al abordarlo de forma intuitiva, da una ilustración de la noción de límite, de esta manera acerca al lector paulatinamente a la formalización de esta noción, además por la representación gráfica de la definición rigurosa de límite de una función y los ejemplos en donde se emplea esta definición, utilizando un lenguaje apropiado para el nivel del curso al que esta orientado.

7.3. Alfa 11

Este texto esta orientado hacia los estudiantes de grado once y es editado por: **Norma S.A.** Primera edición, 1999, segunda edición, 2002. Los temas están organizados por unidades, las cuales están subdivididas en lecciones. Al inicio de cada unidad, el texto presenta el tipo de competencias, que el estudiante debe desarrollar en cada tema, además, realiza un breve comentario histórico, de cómo surgieron los conceptos fundamentales que se estudiaran en cada unidad, asimismo, presenta una serie de ejercicios algebraicos, de nociones estudiadas anteriormente, que son la base o fundamento para los temas que se estudiaran en la unidad, igualmente, expone algunas aplicaciones que tienen las nociones básicas de cada unidad. Proporciona, ejemplos, que contienen soluciones gráficas, analíticas y/o numéricas, y en algunas ocasiones son de aplicación, estos capacitan a los estudiantes en la resolución de ejercicios. Además propone al final de cada lección una amplia serie de ejercicios de solución algebraica, teórica y de aplicación, que invitan al estudiante a reflexionar en busca de una solución, al finalizar cada unidad además de presentar ejercicios del mismo tipo, presenta un glosario, pasatiempos para que el estudiante desarrolle la agilidad mental, y una serie de preguntas estilo ICFES.

A continuación se presentará el análisis realizado a la primera sección de la unidad uno y a las unidades 2 y 3, en las cuales se exponen los temas pertinentes a este trabajo. Este análisis se realizará teniendo en cuenta el orden de las temáticas del texto, que en este estudio aparecen como subtítulos.

Funciones y Gráficas

Intervalos

Después de hacer una corta introducción histórica y de sugerir algunas aplicaciones del concepto de función, los autores presentan la lección 1 del libro en donde se introduce el concepto de intervalo.

Es conveniente resaltar que en este texto se asume que los números reales son conocidos de antemano, sin embargo al inicio de esta lección, de una manera poco detallada, se menciona que existe una relación biyectiva entre los números reales y la recta, luego presenta los intervalos de la manera usual, aunque con un enfoque claramente formal. Sin embargo puede resultar adecuado hacer las siguientes consideraciones con respecto a la manera en que se introducen estos conceptos del análisis.

En primer lugar el problema del infinito y de la continuidad puede quedar claramente soslayado bajo las consideraciones tan formalistas que asumen los autores. Por ejemplo al introducir el concepto de intervalo, expresan:

> Al conjunto de números reales comprendido entre los reales a y b (con $a < b$) lo llamaremos **intervalo acotado de extremo inferior a y extremo superior b.**

[Pág. 10]

En esta definición se observa que introduce de manera velada y haciendo uso del concepto de supremo e ínfimo de un conjunto, la propiedad de completez de los números reales, pero sin realizar ninguna reflexión al respecto. Igualmente cuando introduce la noción de longitud de un intervalo de extremos a y b, dice que “por esa razón usualmente también los llamamos intervalos finitos”**.** En este punto se sabe que aunque claramente en el texto se está tomando la palabra “finito” en el sentido de “acotado”, no se hace ninguna consideración con respecto al hecho de que en ese intervalo sin embargo hay infinitos números reales.

En esta parte se puede observar que el texto tiene una característica interesante y es que sin enunciarlo explícitamente comienza a familiarizar al lector con nociones topológicas.

Luego finalizando el tema de intervalos dice:

Una característica común de los intervalos acotados y no acotados es el estar constituidos por una "sola pieza", es decir, si x y y (con $x < y$) son dos puntos de un intervalo denotado I, entonces todo número real z que se encuentre entre x y y $(x < z < y)$ debe estar en I.

[Pág. 11]

Es claro que en el anterior párrafo los autores están introduciendo de manera oculta el concepto de conexidad[31] en un espacio métrico. Esta característica de inducir en el lector una cierta familiaridad con nociones de tipo topológico va a ser recurrente en las siguientes secciones del texto, que se van a analizar.

Además el texto, presenta dos tablas de ejemplos de intervalos acotados y no acotados, en donde se da la definición conjuntista, clasificación, notación, representación gráfica y longitud de los intervalos.

Mas adelante, el texto define el centro y el radio de un intervalo, nociones que introduce ya que se requieren posteriormente para dar otras definiciones en términos topológicos. De esta manera se observa como el texto comienza a exponer nociones topológicas.

[31] Un espacio métrico S se dice que es no conexo si $S = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disyuntos de S, no vacíos. Diremos que S es conexo si no es no conexo. [Apó. Pág. 104]

Sucesiones

Introducción

Para iniciar esta unidad, el autor hace una introducción histórica en la cual presenta la paradoja "del corredor"[32] de Zenón, (conocida como la dicotomía) y la sucesión de Fibonacci, que se presentan como eventos que pueden ser descritos mediante sucesiones.

La paradoja de la dicotomía de Zenón plantea la imposibilidad del movimiento a partir de ciertas condiciones del espacio y el tiempo, proceso de recorrer una distancia finita que modelado matemáticamente seria representado por una serie. La imposibilidad de otorgar una forma matemática a los procesos infinitos fue un problema para el rigor matemático, sólo hasta el siglo XIX los matemáticos lograron abstraer una forma para expresar un proceso continuo infinito.

Por otra parte, el texto menciona que las sucesiones sirven para encontrar la solución de ecuaciones cuya solución es compleja, mediante una sucesión de números que aproxima la solución. Además expresa que las sucesiones permiten definir los conceptos de derivada e integral y añade que:

> Cada número racional escrito en representación decimal, es un decimal periódico y es de alguna manera elemento de una sucesión infinita de números racionales. Con base en este hecho, las sucesiones permiten conocer mejor los números racionales. [Pág. 67]

---

[32] Una persona sería incapaz de llegar caminando hasta una pared, pues una vez ésta haya recorrido la mitad de esa distancia, tendría que avanzar la mitad del tramo restante, y una vez recorrida ésta, tendría que caminar la mitad y luego otra mitad más hasta el infinito.
[Gut. Pág. 66]

En este comentario el autor menciona la representación rigurosa de los números racionales, que se pueden ver como una serie. Es conveniente señalar que Cantor utilizo las sucesiones de números racionales para definir los números irracionales.

Sucesiones

El texto presenta la definición usual de sucesiones con un enfoque claramente formalista y realiza algunos ejemplos que representa gráficamente, en los que enfatiza que la sucesión es una función que va de los naturales a los reales.

Los ejemplos de esta lección, se centran en determinar los primeros términos de las sucesiones, además, en algunos analiza de manera geométrica el comportamiento de las sucesiones a medida que n aumenta, los cuales utiliza para introducir el concepto de sucesión monótona.

Límite de una Sucesión

El texto inicia esta lección dando la definición de cercanía entre dos puntos:

> En términos matemáticos, se dice que dos puntos x y y sobre la recta real están arbitrariamente cerca si para una medida arbitraria ε ($\varepsilon > 0$), la distancia entre ellos $|x - y|$ es menor que ε.

[Pág.73]

En esta parte, los autores no aclaran que esta definición sólo se cumple en los números reales cuando $x = y$; ya que, no hay dos puntos que satisfagan esta definición. Por ejemplo si se toma $x \neq y$, es decir $x = 0$ y $y = \frac{1}{10^{10}}$

Luego, si se aplica la definición, se tiene $\left|0 - \frac{1}{10^{10}}\right| = \frac{1}{10^{10}}$,
si se toma, $\varepsilon = \frac{1}{10^{20}}$ entonces $\varepsilon = \frac{1}{10^{20}}$.

Por lo tanto, x y y no están arbitrariamente cerca.

A continuación se presentará la demostración acerca de la validez de esta definición en $\mathbb{R}$ sólo cuando x y y, son el mismo punto:

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y sea $\varepsilon > 0$.

Cuando $x = y$, se tiene que $|x - y| = |x - x| = 0 < \varepsilon$, luego $|x - y| < \varepsilon$.

Posteriormente, el texto da la definición de vecindad abierta:

Vecindad abierta

Si a es un número real y ε es una medida, una vecindad abierta con centro a y radio ε está formada por todos los puntos x cuya distancia al punto a es menor que ε. Es decir: $|x - a| < \varepsilon$ o, en forma equivalente $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$, de donde $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

[Pág. 73]

Esta noción la introduce, ya que se requiere mas adelante para dar otras definiciones en términos topológicos.

Luego, el texto presenta la definición de límite de una sucesión en términos de vecindad, y hace algunos comentarios de este concepto:

El límite de la sucesión $a_n = f(n)$ es el número real L si dada cualquier vecindad de L, sólo un número finito de términos de la sucesión queda por fuera de ella.

[Pág. 74].

Para explicar la definición que da el texto, se presentará el siguiente ejemplo:

Sea la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, se quiere probar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Si se toma en particular una vecindad de centro 0 y radio $\varepsilon = 0{,}01$, se quiere averiguar cuantos términos de la sucesión quedan por fuera. Los términos por dentro de la vecindad dada satisfacen la relación $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0.01$, entonces $\left|\frac{1}{n}\right| < 0.01$, por lo tanto $\frac{1}{0.01} < n$ y así $100 < n$. En consecuencia, para $\varepsilon = 0{,}01$ los términos $a_{101}, a_{102}, \ldots$ quedan por dentro de la vecindad, mientras que solamente $a_0, \ldots, a_{100}$ quedan por fuera de la vecindad.

Si se toma un radio $\varepsilon < 0.01$, seguramente más términos quedaran por fuera, pero en todo caso serán siempre finitos. Además entre los términos más se acerquen a 0, más próximos estarán entre ellos.

Además, el texto utiliza la definición de límite de una sucesión para exponer la convergencia o no de una sucesión, lo cual ilustra con algunos ejemplos, igualmente, da las definiciones de sucesión acotada superior e inferiormente. Asimismo, el texto presenta ejemplos representados gráficamente, en donde estudia el comportamiento de cada sucesión, para ver si es o no acotada.

Es de mencionar, que en $\mathbb{R}$ toda sucesión convergente es fundamental, y que Cauchy dio la definición de sucesión fundamental, definición que posteriormente fue usada rigurosamente por Cantor para la construcción de los números irracionales.

Mas adelante, el texto presenta las propiedades fundamentales para límites de sucesiones, sin realizar alguna demostración al respecto. Se puede advertir, que en las propiedades 2 y 3[33], se observa la propiedad de completez de los

[33] El texto presenta las propiedades 2 y 3 de la siguiente manera:
2) Si $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente, $\{a_n\}$ converge (existe el límite).
3) Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces $\{a_n\}$ converge. [Pág. 77]

números reales, haciendo uso de los conceptos de cota superior y cota inferior de un conjunto, pero sin realizar alguna reflexión al respecto.

Límites de funciones

Noción de Límite

Para iniciar esta lección, el texto presenta una introducción, en donde hace referencia a los inicios del cálculo, mencionando ciertos matemáticos con algunos de sus aportes, así mismo, destaca la importancia del límite para el avance de las matemáticas y las aplicaciones que ha tenido históricamente.

Posteriormente, el texto utiliza como introducción para la definición de límite, la composición de una función con una sucesión, luego da la definición de límite de una función:

> El límite de una función f es L cuando x se aproxima al número 0 $\left(\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L\right)$, si para cualquier sucesión $\{a_n\}$ que converge a 0, se cumple que la sucesión compuesta $\{f(a_n)\}$ converge a L. Es decir:
>
> Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe y $\{a_n\}$ es tal que $a_n \to 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n)$.

[Pág.103]

Si se observa, esta es una forma poco usual de presentar el límite de una función en un texto de educación media, debido a que la expone en términos de la composición de una función con una sucesión. En otro sentido, se puede señalar que esta definición a simple vista parecería compleja, sin embargo con los ejemplos que el texto presenta, se logra esclarecer dicha definición.

En seguida, el texto realiza algunos ejemplos donde aplica la definición de límite, y menciona que de la definición se pueden establecer dos criterios:

- Si $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, el valor de este límite puede obtenerse a partir de cualquier sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_n \to 0$, es decir: $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(a_n)$.
- Si dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ producen valores distintos en $\lim_{n \to \infty} f(a_n)$ y $\lim_{n \to \infty} f(b_n)$, entonces el límite no existe.

[Pág. 105]

Si notamos estos criterios no son usuales en la teoría de límites en un texto de educación media y son otra alternativa para probar la no existencia del límite, de suerte que al hallar el límite de la función con una o más sucesiones que den igual valor, no se puede garantizar la existencia del límite, porque se debe cumplir para toda sucesión que converge a cero.

Técnicas de Cálculo

En esta parte, el texto presenta un teorema acerca de las propiedades de los límites de una función con respecto a las operaciones básicas, realizando algunos ejemplos en donde se ve claramente qué propiedades esta utilizando. Además, presenta el teorema del Encaje[34], con una representación gráfica y un ejemplo donde aplica este teorema.

Cabe señalar, que el teorema del Encaje es una buena herramienta que el texto proporciona para hallar el límite de funciones, en donde se presenta cierta dificultad para hallar el límite, además, este teorema es inusual encontrarlo en un texto de grado once.

---

[34] Si $f(x)$ esta limitada por $g(x)$ y $h(x)$, en un intervalo abierto que contiene a a, y si $g(x)$ y $h(x)$ tiene el mismo límite L, entonces $f(x)$ va a tener el mismo límite en $x = a$. [Pág. 118]

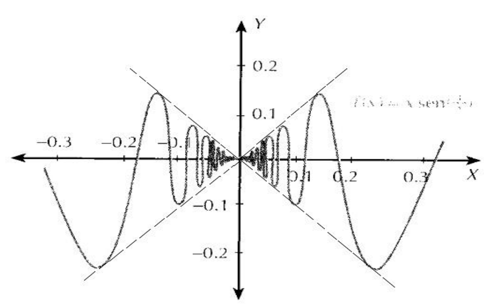
Posteriormente, el texto explica cuales son los límites infinitos, dando ejemplos, en donde se puede observar que la evaluación de los límites al infinito e infinitos nos ayudan a realizar la gráfica de la función, teniendo en cuenta que al hallar el límite cuando la función se acerca a la asíntota, se puede determinar el comportamiento de la gráfica.

Funciones Continuas.

El texto inicia esta lección, mencionando que una función continua tiene una gráfica sin interrupciones, presentando gráficas y señala que una de estas es continua a trozos, es decir que es continua en un intervalo. Además, explica analítica y gráficamente, cuándo una función es discontinua en un punto, y luego da la definición usual de continuidad en un punto.

Es de señalar que en este tema, aunque el texto presenta un ejemplo de una función continua a trozos, no da la definición de continuidad en intervalos.

Por otro lado, en algunos de los ejemplos el autor expone la discontinuidad evitable o inevitable de una función, y en uno de estos ejemplos el autor, utiliza la función $f(x) = xsen\frac{1}{x}$, en donde estudia su continuidad en $x = 0$ y realiza su gráfica:



[Pág. 123]

Es conveniente destacar, que en esta gráfica no se puede visualizar que la función es discontinua en $x = 0$, tal vez la función utilizada es un poco compleja para el nivel de este curso, además no es fácil realizar la gráfica de la función $f(x) = sen\frac{1}{x}$.

De igual forma, el texto presenta en qué valores, algunas funciones son continuas, asimismo, presenta un teorema de la continuidad de funciones respecto a las operaciones básicas.

Conclusiones del Texto Alfa 11

1. La única referencia que el texto presenta del sistema de los números reales, es la relación biyectiva que existe entre estos y la recta, aunque esto lo hace de una manera muy superficial, teniendo en cuenta que no presenta las características de esta relación, lo cual conlleva a interpretar que el autor asume a los números reales como un tema ya conocido.

2. El tema de sucesiones, el texto lo desarrolla de forma extensa, exponiendo la definición usual de sucesión y los tipos de sucesiones, además presenta ejemplos que representa gráficamente, permitiendole al estudiante una buena visualización y apropiación de este concepto.

3 La manera de presentar el tema límite de sucesiones es innovadora y poco usual, puesto que lo presenta en términos topológicos, dándole un enfoque diferente, y los ejemplos que se presentan ayudan a esclarecer un poco que significan las definiciones. Aunque es conveniente resaltar que tal vez la terminología usada es un poco avanzada para el nivel del curso al que esta orientado este texto.

4. La forma que el texto propone para resolver límites de funciones, a través de sucesiones puede ser un buen método para probar la no existencia del límite, pero no es tan eficaz en el momento de probar la existencia de éste, considerando, que si al hallar el límite de una función con dos o más sucesiones, es imposible asegurar la existencia del límite de una función, puesto que la definición que se expone en el texto, exige que el valor límite debe ser el mismo para cualquier sucesión.

5. Al introducir la definición de continuidad puntual realizando gráficas de funciones continuas y discontinuas en un punto, el autor le permite al lector

tener una idea intuitiva de esta noción, al mismo tiempo al dar la definición usual de este concepto, y al aplicarla en algunos ejemplos, esta permitiendo que el estudiante adquiera una noción rigurosa. Además podría pensarse que el autor hace énfasis en la discontinuidad evitable o no evitable ya que hace mención acerca de esta en algunos de los ejemplos. Sin embargo, cabe aclarar, que tal vez el texto no le da la relevancia necesaria al tema de continuidad, debido a la escasa profundización teórica.

6. Al apoyarse de la representación gráfica en la mayoría de los ejemplos, generalmente, el texto proporciona al lector una buena visualización de las definiciones, no obstante existen algunos en los que gráficamente no se puede observar con facilidad la noción, debido a la complejidad del ejemplo.

7. Los ejemplos que expone el texto son expresados con claridad y ayudan a esclarecer las nociones presentadas, ya que contienen soluciones gráficas, analíticas y/o numéricas, y en algunas ocasiones son de aplicación. Sin embargo, en algunos temas el texto es limitado en cuanto a estos, tal vez sería conveniente realizar una presentación extensa de ejemplos, en vista de la terminología utilizada en el libro.

8. Los ejercicios, pasatiempos, y la serie de preguntas estilo ICFES, que plantea el texto permiten que el lector refuerce y aclare las nociones expuestas, también, le ayudan a desarrollar sus habilidades y destrezas, puesto que son ejercicios en los que el grado de dificultad va en aumento, exigiéndole al estudiante una mayor reflexión en busca de la solución de estos.

9. En el texto, es destacable la manera innovadora de presentar los temas, al exponer algunas definiciones en términos topológicos, términos que pueden ser avanzados considerando el grado de escolaridad para el que este texto se promueve. Podría ser una desventaja para el estudiante, si no se presenta una

amplia gama de ejemplos que permitan esclarecer las nociones, pero puede ser ventajoso, en el sentido de que el lector pueda adquirir conceptos más complejos.

10. Este texto puede ser una buena referencia para los docentes en cuanto a la lección 1 del tema de sucesiones, debido a la profundización y claridad, con la que expone este tema, igualmente, se puede tener en cuenta, para la selección de ejercicios, ya que entre estos se encuentran ejercicios de aplicación y ejercicios tipo ICFES.

7.4. El Cálculo

Este texto está orientado hacia estudiantes universitarios y es editado por: **OXFORD University press**. Séptima edición, 1994. Además este texto es utilizado por algunos profesores de matemáticas de grado once, como guía en determinados temas. Los temas están organizados por capítulos, los cuales están subdivididos en secciones. Los temas son presentados de una manera intuitiva y formal, disgregando cada definición para que sea más asequible al lector. Los ejemplos son desarrollados de forma detallada, abarcan soluciones gráficas, analíticas y/o numéricas, y dan una visión más amplia de las nociones. Asimismo, al final de cada sección y de cada capítulo, propone actividades que son aptas para estudiantes universitarios entre las cuales se encuentran algunas demostraciones y problemas de aplicación.

A continuación se presentará el análisis realizado a las páginas 2, 3 y las secciones 1.4 - 1.9 del capítulo 1, a la sección 8.2 del capítulo 8 y a las páginas 1139 - 1145 del apéndice A1, en los cuales se exponen los temas pertinentes a este trabajo. Este análisis se realizará teniendo en cuenta el orden de las temáticas del texto, que en este estudio aparecen como subtítulos.

Funciones y sus Gráficas

En esta parte, el texto se refiere a los números reales como “cantidades involucradas en una función”, es decir como los valores que toman las variables en una función. Por esta razón se puede señalar, que se asume la noción de número real, como un tema ya conocido.

Asimismo, el texto menciona que los números reales suelen expresarse en la notación de intervalos, de lo cual hará referencia en la sección A.1 del apéndice; más adelante se presentará el análisis de esta sección.

Introducción Gráfica a los Límites de Funciones

El texto empieza esta parte, con un ejemplo en el que disgrega algunas formas de ver el limite de una función: por aproximaciones, empleando el significado geométrico de ε y δ, además, y gráficamente mostrando como elegir un δ adecuado para un ε dado; la presentación que el texto realiza de este ejemplo, es práctica y acertada, ya que, le proporciona al lector una ventajosa idea intuitiva de la noción de límite de una función.

A continuación, al presentar algunos ejemplos de límites, en uno de estos, el texto hace un primer acercamiento intuitivo a la noción de continuidad, al mencionar que la función empleada es continua, porque su gráfica no tiene agujeros, de igual forma, presenta una primera caracterización de la discontinuidad, al mencionar que una función es discontinua cuando tiene agujeros.

El texto en esta sección, expone una amplia variedad de ejemplos en los que emplea funciones sencillas, algunos de estos son representados gráficamente, mostrando de manera asequible como se puede acotar el ε para encontrar un δ, por consiguiente, permite que el lector adquiera un significado intuitivo de límite de una función.

Definición de Límite de una Función y Teoremas de Límites

El texto comienza esta sección dando la definición usual de límite de una función, explicando posteriormente de forma detallada esta definición:

En palabras, esta definición establece que los valores de función $f(x)$ se aproximan al límite L conforme x lo hace al número a si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee tomando x suficientemente cerca de a pero no igual a a.

Observe que en la definición no se menciona nada acerca del valor de la función cuando $x = a$. Recuerde, como se señaló en la sección 1.4, la función f no necesita estar definida en a, para que el $\lim_{x \to a} f(x)$ exista. Más aún, si f está definida en a, $\lim_{x \to a} f(x)$ puede existir sin que tenga el mismo valor que $f(a)$ como en el caso de la función del ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.4.

Una interpretación geométrica de la definición de límite de una función f se muestra en la figura 1, la cual presenta una porción de la gráfica de f cerca del punto donde $x = a$. Como f no está necesariamente definida en a, no existe un punto en la gráfica de f con abscisa a. Observe que si x, en el eje horizontal, está entre $a - \delta_1$ y $a + \delta_1$, entonces $f(x)$, en el eje vertical, estará entre $L - \epsilon_1$ y $L + \epsilon_1$. En otras palabras, al restringir x, en el eje horizontal, de modo que esté entre $a - \delta_1$ y $a + \delta_1$, se restringe a $f(x)$, en el eje vertical, de manera que esté entre $L - \epsilon_1$ y $L + \epsilon_1$. Así,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon_1$$

La figura 2 muestra cómo un valor pequeño de ϵ puede requerir una elección diferente para δ. En la figura se aprecia que $\epsilon_2 < \epsilon_1$, y que el valor δ_1 es demasiado grande; esto es, existen valores de x para los cuales $0 < |x - a| < \delta_1$, pero $|f(x) - L|$ no es menor que ϵ_2. Por ejemplo, $0 < |\bar{x} - a| < \delta_1$, pero $|f(\bar{x}) - L| > \epsilon_2$. Por esta razón debe elegirse un valor δ_2 más pequeño, como se muestra en la figura 3, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon_2$$

Sin embargo, para cualquier elección de $\epsilon > 0$, no importa que tan pequeño sea, existe $\delta > 0$ tal que la proposición (1) se cumple. Por tanto, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

En el primer ejemplo de esta sección, se vuelve a tratar la función mostrada en los ejemplos 1 y 2 de la sección 1.4.

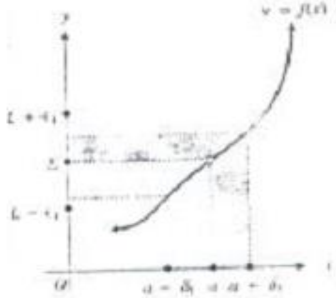


FIGURA 1

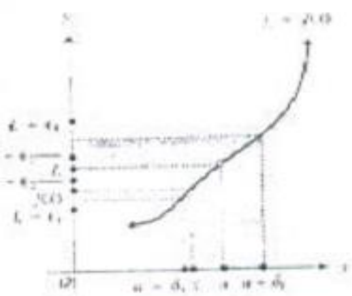


FIGURA 2

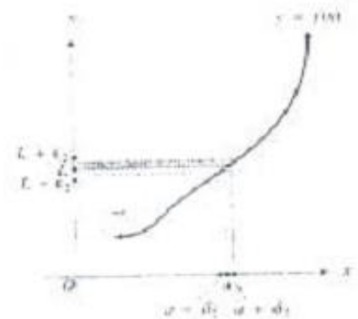


FIGURA 3

[Pág.39]

Como se mencionó antes, en el estudio histórico-epistemológico, Cauchy excluyó el análisis de todo ente geométrico en busca de un rigor matemático, por el contrario se observa como el autor se apoya de un análisis gráfico, para mostrar el significado geométrico de la definición de límite de una función.

A continuación, el texto presenta una serie de teoremas de límites, de los cuales algunos son las propiedades de los límites, y realiza algunos ejemplos de estos teoremas.

Límites Laterales

El texto da la definición de límites laterales y utiliza la función signo como ejemplo, además realiza una serie de ejemplos en los que emplea funciones a trozos que presentan discontinuidad, mencionando en uno de estos que la función presentada será considerada como un ejemplo de una función discontinua; siendo este otro acercamiento a la discontinuidad.

Límites Infinitos

En esta parte, el texto realiza ejercicios en los que analiza el comportamiento de las funciones al acercarse a las asíntotas, indicando la utilidad de las asíntotas, para hallar el límite, asimismo, muestra la relación que existe entre los límites infinitos y las asíntotas de una función.

Continuidad de una Función en un Número

El texto retoma algunos ejemplos de funciones discontinuas, para dar una aproximación a la idea de continuidad, destacando que algunas funciones poseen discontinuidad evitable, y luego, da la definición de continuidad en un punto, de modo que esto, le permitirá al lector diferenciar si una función es continua o discontinua, de suerte que el lector podría establecer una clasificación de las funciones.

Es conveniente reseñar, que las primeras clasificaciones de funciones fueron establecidas por Euler y Cauchy. Para Euler las funciones corresponden a expresiones analíticas, por tanto, las clasificó en trascendentes y algebraicas; esta clasificación fue muy pequeña para la visión de función que tenia Cauchy, para este, existían funciones que no pertenecían a ninguna de estas dos categorías. En este sentido Cauchy incorpora de manera implícita, la primera clasificación de funciones en funciones continuas y funciones discontinuas, pero a Cauchy no le interesaba estudiar las funciones discontinuas, por esta razón no tiene un solo teorema que tenga relación con las funciones discontinuas, todo su análisis corresponde a las funciones continuas.

A continuación, el texto presenta una serie de ejemplos muy detallados, explicando cuando una discontinuidad es removible o esencial, asimismo presenta ejemplos en donde se resuelven problemas de aplicación con la continuidad de funciones, en seguida, da algunos teoremas que hacen referencia a las propiedades de la continuidad, y expone ejemplos donde se aplican estas propiedades.

Fue Cauchy, quien trato de llevar la continuidad a términos matemáticos, lo cual condujo a la necesidad de demostrar la existencia de los números reales.

Continuidad de una Función Compuesta y una Continuidad en un Intervalo.

El texto introduce la definición de continuidad en un intervalo abierto, la definición de continuidad por la derecha y la definición de continuidad por la izquierda, por medio de un ejemplo, después da la definición de continuidad en un intervalo cerrado, la definición de continuidad en un intervalo semiabierto, y además, menciona que un teorema importante concerniente a la continuidad de una función en un intervalo cerrado es el teorema del Valor Intermedio:

1.9.8 Teorema del valor intermedio

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada valor k entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número c entre a y b tal que $f(c) = k$.

[Pág. 80]

Es preciso señalar, que la demostración de este teorema que desarrolló Cauchy, no garantiza con rigor la existencia del valor buscado, y en general para Cauchy no fue posible la formulación rigurosa de un principio de continuidad, ni de las nociones de límite y convergencia.

El texto no hace la demostración de este teorema, porque considera que no es pertinente para este curso, pero realiza una explicación en términos geométricos del significado de este teorema; adicionalmente presenta el teorema del Cero Intermedio, que es un corolario del Teorema del Valor intermedio, del cual hace una breve demostración, presentando algunos ejemplos referentes a estos teoremas.

Aproximaciones Polinomiales, Sucesiones y Series Infinitas.

Sucesiones

El texto inicia esta sección, mencionando que las sucesiones pueden ser finitas o infinitas. Nótese, que es poco usual encontrar que en un texto se haga referencia a la existencia de sucesiones finitas.

Luego, el texto da la definición usual de función sucesión y presenta algunos ejemplos, exponiendo en uno de estos como realizar la representación gráfica de una sucesión en la calculadora, además, aclara que el hecho de que dos sucesiones tengan términos semejantes, no implica que sean iguales, y realiza un primer acercamiento intuitivo del límite de una sucesión.

A continuación, el texto da la definición de límite de una sucesión y presenta un comentario, mostrando que existen diferencias entre el límite de una sucesión y el límite de una función, y expone el siguiente teorema:

8.2.3 Teorema

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, y f está definida para todo número entero positivo, entonces también $\lim_{n \to +\infty} f(n) = L$, cuando n se restringe a los números enteros positivos. [Pág.650]

Cuando se pudo establecer el axioma de completez de los números reales, es decir cuando se logro una estructura lógica de estos, fue posible la demostración de teoremas como esté.

Mas adelante, el texto realiza ejemplos, mencionando en uno de estos la convergencia o divergencia de una sucesión, en este ejemplo, el autor le da al lector una idea intuitiva del límite de una sucesión, al representarlo gráficamente.

Posteriormente, el texto presenta las propiedades de límite de una sucesión y las definiciones de sucesión creciente y decreciente, luego da las definiciones de cota inferior y superior de una sucesión, y presenta algunos ejemplos de estos conceptos.

Algunas de estas nociones tienen relación con el axioma de completez, pero en el texto no se hace referencia a esta relación, probablemente porque más adelante se presenta este axioma:

> 8.2.9. Axioma de completez*
> Todo conjunto no vacío de números reales que tiene una cota inferior tiene una máxima cota inferior. También, todo conjunto de números reales que tiene una cota superior tiene una mínima cota superior. [Pág. 656]

Además, muestra la importancia geométrica de este axioma en un pie de página:

> * **N. de T.** Otros nombres empleados para este axioma son: *de continuidad, de completitud, de plenitud y del supremo*. La importancia consiste en que, geométricamente, el enunciado del axioma garantiza que la recta numérica real (o eje numérico) no tiene agujeros, es decir, es continua. Este hecho, aunque no se hace explícito, es la base para el desarrollo de la geometría analítica.
> [Pág. 656]

De esta manera, el texto muestra que el axioma de completez avala la continuidad de los números reales, propiedad que fue demostrada por Dedekind y Cantor en 1872.

Igualmente, el texto presenta el teorema:

> 8.2.10. Teorema
> Una sucesión monótona acotada es convergente. [Pág. 656]

Es de notar, que en este teorema se encuentra inmerso el axioma de completez, pero el texto no establece la relación que existe entre estos dos teoremas.

A continuación se realizara el análisis de la sección A.1 del apéndice.

Temas de Matemáticas Previas al Cálculo

Números Reales y Desigualdades

En esta sección, el texto expone que el sistema numérico real, está conformado por los números reales y por las operaciones de adición y multiplicación; asimismo, expresa que este sistema puede describirse completamente mediante un conjunto de axiomas y que con base en estos, se pueden deducir las propiedades de los números reales.

Es preciso señalar, que con la construcción de los números reales, basada en el concepto de cortadura que realizó Richard Dedekind, se lograron definir las operaciones en los números reales de manera rigurosa.

Por otra parte, el texto clasifica los números reales como racionales o irracionales; esto puede interpretarse como una definición conjuntista de este sistema numérico.

Además, el texto menciona que un número racional es aquel que puede expresarse como la razón de dos números enteros y que están compuestos por: los enteros (positivos, negativos y cero), las fracciones positivas y negativas, los números decimales finitos positivos y negativos, los números decimales infinitos periódicos positivos y negativos.

En esta representación que el texto expone de los números racionales, no es posible observar que un número racional se puede representar como una serie.

Posteriormente, el texto expresa que los números reales que no son racionales se denominan números irracionales, y que son aquellos números decimales infinitos no periódicos positivos y negativos.

Vale la pena señalar, que el texto establece una diferencia entre los números racionales e irracionales, mediante su representación decimal; sin embargo, un aspecto clave que el texto no señala, es que el conjunto de los números irracionales es mas grande que el conjunto de los números racionales, es decir que el infinito de los irracionales es mas grande que el infinito de los racionales.

Mas adelante, el texto señala que los elementos del conjunto $\mathbb{R}$ están ordenados totalmente, siendo esta la primera propiedad algebraica que el texto presenta de los números reales.

Después, el texto hace una interpretación geométrica de los números reales:

> A continuación se presentará una interpretación geométrica del conjunto R de los números reales al asociarlos con puntos de una recta horizontal denominada **eje.** Se elige un punto, llamado **origen,** para representar el número 0. Se selecciona arbitrariamente una unidad de distancia. Después, cada núme-ro entero positivo n se representa por el punto situado a n unidades a la derecha del origen, y cada número entero negativo $-n$ se representa por el punto ubicado a una distancia de n unidades a la izquierda del origen. A estos puntos se les conoce como **puntos unidad** y se designan mediante los números con los cuales se asocian. Por ejemplo, 4 se representa por el punto que está 4 unidades a la derecha del origen, y -4 se representa por el punto ubicado a 4 unidades a la izquierda del origen. La figura 1 muestra

los puntos unidades que representan a 0 y los primeros doce números enteros positivos y sus correspondientes enteros negativos.

FIGURA 1

Los números racionales se asocian con puntos del eje de la figura 1 al dividir los segmentos cuyos extremos son puntos que representan números enteros sucesivos. Por ejemplo, si el segmento de 0 a 1 se divide en siete partes iguales, el extremo derecho de la primera subdivisión se asocia con $\frac{1}{7}$, el extremo derecho de la segunda se asocia con $\frac{2}{7}$, y así sucesivamente. El punto asociado con el número $\frac{24}{7}$ está a tres séptimos de la distancia del punto unitario 3 al punto unitario 4. De manera semejante, un número racional negativo se asocia con un punto situado a la izquierda del origen. La figura 2 muestra algunos puntos asociados con números racionales.

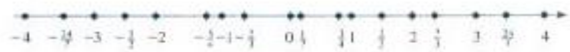


FIGURA 2

Las construcciones geométricas pueden utilizarse para determinar puntos que corresponden a ciertos números irracionales, tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etcétera. Consulte los ejercicios 35 y 36. Los puntos que corresponden a otros números irracionales pueden determinarse empleando aproximaciones decimales. Por ejemplo, el punto que corresponde al número π puede aproximarse empleando algunos de los dígitos de la representación decimal 3.14159. . . .

Todo número irracional puede asociarse con un único punto del eje y cada punto que no corresponde a un número racional puede asociarse con un número irracional. Este hecho está garantizado por el axioma de completez (axioma 8.2.9), cuyo enunciado se presenta en la sección 8.2 debido a que se requiere cierta terminología presentada y discutida ahí. De esta manera, existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto R y el conjunto de los puntos de un eje. Por esta razón, al eje horizontal se le conoce como **recta numérica real** (**recta real** o **eje real**). Como los puntos de esta recta están identificados con los números que representan, se utiliza el mismo símbolo para representar el número y el punto.

[Pág. 1143]

Cabe notar, que el texto muestra como cada sistema numérico va completando la recta, dando como características un punto de origen y una unidad de medida, estableciendo de esta manera, que a cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto sobre la recta, biyección que estableció Dedekind en 1821. Asimismo recrea la idea de que la recta esta formada por puntos, que fue el postulado primario de Dedekind y Cantor para la creación de los números reales.

Además, el texto al realizar la representación de los números irracionales en la recta, expresa que los puntos que corresponden a estos números, exceptuando los de forma radical, pueden determinarse empleando aproximaciones decimales, siendo esta, una manera similar a la forma como se representaban antes de que los irracionales alcanzaran una identidad propia como números.

Esta representación, puede llevar a confusiones al lector, teniendo en cuenta, que el autor soslaya el problema de representar los números irracionales en la recta al identificar un número irracional con un número racional.

Asimismo, el texto establece la relación biyectiva que existe entre la recta y los números reales, amparando esta relación por el axioma de completez, el cual establece la relación entre un punto de la recta y un número real, así como Cantor lo hizo con un axioma[35] y Dedekind con el axioma de continuidad; sin embargo el texto no muestra el problema que se presentaría si esta relación no estuviera amparada por el axioma de completez.

[35] A cada número le corresponde un punto en la línea recta, cuya coordenada es igual al número.

Conclusiones del Texto El Cálculo

1. La manera de presentar los sistemas numéricos es innovadora, al partir del sistema de los números reales para presentar los otros sistemas numéricos, y es el único, en donde se avala la relación biyectiva, que existe entre la recta y los números reales por medio del axioma de Completez.

2. Presentar diversas ideas intuitivas de la definición rigurosa de límite, como introducción de este tema, es una buena estrategia que el texto utiliza, para que el lector logre captar el significado de esta definición.

3. Al exponer el axioma de completez en el tema sucesiones, se puede ver de manera velada en el texto la relación que existe entre los números reales y la noción de sucesión.

4. En el tema de continuidad el texto realiza una presentación innovadora, al presentar la continuidad a partir de la discontinuidad. Además profundiza en este tema, ya que muestra todas las clases de continuidad en intervalos y algunos teoremas importantes concernientes a la continuidad de una función, de esta manera se puede observar como el texto le da relevancia al tema de continuidad.

5. Se puede observar, como el texto emplea de forma permanente en cada definición la representación gráfica, desglosándola de manera exhaustiva, lo cual ayuda a tener una mejor visualización e interpretación de los conceptos.

6. Este texto puede ser una buena referencia para los docentes, en el tema de límites y continuidad, debido a la amplia profundización, el lenguaje utilizado y las estrategias que emplea para presentar estos temas, también es aconsejable para tener en cuenta algunos ejercicios de aplicaciones propuestos en cada sección.

7.5. Cálculo I

Este texto está orientado hacia estudiantes universitarios y es editado por: **Mc Graw Hill**. Octava edición, 1999. Además, es utilizado por algunos profesores de matemáticas de grado once como guía en determinados temas. Los temas están distribuidos por capítulos, los cuales están subdivididos en secciones. En cada sección se encuentran recuadros históricos de matemáticos que contribuyeron con el desarrollo de la teoría de cada tema y recuadros de información adicional relacionados con cada tema. Los temas son presentados de forma intuitiva y formal, realizando una explicación de cada definición con ayuda de la representación gráfica. Además en cada sección expone como se puede hacer uso de la calculadora o el computador y los posibles errores que se pueden presentar. Los ejemplos son realizados de una manera detallada, representados gráficamente y explicados analíticamente. Por otra parte, en cada sección y en cada capítulo propone una amplia serie de actividades de resolución algebraica, teórica y de aplicación, para reforzar las nociones estudiadas.

A continuación, se presentará el análisis realizado a la página 19 del capítulo P, al capítulo 1, y a la sección 9.1 del capitulo 9, en los cuales se exponen los temas pertinentes a este trabajo. El análisis se realizará teniendo en cuenta el orden de las temáticas del texto, que en este estudio aparecen como subtítulos.

Funciones y sus Gráficas

El texto utiliza conjuntos de números reales al definir función real de una variable real; de ahí que podría pensarse que este asume los números reales como un tema ya conocido.

Es preciso señalar, que la palabra variable tiene su procedencia en las variaciones de una cantidad respecto a las variaciones del tiempo, que constituyen el elemento conceptual primitivo del concepto de relación entre variables, que dan lugar a la noción de función.

Límites y sus Propiedades

Una Mirada Previa al Cálculo

Es de resaltar que este texto, comienza con una reflexión acerca de los cambios que ocurrieron en la matemática a partir de la formalización del límite, estableciendo algunas diferencias entre las matemáticas previas al límite y el cálculo:

> Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar un objeto que se mueve con velocidad constante. Sin embargo, para analizar la velocidad de un objeto sometido a aceleración es necesario recurrir al cálculo. [Pág. 42]

Aunque el texto presenta diferencias que acontecieron históricamente con la aparición del cálculo, omite que en su evolución, históricamente se busco la desligación de la matemática de todo ente físico.

Asimismo, el texto compara varias gráficas en las cuales se puede observar la diferencia que hay en estas, al ser realizadas sin emplear el cálculo y empleando el cálculo diferencial; de igual manera, expone los problemas clásicos de las matemáticas: la recta tangente a la curva y el área bajo una curva dada, resaltando como estos problemas, pueden ser resueltos con la noción de límite, además expone la aplicación que esta noción tiene en otras áreas.

De esta manera se puede ver la relevancia que el texto le asigna al tema de límite, debido a que con esta noción, fue posible el surgimiento y avance de nuevas teorías en el cálculo.

Cálculo de Límites por Medio de los Métodos Gráficos y Numéricos.

El texto inicia esta sección presentando un ejemplo que representa gráficamente y es realizado mediante aproximaciones al límite, e introduce una definición informal:

> Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a c. Por cualquiera de los dos lados, entonces el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a c, es L. Esto se escribe $\lim_{x \to c} f(x) = L$. [Pág. 48]

Esta definición informal que da el texto, es la definición de límite usual, sólo que no esta dada en términos de ε-δ.

Posteriormente, en un segundo ejemplo el texto hace el siguiente comentario:

> La existencia o inexistencia de $f(x)$ en $x = c$ no guarda relación con la existencia del límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c. [Pág. 49]

Es destacable este comentario, pues ayuda a evitar posibles confusiones que se presenten al evaluar el límite de una función, cuando la función este definida y el límite no exista o cuando la función no este definida pero el límite si exista.

En seguida, el texto presenta ejemplos que representa gráficamente y cuyo límite no existe, de los cuales sintetiza:

> 1. $f(x)$ se aproxima a números diferentes por la derecha de c que por la izquierda.
> 2. $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite a medida que x se aproxima a c.
> 3. $f(x)$ oscila entre dos valores fijos a medida que x se aproxima a c. [Pág. 51]

De esta síntesis se puede considerar, que el texto pretende mostrarle al lector que por medio del estudio de la representación gráfica de una función, se puede determinar la no existencia del límite de una función en cierto punto.

Posteriormente, el texto menciona que la función Dirichlet[36] carece de límite en cualquier número real, y que por esta razón, esta función no es continua.

Es de notar, que el primero en dar un estatus de función a las funciones discontinuas fue Dirichlet en 1837, presentando como primera referencia la función característica de los racionales.

Antes de dar la definición formal de límite, el texto comenta acerca del error que se puede obtener al realizar la gráfica de una función en la calculadora, mostrando con un ejemplo, porqué se puede obtener una gráfica incorrecta.

Luego, el texto para dar la definición formal de límite, se remite a la definición informal dada anteriormente, explicando analítica y gráficamente las frases: " $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L " y " x se aproxima a c ", citando que:

> La primera persona en asignar un significado matemático riguroso a estas dos frases fue Agustín Louis Cauchy. Su definición ε-δ de límite es la que se suele utilizar en la actualidad. [Pág. 52]

Es oportuno comentar, que esta afirmación que realiza el texto no es del todo correcta, pues como se citó en el análisis del primer texto, la definición de límite en términos de ε-δ fue dada por Weirstrass alrededor de 1841 a 1856.

Después, el texto da la definición usual de límite de una función en términos de ε-δ, explica la unicidad del límite y realiza algunos ejemplos, indicando que estos ayudaran a entender mejor la definición de límite en términos de ε-δ.

36

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional.} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$ [Pág. 51]

Cálculo Analítico de Límites

En esta sección, el texto al dar el principio de sustitución directa[37] de límites, menciona que este comportamiento se presenta en las funciones continuas, siendo este otro acercamiento intuitivo que el texto realiza a la noción de continuidad.

Además, el texto presenta una serie de teoremas como el de las propiedades de los límites, mostrando con un ejemplo la utilidad de estas propiedades.

Continuidad y Límites Laterales o Unilaterales

El texto hace una aproximación a la idea de continuidad, indicando que una función es continua si no tiene saltos o huecos, enseñando en tres gráficas, como en cada una de estas, no se cumple una de las tres condiciones para que una función sea continua. Asimismo en un recuadro se refiere a la continuidad de una función en un intervalo abierto cuando su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Posteriormente, el texto da la definición moderna de continuidad puntual y de continuidad en un intervalo abierto, los límites laterales, ejemplos de límites laterales, entre ellos la función parte entera; de la cual aclara que es una función discontinua ya que sus límites laterales son distintos.

Es adecuado mencionar que Dirichlet, en 1837 no ve ningún inconveniente en aceptar funciones que no estén sujetas a ninguna ley analítica, es decir, en aceptar las funciones discontinuas, estas funciones aparecieron debido a que en estos siglos se pretendía la modelación de todos los fenómenos físicos. Para

37 $\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$ [Pág. 59]

Dirichlet f es una función si ella hace corresponder a todo valor de x un valor bien determinado de $f(x)$.

Mas adelante, el texto presenta la definición de continuidad en un intervalo cerrado, da las propiedades de la continuidad, y señala que de las propiedades de límites se generan propiedades correspondientes relativas a la continuidad de una función, igualmente, menciona algunos tipos de funciones que son continuas[38]; lo cual permite que el lector pueda determinar a primera vista si una función es continua o no.

Luego, en un ejemplo presenta una serie de funciones que representa gráficamente, para las que se debe hallar el intervalo donde es continua cada función. Se puede notar, que las funciones utilizadas en estos ejemplos, al graficarlas poseen cierto grado de dificultad; tal vez, el texto emplea este tipo de funciones por el nivel para el que este está orientado.

En seguida, el texto enuncia el teorema del Valor Intermedio, explicando con una representación gráfica su significado, mencionando que su demostración se basa en la propiedad de completitud de los números reales y que se puede encontrar en libros de cálculo avanzado. Por otra parte, hace alusión a la relación de la continuidad con la modelación de fenómenos físicos.

Es pertinente evocar, que aunque Cauchy demostró el teorema del valor intermedio utilizando la propiedad de completitud de los números reales, al construir dos sucesiones fundamentales, una creciente y otra decreciente que convergen a un mismo punto, este no pudo garantizar la existencia de este número, dado que los números reales aún no habían sido formalizados.

[38] Funciones polinómicas, funciones racionales, funciones radicales y funciones trigonométricas.

Límites Infinitos

El texto introduce los límites infinitos con un ejemplo que representa gráficamente, halla sus límites unilaterales con aproximaciones, y da como característica que la gráfica de la función crece o decrece sin límite al acercarse a una asíntota.

Cabe señalar, que esta característica de la gráfica de una función que proporciona el texto, es una buena herramienta para el lector, puesto que le permite ver a partir de la gráfica el límite de la función.

Series Infinitas

Sucesiones

El texto inicia esta sección dando una idea intuitiva de la noción de sucesión, presenta la definición usual de sucesión y realiza algunos ejemplos de esta definición, luego introduce de manera intuitiva con un ejemplo, la definición de límite de una sucesión, asimismo, da la definición usual de límite de una sucesión, en la cual, presenta la definición de convergencia y divergencia de una sucesión, y realiza una explicación gráfica la definición de límite de una sucesión.

Posteriormente, el texto proporciona una serie de teoremas, entre los cuales se encuentra uno concerniente a las propiedades de los límites de sucesiones, y el del encaje o del emparedado para sucesiones[39]; es pertinente destacar que

[39] Teorema 9.3. Teorema del encaje o del emparedado para sucesiones
Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$
y existe un entero N tal que $a_n \le c_n \le b_n$ para todo $n > N$, entonces
$\lim_{n\to\infty} c_n = L.$ [Pág. 597]

estos teoremas sirven de ayuda al lector, ya que le brindan al lector, elementos que le sirven de ayuda para hallar algunos límites.

Mas adelante, el texto da la definición de sucesión monótona, la de sucesión acotada, y presenta el siguiente comentario:

> Una propiedad importante de los números reales es que son **completos**. Informalmente, esto significa que no hay huecos en la recta del número real. (El conjunto de números racionales no tiene la propiedad de ser completo.) El axioma de completitud para los números reales puede usarse para concluir que si una sucesión tiene una cota superior, debe tener una **mínima cota superior** (una cota superior que es menor que cualquier otra cota superior de la sucesión).
> [Pág. 601]

En este comentario el autor muestra visiblemente, una clara diferencia topológica entre los números reales y los racionales, asimismo, la relación que existe entre las definiciones de sucesión monótona, sucesión acotada y el axioma de completez de los números reales. Además, de manera velada se observa que $\mathbb{R}$, también tiene la propiedad de ser continuo, al mencionar que los números reales son completos.

Conclusiones del Texto Cálculo I

1. En los temas analizados, se encontró como única referencia de los números reales la completitud de estos; de ahí que podría pensarse que el autor asume que este es un tema ya conocido por el lector.

2. Se puede observar, que el texto considera el tema de límites como un concepto fundamental en el cálculo, por esta razón, realiza una extensa y apropiada presentación tanto intuitiva como formal de este tema, tal vez en busca de una adecuada fundamentación para el lector.

3. Explicar gráficamente que si no se cumplen las tres condiciones para que una función sea continua, es una buena herramienta intuitiva e innovadora, que el autor utiliza para introducir esta noción, probablemente esto le permita al lector que logre captar la noción de continuidad.

4. En la presentación que el autor realiza del teorema el valor intermedio, se puede observar de manera oculta, la relación que históricamente existe, entre los números reales y las nociones de límite y continuidad, teniendo en cuenta que una de las condiciones para que se cumpla este teorema es la continuidad de la función y como se menciona en el texto, su demostración se basa en la completitud de los números reales.

5. El autor muestra la relación histórica que existe entre las sucesiones y los números reales, al presentar la relación que existe entre las definiciones de sucesión monótona, sucesión acotada y el axioma de completez de los números reales.

6. Al emplear constantemente gráficas para ilustrar definiciones y ejemplos, se puede observar como el texto se apoya de esta herramienta, en busca de que el lector tenga una mejor visualización e interpretación de los conceptos.

7. Este texto puede ser una buena referencia para los docentes, en el tema de límites y continuidad, debido a la profundización que se realiza acerca de estos temas.

8. CONCLUSIONES GENERALES

1. A través del análisis de los textos apreciamos lo significativo que puede llegar a ser la escogencia o elección de un texto como guía de clase, dado que es necesario tener en cuenta la precisión en la presentación de los conceptos, el lenguaje en el que está escrito, la claridad en la exposición de los ejemplos y los ejercicios que se plantean como refuerzo de los temas.

2. En la presentación de las nociones que se encuentran en los textos, no se puede observar la evolución que ha tenido cada noción a través del tiempo, ni el orden cronológico en el que aparecieron estas, pues se presenta cada noción como un producto acabado.

3. Una de las nociones fundamentales en el proceso de la construcción de los números reales, es el infinito, sin embargo se puede ver como los textos soslayan esta noción, no dan un referente teórico y no se muestra la relación que existe entre esta noción y los números reales, solo se limitan a mencionarlo o a presentar su expresión simbólica.

4. Aunque en algunos textos no se muestra de manera explícita, las características que existen en la relación biyectiva entre los números reales y la recta, en las presentaciones que realizan los textos de los números reales, es posible observar la existencia de esta relación.

5. No presentar todos los axiomas que satisfacen los sistemas numéricos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, podría conllevar a no poder establecer las diferencias algebraicas y topológicas, existentes entre estos sistemas numéricos.

6. Representar geométricamente como cada sistema numérico, va completando la recta, ayuda al lector a visualizar la relación biyectiva que existe entre los

puntos de la recta y los números reales, de esta manera se puede observar que $\mathbb{R}$ es continuo.

7. Representar geométricamente los números en la recta, permite observar la relación que existe entre los conceptos de número y magnitud; relación que se estableció después de un largo proceso histórico, logrando fundir estos conceptos en uno mismo.

8. Podría pensarse que una buena estrategia utilizada por los textos, es la de pasar de un caso particular a un caso general, tal vez por esta razón algunos textos primero exponen la noción de límite de sucesiones, para abordar el concepto de límite de una función.

9. Al utilizar las aproximaciones para hallar el límite, los autores están utilizando de manera velada la propiedad de densidad de los números reales.

10. La manera como algunos textos introducen la noción de límite, con el uso de aproximaciones, es ventajoso, debido a que provee al lector de una idea intuitiva de límite, lo que promueve en el estudiante el desarrollo del pensamiento variacional.

11. Históricamente se conoce que Cauchy al buscar un rigor matemático para el análisis, desligó la matemática de todo ente geométrico, contrario a lo que se presenta en los textos, en donde se observó como se apoyan de la representación gráfica para ayudar a visualizar y entender cada concepto.

12. Introducir la noción de continuidad de una función, dando como características de la grafica de la función, que se puede trazar sin levantar el lápiz y que no presenta agujeros, provee al lector una idea intuitiva de la continuidad que data desde antes del siglo XVII.

13. Comúnmente se pudo observar que los textos utilizan la función parte entera como ejemplo de discontinuidad, tal vez porque en la gráfica de esta función se puede visualizar de una manera clara características de la discontinuidad.

14. La continuidad es un concepto básico y además hace parte de la riqueza conceptual de $\mathbb{R}$, sin embargo en algunos textos casi no se le da trascendencia, pues, se realiza una escasa profundización de este tema.

15. Las nociones que se encuentran en los textos tienen relación o fundamentos con los conceptos del pasado, pero no se puede caer en el error de identificar las nociones pasadas con las del presente, ya que son nociones que han ido evolucionando a través del tiempo.

16. Los textos soslayan la evolución que ha tenido cada noción a través del tiempo, y el orden cronológico en el que aparecieron estas, pues presentan los conceptos de una manera formal como un producto acabado. De tal suerte que el lector no podrá evidenciar la complejidad de los conceptos subyacentes a la noción de numero real.

9. SÍNTESIS DE LOS ANÁLISIS DE LOS TEXTOS

9.1. SÍNTESIS DEL ANÁLISIS DE LA PRESENTACIÓN DEL INFINITO EN LOS TEXTOS:

	Matemática Progresiva	Introducción al Cálculo	Alfa11	El Cálculo	Cálculo I
Concepciones de infinito	Conjuntos infinitos. Números de infinitas cifras decimales no periódicas. Expresión simbólica en intervalos ilimitados y en límites. El símbolo no es número real. Sucesiones infinitas.	Conjuntos infinitos. Expresión simbólica en intervalos no acotados y en límites. El símbolo no es número real. Sucesiones infinitas.	Expresión simbólica en intervalos no acotados y en límites. El símbolo no es número real. Sucesiones infinitas.	Números decimales infinitos periódicos y no periódicos. Expresión simbólica en intervalos y en límites. El símbolo no es número real.	Expresión simbólica en límites. Sucesiones infinitas.
Diferencias que se mencionan entre el infinito de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.	No presenta alguna referencia acerca de estas diferencias.	No presenta alguna referencia acerca de estas diferencias.	No presenta alguna referencia acerca de estas diferencias.	No presenta alguna referencia acerca de estas diferencias.	No presenta alguna referencia acerca de estas diferencias.

Se puede ver como los textos, soslayan la noción de infinito, no dan un referente teórico y no muestran la relación que existe entre esta noción y los números reales, solo se limitan a mencionarlo o a presentar su expresión simbólica.

9.2. SÍNTESIS DEL ANÁLISIS DE LA PRESENTACIÓN DE LA CONTINUIDAD EN LOS TEXTOS:

	Matemática Progresiva	Introducción al Cálculo	Alfa11	El Cálculo	Cálculo I
Noción y concepciones de continuidad	Gráficas sin agujeros. Gráficas que pueden dibujarse en un solo trazo sin levantar el lápiz. Definición moderna de continuidad puntual.	Principio de sustitución directa en límites. Gráficas que se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel. Característica de un objeto espacio temporal. Idea intuitiva de continuidad. Definición moderna de función continua en un punto. Definición usual de continuidad en un intervalo.	Gráfica sin interrupciones. Definición usual de continuidad en un punto.	Gráfica no tiene agujeros. Definición usual de continuidad en un punto. Definición de continuidad en un intervalo abierto. Definición de continuidad por la derecha y continuidad por la izquierda. Definición de continuidad en un intervalo cerrado y en un intervalo semiabierto. .	Gráfica no tiene saltos o huecos. Gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel en la continuidad de una función en un intervalo abierto. Definición moderna de continuidad puntual. Definición de continuidad en un intervalo abierto. Definición de continuidad en un intervalo cerrado. Funciones que son continuas.
Propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado.	No da una definición de continuidad para intervalos. No presenta alguna referencia acerca de estas propiedades.	Propiedad del valor intermedio.	Teorema de la continuidad de funciones respecto a las operaciones básicas.	Propiedades de la continuidad. Teorema del Valor Intermedio. Explicación en términos geométricos del teorema del Valor Intermedio.	Propiedades de la continuidad. Ejemplo de una serie de funciones que representa gráficamente, para hallar el intervalo donde es continua cada función. Teorema del Valor Intermedio.
Caracterización de lo discontinuo	Gráfica de una función a trozos.	Funciones discontinuas a trozos. Gráficas de funciones no continuas. Continuidades evitables y no evitables.	Gráfica de una función continua a trozos. Explicación analítica y gráfica de funciones discontinuas en un punto. Discontinuidad evitable o inevitable de una función.	Gráfica con agujeros. Discontinuidad removible o esencial. Funciones a trozos.	Función Dirichlet. Gráficas donde no se cumplen las condiciones de continuidad.

Aun que la continuidad es un concepto básico y además hace parte de la riqueza conceptual de $\mathbb{R}$, se observo como en algunos textos casi no se le da trascendencia, pues, se realiza una escasa profundización de este tema.

9.3. SÍNTESIS DEL ANÁLISIS DE LA PRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES EN LOS TEXTOS:

	Matemática Progresiva	Introducción al Cálculo	Alfa11	El Cálculo	Cálculo I
Presentación del concepto de número real.	Sistemas numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ de manera conjuntista. Número racional como clases de equivalencia, Representación decimal de los números racionales. Número real, mediante su representación. Relación entre la recta y los números reales. Representación de algunos números racionales en la recta.	Ampliación de los sistemas numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, y $\mathbb{Q}$. Sistemas numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ de manera conjuntista. Representación mediante puntos que van llenando la recta geométrica. Relación biyectiva entre los puntos de la recta y los números reales. Definición axiomática del conjunto de los números reales.	Asume que los números reales son conocidos de antemano. Relación biyectiva entre los números reales y la recta. Definición usual de intervalos. Menciona la representación de los números racionales mediante una serie.	Cantidades involucradas en una función. Presentación conjuntista del sistema numérico real. Interpretación geométrica de los números reales. Relación biyectiva entre los puntos de la recta y los números reales.	Conjuntos de números reales al definir función real de una variable real.
Propiedades de $\mathbb{R}$	Propiedades topológicas y algebraicas de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Elementos de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ tienen sucesor y antecesor, en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ no se puede establecer cual es el sucesor y el antecesor de cada número.	Menciona que Dedekind logró una estructura axiomática de los números reales. Conjunto ordenado. Muestra geométricamente que significa que un conjunto sea ordenado.	No presenta las propiedades de $\mathbb{R}$.	Axioma de completez. Conjunto ordenado.	No presenta las propiedades de $\mathbb{R}$.

En la presentación que los textos realizan de los números reales, se observa aunque en algunos no de manera explícita, las características que existen en la relación biyectiva entre los números reales y la recta, pero no es posible establecer las diferencias algebraicas y topológicas que existen entre los sistemas numéricos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Por otro lado, tambien se observo como los textos evaden la complejidad que existe en la representacion de los números iracionales en la recta.

9.4. SINTESIS DEL ANÁLISIS DE LA PRESENTACIÓN DE LÍMITES Y SUCESIONES EN LOS TEXTOS:

	Matemática Progresiva	Introducción al Cálculo	Alfa 11	El Cálculo	Cálculo I
Definiciones, presentación y concepción de límites y sucesiones.	Definición usual de sucesión y de límite de una sucesión. Definición usual de convergencia y divergencia de una sucesión. Definición de sucesión acotada. Límite por aproximaciones. Definición moderna de límite de una función.	Definición usual de sucesión de una manera formalista. Importancia del límite para desarrollar otros conceptos matemáticos. Ejemplos de aproximaciones al límite de una sucesión con calculadora. Definición del límite de una sucesión. Definición no formal de límite de funciones. Breve reseña histórica de Agustín Cauchy. Definición rigurosa del límite de una función. Comentario histórico de una de las paradojas de Zenón.	Introducción histórica Definición usual de sucesiones. Concepto de sucesión monótona. Definición de cercanía entre dos puntos. Definición de límite de una sucesión en términos de vecindad, Definición de convergencia de una sucesión. Definiciones de sucesión acotada superior e inferiormente. Importancia del límite para el avance de las matemáticas y aplicaciones que ha tenido históricamente. Definición de límite de una función en términos de composición de una función con una sucesión. Criterios que sirven para probar la no existencia del límite.	Ejemplo de aproximaciones, empleando el significado geométrico de ε y δ. Definición usual de límite de una función. Sucesiones finitas o infinitas. Definición usual de función sucesión Definición de límite de una sucesión. Convergencia o divergencia de una sucesión. Definiciones de sucesión creciente y decreciente. Definiciones de cota inferior y superior de una sucesión.	Ejemplo representado gráficamente y realizado mediante aproximaciones al límite. Definición informal de límite de una función. Definición formal de límite. Definición usual de límite de una función en términos de ε-δ. Principio de sustitución directa de límites. Idea intuitiva de la noción de sucesión. Definición usual de sucesión. Intuitivamente con un ejemplo, la definición de límite de una sucesión. Definición usual de límite de una sucesión. Definición de convergencia y divergencia de una sucesión. Definición de sucesión monótona. Definición de sucesión acotada. Comentario de la completitud de los números reales.
Representa-	Significado geométrico a la definición de	Detallada representación gráfica	Gráficas de algunas sucesiones.	Gráficas de la definición de límite	Representación gráfica de una

ciones de límites y sucesiones.	límite de sucesión.	de la definición de límite de una función.	Representación gráfica de algunos límites de funciones.	de una función. Representación gráfica de algunos límites de funciones. Representación gráfica de límite de una sucesión.	función, para determinar la no existencia del límite de una función en cierto punto. Explicación analítica y gráfica de las frases: "$f(x)$ se acerca arbitrariamente a L" y "x se aproxima a c". Explicación gráfica la definición de límite de una sucesión.
Propiedades de límites y sucesiones.	Propiedades de límites de sucesiones y funciones.	Propiedades de límites de funciones.	Propiedades fundamentales para límites de sucesiones. En las propiedades 2 y 3, se observa la propiedad de completez de los números reales. Teorema de las propiedades de los límites de una función con respecto a las operaciones básicas.	Propiedades de los límites de funciones. Propiedades de límite de una sucesión.	Propiedades de los límites. Teorema de las propiedades de los límites de sucesiones. Teorema del encaje o del emparedado para sucesiones.

Los textos presentan la definición usual de limite, excepto el texto alfa 11 que da esta definición en términos de composición de funciones, algunos profundizando en la definición rigurosa y otros en las aproximaciones, además exponen sus respectivas propiedades, aunque no realizan demostración alguna de estas. Igualmente, algunos textos dan la definición usual de sucesiones y sus respectivos teoremas concernientes a esta temática.

10. BIBLIOGRAFÍA

[1]. APÓSTOL, T. *Análisis Matemático*. Editorial Reverté. Barcelona. 1986

[2]. ARBELÁEZ, G., ANACONA M. y RECALDE L. *Número y Magnitud una Perspectiva Histórica*. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Universidad del Valle. Cali 1998.

[3]. ARBOLEDA, L. C. *Historia y Enseñanza de las Matemáticas*. Epistemología, Historia y Didáctica de las Matemáticas No 4. Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá 1983.

[4]. ARBOLEDA, L. C., RECALDE, L. *Formación y manejo operatorio de conceptos matemáticos: La historia y epistemología del infinito*. En Matemáticas; Enseñanza Universitaria, Vol. 4, No 1 y 2, pp. 152-171. Cali 1995.

[5]. BLOOR, D. *Conocimiento e Imaginario Social*. Gedisa. Barcelona 1998.

[6]. BONIFACE, J. *Les Constructions des Nombres Reèls dans le Mouvement d`Arithmetization de Analyse*. Ed. Ellipses. Paris 2002.

[7]. BOYER, C. B. *Historia de la Matemática*. Alianza editorial S.A. Madrid 1987.

[8]. CANTOR, G. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Dover publications, Inc. New York 1955.

[9]. DE LA TORRE GÓMEZ, A. *Los Conflictos Cognitivos en la Construcción del Concepto de Continuo*. Revista Matemática Enseñanza Universitaria. Volumen lX, No 1,2. Medellín Nov 2001.

[10]. DUGAC, P. *Histoire de la notion de limite des indivisibles aux infinitesimaux*. L Universidad Pierre y Marie Curie. París 1980.

[11]. GALVEZ, F*. De la matemática de la continuidad aristotélica a la filosofía del continuo matemático.* Tesis de Maestría. Universidad del Valle. Cali 2006.

[12]. GRATTAN, G. *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos 1630-1910 una Introducción Histórica.* Traducido por Mariano Martínez P. Alianza Editorial. Madrid España 1988.

[13]. KLINE, M*. El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Tomos I, II y III. Alianza Universitaria. Madrid 1994.

[14]. LAKATOS, I. *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Alianza editorial. Madrid 1978.

[15]. LAUGWITZ, D. *On the historical development of infinitesimal mathematics*. The American Mathematical Monthly. The mathematical association of American. New York 1997.

[16]. L'HOPITAL. *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas (1996).* Colección Mathema, UNAM. México 1998.

[17]. LUQUE A, C. J. MORA M, L. C., TORRES D, J. A. *Una Construcción de los Números Reales Positivos*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá 2004.

[18]. MORENO A, L. E. y WALDEGG, G. *Variación y Representación del Número al Continuo.* En Educación Matemática. Vol. 7.p.p. 12-27. México, cinvestav. 1995.

[19]. MUÑOZ Q, J. M. *Introducción a la Teoría de Conjuntos*. Universidad Nacional de Colombia. Departamento de matemáticas. Bogotá 2002.

[20]. NEWMAN, J. R. *Sigma. El Mundo de las Matemáticas 6.* Grijalbo, S.A. Octava edición. Barcelona – Buenos Aires – México D.F. 1980.

[21]. PHILIP J, D. y REUBEN, H. *Experiencia matemática*. Ministerio de Educación y Ciencia. Editorial Labor S.A.

[22]. RECALDE, L. *La lógica de los números infinitos: Un acercamiento histórico*. En Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol. XII, No 1, pp. 51-72. Cali 2004.

[23]. RECALDE, L. *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Departamento de Matemáticas. Universidad del Valle. Cali 2005.

[24]. REY, P., BALBIN, J. *Historia de la Matemática*. Espasa. Buenos Aires 1951.

[25]. RIBNIKOV, K. *Historia de las Matemáticas*. Editorial MIR. Moscú. 1987.

[26]. RUSS, S. B. *A Traslation of Bolzano's Paper on the Intermediate Value Theorem.* Open University. Great Britain. Historia Matemática 7 (1980), 156-185.

[27]. SÁNCHEZ, C. H. *Construcción de los Reales*. Revista Matemática; Enseñanza Universitaria

[28]. WALDEGG, G. *La Contribución de Simón Stevin a la Construcción del Concepto de Número.* En Educación Matemática. Vol. 8.p.p. 5-15. México, Cinvestav. 1996.