LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES DE KARL WEIERSTRASS

BEATRIZ EUGENIA JOJOA JIMÉNEZ
MONICA JANETH MUÑOZ ALVEAR
FRANCIA ELENA MUÑOZ IMBACHÍ

Trabajo de Grado Modalidad Seminario presentado para optar al título de

Licenciado en Educación con Especialidad en Matemáticas

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN
2009

LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES DE KARL WEIERSTRASS

BEATRIZ EUGENIA JOJOA JIMÉNEZ
MONICA JANETH MUÑOZ ALVEAR
FRANCIA ELENA MUÑOZ IMBACHÍ

Trabajo de Grado Modalidad Seminario presentado para optar al título de

Licenciado en Educación con Especialidad en Matemáticas

DIRECTORA: Mg. MARTHA LUCIA BOBADILLA ALFARO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2009

NOTA DE ACEPTACIÓN

Director: Mg. Martha L. Bobadilla A.

Jurado: Mg. Gabriela Arbeláez R.

Jurado: Luis Cornelio Recalde

Fecha de sustentación: Popayán, 23 febrero de 2009

Este trabajo se hizo posible gracias a Dios y todas aquellas personas que nos brindaron su apoyo y paciencia durante el proceso. También agradecemos de todo corazón a nuestros familiares y amigos por haber confiado siempre en nosotras.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 5

CAPITULO 1 8

LA EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO 8

1.1 SUS ORÍGENES 9

1.2 MATEMÁTICAS EGIPCIAS Y BABILÓNICAS 11

1.3 LOS GRIEGOS 14

1.4 NÚMERO Y MAGNITUD. 15

1.5 EL INFINITO Y EL CONTINUO 19

1.6 LAS MATEMÁTICAS ORIENTALES 21

1.7 LA MATEMATICA RENACENTISTA 23

1.8 LA UNIDAD DIVISIBLE 24

1.9 LA UNIDAD COMO MÓDULO MULTIPLICATIVO 26

1.10 El RIGOR EN EL ANÁLISIS Y LA CONSTRUCCIONES DE LOS REALES 31

CAPITULO 2 **37**

AGREGADOS COMPUESTOS POR UNA CANTIDAD FINITA DE ELEMENTOS. **37**

2.1 CONSTRUCCION DE LOS NUMEROS RACIONALES **54**

CAPITULO 3 **73**

NÚMEROS COMPUESTOS DE UNA INFINIDAD DE ELEMENTOS **74**

3.1 NÚMEROS FINITOS E INFINITAMENTE GRANDES **85**

CAPÍTULO 4 **90**

COMENTARIOS FINALES **90**

BIBLIOGRAFÍA **93**

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado tiene un enfoque histórico-epistemológico y aborda uno de los aspectos principales en cuanto a fundamentación matemática se refiere, como lo es la construcción de los números reales.

Como es bien sabido, los números reales se constituyen en un concepto fundamental del Análisis Matemático, sin embargo la presentación axiomática, que usualmente se hace de ellos, si bien es útil en la medida en que permite hacer una presentación rápida y completa de sus propiedades, oculta la verdadera importancia de ciertas propiedades que lo caracterizan y diferencian de los otros conjuntos numéricos. El análisis histórico de la construcción de los números reales permite un conocimiento mas profundo de dichas características.

A finales del siglo XIX, los trabajos de Karl Weierstrass ejercieron una fuerte influencia en el análisis matemático, es uno de los primeros en intentar separar el cálculo diferencial e integral de la geometría y hacer reposar todo ese cálculo sobre el concepto de número. Weierstrass comprendió, que el esclarecimiento conceptual de la teoría matemática existente, solo sería posible mediante una construcción rigurosa de los números reales. Por ello presentó una construcción de estos números de la cual existe poca divulgación.

En nuestro medio las construcciones más conocidas son las de Cantor y Dedekind, tal vez por el hecho de fundamentarse en los conceptos de sucesión fundamental y cortadura que parecen ser más familiares a los matemáticos de su época y de la actualidad.

Weierstrass, dicta una serie de cursos de análisis matemático a partir del año 1856. En uno de estos cursos, presentó su construcción de los números reales cuyas notas de clase fueron recopiladas y divulgadas por sus alumnos. Actualmente estas notas se encuentran en [Bon 02], en el artículo *Karl Weierstrass Introducción a la Teoría de las Funciones Analíticas*. (Semestre de verano 1878) redactada por Adolf Hurwitz, artículo que tomamos como base para nuestro análisis.

Este trabajo de grado consta de cuatro capítulos donde desarrollamos con detalle el aporte de Weierstrass a la construcción de los números reales.

El primer capítulo, *La evolución del concepto del número*, se presenta como un capítulo introductorio al trabajo a realizar, en el que se tratan algunos aspectos del desarrollo histórico del concepto de número desde sus inicios hasta finales del siglo XIX donde aparecen las primeras construcciones de los números reales, con el propósito de ubicar nuestro problema de investigación.

En el capitulo 2. *Agregados compuestos de una cantidad finita de elementos,* se presenta los presupuestos teóricos que plantea Weierstrass y las pocas demostraciones que realiza para la construcción de los números racionales. Posteriormente se utilizan estos presupuestos y se incorporan algunos elementos de la teoría de conjuntos, para realizar en las demostraciones de las propiedades algebraicas y de orden, con el fin de formalizar los racionales como un conjunto ordenado.

El capitulo 3. *Números compuestos de una infinidad de elementos*, se centra en la presentación de las magnitudes con un número infinito de elementos. Donde Weierstrass introduce los elementos necesarios para la definición de las magnitudes con una cantidad infinita de elementos y se han explicitado algunas nociones y demostraciones para facilitar su comprensión.

En el capitulo 4, que llamamos *Comentarios finales*, puede ser considerado como un capitulo de conclusiones.

CAPITULO 1

LA EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO

En la actualidad hay una tendencia a definir las matemáticas como el estudio de las estructuras. Una estructura matemática esta constituida por un conjunto de objetos *S*, un conjunto de operaciones o relaciones definidas sobre el conjunto soporte, más una colección de elementos distinguidos del conjunto soporte. En este sentido, al hablar de número real hacemos referencia a un sistema constituido por objetos matemáticos (números) encadenados por ciertas relaciones o leyes de combinación -adición, multiplicación y orden- lo que da lugar a la estructura de campo ordenado y completo de los números reales que se denota como $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$.

Esta noción actual de número real, tal como sucede con cualquier concepto matemático, se estructuró a lo largo del desarrollo y evolución de la matemática durante un extenso período de tiempo. En este capítulo, con el objetivo de ubicar nuestro problema de investigación, se presenta una somera descripción de dicha evolución desde la época primitiva hasta el siglo XIX, señalando aquellos acontecimientos que se convirtieron en piezas clave para alcanzar el concepto moderno de número real.

1.1 SUS ORÍGENES

No podemos afirmar que el número como tal, haya sido la obra de un hombre individual, ni de una única cultura; este concepto ha sido el resultado de un proceso gradual que se inició, de manera muy temprana, dentro del desarrollo cultural humano.

Antes de que existiese un lenguaje capaz de favorecer la comunicación verbal, el hombre primitivo podía observar en la naturaleza fenómenos cuantitativos: un árbol y un bosque, una piedra y un montón de piedras, etc. Esta distinción entre la unidad y la pluralidad, así como la noción de par fue prontamente establecida. Estas primeras observaciones condujeron a la noción de "correspondencia biunívoca", primera etapa de la numeración.

Nuestros antepasados primitivos contaban sólo hasta dos y cualquier conjunto que pasara este nivel quedaba reducido a la condición de muchos; gradualmente se fueron acumulando en los diferentes pueblos un conjunto de nombres claramente distintos para los números. En su proceso evolutivo aparece el número como una propiedad de una colección de objetos, aunque todavía no se distingue de la colección en cuanto número abstracto, en cuanto número no relacionado con objetos concretos.

En la actualidad el número de objetos de una colección dada es una propiedad de la colección, pero el número en sí, el número abstracto es una propiedad abstraída de la colección concreta. Se define número (dos, cinco, etc.) como aquella propiedad de las colecciones de objetos que es común a todas las colecciones que pueden ponerse en correspondencia biunívoca unos con otros, y que es diferente en aquellas colecciones para las cuales tal correspondencia es imposible. Por ejemplo, para formar el concepto y darle el nombre "seis", "diez", fue necesario comparar entre sí muchas colecciones de objetos. Mediante la repetición de esta operación surgieron los números naturales y las relaciones entre ellos.

Mediante el proceso de contar no sólo se establecieron las relaciones entre los números, sino que también se establecieron gradualmente ciertas leyes generales como consecuencia de varias pruebas. Además se distinguieron dos conceptos importantes: el número cardinal que proporciona la expresión cuantitativa (1,2,3,…), y el número ordinal, que revela la existencia de un primer elemento seguido de un segundo y un tercero, etc.

Las operaciones con números naturales surgen debido a las relaciones entre objetos concretos. La suma de números consiste en unir dos o más colecciones e inicia con muy pocos símbolos distintos y los números utilizados se escriben casi siempre como una suma de dos números inferiores. La adición se hace por descomposición y los cálculos son con frecuencia extensos y difíciles. La sustracción proviene de la costumbre de ciertas tribus de escribir el número 6, por ejemplo como 7-1. La diferencia 3-3 se descarta puesto que el número cero no era aún aceptado, así mismo las sumas y diferencias negativas son desconocidas. La multiplicación surgió del hábito de contar cosas iguales. La división fue una operación demasiado difícil para los pueblos primitivos desde un punto de vista práctico, esta dificultad es superada con la incorporación de las fracciones en las matemáticas de los babilonios y egipcios.

1.2 MATEMÁTICAS EGIPCIAS Y BABILÓNICAS

Las civilizaciones antiguas, primeras sociedades organizadas en las orillas de los grandes ríos, como el Nilo, el Éufrates, el Tigris y los principales ríos de India y China; se convirtieron en focos importantes que dieron lugar a las civilizaciones Babilónica y Egipcia, quienes ofrecen una interpretación más acertada de las actividades matemáticas.

Los conocimientos sobre las matemáticas del Antiguo Egipto se basan principalmente en dos grandes papiros de carácter matemático y algunos pequeños fragmentos, así como en las inscripciones en piedra encontradas en tumbas y templos.

Los egipcios desarrollaron el llamado "sistema de numeración jeroglífico", que consistía en denominar cada uno de los "números clave" (1, 10, 100, 1000...) por un símbolo (palos, lazos, figuras humanas en distintas posiciones). Los demás números se formaban añadiendo a un número u otro, del número central uno o varios de estos números clave. Un sistema de numeración posterior a éste, pero de similares características sería el sistema de numeración romano. Los egipcios estudiaron las fracciones, pero sólo como divisores de la unidad, esto es, de la forma $\frac{1}{n}$ con *n* distinta de cero, el resto de fracciones se expresaban siempre como combinaciones de estas. Además los egipcios son quienes introducen los primeros métodos de operaciones matemáticas, todos ellos con carácter aditivo, para números enteros y fracciones. Y en cuanto al álgebra resuelven determinadas ecuaciones de la forma

$x + ax = b$ donde la incógnita *x* se denominaba "montón".

De la civilización mesopotámica o antigua Babilonia, se tiene actualmente más información que sobre la egipcia. Utilizaban escritura cuneiforme[1] que consiste en la ordenación lineal de símbolos (*ver figura 1*) escritos con una varilla en forma de prisma triangular sobre tablillas de arcilla, fijando en ellas señas en forma de cuña.

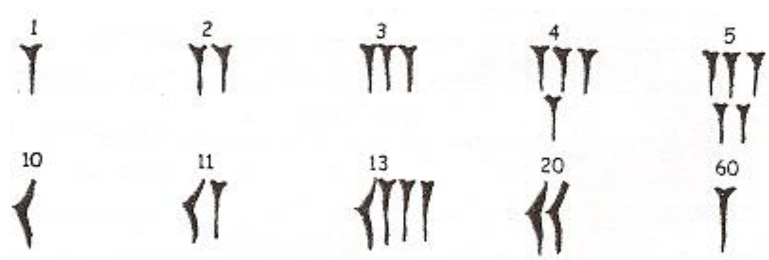

Figura 1

Al igual que sucede con los papiros, las tablillas contienen únicamente problemas concretos y casos especiales, sin ningún tipo de formulación general, lo que no quiere decir

1 De la palabra latina cuenus para "cuña"

que no existiera dicha formulación, pues es evidente, que tales colecciones de problemas no pudieron deberse al azar. En particular, las tablillas contienen multiplicaciones, números y sus inversos, cuadrados y cubos, y también algunas relaciones numéricas en forma de exponentes.

Utilizaron el sistema de numeración posicional sexagesimal, carente de cero. Aceptaban una cantidad nula pero no disponían de un símbolo para el cero en el sentido posicional, para denotarlo utilizaban un espacio en blanco. Así, el conjunto  puede significar el número 11 o el número 101; el mismo símbolo podía representar indistintamente varios números que se diferenciaban por el enunciado del problema, pero este “cero” en posición o posiciones terminales no aparecen en ninguna tablilla, esto significa que no lograron un sistema posicional completo. Sin embargo desarrollaron un eficaz sistema de notación fraccionario, que permitió establecer aproximaciones decimales verdaderamente sorprendentes. Esta evolución y simplificación del método fraccionario permitió el desarrollo de nuevos algoritmos que se atribuyeron a matemáticos de épocas posteriores, como es el caso del algoritmo de Newton para la aproximación de raíces cuadradas[2].

Así mismo, introducen el concepto de número inverso multiplicativo, utilizando las tablas de los inversos (valores de $\frac{1}{n}$ para diferentes valores de *n*, todo ello expresado en el sistema sexagesimal) lo que permitiría reducir la operación de división a una operación de

[2] El algoritmo de Newton se usa para calcular raíces cuadradas mediante aproximaciones utilizando la media aritmética.

multiplicación ya que $b : a = b\frac{1}{a}$. Se encuentra también en esta época los primeros sistemas

de dos ecuaciones con dos incógnitas; pero sin duda el gran aporte algebraico de la civilización babilónica se centra en el campo de la potenciación y en la resolución de ecuaciones cuadráticas, tanto es así que llegaron a la solución para ecuaciones de la forma $x^2 + px = q,\ p > 0, q > 0$, y también $ax^2 + bx = c$ mediante el cambio de variable $t = ax$.

Efectuaron tabulaciones que utilizaron para facilitar el cálculo, por ejemplo de algunas ecuaciones cúbicas. El dominio en esta materia era tal, que incluso desarrollaron algoritmos para el cálculo de sumas de progresiones, tanto aritméticas como geométricas. Su capacidad de abstracción se debió a que desarrollaron muchas de las que hoy se conocen como ecuaciones diofánticas, algunas de las cuales están íntimamente relacionadas con conceptos geométricos, campo en el que también superaron a la civilización egipcia.

La actividad intelectual de los pueblos Egipcios y Babilónicos entra en decadencia a causa de problemas económicos y políticos, lo que favorece el surgimiento de la civilización griega.

1.3 LOS GRIEGOS

La cultura griega logró en matemáticas lo que ninguna otra cultura alcanzó; dotaron a la matemática de un carácter abstracto, la desligaron de datos asociados a lo común y estudiaron los conceptos en si mismos sin colocarlos en referencia con problemas concretos, elaboraron un universo de objetos matemáticos, con una dinámica propia e independiente de las ataduras que las necesidades prácticas les atribuían cotidianamente. Este universo matemático esta basado en la necesidad de demostrar. Es conveniente aclarar que la demostración como tal, no proviene, sólo de la matemática, sino también como consecuencia de la necesidad de solucionar conflictos jurídicos, epistemológicos y filosóficos.

1.4 NÚMERO Y MAGNITUD.

La mayor parte del conocimiento matemático existente de los griegos a finales del siglo IV a.c. es sistematizado por Euclides (330 – 275 a.c.) de Alejandría en su obra *Los Elementos*, la cual es presentada en una secuencia lógica de 465 proposiciones acompañadas de axiomas, postulados y definiciones. Es una obra de aritmética y geometría que profundiza entorno al número y a la magnitud. La magnitud es infinitamente divisible, el número entero es finitamente divisible; el número es discreto, la magnitud es continua.

En los Elementos de Euclides se define la unidad como *aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe se llama uno* [Arb98; p.84], siendo esta -unidad- el punto de partida para la definición de número. Para Aristóteles, al igual que para Euclides, el número se define como una pluralidad de unidades, excluyendo de este concepto al uno y al cero; el uno porque representa la unidad y aquello con que se mide no puede medirse a sí mismo, además habría una contradicción ya que la singularidad (el uno) y la pluralidad (el número) no se diferenciarían. El cero no cumple con la definición de número debido a las concepciones filosóficas vigentes, las cuales no daban cabida al no ser.

Uno de los principales exponentes de las matemáticas griegas a mediados del siglo VI a.c. es Pitágoras de Samos, conocido como el padre de las matemáticas griegas. Fundó la escuela pitagórica en donde además de practicar ritos secretos se estudiaba filosofía, matemáticas y ciencias naturales. A Pitágoras se le atribuyen dos grandes aportes matemáticos: el primero es el desarrollo de la primera teoría abstracta de números (teoría de las proporciones), es decir, el conjunto de conocimientos matemáticos que se relacionan con las propiedades generales de las operaciones con números naturales, y el segundo, es la crisis con la aparición de las magnitudes inconmensurables.

Los Pitagóricos interpretaban las magnitudes geométricas como colecciones discretas de unidades, por lo tanto no podían comparar dos magnitudes sino cuando tenían una unidad de medida común, de tal manera que cada una de ellas fuese un múltiplo entero de dicha unidad. Por ejemplo, la longitud de un segmento de recta comprende n unidades y la de un segundo segmento comprende m unidades, las dos longitudes estarán en la relación $m:n$. Así, al comparar la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados, los pitagóricos constataron con sorpresa que éstas dos magnitudes no tenían una medida común. Estas líneas inconmensurables sin existencia aritmética, se escapaban a la teoría pitagórica de las proporciones. Después de este descubrimiento, fue preciso sustituir la antigua teoría de las proporciones por una nueva, que fuera aplicable a todos los casos, y es Eudoxo, quien con su noción de magnitud y su teoría de las proporciones conecta las nociones de razón y proporción a la geometría, permitiendo extender pruebas que sólo consideraban magnitudes conmensurables a problemas que contemplaban las magnitudes inconmensurables.

El concepto de magnitud definido por Eudoxo, servía para entidades como longitudes, áreas, volúmenes y tiempo. Se diferenciaban de los números por el hecho de considerar las magnitudes como continuas y los números como discretos. La teoría de las proporciones de Eudoxo se encuentra en el libro V de los elementos de Euclides. Allí aparece la siguiente definición que permite evitar de manera extraordinaria a las magnitudes inconmensurables:

> Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta. [Rec05; p50]

Modernamente la definición anterior se expresa de la siguiente manera:

Sean cuatro magnitudes *a, b, c* y *d*. Se dice que *a* y *b* están en la misma razón que *c* y *d*, cuando para todo entero *m* y *n* se tienen las implicaciones siguientes, según los dos únicos casos posibles:

1. Si $ma \geq nb$ entonces $mc \geq nd$.

2. Si $ma \leq nb$ entonces $mc \leq nd$.

Esta definición tiene la ventaja de ser aplicable, no solo a números sino también a elementos geométricos, ya que la razón entre esferas puede ser igual a la razón entre cubos. Es interesante señalar que esta definición corresponde en esencia a la noción de "cortadura" de Dedekind, que seria enunciada solo hasta el siglo XIX.

Así que con la teoría de las proporciones quedaba resuelto con éxito, gracias a Eudoxo, uno de los aspectos más preocupantes de la crisis provocada por los inconmensurables. Eudoxo además formula el lema (lema de Arquímedes) llamado también axioma de la continuidad, sobre el cual se basa el método exhaustivo (expresión moderna del método de Eudoxo), cuyo enunciado es: *dadas dos magnitudes desiguales existe siempre un múltiplo de la menor que supera la mayor*[3] [Ver70; p. 238].

Para Platón (429-328) a.c. existe una clara diferencia entre el ser en sí de las cosas y la representación que hace el matemático de la misma. Compara número aritmético y número numerado, el primero, es considerado un ente o número ideal de naturaleza abstracta, que se forma por la agrupación de unidades totalmente iguales y el segundo, es utilizado para contar objetos de la realidad basándose en la experiencia. Platón señala las bases conceptuales de aquello que en Aristóteles se constituye en un soporte, soporte teórico que será tomado como referencia durante muchos siglos.

---

3 Lo que modernamente se expresa como: sea $\beta > 0$. Entonces para todo $x \in R$ existe un $n \in N$ tal que $n\beta > x$

1.5 EL INFINITO Y EL CONTINUO

Uno de los acontecimientos importantes en la historia de las matemáticas griegas está relacionado con el infinito y el continuo. La noción de infinito es esencial para los antiguos griegos, ya que para ellos tenía sentido decir que los números son infinitos, sin embargo, la utilización de esta noción fue causa de paradojas y problemas conceptuales. Históricamente su aparición marcó un momento muy importante en la antigüedad griega, con el surgimiento de las paradojas de Zenón y las magnitudes inconmensurables, razones que inquietaron el pensamiento griego durante un extenso periodo.

Para los griegos el infinito, es *aquello que tomada una determinada cantidad, siempre es posible tomar por fuera algo de ella* [Rec93; p.42]. Aristóteles plantea que el infinito solo existe como posibilidad, como ente en potencia y no como algo ya acabado; negando la existencia real del infinito actual (el infinito tomado en un acto), pero acepta el infinito potencial (el infinito como proceso), haciendo énfasis en que los matemáticos pueden trabajar con magnitudes tan grandes o tan pequeñas como deseen, es decir los matemáticos sólo requieren del infinito potencial.

El continuo, se considera una propiedad de las magnitudes, que en adelante será necesaria para la construcción de los números reales. Aristóteles realiza un primer acercamiento conceptual de continuidad a través de las siguientes definiciones [Rec93; P.42]:

- *Las cosas están juntas en un lugar cuando están en un único lugar.*
- *Las cosas están separadas cuando están en diferentes lugares.*
- *Las cosas están en contacto cuando sus extremos están juntos.*
- *Una cosa está en sucesión con otra si está después de la inicial, sea en posición (como por ejemplo los números).*
- *Una cosa es contigua a otra cuando está en sucesión y en contacto con ella.*
- *Lo continuo es una categoría de lo contiguo. Una cosa es continua con otra cuando sus límites que se tocan llegan a ser uno.*

De esta forma la categoría de continuo estaría incluida en la de contiguo. En Aristóteles lo continuo se origina a partir de las magnitudes geométricas y del concepto físico de Espacio y Tiempo. De ahí que las magnitudes geométricas y el espacio físico no pueden estar constituidas de puntos, y el tiempo no puede estar conformado de instantes. Todo lo continuo, dice Aristóteles es infinito de dos maneras: por adición (contar números) y por divisibilidad (medir una magnitud). Para él la subdivisión continua de una cantidad es limitada, de tal manera que lo ilimitado existe potencialmente, pero de hecho no se alcanza nunca. Veintitrés siglos después, el matemático alemán George Cantor, le daría estatus de objeto matemático al infinito actual.

Con la clausura de la escuela ateniense en el siglo VI d. c. debido al escaso progreso matemático, finaliza la historia de la matemática griega e inicia un periodo de recuperación y enriquecimiento de la documentación matemática griega existente, por parte de los árabes, hindúes, chinos y Europeos, creando así un puente entre la matemática antigua y el mundo moderno.

1.6 LAS MATEMÁTICAS ORIENTALES

Las fuentes históricas de la civilización china son escasas en lo referente a las matemáticas. Sin embargo, los chinos poseían dos sistemas de numeración, uno de ellos relacionado con un sistema posicional. Las operaciones aritméticas se efectuaban mediante barras numéricas: el "suanpan" –máquina de calcular con bolas – constituyó un invento muy importante utilizado desde el siglo XII de nuestra era. Las matemáticas chinas encierran resultados interesantes e innovadores, tales como una buena aproximación de π, la utilización práctica de los números negativos, el estudio de los cuadrados mágicos, el desarrollo de un método matricial eficaz para resolver sistemas de ecuaciones, el desarrollo del binomio, ilustrado por el triángulo de Pascal, y la utilización de ciertas series, entre otros.

Las matemáticas indias, estudiadas por los sacerdotes, se caracterizaron por el desarrollo del cálculo numérico y algebraico, una trigonometría basada en la función seno, una geometría poco desarrollada, excepto en el estudio de los cuadriláteros y sus propiedades, y un sistema de numeración – notación bráhmi – de donde surgirá, con las contribuciones de los árabes, nuestro sistema decimal.

Las matemáticas del Islam asimilaron los descubrimientos griegos e indios, prescindiendo de algunos aspectos demasiado teóricos para desarrollar con preferencia temas más conformes con su enfoque práctico. Los árabes tuvieron el mérito imperecedero de haber conservado para la humanidad preciosos documentos. Reunieron con sumo cuidado las obras matemáticas de origen griego e indio que llegaron hasta ellos. Probablemente, la traducción árabe de numerosos textos griegos e indios salvó una buena parte de la herencia matemática de estas dos grandes civilizaciones.

La contribución del imperio bizantino al campo de las matemáticas consiste en haber conservado los textos matemáticos escritos en griego y haber comentado los clásicos antiguos. Los primeros autores latinos se basaron libremente en las obras de Euclides, Nicómaco y Tolomeo y sus obras influyeron notablemente en la enseñanza de las matemáticas en las escuelas medievales hasta finales del siglo X. En este siglo los números indoarábigos[4] son introducidos en Europa y los matemáticos latinos entran en contacto con los textos árabes. Los principales temas matemáticos que interesan a los traductores latinos son el álgebra y la trigonometría árabes. La trigonometría griega, de un nivel superior a las matemáticas del Islam, no parece atraer la atención de los sabios de Europa. Otras de las contribuciones de esta cultura fue la introducción de letras en lugar de los símbolos numéricos, desarrollan una teoría de las proporciones que engloba el concepto de variación expresado en términos de la potencia *n* o de la raíz enésima. No fueron ajenos a las cuestiones de los conceptos matemáticos de continuidad e infinito que se debatieron

4 Los números indo arábigos equivalen a nuestros dígitos.

durante el siglo XIV, proporcionaron reglas equivalentes a nuestras leyes sobre los exponentes, notaciones específicas para las potencias fraccionarias e irracionales, una representación gráfica de la variación, una aproximación probable a la teoría de los indivisibles de Cavalieri y algunas reglas sobre la suma de series infinitas y sobre la determinación de la convergencia y divergencia de ciertas series.

1.7 LA MATEMATICA RENACENTISTA

Las actividades matemáticas de los sabios latinos del renacimiento contribuyeron de manera importante a resaltar resultados fundamentales en el campo del álgebra, la trigonometría y la geometría. Se dispone ya de los inicios del álgebra simbólica, el cálculo con símbolos indoarábigos está muy extendido, la notación decimal se desarrolló gradualmente, la teoría de ecuaciones comprende la solución general de la ecuación cúbica y de la bicuadrática[5], los números negativos son aceptados cada vez más, la trigonometría es una disciplina autónoma y se dispone de tablas trigonométricas muy precisas para sus seis funciones.

La invención de la imprenta ejerce una benéfica influencia sobre la unificación y la difusión de las ideas matemáticas.

---

5 Se refiere a ecuaciones de orden cuatro.

A inicios del siglo XVII en Europa Occidental se dieron a conocer aportes importantes de matemáticos como Simón Stevin (1548 – 1620) con la representación decimal de las fracciones y René Descartes (1596 – 1650) con la instauración del uno como módulo del producto, acentuando un acercamiento entre los conceptos de número y magnitud.

1.8 LA UNIDAD DIVISIBLE

Simón Stevin presenta una extensión del concepto de número que se logra mediante la ruptura explícita con la concepción Euclidiana, haciendo posible el acceso al concepto moderno de número, que se refiere no sólo a la cantidad "numerable" sino también a la "medible", esto implica un cambio en las acciones asociadas al número: no sólo se emplea para contar sino también para medir. Para entender lo importante del aporte de Stevin, es clave tener en cuenta que los grandes problemas que han motivado el desarrollo de las matemáticas están relacionados con las actividades de medir y contar. La primera tiene que ver con la geometría y la segunda con la aritmética. Stevin es quien establece por primera vez un isomorfismo operatorio entre número y cantidad.

Por otra parte, el límite establecido por los griegos entre lo práctico y lo teórico, inicia su ruptura cuando Stevin extrae su concepto de número de la experiencia cotidiana y profesional. Para fundamentar teóricamente las actividades matemáticas cotidianas, era necesario buscar mecanismos ágiles para operar los resultados de mediciones que, además, pudieran ser objeto de una formalización de acuerdo con los esquemas griegos. Stevin resuelve el aspecto operativo en la publicación francesa de *La Disme* en donde presenta una sistematización, con ciertas innovaciones, de la notación decimal que, aunque en esa época ya era conocida, su uso aun estaba lejos de ser generalizado. El propósito del desarrollo de la notación decimal que Stevin lleva a cabo, es el de manejar las cuentas de manera más sencilla, proporcionando de esta forma el establecimiento de un isomorfismo operatorio entre números y cantidades.

El primer indicio de que el número de Stevin está condicionado por las operaciones que se pueden realizar con él, se encuentra en *L' Arithmetique,* obra publicada en 1585 en donde Stevin argumenta a favor de la división de la unidad, afirmando que negar la divisibilidad de la unidad es limitar la naturaleza del número, obteniendo de esta manera la extensión del dominio numérico (números enteros) que incluye ahora tanto a la unidad como a las fracciones de ella. Además, Stevin introduce la generalización del dominio numérico de los resultados de la extracción de raíces, incorporando así los números radicales (racionales e irracionales) y, en general, todos aquellos números que son resultado de operaciones algebraicas con números positivos.

La unidad de Stevin es entonces el resultado, no sólo de una abstracción realizada sobre los objetos en tanto cantidades, sino de una abstracción realizada sobre las acciones coordinadas que se efectúan en el proceso de medir estos objetos.

1.9 LA UNIDAD COMO MÓDULO MULTIPLICATIVO

René Descartes, introduce el concepto de unidad como neutro de la multiplicación de segmentos, con el único objetivo de proporcionarles las mismas operaciones de la aritmética, de igual manera como se hace con los números. Solucionando así la ausencia de definiciones para el producto, el cociente y la raíz de magnitudes debido a la brecha conceptual entre número y magnitud.

Cuando Descartes define el producto de segmentos lo primero que hace es introducir un segmento unidad. Esta unidad no es exactamente ni una unidad de medida ni un número. Se trata de una unidad que desempeña la función de neutro de la multiplicación.

Veamos como plantea Descartes en su libro I de *La Geometría*, [Des54; p. 2-5], el producto, la división y la raíz de dos segmentos:

> ***La Multiplicación***
>
> Sea, por ejemplo, AB la unidad, y que deba multiplicarse BD por BC; no tengo más que unir los puntos A y C; luego trazar DE paralela a CA, y BE es el producto de la multiplicación. *Ver figura 2*

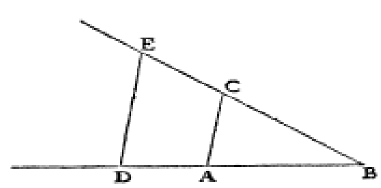

Figura 2

La división

O bien, si debe dividirse BE por BD, habiendo unido los puntos E y D, se traza AC paralela a DE y BC es el resultado de esta división.

La Extracción De La Raíz Cuadrada.

O, si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG, que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con este punto como centro se traza el círculo FIH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con algunas rectas sobre FH, hasta I, es GI la raíz buscada. *Ver figura 3*

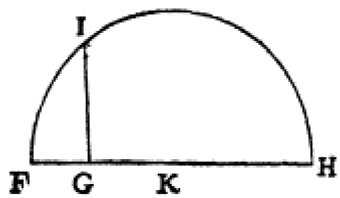

Figura 3

Para Descartes las magnitudes deben conservar las dimensiones y cuando haya exceso o defecto se sobrentiende que están multiplicadas o divididas tantas veces como se requiera, esto lo explica por medio del siguiente ejemplo:

…así, si ha de extraerse la raíz cúbica de aabb-b, debe considerarse que la cantidad aabb está dividida por la unidad y que la otra cantidad b está multiplicada dos veces por la misma unidad… [Des54; p. 2-5].

Esto muestra que todavía no se ha separado lo aritmético del referente geométrico en el sentido de que la similitud es un principio básico de la operatividad; no se puede sumar magnitudes de superficie con magnitudes lineales, pero Descartes evita este inconveniente suponiendo que multiplicando o dividiendo por la unidad, tantas veces como fuera necesario, se logra el equilibrio.

Podría decirse que con los aportes de Stevin y Descartes, ya es posible constituir el conjunto de los números racionales como un campo algebraico con las operaciones de suma y producto aparentemente bien definidas; quedaba pues por legalizar la existencia de los números irracionales para obtener el campo completo de los números reales.

A principios del siglo XIX surgen preguntas acerca de la justificación de los procedimientos encontrados en el desarrollo de los principios y métodos del cálculo diferencial e integral, dando origen al movimiento de la aritmetización del análisis que inicia la concepción moderna de las matemáticas, y es a partir de operaciones aritméticas que los conceptos del análisis y las propiedades de funciones fueron establecidas.

El manejo del concepto de función genera controversia porque su definición era vaga e imprecisa; el uso de series infinitas conduce a paradojas y resultados incongruentes por la ausencia del concepto de convergencia. Es por esto que los conceptos fundamentales de límite, función, continuidad, derivada e integral deben ser redefinidos con más claridad y precisión. Para ello diversos matemáticos decidieron reconstruir el análisis solamente sobre la base de los conceptos aritméticos.

Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) intentó resolver los problemas de rigor del cálculo infinitesimal, llevando al álgebra y a la geometría todas las operaciones del cálculo evitando así la utilización del concepto de límite. Por otra parte, con los estudios de Karl-

Friedrich Gauss (1777 - 1855) sobre las series hipergeométricas[6] marca el productivo uso de las series infinitas y surge la preocupación por las cuestiones de convergencia y divergencia.

Fueron varios matemáticos los que hicieron aportes a la formulación de definiciones y de criterios de convergencia que marcan una primera etapa en la aritmetización del análisis, la cual hace evidente la necesidad de una definición formal del concepto de número. Uno de ellos es Agustín Louis Cauchy (1789 -1857), quien introduce el rigor en el análisis, escogiendo las definiciones y los procesos de demostración de tal forma que estuviesen libres de todo referente geométrico.

Mas adelante Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind (1831 - 1916) y George Cantor (1845 - 1918) centran sus aportes en la construcción de los números reales, partiendo del conjunto numérico que cada autor consideraba propio para su construcción, con el fin de caracterizar los irracionales.

Por otra parte, Giuseppe Peano (1858 - 1932) contribuye en la introducción de lenguajes formales a finales del siglo XIX, con la intención de establecer la validez de los razonamientos matemáticos y de reescribir las matemáticas en términos de un nuevo simbolismo, influyendo en el desarrollo futuro de la lógica simbólica. Peano introduce

---

[6] Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es hipergeométricas, si existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha\, n+\beta}{\alpha\, n+\gamma}, \alpha n + \gamma \neq 0$.

símbolos como el de la igualdad (=), inclusión $(\subset)$, pertenencia $(\in)$, no pertenencia $(\ni)$, implicación $(\supset)$, intersección $(\cap)$, unión $(\cup)$, cero(0), número (N_0), sucesor de *a (a+1).*

Símbolos que en la actualidad han tenido algunos cambios debido a su poca aceptación e interpretación, como es el caso de: la no pertenencia (∉) e implicación (⇒). Además enuncia los siguientes postulados, los que constituirán el inicio de la presentación axiomática de los números naturales:

0)Los números naturales forman una clase.

1)Cero es un número.

2)Si *a* es un número, su sucesor lo es también.

3)Sea *S* una clase y 0 un elemento de esa clase tal que si *x* es un número que pertenece a *S*, se deduce de ello que para cualquier *x* su sucesor pertenece también a la clase; entonces, todo número está en *S*. Este postulado se llama "principio de inducción".

4)Sean a y b dos números; si sus sucesores son iguales, entonces a y b son iguales.

5)El sucesor de un número no es nunca igual a cero.

Peano introduce el número cero como el primer elemento de los naturales, además establece la combinación del signo del opuesto $(-)$ y del número positivo *b*, asignándoles el nombre de "número negativo" $(-b)$. Para Peano un número racional $\frac{a}{b}$ es aquel que representa la operación compuesta "multiplicar por *a* y dividir por *b*". En cuanto a los números reales, los define como la más pequeña cota de una clase de números racionales, cada uno de ellos inferior a un número dado, excluyendo $+\infty$ y $-\infty$. Peano, consideraba que la lógica debía servir a las matemáticas como medio de expresar sus teorías, de una manera más apropiada, más clara, más precisa y hacerla más fácil de aprender, siendo esto la finalidad de lo que hoy conocemos como método axiomático. Sin embargo esta presentación axiomática, si bien es útil en la medida en que permite hacer una presentación rápida y completa de propiedades, oculta la verdadera importancia de algunas de ellas, que caracterizan y diferencian un conjunto numérico de otro, obstaculizando su aprendizaje.

1.10 El RIGOR EN EL ANÁLISIS Y LA CONSTRUCCIONES DE LOS REALES

En el siglo XIX se hizo necesario fundamentar el análisis, y con ello aparece la necesidad de definir rigurosamente el número real, puesto que no se tenía una idea clara de los números irracionales, los cuales generalmente se trabajaban como aproximaciones de números racionales, pero sin una base estructural sólida que proporcionara datos sobre sus propiedades o sobre la manera de operar rigurosamente con ellos. Una primera idea acerca del número fue publicada por Agustín Louis Cauchy en su curso de análisis, primera obra importante del análisis moderno por su rigor y claridad. Cimenta su programa sobre los conceptos de número, cantidad, limite y función. Cauchy, es el primero en introducir una definición de límite y a través de este concepto incorpora las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, el concepto de función continua y la convergencia de series y sucesiones, los cuales requieren que los números reales sean definidos lógicamente. Cauchy define el número irracional como *"el límite de las diversas fracciones que tienen valores más y más cercanos"* [Mor92; p.1255], lo cual fue interpretado como una definición de los números irracionales a partir de la noción de límite, utilizada por varios matemáticos de la época para relacionar límite con número irracional. Los trabajos de Cauchy son muy importantes, pues conforman el marco necesario para la completa rigorización del análisis por la escuela de Weierstrass en 1860.

Antes de abordar el desarrollo de los números reales a través de la teoría de los números racionales e irracionales se tuvo en cuenta el trabajo sobre números irracionales algebraicos y trascendentes, con los cuales se dio un paso hacia el conocimiento de los números irracionales. En esa dirección, hicieron importantes aportes Karl Weierstrass, Richard Dedekind, George Cantor entre otros.

Karl Weierstrass fundamentó el análisis en el concepto de número, requiriendo así definir los números irracionales independientemente del concepto de límite. A su vez Cantor y Dedekind fundamentaron el análisis basándose en el concepto de número racional y en sus operaciones, construyendo los números irracionales mediante la definición de sucesiones fundamentales y cortaduras respectivamente.

Weierstrass define un número real, según Dugac como una clase de equivalencia[7] que resulta de la relación de equivalencia definida por la igualdad entre agregados que satisfacen el criterio de finitud. Este criterio expresa lo siguiente: un número nuevo -irracional- es finito si es menor que algún racional.

Weierstrass incorpora la definición de límite, evitando la noción confusa de "aproximación indefinida" como lo plantea Cauchy, a través del uso de los épsilon – delta ($\varepsilon - \delta$) como lo conocemos actualmente[8]. Además, es prácticamente con los trabajos de Weierstrass que el proyecto de aritmetización del análisis llega a su culminación, pues con la incorporación del "lenguaje de épsilon y delta", se logran reducir los enunciados que involucran lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño a relaciones entre magnitudes finitas.

George Cantor (1845 - 1918) al igual que Weierstrass, desarrolla una teoría satisfactoria de los números irracionales, evitando caer en el círculo vicioso de definir los números reales como límites de sucesiones convergentes, sin haber definido de antemano un conjunto al cual pertenezca dichos límites.

---

7 Esta clase de equivalencia solamente exige la propiedad simétrica y transitiva, aún no se consideraba la reflexiva.

8 La función f tiende al límite L en x_0 si para todo $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Cantor en 1873, construyó el dominio de los números reales a partir de sucesiones infinitas de números racionales. Encontrándose con las primeras controversias, que acompañarían todos sus trabajos posteriores, pues el trabajar con sucesiones o conjuntos infinitos entraba en conflicto con el pensamiento de un gran número de matemáticos que veían el infinito, no como una entidad matemática sino como una cantidad en potencia que nunca podía establecerse como algo completo y determinado. Cantor afirma la existencia de conjuntos infinitos actuales, y muestra que un conjunto es infinito si existe una correspondencia biunívoca entre él mismo y una de sus partes. Introduce el término numerable para designar a todo conjunto que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales, demostrando así que los conjuntos racionales y algebraicos son numerables, ya que su cardinal es igual al cardinal de los números naturales. Además, demostró que el conjunto de los números reales no es numerable.

Por su parte Richard Dedekind (1831 - 1916) tiene como objetivo principal centrarse en la fundamentación de las matemáticas que prevalece en el siglo XIX. Él establece que el concepto de límite debe desarrollarse de una manera puramente aritmética sin referencia alguna a la geometría, como era lo usual, para lograr así un concepto riguroso.

Dedekind estaba convencido de que el concepto de continuidad no había sido bien definido todavía, y se dedicó a encontrar su origen en lo aritmético para llegar a la esencia de la continuidad, y lo logra, cuando publica su teoría sobre el continuo y los números irracionales en la cual intenta dejar sentadas las bases formales de los números reales, y así disipar todas las dudas y ambigüedades en la conceptualización del continuo, aclarando la concepción errada de ciertos matemáticos sobre continuidad, ya que ellos llamaban continuidad a lo que hoy conocemos como densidad; esto es, que entre dos números cualesquiera siempre hay otro entre ellos.

Dedekind señaló que las propiedades de orden de los números racionales hacían posible utilizar las cortaduras para definir los reales. Una cortadura es una partición de los racionales en dos subconjuntos disjuntos (A_1, A_2) tal que cada número de A_1 es menor que todo número de A_2 (existiendo uno y sólo un número real que produce esta cortadura). Si en A_1 hay un número máximo o en A_2 un mínimo, entonces la cortadura define un número racional, pero si en A_1 no hay máximo ni en A_2 mínimo, entonces la cortadura define un número irracional. El conjunto de los números reales es en esencia el conjunto de todas las cortaduras sobre los racionales, y Dedekind demostró rigurosamente que dicho conjunto es continuo.

De este modo, Dedekind pudo demostrar con rigor que toda sucesión estrictamente creciente y acotada superiormente de reales tiene por límite un número real. Esta proposición es conocida modernamente como el principio de continuidad de Weierstrass.

La idea de “cortadura de Dedekind” en el dominio de los números racionales, o cualquiera de las construcciones anteriormente mencionadas equivalentes a los números reales, han venido a reemplazar la idea de magnitud geométrica como columna vertebral del análisis, permitiendo definir los números reales desde una perspectiva puramente aritmética. Estos números reales se diferencian de los racionales ya que los primeros cumplen con el principio de continuidad. Este principio de continuidad se enuncia de cuatro maneras, las cuales son equivalentes:

Principio de Dedekind. El conjunto de los números se divide en dos conjuntos no vacios X e Y sin elementos en común, de forma que para $x \in X$, $y \in Y$ arbitrario se cumpla $x<y$, existe entonces un único numero ξ (la frontera) para el cual $x \leq \xi \leq y$, cualquiera que sean $x \in X$, $y \in Y$.

Principio de Cantor. Dado un sistema de intervalos encajados $[a_n, b_n]$ existe un único número real ξ que pertenece a cada uno de los intervalos.

Principio de Weierstrass. Si una sucesión no decreciente de números reales esta acotada superiormente, entonces es convergente.

Principio de Cauchy. Toda sucesión fundamental de números reales converge.

CAPITULO 2

AGREGADOS COMPUESTOS POR UNA CANTIDAD FINITA DE ELEMENTOS.

Uno de los temas fundamentales en el proceso de fundamentación del Cálculo fue la construcción de los números reales. Para ello varios matemáticos hacen sus aportes mediante diferentes definiciones y construcciones de estos números, donde lo decisivo giraba alrededor de las cantidades irracionales y el continuo aritmético.

En 1865 Weierstrass realizó notables aportes en los cursos que el ofrecía cada dos años, titulados *Introducción a la Teoría de Funciones Analíticas*, con los cuales continuaba y lideraba el nuevo modelo del rigor y aritmetización del análisis. Siendo uno de los primeros matemáticos en ofrecer una definición satisfactoria de número real.

Weierstrass construye los números reales, con el fin de fortalecer la base del análisis matemático, y definir concretamente los conceptos fundamentales de la teoría de funciones, para así crear su teoría de las funciones elípticas. Además, construye los reales, evitando el "error lógico" de Cauchy, quien los había definido como el límite de sucesiones convergentes de números racionales, pero el concepto de límite había sido construido asumiendo la existencia de estos números.

La construcción de los números reales de Weierstrass, fue dada a conocer por las notas de clase de sus alumnos H. Kossack, y Adolf Hurwitz, notas que actualmente se encuentran registrada en el libro "les constructions des nombres reeks dans le mouvement d` aritmetizaciòn de analyse" de Jaqueline Boniface.

Este capítulo presenta la primera y segunda lección del texto mencionado anteriormente. En las lecciones, se encuentran los presupuestos teóricos, definiciones y las pocas demostraciones que Weierstrass presentó para la construcción de los números racionales. Posteriormente formalizaremos esta construcción, en un estilo moderno, y demostraremos las propiedades algebraicas y de orden.

Inicialmente se retomarán algunos apartes del artículo anterior a *El Curso de Karl Weierstrass sobre los fundamentos del análisis en la redacción de Adolf Hurwitz* denominado *Razones y Características de la "Revolución" Weierstrassiana*, con el fin de contextualizar un poco el tema de este capítulo.

Weierstrass pretendió definir desde el inicio de sus cursos, el continuo aritmético, es decir el conjunto de magnitudes que hoy llamamos números reales. Para esto construyó los números racionales positivos a partir de los números enteros positivos y posteriormente construyó los irracionales a partir de su definición de partes exactas. Cada número – entero, racional o irracional – lo denota como un agregado, es decir, un conjunto compuesto por elementos con características específicas.

Weierstrass, retoma la definición euclidiana de número[9] para definir un número entero positivo como un agregado de unidades, además llama al número racional "número complejo" y lo define como un agregado de diferentes unidades, es decir, unidad principal refiriéndose a la parte entera del número y sus partes exactas que serán de la forma $\frac{1}{n}$, con *n* un entero positivo.

---

9 Un número es una multitud de unidades.

Weierstrass ilustra lo anterior mediante el siguiente ejemplo y nota que un mismo número puede ser representado de diferentes maneras, lo cual ocasionaría confusiones en la diferenciación de un número con otro. Por ello, Weierstrass define la igualdad mediante una relación de equivalencia para solucionar este inconveniente:

> Por ejemplo, el número racional $\frac{11}{3}$ que esta compuesto por 3 unidades principales y el agregado $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ que puede ser escrito $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ ó también $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$. Él manifiesta que cada número racional tiene una infinidad de escrituras posibles, en la medida donde una unidad tenga una infinidad de partes exactas. Con el fin de identificar cada escritura diferente de un mismo número con el número en si, Weierstrass definió la igualdad como "relación de equivalencia". [Bon 02 ; p. 34]

A la relación de equivalencia solo estaba caracterizada por la propiedad simétrica y transitiva, dado que la propiedad reflexiva no era tenida en cuenta.

Weierstrass define además, otras magnitudes, refiriéndose a la magnitudes con una cantidad infinita de elementos, las cuales a diferencia de las anteriores deben cumplir con el criterio de finitud - Un número nuevo es finito si es menor que algún racional- y además, supone que con estas nuevas magnitudes también se pueden realizar operaciones de igual forma como se realizan con las magnitudes finitas:

> Según Weierstrass, se esta conduciendo a las nuevas magnitudes numéricas, en consideración de los agregados compuestos de una infinidad de elementos. Estos agregados, son comparables con los infinitos conceptos numéricos de Bolzano[10], con la condición que satisfagan la condición de finitud, se suponen los mismos cálculos que las magnitudes

[10] Boniface resalta la diferencia entre estos dos autores: Cf. El preámbulo. La diferencia entre los dos es esencialmente que los agregados de Weierstrass no comprenden los infinitamente pequeños, que Bolzano considera

> numéricas compuestas de una cantidad finita de elementos, es decir que los números racionales. [Bon02 ; p. 34]

Observemos que, Weierstrass con la utilización de su condición de finitud, está dejando de lado las magnitudes infinitamente pequeñas, lo cual esta directamente relacionado con lo que hoy se conoce como propiedad arquimediana[11].

Weierstrass, replantea la definición de igualdad para poder así ampliar el dominio numérico, y lo hace mediante transformaciones, en donde toda parte de una magnitud es transformada en una parte de la otra y viceversa. Es así, que en adelante identificaremos a las magnitudes compuestas por una cantidad infinita de elementos como la representación de los números irracionales, aunque Weierstrass no diga nada acerca su existencia como lo nota en la siguiente cita:

> La definición de igualdad, concebida para los números enteros como correspondencia biunívoca entre los agregados que los representan, había sido modificada con el fin que se pudieran aplicar a estas nuevas magnitudes, desde entonces, dos magnitudes numéricas son iguales si toda parte de la una puede ser transformada en una parte de la otra y recíprocamente. A partir de esta definición de igualdad, todo esta en su lugar para ampliar el dominio de los números considerados hasta aquí (el conjunto de los números racionales), y extenderlos a las "magnitudes numéricas" que son los agregados compuestos por una infinidad de elementos y que tienen un valor finito (es decir la suma de sus elementos es inferior a un número racional). Sin embargo Weierstrass no dice aun nada acerca de la existencia de estas magnitudes, debido a que no las identifica con los números irracionales; como tampoco llamaba "números racionales" a los agregados compuestos por una cantidad finita de elementos. [Bon 02 ; p. 34]

Weierstrass identifica los números irracionales, solo hasta el momento de definir el límite de una sucesión de números racionales, ya que antes de ello no tendría sentido definir los "irracionales" como límite de dichas sucesiones porque no se sabe si fuera del dominio

[11] sea $\beta > 0$. Entonces para todo $x \in R$ existe un $n \in N$ tal que $n\beta > x$.

numérico racional existen otras magnitudes, esto se da sólo cuando se hace extensivo el dominio numérico:

> Él abordó sin embargo la existencia de números irracionales en su último curso de este semestre en 1886, redactado por G .Thieme, al momento de definir el límite de una sucesión de números racionales. El subraya aquí que el interés de Weierstrass no es por una construcción de los "números reales" puramente formal; su propósito es clarificar la teoría de funciones, y es luego con la cuestión del límite de una sucesión de números racionales que se posiciona para él la cuestión de la existencia de los números irracionales. No se puede en efecto hablar de tal límite si los números irracionales no han sido definidos con anterioridad. [Bon 02 ; p. 34]

Aunque G. Thieme nota que, la construcción de los números reales no era el principal interés de Weierstrass, creemos que si le eran necesarios para darle claridad y continuidad a su teoría. Luego la definición formal de los números irracionales era pieza clave dentro de sus cursos, por lo tanto, era un problema el no tener completo un dominio numérico con el cual en adelante se pudiera trabajar:

> Weierstrass expresa claramente este problema:
>
> Si partimos de la existencia de magnitudes numéricas racionales, entonces no tiene sentido definir los irracionales como límite de esas magnitudes, primero que todo porque no podemos saber si existen, fuera de las magnitudes numéricas racionales, aun otras magnitudes.
>
> Es solamente cuando se consideran magnitudes extensivas que se puede hablar del límite de un segmento, pero no si uno se ubica desde el punto de vista puramente aritmético. Pero las magnitudes numéricas tal como las hemos definido anteriormente, abarcando todos los números racionales, también comprenden otras magnitudes. Consideremos por ejemplo el número "e" que esta compuesto de elementos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots \frac{1}{n!}, \ldots$, entonces esta es una sucesión bien definida, que define una magnitud numérica bien determinada; al mismo tiempo Hermite ha logrado mostrar que no existe ninguna magnitud numérica racional que le sea igual según la definición dada. El deduce que el dominio numérico no esta completo con los números racionales[12].

---

12 Citado por [Bon 02 ; p. 35].

Weierstrass realiza una diferenciación entre cuando una magnitud con una cantidad infinita de elementos representa un número racional o un irracional, puesto que si no existe una condición que los diferencie nada garantizaría en palabras de Weierstrass la existencia de otras magnitudes diferentes a las racionales:

> Una definición de las magnitudes numéricas como agregado (de un número finito o infinito) de elementos no puede garantizar la existencia de otras magnitudes que las magnitudes racionales, definidas como agregados de un número finito de elementos. Ciertos agregados compuestos de una infinidad de elementos pueden en efecto ser equivalentes a una magnitud racional, y nada prueba hasta allí que no ocurra lo mismo para todos. El ejemplo del número *e*, definido por el agregado $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots \frac{1}{n!}, \ldots\right)$, que no es equivalente a ninguna magnitud racional, establece sin embargo la existencia de otras magnitudes, que se llamarán magnitudes irracionales. Así el número *"e"* es la magnitud irracional definida como límite de la suma de los elementos del agregado $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots \frac{1}{n!}, \ldots\right)$. Hablar del límite de magnitudes racionales adquiere en adelante un sentido; dicho límite es una "magnitud numérica" racional o irracional. [Bon 02 ; p. 35]

Con lo anterior expuesto podemos ahora iniciar con la primera y segunda lección que presenta Weierstrass en uno de sus cursos en el verano de 1876, redactado por Adolf Hurwitz:

Weierstrass, en su primera conferencia presenta las definiciones de número usual y número complejo, define las operaciones suma y producto para estos mismos números, así como sus propiedades. Finalmente presenta la definición de una parte exacta de la unidad que le será muy útil en su segunda conferencia.

En la primera parte, Weierstrass presenta las definiciones de: número, número complejo, la suma y la igualdad entre números usuales:

Primera Conferencia. Capitulo 1
Definición de número

El concepto de número consiste en un agrupamiento por el pensamiento de cosas para las cuales se han descubierto una propiedad común, en particular de cosas idénticas para el pensamiento. Cada una de esas cosas, las designaremos como unidad del número.

Número complejo
Por número complejo entendemos el agregado compuesto de números de diferentes unidades (*a* pesetas, *b* reales, *c* céntimos). Estas diferentes unidades las llamamos los elementos del número complejo.

Adición
Por suma de dos números *a* y *b*, que pueden ser dos números usuales o dos números complejos, entendemos el número generado en asociación por el pensamiento de las unidades del número *b* con las del número *a*.

Igualdad
Dos cosas *a* y *b* son mutuamente iguales, si puedo establecer entre ellas una unión, una relación, que designamos por $a = b$ lo que es lo mismo $b = a$ y que si $a = b$ y $b = c$ entonces también $a = c$.
[Bon02; p.36]

Recordemos Weierstrass define la igualdad a partir de las propiedades simétrica y transitiva, que caracterizan lo que llamamos hoy “una relación de equivalencia”, que aunque como ya se especificó en notas anteriores la propiedad reflexiva no se tenía en cuenta.

En seguida Weierstrass, realiza en un paréntesis la interpretación geométrica de lo anteriormente mencionado, que aunque él pretende desprenderse de todo referente geométrico, suponemos que lo hace con el fin de ejemplificarla para darle mayor explicación:

> Por ejemplo, se pueden nombrar mutuamente igual dos segmentos en el espacio si son paralelos, y tienen la misma dirección y si coinciden. [Bon02; p.36]

Ahora, presenta su explicación a lo que él define igualdad entre dos números usuales -enteros- y establece el orden de los mismos números en el caso de no ser iguales:

> Podemos ahora nombrar mutuamente iguales dos números usuales *a* y *b* si, cuando reemplazamos una unidad de *a* con una unidad de *b*, otra unidad de *a* con otra unidad de *b*, así sucesivamente, cada unidad de *a* encuentra una unidad correspondiente de *b*; de modo que en ninguna unidad de *a* sobren elementos por reemplazar. En otro caso[13], diremos que $a>b$ (mayor que) o que $b<a$ (menor que). [Bon02; p.36]

En esta parte Boniface señala que Weierstrass no considera el caso donde *b* este compuesto de más unidades que *a*, es decir $a<b$, así su demostración no es rigurosa. Él define de hecho, la igualdad de dos números usuales (agregados de unidades) como correspondencia univoca (en términos actuales como aplicación de *a* en *b*). En vez de definirla como correspondencia biunívoca.

Weierstrass define para la suma dos propiedades, la primera de ellas se conoce como propiedad conmutativa de la suma y la segunda la define como la propiedad conmutativa aplicada a tres términos, la cual no debe ser confundida con la propiedad asociativa. Y luego de enunciar estas propiedades, presenta un caso en el que estas se aplican especificando que el orden en que las operaciones se efectúen no depende de la cantidad de números que se sumen:

---

[13] Boniface comenta que lo que, Weierstrass quiere decir en el caso donde queden unidades de *a* sin unidades correspondientes de *b*.

Leyes de la suma

Conforme a esta definición podemos plantear las siguientes proposiciones concernientes a la adición:

1. $a + b = b + a$
2. $(a + \mathrm{b}) + c = (a + c) + b$

De estas dos leyes, se sigue que la suma de una cantidad cualquiera de números es independiente del orden en que la suma se efectué. Porque si:
$[(a + \mathrm{b} + c + d) + e] + f = [(a + \mathrm{b} + c + d) + f] + e$ según la segunda ley, y

$(a + \mathrm{b} + c) + d + e + f = (a + \mathrm{b} + d) + c + e + f$ igualmente según 2, y

$a + \mathrm{b} + c + d + e + f = \mathrm{b} + a + c + d + e + f$

Según propiedad 1; de donde es permitido en una suma permutar dos números cualesquiera. Por las permutaciones sucesivas, sin embargo, cada número de la suma puede ser ubicado en un lugar cualquiera. [Bon02; p.37]

Weierstrass, a la suma de *a* y *b* le determina un número *c*, pero analiza el caso en el que el valor de *b* no sea conocido, entonces realiza lo que conocemos como la solución de una ecuación lineal, realiza el respectivo despeje y los resultados obtenidos los analiza, es decir, despejando *b* de la suma dada se obtiene *c* - *a*, como se viene trabajando con números positivos entonces, $c > a$, de lo contrario *b* seria un número negativo:

Si *c* es un número (usual), entonces se lo puede considerar como la suma de un número dado *a* y de un número *b* buscado. Se designará entonces *b*, en tanto que resulte de *c* y *a*, por $(c - a)$. $(c - a)$ es por consiguiente el número que adicionado a *a* da por resultado *b*. el símbolo $(c - a)$ no significa inicialmente que $c > a$. En el caso contrario diremos que es algo imaginario (en el sentido original del escrito).

Multiplicación

Por ab entendemos el número que, *b* será considerado como unidad, consiste en *a* tales unidades (*b*). La operación por la cual, a partir de a y b, se encuentra el número *ab*, es llamada la multiplicación.

De esta definición se sigue que:
1. $ab = ba$

2. $(ab)c=(ac)b$
3. $(a+b)c = ac + bc.$

[Bon02; p.37]

Weierstrass, relaciona el producto de enteros como la solución de una ecuación lineal tal como lo hace para la suma, como se cita a continuación:

> Queda ahora la cuestión inmediata de saber si un número dado *c* puede ser el producto de la multiplicación de un número dado *a* por un número buscado *b*. Se designa el número *b* por $\frac{c}{a}$, este símbolo no manifiesta sin embargo una significación real si c es un múltiplo de *a*, si es así, diremos que proviene del dominio de los números que tienen el número *a* por unidad. En el caso contrario $\frac{c}{a}$ no tiene sentido. [Bon02; p.37]

Luego presenta la definición de partes exactas de la unidad, que es la base de toda su teoría. Son estas partes exactas de la unidad los elementos de cada uno de los agregados que él utiliza para construir tanto los racionales como los irracionales:

> ***Partes exactas de la unidad***
>
> Definimos en efecto $\frac{1}{a}$ como un elemento que, multiplicado por a, se obtiene el elemento principal, la unidad. $\frac{1}{a}$ es llamada una parte exacta de la unidad. En adelante entenderemos por magnitud numérica todo número complejo cuyos elementos son la unidad y las partes exactas - son una infinidad - . [Bon02; p.38]

La primera conferencia de Weierstrass llega hasta este punto, en donde sus definiciones se centraron en darle operatividad a los números usuales y la culmina definiendo lo que él denomina “partes exactas de la unidad”.

En su segunda conferencia define al número complejo (número racional) como una magnitud numérica con una cantidad finita de elementos, cuyos elementos son la unidad y sus partes exactas.

Inicialmente, presenta la cerradura del producto entre partes exactas de la unidad -una parte exacta de la parte exacta de la unidad es otra parte exacta de la unidad- la cual será también elemento de una magnitud numérica, y lo ilustra mediante un ejemplo particular y posteriormente lo presenta de forma general:

> Las partes exactas de las partes exactas de la unidad son también partes exactas de la unidad y por consiguiente aparecen también como elementos de las magnitudes numéricas. Por ejemplo, la 4^{a} parte exacta de la 5^{a} parte exacta de la unidad es la $(4.5)^{ava}$ parte exacta de la unidad. En efecto $\frac{1}{4.5}$ significa, según nuestra definición, un elemento que, multiplicado por 4.5 da como resultado la unidad, sea, $\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\cdots+\frac{1}{4.5}$ (con 4.5 términos semejantes)$=1$ ó $\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\cdots+\frac{1}{4.5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\cdots+\frac{1}{4.5}\right)$(Con 5 paréntesis semejantes) = 1.
>
> Pero por otra parte, $\frac{1}{5}$ es el elemento que, multiplicado por 5, es equivalente a la unidad. Luego $\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\cdots+\frac{1}{4.5}$ debe ser equivalente a , $\frac{1}{5}$ o , $\frac{1}{4.5}$ debe ser la 4^{a} parte exacta de $\frac{1}{5}$. De manera general, $\frac{1}{m.n}$ debe ser la m^{sima} parte exacta de $\frac{1}{n}$ y también recíprocamente la n^{sima} parte exacta de $\frac{1}{m}$. [Bon02; p.38]

Weierstrass, define unas transformaciones las cuales son parte fundamental para el desarrollo y justificación de su teoría, y para nosotros fueron pieza base para el entendimiento de la misma: $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{m.n}$

> Bajo los supuestos mencionados anteriormente, podemos considerar ahora las siguientes transformaciones de una magnitud numérica:
>
> 1. n elementos cualesquiera $\frac{1}{n}$ pueden ser reemplazados por la unidad principal.
>
> 2. Cada elemento puede ser reemplazado por sus partes exactas. Por ejemplo
>
>   1 por $n.\frac{1}{n}$; $\frac{1}{a}$ por $b.\frac{1}{a.b}$; etc. [Bon02; p.38]

Interpretando las anteriores transformaciones podemos cambiar a $n\ \frac{1}{n}$ por la unidad y la unidad puede ser escrita como $n\ \frac{1}{n}$.

Utilizando las transformaciones, Weierstrass define nuevamente la igualdad y el orden entre dos magnitudes numéricas:

> Podemos ahora decir que dos magnitudes numéricas a y b son mutuamente iguales si a puede ser transformada por las transformaciones indicadas en otra magnitud a' que contiene los mismos elementos que b y tantas veces como en b. Pero si a puede convertirse mediante transformaciones en a', a'', donde a' contiene los mismos elementos que b y en las mismas cantidades, pero donde a'' representa aún otra magnitud numérica, entonces decimos que $a > b$ o $b < a$. [Bon02; p.39]

Es decir, para que dos magnitudes numéricas sean iguales, debe darse una correspondencia biunivoca utilizando las transformaciones dadas, de lo contrario las magnitudes en cuestión son diferentes porque una de ellas tiene más elementos que la otra, así se recurra a las transformaciones sobrarán elementos que no podrían ser transformados.

Veamos ahora, como Weierstrass realiza la comparación de dos magnitudes numéricas a y b por medio de transformaciones.

Comienza por darle a los números usuales el nombre de números enteros, debido a que estos están conformados solo por unidades, además, determina entre estos lo que conocemos como el máximo común divisor, que aunque dentro de la comparación que pretende presentar este elemento no lo utiliza, él lo da a conocer:

> Sean α y β dos números usuales, que tiene por elemento solamente la unidad y que podemos nombrar números enteros. Existe entonces un tercer número entero γ que es un divisor de los otros dos, y es el mas grande de todos los divisores que dividen tanto a α como a β. El número γ puede naturalmente ser la misma unidad si precisamente α y β no tienen ninguna medida común. [Bon02; p.39]

En la comparación de magnitudes numéricas, Weierstrass nota que en la práctica las transformaciones que él plantea van paralelas a elementos que se encuentran en la teoría de números. Realiza la comparación de dos magnitudes numéricas llevándolas a un mínimo común múltiplo, realiza las respectivas transformaciones de tal manera que todos los elementos de las magnitudes numéricas queden representados por un elemento común y finalmente compara la cantidad de veces que ese elemento común está en cada una de las magnitudes comparadas:

> Existe siempre, en efecto, para los números enteros cualesquiera $a_1, a_2, \dots, a_n$ de múltiplos comunes. Los números *c* que son múltiplos comunes de cada uno de los números $a_1, a_2, \dots, a_n$, y en particular un número c_1 del cual todos los números *c* son múltiplos. c_1 se llama el mínimo común múltiplo de los números $a_1, a_2, \dots, a_n$. Si ahora los números a y b están constituidos respectivamente a partir de los elementos $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots,$ y si *c* es el mínimo común múltiplo de los números $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n,$ de modo que $\alpha_1 a_1 = c,\ \alpha_2\, a_2 = c, \dots, \beta_1\, b_1 = c, \beta_2\, b_2 = c, \dots,$ entonces cada elemento $\frac{1}{a_n}$ puede ser reemplazado por $\alpha_n \frac{1}{\alpha_n a_n}$ elementos= α_n elementos $\frac{1}{c}$, de modo que las magnitudes numéricas a y b sean transformadas en otras que posean solamente el elemento $\frac{1}{c}$. Si las cantidades numéricas a y b tienen la misma cantidad de elementos $\frac{1}{c}$, entonces (según la definición) ellas son iguales, en el caso contrario son diferentes. Se puede sin embargo también considerar, por transformación de los números a y b, cada múltiplo *p.c* de *c* como múltiplo común de $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, y falta mostrar que esta otra elección del múltiplo no ejerce ninguna influencia sobre la comparación de a y b. Realmente, si el número *a* se convierte en m elementos $\frac{1}{c}$, *b* en n elementos $\frac{1}{c}$, entonces se convierten respectivamente en $2m$ elementos $\frac{1}{2c}$, y $2n$ elementos $\frac{1}{2c}$, y respectivamente en *p.m* elementos $\frac{1}{pc}$, y *p.n* elementos $\frac{1}{pc}$, de donde se sigue la independencia de la elección del múltiplo común sobre el resultado de la comparación. [Bon02; p.39]

Con las nuevas concepciones planteadas, Weierstrass define las operaciones suma y multiplicación, así como sus respectivas propiedades:

Adición

Definición de la adición de magnitudes numéricas (números mixtos)

Si se agrega a los elementos de una magnitud numérica a un elemento de b, después un segundo elemento de *b*, y así sucesivamente hasta que todos los elementos de *b* sean agotados, entonces se llama al resultado obtenido, que es nuevamente una magnitud numérica, la suma de a y b: $a + b$. Entonces $a + b = b + a$ (porque un elemento que se encuentra α veces en a y β veces en b se encuentra, según la definición, $\alpha + \beta$ veces en $a + b$, y $\beta + \alpha$ veces en $b + a$)[14]. Además, $(a + b) + c = (a + c) + b$,[15] de donde se sigue, en relación con $a + b = b + a$, el orden en el cual se suma un número cualquiera de magnitudes numéricas, no influye sobre el resultado final[16]. La adición es una operación unívoca. En efecto, si se reemplaza en $a + b$ en lugar de *b* otro número $b_1 > b$, entonces la suma también es otra. De $b_1 > b$ sigue en efecto que se puede transformar b en b y b_1 en $b' + b''$. Luego también se tiene que $a + b_1 > a + b$. [Bon02; p.40]

Multiplicación

Definición de la multiplicación de magnitudes numéricas

Ahora procuremos buscar si a partir de dos números enteros usuales cualesquiera a y b, se puede obtener un número que designaremos por ab, la operación que se indica por ab debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. $ab = ba$
2. $(ab)c = (ac)b$
3. $a(b+c) = (ab+ac)$

De 3 y 1 resulta fácilmente que:

3'. $(a' + b' + c' + \ldots) = aa' + ab' + ac' + \cdots + ba' + bb' + bc' + \cdots + ca' + cb' + cc' + \ldots$

De 3' resulta que se puede representar *ab* como la suma de un cierto número de símbolos 1.1. [Bon02; p.40]

Veamos esto con un ejemplo: supongamos los números enteros 2 y 3, cuyo producto se representa $(1+1)(1+2)$, aplicando propiedad 3 se tiene

[14] Definición que hoy en día se conoce como propiedad clausurativa de la suma o cerradura en la suma

[15] Esta propiedad no debe ser entendida como la propiedad asociativa, recordemos que es la propiedad conmutativa para tres términos.

[16] Enunciado que conocemos como propiedad conmutativa de la suma.

$1.1 + 1.2 + 1.1 + 1.2$, pero este mismo producto lo podemos representar como $(1+1)(1+1+1)$, aplicando la propiedad 3' obtenemos 1.1+1.1+1.1+1.1 +1.1 + 1.1 y por último, por la propiedad 3 tenemos $2(1.1) + 2(1.2) = 2 + 4 = 6$.

> A este símbolo sin embargo se le puede aun dar una significación arbitraria, y no se puede dividir más. Si se adjunta a él el valor 1(la unidad), la operación indicada por *ab* es entonces perfectamente determinado. Si ahora extendemos la multiplicación a los números complejos[17], como un tercer número tal que para la operación *ab* las leyes 1, 2, y 3 sean validas.
> [Bon02; p.40]

Ahora Weierstrass, define lo que se entiende por el producto de dos elementos, en donde toma como referencia el producto $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n}$ y fija que la unidad veces la unidad es la unidad, es decir, $m.n$ veces $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n}$ es la unidad. Y luego toma magnitudes numéricas conformadas a partir de los elementos de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, las cuales la operatividad de su producto estará de acuerdo con las leyes 1, 2 y 3 y además con la significación de $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n}$:

> A propósito de nuestras magnitudes numéricas (números mixtos) debemos pues decir que queremos entender por $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n}$. Esta significación no es del todo arbitraria si fijamos que la unidad veces la unidad debe ser la unidad.
> Pues se tiene entonces:

[17] Aquí anota Boniface que estos números complejos deben ser entendidos dentro del significado de Weierstrass.

$$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots \text{ con } m \text{ términos}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots \text{ con } n \text{ términos}\right) = 1.$$

Por la propiedad 3 se sigue que la propiedad 3' es valida.

$$\left(\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}+\cdots\right) = 1$$

En el paréntesis existen sin embargo $m.n$ términos $\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}$. Estos son luego equivalentes a la unidad, o bien $\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}$ es la $(m\times n)^{ava}$ parte exacta de la unidad, es decir igual a $\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}$.

Si Ahora, si a y b son dos magnitudes numéricas cualesquiera, compuestas a partir de los elementos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,$ su multiplicación es de ahora en adelante operable conforme a las leyes 1 - 3 y a la significación de $\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}$. Debemos ahora demostrar que tal producto satisface las leyes 1, 2 y 3. [Bon02; p.41]

Enseguida Weierstrass demuestra las propiedades para las magnitudes mencionadas anteriormente:

Si α designa un elemento de *a*, β un elemento de *b*, entonces $ab = \sum \alpha\beta$, $ba = \sum \beta\alpha$, y puesto que para los elementos de α y β, la ley $\alpha.\beta = \beta.\alpha$, que resulta de la definición de $\alpha.\beta$, esto es valido, entonces (1) $ab = ba$ lo que también es; $(ab)c = \sum \alpha\beta\gamma$, $acb = \sum \alpha\gamma\beta$, por consiguiente $\alpha\beta\gamma = \alpha\gamma\beta$, se tiene también $abc = acb$ (2); $a(b+c) = \sum \alpha\left(\sum\beta + \sum\gamma\right) = \sum \alpha\beta + \sum\alpha\gamma = ab + ac$[18].. [Bon02; p.41]

2.1 CONSTRUCCION DE LOS NUMEROS RACIONALES

[18] Donde (1) y (2) son las propiedades conmutativa y distributiva respectivamente.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente enseguida elaboraremos una construcción de los números racionales utilizando los presupuestos establecidos por Weierstrass e incorporando algunos elementos de la teoría de conjuntos. Para esto, al igual que lo hace Weierstrass, supondremos la existencia de los números enteros como grupo ordenado, y además la existencia de aquellos elementos que Weierstrass denomina partes exactas de un número y lo denota por $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}$.

Consideremos al conjunto $B = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\right\}$, en donde $\frac{1}{n}$ se define como el elemento que al multiplicar por *n* se obtiene la unidad.

Definamos la suma y el producto en *B*

1. **Suma:**

$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \alpha\frac{1}{c}$, donde $c = mcm\,(n,m)$ y $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

Propiedades:

a. $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$, propiedad conmutativa, esta propiedad es inmediata dado que la suma se define en términos de *mcm*.

b. $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{t} = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{t}\right)$, propiedad asociativa.

2. **Producto**:

$\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{n \times m}$, donde $\frac{1}{n \times m}$ debe ser la n^{sima} parte exacta de $\frac{1}{m}$ y recíprocamente. Esta operación para Weierstrass significa las partes exactas de las partes exactas de la unidad.

Propiedades:

a. $\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \times \frac{1}{n}$, propiedad conmutativa

b. $\left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{m}\right) \times \frac{1}{t} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{m} \times \frac{1}{t}\right)$, propiedad asociativa.

Para las partes exactas $\frac{1}{n}$ y las partes exactas de las partes exactas de la unidad se pueden considerar las siguientes transformaciones:

1. *n* elementos $\frac{1}{n}$ pueden ser transformados por la unidad principal
2. Cada elemento puede ser remplazado por sus partes exactas, por ejemplo 1 por $n \cdot \frac{1}{n}$ y $\frac{1}{a}$ por $b \cdot \frac{1}{a \cdot b}$.

Utilizando la transformación 2 podemos definir el inverso multiplicativo de $\frac{1}{n}$, que mas adelante lo retomaremos.

Definamos ahora la colección de los conjuntos

$B^k = \left\{\left\{\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_k}\right\} / \frac{1}{n_i} \in B, i = 1,2, \cdots k\right\}$, luego sea

$$A = \left(\bigcup_{j=1}^{k} B^k\right) \cup B^0; k \in \mathbb{N}\ y\ B^0 = \emptyset$$

Definamos en A las siguientes operaciones:

Sea $a = \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\}$ y $b = \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}; a, b \in A$

Definición 1

La suma de *a* y *b* es la unión de todos los elementos de *a* con los elementos de *b*, de la siguiente manera:

$$a \oplus b = \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} \oplus \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} \cup \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}$$

Definición 2

El producto de *a* y *b* se obtienen multiplicando cada uno de los elementos de *a* con cada uno de los elementos de *b*

$$a \otimes b = \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} \otimes \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{a_1} \times \frac{1}{b_1}, \frac{1}{a_1} \times \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{a_1} \times \frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_2} \times \frac{1}{b_1}, \cdots, \frac{1}{a_2} \times \frac{1}{b_n}, \cdots, \frac{1}{a_m} \times \frac{1}{b_1}, \frac{1}{a_m} \times \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{a_m} \times \frac{1}{b_n}\right\}$$

Proposición 1

La suma es conmutativa y asociativa

Demostración:

La demostración es inmediata por las propiedades de la unión de conjuntos.

Proposición 2

El producto es conmutativo

Demostración:

De la definición y propiedad del producto en B esta conmutatividad es inmediata.

Proposición 3

El producto es asociativo

Demostración:

$$(a\otimes b)\otimes c=\left(\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_m}\right\}\otimes\left\{\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2},\cdots,\frac{1}{b_n}\right\}\right)\otimes\left\{\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_2},\cdots,\frac{1}{c_j}\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{a_1}\frac{1}{b_1},\cdots,\frac{1}{a_1}\frac{1}{b_n},\frac{1}{a_2}\frac{1}{b_1},\cdots,\frac{1}{a_2}\frac{1}{b_n},\cdots,\frac{1}{a_m}\frac{1}{b_1},\frac{1}{a_m}\frac{1}{b_2},\cdots,\frac{1}{a_m}\frac{1}{b_n}\right\}\otimes\left\{\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_2},\cdots,\frac{1}{c_j}\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{a_1}\frac{1}{b_1}\frac{1}{c_1},\cdots,\frac{1}{a_1}\frac{1}{b_n}\frac{1}{c_1},\frac{1}{a_2}\frac{1}{b_1}\frac{1}{c_2},\cdots,\frac{1}{a_2}\frac{1}{b_n}\frac{1}{c_2},\cdots,\frac{1}{a_m}\frac{1}{b_1}\frac{1}{c_j},\frac{1}{a_m}\frac{1}{b_2}\frac{1}{c_j},\cdots,\frac{1}{a_m}\frac{1}{b_n}\frac{1}{c_j}\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{a_1(b_1c_1)},\cdots,\frac{1}{a_1(b_nc_1)},\frac{1}{a_2(b_1c_2)},\cdots,\frac{1}{a_2(b_nc_2)},\cdots,\frac{1}{a_m(b_1c_j)},\frac{1}{a_m(b_2c_j)},\cdots,\frac{1}{a_m(b_nc_j)}\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{a_1}\frac{1}{b_1c_1},\cdots,\frac{1}{a_1}\frac{1}{b_nc_1},\frac{1}{a_2}\frac{1}{b_1c_2},\cdots,\frac{1}{a_2}\frac{1}{b_nc_2},\cdots,\frac{1}{a_m(b_1c_j)},\frac{1}{a_m(b_2c_j)},\cdots,\frac{1}{a_m(b_nc_j)}\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_m}\right\}\otimes\left(\left\{\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2},\cdots,\frac{1}{b_n}\right\}\otimes\left\{\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_2},\cdots,\frac{1}{c_j}\right\}\right)$$

$$=a\otimes(b\otimes c)$$

CRITERIO DE COMPARACIÓN DE WEIERSTRASS

Sean $a=\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_m}\right\}$ y $b=\left\{\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2},\cdots,\frac{1}{b_n}\right\}$; $a,b\ \in A$

Sea *c* el mínimo común múltiplo de los números $a_1, a_2, \cdots, a_m$ y $b_1, b_2, \cdots, b_n$ de modo que existe $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ y $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ tales que $\alpha_1 a_1 = c, \alpha_2 a_2 = c, \cdots, \alpha_m a_m = c,\ \beta_1 b_1 = c, \beta_2 b_2 = c, \cdots, \beta_n b_n = c,$ luego por las transformaciones dadas por Weierstrass a cada elemento $\frac{1}{a_m}$ le corresponde un elemento $\alpha_m \frac{1}{c}$.

Luego se tiene $a = \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} = \left\{\underbrace{\frac{1}{c}, \frac{1}{c}, \cdots, \frac{1}{c}}_{\alpha_1 - veces}, \underbrace{\frac{1}{c}, \frac{1}{c}, \cdots, \frac{1}{c}}_{\alpha_2 - veces}, \cdots, \underbrace{\frac{1}{c}, \frac{1}{c}, \cdots, \frac{1}{c}}_{\alpha_m - veces}\right\}$ es decir

$a = \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} = \alpha \frac{1}{c},\ \text{con } \alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i, \alpha_i a_i = c$

De igual manera para *b*,

$b = \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\} = \beta \frac{1}{c},\ \text{con } \beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\ , \beta_i b_i = c$

De modo que $a, b \in A$ son transformados en otros agregados que poseen solamente el elemento $\frac{1}{c}$.

Por lo tanto, si las transformaciones de a y b tienen la misma cantidad de elementos $\frac{1}{c}$ es decir $\alpha = \beta$, entonces a y b son iguales.

La representación de los elementos de A, es única debido a la unicidad del mínimo común múltiplo.

Utilizando el criterio de comparación de Weierstrass se puede definir la siguiente relación de equivalencia entre los elementos de A.

Sea ~ la siguiente relación definida en A

$\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} \sim \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}$ si y solo si existen $p, q, c, d \in \mathbb{Z}$ tales que $p\frac{1}{c} = q\frac{1}{d}$, con $c = mcm\,(a_1, a_2, \cdots, a_m)$, $d = mcm\,(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $p = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, $\alpha_i a_i = c$, $q = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$, $\beta_i b_i = d$

PROPOSICIÓN 4

La relación ~ es una relación de equivalencia

Demostración

Sean $a, b, d \in A$ tales que $a = \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\}, b = \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\}$ y

$d = \left\{\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \cdots, \frac{1}{d_j}\right\}$

i. ~ es reflexiva es A

Demostración:

Para todo $a \in A$, $a \sim a$ se deprende del hecho de $k\frac{1}{e} = k\frac{1}{e}$ con $k, e \in \mathbb{Z}$, donde

$e = mcm(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ y $k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, $\alpha_i a_i = e$

ii. ~ es simétrica en A: $\forall a, b \in A, a \sim b \Rightarrow b \sim a$

Demostración:

Supongamos que $\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} \sim \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}$ entonces existen k, h, c, $e \in \mathbb{Z}$, tales

que $k\frac{1}{c} = h\frac{1}{e}$, con $c = mcm(a_1, a_2, \cdots, a_m)$, $e = mcm(b_1, b_2, \cdots, b_n)$,

$k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, $\alpha_i a_i = c$, $h = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$, $\beta_i b_i = e$

Por la simetría de la igualdad se tiene que $h\frac{1}{e} = k\frac{1}{c}$, entonces $\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\} \sim \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\}$

Por lo tanto $a \sim b$

iii. ~ es transitiva en A: $\forall\, a, b, c \in A, a \sim b$ y $b \sim d \Rightarrow a \sim c$

Demostración:

Supongamos que $\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} \sim \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}$ y $\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\} \sim \left\{\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \cdots, \frac{1}{d_j}\right\}$

luego existen $k, h, g, c, e, f \in \mathbb{Z}$ tales que $k\frac{1}{c} = h\frac{1}{e}$ y $h\frac{1}{e} = g\frac{1}{f}$ donde

$c = mcm(a_1, a_2, \cdots, a_m)$, $e = mcm(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, y $f = mcm\left(d_1, d_2, \cdots, d_j\right)$

$k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, $\alpha_i a_i = c$, $h = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$, $\beta_i b_i = e$ y $g = \sum_{i=1}^{j} \delta_i$, $\delta_i d_i = f$

luego $k\frac{1}{c} = g\frac{1}{f}$, entonces $\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} \sim \left\{\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \cdots, \frac{1}{d_j}\right\}$

Por lo tanto $a \sim d$

De i, i i y i i i. Se tiene que ~ es una relación de equivalencia

Definición 3

Se dice que una relación de equivalencia ~ sobre un conjunto A es compatible con la operación $*$ definida en A, si se tiene que para *a, a', b, b'* cualesquiera de A,

$$a \sim a' \;\wedge\; b \sim b' \Rightarrow (a * b) \sim (a' * b')$$

Proposición 5

Sea $*$ una operación conmutativa definida en un conjunto A; tal que una relación de equivalencia ~ en A es compatible con $*$ si y solo si

$$(\forall\, x, y, z \in A)\left(x \sim y \implies (x * z) \sim (y * z)\right)$$

Proposición 6

La relación ~ definida sobre el conjunto A es compatible con la suma definida en A.

Demostración:

Puesto que la suma es conmutativa basta demostrar la siguiente implicación

$$a \sim b \implies a \oplus d \sim b \oplus d$$

Sean $a = \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\}$, $b = \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}$ y $d = \left\{\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \cdots, \frac{1}{d_j}\right\}$

Demostremos que

$$\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} \oplus \left\{\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \cdots, \frac{1}{d_j}\right\} \sim \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\} \oplus \left\{\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \cdots, \frac{1}{d_j}\right\}$$

es decir, $s\frac{1}{x} = g\frac{1}{y}$

donde $x = mcm\left(a_1, a_2, \cdots, a_m, d_1, d_2, \cdots, d_j\right)$, $y = mcm\left(b_1, b_2, \cdots, b_n, d_1, d_2, \cdots, d_j\right)$

Demostración

Supongamos que $\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} \sim \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}$ entonces existe $r, h, w, v \in \mathbb{Z}$ tales que

$r\frac{1}{h} = w\frac{1}{v}$ donde $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$, $r_i a_i = h$, $h = mcm(a_1, a_2, \cdots, a_m)$,

y $w = \sum_{i=1}^{n} w_i$, $w_i b_i = v$, $v = \mathrm{mcm}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ y sea $d = \left\{\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \cdots, \frac{1}{d_j}\right\}$ un elemento de

A tal que $d = t\frac{1}{p}$, $t = \sum_{i=1}^{j} t_i$, $t_i d_i = p$ y $p = mcm\left(d_1, d_2, \cdots, d_j\right)$.

Sean $x = mcm(h, p)$, existe $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $x = k_1 h$ y $x = k_2 p$, donde

$k_1h = k_2p$, utilizando la transformación 2 dada por Weierstrass en donde h la

reemplazamos por $hk_2\frac{1}{k_2}$, se obtiene $\frac{k_1h}{k_2} = p$ y $y = mcm(v,p)$, existe $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ talque

$y = t_1v$ y $y = t_2p$ donde $t_1v = t_2p$, y transformando se obtiene $\frac{t_1v}{t_2} = p$ luego $\frac{k_1h}{k_2} = \frac{t_1v}{t_2}$

Multiplicando la igualdad por $\frac{t_2k_2}{t_1vk_1h}$ se tiene que $k_2\frac{1}{k_1h} = t_1\frac{1}{t_1v}$ donde $k_2\frac{1}{x} = t_2\frac{1}{y}$,

Sea $s = k_2$ y $g = t_2$ luego se tiene que

$s\frac{1}{x} = g\frac{1}{y}$; $s = \sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{i=1}^{j} t_i$, $r_1a_i = t_id_i = x$, $x = mcm(h,p)$ y

$g = \sum_{i=1}^{n} w_i + \sum_{i=1}^{j} t_i$, $w_ib_i = t_id_i = y$, $y = mcm(v,p)$

Y de aquí se tiene la equivalencia que se necesitaba.

Proposición 7

La relación ~ definida sobre el conjunto A es compatible con el producto definido en A.

Definición 4

Se define las clases de equivalencia de la siguiente manera

$$\left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\}\right] = \left\{\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\} \in A / \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} \sim \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}\right\}$$

$$0 = [\{\ \ \}] = \left\{\frac{1}{a_i}, \frac{1}{-a_i}\right\}$$

$$1 = \left[\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right\}\right] = \left\{\left(\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_m}\right\} \in A / b_1 = b_2 = \cdots = b_m = m\right)\right\}$$

En adelante denotaremos 1= [1] y 0 = [0] = [{ }]

Definición 5

Notaremos por Q al conjunto cociente A / ~

$$A/\sim = \left\{y \in \wp(A) / \exists \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\} \in A, y = \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_m}\right\}\right]\right\}$$

A los elementos de este conjunto cociente los llamaremos números racionales.

$$\left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_m}\right\}\right] = \alpha \frac{1}{\beta}, \text{ con } \alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i, \ \alpha_i \ a_i = \beta \ \text{ y } \ \beta = mcm(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

y lo notaremos en adelante como $\frac{\alpha}{\beta}$.

Por la compatibilidad de la relación ~ definida en A con las operaciones suma y producto es correcto definir las siguientes operaciones:

Sean $\frac{\alpha}{\beta} = \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_m}\right\}\right]$ y $\frac{\gamma}{\delta} = \left[\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}\right]$, con $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, $\alpha_i a_i = \beta$,

$\beta = mcm(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ y $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$, $\gamma_i b_i = \delta$ y $\delta = mcm(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

tal que,

i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_m}\right\}\right] + \left[\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}\right] = \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_m}\right\} \oplus \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}\right]$

ii) $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_m}\right\}\right] \times \left[\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}\right] = \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_m}\right\} \otimes \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\}\right]$

Proposición 8

Las operaciones $+$ y $\cdot$ (entre clases) definidas en $\mathbb{Q}$ gozan de las siguientes propiedades:

a) Las dos son asociativas y conmutativas

b) 0 es el módulo de la +

c) 1 es el módulo del $\cdot$

d) $\frac{n}{-m}$ es el inverso aditivo de $\frac{n}{m}$

e) $\cdot$ es distributivo con respecto a la +

f) Todo racional diferente del módulo de la + posee inverso multiplicativo.

Demostración

La demostración de a es inmediata por la proposición 1 y 2 inicialmente demostradas, teniendo en cuenta que aquí se trabajan con clases de equivalencias.

b) Sean $0 = [\{\quad\}]$ y $\frac{\alpha}{\beta} = \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_m}\right\}\right]$, donde $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, $\alpha_i a_i = \beta$,

$\beta = mcm(a_1, a_2, \dots, a_m)$

Veamos que el cero (0) así definido es el módulo de la suma.

$$\frac{\alpha}{\beta}+0=\left[\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\dots,\frac{1}{a_m}\right\}\right]+[\{\ \ \}]$$

$$=\left[\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\dots,\frac{1}{a_m}\right\}\oplus\{\ \ \}\right]$$

$$=\left[\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\dots,\frac{1}{a_m}\right\}\right]$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}$$

Por lo tanto, $0=[\{\ \ \}]$ es el módulo de la suma.

c) Sean

$1=\left[\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right\}\right]$ y $\frac{\alpha}{\beta}=\left[\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\dots,\frac{1}{a_m}\right\}\right]$ donde $\alpha=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$, $\alpha_i a_i=\beta$,

$\beta=mcm(a_1,a_2,\dots,a_m)$

Veamos que el uno así definido es el módulo de la multiplicación.

$$\frac{\alpha}{\beta}\times 1=\left[\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\dots,\frac{1}{a_m}\right\}\right]\times\left[\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right\}\right]$$

$$=\left[\left\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\dots,\frac{1}{a_m}\right\}\otimes\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right\}\right]$$

$$=\left[\left\{\underbrace{\frac{1}{a_1n},\frac{1}{a_1n},\dots,\frac{1}{a_1n}}_{n-veces},\underbrace{\frac{1}{a_2n},\frac{1}{a_2n},\dots,\frac{1}{a_2n}}_{n-veces},\dots,\underbrace{\frac{1}{a_mn},\frac{1}{a_mn},\dots,\frac{1}{a_mn}}_{n-veces}\right\}\right]$$

Sea $\theta=mcm(na_1,na_2,\dots,na_m)$, entonces cada elemento $\frac{1}{na_m}$ le corresponde $\alpha_m\frac{1}{\theta}$,

luego

$$\left[\left\{\underbrace{\frac{1}{\theta},\frac{1}{\theta},\dots,\frac{1}{\theta}}_{n\alpha_1-veces},\underbrace{\frac{1}{\theta},\frac{1}{\theta},\dots,\frac{1}{\theta}}_{n\alpha_2-veces},\dots,\underbrace{\frac{1}{\theta},\frac{1}{\theta},\dots,\frac{1}{\theta}}_{n\alpha_m-veces}\right\}\right]=n\alpha\frac{1}{\theta},\ \text{con}$$

$n\alpha = n\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, $\beta = mcm(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ entonces $n\beta = (na_1, na_2, \ldots, na_m)$

por propiedad del mínimo común múltiplo, luego $\theta = n\beta$.

Entonces $n\beta = mcm(na_1, na_2, \ldots, na_m)$ por propiedad del mínimo común múltiplo,

Por lo tanto, $n\alpha\frac{1}{\theta} = n\alpha\frac{1}{n\beta}$ y por transformación $n\alpha\frac{1}{n\beta} = \alpha\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

d) Sean $\frac{\alpha}{\beta} = \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_m}\right\}\right]$ y $\frac{\alpha}{-\beta} = \left[\left\{\frac{1}{-a_1}, \frac{1}{-a_2}, \ldots, \frac{1}{-a_m}\right\}\right]$,

$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, $\alpha_i a_i = \beta$, $\beta = mcm(a_1, a_2, \ldots, a_m)$

Se demostrará que $\frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{\alpha}{-\beta}\right) = 0$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{\alpha}{-\beta}\right) = \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_m}\right\}\right] + \left[\left\{\frac{1}{-a_1}, \frac{1}{-a_2}, \ldots, \frac{1}{-a_m}\right\}\right]$$

$$= \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_m}\right\} \oplus \left\{\frac{1}{-a_1}, \frac{1}{-a_2}, \ldots, \frac{1}{-a_m}\right\}\right]$$

$$= \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_m}, \frac{1}{-a_1}, \frac{1}{-a_2}, \ldots, \frac{1}{-a_m}\right\}\right]$$

$$= \left[\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{-a_1}\right\} \oplus \left\{\frac{1}{a_2}, \frac{1}{-a_2}\right\} \oplus \left\{\frac{1}{a_3}, \frac{1}{-a_3}\right\} \oplus \cdots \oplus \left\{\frac{1}{a_m}, \frac{1}{-a_m}\right\}\right] \quad (*)$$

Por propiedad asociativa de la suma, luego para cada pareja $\left\{\frac{1}{a_i}, \frac{1}{-a_i}\right\}$,

$i = 1,2, \cdots, m$, como $a_i = mcm(a_i, -a_i)$ entonces $a_i = \alpha_i a_i$ y $a_i = -\alpha_i(-a_i)$ con

$\alpha_i = 1$, $es\ decir$ $\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i + (-\alpha_i)\right) = 0$

por lo tanto, $(*)$ es equivalente a

$= [\{\ \ \}\oplus\{\ \ \}\oplus\{\ \ \}\oplus\cdots\oplus\{\ \ \}]$

$= [\{\ \ \}]$

e) La verificación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, es decir que $\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\theta}{\varepsilon}\right)=\frac{\alpha}{\beta}\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\alpha}{\beta}\frac{\theta}{\varepsilon}$, es solo rutina por lo tanto no realizaremos su demostración.

f) Sean $\frac{\alpha}{\beta}=\left[\left\{\frac{1}{\beta},\frac{1}{\beta},\cdots,\frac{1}{\beta}\right\}\right],\ \alpha=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i,\ \alpha_i a_i=\beta,\ \beta=mcm\ (a_{1,}a_{2,}\cdots a_m)$ y

$\frac{\beta}{\alpha}=\left[\left\{\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha},\cdots,\frac{1}{\alpha}\right\}\right],\beta=\sum_{i=1}^{n}\beta_i,\ \beta_i b_i=\alpha,\ \ \alpha=mcm(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

Probemos que $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=\left[\left\{\frac{1}{\beta},\frac{1}{\beta},\cdots,\frac{1}{\beta}\right\}\right]\times\left[\left\{\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha},\cdots,\frac{1}{\alpha}\right\}\right]$$

$$=\left[\left\{\frac{1}{\beta},\frac{1}{\beta},\cdots,\frac{1}{\beta}\right\}\otimes\left\{\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha},\cdots,\frac{1}{\alpha}\right\}\right]$$

El producto se realiza con la expansión de sus elementos, en donde los denominadores resultantes serán de la forma $\beta\cdot\alpha$. A este $\beta\cdot\alpha$ lo designaremos por

$\delta = mcm(\alpha, \beta)$ y los numeradores serán los $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_i = \delta$, porque $\delta_i a_i b_i = \delta$, de ahí que, $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\delta} = 1$.

De la proposición 8 numeral f, es posible definir la división en $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \emptyset$, como operación inversa de la multiplicación, de la siguiente manera: $\frac{\alpha}{\beta} \div \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}$.

Ahora nos resta introducir la relación de orden entre racionales, para ello utilizamos el criterio de comparación de Weierstrass, en el cual para todo par de elementos de *a* los reduce a un mínimo común múltiplo y compara el número de veces que cada número posee el elemento común, es decir, sean

$a, b \in A,\ a = \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_m}\right\} = \alpha \frac{1}{c},\ \alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i,\ \alpha_i a_i = c,\ c = mcm\left(a_{1,} a_{2,} \cdots a_m\right)$

y $b = \left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right\} = \beta \frac{1}{c}, \beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i,\ \ \beta_i b_i = c,\ c = mcm(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, donde a y b poseen solamente el elemento $\frac{1}{c}$, y conforme a lo que plantea Weierstrass en su segunda conferencia, se tiene que $a < b$ o $b < a$ respectivamente.

El orden en $\mathbb{Q}$ se define:

Sean $a = \alpha\frac{1}{c}$ y $b = \beta\frac{1}{c}$, con α, β y c como se definieron antes, entonces $a <_{\mathbb{Q}} b$ si $\alpha < \beta$. ($<_{\mathbb{Q}}$ orden en los racionales y $<$ el orden usual en los enteros).

El orden en los números racionales se reduce a comparar el número de veces que cada uno de los números comparados posee el elemento $\frac{1}{c}$, es decir este número de veces cumplen con las propiedades del orden usual en los números enteros.

De igual forma $a \leq b$ si y solo si $\alpha \leq \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Por la ley de la tricotomía se cumple que $\alpha<\beta$ o $\beta<\alpha$ o $\alpha=\beta$, entonces $a < b$ o $b < a$ o $a = b$, luego, el orden en $\mathbb{Q}$ así definido es un orden total.

Ahora se tiene que $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, \leq \rangle$ es un cuerpo totalmente ordenado.

CAPITULO 3

NÚMEROS COMPUESTOS DE UNA INFINIDAD DE ELEMENTOS

Este capítulo se centra en la presentación de las magnitudes con un número infinito de elementos. Donde Weierstrass introduce los elementos necesarios para la definición de las magnitudes con una cantidad infinita de elementos y se han explicitado algunas nociones y demostraciones para facilitar su comprensión.

Introduce las *partes constituyentes* de un número. Estas son agregados con una cantidad finita de elementos, que al ser transformados cada uno de sus elementos formará un subconjunto que va a estar contenido en la magnitud inicial dada. Es con estas partes constituyentes que Weierstrass realiza toda su teoría acerca de los números irracionales. Luego presenta un ejemplo donde utiliza estas partes constituyentes para mostrar la igualdad entre dos magnitudes con infinita cantidad de elementos.

Posteriormente, utilizando las partes constituyentes, define un nuevo criterio de comparación para las magnitudes compuestas de una cantidad infinita de elementos. Criterio que le servirá también para comparar las magnitudes compuestas por una cantidad finita de elementos (racionales). Mediante este criterio de comparación define un orden entre magnitudes y algunas de sus propiedades.

Utilizando el orden establecido, Weierstrass define números finitos y números infinitamente grandes. De esta manera excluirá, de su nuevo dominio numérico, los números infinitamente grandes. Garantizando que este nuevo dominio cumpla la propiedad arquimediana. Por último define la suma y el producto entre esos nuevos números.

Llama la atención que en ninguna parte del texto se utilicen los términos de número real, racional e irracional; teniendo en cuenta que matemáticos contemporáneos a Weierstrass, como Cantor y Dedekind, si lo hacen. Weierstrass hace referencia a los agregados de unidades (números enteros), magnitudes con una cantidad finita de elementos (números racionales) y magnitudes con cantidad infinita de elementos. En este último conjunto están contenidos, además de los números irracionales, algunos racionales y las magnitudes con infinitos agregados pero de valor infinito. De esta manera Weierstrass define las magnitudes numéricas como conjuntos de partes exactas de la unidad:

> A partir de la unidad y de sus partes exactas se puede formar no solamente números complejos con una cantidad finita de elementos, sino también números complejos con innumerables[19] elementos.
> [Bon 02 ; p. 41]

Weierstrass aclara que para tener una representación exacta de los números compuestos de una infinidad de elementos, es necesario que sus elementos sean tomados en el dominio de los números existentes: unidades principales y partes exactas de la unidad.

---

[19] Se refiere a infinitos elementos.

Las nuevas magnitudes, es decir las compuestas por una infinidad de elementos, son magnitudes que pueden representar además de los números irracionales, algunos racionales así como magnitudes con infinitos agregados de valor infinito. Los racionales a los que se hace referencia son los números que se conocen como decimales infinitos periódicos y en cuanto a las magnitudes con infinitos agregados pero de valor infinito, Weierstrass los descarta puesto que estas magnitudes no cumplen ciertas condiciones planteadas por él.

Luego, su conjunto numérico queda constituido por las magnitudes formadas por un número finito de agregados y las magnitudes (de valor finito) formadas por un número infinito de agregados. Dentro de estos conjuntos se pueden ubicar los números racionales y los números irracionales.

Los elementos de este conjunto según Weierstrass ya no son comparables mediante las transformaciones indicadas en el capitulo anterior, ya que estos elementos no poseen un mínimo común múltiplo, dado que son conjuntos infinitos. Por esta razón introduce el concepto de *parte constituyente*, en términos del cual definirá un nuevo criterio de comparación. Este criterio le permitirá establecer un orden, tanto para los números formados por una cantidad finita de elementos como para los formados por una cantidad infinita:

> Se dice que a' es una parte constituyente de a cuando se puede transformar a' en a'' de modo que todos los elementos de a'' aparecen tantas veces en a como en a'' porque a contiene otros elementos o contiene los mismos elementos que a'' en un número más grande. [Bon02; p41]

De acuerdo con lo anterior, una parte constituyente es un conjunto que al transformarlo resulta un subconjunto del número dado. Por ejemplo, sea el número $a \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \ldots$, y sea $a' = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$ una parte constituyente de a, al realizarle la transformación resulta $a'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ en donde se ve claramente que a'' es un subconjunto de a.

Más adelante Weierstrass aclara que las partes constituyentes siempre están formadas por una cantidad finita de elementos:

> Se dirá que *a'* es una parte constituyente de un número *a* formado por una infinidad de elementos solamente si *a'* no contiene más que un número finito de elementos de *a*.
> [Bon02; p42]

De lo anterior se tiene que la cantidad de partes constituyentes de un número formado por una cantidad infinita de elementos, es infinita.

Utilizando las partes constituyentes, Weierstrass define la igualdad de dos magnitudes numéricas para el nuevo dominio conformado por los números enteros usuales, los formados por una cantidad finita de elementos y los formados por una cantidad infinita de elementos.

> "Dos magnitudes numéricas *a* y *b* son iguales si se pueden transformar cada parte constituyente de *a* en una parte constituyente de *b*, y recíprocamente cada parte constituyente de *b* en una parte constituyente de *a*". [Bon02; p. 42]

Weierstrass utiliza la definición de parte constituyente para encontrar las sumas de sucesiones infinitas por medio del siguiente ejemplo y posteriormente realiza la comparación entre las dos sucesiones infinitas encontradas.

Toma la sucesión finita $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ y transforma cada uno de sus elementos de la siguiente manera

$\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 2}=1$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}$

...

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}$

luego la sucesión transformada es

$\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5}+\ \ldots+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$

de donde

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5}+\ \ldots+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

Compara los términos de la igualdad obteniendo

$$1=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1} \quad (1)$$

A partir de (1) define el número a de la siguiente manera $a=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$ este número a es equivalente a la sucesión $a=\left\{\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},\frac{1}{3\cdot 4},\ldots\right\}$ como se trabajaba en el capitulo anterior.

Veamos como Weierstrass inicialmente prueba que toda parte constituyente de a es también una parte constituyente de 1 y recíprocamente.

Supone que c es una parte constituyente de a y además supone que $\frac{1}{(r+1)}$ es el elemento mas elevado (el de mayor denominador) de a contenido en c, entonces por ser c parte constituyente de a se tiene que

$$c\leq\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ \ldots+\frac{1}{r(r+1)}$$

Luego por (1) $c<1$.

Por lo tanto cada parte constituyente c de a es por consiguiente también parte constituyente de 1.

Supone ahora que c' esta contenida en 1, luego $c' < 1$, supone que existe un c'' tal que (c', c’’) =1, entendiendo que (c', c’’) es lo mismo que (c'+c"), entonces también por (1)

$$(c', c'') = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ \dots + \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{r+1}.$$

Ahora se elige un r lo suficientemente grande para que se tenga $c'' > \frac{1}{r+1}$, entonces se tiene que $c' < \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ \dots + \frac{1}{r(r+1)}$.

Luego c' por transitividad está también contenida en a, entonces a es por consiguiente igual a 1, luego $1 \equiv \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ \dots$

Ahora Weierstrass define un número b infinito y prueba que cada parte constituyente de b lo es de a y recíprocamente, concluyendo que $a = b$.

Partiendo del término n-ésimo de la sucesión finita dada inicialmente se tienen que

$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n(n+1)^2}$

$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n(n+1)^3}$

...

$\frac{1}{n(n+1)^{m-1}} = \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{n(n+1)^m}$

Compara los términos de la igualdad obteniendo

$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{n(n+1)^m}$

Para *n* = *1*,

$1 \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m}$

en donde define un número $b \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ y muestra que cada número que es parte constituyente de *b* es parte constituyente de *a*.

Si *c* es una parte constituyente de *b* entonces

$c \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^m}$ (2)

Se tiene que

$$1 \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{r+1}$$

Elige $r \leq m$ tal que $\frac{1}{r+1} > \frac{1}{2^m}$ y por (2) resulta que

$$c \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{r(r+1)}$$

luego $c \leq \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{r(r+1)}$.

Recíprocamente se puede mostrar que cada parte constituyente de *a* es también una parte constituyente de *b*, de manera que $a = b$.

Weierstrass define el orden entre dos elementos *a* y *b* es decir, $b > a$, si existe un número *c* que es una cierta parte constituyente de *b* mas no de *a*. Supone entonces un número *c'* que está contenido en uno de los dos elementos pero no en los dos, entonces ve necesario demostrar que *c'* está únicamente en *b* de la siguiente manera:

1. Si $c' > c$. Entonces *c'* no puede estar contenida en *a*, ya que *c* no esta contenida en *a*; luego *c'* debe estar contenida en *b*.

2. Si $c' < c$. Entonces *c'* está contenida en *b* porque *c* esta contenida en *b*. Si *c'* esta contenida en *a* entonces contradice la hipótesis según la cual *c'* debe estar contenida solamente en uno de los números *a* y *b*. [Bon02 p.44].

De igual forma $a \leq b$ si y solo si el conjunto de partes constituyentes de a está contenido o es igual al conjunto de partes constituyentes de b.

Luego, el orden entre elementos conformados por una cantidad infinita de elementos así definido es de orden total.

Weierstrass solo llama la atención sobre las siguientes propiedades para el orden.

1. Si $a = b$ entonces $b = a$
2. Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$
3. Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$

Él no demuestra estas propiedades, pero se pueden demostrar utilizando las propiedades de la relación de contenencia entre conjuntos, teniendo en cuenta las definiciones de igualdad y de orden.

La ley 1, se muestra directamente por la reciprocidad entre partes constituyentes según la definición de igualdad entre a y b.

La segunda ley, se da por la transitividad de la relación de contenencia, ya que toda parte constituyente de a es parte constituyente de b y toda parte constituyentes de b es parte constituyente de c, de ahí que, toda parte constituyente de a es parte constituyente de c. Es decir, sea c_a el conjunto de partes de constituyentes de a, c_b el conjunto de partes constituyentes de *b* y c_c el conjunto de partes constituyentes de *c*. Es decir, para todo $x \in c_a$ se tiene que $x \in c_b$ y para todo $x \in c_b$ se tiene que $x \in c_c$, luego para todo $x \in c_a$ se tiene que $x \in c_c$, luego $c_a \subseteq c_c$. De manera similar se demuestra que $c_c \subseteq c_a$, para así poder concluir que $c_a = c_c$.

Y la última ley, si $a > b$ entonces toda parte constituyente de *b* está contenida en *a* y además, si $b > c$ entonces toda parte constituyente de *c* está contenida en *b*, de ahí que toda parte constituyente de *c* está contenida en *a*. Es decir, si $c_a \subset c_b$ y $c_b \subset c_c$ entonces $c_a \subset c_c$. Por propiedad de inclusión entre conjuntos se tienen que para todo $x \in c_a$ entonces $x \in c_b$ y para todo $x \in c_b$ entonces $x \in c_c$, luego para todo $x \in c_a$ entonces $x \in c_c$. Pero su recíproco es falso.

Weierstrass, llama la atención sobre el hecho que cada vez que se llega a una operación en donde su resultado no esta definido, se ve la necesidad de extender el dominio numérico. Un ejemplo de ello es la operación raíz cuadrada, que consiste en encontrar la raíz resultante tal que, al elevarla al cuadrado se obtiene el radicando de dicha raíz, este radicando puede ser un número entero o un número racional, dado que esta operación solo está definida en este dominio. Pero cuando se aplica este mismo algoritmo a raíces en donde su solución *no esta al alcance*[20] entonces se obtiene una fracción decimal que sigue indefinidamente. Es el caso de $\sqrt{2}$, mediante el algoritmo mencionado se busca su posible solución, es decir un número determinado dentro del rango existente; concluyendo que no existe ningún número racional que multiplicado por él mismo de 2, pero se puede establecer una sucesión de números racionales tales que cada número siguiente se aproxime a esta propiedad mas que un número precedente, y de igual forma se procede para las raíces de una ecuación que presentan este tipo de situaciones.

3.1 NÚMEROS FINITOS E INFINITAMENTE GRANDES

Weierstrass define que una magnitud numérica *a* es de valor finito, si existen magnitudes *c* que comprenden una cantidad finita de elementos y que son mayores que *a*. Interpretando lo anterior, los agregados con una cantidad infinita de elementos son de valor finito si son menores que algún racional -agregado con una cantidad finita de elementos-, a esta condición se la conoce como *Criterio de Finitud*. Weierstrass define las magnitudes infinitamente grandes de la siguiente manera: *a* es una magnitud infinitamente grande si todo número *c* compuesto de una cantidad finita de elementos (racional) es parte constituyente de *a;* es decir que todo número racional es menor que los números infinitamente grandes. Luego estas magnitudes presentan dificultad en el cumplimiento de su criterio de finitud.

---

[20] Nos referimos a que no está definido dentro del dominio.

Weierstrass realiza esta distinción de magnitudes dentro de su nuevo dominio con el fin de no incluir los números infinitamente grandes, para así garantizar el cumplimiento de la propiedad arquimediana[21].

> Es suficiente con encontrar un múltiplo de la unidad que sea mayor que a. Porque si se coloca la unidad en lugar de cada elemento de un número c, entonces el número que resulta es mayor que c, luego mayor que a, ya que $c > a$. [Bon02; p.44]

Weierstrass no considera la existencia de las cantidades infinitamente grandes por que, se le dificultaría la comparación de las mismas dado que la comparación solo se realiza con cantidades finitas:

> "Si por el contrario todo número c compuesto de una cantidad finita de elementos es una parte constituyente de a, entonces a es infinitamente grande". ¿Será posible comparar dos cantidades a y b infinitamente grandes? Según la definición manejada para igualdad cada número que contiene elementos en cantidad finita es una parte constituyente de a y también de b entonces se tendría que $a = b$, y no se darían los casos en los que $a > b$ o $b > a$. Pero con los números infinitamente grandes esto no se puede calcular por tratarse de magnitudes infinitas. Luego la comparación se realiza únicamente con sucesiones de números finitos. [Bon02; p.44].

Weierstrass define la suma y el producto de la siguiente manera:

---

[21] Si x > 0 y z es cualquier numero, entonces existe un entero positivo n tal que nx > z.

Adición

La adición de números compuestos de una cantidad infinita de elementos cumple con las mismas características de la adición para los números enteros, de igual manera cumple con sus propiedades. (Esto es cierto, solamente para una cantidad finita de términos).

Multiplicación

"Para multiplicar un número a por otro número b se debe multiplicar cada elemento de a por cada elemento de b, y realizar las sumas de sus respectivos productos".
[Bon02; p.45]

La suma continúa siendo la misma como se ha venido desarrollando a lo largo del documento, es decir, de igual forma como se desarrollaba inicialmente con los números enteros y posteriormente con los racionales. Muestra que el producto así definido tiene un valor univoco bien determinado:

Supongamos que a posee los elementos $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ y b los elementos $\alpha', \beta', \gamma' \cdots$.
Sea $\frac{1}{r}$ un elemento cualquiera del producto ab, veamos cuantas veces aparece en dicho producto. Entonces si existe $\frac{1}{r_1}$ un elemento de a, $\frac{1}{r_2}$ un elemento de b tales que $\frac{1}{r_1} \times \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$. Los elementos r_1 y r_2 aparecen una cantidad finita de veces en a y b respectivamente, y r puede descomponerse en una cantidad finita de veces en dos factores r_1 y r_2 de manera que así se puede exactamente determinar cuantas veces cada elemento $\frac{1}{r}$ aparece en ab. Luego el producto ab tiene un valor determinado. [Bon02; p45]

Además demuestra que este producto tiene un valor finito si cada uno de sus factores tiene valor finito:

ab es finito si podemos encontrar un número compuesto de una cantidad finita de elementos que son mayores que ab.

Supongamos que existe un número a' que tiene una cantidad finita de elementos y que es mayor que cada número compuesto de elementos de a, de forma análoga existe un número b' para b. Si extraemos del producto ab una cantidad cualquiera de términos de tal manera que ningún elemento de a es superior a α_r y ninguno de b superior a α'_s (suponemos que los elementos de a y de b están ordenados de la siguiente manera, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots$ y $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_s, \dots$ respectivamente). Entonces esa parte constituyente c extraída de ab es menor o igual que $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r)(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_s)$ y por lo tanto $a'b' > (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r)(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_s)$ y también $a'b' > c$. $a'b'$ es así un producto mayor que ab. ab' es sin embargo un número compuesto de una cantidad finita de elementos, así ab es finito. [Bon02; p45]

Así mismo presenta, que para números a, b, c que contienen una cantidad infinita de elementos se cumplen las siguientes propiedades:

1. $ab = ba$
2. $abc = acb$
3. $a(b + c) = ab + ac$

Por ultimo, Weierstrass prueba que el orden con esta operación se continúa conservando.

> "si se tiene que $b^{'} > b$ entonces también se tiene $ab^{'} > ab$". De $b^{'} > b$ se sigue que existe un número c compuesto de una cantidad finita de elementos que están contenidos en $b^{'}$ pero no en b, $b^{'} = (c, c^{'})$. sea ahora $c^{'} = (c^{''}, c^{'''})$, donde, $c^{''}$ contiene una nueva cantidad finita de elementos, entonces se tiene $b^{'} > c + c^{''}$ y $c + c^{''} > b$, y por consiguiente $ab^{'} > a(c + c^{'})$, $a(c + c^{''}) > ab$, así se deduce que $ab^{'} > ab$. [Bon02; p46]

Al Final del texto aparece una nota de pie de página, que comenta lo siguiente:

> Pierre Dugac señala que Adolfo Hurwitz escribe al margen de esta demostración [una nota que dice] "no rigurosa". El paso de "$b^{'} > c + c^{''}$ y $c + c^{''} > b$," al "$ab^{'} > a(c + c^{'})$, $a(c + c^{''}) > ab$,", en donde b' y a tienen una infinidad de elementos y c y c'' tienen un número finito de elemento, en efecto no es justificable. [Bon02; p46]

De acuerdo con Dugac, Weierstrass está operado magnitudes compuestas de un número finito de elementos con magnitudes compuestas por un número infinito de elementos, sin ninguna justificación. Lo que presenta un problema de rigor.

De acuerdo con [Bon02], hasta este punto llega la construcción de los números reales hecha por Weierstrass. Notamos que en el texto no se evidencia comentario alguno acerca de la propiedad de completez, sin embargo en [Fer98 p.160] se hace referencia al teorema de Bolzano-Weierstrass, que asegura que *todo conjunto infinito y acotado de números reales tiene al menos un punto de acumulación* y basa su demostración en el método de dividir sucesivamente el conjunto en partes que "iban buscando" el punto en cuestión

–punto de acumulación-. Este teorema es equivalente a los principios de continuidad de Cantor y Dedekind que fueron mencionados al final del primer capítulo.

CAPÍTULO 4

COMENTARIOS FINALES

A manera de conclusión estableceremos algunas relaciones entre las construcciones de los números reales hechas por Cantor y Dedekind con la de Weierstrass. Antes de ello, recordemos que Cantor y Dedekind definen los números irracionales a partir de los racionales, mediante la utilización de sucesiones fundamentales y cortaduras, respectivamente. De ahí podemos identificar, que:

Cantor y Dedekind fundamentan sus teorías en los números racionales, mientras que Weierstrass se basa en la de los números enteros y en la noción de partes exactas de la unidad.

Weierstrass y Cantor usan series y sucesiones para la construcción de los números irracionales, se proponen definir las magnitudes numéricas en sentido amplio, reconociendo las magnitudes como objetos abstractos conformados por elementos, y por ende tienen carácter conjuntista. Weierstrass establece la condición de que las sumas de finitos elementos de una magnitud -compuesta por una cantidad finita o infinita de elementos- sean finitas, luego los reales aparecen en esta teoría como suma de series infinitas convergentes, y mientras que en la teoría de Cantor, a toda sucesión infinita de números racionales que satisface la condición de Cauchy se le asocia un número real. En ambos casos, a cada sucesión que satisface su respectiva condición se le asocia un número real, y sobre esa base es posible definir de manera rigurosa la igualdad, el orden y las operaciones en este conjunto. En cambio Dedekind basa su teoría en la noción de conjunto y orden, observa que cada partición de la recta en dos conjuntos disyuntos de puntos, en donde cada punto del primer conjunto está a la izquierda de cada punto del segundo conjunto, en cualquier punto del subconjunto, *hay uno y solo* un punto que produce la partición, designando a este como número real.

Cantor y Dedekind establecen relaciones tanto en lo aritmético como en lo geométrico. En lo geométrico, necesitaban de un axioma para asegurar la continuidad del espacio, mientras que en aritmética se efectúa una construcción de manera tal que el constructo cumpla con la propiedad de completitud (en la versión de completitud propia de cada autor). Weierstrass, en su construcción no evidencia su principio de completitud, pero si lo hace en lecciones posteriores en donde el teorema de Bolzano- Weierstrass es su principal carta de presentación al respecto, como lo resume Ullrich de uno de sus cursos:

> Demuestra la existencia de supremo e ínfimo -que designa como limite superior e inferior respectivamente-, el teorema de Bolzano/Weierstrass para R y R^n, el teorema del valor medio para funciones continuas, y que una función continua en un intervalo acotado y cerrado es uniformemente continua en él y alcanza su máximo y mínimo; todo por medio de variaciones del método de bisección de intervalos de la conocida demostración del teorema de Bolzano/Weierstrass. (Ullrich 1989,156).[22]

Así, evidencia la existencia del supremo e ínfimo, confirmando así el cumplimiento de la propiedad del completez.

En cuanto al trabajo con cantidades infinitas, Weierstrass nota que la salida es operar con cantidades finitas ya que el trabajo con las infinitas resulta muy complicado.

[Fer98; p.148] comenta:

> El infinito tiene un papel esencial en la teoría, ya que las magnitudes numéricas irracionales son agregados infinitos, pero por otro lado se prohíbe toda operación no finita; en su lugar, se consideran sumas finitas, pero se emplea libremente el cuantificador universal. Por lo demás, hay al menos un punto objetable en su construcción considerada en conjunto: el paso de una unidad a sus “partes exactas”, un paso que Weierstrass no justifica, seguramente porque pese a todo se esta basando implícitamente en la idea intuitiva de magnitud divisible al infinito. Ahora bien, precisamente en el seno de una teoría que pretende controlar con toda precisión la aparición del infinito, esto resulta poco objetable.

[22] Citado por [Fer98, p 160]

Además, recurre al criterio de finitud para evitar la utilización de las cantidades infinitamente grandes, y así poder trabajar únicamente con lo que el denominó partes constituyentes. Recordemos que una parte constituyente de una magnitud numérica es otra magnitud numérica que al ser transformada resulta ser un subconjunto de la magnitud numérica dada.

BIBLIOGRAFÍA

[Ale85] ALEXANDROV, A. D. y otros (1973). La Matemática: su contenido, métodos y significado. Editorial Alianza. Madrid. Vol I y III.

[Apo86] APOSTOL, Tom M.(1986). Análisis Matemático. Editorial Reverté. A D Barcelona

[Arb98] ARBELAEZ, G. y otros (1998). Número y magnitud una perspectiva histórica. Instituto de educación y pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Universidad del Valle. Cali.

[Arb83] ARBOLEDA, Luis C. (1983). Historia y enseñanza de las matemáticas. Epistemología, historia y didáctica de las matemáticas No. 4. Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

[Bar75] BARBOLLA, G. R. M, y otros. (1975). Introducción al análisis real. Editorial Alambra. Madrid.

[Ber 03] BERGÉ, Analía y SESSA, Carmen. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una Investigación Didáctica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativas. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal México. Vol. 6

[Bon 02] BONIFACE, Jacqueline. (2002). Les Constructions des nombres reèks dans le mouvement d'arithmetization de analyse. Editorial Ellipses. París.

[Boy87] BOYER, Carl B. (1987). Historia de la matemática. Alianza Editorial s. a. Madrid.

[Can55] CANTOR, Georg. (1955). Contributions to the fuonding of the theory of transfinite numbers. Dover Publications, inc. New York.

[Cha99] CHAVES, A. Jorge y otros. (1999). Construcción histórica del uno y la unidad: perspectiva aritmética y geométrica. Universidad del Valle. Cali.

[Cou67] COURANT, Richard. ROBBINS, Herbert. (1967). ¿Qué es la matemática?. Aguilar, S. A. de Ediciones. Madrid.

[Des54] DESCARTES, R. (1954). The Geometry. Book I. SMITH, David Eugene y LATHAM, Marcia L., (Traduc.). Dover Pubications. New York.

[Del01] DE LA TORRE GÓMEZ, Andrés. (2001). Los conflictos cognitivos en la construcción del concepto de continuo. Revista Matemática Enseñanza Universitaria. Vol. IX, No. 1, 2.

[Fer98] FERREIRÓS, José. (1998). 1872: Construcciones de los Números Reales. Dedekind Richard: ¿Qué son y para qué sirven los números? Alianza Editorial. Madrid.

[Gra80] GRATTAN, Guinness. (1980) Traducido por Mariano Martínez P. Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630 – 1910 una introducción histórica. Alianza Editorial s. a. Madrid. 1984

[Kud81] KUDRIÁVTSEV,L. D. (1981). Curso de Análisis Matemático. traducido del ruso por V. Fernández. Editorial MIR. Moscú. vol. I.

[Luq04] LUQUE A, Carlos Julio, MORA M. Lyda Constanza, TORRES D. Johann Andrea.(2004). La construcción de los números reales positivos. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

[Mor92] MORRIS, Kline. (1992). Las matemáticas de 1800. El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial s. a. Madrid. Vol. I, II. y III.

[Muñ02] MUÑOZ, Q. José María. (2002). Introducción a la teoría de conjuntos. Universidad Nacional de Colombia. Departamento de Matemáticas. Bogotá.

[Phi81] PHILIP, J. Davis, REUBEN, Hersh. (1981) Experiencia matemática. Ministerio de Educación y Ciencia. Editorial Labor s. a.

[Rec05] RECALDE, Luis C. (2005). Lecciones de historia de las matemáticas. Departamento de Matemáticas. Universidad del Valle. Cali.

[Rec93] RECALDE, Luis C. (1993). La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico. Departamento de Matemáticas. Universidad del Valle. Cali.

[Rib87] RIBNIKOV, K. (1987). Historia de las matemáticas. Editorial MIR. Moscú.

[San98] SANCHEZ, Clara Helena. (1998). Construcción de los reales. Revista Matemática, enseñanza universitaria.

[Ver70] VERA, Francisco. Científicos Griegos, Tomo I. Aguilar. Madrid 1970.